Поиск в глубину

Минский ШАД. Весна

20 апреля 2015 г.

1 Тематические задачи

1. [1 балл] У малыша Пабло есть n красок (пронумерованных от единицы до n) и большое желание раскрасить квадратный холст $n \times n$ клеток с помощью этих красок. Изначально холст пустой (все клетки имеют цвет ноль). На i-й день малыш выбирает краску под номером c_i, которую ещё не выбирал раньше, и закрашивает прямоугольник, состоящий из клеток (x, y), где $l_i \le x \le r_i$, $d_i \le y \le u_i$. По полученному холсту восстановите любой возможный набор $(c_i, l_i, r_i, d_i, u_i)$, который порождает данный холст, за $\mathcal{O}(n^2 \log^2 n)$.

   Например, для следующего холста ответ может быть таким: $((3, 1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 1, 2), (2, 2, 3, 2, 3)$:

1	1	0
1	2	2
0	2	2

2. [1 балл] Рассмотрим следующий параметризированный вариант сортировки массива из n чисел. Параметрами сортировки является k упорядоченных пар (a_i, b_i).

Algorithm 1 SuperSort

```
function SuperSort(A, params)
    finished ← 1
    for i = 1,k do
        if A[params[i].a] > A[params[i].b] then
            finished ← 0
            swap(A[params[i].a], A[params[i].b])
        end if
    end for
    if finished = 0 then
        return SuperSort(A, params)
    else
        return A
    end if
end function
```

Ваша задача по числу n и упорядоченному массиву params ответить, правда ли, что данная сортировка правильно будет работать для любого массива длины n. Сложность алгоритма должна быть линейной от размера входа.

К примеру, если $n = 3$, то, очевидно, сортировка с params $= \{(1, 2), (2, 3)\}$ правильно отсортирует любой массив. Но при $n = 5$, например, массив $A = (1, 2, 3, 5, 4)$ будет отсортирован неверно с помощью данных параметров.

3. [1 ½ балла] В одной стране есть n министров и m проектных документов, каждый из которых может быть либо принят, либо нет. Каждый министр обладает своим очень важным мнением по k_i из этих документов, т.е. утверждает, что он должен быть либо принят, либо не принят. Знания министров достаточно ограничены, поэтому $1 \leqslant k_i \leqslant 4$ для любого i.

   Зачастую случается спорная ситуация, к примеру, один министр хочет, чтоб проект X был принят, а другой совершенно против этого. В таких случаях происходят споры, которые значительно затягивают работу правительства. А именно, эти m проектных документов находятся на рассмотрении уже $10^{18}!$ триллионов лет.

   Но наконец сегодня настал день дедлайна, в который вам надо решить, какие проекты будут приняты, а какие нет. Но не все варианты удовлетворят министров. А именно, пусть l_i — количество проектных документов, которые решились так, как хочет того i-й министр. Тогда вариант признаётся удовлетворительным, если $l_i > \frac{k_i}{2}$ для любого i. Ваша задача: за время $\mathcal{O}(n+m)$ определить, существует ли вообще план, который удовлетворит всех министров.

4. [1 балл] Дан ориентированный (n, m)-граф. Одна из его вершин выделена. Необходимо определить минимальное количество дуг, которое нужно добавить в граф, чтоб все вершины стали достижимы из выделенной, за $\mathcal{O}(n+m)$.

2 Задачи на повторение

5. [1 балл] Дан массив a, причём $|a| = n$ и $a_i = \pm 1$. Массив называется хорошим, если любая его префиксная и суффиксная сумма неотрицательна. Надо найти самый длинный непрерывный подотрезок массива, который является хорошим.

6. [1 ½ балла] Из-за того, что $n \times m$ студентов минского ШАДа неважно написали контрольную, случился апокалипсис. Судить студентов будет малыш Голод, а умеет он либо подвергнуть голодной пытке, либо не подвергать голодной пытке. Студентов выстроили в n рядов по m человек в каждом. Голод знает, что некоторые из студентов минчане, а значит их дома всё равно накормят, т.е. чтобы Голод не решил, такие студенты всё равно останутся сытыми. Также Голод знает, что некоторые другие студенты живут в общаге, а значит они точно будут голодны, вне зависимости от исхода. А вот про остальных студентов Голод волен решить, будут они голодны или нет. Чтоб не показаться несправедливым, Голод хочет, чтоб в любом подквадрате 2×2 было поровну голодных и неголодных студентов. Подскажите малышу, сколько существует различных справедливых исходов существует. Два варианта считаются различными, если существует студент, который в одном варианте остался голодным, а в другом — нет. Сложность алгоритма должна составлять $\mathcal{O}(nm)$.

   К примеру, пусть $n = 3$, $m = 2$ и человек в правом верхнем углу из Минска, а человек в левом нижнем — из общаги:

M	?
?	?
?	O

   Тогда всего есть два способа удовлетворить ограничение:

Таблица 1: Возможные варианты

+	X
+	X
+	X

+	X
X	+
+	X

3 Практические задачи

Ссылка на контест: `https://contest.yandex.ru/contest/1080/problems/`

7. [1 балл] Реализовать задачу 1.

8. [1 балл] Дан алфавит Σ, причём $|\Sigma| = n$. Дано число k. Надо выдать такую строку S минимальной длины, что любой упорядоченный набор из k символов алфавита встречается в S как подстрока.

9. [1 балл] Реализовать задачу 4.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Сумма
Баллы	1	1	1½	1	1	1½	1	1	1	10