ANALÝZA VE VÍCE PROMĚNNÝCH

PETR HÁJEK

Tento text je osnovou jednosemestrální přednášky analýzy více proměnných, která pokrývá diferenciální a integrální počet, a krátkého úvodu do funkčních řad. Předpokládá se znalost základů analýzy jedné proměnné a základů lineární algebry. Předpokládaný rozsah je 26-30 přednášek (90 min),

Cílem přednášky je seznámit studenta s hlavními pojmy a metodami této oblasti, s důrazem na porozumění jejich geometrickému významu, při současném udržení matematické přesnosti na přijatelné úrovni pro použití v běžných aplikacích.

Text byl sestaven na základě dvojice skript Hamhalter-Tišer, s některými modifikacemi.

1. Úvod

Opakování některých základních pojmů a vlastností-zejména reálná čísla, reálné funkce a derivace z konceptuálního hlediska.

V tomto kurzu vycházíme z intuitivní představy o reálných číslech, jejichž modelem je reálná osa $\mathbb{R}$ s operacemi $+$, $\times$ a uspořádáním $<$. Reálná čísla lze vybudovat vycházeje z racionálních čísel s použitím principu (axiomu) úplnosti. Tento princip hraje hlavní roli při budování a aplikacích analýzy. Opakování pojmů z předcházejícího kurzu MA1:

Nekonečná posloupnost (resp. řada) a její limita, konvergence, spojitost funkce jedné reálné proměnné, derivace, lokální a absolutní extrém, určitý a neurčitý integrál, $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$.

Definice 1.1. *(Princip úplnosti)*
Každá shora omezená podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ má supremum $\sup A \in \mathbb{R}$.

Tento princip lze ekvivalentně formulovat také následujícím způsobem, který umožňuje vytvářet nové objekty v analýze pomocí limitního procesu.

Definice 1.2. *(Princip úplnosti-alternativní formulace)*
Každá omezená posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ v $\mathbb{R}$ má konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$, $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x \in \mathbb{R}$.

Jedním z důsledků úplnosti reálných čísel je existence řešení rovnic pro spojité funkce.

Věta 1.3. *(Nabývání mezihodnot)*
Nechť f je spojitá $[a,b]$, $f(a) < C < f(b)$. Potom existuje $c \in (a,b)$ takové, že $f(c) = C$.

Důkaz. Polož $c = \sup\{x, f(x) \le 0\}$. $\square$

Příklad: funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2$ nenabývá mezihodnot (např. 2). Podobně, $f(x) = x^2 - 2$ nenabývá svého minima.

Věta 1.4. *(Věta o existenci extrému)*
Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Potom existuje $c \in [a,b]$ takové, že $f(c) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Definice 1.5. *Nechť $D \subset I\!R$ je definičním oborem funkce $f : D \to I\!R$, $S \subset D^\circ$ podmnožina vnitřku D. Říkáme, že funkce f je na S třídy C^k pokud f je spojitě diferencovatelná až do řádu k, t.j. $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(k)}(t)$ existují ve všech bodech $t \in S$ a jsou spojité jakožto funkce z S do $I\!R$.*

Tento pojem budeme často používat pro případ kdy $D = [a, b]$ je uzavřený interval uvnitř definičního oboru f.

Věta 1.6. *(Základní věta integrálního počtu)*
Nechť f je třídy C^1 na $[a, b]$. Potom platí

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

Věta 1.7. *(Věta o střední hodnotě)*
Nechť f je třídy C^1 na $[a, b]$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Důkaz. První krok pro případ $f(a) = f(b)$ (Rolleova věta) s použitím maxima. Druhý krok odečíst lineární funkci. □

Příklady. Polynomy, trigonometrické funkce, exponenciální funkce, racionální funkce, logaritmus, a též funkce od nich odvozené s pomoci běžných algebraických operací a operace skládání jsou třídy C^∞ na svých definičních oborech.

Definice 1.8. *(Symbol $o(t^k)$)*
Říkáme, že funkce ϕ, která je definovaná v okolí nuly, $\phi(0) = 0$, splňuje vztah

$$\phi(t) = o(t^k) \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)}{t^k} = 0.$$

Je třeba mít na paměti, že zde se jedná o formální vztah, nikoliv o rovnost v matematickém smyslu.

$$\text{Je zřejmé, že } \phi(t) = o(t^k) \Leftrightarrow \phi(t) = \psi(t)t^k, \text{ pro nějaké } \psi, \lim_{t\to 0} \psi(t) = 0.$$

Tvrzení 1.9. *(Taylorova formule 1. řádu)*
$f(x + t) = f(x) + At + o(t)$ platí právě když $f'(x)$ existuje a je rovno A.

Důkaz.

Věta 1.10. *(Taylorova formule 2. řádu)*
Nechť f je funkce třídy C^2 na $[a, x]$. Potom platí

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + R(a, x - a),$$

kde pro $h = x - a$ platí

$$|R(a, h)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f''(a + th) - f''(a)|h^2.$$

Speciálně tedy platí

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2)$$

Důkaz. Použijeme opakovaně základní větu analýzy 1.6

$$
\begin{aligned}
f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} f'(t)dt &= f(a) + f'(a)h + \int_a^{a+h} (f'(t) - f'(a))dt \\
&= f(a) + f'(a)h + \int_a^{a+h} \Big(\int_a^t f''(\tau)d\tau\Big)dt \\
&= f(a) + f'(a)h + \int_a^{a+h} \Big(f''(a)(t-a) + \int_a^t f''(\tau) - f''(a)d\tau\Big)dt \\
&= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + R(a,h),
\end{aligned}
$$

kde

$$|R(a,h)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f''(a+th) - f''(a)|h^2$$

Speciálně, je vidět že $R(a,h) = o(|h|^2)$.

□

Důsledek 1.11. *Nechť funkce f třídy C^1 má lokální extrém v bodě x. Pak platí $f'(x) = 0$. Nechť funkce f třídy C^2 splňuje $f'(x) = 0, f''(x) \neq 0$. Potom f má v bodě x lokální extrém.*

Obecný tvar Taylorovy formule, důležitý pro práci s mocninnými řadami.

Věta 1.12. *(Taylorova formule k-tého řádu)*
Nechť f je funkce třídy C^{k+1} na $[a,x]$. Potom platí pro $h = x - a$ (Lagrangeův tvar zbytku)

$$f(x) = f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)h^i + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\eta)h^{k+1}, \tag{1}$$

pro nějaké $\eta \in [a,x]$. Speciálně tedy platí (Peanův tvar zbytku)

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)h^i + o(h^{k+1})$$

Zjednodušeně lze říci, že hlavními výsledky našeho kurzu bude zobecnění Taylorovy formule a Základní věty analýzy na případ funkcí více proměnných.

2. Nekonečné řady

Definice 2.1. *Říkáme že posloupnost čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu A pokud platí*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(|a_n - A| < \varepsilon). \tag{2}$$

Říkáme že posloupnost čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní pokud konverguje k nějakému číslu A.

Definice 2.2. *Říkáme že posloupnost čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská pokud platí*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N)(|a_n - a_m| < \varepsilon). \tag{3}$$

Jedním z důsledků principu úplnosti reálných čísel je následující věta (kterou je možné považovat za další z možných formulací tohoto principu).

Tvrzení 2.3. *Posloupnost čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě když je Cauchyovská.*

Budeme pracovat s formálními výrazy tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, které se nazývají nekonečné řady. Hlavní otázka je, zda tyto nekonečné sumy mohou mít nějaký přesný smysl a hodnotu.

Definice 2.4. *Říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada, pokud platí že posloupnost částečných součtů $(s_k)_{k=1}^{\infty}$, $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ je konvergentní. Její limita se nazývá součet řady. V opačném případě říkáme, že řada je divergentní.*

Díky Větě 2.3 víme, že řada je konvergentní právě když platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m > N)(|s_n - s_m| < \varepsilon) \tag{4}$$

Tvrzení 2.5. *Pokud je řada konvergentní pak její členy konvergují k nule.*

$$\sum (-1)^n, \ \sum \sin n$$

Opačná implikace neplatí:

$$\sum \frac{1}{n}$$

Hlavní příklad konvergentní řady je geometrická řada.

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$

konverguje právě když $|q| < 1$.

Definice 2.6. *Říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada pokud je řada obsahující absolutní hodnoty $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní.*

Tvrzení 2.7. *Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Tvrzení 2.8. *(Srovnávací kritérium) Nechť $\sum a_n$ je absolutně konvergentní řada, $|b_n| \leq |a_n|$ platí pro všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$. Potom $\sum b_n$ je také absolutně konvergentní.*

Použitím porovnání s geometrickou řadou získáme známá kritéria absolutní konvergence:
podílové, odmocninové.

$$\sum \frac{1}{n!}, \ \sum \frac{n^2}{3^n}, \ \sum \left(\frac{4}{n+2}\right)^n$$

Tvrzení 2.9. *(Integrální kritérium) Nechť $a_n \geq 0$ je nerostoucí posloupnost, a nechť $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ je nerostoucí spojitá funkce taková, že $f(n) = a_n$. Potom $\sum a_n$ je absolutně konvergentní právě když $\int_0^{\infty} f(t) < \infty$.*

Příklad. Dokažte, že řada $\sum \frac{1}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

Tvrzení 2.10. *(Alternující řada) Nechť* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ *je nerostoucí posloupnost s limitou* 0*. Potom* $\sum (-1)^n a_n$ *je konvergentní.*

3. Funkční řady

Definice 3.1. *Funkční řada je formální nekonečný součet funkcí $f_k : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subset \mathbb{R}$, označený*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t), \quad t \in D. \tag{5}$$

Říkáme, že funkční řada je konvergentní v bodě $t \in D$ pokud řada (5), po dosazení hodnoty $t \in D$, konverguje. Říkáme, že funkční řada je bodově konvergentní na D k funkci $f : D \to \mathbb{R}$, pokud je tato řada konvergentní k $f(t)$ v každém bodě $t \in D$. Tedy, pokud platí

$$(\forall t \in D)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(|\sum_{k=1}^{n} f_k(t) - f(t)| < \varepsilon) \tag{6}$$

Říkáme, že funkční řada je stejnoměrně konvergentní na D k funkci $f : D \to \mathbb{R}$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall t \in D)(|\sum_{k=1}^{n} f_k(t) - f(t)| < \varepsilon) \tag{7}$$

Jednoduchou aplikací Věty 2.3 dostaneme následující kritérium.

Tvrzení 3.2. *Funkční řada je je bodově konvergentní na D k nějaké funkci f právě když platí*

$$(\forall t \in D)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N)(|\sum_{k=1}^{n} f_k(t) - \sum_{k=1}^{m} f_k(t)| < \varepsilon) \tag{8}$$

Funkční řada je stejnoměrně konvergentní na D k nějaké funkci f právě když platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N)(\forall t \in D)(|\sum_{k=1}^{n} f_k(t) - \sum_{k=1}^{m} f_k(t)| < \varepsilon) \tag{9}$$

Věta 3.3. *(Spojitost řad funkcí) Pokud řada spojitých funkcí $\sum f_k$ na množině D konverguje stejnoměrně k funkci*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t),$$

potom je funkce f spojitá na D.

Jednoduché kritérium stejnoměrné konvergence následuje.

Věta 3.4. *Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ je konvergentní řada s nezápornými členy. Pokud řada spojitých funkcí $\sum f_k$ na množině $D \subset \mathbb{R}$ splňuje $\sup_{t \in D} |f_k(t)| < d_k$, potom je funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ stejnoměrně konvergentní ke spojité funkci na D.*

Následující věta identifikuje předpoklady, za kterých lze zaměnit pořadí operací integrace a derivování s operací nekonečného součtu.

Věta 3.5. *(Integrace a derivování řad funkcí) Pokud řada spojitých funkcí $\sum f_k$ na intervalu $[a, b]$ konverguje stejnoměrně k funkci*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t),$$

pak platí pro každé $x \in [a,b]$
$$\int\limits_a^x f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_k(t)dt. \tag{10}$$

Pokud jsou navíc $f_k'(t)$ *spojité, a řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)$ *konverguje na intervalu* $[a,b]$ *stejnoměrně, pak platí pro každé* $t \in [a,b]$
$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t). \tag{11}$$

Důkaz. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t)dt$ je Cauchyovská a tedy konvergentní. To plyne z (9), neboť pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít N tak že pro libovolná $n, m \geq N$ platí
$$|\sum_{k=n}^{m} \int\limits_a^x f_k(t)dt| = |\int\limits_a^x \sum_{k=n}^{m} f_k(t)dt| \leq \varepsilon(b-a).$$

Zároveň platí
$$|\int\limits_a^x f(t)dt - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_a^x f_k(t)dt| \leq \varepsilon(b-a).$$
Tím je dokázáno (10).

K důkazu (11) položme
$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t).$$

Funkce g je spojitá a můžeme použít předchozí výsledek, takže pro každé $x \in [a,b]$ platí
$$\int\limits_a^x g(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_k'(t)dt. \tag{12}$$

Označme G primitivní funkci k g. Potom platí
$$G(x) - G(a) = \int\limits_a^x g(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_k'(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - f_k(a) = f(x) - f(a). \tag{13}$$

Je tedy zřejmé, že f je též primitivní funkcí g a důkaz je dokončen. $\square$

Hlavními konkrétními příklady funkčních řad jsou mocninné řady a Fourierovy řady, kterým se budeme věnovat v dalším textu.

4. Mocninné řady a Taylorův rozvoj

Mocninná řada se středem x_0 je formální funkční řada tvaru

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k. \tag{14}$$

Za určitých podmínek, tato řada konverguje a funkce f je tedy dobře definována na nějaké množině.

Definice 4.1. *Poloměr konvergence mocninné řady* (14) *je dán formulí*

$$R = \frac{1}{\limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}}.$$

Věta 4.2. *Pro libovolné* $0 < r < R$ *řada* (14) *stejnoměrně konverguje na intervalu* $(x_0 - r, x_0 + r)$. *Pro* $t \notin [x_0 - R, x_0 + R]$ *řada* (14) *diverguje.*

Důkaz. Zvolme $\delta > 0$ dostatečně malé, tak aby platilo $\frac{r}{R} + \delta r = q < 1$. Platí

$$\limsup |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{R},$$

tedy pro nějaké N platí, že pro každé $k \geq N$

$$(|a_k|^{\frac{1}{k}}(x - x_0))^k \leq ((\frac{1}{R} + \delta)r)^k = q^k.$$

Tedy řada (14) je od jistého indexu na intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$ stejnoměrně shora omezená geometrickou řadou a důkaz je podle Věty 3.4 hotov. Divergence podobně. □

Tato věta tedy přesně popisuje množinu bodů na které mocninná řada má smysl (až na dvojici krajních bodů intervalu konvergence, kde konvergence může ale nemusí nastat).

Věta 4.3. *Pro libovolné* $0 < r < R$ *řada* (14) *na intervalu* $(x_0 - r, x_0 + r)$ *reprezentuje funkci třídy* C^∞. *Mocninné řady lze derivovat a integrovat po členech, se zachováním poloměru konvergence. Navíc platí*

$$a_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}.$$

Důkaz. Stačí dokázat, že poloměr konvergence formálně zderivované (nebo zintegrované) řady je opět roven R. Máme tedy řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}. \tag{15}$$

$$\frac{1}{\limsup |k a_k|^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{k-1}}} \frac{1}{(\limsup |a_k|^{\frac{1}{k}})^{\frac{k}{k-1}}} = R.$$

Zbytek důkazu plyne z věty 3.5. □

Příklady.

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \quad t \in (-1, 1)$$

Integrací, resp. derivováním a substitucí získáme rozvoje do řady

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} - \ldots, \quad t \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) t^k, \quad t \in (-1, 1)$$

Definice 4.4. *(Taylorova řada) Nechť je funkce f třídy C^∞ v nějakém okolí bodu x_0. Potom formální nekonečnou mocninou řadu*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{16}$$

nazýváme Taylorovou řadou f se středem x_0.

Hlavní otázkou zůstává, nakolik tato řada reprezentuje funkci f, tedy zda Taylorova řada konverguje k f na nějaké množině. To odpovídá následujícímu pojmu.

Definice 4.5. *(Analytická funkce)*
Říkáme, že funkce f je analytická v okolí bodu $(x_0 - r, x_0 + r)$ právě když je C^∞ hladká a je na tomto intervalu rovná své Taylorově řadě

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r). \tag{17}$$

Z Věty 4.3 plyne, že každá mocninná řada definuje analytickou funkci na odpovídajícím okolí svého středu x_0 o poloměru R. Lze ukázat, že analytická funkce v okolí bodu $(x_0 - r, x_0 + r)$ je automaticky analytická v nějakém okolí každého bodu z tohoto intervalu. Zde je třeba si uvědomit, že změna bodu x_0 vede ke změně Taylorovy formule.

Jak plyne z fundamentální formule (17), analytická funkce, v okolí nějakého bodu x_0, je v tomto okolí jednoznačně určena hodnotami všech svých derivací v tomto bodě. Nelze ji tedy například jakkoli pozměnit v některém podintervalu tohoto okolí.

Tato vlastnost je evidentně podstatně silnější než pouhá C^∞ hladkost.

Příklad. Následující funkce je C^∞ hladká na $\mathbb{R}$, ale není analytická na žádném okolí 0.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \textit{pro } x > 0, \\ 0 & \textit{pro } x \le 0. \end{cases}$$

Přímým výpočtem lze ověřit že funkce je C^∞ hladká, a všechny její derivace v bodě 0 jsou rovny nule, $f^{(k)}(0) = 0$ a její Taylorova řada je triviálně rovna nule. Pokud by tato funkce byla analytická v nějakém okolí nuly, potom by podle formule (17) musela být identicky nulová (což je spor).

Lze zkonstruovat silnější příklady funkcí které jsou C^∞ hladké na celém , ale nejsou analytické na okolí žádného bodu. ($f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\sqrt{2^k}} \cos(2^k x)$).

S použitím Věty 1.12, přesněji řečeno s použitím odhadu zbytku v Taylorově formuli lze ovšem dokázat pro typické elementární funkce, že skutečně jsou analytické. To znamená, z praktického hlediska, že je lze (na nějakém intervalu) rozvinout do nekonečné řady jejíž koeficienty jsou jednoduše odvozeny od všech derivací v jednom bodě.

Věta 4.6. *Nechť $f : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$ je funkce třídy C^∞ jejíž všechny derivace $f^{(i)}$ jsou na intervalu $[x_0 - r, x_0 + r]$ omezeny stejnou konstantou $\sup f^{(i)} \le M$. Potom je na tomto intervalu analytická.*

Důkaz. Omezíme se pro jednoduchost na případ $x_0 = 0$. Taylorova řada f definuje analytickou funkci

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

s poloměrem konvergence rovným

$$R = \frac{1}{\limsup\left(\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right)^{\frac{1}{k}}} \geq \frac{1}{\limsup\left(\frac{M}{k!}\right)^{\frac{1}{k}}} = \infty.$$

Tato řada skutečně představuje analytickou funkci g s poloměrem konvergence $R = \infty$, ale prozatím nevíme, zda tato analytická funkce je na intervalu $[x_0 - r, x_0 + r]$ skutečně rovna naší počáteční funkci $f(x)$.

