Математическое ожидание. Дисперсия

Математическое ожидание - среднее (взвешенное по вероятностям возможных значений) значение случайной величины.

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{X}] = \int_{\Omega} \boldsymbol{X}(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_X(x), \, x \in \mathbb{R}$$

$$F_X(x)$$ **функция распределения случайной величины**

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i \,, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p_i$$

$$\mathbb{P}(X = j) = p_j \ , j = 0, 1, \ldots, \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

Свойства математического ожидания

Математическое ожидание числа (не случайной, фиксированной величины, константы) есть само число.

$$\mathbb{E}[a] = a$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ — константа;}$$

Свойства математического ожидания

Математическое ожидание линейно

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

Свойства математического ожидания

$$0 \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Пример

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n},\ i = 1, \ldots, n$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ковариация - мера линейной зависимости двух случайных величин

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{M}\left[(X - \mathbb{M}X)(Y - \mathbb{M}Y)\right]$$

Дисперсия случайной величины - мера разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания

$$D[X] = M\left[\left(X - M[X]\right)^2\right]$$

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - M[X])^2,$$

$$D[X] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j (x_i - x_j)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j (x_i - x_j)^2$$

Свойства дисперсии

$$D[X] \geqslant 0$$

$$D\left[aX\right] = a^2 D[X]$$

$$D\left[-X\right] = D[X]$$

$$D[a] = 0$$

$$D\left[X + b\right] = D[X]$$

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2\operatorname{cov}(X, Y)$$