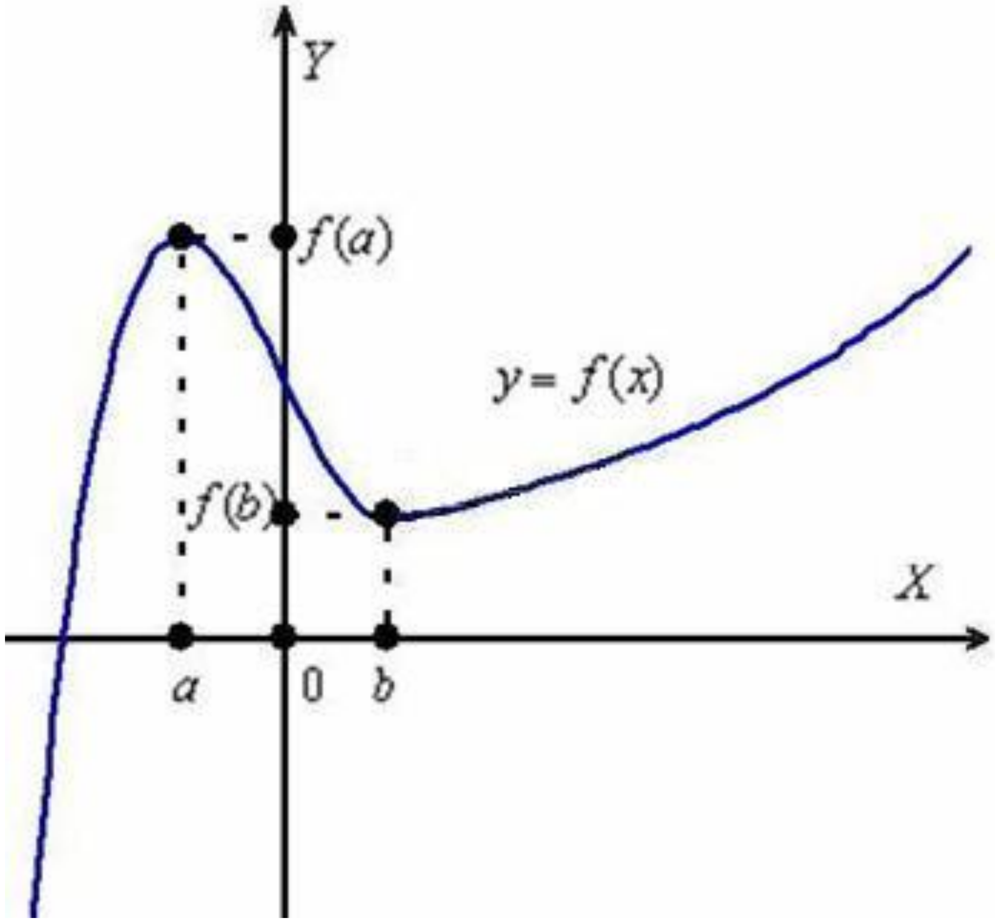
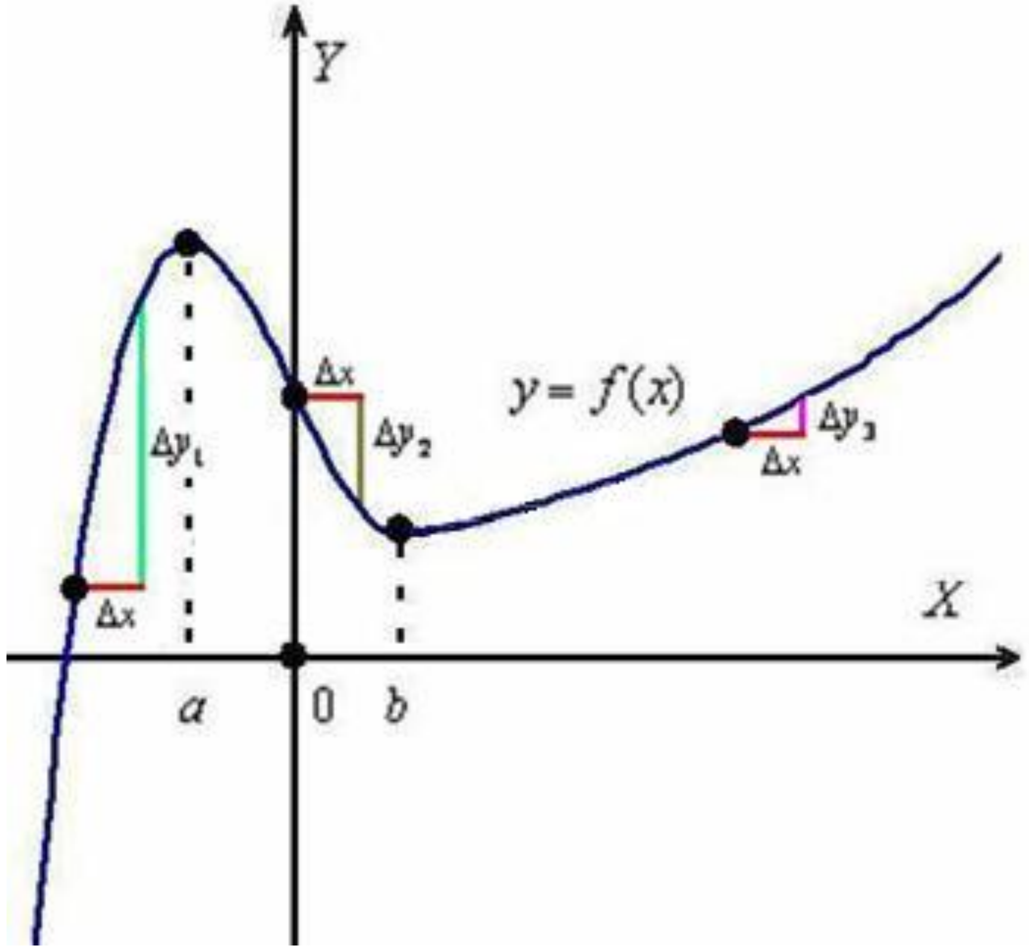
Производная функции. Градиентный спуск.