Zde je nutno použít odhady (1) z Věty 1.12 pro případ $a = 0$. Potom platí

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) x^i + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\eta) x^{k+1} \tag{18}$$

pro nějaké $\eta \in [0, x]$. Z odhadu $|f^{(k+1)}(\eta)| \leq M$ dostaneme pro libovolné $x \in [-r, r]$ odhad zbytku

$$\left|\frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\eta) x^{k+1}\right| \leq \frac{M}{(k+1)!}.$$

Pro $k \to \infty$ jde tento zbytek k nule. Z toho plyne, že Taylorova řada g konverguje k funkci f stejnoměrně na intervalu $[-r, r]$, tedy $f = g$ a důkaz je hotov. $\square$

Probereme detailně případ exponenciální funkce.

Věta 4.7. *Funkce $f(x) = e^x, \sin(x), \cos(x)$ jsou analytické na okolí libovolného bodu. Poloměr konvergence jejich Taylorových řad je přitom roven nekonečnu (tedy řada konverguje na celém $\mathbb{R}$).*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},\ x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},\ x \in \mathbb{R}$$

Důkaz. Stačí ověřit omezenost derivací, podle předchozí věty. $\square$

Podobným způsobem se dokazuje analytičnost dalších známých elementárních funkcí, kterou zde nebudeme uvádět.

Příklady

Pro $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$ položme $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$. Potom platí

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,\ x \in (-1, 1).$$

Speciálně

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k,\ x \in (-1, 1).$$

Z Věty 4.3 okamžitě plyne následující.

Věta 4.8. *Analytické funkce lze derivovat a integrovat po členech, se zachováním poloměru konvergence.*

Analytické funkce lze též vzájemně skládat (se zachováním analyticity na nějakém intervalu).

Pomocí těchto operací lze nacházet rozvoje do řady pro další funkce, bez nutnosti důkazu z definice.

Použitím $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ tak dostaneme

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \ x \in (-1, 1).$$

Použitím $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ tak dostaneme

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, \ x \in (-1, 1).$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \ x \in (-1, 1).$$

5. Fourierovy řady

V této kapitole budeme pracovat s prostorem periodických (spojitých, nebo po částech spojitých) funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, s periodou $T > 0$, tedy takových, že platí $f(x) = f(x+T)$, $x \in \mathbb{R}$.

Úplná informace o takové funkci je obsažena v restrikci této funkce na libovolný interval délky T např. $[0, T]$. Fakticky tedy budeme pracovat s funkcemi na tomto intervalu, a v případě kdy je požadována spojitost budeme navíc předpokládat, že $f(0) = f(T)$.

V celé této kapitole budeme používat konvenční značení svazující parametry periodu T a kruhovou frekvenci ω následovně:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Trigonometrický systém je množina funkcí z tohoto prostoru

$$\{\sin(k\omega t), \cos(k\omega t)\}_{k=1}^{\infty} \cup \{1_{konst.}\}$$

Platí $1_{konst.} = \cos(0\omega t)$ a budeme pro zjednodušení značení v trigonometrickém systému uvažovat člen $\cos(0\omega t)$ s indexem $k = 0$.

Teorie Fourierových řad se zakládá na myšlence, že tento systém tvoří v jistém smyslu bázi prostoru funkcí definovaných na $[0, T]$.

Jak víme, v lineární algebře je báze taková množina vektorů, která umožňuje zapsat každý prvek prostoru jednoznačným způsobem jako (konečnou) lineární kombinaci prvků báze. Pokud pracujeme v lineárním prostoru se skalárním součinem, máme k dispozici též pojem ortogonality vektorů. Ortogonální báze tedy navíc sestává z vektorů navzájem kolmých.

V teorii Fourierových řad půjde o vyjádření funkcí pomocí nekonečných funkčních řad, což přináší řadu obtíží a otázek spojených s konvergencí těchto řad atd.

Pojem skalárního součinu a ortogonality v našem prostoru bude definován následovně. Skalárním součinem dvou prvků (funkcí) f, g bude výraz

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

Dva prvky f, g našeho prostoru funkcí budeme považovat za ortogonální pokud splňují

$$\int_0^T f(t)g(t)dt = 0.$$

Věta 5.1. *(Ortogonalita trigonometrického systému) Je-li $k, m \in \mathbb{N}$ pak*

$$\int_0^T \sin(k\omega t) cos(m\omega t)dt = 0$$

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(m\omega t)dt = \int_0^T \sin(k\omega t)\sin(m\omega t)dt = \begin{cases} 0 & \text{pokud } k \neq m, \\ \frac{T}{2} & \text{pokud } k = m. \end{cases}$$

Definice 5.2. *Pro libovolná $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ nazýváme formální řadu*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

trigonometrickou řadou.

Věta 5.3. *Pokud trigonometrická řada*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t))$$

konverguje stejnoměrně na $[0,T]$ *k funkci* f *(která je díky Větě 3.3 automaticky spojitá, a* $f(0)=f(T)$*), potom platí*

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt,\ b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt$$

Definice 5.4. *Nechť* $f:[0,T]\to I\!R$ *je po částech spojitá funkce. Řadu*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t)$$

kde

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt,\ b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt$$

nazýváme Fourierovou řadou funkce f.

Věta 5.5. *Nechť* $f:[0,T]\to I\!R$ *je po částech spojitá funkce. Pokud* $a_k,b_k=0,k\in I\!N$ *potom* $f=0$ *na* $[0,T]$.

Důkaz. Předpokládejme sporem, že f je spojitá v okolí a a platí $f(a)>0$, $T=2\pi$. Zvolme $p(t)=\varepsilon+\cos(t-a)$, pro vhodné $\varepsilon>0$, tak že $p_k(t)=p(t)^k>1$ pouze na malém okolí a. Dostaneme $\lim_{k\to\infty}\int_0^T f(t)p_k(t)\to\infty$. Protože $p_k(t)$ je trigonometrický polynom, lze ho přepsat jako lineární kombinaci $\sin nt,\cos nt$, a tedy musí existovat $n\in I\!N$ takové ze $a_n\neq 0$ nebo $b_n\neq 0$, což je spor. □

Z této věty vyplývá, že koeficienty Fourierovy řady určují zadanou funkci jednoznačně, tedy obsahují úplnou informaci o zadané (po částech spojité) funkci. Skutečně, pokud mají dvě po částech spojité funkce h,g stejné Fourierovy koeficienty a_k^h,b_k^h, resp. a_k^g,b_k^g, potom platí pro koeficienty funkce $f=h-g$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T(h(t)-g(t))\cos(k\omega t)dt=a_k^h-a_k^g=0,\ b_k=\frac{2}{T}\int_0^T(h(t)-g(t))\sin(k\omega t)dt=b_k^h-b_k^g=0,$$

a tedy $f=h-g=0$.

Nyní přejdeme k otázce konvergence. Byly sestrojeny příklady spojitých funkcí, jejichž Fourierova řada nekonverguje bodově k původní funkci na husté podmnožině definičního oboru. Z hlubokých výsledků teorie však na druhou stranu plyne, že Fourierova řada spojité funkce vždy bodově konverguje na velké (ve smyslu teorie míry) podmnožině definičního oboru. Ty to otázky přesahují náplň tohoto kurzu. Uvedeme místo toho pozitivní výsledky ohledně konvergence, které platí za dodatečných předpokladů na funkci f.

Věta 5.6. *Nechť* $f:[0,T]\to I\!R$ *je funkce třídy* C^2 *(přesněji, je restrikcí* T*-periodické funkce třídy* C^2 *na interval* $[0,T]$*). Potom* $a_k,b_k=O(\frac{1}{k^2})$ *a Fourierova řada funkce* f *konverguje k funkci* f *stejnoměrně na* $[0,T]$.

Důkaz. $T = 2\pi$ pro jednoduchost. Per partes spolu s podmínkami $f(0) = f(T), f'(0) = f'(T)$:

$$a_k = \int_0^T f(t)\cos(kt)dt = [f(t)\frac{1}{k}\sin(kt)]_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^T f'(t)\sin(kt)dt = -\frac{1}{k}\int_0^T f'(t)\sin(kt)dt =$$

$$= [f'(t)\frac{1}{k^2}\cos(kt)]_0^{2\pi} - \frac{1}{k^2}\int_0^T f''(t)\cos(kt)dt = -\frac{1}{k^2}\int_0^T f''(t)\cos(kt)dt$$

Obdobně pro b_k. Z těchto odhadů pro koeficienty a Věty 3.4 plyne, že Fourierova řada konverguje stejnoměrně. □

Říkáme, že f je po částech monotonní pokud lze $[0,T]$ rozdělit na konečně mnoho intervalů $(0,a_1),(a_1,a_2),\dots,(a_n,T)$, na kterých je f spojitá a monotonní.

Následující silnější věta bez důkazu.

Věta 5.7. *Nechť $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ je po částech monotonní. Potom její Fourierova řada konverguje v každém bodě k součtu $s(t) = \frac{1}{2}(f(t+)+f(t-))$. Pokud je f navíc spojitá, pak řada konverguje stejnoměrně na $[0,T]$ k funkci f.*

Příklady.

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin kt, \quad t \in (-\pi,\pi)$$

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4}{k^2}\cos kt, \quad t \in (-\pi,\pi)$$

$$t^2 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}\cos k\pi t, \quad t \in (-1,1)$$

$$f(t) = t,\ 0 \le t \le 1, 1,\ 1 \le t \le 2,\ \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\cos k\pi - 1}{k^2\pi^2}\cos k\pi t - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi t), \quad t \in (0,2)$$

$$f(t) = |t| = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi t, \quad t \in (-1,1)$$

$$\cos t = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(16k^2-1)\pi}(\cos 4kt - 4k\sin 4kt), \quad t \in (0,\frac{\pi}{2})$$

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{if } 0 \le t < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \frac{\pi}{2} < t < \pi, \end{cases} = \frac{2+\pi}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{-2}{\pi(4k^2-1)}\cos 2kt + (\frac{4k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} + \frac{1-(-1)^k}{k\pi})\sin 2kt), \quad t \in (0,\pi)$$

Pro připomenutí:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

6. Množiny v $\mathbb{R}^n$ a funkce více proměnných

Množina $\mathbb{R}^n$ spolu s obvyklými operacemi po složkách tvoří základní příklad lineárního (vektorového) prostoru dimenze n.

Definice 6.1. *Skalární součin vektorů* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ *z* $\mathbb{R}^n$ *je roven*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Definice 6.2. *(Euklidovský prostor)*

Lineární prostor $\mathbb{R}^n$ *spolu se skalárním součinem* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *vytváří strukturu které říkáme Euklidovský prostor. Délka (nebo norma) vektoru je definována takto:*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Úhel mezi vektory splňuje vztah:

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \cdot ||y||}$$

Použitím Pythagorovy věty je zřejmé, že takto definovaná délka vektoru odpovídá délce vektoru ve fyzikálním smyslu.

Z fyzikálního hlediska, prvky Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ lze považovat buď za body, potom užijeme k jejich označení velká písmena $P, Q, \dots$ nebo za vektory (s prvním bodem v počátku). vektory označujeme buď tučně $\mathbf{x}$ nebo šipkou $\overrightarrow{x}$. Budeme bude $P = (p_1, \dots, p_n), Q = (q_1, \dots, q_n)$ dvojice bodů, potom $\overrightarrow{PQ} = (p_1 - q_1, \dots, p_n - q_n)$ je vektor touto dvojicí určený. Pro Euklidovskou vzdálenost těchto bodů platí

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}.$$

Platí následující odhady:

$$\max_i |p_i - q_i| \leq \operatorname{dist}(P, Q) \leq \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$$

Definice 6.3. *(Konvergence v Euklidovském prostoru)*

Říkáme, že posloupnost bodů $\{(x_1^k, \dots, x_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ *z* $\mathbb{R}^n$ **konverguje** *k bodu* $(x_1, \dots, x_n)$ *pokud skalární posloupnost* $\{\|(x_1^k, \dots, x_n^k) - (x_1, \dots, x_n)\|\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje k* 0.

Tvrzení 6.4. *Posloupnost* $\{(x_1^k, \dots, x_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ *v* $\mathbb{R}^n$ *konverguje k bodu* $(x_1, \dots, x_n)$ *právě tehdy když každá z posloupností* $\{x_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje k* x_j*, tedy původní posloupnost vektoru konverguje po složkách.*

Důkaz. □

Definice 6.5. *Říkáme, že množina* $M \subset \mathbb{R}^n$ *je omezená, pokud existuje* $R > 0$ *takové, že* $\forall x \in M$, $\|x\| < R$.

Věta 6.6. *Každá nekonečná omezená posloupnost* $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ *obsahuje konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Vyberme $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M$, $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$ posloupnost navzájem různých prvků z M. Přejdeme postupně k podposloupnostem této posloupnosti použitím principu úplnosti tak, aby posloupnosti jednotlivých souřadnic konvergovaly. □

Definice 6.7. *Kruhové okolí bodu x: pro* $\delta > 0$,

$$U_\delta(x) = \{y; \|x - y\| < \delta\}$$

Definice 6.8. *Nechť $M \subset I\!R^n$. Potom bod $x \in I\!R^n$ se nazývá*

vnitřní bod *pokud*

$$U_\delta(x) \subset M, \text{pro nějaké } \delta > 0$$

vnější bod *pokud*

$$U_\delta(x) \cap M = \emptyset, \text{ pro nějaké } \delta > 0$$

hraniční bod *pokud současně platí*

$$U_\delta(x) \cap M \neq \emptyset, U_\delta(x) \cap (I\!R^n \setminus M) \neq \emptyset \text{ pro každé } \delta > 0$$

Fakt 6.9. *Pro libovolnou množinu $M \subset I\!R^n$ každý bod $x \in I\!R^n$ splňuje právě jednu z předchozích podmínek.*

Příklady.

Definice 6.10. Vnitřek množiny *M° je definován jako množina všech vnitřních bodů M.* **Hranice množiny** *∂M je definována jako množina všech hraničních bodů.* **Uzávěr množiny** *M je definován jako $\overline{M} = M \cup \partial M$. Říkáme, že množina $M \subset I\!R^n$ je* **otevřená**, *pokud $M = M^\circ$. Říkáme, že množina $M \subset I\!R^n$ je* **uzavřená**, *pokud $M = \overline{M}$.*

Příklady.

$\{p_1, \ldots, p_k\} \subset I\!R^2$ $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ nadrovina v$I\!R^n$

Fakt 6.11. *Sjednoceni systému otevřených množin je otevřená množina.*

Fakt 6.12.

$$\overline{M} = \{x \in I\!R^n; \forall \delta > 0,\ U_\delta(x) \cap M \neq \emptyset\}$$

Důsledek 6.13. *Pro každou množinu platí $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$, tedy uzávěr libovolné množiny je uzavřená množina. M je uzavřená právě když $I\!R^n \setminus M$ je otevřená.*

Věta 6.14. *$M \subset I\!R^n$ je uzavřená a omezená právě když každá nekonečná posloupnost $\{x^k\} \subset M$ obsahuje konvergentní podposloupnost jejíž limita leží v M.*

Důkaz. Podle Věty 6.6 každá posloupnost v obsahuje konvergentní podposloupnost. Pokud je M uzavřená, limitní bod musí ležet v M a jedna implikace je tím dokázaná. Opačná implikace. Předpokládejme sporem, že M není uzavřená, a $x \in \overline{M} \setminus M$. Musí existovat $\{x^k\} \subset M$ taková, že $\lim x^k = x$. Podle předpokladu existuje nějaká konvergentní podposloupnost s limitou v M . Ale tato limita musí být rovna x a tedy $x \in M$. □

Důsledek 6.15. *Funkce $f : [a,b] \to I\!R$ je spojitá právě když její graf je uzavřená množina.*

7. Limity a spojitost funkcí více proměnných

Pod pojmem funkce více proměnných budeme rozumět funkce typu

$$f : D \to I\!R^m, \text{ kde } D \subset I\!R^n.$$

Obvykle je f zadáno formulí

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

kde f_j jsou reálné funkce s definičním oborem D (a hodnotami v $I\!R$).

Pokud definiční obor D není specifikován, bere se obvykle maximální možný kde má funkční zadání smysl.

Graf funkce je podmnožina $I\!R^n \times I\!R^m$ která obsahuje právě body $(x, f(x))$. Lze ji nakreslit pouze pro malá n, m, použití různých řezů a vrstevnic, nebo užitím symetrie.

Příklady.

Hlavní příklady jsou $f : I\!R^n \to I\!R$, $f : I\!R^n \to I\!R^n$ a dále lineární funkce reprezentovatelné pomocí matic.

$$f(x,y) = ax^2 + by^2, \ \ a, b \in I\!R$$

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$f(x,y) = \sin(x+y)$$

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

Definice 7.1. *Říkáme, že funkce $f : D \to I\!R^m$, $D \subset I\!R^n$, má v bodě $x \in \overline{D}$* **limitu** *a pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in D \setminus \{x\}, \ \|y - x\| < \delta \implies \|f(y) - a\| < \varepsilon$$

Příklady. (e.g. polární souřadnice, nebo jiná metrika $\max\{|x|, |y|\}$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0 \ \ (polrn)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^3(x+y)}{x^2 + y^2} = 0 \ \ (\max\{|x|, |y|\}, \lim \frac{\sin t}{t} = 1)$$

Pokud limita existuje, existují všechny limity podél spojitých křivek blížících se k bodu limity, $t \to (x(t), y(t))$, kde $(x(t), y(t)) = a \Leftrightarrow t = 0$, a tyto limity jsou si rovny. Tedy platí

$$\lim_{t\to 0} f(x(t), y(t)) = \lim_{(x,y)\to a} f(x,y)$$

Tato podmínka vsak není prakticky použitelná pro ověření existence limity. Lze ji použít jako podmínku nutnou, tedy k důkazu neexistence limity.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} neex. x = 0, x = y$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} neex. x = 0, x^2 = y$$

Definice 7.2. *Říkáme, že funkce $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ je* **v bodě** $x \in D$ **spojitá** *pokud se její funkční hodnota rovná limitě.*

Věta 7.3. *Funkce $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá v bodě $a \in D$ právě když všechny funkce f_j jsou spojité v bodě a.*

Díky této větě stačí tedy vždy zkoumat spojitost skalárních funkcí.

Věta 7.4. *(Věta o kompozici spojitých funkcí)*
Nechť $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m, C \subset \mathbb{R}^k$, $f : A \to B, h : B \to C$ jsou funkce s vlastnostmi: f je spojitá v bodě $a \in A$, h je spojitá v bodě $b = f(a)$. Potom $h \circ f$ je spojitá v bodě $a \in A$.

Speciálně tedy platí

Důsledek 7.5. *Nechť $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \phi(x_j)$$
je spojitá v každém bodě $(x_1, \ldots, a, \ldots, x_n)$.

