Lista 3 - Uogólniony problem przydziału

1 Definicja

Uogólniony problem przypisania jest problemem optymalizacji kombinatorycznej. Na wejściu dane są prace $j \in J$ oraz maszyny $i \in M$. Każda praca ma ustalony czas przetwarzania p_{ij} na każdej z maszyn oraz koszt przetwarzania c_{ij}. Każda maszyna i może byc wykorzystywana maksymalnie przez T_i jednostek czasu. Celem jest takie przypisanie każdego z zadań do którejś z maszyn, aby zminimalizować koszt, bądź zmaksymalizować zysk, jednocześnie nie przekraczając dostępnego czasu.

2 Relaksacja

Problem może zostać zamodelowany, jako problem łączenia w grafie dwudzielnym. Stworzony zostaje graf pełny G, z połączeniami między zbiorem prac J oraz maszyn M. Każda krawędź ma przypisany koszt c_{ij}. Usunięte zostają wszystkie krawędzie, takie że $p_{ij} > T_i$, gdyż w tym przypadku nie istnieje optymalne rozwiązanie przypisujące prace j do maszyny i. Problem uogólnionego przypisania może zostać zredukowany do znalezienia podgrafu $F \subset$ G, takiego, że każda praca j, zostaje połączona krawędzią tylko z jedną maszyną i, czyli $degree_F(j) = 1$. Po usunięciu warunku całkowitoliczbowości problem można przestawić za pomocą poniższej relaksacji LP_{ga}. Przedstawiony zostanie problem w przypadku maksymalizacji.

funkcja celu:
maksymalizacja $\sum_{e=(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$

ograniczenia:
$\sum_{e\in\delta(j)} x_e = 1 \quad \forall j \in J$

$\sum_{e\in\delta(i)} p_e x_e \leqslant T_i \quad \forall i \in M$

$x_e \geqslant 0 \quad \forall e \in E$

3 Algorytm iteracyjny

Program liniowy LP_{ga} zostaje użyty w iteracyjnym algorytmie dla uogólnionego przypisania.
1) Inicjalizacja $E(F) \leftarrow \emptyset$
2) Dopóki $J \neq \emptyset$
  a) Znajdź optymalne rozwiazanie x dla LP_{ga} i usuń każdą krawędź, dla której $x_{ij} = 0$.
  b) Jeżeli istnieje zmienna $x_{ij} = 1$, to uaktualnij rozwiązanie $F \leftarrow F \cup \{ij\}$, $J \leftarrow J \backslash \{j\}, T_i \leftarrow T_i - p_{ij}$
  c) (relaksacja) Jeżeli istnieje maszyna i, dla której deg(i) = 1 lub deg(i) = 2 i $\sum_{j\in J} x_{ij} \geqslant 1$, to uaktualnij $M \leftarrow M\backslash\{i\}$.
3) Zwróć finalne rozwiązanie F.

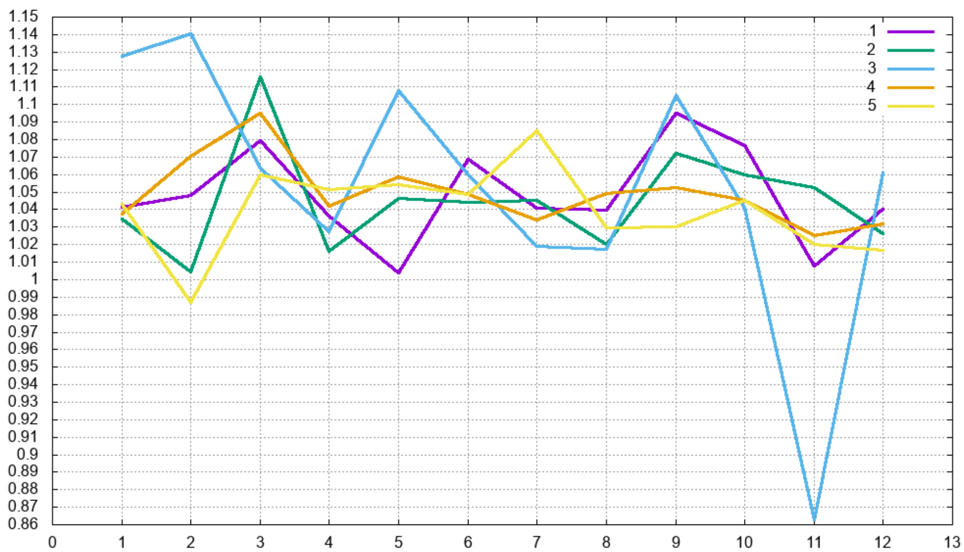
Algorytm bazuje na założeniu, że w każdej iteracji albo istnieje krawędź $e \in E$ taka, że $x_e \in \{0,1\}$, albo istnieje maszyna i, taka że deg(i) = 1 lub deg(i) = 2 i $\sum_{j \in J} x_{ij} \geqslant 1$. W każdej iteracji zysk wynikający z przypisania F plus zysk z aktualnego rozwiązania LP_{ga} jest nie mniejszy niż początkowe rozwiazanie LP_{ga}. W każdej iteracji zysk z F zwiększa się o przypisanie c_{ij},a aktualne rozwiązanie równania liniowego maleje o $c_{ij}x_{ij}$, ponieważ $x_{ij} = 1$. Z uwagi na warunek relaksacji oraz możliwe nagięcie czasu pracy na maszynie i, finalny zysk z F, może tylko wzrastać, względem początkowego rozwiązania. Całkowity czas pracy na maszynie i, nie przekroczy jednak nigdy $2T_i$. Dzieje się tak z uwagi na początkowe usunięcie krawędzi z grafu, dla których nie jest możliwe znalezienie optymalnego rozwiazania oraz tego, że w każdym kroku spełniona jest nierówność

