Obliczenia naukowe

Jakub Kołakowski
nr albumu 221457

Lista 4

Zadanie 1.
Napisać funkcję obliczającą ilorazy różnicowe.

Rozwiązanie:

Parametry wejściowe:
x - wektor długości n+1 zawierający węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$
f - wektor długości n+1 zawierający wartości interpolowanej funkcji w węzłach $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$

Wyniki:
fx - wektor długości n+1 zawierający obliczone ilorazy różnicowe

Algorytm:

$for\ i\ =\ 1\ to\ n+1$
    $fx[i] \coloneqq f[i]$ // Kopiujemy tablice wartości interpolowanej funkcji
$endfor$

$for\ i\ =\ 1\ to\ n$
    $for\ j\ =\ n+1\ down\ to\ i+1$

$$fx[j] := \frac{(fx[j] - fx[j-1])}{(x[j] - x[j-i])}$$

    $endfor$
$endfor$

$return\ fx$

Obliczamy ilorazy różnicowe wyższych rzędów, wykorzystując obliczone ilorazy niższych rzędów, po każdym wykonaniu pętli wewnętrznej mamy obliczony nowy iloraz różnicowy postaci $fx[x_0, \ldots, x_{i+1}]$

Zadanie 2.
Napisać funkcję obliczającą wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona w punkcie x=t za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera w czasie O(n)

Rozwiązanie:

Parametry wejściowe:
x - wektor długości n+1 zawierający węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$
fx - wektor długości n+1 zawierający obliczone ilorazy różnicowe
t - punkt w którym trzeba obliczyć wartość wielomianu

Wyniki:
nt - wartość wielomianu w punkcie t

Idea algorytmu:
Postać Newtona wielomianu interpolacyjnego:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\, x_1, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

przekształcamy do postaci:

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)(f[x_0, x_1] + (x - x_1)(f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_{n-1})\big(f[x_0, x_1, \dots, x_n]\big) \dots)$$

Ta postać umożliwia napisanie algorytmu obliczającego wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie t.

Algorytm:

$nt \ = \ fx[1]$
$współczynnik \ = \ t - x[1]$

$for\ i = 2\ to\ n + 1$
$\quad nt \ = \ nt \ + \ współczynnik \ * \ fx[i]$
$\quad współczynnik \ = \ współczynnik \ * \ (t - x[i])$
$endfor$

$return\ nt$

W pętli dodajemy za każdym razem nową wartość do wartości wielomianu oraz wyliczamy nowy współczynnik wielomianu.

Zadanie 3

Napisać funkcję, która interpoluje zadaną funkcję f(x) w przedziale [a, b] za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona, a następnie narysuje wielomian interpolacyjny i interpolowana funkcje.

Rozwiązanie:

Dane:
f - funkcja zadana jako funkcja anonimowa
a, b - przedział interpolacji
n - stopień wielomianu interpolowanego

Wyniki:
funkcja rysuje wielomian interpolacyjny i interpolowana funkcje w przedziale [a, b]

Algorytm:

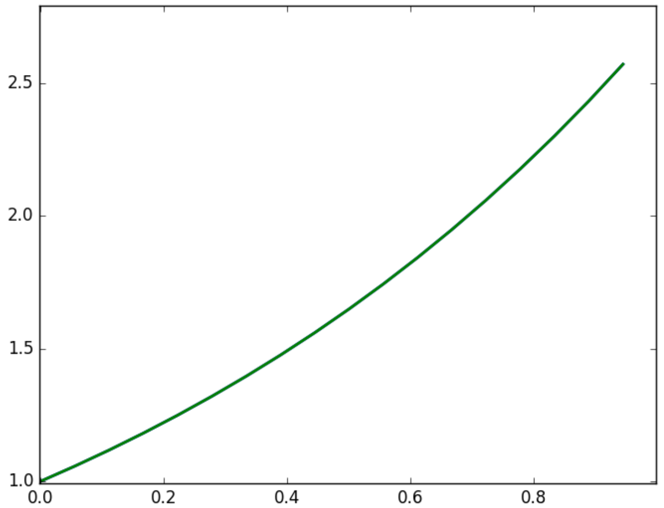
Liczymy kolejne punkty równoodległe na przedziale $[a, b]$ czyli $x_k \ = \ a \ + \ kh, \ h \ = \frac{b-a}{n}, \ k \ = \ 0, 1, \dots, n$ oraz wartości w tych punktach. Dzięki tym informacjom obliczamy ilorazy różnicowe przy pomocy funkcji z zadania 1. Następnie znowu liczymy kolejne punkty równoodległe na przedziale $[a, b]$ tym razem jednak, zmieniamy odległość między tymi punktami, w algorytmie przyjąłem, iż odległość między nimi jest teraz trzy razy mniejsza. Obliczamy wartości funkcji f w tych punktach oraz wartości przy pomocy uogólnionego algorytmu Hornera z zadania 2. Następnie rysujemy wykresy funkcji.