Věta 7.6. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$, $f : A \to B, g : A \to B$ jsou funkce spojité v bodě $a \in A$. Potom $f + g$ je spojitá v $a \in A$, pokud $B = \mathbb{R}$ potom též $fg, \frac{f}{g}$ jsou spojité v bodě $a \in A$ (u podílu pokud $g(a) \neq 0$).*

Díky těmto větám můžeme snadno najít limity funkci které jsou spojité.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y+1} = 0$$
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{1+xy}{xy-1} = 3$$

Definice 7.7. *Říkáme, že funkce $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ je* **spojitá** *pokud je spojitá v každém bodě $x \in D$.*

Použitím všech předchozích vět o spojitosti funkcí dostáváme výsledek, že každá "rozumně"definovaná funkce více proměnných (pomocí formule obsahující obvykle spojité funkce jedné proměnné) je spojitá ve svém definičním oboru.

Př.
$$f(x, y, z) = \sin(x^2 - \frac{y}{z})$$

8. Stejnoměrná spojitost funkcí více proměnných

Věta 8.1. *Spojitá funkce $f : D \to \mathbb{R}$ na omezené uzavřené množině $D \subset \mathbb{R}^n$ je omezená (tedy její obor hodnot tvoří omezenou množinu) a nabývá svého maxima a minima.*

Důkaz. Obě tvrzení se dokáží stejným postupem, sporem. Dokážeme druhé z nich. Předpokládejme tedy, že f nenabývá svého maxima. Tedy existuje posloupnost $\{x^k\} \subset D$ pro kterou platí že $\{f(x^k)\}$ je rostoucí posloupnost s limitou $\lim f(x^k) = \sup_D f$. Podle Věty 6.14 můžeme BÚNO předpokládat, že $\{x^k\}$ konverguje k nějakému bodu $x \in D$. Ze spojitosti f, $\lim f(x^k) = f(x) = \sup_D f$ což je spor a důkaz je hotov. □

Definice 8.2. *Funkce $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ je* **stejnoměrně spojitá** *pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \quad \|y - x\| < \delta \implies \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$$

Příklady:

$$f(x) = \sin x, f(x) = x^2, f(x) = \tan x$$

Následující věta bude použita při konstrukci integrálu.

Věta 8.3. *Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená omezená podmnožina, $f : D \to \mathbb{R}^m$ je spojitá. Potom f je stejnoměrně spojitá na D.*

Důkaz. Postupujeme sporem. Předpokládáme, že existuje $\varepsilon > 0$ a dvě posloupnosti $\{x^k\}, \{y^k\} \subset D$ takové, že platí:

$$\lim \|x^k - y^k\| = 0, \text{ a zároveň pro každé } k \in \mathbb{N} \text{ platí } f(x^k) - f(y^k) \geq \varepsilon.$$

Nyní můžeme přejít k dalším podposloupnostem tak, aby navíc platilo, že $L = \lim f(y^k)$ existuje. Potom $\liminf f(x^k) \geq L + \varepsilon$. Označme

$$x = \lim y^k = \lim x^k \in D.$$

Je zřejmé, že musí platit

$$\lim f(x^k) = \lim f(y^k) = f(x),$$

což ovšem v našem případě není splněno, tedy máme spor a důkaz je dokončen. □

9. Parciální derivace prvního řádu

Definice 9.1. *(Směrová derivace)*

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. **Směrová derivace** *funkce $f : U \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in U$ ve směru h je dána výrazem*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}.$$

Jako zkrácené značení se též užívá $\partial_h f(a)$. použitím Tvrzení 1.9 získáme

Tvrzení 9.2.

$$f(a+th) = f(a) + Kt + o(t) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a) \text{ existuje a je rovno } K.$$

Příklad.

$$f(x,y) = x^2 + y^2, a = (1,0), h = (1,1)$$

Tvrzení 9.3. *Nechť $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$ potom*

$$\frac{\partial f}{\partial (th)}(a) = t \frac{\partial f}{\partial h}(a)$$

Důkaz.

$$f(a + \tau th) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial (th)} \tau + o(\tau)$$

$$f(a + \tau th) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial (h)} t\tau + o(t\tau)$$

□

Tvrzení 9.4. *Pokud funkce f má spojitou směrovou derivaci ve směru h v každém bodě úsečky $a(a+h)$, pak platí*

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a+th) dt$$

Důkaz. Položme $\phi(t) = f(a+th)$, $t \in [0,1]$. Podle základní věty analýzy

$$f(a+h) - f(a) = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a+th) dt$$

□

Odtud plyne následující Věta o střední hodnotě.

Tvrzení 9.5. *Pokud funkce f má spojitou směrovou derivaci ve směru h v každém bodě úsečky $a(a+h)$, pak existuje $\tau \in [0,1]$ takové, že*

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a + \tau h)$$

Speciální případ, derivace ve směru souřadnicových vektorů,

Definice 9.6. *(Parciální derivace)*

Nechť e_j je jednotkový souřadnicový vektor, potom budeme používat historické značení:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(a)$$

Definice 9.7. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina.* **Gradient** *skalární funkce $f : U \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in U$ je vektor (pokud parciální derivace existují)*

$$\mathit{grad} f(a) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\big)$$

Z historických důvodů je více druhů značení. Užívá se též např. ∇,
Příklady.

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - (x^2 + y^2) + xy$$

$$f(x, y) = \sin(x + xy^2)$$

V tomto kurzu budeme pro zjednodušení jazyka a značení ztotožňovat lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s jeho reprezentující maticí tvaru $m \times n$.

Definice 9.8. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina.* **Derivace** *(ve starší terminologii* **totální diferenciál***, nebo* **diferenciál***) funkce $f : U \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení (resp. matice) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s vlastností*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - Lh}{\|h\|} = 0.$$

Pokud derivace (diferenciál) existuje, značíme jí $df(a) = L$, $df(a)[h] = Lh$.

Je zřejmé, že pokud derivace existuje, je určena jednoznačně. Speciální případ derivace pro reálně hodnotové funkce

Tvrzení 9.9. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Funkce $f : U \to \mathbb{R}$ má derivaci v bodě $a \in U$ právě když existuje lineární zobrazení (matice) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takové, že*

$$f(a + h) = f(a) + Lh + o(\|h\|).$$

V tomto případě navíc platí $df(a) = L$.

Je zřejmé, že derivace je určena jednoznačně, a implikuje spojitost funkce v daném bodě. Dále je zřejmé, že Taylorova formule 1. řádu poskytuje nejlepší lineární aproximaci funkce v okolí bodu.

Věta 9.10. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Pokud $f : U \to \mathbb{R}$ má derivaci v bodě $a \in U$, pak má v tomto bodě všechny směrové derivace a pro každé h platí*

$$df(a)[h] = \partial_h f(a) = \mathit{grad} f(a) \cdot h \tag{19}$$

Tedy gradient tvoří maticovou reprezentaci derivace (resp. vektorovou reprezentaci při použití skalárního součinu) a platí .

$$f(a + h) = f(a) + \mathit{grad} f(x) \cdot h + o(\|h\|).$$

Důkaz. Podle Tvrzení 9.9 víme, že platí pro matici L reprezentující $df(a)$

$$f(a + th) = f(a) + tLh + o(\|h\|t).$$

Pro pevné h, $K = Lh$ a $t \to 0$ tedy máme

$$f(a + th) = f(a) + Kt + o(t).$$

Aplikací Tvrzení 9.2 tedy
$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(a)$$
Volbou $h = e_i$ získáváme
$$L(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$
Tedy maticová reprezentace L derivace $df(a)$ splňuje $L = gradf(a)$ a (19) plyne neboť $df(a)[h] = Lh = gradf(a) \cdot h$.

□

10. Gradient a derivace prvního řádu

Věta 10.1. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina. Pokud jsou všechny parciální derivace $f : U \to I\!R$ v bodě $a \in U$ spojité, potom má f v tomto bodě derivaci.*

Důkaz. použitím věty o střední hodnotě 9.5 a 9.3

$$f(a+h)-f(x) = f(a+(h_1,\dots,h_n))-f(a+(0,h_2,\dots,h_n))+f(a+(0,h_2,\dots,h_n))-$$

$$-f(a+(0,0,h_3,\dots,h_n)) + ... - f(a) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(a^j + \tau_j h_j e_j)h_j$$

kde $a^j = a + (0,\dots,0,h_{j+1},\dots,h_n)$. Ze spojitosti parciálních derivací máme

$$f(a+h) - f(a) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j + o(\|h\|)$$

a výsledek plyne z věty 9.9. □

Najděte nejlepší lineární aproximaci funkce $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + z$ v okolí bodu $(0,1,2)$.

Definice 10.2. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina. Pokud jsou všechny parciální derivace všech složek funkce $f = (f_1,\dots,f_m) : U \to I\!R^m$ spojité, potom říkáme že funkce je třídy C^1.*

Reformulace Tvrzení 9.4.

Tvrzení 10.3. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina, $f : U \to I\!R$ je třídy C^1, a úsečka $a(a+h)$ leží uvnitř U, pak platí*

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 df(a+th)[h]dt$$

Příklady pro použití gradientu k získání geometrických vlastnosti grafu funkce.

Tvrzení 10.4. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina. Nechť $f : U \to I\!R$ má v bodě a diferenciál $df(a) = grad\ f(a)$. Potom vektor gradientu dává směr nejrychlejšího růstu funkce. Vektor $(df(a),-1)$ je kolmý na graf funkce f v bodě a (normálový vektor).*

Důkaz. Nechť h je jednotkový vektor, $\|h\| = 1$, potom

$$f(a+h) = f(a) + grad\ f(a)\cdot h + o(\|h\|) = f(a) + \|grad\ f(a)\|\|h\|\cos(\phi) + o(\|h\|)$$

kde ϕ je úhel sevřený vektory $grad\ f(a)$ a h. Nejrychlejší růst je tedy zřejmý.
Nyní položme $x = a + h$,

$$x_{n+1} = f(x) = f(a) + grad\ f(a_1,\dots,a_n)\cdot(h_1,\dots,h_n) + o(\|h\|) =$$

$$= f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i) + o(\|h\|)$$

$$-(x_{n+1} - f(a)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i) = o(\|h\|)$$

Normálový vektor $(df,-1)$ nadroviny v $I\!R^{n+1}$ (tečné ke grafu f v bodě a)

$$-(x_{n+1} - f(a)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i) = 0$$

je tedy kolmý na graf f. □

Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x,y) = x^3 + y^3$ v bodě $(x,y) = (1,2)$.

Najdete úhel pod kterým se protínají grafy funkcí $f(x,y) = x^3 + y^3$, $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4$ v bodě $(x,y) = (1,2)$

Definice 10.5. *Nechť $V \subset I\!R^n$, $f : V \to I\!R$. Říkáme, že f má v bodě $a \in V$* **absolutní maximum** *(resp. minimum), pokud $f(a) = \max_{x\in V} f(x)$ (resp $\min$).*

Říkáme že f má v bodě $a \in V$ **lokální maximum** *(resp. minimum), pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(a) = \max_{x\in V\cap U_\delta(a)} f(x)$ (resp $\min$). Pokud f má v bodě $a \in V$ buď lokální maximum nebo minimum, říkáme že má v a* **lokální extrém**.

Je zřejmé, že absolutní extrémy jsou automaticky též lokálními extrémy.

Tvrzení 10.6. *Nechť $V \subset I\!R^n$, $f : V \to I\!R$ má v bodě $a \in V^\circ$ lokální extrém a diferenciál $df(a)$. Potom $df(a) = 0$.*

Bodům kde derivace je nulová říkáme kritické body. Je tedy zřejmé, že nutná podmínka pro existenci lokálního extrému ve vnitřním bodě definičního oboru je vlastnost býti kritickým bodem.

Příklad. Najděte kritické body funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. (vyjde sedlo $(0,0)$ a dvě lokální minima $(1,1), (-1,-1)$ k těmto závěrům je nutné použít druhou derivaci)

Věta 10.7. *Nechť $V \subset I\!R^n$ je uzavřená omezená množina, $f : V \to I\!R$ je spojita funkce třídy C^1 na V°. Potom f nabývá svých absolutních extrémů, a tyto body se nacházejí buď na hranici ∂V, nebo jsou vnitřními body V a v tomto případě jsou též kritickými body f.*

V obecném případě je k analýze chování funkce na hranici potřeba technika Lagrangeových multiplikátorů, se kterou se seznámíme později. Někdy lze hranici analyzovat přímo.

Příklad: najděte extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$ v trojúhelníku $(0,0), (0,3), (3,0)$.

11. Obecná derivace prvního řádu a řetězové pravidlo

Definice 11.1. *(Obecný případ derivace)*

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Derivace (ve starší terminologii totální diferenciál) funkce $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení (resp. matice $m \times n$) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s vlastností

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|h\|} = 0.$$

Pokud derivace (diferenciál) existuje, značíme jí $df(a) = L$, $df(a)[h] = Lh$.

Tvrzení 11.2. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Funkce $f : U \to \mathbb{R}^m$ má v bodě $a \in U$ derivaci právě když existuje lineární zobrazeni $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takové, že*

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o(\|h\|). \tag{20}$$

V tomto případě navíc platí $df(a) = L$.

Lze snadno vidět, že derivace představuje nejlepší lineární aproximaci funkce na okolí bodu, v tom smyslu, že rovnice (20) určuje jednoznačně zobrazení L.

Důsledek 11.3. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Pokud je funkce $f : U \to \mathbb{R}^m$ v bodě $a \in U$ diferencovatelná, potom je v tomto bodě též spojitá.*

Věta 11.4. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Pokud $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ je třídy C^1 na okolí bodu $a \in U$, potom má f v bodě a diferenciál, a platí*

$$df(a) = \begin{pmatrix} df_1(a) \\ \vdots \\ df_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Tato matice se nazývá Jacobiho matice v bodě a. Dále platí lineární aproximační formule

$$f(a+h) = f(a) + df(a)[h] + o(\|h\|) = f(a) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} + o(\|h\|)$$

Součet diferencovatelných funkcí je opět diferencovatelná funkce.

Věta 11.5. *(Derivování složených funkcí)*

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Pokud funkce $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ je v bodě a diferencovatelná a funkce $g = (g_1, \ldots, g_k) : V \to \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^m$ je v bodě $f(a)$ diferencovatelná, potom složená funkce $h = g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ je diferencovatelná v bodě a a její Jacobiho matice je rovna součinu Jacobiho matic reprezentujících $dh(a) = dg(f(a))df(a)$, tedy platí (položme $b = f(a)$)

$$dh(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Po rozepsání tedy dostaneme pro případ $k = 1$:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

12. Parciální derivace vyššího řádu a Hessián

Derivace vyšších řádu jsou obecně definovány jako homogenní polynomy odpovídajícího stupně. Budeme se pro jednoduchost zabývat případem funkcí s hodnotami pouze v $I\!R$, a derivacemi druhého řádu.

Definice 12.1. *Nechť $f : U \to I\!R$ je funkce jejíž parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ (jakožto funkce proměnné $x \in U$) je opět diferencovatelná v bodě $a \in U$ podle proměnné x_i. Opakováním operace parciálních derivací získáme parciální derivace druhého řádu*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_j})}{\partial x_i}(a)$$

V případě $i = j$ se používá zkrácený zápis $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Věta 12.2. *Nechť $f : U \to I\!R$, $U \subset I\!R^n$ otevřená množina, $a \in U$. Jestliže derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ jsou spojité, pak jsou si rovny, tedy platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $n = 2, i = 1, j = 2$. Důkaz spočívá v úpravě dvěma způsoby výrazu V pro $\delta \to 0$

$$V = f(x_1 + \delta, x_2 + \delta) - f(x_1 + \delta, x_2) - f(x_1, x_2 + \delta) + f(x_1, x_2)$$

Zavedeme funkci

$$\alpha(t) = f(x_1 + \delta, x_2 + t) - f(x_1, x_2 + t)$$

Potom

$$V = \alpha(\delta) - \alpha(0)$$

Podle věty o střední hodnotě existuje $\tau \in (0, \delta)$ tak, že

$$V = \alpha'(\tau)\delta = \delta\frac{\partial}{\partial x_2}[f(x_1+\delta, x_2+\tau) - f(x_1, x_2+\tau)] = \delta[\frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1+\delta, x_2+\tau) - \frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1, x_2+\tau)]$$

Ještě jednou použijeme větu o střední hodnotě a dostaneme, že existuje $\eta \in (0, \delta)$ pro něž platí

$$V = \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1 + \eta, x_2 + \tau)$$

Prohozením role souřadnic dostaneme analogicky

$$V = \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1 + \tilde{\eta}, x_2 + \tilde{\tau})$$

K dokončení důkazu použijeme spojitost těchto derivací. □

Definice 12.3. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina, $f : U \to I\!R$. Říkáme, že funkce f je třídy C^2 pokud všechny parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existují a jsou spojité na U.*

Definice 12.4. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená množina, $f : U \to I\!R$ je třídy C^2, $a \in U$. Potom Hessiánem f v bodě a nazýváme symetrickou matici*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Homogenní kvadratický polynom $P(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum\sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j$ v n proměnných lze jednoznačně vyjádřit s použitím symetrické matice ($a_{ij} = a_{ji}$)

$$P(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že tato korespondence mezi homogenními kvadratickými polynomy a symetrickými maticemi je vzájemně jednoznačná.

Definice 12.5. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : U \to \mathbb{R}$ je třídy C^2, $a \in U$. Potom definujeme druhou derivaci $d^2f(a)$ funkce f jako homogenní kvadratický polynom, reprezentovaný Hessiánem, pro který platí*

$$d^2f(a)[h] = \begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \ddots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Poznámka. Pro zjednodušení jazyka a značení budeme v dalším textu místy ztotožňovat druhou derivaci $d^2f(a)$ s Hessiánem (tyto objekty jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu), tedy budeme psát (formálně nepřesně)

$$d^2f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Věta 12.6. *(Taylorův polynom 2 řádu)*

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : U \to \mathbb{R}$ je třídy C^2, $a \in U$. Pak platí odhad

$$f(a+h) = f(a) + df(a)[h] + \frac{1}{2}d^2f(a)[h] + o(\|h\|^2) \tag{21}$$

Důkaz. Pro pevné $a \in U, v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$, položme $\phi(t) = f(a+tv)$. Potom s použitím Věty 9.10 máme

$$\phi'(t) = \partial_v f(a+tv) = \mathrm{grad} f(a+tv) \cdot v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(a+tv)}{\partial x_j} v_j$$

$$\phi''(t) = \partial_v(\phi'(t)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+tv)v_iv_j$$

Je zřejmé, že ϕ je třídy C^2, takže podle Věty 1.10

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2}\phi''(0)t^2 + R(0,t),$$

kde chyba splňuje nerovnost

$$|R(0,t)| \le \sup_{\tau\in[0,1]} |\phi''(\tau t) - \phi''(0)|t^2.$$

Tedy platí

$$f(a+tv) = f(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} tv_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)tv_itv_j + R(0,t)$$

Označíme-li $h = tv$ a dosadíme do této formule, máme

$$f(a+h) = f(a) + df(a)[h] + \frac{1}{2}d^2f(a)[h] + R(0,t)$$

K dokončení důkazu věty zbývá odvodit, že chyba $R(0,t)$ splňuje $o(\|h\|^2)$. Tento krok využívá pojmu normy matice, který jsme nezavedli a je tedy poněkud nad rámec našeho výkladu. Označíme-li A_τ Hessián f v bodě $a + \tau tv$,

$$A_\tau = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(a+\tau tv) & \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n \partial x_1}(a+\tau tv) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a+\tau tv) & \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_n}(a+\tau tv) \end{pmatrix}$$

Potom odhad chyby $R(0,t)$ lze přepsat následovně (vektor v píšeme jako sloupcový)

$$|R(0,t)| \leq \sup_{\tau\in[0,1]} |v^T(A_\tau - A_0)v|t^2.$$

Vidíme tedy (f je třídy C^2), že bez ohledu na konkrétní hodnotu v,

$$|R(0,t)| \leq \sup_{\tau\in[0,1]} \|A_\tau - A_0\|\|v\|^2t^2 = \sup_{\tau\in[0,1]} \|A_\tau - A_0\|\|h\|^2 = o(\|h\|^2).$$

Odhad chyby je přitom uniformní ve všech směrech, což dokončuje důkaz.

