Независимые случайные величины. Схема Бернулли

Независимые случайные величины

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

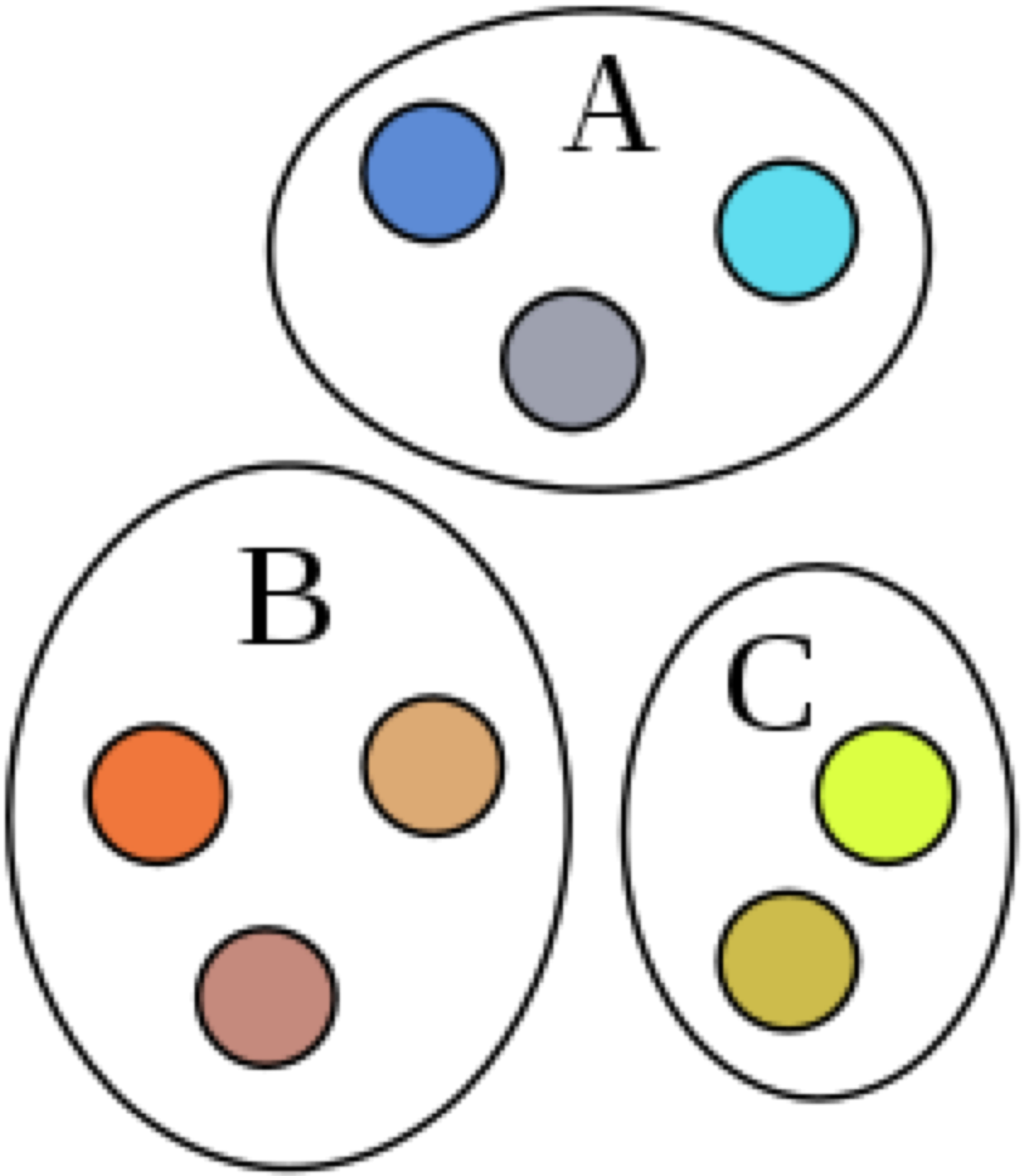
$$P(B) \neq 0 \qquad P(A|B) = P(A)$$

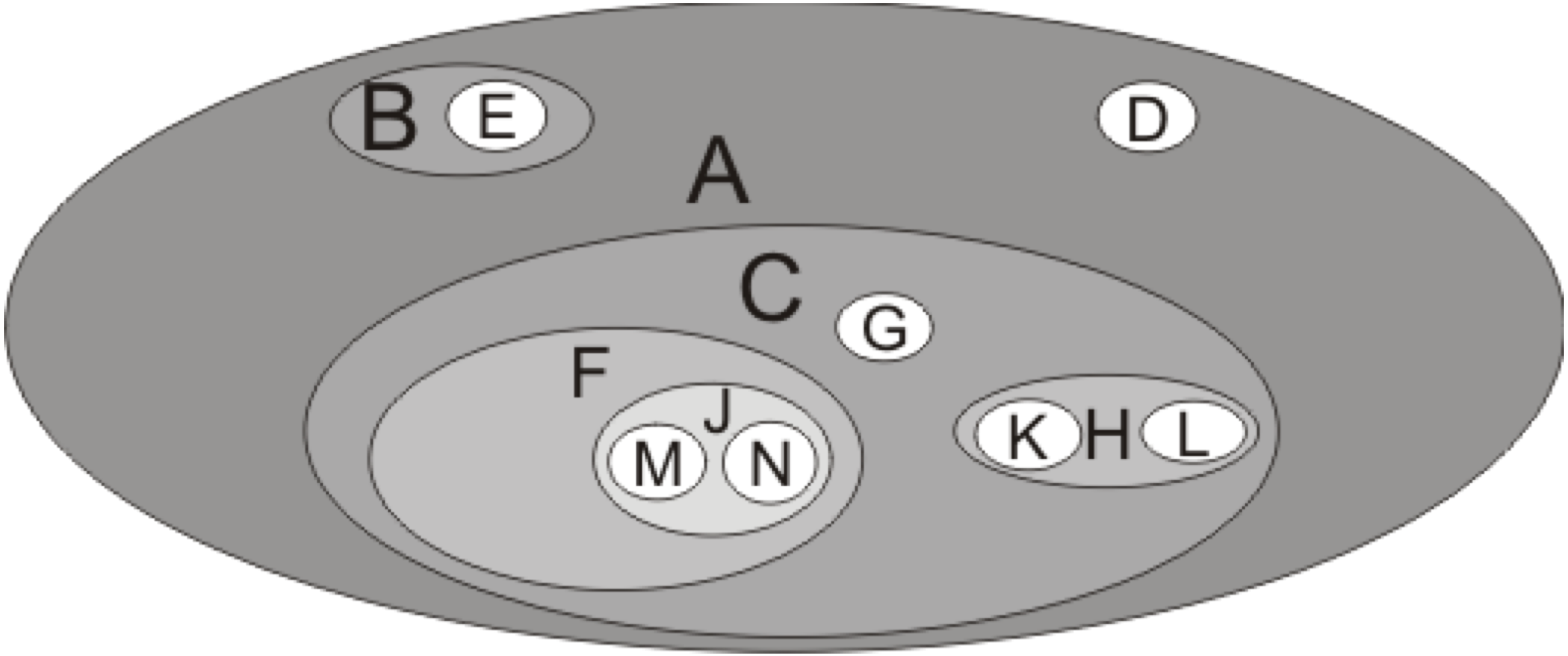
$$P(A) \neq 0 \qquad P(B|A) = P(B)$$

Взаимоисключающие случайные величины

$$P(A|B) = 0 \qquad P(B|A) = 0$$

$$P(A \cap B) = 0$$


A
B
C


B
E
D
A
C
G
F
J
M
N
K
H
L

Пример

Пусть есть колода из 36 карт (4 масти и 9 номиналов).
Мы вытягиваем одну карту из случайным образом перемешанной колоды (вероятности вытягивания каждой отдельной карты равны).

Определим следующие случайные величины:
ξ — масть вытянутой карты : 0 — червы, 1 — пики, 2 — крести, 3 — бубны
η: принимает значение 0 при вытягивании карт с номиналами 6,7,8,9,10 или 1 при вытягивании валета, дамы, короля или туза

Для доказательства того, что ξ,η независимы, требуется рассмотреть все α,β и проверить выполнение равенства:
$P((\xi\leqslant\alpha)\cap(\eta\leqslant\beta))=P(\xi\leqslant\alpha)\cdot P(\eta\leqslant\beta)$

Для примера рассмотрим $\alpha=0,\beta=0$, остальные рассматриваются аналогично:

$P((\xi\leqslant 0)\cap(\eta\leqslant 0))= 5/36$
$P(\xi\leqslant 0)\cdot P(\eta\leqslant 0)= 1/4 \cdot 5/9 = 5/36$

Схема Бернулли