Zadanie 4.

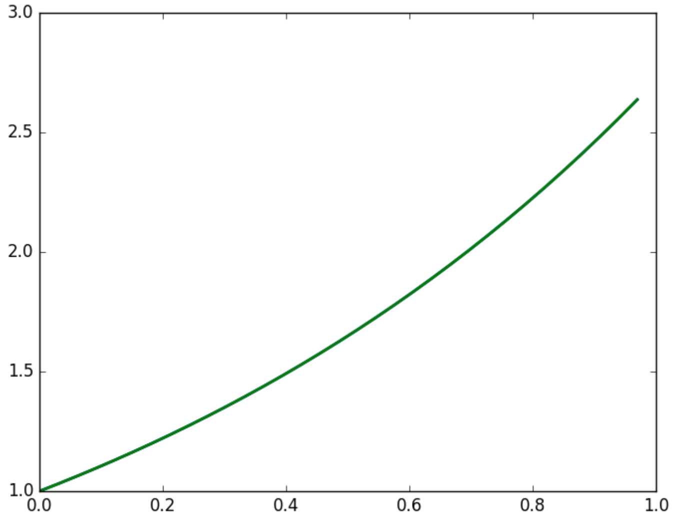
Przetestować funkcję z zadania 3 na następujących przykładach
1) e^x, na przedziale [0, 1], dla n = 5, 10, 15
2) $x^2 sinx$, na przedziale [-1, 1] dla n = 5, 10, 15

Wyniki:

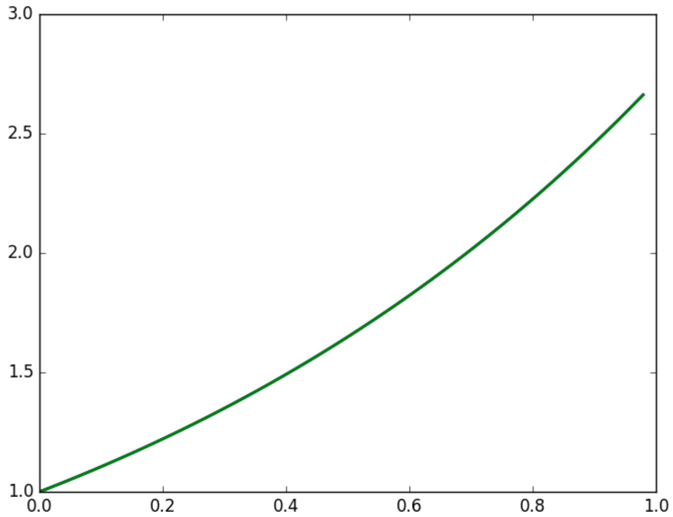
1) e^x, n = 5



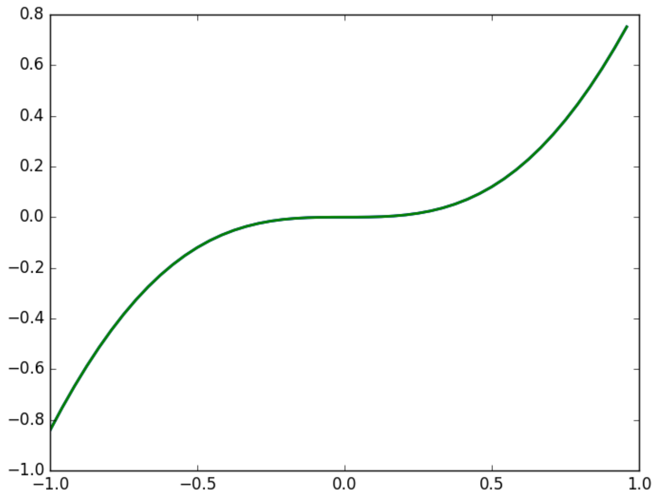
e^x, n = 10



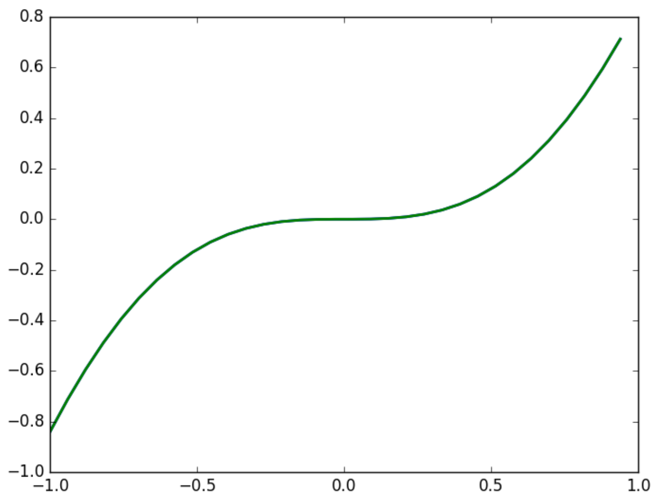
e^x, n = 15



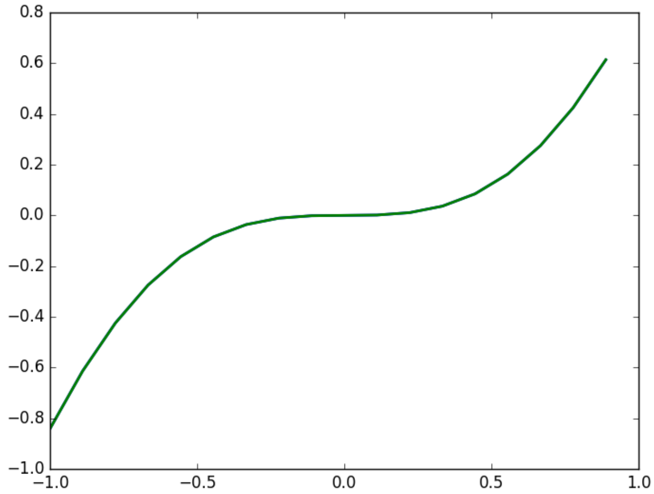
2) $x^2 sinx$, n = 5



$x^2 sinx$, n = 10



$x^2 sinx$, n = 15



Wnioski:

Brak rozbieżności między zadaną funkcją, a wielomianem interpolowanym, wykresy pokrywają się.

Zadanie 5.

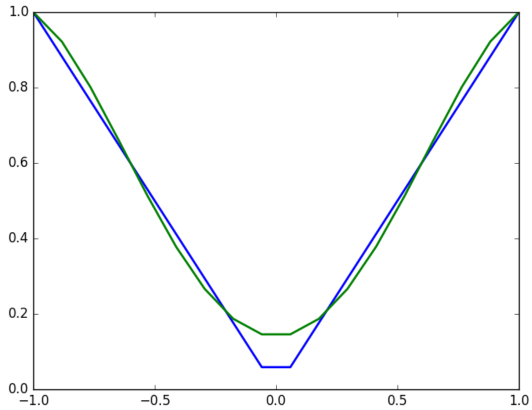
Przetestować funkcję z zadania 3 na następujących przykładach (zjawisko rozbieżności)

1) |x|, na przedziale [-1, 1], n = 5, 10, 15
2) $\frac{1}{1+x^2}$, na przedziale [-5, 5], n = 5, 10, 15 (zjawisko Runge'go)

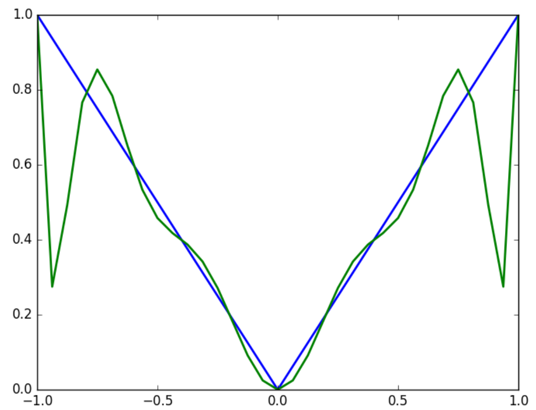
Na wykresie zielonym kolorem oznaczony jest wielomian interpolacyjny, a niebieskim interpolowana funkcja.