□

Maticový zápis formule (21), kdy ztotožníme df s řádkovou maticí gradientu a d^2f s maticí Hessiánu, a vektor h je sloupcový, bude vypadat takto:

$$f(a+h) = f(a) + df(a)h + \frac{1}{2}h^T d^2f(a)h + o(\|h\|^2) \tag{22}$$

13. Aplikace Hessiánu na lokální extrémy

Z lineární algebry víme, že pro dvě báze $\{u_1,\dots,u_n\},\{v_1,\dots,v_n\}$ vektorového prostoru X dimenze n existuje jednoznačně určená čtvercová matice $A=(a_{ij})$ taková, že pro každý prvek $u\in X$, který má vyjádření $u=\sum_{i=1}^n x_iu_i=\sum_{i=1}^n y_iv_i$, platí

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\tag{23}$$

Je přitom zřejmé, že j-tý sloupec A vyjadřuje vektor v_j zapsaný s pomocí báze $\{u_i\}$, tedy $v_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}u_i$.

Předpokládejme, že $F:X\to I\!R$ je funkce, kterou je možno vyjádřit pro každý vektor $u=\sum_{i=1}^n x_iu_i=\sum_{i=1}^n y_iv_i$ pomocí obvyklé formule s použitím souřadnic následovně (zde jsou $f,g:I\!R^n\to I\!R$ nějaké jednoznačně určené funkce):

$$F(u)=f(x_1,\dots,x_n)=g(y_1,\dots,y_n).$$

Z transformační formule 23 je zřejmé, že platí

$$f(\sum_{j=1}^n a_{1j}y_j,\dots,\sum_{j=1}^n a_{nj}y_j)=g(y_1,\dots,y_n)\tag{24}$$

Předpokládejme nyní, že chceme studovat nějakou funkci $f:I\!R^n\to I\!R$, třídy C^2. Považujeme kanonickou jednotkovou bázi $\{e_i\}$ prostoru $I\!R^n$ za bázi $\{u_i\}$ z předchozího výkladu (v prostoru X dimenze n, $F(\sum x_iu_i)=f(x_1,\dots,x_n)$), a máme k dispozici ještě další bázi $\{v_i\}$ prostoru X. Potom formule (24) vyjadřuje transformaci vyjádření funkce f z původního souřadného systému s bází $\{u_i\}$ do nového vyjádření g s pomoci souřadného systému s bází $\{v_i\}$. Funkce $g:I\!R^n\to I\!R$, je kompozicí $g=f\circ A$, je tedy třídy C^2 (zde jsme ztotožnili matici A s lineárním zobrazením z $I\!R^n$ do $I\!R^n$, které je maticí A určeno). Máme tedy k dispozici dvě různé funkce $f,g:I\!R^n\to I\!R$, které ovšem reprezentují totéž zobrazení F, a mohou být tedy použity ke studiu F $(=f)$, speciálně k hledání lokálních extrémů. Derivováním složené funkce (24) v bodě $y\in I\!R^n$ vyjde

$$dg(y)=(\frac{\partial g(y)}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial g(y)}{\partial y_n})=(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f(Ay)}{\partial x_i}a_{i1},\dots,\sum_{i=1}^n\frac{\partial f(Ay)}{\partial x_i}a_{in})\tag{25}$$

Což lze přepsat maticově

$$dg(y)=df(Ay)A=(\frac{\partial f(Ay)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(Ay)}{\partial x_n})\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\tag{26}$$

$$d^2g(y)=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(Ay)a_{i1}a_{j1}&\cdots&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(Ay)a_{i1}a_{jn}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(Ay)a_{in}a_{j1}&\cdots&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(Ay)a_{in}a_{jn}\end{pmatrix}$$

Což lze opět přepsat maticově $d^2g(y)=A^Td^2f(Ay)A$, tedy (ztotožněním Hessiánu s druhou derivací) získáme

$$d^2g(y) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(Ay) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(Ay) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(Ay) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(Ay) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

máme tedy transformovanou Taylorovu formuli (22) pro g, vyjádřenou maticově (předpokládáme, že vektor h je sloupcový a d^2f je Hessián-tedy matice)

$$g(y+h) = g(y) + df(Ay)Ah + \frac{1}{2}h^T A^T d^2 f(Ay)Ah + o(\|h\|^2)$$

Nyní jsme tedy v situaci, kdy vhodnou transfomací souřadnic A můžeme dosáhnout diagonalizace Hessiánu. K tomuto cíli je třeba použít věty z lineární algebry.

Připomeňme, že báze $\{\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n}\}$ v $I\!R^n$ se nazývá ortonormální pokud její členové jsou jednotkové a navzájem kolmé vektory. Ortonormální báze ma význačnou vlastnost. Nechť $\mathbf{u_j} = (u_{1j}, \dots, u_{nj})$. Pokud zvolíme

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Potom $U^{-1} = U^T$. Pro hledání diagonální reprezentace Hessiánu tedy můžeme užít teorii podobnosti matic, a zejména vlastních čísel a vlastních vektorů. Toto vše je důsledkem jedné z hlavních vět lineární algebry:

Věta 13.1. *(Věta o hlavních osách)*
Pro každou symetrickou matici $H = (h_{ij})$ existuje orthonormální matice $A = (a_{ij})$ taková, že $A^T HA = A^{-1}HA$ je diagonální matice, tedy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Posloupnost vlastních čísel $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ je přitom určena jednoznačně.

Jako okamžitý důsledek věty získáváme, že pro každý kvadratický homogenní polynom $P(x_1, \dots, x_n)$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

existuje orthonormální báze taková, že formule pro polynom v nových souřadnicích má tvar $P \circ U(y) = Q(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

$$P \circ U(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

Příklad odvozený od polynomu $2x^2 + 2y^2 + 2xy$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Najdeme vlastní čísla $3, 1$ a vektory $(1, 1), (-1, 1)$ Orthogonální transformace bude tedy

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

a platí

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Definice 13.2. *Nechť $H = (h_{ij})$ je symetrická matice, s posloupností vlastních čísel $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Říkáme, že H je*

$$\textit{pozitivně definitní pokud } \lambda_n > 0,$$
$$\textit{negativně definitní pokud } \lambda_1 < 0,$$
$$\textit{indefinitní pokud } \lambda_1 > 0,\ \lambda_n < 0.$$

Povšimněme si, že případ $\lambda_1 = 0$ nebo $\lambda_n = 0$ není zahrnut.

Základní problém při diagonalizaci matice spočívá v tom, že vyžaduje řešení rovnice n tého stupně, pro které neexistuje vzorec pokud je n větší než čtyři.

Definitnost lze však testovat bez výpočtu vlastních čísel pomocí následující věty.

Věta 13.3. *(Sylvestrovo kritérium)*

Matice H je pozitivně definitní právě tehdy když jsou všechny hlavní subdeterminanty matice H kladné, tj.

$$d_m = det \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mm} \end{pmatrix} > 0, \quad m \leq n,$$

H je negativně definitní právě tehdy když $d_1 < 0$ a celá posloupnost $\{d_m\}_{m=1}^n$ střídá po každém kroku znaménka.

H je indefinitní jestlize $d_n \neq 0$ a posloupnost $\{d_m\}_{m=1}^n$ nesplňuje některou z předchozích podmínek. (Tato podmínka je postačující ale nikoliv nutná)

Jedním z důsledků je následující kritérium pro lokální extrémy.

Věta 13.4. *Nechť $f : U \to I\!R$, $U \subset I\!R^n$ je otevřená množina, $a \in U$. Předpokládejme, že f má všechny derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ spojité, a platí $df(a) = 0$. Pokud Hessián $d^2 f(a)$ je pozitivně definitní, potom f nabývá lokálního minima v a. Pokud Hessián $d^2 f(a)$ je negativně definitní, potom f nabývá lokálního maxima v a. Pokud Hessián $d^2 f(a)$ je indefinitní, potom f nenabývá lokálního extrému.*

Důkaz. Stačí provést transformaci Taylorovy formule f 2 řádu do nových souřadnic ve kterých je Hessián diagonální. □

Příklady na absolutní a lokální extrémy.

Zjistěte body lokálních extrémů:

$$z = x(3 - x^2) - y^2$$

2 kritické body, max a sedlo.

$$z = (x - y)^2 + 2(y + 1)^2 + 1 = x^2 + 3y^2 - 2xy + 4y + 3$$

$$z = x^3 + y^3 + 9xy + 27$$
$$z = xe^{y + x \sin x}$$

Zjistěte body absolutních extrémů na množinách:

$$z = e^{xy}, \quad x + y = 1$$
$$z = x - 2y - 3, \quad 0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1$$

14. Implicitní funkce a Lagrangeovy multiplikátory

V praxi je častý případ kdy vzájemnou závislost několika proměnných lze vyjádřit rovnicí

$$f(x_1,\dots,x_n)=0.$$

Příklad: body na kružnici, nebo na sféře $x^2+y^2+z^2-1=0$.

V této situaci, obecně řečeno, nelze předpokládat že některá proměnná je funkcí ostatních. Lokálně to však platit může. Geometricky intuitivně řečeno, množiny bodů které splňují tuto rovnici tvoří plochy v $I\!R^n$. Jejich studium je umožněno lokálním nahrazením pomocí lineární aproximace

Věta 14.1. *(Věta o implicitní funkci)*

Nechť $U\subset I\!R^n$ je otevřená množina, $F:U\to I\!R$ je třídy C^1, $F(a)=0$, a předpokládejme ze některá parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x_j}(a)$ je nenulová. Potom existuje okolí $U_\delta(a)$ na kterém existuje jednoznačně definována funkce třídy C^1

$$x_j=h(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n),$$

taková, že platí

$$F(x_1,\dots,x_{j-1},h(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n),x_{j+1},\dots,x_n)=0$$

a normálový vektor ke grafu takto implicitně zadané funkce má tvar $gradF$.

Větu nebudeme dokazovat, ale předpokládame-li že implicitní funkce existuje, výpočet jejícho gradientu lze provést následovně. Předpokládejme, že $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)$ je nenulová,

$$x_n=h(x_1,\dots,x_{n-1}),\ \ F(x_1,\dots,x_{n-1},h(x_1,\dots,x_{n-1}))=0$$

$$gradF(x_1,\dots,x_{n-1},h(x_1,\dots,x_{n-1}))=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_1},\quad\dots,\quad\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}\right)=0$$

Takže

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_i}=0,\ \ i=1,\dots,n-1$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$$

a normálový vektor ke grafu h má tvar

$$\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}},\quad\dots,\quad-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}},-1\right)$$

Věta o implicitní funkci nám říká, že nulová množina C^1 funkce F je vlastně sjednocením nějakého systému grafů C^1 funkcí (pokud víme, že $gradF$ je všude nenulový). Jde tedy skutečně o plochu v intuitivním smyslu.

Příklad.

Příklad: Najděte $y'(0)$, kde $y(0)=2$,

$$xe^y+ye^x-2=0$$

Nalezněte tečnou rovinu k elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Důležitá situace při hledání extrému funkce $f : U \to I\!R$ nastává když chceme najít extrémy vzhledem k jisté podmnožině definičního oboru f, typicky definované nějakou rovnicí.

Př. Najděte maximální obsah který může mít obdélník se zadaným pevným obvodem. Najdete minimální hodnotu $f(x,y) = x + y$ na jednotkové kružnici.

Věta 14.2. *(Lagrangeovy multiplikátory) Jestliže $f, g_j : U \to I\!R$, $j = 1, ...k$, jsou spojitě diferencovatelné funkce na otevřené množině $U \subset I\!R^n$. Nechť*

$$M = \cap_{j=1}^{k} \{x \in U : g_j(x) = 0\}$$

Předpokládejme, že $dg_j(x)$, $j = 1, ..k$, jsou lineárně nezávislé pro všechna $x \in M$. Jestliže a je bodem lokálního extrému f vzhledem k M, pak existují λ_j, $j = 1, ..k$ taková, že platí

$$df(a) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j dg_j(a)$$

Důkaz. Dokážeme v případě $k = 1$. Podle věty o implicitní funkci, BUNO existuje $x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$ takové že

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0$$

Takže

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \;\; i = 1, \ldots, n-1$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}}$$

Kritický bod funkce

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) : I\!R^{n-1} \to I\!R$$

ma nulový gradient, takže platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \;\; i = 1, \ldots, n-1$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_n}}$$

Takže

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_i}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}}, \;\; i = 1, \ldots, n-1$$

a pro $\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}}$ platí

$$\text{grad } f = \lambda \text{ grad } g.$$

□

15. Lagrangeovy multiplikátory aplikace, absolutní extrémy

Příklady.

Najděte absolutní extrémy (absolutní extrémy existují na kompaktech):

$$z(x,y) = x^2 - y^2, \ \ x^2 + y^2 = 1$$

$$u(x,y,z) = xyz, \ \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x + y + z = 0$$

V rovině $2x - z = 0$ nalezněte bod, pro nějž je součet čtverců vzdáleností od bodu $(1,1,1)$ a $(2,3,4)$ co nejmenší.

Nalezněte vzdálenost paraboly $y = x^2$ od přímky $y = x - 2$.

Dokažte nerovnost $\frac{x^n + y^n}{2} \geq (\frac{x+y}{2})^n$.

Najděte extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ je-li $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

16. Dvojný integrál pres obdélník

Motivace: objemy těles v prostoru, hmotnost dvourozměrných nehomogenních útvarů apod. Diskuse pojmu obsahu v rovině (resp. objemu v prostoru).

1. obsah obdélníka (objem kvádru)
2. obsah konečného sjednocení obdélníků (s prázdnými průniky vnitřků)- nezávislost na rozkladu (resp. pro kvádry)
3. obsah pod grafem funkce-limitní proces (objem pod grafem)

Problém zavedení obsahu pro obecnou podmnožinu v rovině, resp. prostoru-hlavní role aditivity-diskuse.

Zavedení dvojného integrálu pro spojité funkce.

Nechť $D = [a, b] \times [c, d]$ je obdélník, $f : D \to I\!R$ spojitá funkce.

Definice 16.1. *Nechť $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$. Potom systém obdélníků $\mathcal{D}$ $[x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]$, který pokrývá D, se nazývá dělením D.*

$$\|\mathcal{D}\| = \max\{x_{i+1} - x_i, y_{j+1} - y_j\}$$

Se nazývá norma dělení $\mathcal{D}$.

Definice 16.2. *Nechť $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ vytváří dělení $\mathcal{D}$ obdélníku D. Nechť $f : D \to I\!R$ je spojitá funkce. Potom zavádíme*

$$S^*(f, \mathcal{D}) = \sum_i \sum_j \max\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i+1} - x_i] \times [y_{j+1} - y_j]\}$$

$$S_*(f, \mathcal{D}) = \sum_i \sum_j \min\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i+1} - x_i] \times [y_{j+1} - y_j]\}$$

které se nazývají horní , resp. dolní součet f přes dělení $\mathcal{D}$.

Je jasné, že platí

$$S^*(f, \mathcal{D}) \geq S_*(f, \mathcal{D})$$

Nechť $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ vytváří dělení $\mathcal{D}$, $a = x_0 < u_1 < \cdots < u_N = b$, $c = v_0 < v_1 < \cdots < v_M = d$ vytváří dělení $\mathcal{R}$. Říkáme že dělení $\mathcal{R}$ je zjemněním dělení $\mathcal{D}$, jestliže $\{x_i\} \subset \{u_i\}, \{y_j\} \subset \{v_j\}$.

Tvrzení 16.3. *Nechť f je spojitá na D, dělení $\mathcal{R}$ je zjemněním dělení $\mathcal{D}$. Potom*

$$S_*(f, \mathcal{D}) \leq S_*(f, \mathcal{R}) \leq S^*(f, \mathcal{R}) \leq S_*(f, \mathcal{D})$$

Tvrzení 16.4. *Nechť f je spojitá na D, a dvě libovolná dělení $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ jsou zadána. Potom*

$$S_*(f, \mathcal{D}) \leq S^*(f, \mathcal{R})$$

Důkaz. Plyne z předchozí věty s použitím společného zjemnění k těmto dvěma zjemněním. □

Věta 16.5. *Nechť $f : D \to I\!R$ je spojitá funkce. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $\mathcal{D}$ s normou nejvýše δ platí*

$$S^*(f, \mathcal{D}) \leq S_*(f, \mathcal{D}) + \varepsilon$$

následující limity tudíž existují a jsou si rovny

$$\lim_{\|\mathcal{D}\|\to 0} S^*(f, \mathcal{D}) = \lim_{\|\mathcal{D}\|\to 0} S_*(f, \mathcal{D})$$

Důkaz: plyne ze stejnoměrné spojitosti f na D.

Definice 16.6. *(Definice dvojného integrálu pro obdélník)*

Nechť $f : D \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom dvojný integrál přes D je definován následovně

$$\int\int_D f dS = \lim_{\|\mathcal{D}\|\to 0} S^*(f,\mathcal{D}) = \lim_{\|\mathcal{D}\|\to 0} S_*(f,\mathcal{D})$$

Věta 16.7. *(Fubiniho věta)*

Dvojný integrál přes obdélník $D = [a,b]\times[c,d]$ lze vyčíslit jako opakovaný integrál

$$\int\int_D f dS = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$$

Důkaz. Plyne z konstrukce integrálu, přesněji řečeno ze stejnoměrné spojitosti f která zaručí, že funkce $y \to \int_a^b f(x,y)dx$ je (stejnoměrně) spojitá a opakovaná integrace ma smysl. □

Příklady. Integrujte $f(x,y) = \frac{1}{(1+2x+3y)^2}$ přes obdélník $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$.

$$\int_0^1\int_1^2 \frac{1}{(1+2x+3y)^2}dydx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{(1+2x+3y)^2}dy = [-\frac{1}{3}\frac{1}{1+2x+3y}]_1^2 = \frac{1}{3}\frac{1}{4+2x} - \frac{1}{3}\frac{1}{7+2x}$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 (\frac{1}{4+2x}-\frac{1}{7+2x})dx = \frac{1}{3}\frac{1}{2}[\log(4+2x)-\log(7+2x)]_0^1 = \frac{1}{6}(\log 6-\log 9-\log 4+\log 7) = \frac{1}{6}\log(\frac{7}{6})$$

Integrujte $f(x,y) = x^y$ pro $x > 0$ a $f(0,y) = 0$ přes obdélník $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$. Všimněte si, že tato funkce je spojitá.

$$\int_0^1\int_1^2 x^y dydx = \int_0^1\int_1^2 e^{y\log x}dydx$$

$$\int_1^2 e^{y\log x}dy = [\frac{1}{\log x}e^{y\log x}]_1^2 = \frac{x^2-x}{\log x}$$

Další krok integrace naráží na problém nalezení primitivní funkce k $\frac{x}{\log x}$ (integrály tohoto typu lze převést na výrazy typu nekonečných řad). Diskuse existence primitivních funkci, e.g. $e^{x^2}, \sin x^2, \frac{1}{\log x}, \sqrt{1+x^3}$ etc. Tato teorie je velmi obsáhlá, v praxi použít tabulky integrálů apod.

