Вектора и матрицы

Сумма матриц.

$$C+D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 1 & 3 & 5 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & -4\\ 3 & 0 & -4 & -2\\ 0 & -4 & 2 & -9\\ 3 & -4 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+2 & 2-1 & 3+0 & 4-4\\ 4+3 & 5+0 & 6-4 & 7-2\\ 2+0 & 4-4 & 6+2 & 8-9\\ 1+3 & 3-4 & 5+0 & 7+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3 & 0\\ 7 & 5 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 8 & -1\\ 4 & -1 & 5 & 8\end{pmatrix}.$$

$$C+D=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3 & 0\\ 7 & 5 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 8 & -1\\ 4 & -1 & 5 & 8\end{pmatrix}$$

Дистрибутивность, ассоциативность и коммуникативность

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$AB \neq BA$$

Свойства транспонирования

$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Скалярное произведение

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]\ ,\quad \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = [b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n]$$

$$\langle\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \,\rangle = \ \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b} \ = \ a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

Скалярное произведение

$s^T = s$	transpose of a scalar s
$x^T y = y^T x$	inner product for vectors

Скалярное произведение. Единичный вектор.

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}\,, \qquad ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}\,, \quad ||\hat{\boldsymbol{x}}|| = 1$$

Скалярное произведение. Единичный вектор.

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}, \qquad ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}, \quad ||\hat{\boldsymbol{x}}|| = 1$$

Скалярное произведение.

$$\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle$$

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle \boldsymbol{A}x, y \rangle = \langle x, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}y \rangle$$

Скалярное произведение.

$$\langle \boldsymbol{A x}, \boldsymbol{y} \rangle = (\boldsymbol{A x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \rangle$$

By definition, $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \mathrm{x}^{\mathrm{T}} \mathrm{y}$

Скалярное произведение.

$$\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = (A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{x}, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\rangle$$

By definition, $\langle x, y\rangle = x^{T}y$

Скалярное произведение.

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y} \rangle = (\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \rangle$$

By definition, $\langle x, y \rangle = x^{T}y$

Ещё об умножении.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Ещё об умножении.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_m \\ | & & | \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} \text{---} & \boldsymbol{v}_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \boldsymbol{v}_n & \text{---} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} | \\ \boldsymbol{u}_1 \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} & \boldsymbol{v}_1 & \text{---} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} | \\ \boldsymbol{u}_n \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} & \boldsymbol{v}_n & \text{---} \end{pmatrix}$$

Ещё об умножении.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы.

$$
\begin{aligned}
|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
&= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.
\end{aligned}
$$

Определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Определитель матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{array}{ccccc} & & -105 & -48 & -72 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \\ & & 45 & 84 & 96 \end{array} = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 73 = 0$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$$

$$\det(cA) = c^n \det(A) \qquad \text{for } n \times n \text{ matrix}$$

$$\det(A^n) = \det(A)^n$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \qquad \det(A) = \text{product of all eigenvalues}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

subtract row 2 by 4 × row 1

$\det(A) = 1 \times -3 \times 1$

$\det(A)$ = product of diagonal elements when all lower triangle elements are transformed to 0

Обратная матрица.

$$\underline{A^{-1}}A = I$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

Обратная матрица. Свойства.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Обратная матрица. Свойства.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1}}_{\text{matrix inverse}}\boldsymbol{b}$$

Обратная матрица. Свойства.

left inverse

right inverse

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} \quad \text{(if } A \text{ is square)}$$

Обратная матрица. Как считать?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

cannot be zero

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ & & \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ & & \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$