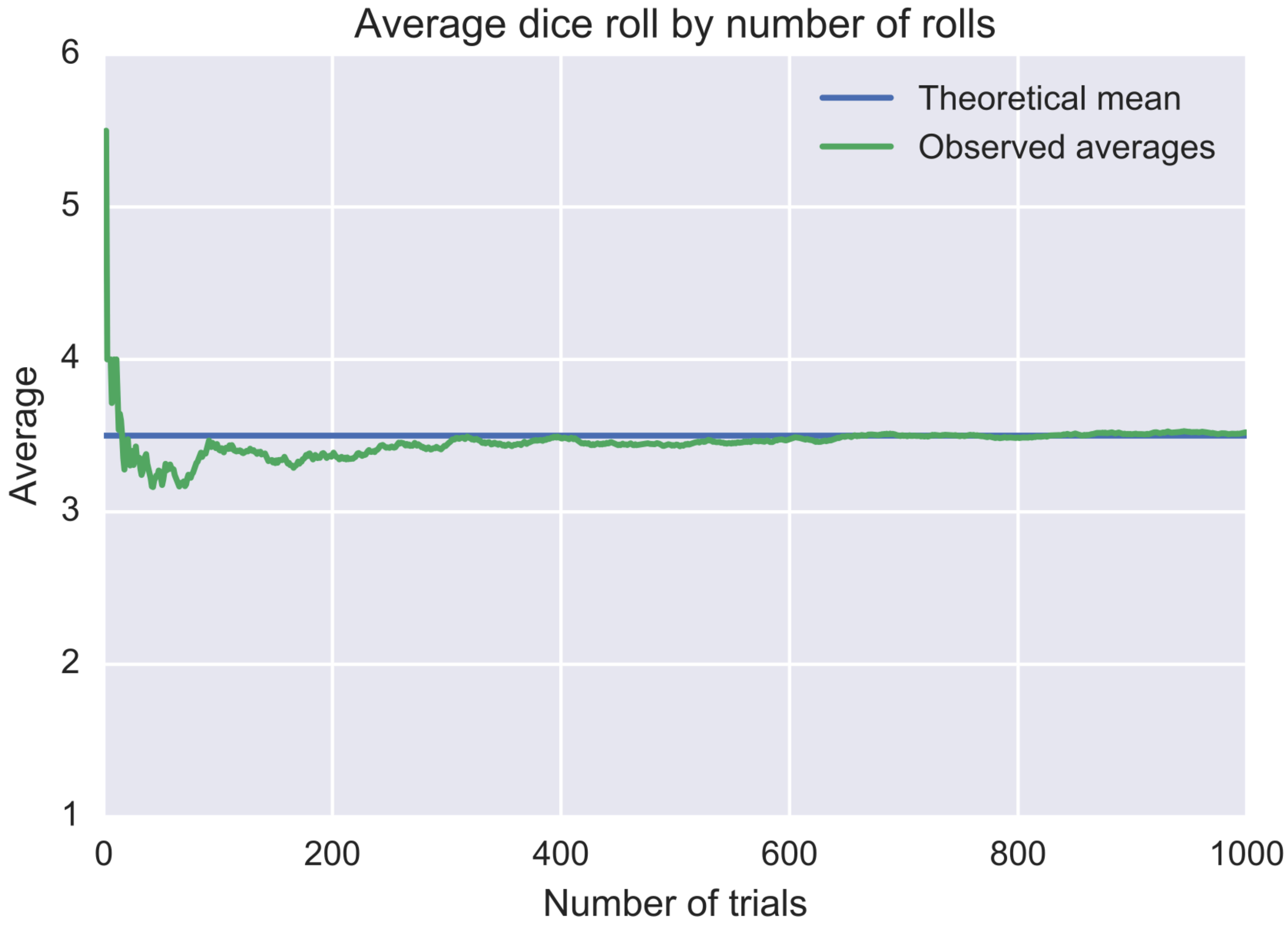
Закон больших чисел. ЦПТ

Закон больших чисел – среднее значение конечной выборки из фиксированного распределения близко к математическому ожиданию этого распределения.


Average dice roll by number of rolls
Theoretical mean
Observed averages
Average
Number of trials
6
5
4
3
2
1
0
200
400
600
800
1000

Рассмотрим броски игральной костью.