Zvolme opačné pořadí integrace

$$\int_1^2\int_0^1 x^y dxdy$$

$$\int_0^1 x^y dx = [\frac{1}{y+1}x^{y+1}]_0^1 = \frac{1}{y+1}$$

$$\int_1^2 \int_0^1 x^y dx dy = \int_1^2 \frac{1}{y+1} = [\log(y+1)]_1^2 = \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

17. Dvojný integrál přes základní oblast

Praxe vyžaduje pojem dvojného integrálu přes obecnější oblasti. Konstrukci nebudeme provádět, jde o technickou modifikaci předchozího případu.

Věta 17.1. *Základní oblastí typu $[x, y]$ (resp. typu $[y, x]$) budeme nazývat uzavřenou množinu $D \subset \mathbb{R}^2$ pro kterou existují interval $[a, b]$ a dvojice spojitých funkcí $s_1(t) \le s_2(t)$ pro $t \in [a, b]$ tak, že*

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], s_1(x) \le y \le s_2(x)\}, \tag{27}$$

resp.

$$D = \{(x, y) : y \in [a, b], s_1(y) \le x \le s_2(y)\}. \tag{28}$$

Příklad.

$D = \{(x, y) : x \in [0, 1], x^2 \le y \le x\}$ je typu $[x, y]$, a zároveň typu $[y, x]$, kde $D = \{(x, y) : y \in [0, 1], y \le x \le \sqrt{y}\}$.

$D = \{(x, y) : x \in [-1, 1], -x^2 \le y \le 1 + x^2\}$ je typu $[x, y]$, ale nikoliv typu $[y, x]$.

Definice 17.2. *(Existence dvojného integrálu pro základní oblast)*

Nechť D je základní oblast v $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom dvojný integrál přes D $\int\int_D f dS$ existuje jako limitní hodnota limitního procesu obdobného případu kdy D je obdélník.

Poznámka. Pro konstantní funkci $f = 1$ je dvojný integrál roven plošnému obsahu D.

Věta 17.3. *(Fubiniho věta)*

Nechť D je základní oblast typu (27) (resp. (28)), $f : D \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Pak platí

$$\int\int_D f(x, y) dS = \int_a^b \Big(\int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y) dy \Big) dx.$$

resp.

$$\int\int_D f(x, y) dS = \int_a^b \Big(\int_{s_1(y)}^{s_2(y)} f(x, y) dx \Big) dy.$$

Příklady na sestavování a výpočet integrálu.

$$\int\int_D \frac{x}{y} dS, \quad D = \{(x, y) :\ 1 \le y \le x \le 2\} \tag{29}$$

$$\int\int_D \frac{x}{y} dS = \int_1^2 \int_1^x \frac{x}{y} dy dx = \int_1^2 [x \log y]_1^x dx = \int_1^2 x \log x dx = 2 \log 2 - \frac{3}{4}.$$

$$\int\int_D y e^x dS, \quad D = \{(x, y) :\ y^2 \le x \le y + 2\} \tag{30}$$

$$\int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} y e^x dx dy = \int_{-1}^2 [y e^x]_{y^2}^{y+2} dy = \int_{-1}^2 [y e^{y+2} - y e^{y^2}] dy = [y e^{y+2} - e^{y+2} - \frac{1}{2} e^{y^2}]_{-1}^2 = \frac{1}{2} e^4 + \frac{5}{2} e$$ [redacted]

$$\int\!\!\int_D \sin y^2 dS, \quad D = \{(x,y) :\ 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\} \tag{31}$$

$$\int_0^1 \int_0^y \sin y^2 dxdy = \int_0^1 [x \sin y^2]_0^y dy = \int_0^1 y \sin y^2 dy = \frac{1}{2}[-\cos y^2]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Při opačném pořadí opět vzniknou problémy, neboť vnitřní integrál $\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dydx$ nelze nalézt.

Obecněji, pro oblast $D \subset I\!R^2$, kterou lze napsat jako konečné sjednocení základních oblastí $D = \cup_{j=1}^k D_j$, které nemají žádný společný vnitřní bod, lze zavést dvojný integrál obdobně, a platí

$$\int\!\!\int_D f dS = \sum_{j=1}^k \int\!\!\int_{D_j} f dS$$

Tato definice nezávisí na konkrétním rozkladu-nebudeme dokazovat.

Příklad. Vyjádřete jako opakovaný integrál.

$$\int\!\!\int_D f dS, \quad D \text{ je omezeno křivkami } x = 2, y = x, xy = 1 \tag{32}$$

$$\int\!\!\int_D f dS, \quad D \text{ je mezikruží } 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \tag{33}$$

$$\int\!\!\int_D f dS, \quad D \text{ splňuje } x^4 \le y^2 \le x^2 \tag{34}$$

Změňte pořadí integrace (a vypočtěte, pokud je to možné):

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f dxdy$$

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f dydx + \int_1^3 \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f dydx$$

$$\int_0^2 \int_0^{2x^2} f dydx + \int_2^4 \int_0^{10-x} f dydx + \int_4^7 \int_{x-4}^{10-x} f dydx$$

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dydx, \quad \int_0^1 \int_x^1 \sin(x^2) dydx$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dydx$$

18. Dvojný integrál substituce

Nyní přejdeme k substituci (změně proměnných) ve dvojném integrálu. Substituce vychází z výsledku z lineární algebry pro lineární zobrazení. Nechť $\mathbf{u_j} = (u_{1j}, \ldots, u_{nj})$ jsou vektory v $\mathbb{R}^n$. Potom z lineární algebry víme že objem rovnoběžnostěnu R vytvořeného těmito vektory je roven

$$objem(R) = |Det \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}|$$

Tvrzení 18.1. *Nechť $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení reprezentované maticí A. Potom $|DetA|$ je objem obrazu $L(D)$ jednotkové krychle $D = [0,1]^n$ v $\mathbb{R}^n$.*

Definice 18.2. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otveřená neprázdná množina, $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení, které má derivaci $d\Phi(a)$ v bodě $a \in U$. Absolutní hodnota determinantu Jacobiho matice (tedy derivace)*

$$\Delta_\Phi(a) = |Det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}|$$

se nazývá Jakobián zobrazení v bodě a.

Věta 18.3. *(Věta o substituci v integrálu)*

Nechť $U, V \subset \mathbb{R}^2$ jsou dvě oblasti integrace, $\Phi : U \to V$ je prosté zobrazení se spojitou derivací na $V = \Phi(U)$, $f : V \to \mathbb{R}$. Potom

$$\int\int_V f dS = \int\int_U \Delta_\Phi \cdot f \circ \Phi dS$$

Polární souřadnice: diskuse zobrazení

$$\Phi : U = (0, 2\pi) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2 \setminus \text{ polopřímka } [0, \infty) \times \{0\} = V$$
$$x(\phi, \rho) = \rho \cos\phi, \ \ y(\phi, \rho) = \rho \sin\phi, \ \Delta_\Phi = \rho$$

$$\int\int_E \sin(x^2 + y^2) dS, \ \ E = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\} \tag{35}$$

$$\int\int_T \sqrt{x^2 + y^2}, \ \ T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 2)^2 \leq 4\} = \tag{36}$$

$$\int_\pi^{2\pi} \int_0^{-4\sin\phi} \rho^2 d\rho d\phi = \int_\pi^{2\pi} [\frac{1}{3}\rho^3]_0^{-4\sin\phi} d\phi = -\frac{1}{3}4^3 \int_\pi^{2\pi} \sin^3\phi d\phi =$$

$$-\frac{1}{3}4^3 \int_\pi^{2\pi} (1 - \cos^2\phi)\sin\phi d\phi = -\frac{1}{3}4^3[\frac{1}{3}\cos^3\phi - \cos\phi]_\pi^{2\pi} = \frac{4^4}{3^2}$$

$$\int\int_T \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \ \ T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \tag{37}$$

Dokažte (použitím dvojného integrálu a polárních souřadnic)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

Převeďte do polárních souřadnic.

$$\int_0^2 \int_0^y f dx dy$$

$$\int_0^1 \int_2^{\sqrt{9-y^2}} f dy dx$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{|y|} f dx dy$$

19. Trojný integrál

Trojný integrál přes základní oblasti v $I\!R^3$. Fyzikální motivací je například výpočet hmotnosti trojrozměrného tělesa s proměnnou hustotou.

Definice 19.1. *Základní oblast V v $I\!R^3$ typu $[x, y, z]$ je oblast ohraničená shora a zdola grafy spojitých funkcí $h_2(x, y), h_1(x, y)$ nad základní oblastí D typu $[x, y]$ v $I\!R^2$. (nad $[a, b]$ ohraničená dvěma grafy spojitých funkcí $s_1(x), s_2(x)$): Permutací pořadí x, y, z získáme základní oblasti všech ostatních typu.*

Trojný integrál lze definovat obdobně jako dvojný integral. Pro výpočet lze opět použít následující Fubiniho větu.

Věta 19.2. *(Fubiniho věta)*
Trojný integrál spojité funkce nad základní oblastí V typu $[x, y, z]$ v $I\!R^3$ splňuje

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

Trojný integrál pro obecnější oblasti, které jsou sjednocením konečně mnoha základních oblastí, které nemají žádný společný vnitřní bod lze získat použitím aditivity. Výsledný integrál na rozkladu nezávisí. Diskuse.

Příklady-sestavování integrálů, na dva kroky.

Předpokládáme, že V je zadáno několika rovnicemi ploch (resp. nerovnicemi).

♣ Metoda 1. Řezy kolmé k vybranému směru x, y, z. V tomto případě interpretujeme integral $\int[\int\int_D]$

Výpočet objemu čtyřbokého jehlanu s vrcholy $(\pm1, \pm1, 0)$, $(0, 0, h)$. Zvol směr z.

Výpočet objemu rotačního jehlanu s vrcholy $(\pm1, \pm1, 0)$, $(0, 0, h)$. Zvol směr z.

♣ Metoda 2. Nalezeni $S \subset I\!R^2$ a dvojice funkcí $h_1, h_2 : S \to I\!R$. Interpetujeme $\int\int_D[\int]$. Tento postup je vhodný pokud mezi podmínkami definičního oboru lze najít proměnnou, která se vyskytuje právě ve dvou podmínkách ve formě vztahu $z = h_1(x, y), z = h_2(x, y)$.

Pokud V je základní oblast, potom metoda 2 bude vest k řesení, obecně ovšem nemusí taková proměnná existovat, např. pro mezikoulí

$$\{(x, y, z) : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$$

Nejjednodušší případ-integral přes kvádr $[a, b]\times[c, d]\times[e, f]$. Spočítejte hmotnost krychle $[0, a]^3$, jejíž hustota je rovna $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Trojboký jehlan ve speciální poloze: Najděte

$$\int\int\int_E \frac{1}{(1 + x + y + z)^3} dV \tag{38}$$

kde E je omezeno plochami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

$$\int\int\int_E (x + 2)dV \tag{39}$$

kde E je omezeno plochami $y = x^2, x = z, x = y, z = 0$. $(z = h_1, h_2)$

$$\int\int\int_E xyzdV \tag{40}$$

kde E je omezeno plochami $y = x^2, x = y^2, z = xy, z = 0$. $(z = h_1, h_2)$

Sestavte

$$\iiint\limits_E f dV$$

kde E je kulový vrchlík omezený plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{1}{2}$.

20. Trojný integrál substituce

Substituce v trojném integrálu.

Věta 20.1. *(Věta o substituci v integrálu) Nechť $U, V \subset \mathbb{R}^3$ jsou dvě oblasti integrace, $\Phi : U \to V$ je prosté zobrazení se spojitou derivací na $V = \Phi(U)$, $f : V \to \mathbb{R}$. Potom*

$$\int\int\int_{\Phi(U)} f dS = \int\int\int_{U} \Delta_{\Phi} f \circ \Phi dS$$

♣ Cylindrické souřadnice (polární souřadnice v x, y): $\rho > 0, \phi \in (0, 2\pi), z \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odtud $\Delta_{\Phi} = \rho$.
Příklady.
Těleso E je ohraničeno plochami $x^2 + y^2 = 1, z = 4, z = 1 - x^2 - y^2$. Jeho hustota je přímo úměrná vzdálenosti bodu od osy válce. Najděte hmotnost tělesa.

Oznacime $f(x, y, z)$ hustotu, potom $f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = K\rho$.

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{1-\rho^2}^{4} Kr^2 dz d\rho d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} K\rho^2[4 - (1 - \rho^2)] d\rho d\phi = \frac{12\pi K}{5}$$

♣ Sférické souřadnice: $\rho \geq 0, \phi \in (0, 2\pi), \vartheta \in (0, \pi)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\rho, \phi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \rho\sin\vartheta\cos\phi \\ \rho\sin\vartheta\sin\phi \\ \rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\phi & -\rho\sin\vartheta\sin\phi & \rho\cos\vartheta\cos\phi \\ \sin\vartheta\sin\phi & \rho\sin\vartheta\cos\phi & \rho\cos\vartheta\sin\phi \\ \cos\vartheta & 0 & -\rho\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

platí $\Delta_{\Phi} = \rho^2 \sin\vartheta$.

Spočítejte objem koule o poloměru r.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho^2 \sin\vartheta d\rho d\vartheta d\phi = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Najděte objem tělesa ohraničeného plochami $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2 \leq z$, $y \geq 0$.

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos\vartheta} \rho^2 \sin\vartheta d\rho d\vartheta d\phi = \frac{8}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\theta \sin\vartheta d\vartheta d\phi = \frac{\pi}{2}$$

Další příklady na použití transformace souřadnic.

♣

$$\int\int\int_E \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} dV, \quad E = \{(x,y,z): \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

21. Křivky v R^n

V různých oblastech matematiky existuje několik neekvivalentních definic pojmu křivka. Naše definice v tomto textu je v zásadě shodná s definicí hladké křivky z literatury a odpovídá pojmu oblouk ze skript Hamhalter-Tišer. Hlavním důvodem tohoto přístupu je zjednodušení důkazů a práce s tečným polem a orientovatelností. Speciálně, náš pojem křivky automaticky garantuje že uzavřená křivka je jednoduchá (ve smyslu zavedené literatury). Obecnější případ lze nalézt např. ve skriptech Hamhalter-Tišer.

Definice 21.1. *Množina $C \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá křivka, jestliže existuje spojité zobrazení*
$$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$
na množinu C s vlastnostmi:
1. ϕ je na $[a,b)$ prosté, $\phi(b) \notin \phi((a,b))$,
2. $\phi'(t) = [\phi_1'(t), \dots, \phi_n'(t)]$ je spojitá a nenulová na (a,b), a má limity v krajních bodech.
Pokud $\phi(a) = \phi(b)$ potom říkáme, že křivka je uzavřená.

Zobrazení ϕ splňující tyto podmínky budeme nazývat krátce parametrizace křivky. $\blacksquare$

Geometrický význam ϕ' je tečný vektor ke křivce, diskuse.

Obecnější případ křivek jejichž parametrizace nejsou prosté, tedy křivek "protínajících sebe sama"nebudeme v tomto textu uvažovat, neboť v tomto případě je třeba opatrněji studovat otázky spojené s tečným vektorem, orientací apod., viz. níže.

Příklady.

Graf funkce $y = f(x), x \in [a,b]$.
$$C = \{(x,y) : x = a_1 t + b_1, y = a_2 t + b_2\}$$
$$C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = a^2\}$$
$$C = \{(\cos t, \sin t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$C = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2, \ \ z = x + y\}$$

Věta 21.2. *Nechť $C \subset \mathbb{R}^n$ je křivka s parametrizacemi $\phi : [a,b] \to C, \psi : [c,d] \to C$. Potom existuje jednoznačně definovaná spojitě diferencovatelná monotonní funkce s nenulovou derivací $h : [a,b] \to [c,d]$, taková že platí*
$$\phi(t) = \psi(h(t)).$$
Říkáme, že h převádí parametrizaci ϕ na ψ. Pokud je h rostoucí, říkáme že parametrizace jsou souhlasné, pokud je klesající říkáme že jsou nesouhlasné.

Důkaz. Položme $h = \psi^{-1} \circ \phi$. Potom h je spojitá a na, zbývá ověřit diferencovatelnost, tedy existenci
$$\omega(t) = \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}, \ t, t_0 \in (a,b).$$
Zvolme
$$\Phi(t) = \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}, \ \ \Psi(t) = \frac{\psi \circ h(t) - \psi \circ h(t_0)}{h(t) - h(t_0)}$$
Protože $\phi = \psi \circ h$, máme
$$\Phi(t) = \Psi(t)\omega(t) \tag{41}$$

Protože $\psi'(h(t_0)) \neq 0$ WLOG $\lim_{t\to t_0} \Psi_1(t) \neq 0$. Tedy $\Phi_1(t) = \Psi_1(t)\omega(t)$,

$$h'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \omega(t) = \lim \frac{\Phi_1(t)}{\Psi_1(t)} = \frac{\phi_1'(t_0)}{\psi_1'(h(t_0))}$$

$$\phi'(t_0) = \psi'(h(t_0))h'(t_0) \tag{42}$$

Odtud též vyplývá, že $h'(t_0) \neq 0$. □

Definice 21.3. *Při zadané parametrizaci ϕ křivky $C \subset I\!R^n$ je jednotkový tečný vektor v bodě $x = \phi(t)$ definován následovně:*

$$\overrightarrow{\tau}(\phi(t)) = \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|}$$

Díky (42) máme (podle znaménka h'):

Tvrzení 21.4. *Pro křivku $C \subset I\!R^n$ s parametrizací existují právě dvě jednotková tečná pole (navzájem opačná). Přesněji, pokud ϕ a ψ jsou dvě různé hladké parametrizace, potom jejich jednotková tečná pole jsou totožná právě když parametrizace jsou souhlasné. Jinak jsou tečná pole opačná.*

Příklad: Najděte jednotkový tečný vektor ke křivce $\mathbf{r}(t) = (2, t, t^2)$ v bodě $(2, 1, 1)$.

Každé parametrizaci přiřadíme jednotkové spojité tečné pole

$$\overrightarrow{\tau}(\phi(t)) = \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|}$$

Definice 21.5. *Nechť $C \subset I\!R^n$ je křivka s parametrizací ϕ. Potom dvojice $(C, \overrightarrow{\tau})$ se nazývá orientovaná křivka. Používáme zkrácené značení $(C) = (C, \overrightarrow{\tau})$.*

Intuitivně, orientace je determinována směrem průchodu křivkou od počátečního do koncového bodu.

