Кратчайшие пути. Остовы. Потоки.

Минский ШАД. Весна

6 мая 2015 г.

1 Примечание

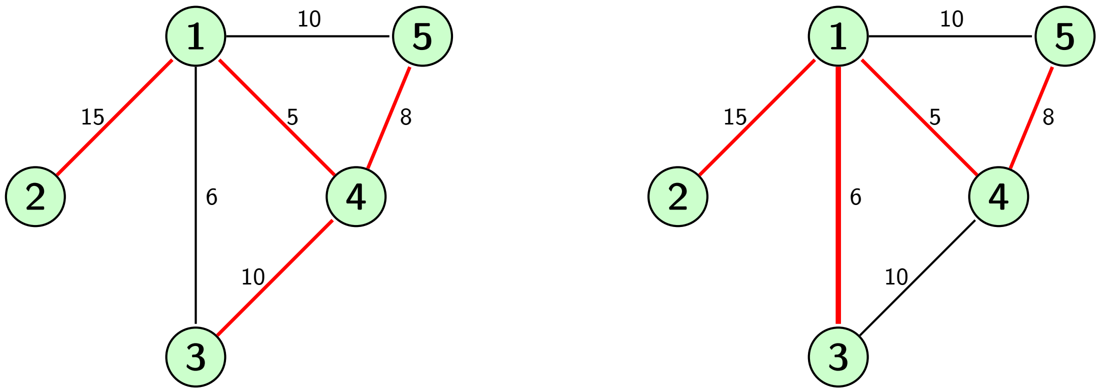
В некоторых задачах вам потребуется использовать алгоритмы поиска максимального потока. Если ваш граф не является двудольным в общем случае, то можно просто говорить, что алгоритм имеет сложность $\mathcal{O}(\mathrm{Flow}(n, m))$, если вам нужно один раз найти максимальный поток в (n, m)-графе. В случае максимального потока минимальной стоимости используйте обозначение $\mathcal{O}(\mathrm{CostFlow}(n, m))$. В случае двудольных графов требуется приводить точную оценку.

2 Тематические задачи

1. [2 ½ балла] Дан ориентированный (n, m)-граф. На каждой дуге написан неотрицательный вес. Необходимо найти все дуги, которые обязательно лежат на кратчайшем пути из A в B (т.е. любой кратчайший путь из A в B их содержит). Время работы алгоритма должно составлять $\mathcal{O}(m \log n)$.

2. [2 балла] Дан неориентированный (n, m)-граф. Необходимо для каждого ребра найти вес минимального остовного дерева, которое содержит это ребро. Весь алгоритм должен иметь сложность $\mathcal{O}(m \log m)$.

   Например, на следующих рисунках показаны искомые деревья одного и того же графа для рёбер $(3, 4)$ и $(1, 3)$ соответственно:



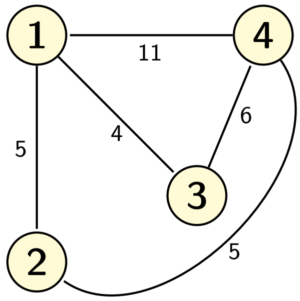
3. [2 ½ балла] Дан взвешенный (n, m)-граф. Весом пути будем называть вес самого тяжёлого ребра пути. Найти вес кратчайшего пути из вершины A в вершину B за $\mathcal{O}(m)$.

4. [1 балл] Дан взвешенный (n, m)-граф без отрицательных рёбер. Вам разрешается заменить вес k любых рёбер на произвольное неотрицательное число (вес разных рёбер можно менять на вес разные числа) Вам нужно найти кратчайший (по сумме весов рёбер) путь из вершины A до вершины B за время $\mathcal{O}(m + n \log n)$. Число k считать константой.