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$$

Рассмотрим на примере среднего арифметического…

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

$$\overline{X}_n \to \mu \qquad\qquad n \to \infty$$

Слабый закон больших чисел гласит, что среднее значение выборки сходится по вероятности

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu \quad n \to \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Усиленный закон больших чисел утверждает, что при определённых условиях с вероятностью единица происходит неограниченное сближение средних арифметических последовательности случайных величин с некоторыми постоянными величинами

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

$$\overline{X}_n - \mu_n \to 0 \qquad n \to \infty$$

Другая формулировка **усиленного закона**

$$|\overline{X}_n - \mu_n| \leqslant \varepsilon,$$
$$|\overline{X}_{n+1} - \mu_{n+1}| \leqslant \varepsilon$$

Другая формулировка **усиленного закона**

$$|\overline{X}_n - \mu_n| \leqslant \varepsilon,$$

$$|\overline{X}_{n+1} - \mu_{n+1}| \leqslant \varepsilon$$

Классическая центральная предельная теорема (ЦПТ)

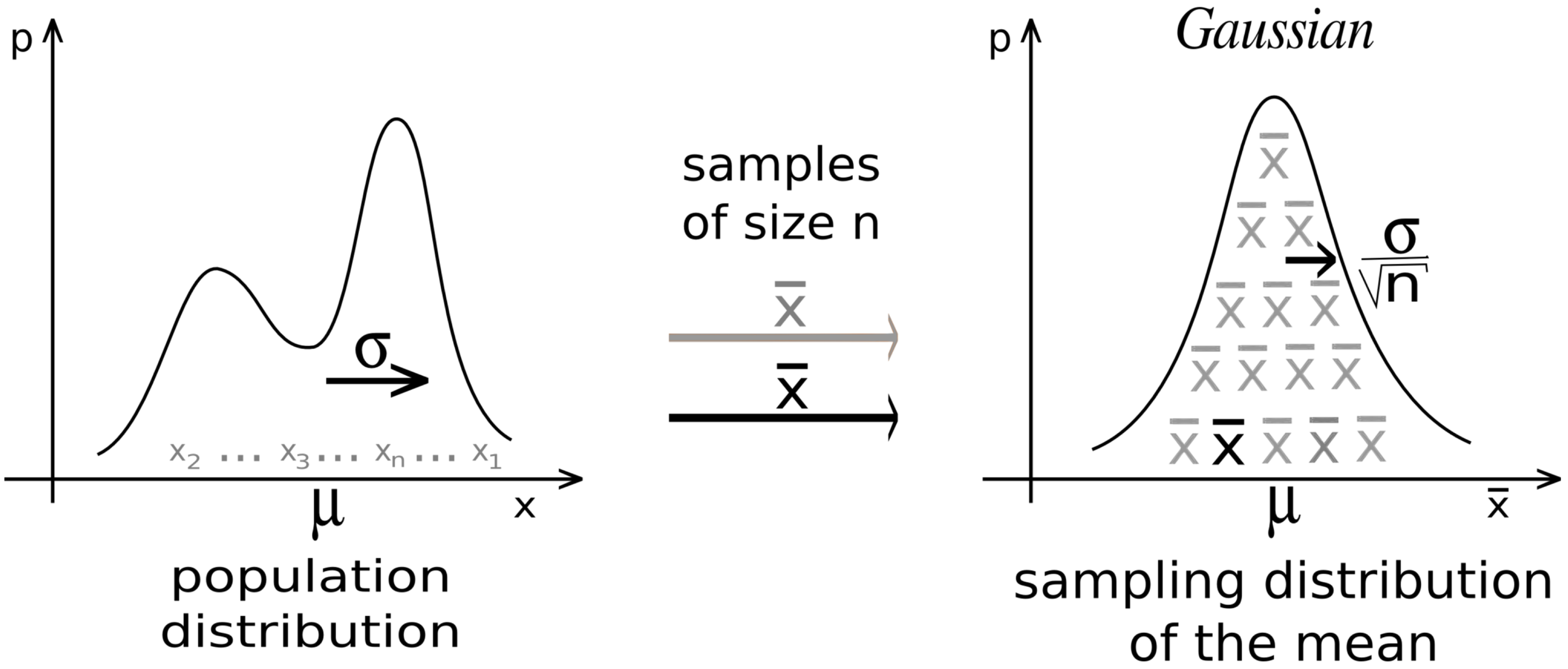
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \to N(0,1) \qquad n \to \infty$$

Классическая центральная предельная теорема (ЦПТ)

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \to N(0,1) \qquad n \to \infty$$


Gaussian
p
p
samples
of size n
x̄
x̄
σ
σ/√n
x₂ ... x₃ ... xₙ ... x₁
μ
x
μ
x̄
population
distribution
sampling distribution
of the mean