Říkáme, že uzavřená orientovaná křivka (C) v rovině je **pozitivně** (resp. negativně) orientovaná, pokud je orientace **proti** směru hodinových ručiček.

Definice 21.6. *Délka křivky $C \subset I\!R^n$ s parametrizací $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$, $t \in [a, b]$, je definována:*

$$L = \int_a^b \|\phi'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + (\phi_2'(t))^2 + (\phi_3'(t))^2}dt$$

Tvrzení 21.7. *Délka křivky nezáleží na parametrizaci.*

Důkaz. $\phi(t) = \psi(h(t))$ tedy

$$\phi'(t) = (\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t)) = h'(t)(\psi_1'(h(t)), \psi_2'(h(t)), \phi_3'(h(t)))$$

$$L = \int_a^b |h'(t)|\sqrt{(\psi_1'(h(t)))^2 + (\psi_2'(h(t)))^2 + (\psi_3'(h(t)))^2}dt$$

substituce $s = h(t)$ (předpokládejme souhlasné orientace, $h' > 0$):

$$= \int_c^d \sqrt{(\psi_1'(s))^2 + (\psi_2'(s))^2 + (\psi_3'(s))^2}ds$$

□

Najděte délku křivky

$$C = \{[\cos t, \sin t, t] : t \in \mathbb{R}\}$$

22. Křivkový integrál 1. a 2. druhu

Definice 22.1. *(křivkový integrál 1. druhu)*

Nechť f je spojitá reálná funkce definovaná na křivce $C \subset \mathbb{R}^n$ s hladkou parametrizací $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)),\ \ t \in [a, b]$. Potom

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt = \int_a^b f(\phi(t)) \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + (\phi_2'(t))^2 + (\phi_3'(t))^2} dt$$

se nazývá se křivkový integrál 1 druhu funkce f podél C.

Tvrzení 22.2. *Křivkový integrál funkce f podél C nezávisí na parametrizaci.*

Důkaz. $\phi(t) = \psi(h(t))$ tedy

$$\phi'(t) = (\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t)) = h'(t)(\psi_1'(h(t)), \psi_2'(h(t)), \phi_3'(h(t)))$$

Potom

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| dt = \int_a^b f(\psi(h(t))) |h'(t)| \sqrt{(\psi_1'(h(t)))^2 + (\psi_2'(h(t)))^2 + (\psi_3'(h(t)))^2} dt$$

substituce $s = h(t)$ (předpokládejme souhlasné orientace, $h' > 0$):

$$= \int_c^d f(\psi(s)) \sqrt{(\psi_1'(s))^2 + (\psi_2'(s))^2 + (\psi_3'(s))^2} ds$$

□

Diskuse-nezávisí ani na orientaci, na rozdíl od Riemannova integrálu na intervalu, kdy změna pořadí mezí mění znaménko integrálu (v Riemanově sumě se sčítá přes rozdíly $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$, zde se bere délka elementárního kroku která je vždy pozitivní).

Příklady:

$$\int_C xy^4 ds, \ \text{ C je pravá polovina kružnice } \ x^2 + y^2 = 16 \tag{43}$$

$$\int_C x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} ds, \ \text{ C je asteroida } \ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 16 \tag{44}$$

Definice 22.3. *(Vektorové pole)*

Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$, potom $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^n$ se nazývá vektorové pole definované na D.

Definice 22.4. *(křivkový integrál 2. druhu)*

Nechť $\vec{F}$ je spojité vektorové pole definované na orientované křivce $(C, \vec{\tau})$. Potom křivkovým integrálem $\vec{F}$ podél orientované křivky (C) rozumíme křivkový integrál

$$\int_{(C)} \vec{F} d\vec{s} = \int_C \vec{F}(s) \cdot \vec{\tau}(s) ds$$

Věta 22.5. *Nechť $\vec{F}$ je spojité vektorové pole definované na orientované křivce $(C, \vec{\tau})$ s parametrizaci ϕ. Potom platí*

$$\int_{(C)} \vec{F} d\vec{s} = \int_C \vec{F}(s) \cdot \vec{\tau}(s) ds = \int_a^b \vec{F}(\phi(t)) \cdot \frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|} \|\phi'(t)\| dt =$$

$$= \int_a^b F_1(\phi(t))\phi_1'(t) + F_2(\phi(t))\phi_2'(t) + F_3(\phi(t))\phi_3'(t)dt$$

a tento integrál nezávisí při zachování orientace na parametrizaci.

Důkaz. $\phi(t) = \psi(h(t))$ tedy

$$\phi'(t) = \big(\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t)\big) = h'(t)\big(\psi_1'(h(t)), \psi_2'(h(t)), \phi_3'(h(t))\big)$$

$$\int_a^b F_1(\phi(t))\phi_1'(t) + F_2(\phi(t))\phi_2'(t) + F_3(\phi(t))\phi_3'(t)dt$$

$$= \int_a^b F_1(\psi(h(t)))\psi_1'(h(t))h'(t) + F_2(\psi(h(t)))\phi_2'(h(t))h'(t) + F_3(\psi(h(t)))\phi_3'(h(t))h'(t)dt$$

$$= \int_c^d F_1(\psi(s))\psi_1'(s) + F_2(\psi(s))\psi_2'(s) + F_3(\psi(s))\psi_3'(s)ds$$

□

Příklady:

$$\int_{(C)} (x, y, x + y - 1)d\overrightarrow{s}, \quad \text{(C) je orientovaná úsečka } (1,1,1)(2,3,4) \tag{45}$$

$$\int_{(C)} (y, z, x)d\overrightarrow{s}, \quad \text{(C) je pozitivně orientovaná průsečnice ploch } z = xy, x^2 + y^2 = 1. \tag{46}$$

Důležitá situace nastává pro případ křivkového integrálu vektorového pole zadaného v oblasti prostoru, kdy nás zajímá závislost integrálu na křivce při zachování počátečního a koncového bodu.

Nechť $\overrightarrow{F}(x, y) = (y^3, x^3)$, spočtěte křivkový integrál z bodu $(0,0)$ do bodu $(1,1)$ podél úsečky, resp. paraboly $y = x^2$.

Nechť $\overrightarrow{F}(x, y) = (x^3, y^3)$, spočtěte křivkový integrál z bodu $(0,0)$ do bodu $(1,1)$ podél úsečky, resp. paraboly $y = x^2$.

23. Vektorové pole v $I\!R^n$

Věta 23.1. *(Základní věta pro křivkový integrál)*
Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená podmnožina, $(C, \overrightarrow{\tau}) \subset U$ je orientovaná křivka vedoucí z bodu A do bodu B, $f : U \to I\!R$ je třídy C^1. Potom

$$\int\limits_{(C)} gradf(s)d\overrightarrow{s} = f(B) - f(A).$$

Důkaz.

$$\int\limits_{(C)} \mathrm{grad} f(s)d\overrightarrow{s} = \int\limits_{C} df(s) \cdot \overrightarrow{\tau}(s)ds = \int\limits_{a}^{b} df(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(t))\phi_j'(t)dt = \int\limits_{a}^{b} \frac{d}{dt}(f(\phi(t))) = f(\phi(b)) - f(\phi(a))$$

□

Definice 23.2. *Říkáme že vektorové pole $\overrightarrow{F} : U \to I\!R^n$ je potenciální v otevřené množině $U \subset I\!R^n$ pokud existuje funkce $f : U \to I\!R$ třídy C^1 taková, že platí*

$$\overrightarrow{F} = gradf.$$

Říkáme že vektorové pole je konzervativní v oblasti $U \subset I\!R^n$, pokud křivkový integrál

$$\int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s} = f(B) - f(A).$$

podél křivky (C) ležící uvnitř U a spojující body $A, B \in U$ nezávisí na křivce (C).

Podle předchozí věty je zřejmé že potenciální pole je konzervativní.

Definice 23.3. *Říkáme, že otrevřená množina $U \subset I\!R^n$ je souvislá, jestliže každé dva body uvnitř U lze spojit křivkou, která je obsažena v U. Říkáme, že otrevřená množina $U \subset I\!R^n$ je jednoduše souvislá, jestliže každou uzavřenou křivku v U lze spojitě zdeformovat do libovolného bodu v U.*

Věta 23.4. *Nechť $U \subset I\!R^n$ je otevřená souvislá podmnožina, $\overrightarrow{F} : U \to I\!R^n$ je spojité vektorové pole. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní.*
1. $\overrightarrow{F}$ je potenciální
2. $\overrightarrow{F}$ je konzervativní
3. Integrál $\overrightarrow{F}$ přes libovolnou orientovanou uzavřenou křivku (C) v U je roven nule.

Důkaz. 2 a 3 jsou ekvivalentní standartním argumentem. 1 implikuje 3 jsme již dokázali, zbývá 2 implikuje 1. Zvolíme libovolně $x_0 \in U$ a položíme

$$f(x) = \int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s}$$

kde (C) je libovolná orientovaná křivka z x_0 do x. platí

$$f(x + he_j) - f(x) = \int\limits_{0}^{h} F(x + te_j) \cdot e_j dt = \int\limits_{0}^{h} F_j(x + te_j)dt$$

Podle základní věty analýzy máme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = F_j(x)$$

a odtud $gradf(x) = F(x)$.

$\square$

Pr. $f(x,y) = x^2 + y^2, df(x,y) = (2x, 2y)$

Obecný případ integrálu přes jednoduchou křivku je popsán v následující větě. Je třeba navíc předpokládat, že $\overrightarrow{F}$ je hladké a oblast je jednoduše souvislá!

24. Greenova věta

Věta 24.1. *(Greenova věta)*

Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá podmnožina, jejíž hranicí je uzavřená křivka (C), pozitivně orientovaná (tj. proti směru hodinových ručiček). Potom pro libovolné vektorové pole $\overrightarrow{F} = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ třídy C^1, platí

$$\int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s} = \int\limits_{D}\int \left(\tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y}\right) dS. \tag{47}$$

Důkaz. Pro základní oblast v obou směrech (tedy současně typu $[x,y]$ i $[y,x]$).

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b : g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

platí (podle základní věty analýzy):

$$\int\limits_{D}\int \frac{\partial F_1}{\partial y} dS = \int\limits_a^b \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)dydx = \int\limits_a^b F_1(x, g_2(x)) - F_1(x, g_1(x))dx. \tag{48}$$

Označíme $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$ orientované části hraniční křivky (C), (C_1) je graf g_1, (C_3) je graf g_2.

Potom použitím parametrizace části C_1, $x \in [a,b], \phi(x) = (x, g_1(x)), \phi'(x) = (1, g_1'(x))$:

$$\int\limits_{(C_1)} (F_1(s), 0)\overrightarrow{\tau}(s)ds = \int\limits_{(C_1)} \big(F_1(x, g_1(x)), 0\big)(1, g_1'(x))dx = \int\limits_a^b F_1(x, g_1(x))dx$$

Potom použitím parametrizace části C_3, $x \in [b,a], \phi(x) = (x, g_2(x)), \phi'(x) = (-1, -g_2'(x))$:

$$\int\limits_{(C_3)} (F_1(s), 0)\overrightarrow{\tau}(s)ds = -\int\limits_a^b F_1(x, g_2(x))dx$$

$$\int\limits_{(C_2)} (F_1(s), 0)\overrightarrow{\tau}(s)ds = \int\limits_{(C_4)} (F_1(s), 0)\overrightarrow{\tau}(s)ds = 0$$

Celkem, s užitím (48):

$$\int\limits_{(C)} (F_1(x,y), 0)d\overrightarrow{s} = \int\limits_{(C_1)} + \int\limits_{(C_2)} + \int\limits_{(C_3)} + \int\limits_{(C_4)} = \int\limits_a^b F_1(x, g_1(x)) - F_1(x, g_2(x))dx = -\int\limits_{D}\int \frac{\partial F_1}{\partial y} dS.$$

Podobným postupem, jelikož oblast je základní v obou směrech,

$$\int\limits_{(C)} (0, F_2(s))d\overrightarrow{s} = \int\limits_{D}\int \frac{\partial F_2}{\partial x} dS.$$

Sečtením těchto dvou rovností vyjde (47).

□

25. Konzervativní vektorové pole

Definice 25.1. *Říkáme, že pole $\overrightarrow{F}$ třídy C^1 v $U \subset \mathbb{R}^2$ je nevírové, pokud platí*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0.$$

Př. $\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy, xy^3)$ není nevírové. $\overrightarrow{F}(x,y) = (3+2xy, x^2-3y^2)$ je nevírové.

Věta 25.2. *Nechť $\overrightarrow{F}$ je vektorové pole třídy C^1 na jednoduše souvislé oblasti $U \subset \mathbb{R}^2$. Potom $\overrightarrow{F}$ je konzervativní právě když je nevírové.*

Důkaz. Jedna implikace je z Greenovy věty, druhá plyne ze záměnnosti parciálních derivací. □

Potenciálnost je vlastnost globální, nevírovost je lokální. Věta obecně neplatí bez předpokladu jednoduché souvislosti.

Příklady: nalezení potenciálního pole bud po složkách, nebo s použitím křivkového integrálu.

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (3+2xy, x^2-3y^2) \text{ v } \mathbb{R}^2$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial x} = 3+2xy,\ f = 3x + x^2y + g(y),\ \tfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 3y^2.$$

$$g'(y) = -3y^2, \quad f(x,y) = 3x + x^2y - y^3$$

Následující pole je nevírové v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ale není potenciální. Spočti křivkový integrál podél jednotkové kružnice. Je ovšem potenciální na $\{(x,y) : y > 0\}$.

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Definice 25.3. *Nechť $\overrightarrow{F}$ je vektorové pole třídy C^1 v $U \subset \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \in U$. Potom jeho rotace je definovaná následovně*

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x,y,z) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{\partial F_3}{\partial y} - \tfrac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial z} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Říkáme že pole je nevírové, jestliže $\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = 0$.

Tvrzení 25.4. *Nechť $\overrightarrow{F}$ je vektorové pole třídy C^1 v $\mathbb{R}^3$. Potom $\overrightarrow{F}$ je konzervativní právě když je* $\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = 0$.

Pr:

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{3z})$$

platí $\operatorname{rot} F = 0$. Nechť f je gradient $\overrightarrow{F}$, potom platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e^{3z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3ye^{3z}$$

Tedy

$$f(x,y,z) = xy^2 + g(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \frac{\partial g}{\partial y}$$

Tedy

$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^{3z}, g(y,z) = ye^{3z} + h(z)$$

$$f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = e^{3z} = 3ye^{3z} - 3ye^{3z} = 0$$

tedy

$$f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z}$$

26. Plochy

Definice 26.1. *Množina $M \subset I\!R^3$ se nazývá elementární plocha, jestliže*

$$M = \{(x,y,z) : z = g(x,y), (x,y) \in D\}$$

kde g je spojitá na základní oblasti D a třídy C^1 na D°. (Nebo podobně pro libovolnou permutaci proměnných.) Krajem plochy se rozumí $g(\partial D) \subset M$.

Elementární plocha je tedy grafem funkce třídy C^1.

Příklad

$$M = \{(x,y,z) : z = \sqrt{1-x^2-y^2},\ (x,y) \in D\} \tag{49}$$

Definice 26.2. *Množina $M \subset I\!R^3$ se nazývá plocha, pokud existují elementární plochy M_j (tvořící tzv. rozklad M) takové, že $M = \cup_{j=1}^n M_j$, přičemž průnik $M_i \cap M_j$ je bud křivka, nebo konečná množina.*

příklad. Sféra v $I\!R^3$, Krychle v $I\!R^3$.

Definice 26.3. *Nechť $M \subset I\!R^3$ je elementární plocha zadaná funkcí g na základní oblasti $D \subset I\!R^2$. Potom obsah plochy M je definován*

$$obsah(M) = \int\int_D \|(grad\, g, -1)\| dS = \int\int_D \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2} dS$$

Pokud M je plocha s rozkladem $M = \cup_{j=1}^n M_j$ na elementární podplochy, potom položíme:

$$obsah(M) = \sum_{j=1}^n obsah(M_j)$$

Diskuse: Definice pro elementární plochu vychází z faktu že vektor $(\mathrm{grad} g, -1)$ je kolmý na graf g a jeho velikost se rovna koeficientu nafouknutí obsahu elementárního obdélníku z D. Definice má tedy geometrický základ a nezávisí na g (směru parametrizace). Definice pro plochu vychází z aditivity integrálu vzhledem na definiční obor.

Spočtěte obsah kulového vrchlíku

$$M = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Definice 26.4. *Nechť $M \subset I\!R^3$ je plocha, $T \subset I\!R^2$ je základní oblast„ $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : T \to M \subset I\!R^3$ je spojitá a třídy C^1 na M°, která je prostá na vnitřku T. Potom říkáme, že Φ je hladká parametrizace (nebo jenom parametrizace pro krátkost) plochy M.*

Př. Plášť válce $x^2 + z^2 = 3^2$, $-1 \leq y \leq 2$.

$$\Phi(\phi, y) = (3\cos\phi, y, 3\sin\phi).$$

Př. Parametrizace sféry o poloměru r: vycházíme ze sférických souřadnic.

$$\Phi(\phi, \vartheta) = (r \sin\vartheta \cos\phi, r\sin\vartheta \sin\phi, r\cos\vartheta).$$

Význam výrazu $\frac{\partial \Phi}{\partial s}, \frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Podle definice,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s_0, t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\Phi(s_0 + h, t_0) - \Phi(s_0, t_0)) =$$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((\Phi_1(s_0+h,t_0),\Phi_2(s_0+h,t_0),\Phi_3(s_0+h,t_0)) - (\Phi_1(s_0,t_0),\Phi_2(s_0,t_0),\Phi_3(s_0,t_0)))$

Tedy pokud uvážíme křivku, běžící po povrchu plochy M, která je obrazem proměnné s tedy první souřadnice, s parametrizací

$$\phi(s) = (\Phi_1(s,t_0),\Phi_2(s,t_0),\Phi_3(s,t_0)).$$

Potom platí

$$\phi'(s_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s_0,t_0)$$

Tedy $\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s_0,t_0)$ představuje tečný vektor ke křivce na povrchu M, tedy je též tečnou k ploše M. Totéž platí pro $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(s_0,t_0)$.

Výraz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

je tedy vektor kolmý (normálový) k ploše M. Jeho délka $\|\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}\|$ je plocha elementárního elementu plochy, který je obrazem elementu v oblasti parametru, tedy představuje Jakobián zobrazeni Φ.

Větu o substituci 18.3 ve dvojném integrálu (pro případ konstantní funkce $f = 1$) tak můžeme zobecnit na tento případ následovně.

Věta 26.5. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je plocha s hladkou parametrizaci $\Phi = (\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3) : T \to M \subset \mathbb{R}^3$. Potom platí*

$$obsah(M) = \int\int_T \|\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}\| dS$$

Výsledek nezávisí na parametrizaci.

Spočtěte obsah anuloidu s vnitřním poloměrem r a vnějším poloměrem R: Parametrizace:

$$(\alpha,\beta) \to ((R + r\cos\beta)\cos\alpha, (R+\cos\beta)\sin\alpha, r\sin\beta)$$

Výsledek: $(4\pi^2 rR)$.