Wyniki:

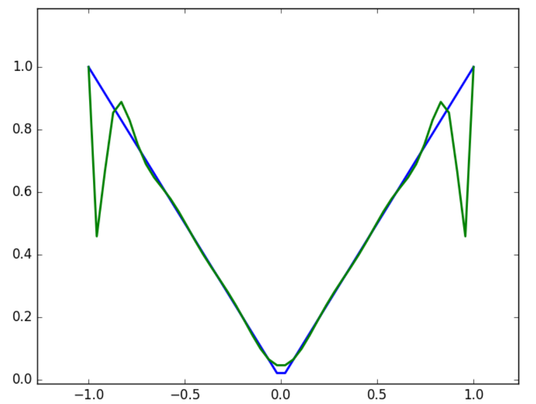
1) |x|, n = 5



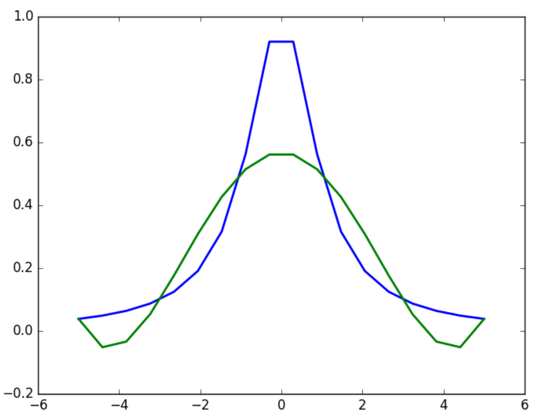
|x|, n = 10



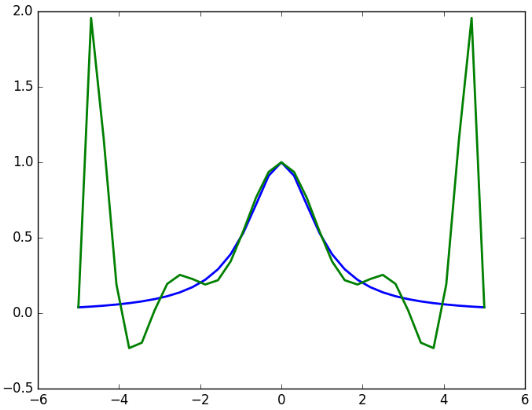
|x|, n = 15



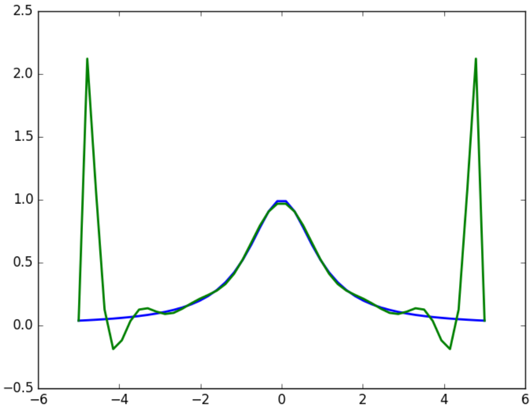
2) $\frac{1}{1+x^2}$, n = 5



$\frac{1}{1+x^2}$, n = 10



$\frac{1}{1+x^2}$, n = 15



Wnioski:
W obu przypadkach wykresy zadanej funkcji i wielomianu interpolacyjnego w miarę zwiększania ilości węzłów różnią się coraz bardziej, a wielomian interpolacyjny zostaje coraz bardziej zaburzony. Zjawisko widać szczególnie dobrze na krańcach przedziałów. Jest to efekt Rungego spowodowany interpolacją wielomianów wysokich rzędów przy użyciu równoodległych węzłów. Występuje także, gdy funkcja jest nieciągła. Można temu zapobiegać zwiększając gęstość węzłów na krańcach przedziałów.