Проводится n опытов, в каждом из которых может произойти определенное событие («успех») с вероятностью p (или не произойти «неудача» с вероятностью $q = 1 – p$.

Задача.
Найти вероятность получения ровно m успехов в этих n опытах.

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$$

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Необходимые условия применения

- Каждое испытание имеет ровно два исхода, условно называемых успехом и неудачей.
- Независимость испытаний: результат очередного эксперимента не должен зависеть от результатов предыдущих экспериментов.
- Вероятность успеха должна быть постоянной (фиксированной) для всех испытаний.

Задача

Вероятность выпуска бракованного изделия на станке равна **0,2**.
Определить вероятность того, что в партии из **десяти** выпущенных на данном станке деталей ровно ***k*** будут без брака.

Решить задачу для ***k* = 0, 1, 3, 10**.

$$p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

$$P_{10}(0) = C_{10}^{0} p^{0} (1-p)^{10-0} = \frac{10!}{0!\,10!} 0{,}8^{0} 0{,}2^{10} \approx 10^{-7}$$

$$P_{10}(1) = C_{10}^{1} p^{1} (1-p)^{10-1} = \frac{10!}{1!\,9!} 0{,}8^{1} 0{,}2^{9} \approx 4 * 10^{-6}$$

$$P_{10}(3) = C_{10}^{3} p^{3} (1-p)^{10-3} = \frac{10!}{3!\,7!} 0{,}8^{3} 0{,}2^{7} \approx 8 * 10^{-4}$$

$$P_{10}(10) = C_{10}^{10} p^{10} (1-p)^{0} = \frac{10!}{10!\,0!} 0{,}8^{10} 0{,}2^{0} \approx 0{,}1$$