Abstraktnější přístup k plošnému integrálu s použitím parametrizace se zakládá na použití Grammovy matice, kterou znáte z lineární algebry. Pro matici A typu $k \times n$, která reprezentuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $n \geq k$, prostoru s Euklidovskou normou, jsou sloupce obrazy jednotkových vektorů z $\mathbb{R}^k$. k-rozměrný objem rovnoběžnostěnu V jimi vytvořeného v $\mathbb{R}^n$ je potom vyjádřen

$$\mathrm{Vol}_k(V) = \sqrt{\mathrm{Det} A^T A}.$$

Lze ověřit výpočtem, že pro náš případ vyjde stejná hodnota, tedy

$$\sqrt{\mathrm{Det}(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial \Phi}{\partial t})^T(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial \Phi}{\partial t})} = \|\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}\|$$

27. Plošný integrál 1. druhu

Definice 27.1. *(Plošný integrál 1. druhu)*

Nechť $M \subset I\!R^3$ je elementární plocha zadaná funkcí g na základní oblasti D, a nechť $f : M \to I\!R$ je spojitá. Potom integrál f přes plochu M je definován

$$\int\int_M f dS = \int\int_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2}dS$$

Věta 27.2. *Nechť $M \subset I\!R^3$ je plocha s hladkou parametrizaci $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : T \to I\!R^3$, a nechť $f : M \to I\!R$ je spojitá. Potom platí*

$$\int\int_M f dS = \int\int_T f(\Phi(s,t))\|\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}\|dS$$

Výsledek nezávisí na parametrizaci.

Vypočtěte plošný integrál

$$\int\int_M (x^2+y^2+z)dS$$

kde M je část rotačního paraboloidu $z = a^2 - x^2 - y^2, x^2+y^2 \leq \frac{a^2}{4}, a > 0$.

(použít cylindrické souřadnice $z = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi, z = a^2 - \rho^2$)

Určete

$$\int\int_M \sqrt{x^2+y^2}dS$$

kde M je povrch jednotkové koule. Použít sférické souřadnice k parametrizaci ($r = 1$).

$$\Phi(\phi,\vartheta) = (r\sin\vartheta\cos\phi, r\sin\vartheta\sin\phi, r\cos\vartheta).$$

$$x = r\sin\vartheta\cos\phi \quad y = r\sin\vartheta\sin\phi \quad z = r\cos\vartheta$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\phi} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\phi} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial\phi} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial\vartheta} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\sin\phi & r\sin\vartheta\cos\phi & 0 \\ r\cos\vartheta\cos\phi & r\cos\vartheta\sin\phi & -r\sin\vartheta \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\psi} = -r^2\sin\vartheta(\sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\sin\phi, \cos\vartheta).$$

$$\|\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\| = r^2\sin\vartheta.$$

28. Plošný integrál 2. druhu

Definice 28.1. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je plocha. Pokud existuje jednotkové spojité normálové vektorové pole $\overrightarrow{n}$, které každému vnitřnímu bodu plochy přiřadí jednotkový normálový vektor $\overrightarrow{n}$ k ploše M, potom říkáme že $\overrightarrow{n}$ zadává orientaci plochy M. Dvojice $(M, \overrightarrow{n})$ se nazývá orientovaná plocha.*

Příklady:

♣ Hranice ∂T tělesa $T \subset \mathbb{R}^3$ (v intuitivním smyslu, tedy T si představujeme jako fyzikální třírozměrný objekt) tvoří obvykle orientovatelnou plochu.

♣ Mobiův pás nelze orientovat.

♣ Důležitá poznámka: v praxi se pracuje s plochami, které nejsou hladké (jen po částech hladké)-např. povrch krychle. Pro tyto plochy je třeba pojem orientace oslabit, ve smyslu existence orientace pro libovolně blízké hladké aproximace těchto ploch. Nebudeme detailně analyzovat.

Tvrzení 28.2. *Pokud $M \subset \mathbb{R}^3$ je elementární plocha, která je grafem funkce g*

$$M = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$$

potom existují právě dvě orientace splňující jednu z formulí

$$\overrightarrow{n} = \frac{(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1)}{\|(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1)\|}$$

$$\overrightarrow{n} = \frac{(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y), -1)}{\|(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y), -1)\|}$$

Pokud M je hranicí základního tělesa v $\mathbb{R}^3$, potom lze definovat jeho orientaci vnitřním, nebo vnějším normálovým polem (bez důkazu).

Definice 28.3. *(Plošný integrál 2. druhu)*

Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je orientovaná plocha s normálovým polem $\overrightarrow{n}$, která je sjednocením orientovaných elementárních ploch M_j. Plošný integrál spojitého vektorového pole $\overrightarrow{F} : M \to \mathbb{R}^3$ je definován

$$\int\int_{(M)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int\int_{M} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = \int\int_{M_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}_1 dS + \cdots + \int\int_{M_k} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}_k dS$$

Tomuto plošnému integrálu se říká někdy ve fyzice tok vektorového pole plochou.

Tvrzení 28.4. *Pokud $M \subset \mathbb{R}^3$ je elementární plocha, která je grafem funkce g*

$$M = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$$

potom (při horní orientaci plochy M):

$$\int\int_{(M)} \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{S} = \int\int_{D} \overrightarrow{F}(x, y, g(x, y)) \cdot (-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1) dS$$

Důkaz. platí

$$\overrightarrow{n} = \frac{(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1)}{\|(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1)\|}$$

použitím Definice 27.1 dojde k vykrácení jmenovatele. □

Příklad. Spočtěte tok pole $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y,x,z)$ přes hranici tělesa ohraničeného paraboloidem $z = 1 - x^2 - y^2$ a rovinou $z = 0$ s vnější orientací.

Rozdělíme na horní část a dolní část, obě dané grafem funkcí $z = 1 - x^2 - y^2$, resp. $z = 0$. Výsledek $\frac{\pi}{2}$.

Horní integrál bude (parametrizace jako graf funkce):

$$\int\int_D (y,x,g(x,y)) \cdot (-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1) dS$$

kde $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.

Tvrzení 28.5. *Nechť M je elementární plocha daná funkcí g na základní oblasti D. Nechť $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : T \to \mathbb{R}^3$ je hladká parametrizace plochy M, taková, že vektorový součin $\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ je nenulový ve všech vnitřních bodech D. Potom orientace pomocí normálového vektoru splňuje následující (nebo -1 násobek)*

$$\overrightarrow{n} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}}{\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \|}$$

Věta 28.6. *Nechť $(M, \overrightarrow{n})$ je orientovaná plocha a Nechť $\overrightarrow{F} : M \to \mathbb{R}^3$ je spojité vektorové pole. Nechť $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : T \to \mathbb{R}^3$ je hladká parametrizace plochy M, taková že vektorový součin $\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ je nenulový ve všech vnitřních bodech D a je pozitivním násobkem jednotkového normálového vektoru $\overrightarrow{n}$. Potom platí*

$$\int\int_M \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = \int\int_T F(\Phi(s,t)) \cdot (\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}) dS$$

Výsledek nezáleží na parametrizaci.

Příklad

$$\int\int_{(M)} (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}) d\overrightarrow{S} \tag{50}$$

(M) je povrch elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ s poloosami a,b,c, orientovaný vnějším normálovým polem.

$$x = a \sin\theta \cos\phi \quad y = b \sin\theta \sin\phi \quad z = c \cos\theta$$

$$\Phi(\phi, \vartheta) = (a \sin\vartheta \cos\phi, b \sin\vartheta \sin\phi, c \cos\vartheta).$$
$$x = a \sin\vartheta \cos\phi \quad y = b \sin\vartheta \sin\phi \quad z = c \cos\vartheta$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \phi} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \vartheta} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin\vartheta \sin\phi & b \sin\vartheta \cos\phi & 0 \\ a \cos\vartheta \cos\phi & b \cos\vartheta \sin\phi & -c \sin\vartheta \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = -\sin\vartheta (bc \sin\vartheta \cos\phi, ac \sin\vartheta \sin\phi, ab \cos\vartheta).$$

Vidíme, že pole je orientováno dovnitř, musíme tedy změnit znaménko.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta (\frac{1}{a \sin\vartheta \cos\phi}, \frac{1}{b \sin\vartheta \sin\phi}, \frac{1}{c \cos\vartheta}) \cdot \big(bc \sin\vartheta \cos\phi, ac \sin\vartheta \sin\phi, ab \cos\vartheta\big) d\vartheta d\phi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta (\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}) d\vartheta d\phi = 4\pi (\frac{bc}{b} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c})$$

Pr.

$$\int\!\!\int\limits_{(M)} (x^2, y^2, z^2) d\overrightarrow{S},$$

(M) je povrch koule $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$ orientovaný vnějším normálovým polem.

$$\Phi(\phi, \vartheta) = (a + r\sin\vartheta\cos\phi, b + r\sin\vartheta\sin\phi, c + r\cos\vartheta).$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\phi} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\phi} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial\phi} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial\vartheta} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\cos\phi & r\sin\vartheta\cos\phi & 0 \\ r\cos\vartheta\cos\phi & r\cos\vartheta\sin\phi & -r\sin\vartheta \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\psi} = -r^2\sin\vartheta(\sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\sin\phi, \cos\vartheta).$$

Vidíme, že pole je orientováno dovnitř, musíme tedy změnit znaménko.

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} r^2\sin\vartheta\big((a+r\sin\vartheta\cos\phi)^2, (b+r\sin\vartheta\sin\phi)^2, (c+r\cos\vartheta)^2\big)\cdot\big(\sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\sin\phi, \cos\vartheta\big)d\vartheta d\phi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} r^2\sin\vartheta\big((a+r\sin\vartheta\cos\phi)^2, (b+r\sin\vartheta\sin\phi)^2, (c+r\cos\vartheta)^2\big)\cdot\big(\sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\sin\phi, \cos\vartheta\big)d\vartheta d\phi =$$

29. Gaussova Otrogradského věta

Definice 29.1. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\overrightarrow{F} : U \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole třídy C^1. Pak jeho divergence je definována*

$$div\overrightarrow{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Věta 29.2. *(Gaussova Ostrogradskeho věta)*

Nechť $E \subset \mathbb{R}^3$ je základní těleso, jehož hranice ∂E je plocha orientovaná vnějším normálovým polem $\overrightarrow{n}$. Je-li $\overrightarrow{F}$ vektorové pole třídy C^1 na E, pak platí

$$\int\int\int_E \operatorname{div} F dV = \int\int_{(\partial E)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS$$

Nechť E je základní oblast typu 1,2,3, tedy lze ji považovat za těleso ohraničené shora a zdola grafy funkci nad základní oblasti v $\mathbb{R}^2$ (v každém směru), $S = \partial E$ je hranice. Nechť $F = (P, Q, R)$, tedy $divF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Stačí dokázat (ostatní dva obdobně), za předpokladu že $E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$:

$$\int\int_S (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS = \int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

Tedy

$$\int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int\int_D \Big(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz \Big) dS$$

použitím základní věty analýzy:

$$\int\int\int_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int\int_D \big(R(x, y, \phi_2(x, y)) - R(x, y, \phi_1(x, y)) \big) dS$$

Označme $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, kde S_1 je spodní plocha, S_3 je horní plocha a S_3 je strana ve směru osy z, s odpovídající orientací. Je zřejmé, že normálový vektor $\overrightarrow{n}$ k ploše S_2 je kolmý na vektor $(0, 0, 1)$, takže

$$\int\int_S (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS = \int\int_{S_1} (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS + \int\int_{S_2} (0, 0, R) \cdot \mathbf{n} dS + \int\int_{S_3} (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$= \int\int_{S_1} (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS + \int\int_{S_3} (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS$$

Protože na S_3 platí (normálový vektor míří nahoru)

$$\overrightarrow{n} = \frac{(-\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x, y), 1)}{\|(-\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x, y), 1)\|}$$

platí (a podobně pro dolní stěnu).

$$\int\int_{S_3} (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS = \int\int_D R(x, y, \phi_2(x, y)) dS$$

$$\int\int_{S_1} (0, 0, R) \cdot \overrightarrow{n} dS = \int\int_D -R(x, y, \phi_1(x, y)) dS$$

Pr.

$\int\int_{(M)} (x,y,z)d\overrightarrow{S}$, (M) je jednotková sféra orientovaná vnějším jednotkovým polem

Použijeme Gaussovu větu pro jednotkovou kouli, $\mathrm{div} F = 3$, tedy

$$\int\int_{(\partial P)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int\int\int_P 3dV = 3\frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

Př.

$$\int\int_{(M)} (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))d\overrightarrow{S},$$

(M) je hranicí útvaru s vnější orientací

$$E = \{(x,y,z) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\}$$

a $div \overrightarrow{F} = 3y$

$$\int\int_{(M)} (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))d\overrightarrow{S} = 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z} ydydzdx = \frac{184}{35}$$

30. Stokesova věta

Definice 30.1. *Nechť $(M, \overrightarrow{n})$ je orientovaná plocha, jejíž okraj je tvořen uzavřenou orientovanou jednoduchou křivkou $(C, \overrightarrow{\tau})$. Říkáme, že plocha a její okraj mají souhlasnou orientaci, jestliže pro vektory $\overrightarrow{n}, \overrightarrow{\tau}$ platí, že pokud se pohybujeme podél křivky ve směru $\overrightarrow{\tau}$ a naše hlava ukazuje ve směru $\overrightarrow{n}$, potom je plocha po naší levé ruce.*

Věta 30.2. *(Stokesova věta) Nechť $\overrightarrow{F}$ je vektorové pole třídy C^1 na otevřené množině obsahující elementární orientovanou plochu $(M, \overrightarrow{n})$, jejíž hraniční křivka $(C, \overrightarrow{\tau})$ je souhlasně orientovaná. Pak platí*

$$\int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s} = \int\int\limits_{(M)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$$

kde

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x,y,z) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{\partial F_3}{\partial y} - \tfrac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial z} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Důkaz. Předpokládejme, že plocha $(M, \overrightarrow{n})$ je grafem funkce $z = g(x,y)$, orientovaná nahoru, kde $(x,y) \in D$ leží v jednoduše souvislé oblasti s hraniční pozitivně orientovanou jednoduchou křivkou (C_1), jejíž obraz je hraniční křivka (C) plochy (M).

$$\int\int\limits_{(M)} rot \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int\int\limits_{D} \left(\tfrac{\partial F_3}{\partial y} - \tfrac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial z} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$= \int\int\limits_{D} \left(\tfrac{\partial F_3}{\partial y} - \tfrac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial z} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) dS$$

$$\int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s} = \int\limits_{a}^{b} \big(F_1(\phi(t)), F_2(\phi(t)), F_3(\phi(t))\big) \phi(t)' dt$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \big(F_1(\phi(t)), F_2(\phi(t)), F_3(\phi(t))\big) \big(x'(t), y'(t), \frac{\partial g}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y} y'(t)\big) dt$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \big(F_1(\phi(t)) + F_3(\phi(t)) \frac{\partial g}{\partial x}, F_2(\phi(t)) + F_3(\phi(t)) \frac{\partial g}{\partial y}\big) \big(x'(t), y'(t)\big) dt$$

použitím Greenovy věty

$$= \int\int\limits_{D} \Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(F_2(x,y,g(x,y)) + F_3(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial y}\big) - \frac{\partial}{\partial y}\big(F_1(x,y,g(x,y)) + F_3(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial x}\big)\Big) dS$$

Po provedení úprav

$$= \int\int\limits_{D} \left(\tfrac{\partial F_3}{\partial y} - \tfrac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial z} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) dS$$

□

Příklady:

$$\int\limits_{(C)} (-y^2, x, z^2) d\overrightarrow{s} \tag{51}$$

(C, τ) je průnik roviny $y + z = 2$ a válce $x^2 + y^2 = 1$, orientovaná kladně při pohledu shora.

platí

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} = (0, 0, 1 + 2y)$$

Množina $M = \{(x, y, z) : y + z = 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$, zvolíme souhlasné orientace. M budeme parametrizovat jako graf funkce,

$$M = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$$

s orientací nahoru, tedy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1)$$

Pak platí (použitím grafové parametrizace)

$$\int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{s} = \int\int\limits_{(M)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int\int\limits_{D} (1 + 2y) dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 (1 + 2r \sin\theta) r dr d\theta = \pi$$

Př.

Užitím Stokesovy věty spočítejte $\iint\limits_{(M)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$, kde $\overrightarrow{F} = (yz, xz, xy)$, M je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, která leží uvnitř válce $x^2 + y^2 = 1$, orientovaná nahoru.

Hraniční křivka je (C), $x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{3}$. Parametrizace

$$r(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 0),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int\int\limits_{(M)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S} = \int\limits_{(C)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \int\limits_{C} \overrightarrow{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int\limits_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \sin^2 t + \sqrt{3} \cos^2 t) dt = 0 \tag{52}$$

Pr. Trik se záměnou plochy za jinou plochu se stejnou hranici (v tomto případě kruh D, $x^2 + y^2 \leq 1$).

Užitím Stokesovy věty spočítejte $\iint\limits_{(S)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$, kde $\overrightarrow{F} = (x^2 yz, x, e^{2xy} \cos z)$, S je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientovaná nahoru.

31. Cvičení 1-Řady

(1) Zjistěte zda řada konverguje (resp. absolutně konverguje):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q-3)^n}{q^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+q)^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+7)^n}{(4n-2)^n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{3/2}} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\ln n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(4n-2)^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}$$

32. Cvičení 2-Funkční řady

(2) Najděte poloměr a interval konvergence:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)^3 x^n}{n!}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^n+1}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+(-3)^{k+1}}{\sqrt{k+1}}(x+1)^k$

(3) Najděte Taylorovu řadu a její interval konvergence:

$f(x) = \sin(x^2), \quad x_0 = 0$ $f(x) = \frac{2}{3-5x}, \quad x_0 = 0$

$f(x) = \ln(2+x^2), \quad x_0 = 0$ $f(x) = \frac{x}{x^2-x-2}, \quad x_0 = 0$

$f(x) = \frac{3-2x}{(1-x)^2} \quad x_0 = 0$ $f(x) = \frac{x+3}{x-3} \quad x_0 = -2$

$f(x) = \frac{1}{x} \quad x_0 = -3$ $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x}}{4-x} \quad x_0 = 1$

$f(x) = e^{-x}(2x+1) \quad x_0 = 0$ $f(x) = (x+1)\sin(2\pi x) \quad x_0 = -1$

33. Cvičení 3 Fourierovy řady

(4) Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(t) = 3\sin^2 t + 2\cos^2 t, \quad t \in (0, 2\pi)$$

$$f(t) = \cos^4 t, \quad t \in (0, 2\pi)$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{pro } 0 \le t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \frac{\pi}{2} < t < \pi, \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{pro } 0 \le t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \frac{\pi}{2} < t < \pi, \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{pro } 0 \le t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \frac{\pi}{2} < t < \pi, \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

34. Cvičení 4-Opakování geometrie $I\!R^n$, příklady

Tvrzení 34.1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos\phi$, *kde ϕ je úhel sevřený oběma vektory.*

Důkaz. Uvažme trojúhelník s vrcholy $O = \mathbf{0}$, $A = \mathbf{x}, B = \mathbf{y}$. Podle kosinové věty platí

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB| \cos\phi.$$

Převedeno do do jazyka vektorů,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos\phi.$$

Zbývá užít definice normy použitím souřadnic.