$$T_i(F) + p_{ij_1} + p_{ij_2} \leqslant T_i + (2 - x_{ij_1} - xij_2)T_i \leqslant 2T_i$$

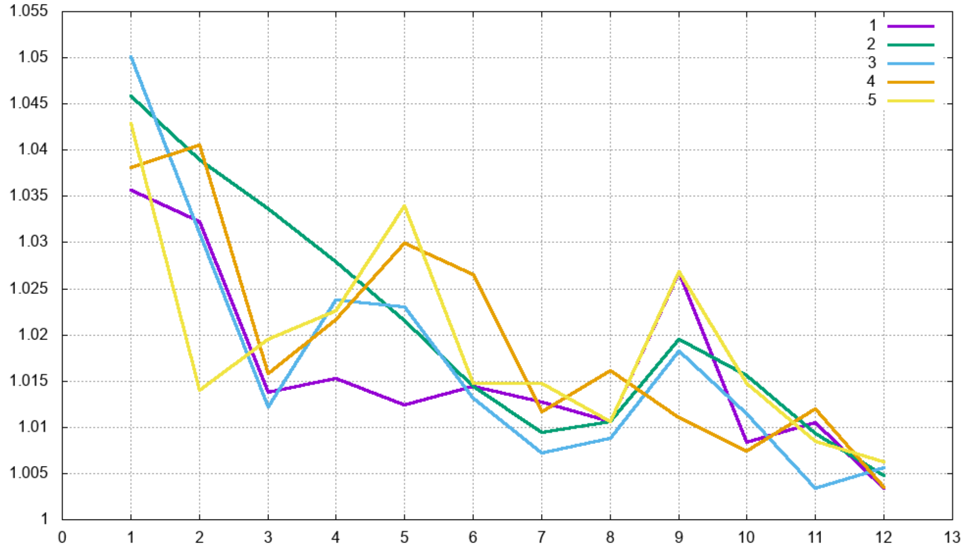
gdzie $T_i(F)$ jest aktualnym przypisaniem zadań do maszyny i w finalnym rozwiązaniu F, a $p_{ij_1} i p_{ij_2}$, to przypisanie znalezione w aktualnej iteracji. W przypadku, kiedy dwie prace zostają przypisane do jednej maszyny, dzięki warunkowi relaksacji $x_{ij_1} + x_{ij_2} \geqslant 1$ w kroku 2c. W przypadku, kiedy jedna praca zostaje przypisana do maszyny, $T_i + p_{ij} \leqslant 2T_i$.

4 Wyniki

Na rysunku 1, pokazane zostały stosunki odchyleń czasowych dla algorytmu iteracyjnego, względem optymalnych rozwiązań, dla każdej z 5 instancji problemów, dla każdego zbioru danych z OR-library. Średni stosunek odchylenia czasowego dla 60 rozważanych instancji problemu wynosi 1.04685. Zgadza się, więc z teoretycznymi rozważaniami, dla których maksymalny możliwy stosunek może wynieść 2. Na rysunku 2 pokazano stosunki zysku algorytmu iteracyjnego względem optymalnych rozwiazań. Widać, że zgodnie z teorią, każdy wynik jest lepszy niż optymalny, z uwagi na lekkie przekroczenie wymogów czasowych dla maszyn. Algorytm iteracyjny zwraca dobre przybliżenie optymalnych rozwiązań, za cenę niewielkiego przekroczenia limitów czasowych. Dla większej liczby możliwych zadań, algorytm zwraca lepsze przybliżenie optymalnego kosztu, jednocześnie nie przekraczając bardziej limitów czasowych.



Rysunek 1: odchylenia czasowe algorytmu iteracyjnego względem optymalnych rozwiązań



Rysunek 2: odchylenia zysku algorytmu iteracyjnego względem optymalnych rozwiazań