Производная функции – скорость изменения функции в данной точке

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Y
f(a)
y = f(x)
f(b)
X
a
0
b



Y
X
$y = f(x)$
Δx
Δy_1
Δx
Δy_2
Δy_3
Δx
a
0
b

Производные степенных функций	Производные тригонометрических функций	Производные обратных тригонометрических функций	Производные гиперболических функций
$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\sinh x)' = \cosh x$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\cosh x)' = \sinh x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\coth x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

Правила дифференцирования. Дифференцирование произведения и частного.

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Найти производную линейной функции **y=ax+b**, используя определение производной.

$$\Delta y = y\left(x+\Delta x\right) - y\left(x\right) = \left(a\left(x+\Delta x\right)+b\right) - \left(ax+b\right) = \cancel{ax} + a\Delta x + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b} = a\Delta x.$$

$$y'\left(x\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\,\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0} a = a$$

$$y = x^2$$

$$\Delta y = y\left(x + \Delta x\right) - y\left(x\right) = \left(x + \Delta x\right)^2 - x^2$$

$$\Delta y = \left(x + \Delta x\right)^2 - x^2 = \cancel{x^2} + 2x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 - \cancel{x^2} = \left(2x + \Delta x\right)\Delta x$$

$$y'\left(x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(2x + \Delta x\right)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x + \Delta x\right) = 2x$$

$$y = ax^2 + bx + c.$$

$$\Delta y = y\left(x+\Delta x\right) - y\left(x\right) = \left[a(x+\Delta x)^2 + b\left(x+\Delta x\right) + c\right] - \left[ax^2 + bx + c\right]$$
$$= \left[ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + bx + b\Delta x + c\right] - \left[ax^2 + bx + c\right]$$
$$= \cancel{ax^2} + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + \cancel{bx} + b\Delta x + \cancel{c} - \cancel{ax^2} - \cancel{bx} - \cancel{c} = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x$$
$$= \left(2ax + b + a\Delta x\right)\Delta x.$$

$$y'\left(x\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(2ax+b+a\Delta x\right)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(2ax+b+a\Delta x\right) = 2ax + b$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\,(x+\Delta x)\,x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x+\Delta x)\,x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Частная производная – производная по одной переменной в случае, если функция имеет несколько переменных.

$$z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$$

$$z'_x = (x^5 + y^5 - 5x^3y^3)'_x = 5x^4 - 15x^2y^3$$

$$z'_y = (x^5 + y^5 - 5x^3y^3)'_y = 5y^4 - 15x^3y^2$$

$$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z'_x = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z'_y = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x(x^2+y^2) - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}};$$