□

Takže po úpravě dostaneme:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$

Odtud plyne snadný test kolmosti dvou vektorů $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Definice 34.2. *Vektorový součin, pouze pro vektory z $I\!R^3$.*

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Dále zavedeme smíšený součin

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} = (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Odtud je vidět ze vektorový součin je kolmý na oba součinitele. Protože determinant je roven objemu rovnobežnostěnu určeného vektory v matici, vidíme též, že vektorový součin je v absolutní hodnotě roven obsahu rovnoběžníka určeného vektory. Znaménko záleží na orientaci, pravidlo pravé ruky.

platí tedy:

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \sin\phi.$$

(1) Najděte velikost úhlu mezi hlavní diagonálou krychle a diagonálou jedné ze stran, která s ní má společný vrchol.
(2) Dokažte formuli pro kolmou projekci z vektoru $\mathbf{y}$ na vektor $\mathbf{x}$:
$$\mathbf{z} = (\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2})\mathbf{x}.$$
(3) Dokažte
$$\text{Cauchy-Schwartzova nerovnost } |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$
(4) Dokažte
$$\text{Trojúhelníková nerovnost } \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$
(5) Dokažte
$$\text{Rovnoběžníkové pravidlo } \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.$$
(6) Dokažte, že $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$.
(7) Dokažte, že $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z}$

(8) Dokažte, že $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$

Nechť P je bod ležící v rovině dané třemi různými body Q, R, S. Označme $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}, \mathbf{b} = \overrightarrow{QS}, \mathbf{c} = \overrightarrow{QP}$. Potom platí

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0.$$

Odtud lze odvodit rovnici pro rovinu určenou body Q, R, S. Obecná formule pro rovinu (afinní podprostor) je $ax + by + cz + d = 0$, normálový vektor je například $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

Rovina obsahující bod $X = (x_1, x_2, x_3)$ s normálou $\mathbf{n} = (a, b, c)$ splňuje rovnici

$$(x - x_1, y - x_2, z - x_3) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Vzdálenost bodu $X = (x_1, x_2, x_3)$ od roviny ρ dané formulí $ax+by+cz+d = 0$. Zvol libovolný $Y = (y_1, y_2, y_3)$ v rovině. Buď ϕ úhel mezi vektorem $\mathbf{v} = \overrightarrow{XY}$ a normálovým vektorem $\mathbf{n}$ roviny ρ. Potom

$$\operatorname{dist}(X, \rho) = \|\overrightarrow{XY}\| |\cos\phi| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(9) Zjistěte, zda přímka procházející body $(0, 0, 1)$ a $(1, -1, 6)$ je kolmá na přímku procházející body $(-4, 2, 1)$ a $(-1, 6, 2)$.

(10) Najděte rovnici pro rovinu procházející bodem $(1, 4, 5)$, která je kolmá na vektor $(7, 1, 4)$.

(11) Najděte rovnici pro rovinu obsahující body $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$.

(12) Nechť P je bod ležící mimo rovinu danou třemi různými body Q, R, S. Označme $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}, \mathbf{b} = \overrightarrow{QS}, \mathbf{c} = \overrightarrow{QP}$. Dokažte že vzdálenost bodu P od roviny splňuje

$$d = \frac{\|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}.$$

35. CVIČENÍ 5- MNOŽINY A SPOJITOST

(1) Diametr množiny M je definován vzorcem

$$diam(M) = \sup\{\|x - y\|, x, y \in M\}$$

Stanovte diametr množin: $M = [0,1]^2, M = [0,1]^3$ etc.

(2) Určete vnitřek, hranici a uzávěr množin:

$$M = \{(x,y) : x^2 + 2x + y^2 \leq 3, x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$$

$$M = \{(x,y,z) : x + y + z > 1\}$$

Q..racionální čísla

(3) Sestrojte příklady množin v $I\!R^2$ s následujícími vlastnostmi:
nemá vnitřní bod ani vnější bod
nemá hraniční bod
nemá vnější bod a je uzavřená
nemá žádný hromadný bod, ale není konečná
je uzavřená a každý její bod je izolovaný

(4) Dokažte že sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina. Platí též pro průnik?

(5) Najděte definiční obory funkcí
$f(x,y) = \ln(xy - 1)$,
$f(x,y) = xy\sqrt{x^2 + y}$,
$f(x,y,z) = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$
$f(x,y) = \frac{\ln(4-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

(6) Načrtněte graf funkce
$f(x,y) = 2 - x - 3y$
$f(x,y) = xy$
$f(x,y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$
$f(x,y) = \frac{x}{y}$
$f(x,y) = y - \cos x$

(7) Najděte limity
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$,
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$,
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$,
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2}$,
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2}$,
$\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,3)} \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$
$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$
$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$,
$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}$,

(8) Zjistěte, zda existuje $c \in I\!R$ takové, aby následující funkce byla spojitá

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ c, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

36. CVIČENÍ 6-PARCIÁLNÍ DERIVACE

(1) Najděte následující směrové derivace
$f(x,y) = e^x \cos y, \quad P(1, \frac{\pi}{6}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
$f(x,y,z) = z^3 - x^2 y, \quad P(1,6,2), \quad \mathbf{u} = (3,4,12).$

(2) Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce

$$z = 2x^2 + y^2, \text{ v bodě } (1,1,3)$$

$$z = xy + \sin(x+y), \text{ v bodě } (1,-1,-1)$$

(3) Najděte linearizaci funkce $f(x,y,z) = e^{xy^2} + x^4 yz$ v bodě $(1,1,1)$.

(4) Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$$

která je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y + z = 0$.

(5) Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

která vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách.

(6) Najděte parciální derivace následujících složených funkcí. $\frac{dw}{dt}$ kde $w = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, $x = \sqrt{t}$, $y = \cos(2t)$, $z = e^{-3t}$
$\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$, kde $z = xe^y + ye^{-x}$, $x = s^2 t$, $y = st^2$
$\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}$ pro $s = 0, t = 1$, kde $u = xy + yz + zx$, $x = st$, $y = e^{st}$, $z = t^2$.

(7) Najděte gradient f v bodě P a najděte rychlost růstu f v P ve směru vektoru $\mathbf{u}$. $f(x,y) = e^x \sin y, \quad P(1, \frac{\pi}{4}), \quad \mathbf{u} = (-1,2)$ $f(x,y,z) = xy + yz^2 + xz^3, \quad P(2,0,3), \quad \mathbf{u} = (-2,-1,2)$.

(8) Najděte jednotkový směr největšího růstu dané funkce v bodě P.
$f(x,y) = x^2 y + e^{xy} \sin y, \quad P(1,0)$
$f(x,y,z) = xe^y + z^2, \quad P(1, \ln 2, \frac{1}{2})$.
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Připomeňte si kvadratické povrchy (kvadriky). Načrtněte je pro $a = b = c = 1$:

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoid
(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ jednodílný hyperboloid
(c) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dvoudílný hyperboloid
(d) $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ kužel
(e) $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ eliptický paraboloid
(f) $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ hyperbolický paraboloid
(g) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eliptický válec
(h) $y = ax^2$ parabolický válec.

37. Cvičení 7-8, Parciální derivace a extrémy

(1) Najděte derivace následujících složených funkci. $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = st$, $y = s\cos(t)$, $z = s\sin t$,
$u = xy + yz + zx$, $x = st$, $y = e^{st}$, $z = t^2$.
$z = y^2 \tan x$, $x = t^2uv, y = u + tv^2$.

(2) Najděte kritické body následujících funkcí:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$$

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$$

(3) Najděte lokální extrémy následujících funkcí:
$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$, $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

(4) Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na trojúhelníku ohraničeném přímkami $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$.

(5) Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $|x| + |y| \leq 1$.

(6) Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y, z) = x+y+z$ na množině $x^2+y^2 \leq z \leq 1$.

(7) Nechť $f(x, y) = e^{xy^2}$. Najděte f_x, $f_y(1, 1)$. Ověřte že platí $f_{xy} = f_{yx}$. Najděte f_{xxy}. Nechť $f(x, y, z) = x^5 + yz^2 + \sin(xy) + \cos(zx)$. Najděte f_x, f_{yx}, f_{zz}.

(8) Dokažte že následující matice jsou invertibilní. Najděte inverzní matici použitím metody elementárních sloupcových operací, a metodou determinantu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) Najděte ortogonální matici, která redukuje následující matici na diagonální tvar. Použijte přitom fakt, známý jako věta o hlavních osách, který říká že symetrickou matici lze převést na diagonální matici pomocí orthogonální transformace souřadnic.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}.$$

(10) Převeďte ortogonální transformaci na diagonální tvar následující kvadratické polynomy (použitím maticové reprezentace kvadratických polynomů, jakožto bilineárních forem):

$$5x^2 - 6xy + 5y^2, \;\; 2x^2 + 4\sqrt{3}xy - 2y^2.$$

(11) Najděte Taylorův polynom druhého stupně pro funkci v okolí bodu

$$f(x, y) = x^2y^3 - 2x^4 + y^2, \;\; (x, y) = (0, 0)$$

$$f(x, y, z) = xy^2z^3, \;\; (x, y, z) = (1, 2, 1)$$

$$f(x, y, z) = xe^y \cos z, \;\; (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

(12) Kruhový talíř s rovnicí $x^2 + y^2 \leq 1$ je zahřátý na teplotu $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

(13) Použitím Lagrangeových multiplikátorů najděte rozměry obdélníka s maximálnim obsahem, který lze vepsat do elipsy
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, a jehož strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic.

(14) Najděte bod v rovině dané rovnicí $2x - y + z = 1$, který je nejblíže bodu $(-4, 1, 3)$

(15) Najděte bod na ploše zadané rovnicí $z^2 = xy + 1$, který je nejblíže počátku souřadnic.

(16) Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

(17) Najděte extrémy funkce s vazebnou podmínkou:

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \ \ x^2 + y^2 = 1$$

$$f(x, y, z) = x - y + 3z, \ x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$$

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4, \ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \ x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0.$$

(18) Najděte úhel sevřený dvěma plochami v bodě

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8, (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 6, \ \ (2, 0, 2)$$

(19) Ověřte předpoklady věty o implicitní funkci pro rovnici $xe^y + \sin(x, y) + y - \ln 2 = 0$, kde y je diferencovatelná funkce proměnné x kolem $(0, \ln 2)$. Spočítejte $\frac{dy}{dx}$ v tomto bodě.

38. Cvičení 9-Dvojný integrál

(1) Integrujte $f(x,y) = y\cos(xy)$ přes obdélník $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$.
(2) Integrujte $f(x,y) = xe^{xy}$ přes obdélník $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.
(3) Integrujte $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ přes obdélník $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.
(4) Změňte pořadí integrace následujících integrálů

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f\,dx\,dy$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} f\,dy\,dx$$

$$\int_0^1 \int_0^{x} f\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f\,dy\,dx$$

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f\,dy\,dx$$

(5) Nakreslete oblast integrace a spočítejte integrál $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\,dx\,dy$.
(6) Nakreslete oblast integrace, určete vhodné pořadí integrace a spočítejte integrál
$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$ $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$
(7) Vypočítejte integrál použitím polárních souřadnic $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dS$ kde D je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos\theta$.
(8) Vypočítejte plochu květu D, kde D je ohraničeno křivkou $r = |\cos 6\theta|$.
(9) Vypočítejte integrál přechodem do polárních souřadnic

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

(10) Použijte substituci $u = x + 2y$, $v = x - y$ pro výpočet integrálu

$$\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x+2y)e^{(y-x)}\,dx\,dy$$

(11) Najděte hmotnost a polohu težiště trojúhelníka s vrcholy $(0,0), (1,1), (4,0)$, hustota je rovna $\rho(x,y) = x$.
(12) Najděte hmotnost a polohu težiště části roviny ohraničené parabolou $y = 9 - x^2$ a osou x, hustota je rovna $\rho(x,y) = y$.
(13) Najděte objem rotačního tělesa ohraničeného paraboloidem $z = x^2 + y^2$ nad kruhem $x^2 + y^2 \le 9$.
(14) Najděte objem rotačního tělesa ohraničeného paraboloidy $z = 3x^2 + 2 + 3y^2$ a $z = 4 - x^2 - y^2$.

39. Cvičení 10-Trojný integrál

(1) Načrtněte oblast integrace

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y f dx dy dz$$

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} f dz dy dx$$

$$\int_0^\pi \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} f dx dz dy$$

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^x f dy dz dx$$

(2) Vypočtěte

$$\iiint_E e^x dV$$

kde $E = \{(x, y, z),\ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y, 0 \leq z \leq x + y\}$.

$$\iiint_E y dV$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$, a leží nad oblastí v rovině xy, ohraničené křivkami $y = x^2, y = 0, x = 1$.

$$\iiint_E xy dV$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)$.

$$\iiint_E x dV$$

kde E je ohraničeno paraboloidem $x = 4y^2 + 4z^2$ a rovinou $x = 4$.

(3)

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz\, dy\, dx$$

$$\int_0^\pi \int_0^{\ln(\sin y)} \int_{-\infty}^{z} e^x\, dx\, dz\, dy.$$

(4) Najděte objem tělesa ohraničeného eliptickým válcem $4x^2 + z^2 = 4$ a rovinami $y = 0$, $y = z + 2$.

(5) Sestavte všechna pořadí integrace pro integrál

$$\iiint_E f dV$$

kde E je ohraničeno plochami:

$x^2+z^2 = 4, y = 0, y = 6$, (resp. $z = 0, z = y, x^2 = 1-y$ $9x^2+4y^2+z^2 = 1$)

40. Cvičení 11-Substituce v trojném integrálu

(1) Načrtněte oblast integrace a spočtěte

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1} \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\vartheta\,d\phi$$

(2) Vypočtěte

$$\int\int\int_E x^2+y^2\,dV$$

kde $E=\{(x,y,z),\ x^2+y^2\le 4, -1\le z\le 2\}$.

$$\int\int\int_E x^2\,dV$$

kde E je vnitřek válce $x^2+y^2=1$, ohraničený shora kuželem $z^2=4x^2+4y^2$ a $z\ge 0$.

$$\int\int\int_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dV$$

kde E je mezikoulí o vnitřním poloměru 1 a vnějším poloměru 2.

(3) Převeďte do cylindrických souřadnic a spočtěte

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dz\,dy\,dz$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\,dz\,dx\,dy$$

(4) Převeďte do sférických souřadnic a spočtěte

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dz$$

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dx\,dy$$

41. Cvičení 12-Křivkový integrál

(1) Integrujte f podél křivky.

$f(x,y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$, C: $y = \frac{x^2}{2}$ od $(1,1/2)$ do $(0,0)$.

$f(x,y) = x + y$, C: $x^2 + y^2 = 4$ v prvním kvadrantu od $(2,0)$ do $(0,2)$.

$f(x,y,z) = x\sqrt{y} - 3z^2$, $\mathbf{r}(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 5t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(2) Najděte práci síly $\overrightarrow{F}$ vykonanou na částici

$\overrightarrow{F} = (3x^2 - 3x, 3z, 1)$, podél přímky $r(t) = (t,t,t)$, $0 \le t \le 1$.

$\overrightarrow{F} = (y+z, z+x, x+y)$, podél křivky $r(t) = (t, t^2, t^4)$, $0 \le t \le 1$.

Spočítejte $\int_{(C)} \overrightarrow{F} \cdot dr$ kde $\overrightarrow{F} = (y, -x)$, podél křivky $x^2 + y^2 = 1$ od $(1,0)$ do $(0,1)$.

(3) Použijte Greenovu větu k výpočtu integrálu $\int_{(C)} (3y, 2x) ds$, kde C je hranicí oblasti $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$, pozitivně orientované.

(4) Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\overrightarrow{F} = (2xy^3, 4x^2y^2)$ podél hranice při pohybu proti hodinovým ručičkám, oblasti v prvním kvadrantu ohraničeném osou x, přímkou $x = 1$, a křivkou $y = x^3$.

(5) Zjistěte zda vektorová pole jsou konzervativní, a najděte jejich potenciální funkci.

$$\overrightarrow{F}_1 = (y \sin z, x \sin z, xy \cos z)$$
$$\overrightarrow{F}_2 = (-y^2 - 2xz, 2yz - 2xy, y^2 - x^2)$$
$$\overrightarrow{F}_3 = (y, x+z, -y)$$

(6) Dokažte, že práce síly $\overrightarrow{F} = (x^2 + y, y^2 + x, ze^z)$ podél křivky z $(1,0,0)$ do $(1,0,1)$ nezávisí na dráze.

42. Cvičení 13-Plošný integrál

(1) Najděte plochu části roviny $x+2y+z=4$, která leží uvnitř válce $x^2+y^2=4$.
(2) Najděte plochu části roviny $2x+3y-z=1$, která leží nad obdélníkem $[1,4]\times[2,4]$.
(3) Najděte plochu paraboloidu $z=x^2+y^2$, která leží pod rovinou $z=9$.
(4) Spočítejte $\int\int_S z\, dS$, kde S je částí válce $x^2+y^2=1$ mezi rovinami $z=0$ a $z=x+1$.
(5) Spočítejte $\int\int_S yz\, dS$, kde S je povrch zadaný parametricky rovnicemi $x=uv$, $y=u+v$, $z=u-v$, $u^2+v^2\le 1$.
(6) Spočítejte $\int\int_S (x^2z+y^2z)\, dS$, kde S je povrch polokoule $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.

Spočítejte $\int\int_{(S)} \overrightarrow{F}\cdot dS$ kde:

(7) $\overrightarrow{F}=(e^y, ye^x, x^2y)$, a S je částí paraboloidu $z=x^2+y^2$, nacházející se nad čtvercem $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ s horní orientací.
(8) $\overrightarrow{F}=(x, xy, xz)$, a S je částí roviny $3x+2y+z=6$, která leží nad prvním oktantem s orientací nahoru.

43. Cvičení 14-Integrální věty

(1) Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\int\int_{(S)} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot dS$, kde $\overrightarrow{F} = (xyz, x, e^{xy} \cos z)$, S je částí sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientované nahoru.

(2) Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\int_{(C)} \overrightarrow{F} \cdot d\mathbf{r}$, kde $\overrightarrow{F} = (xz, 2xy, 3xy)$, C je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, v prvním oktantu při pohledu shora.

(3) Použitím Gaussovy věty spočítejte tok pole $\overrightarrow{F}$ přes S, kde

(4) $\overrightarrow{F} = (3y^2z^3, 9x^2yz^2, -4xy^2)$, a S je povrch krychle $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$;

(5) $\overrightarrow{F} = (x^3, y^3, z^3)$, a S je sféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(6) Ověřte Gaussovu větu pro pole $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3x, xy, 2xz)$, kde E je krychle ohraničená rovinami $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, a $z = 1$.

Mathematical Institute, Czech Academy of Science, Žitná 25, 115 67 Praha 1, Czech Republic, and Department of Mathematics, Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague, Zikova 4, 160 00, Prague

E-mail address: hajek@math.cas.cz