Ряд Фурье

$y = f(x)$ и эта функция определена на $[-\pi; \pi]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

a_0, a_n, b_n – коэффициенты Фурье

$T = 2\pi$ – период разложения

$l = \frac{T}{2} = \pi$ – полупериод разложения

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos x + b_2 \sin x)$$
$$+ (a_3 \cos x + b_3 \sin x) + \cdots + (a_n \cos x + b_n \sin x) + \cdots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, sin \, nx \, dx$$

Разложить функцию $f(x) = x + 1$ на промежутке $[-\pi; \pi]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$T = 2\pi$ – период разложения

$l = \pi$ – полупериод разложения

Разложить функцию $f(x) = x + 1$ на промежутке $[-\pi; \pi]$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi - \left(\frac{(-\pi)^2}{2} - \pi\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi - \frac{\pi^2}{2} + \pi\right) = \frac{1}{\pi}2\pi$$

$$= 2$$

Разложить функцию $f(x) = x + 1$ на промежутке $[-\pi; \pi]$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nx\, dx$$

возьмём интеграл по частям

$$\mathrm{u} = x + 1 \Rightarrow du = dx$$

$$\mathrm{d}v = cosnxdx \Rightarrow v = \int cosnxdx$$

$$= \frac{1}{n}\int cosnxd(nx) = \frac{1}{n}\sin nx$$

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin nx\,|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(\pi+1)\sin n\pi - \frac{1}{n}(-\pi+1)\sin(-n\pi) - \frac{1}{n}(-\frac{1}{n})\cos nx|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(0-0) + \frac{1}{n^2}\cos nx|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}(\cos n\pi - \cos n(-\pi))\right) = \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos n\pi) = 0$$

Разложить функцию $f(x) = x + 1$ на промежутке $[-\pi; \pi]$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin nx\,dx$$

возьмём интеграл по частям

$$\mathrm{u} = x + 1 \Rightarrow du = dx$$

$$\mathrm{d}v = \sin nx\,dx \Rightarrow v = \int \sin nx\,dx$$

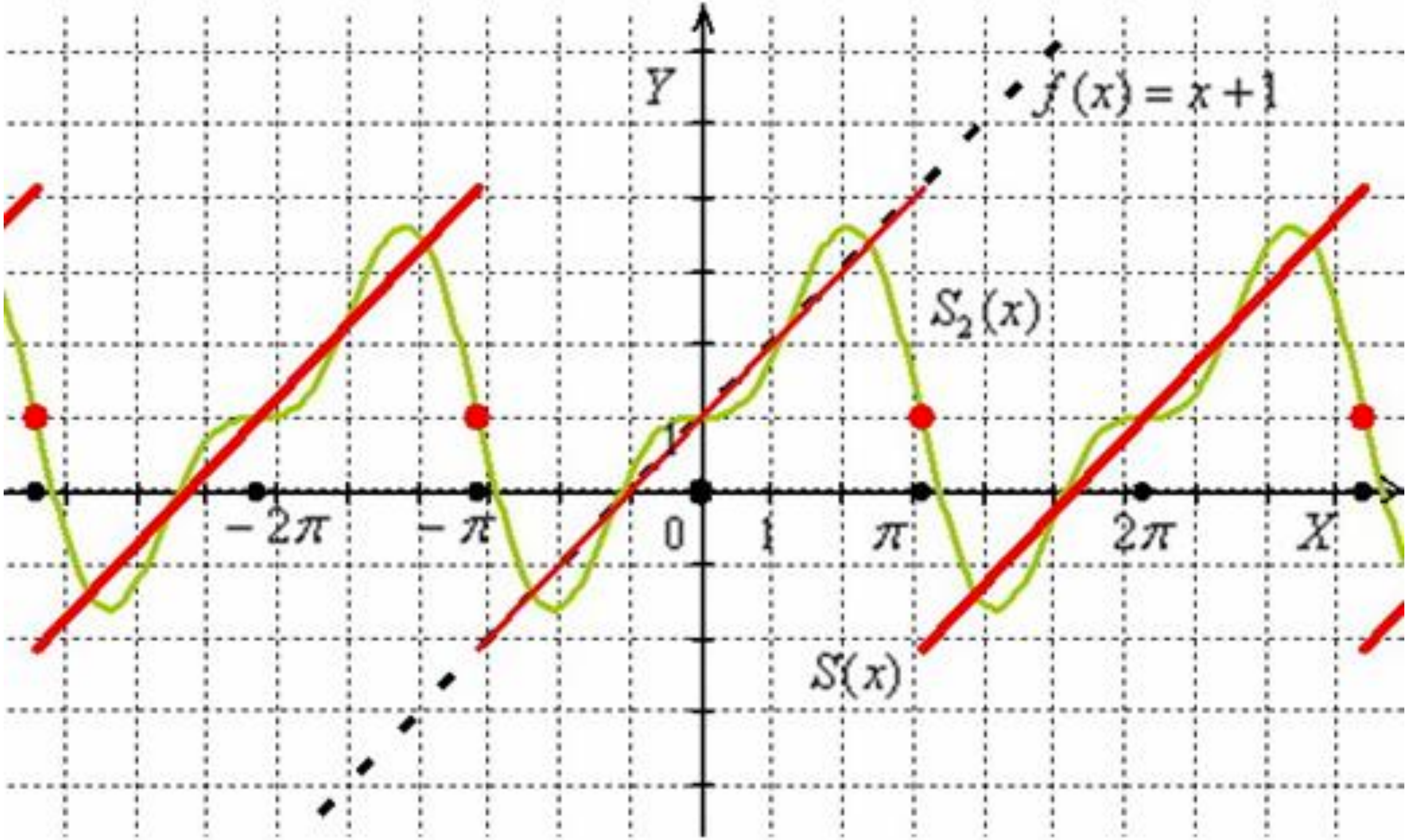
$$= \frac{1}{n}\int \sin nx\,d(nx) = -\frac{1}{n}\cos nx$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos nx\,|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)$$
$$=-\frac{1}{\pi n}\left((\pi+1)\cos\pi n-(-\pi+1)\cos(-n\pi)-\frac{1}{n}\sin nx|_{-\pi}^{\pi}\right)$$
$$=-\frac{1}{\pi n}\left((\pi+1)(-1)^n-(-\pi+1)(-1)^n\right)$$
$$+\frac{1}{\pi n^2}(\sin\pi x-\sin(-\pi x))$$
$$=-\frac{1}{\pi n}(\pi+1+\pi-1)(-1)^n+\frac{1}{\pi n^2}(0-0)=-\frac{1}{\pi n}2\pi(-1)^n$$
$$=-\frac{2(-1)^n}{n}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f(x) \sim \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(0 \cos nx - \frac{2(-1)^n}{n} \sin nx\right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n} \sin nx = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$$



Y
$f(x) = x + 1$
$S_2(x)$
$S(x)$
1
0
1
-2π
$-\pi$
π
2π
X

Числовой ряд – это бесконечная сумма чисел