5. [2 балла] Дан взвешенный (n, m)-граф без отрицательных рёбер. Чтоб пройти ребро с весом w необходимо ровно w минут. На этом графе расположено k студентов, i-й студент изначально находится в вершине s_i. Все студенты хотят добраться до вершины с номером 1, потому что там расположена общага, которая вот уже скоро закроется. Студенты понимают, что если они пойдут не по кратчайшему пути, то до закрытия уже не успеют. Поэтому, если некоторый студент понимает, что он не сможет пройти по кратчайшему пути, то он просто разочаровывается в жизни, уходит из графа, садится на асфальт и начинает плакать. Кроме того, если два студента в какой-то момент времени окажутся в одной точке одного и того же ребра, то они начнут спорить про условия теоремы Куна-Такера и оба опаздают в общагу. Замечу, что по народной примете, спорить можно только на рёбрах, поэтому если

два студента встречаются в вершине, но потом уходят по разным рёбрам, то спора не происходит. Студенты ходят по рёбрам с одинаковой скоростью и проводят на вершинах нулевое время. Какое максимальное количество студентов могут попасть сегодня в общагу? Ваш алгоритм должен иметь сложность $\mathcal{O}(n \log n + km)$

К примеру рассмотрим следующий граф:

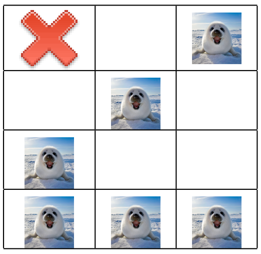


И пусть 4 студента стоят в вершине 4, один студент — в вершине 1, а в остальных вершинах вообще нет студентов. Тогда ответ на задачу 3. Действительно, студент, который и так в общаге, никому не помешает. А вот из четырёх студентов из 4-й вершины добраться, не помешав друг другу могут только два. Один пойдёт по пути $4-3-1$, другой по $4-2-1$. По ребру $(1,4)$ никакой студент пойти не захочет, так как это не кратчайший путь.

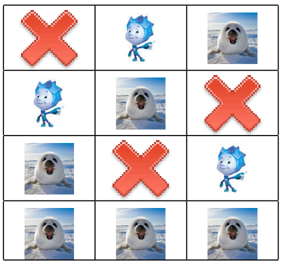
6. [2 балла] У малыша Чингиса, как известно, было много сыновей. Но задача только про N из них. Известно, что в один прекрасный день он повелел собрать ровно N самых красивых девушек со всех своих земель и привести их к себе. После этого он сказал своему главному мудрецу: «зафигачь так, чтоб у каждого сына было ровно по одной девушке, но так, чтоб все сыновья были довольны, в частности, каждая девушка должна быть ровно у одного сына». Для начала мудрец спросил у каждого сына, какие из девушек ему понравились. i-й сын сказал: «ну, короче, вот эти k_i ничего так, т.е. с номерами $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,k_i}$. С другими — хоть убей, не буду». Мудрец, не мудрствуя лукаво, почитал свою любимую скрижаль за авторством малыша Тома и понял, что нужно в некотором несложном графе найти совершенное паросочетание. Он подумал ещё немного, попробовал — и у него получилось. Вернувшись к малышу Чингису, он сказал: «смотри, тема такая: i-й сын берёт w_i-ю девку, и порешили». Но Чингис оказался не так прост. Он сказал: «может нет? Может давай лучше сын с номером x возьмёт себе девушку с номером y? Иди думай над таким вариантом». Мудрец понял, что так легко он не отделается. Поэтому он решил по числу N, векторам a_i и вектору w найти для каждого x, каких девушек он может забрать, чтоб остальные $N-1$ девушек можно было распределить между остальными $N-1$ сыном. Сделать это надо за $\mathcal{O}(\max(T, N+A))$, где T — размер ответа, а $A = \sum\limits_{i=1}^{N} k_i$.

7. [2 балла] Малыш Тик и малыш Так играют в игру крестики-нолики на поле $N \times M$. Игра происходит следующим образом. Сначала, для интереса, в некоторые клетки садят очень спокойных котят. Котята никогда не уходят с этой клетки, поэтому ходить в эти клетки нельзя. Игроки ходят по очереди, начиная с крестиков. Игра заканчивается, когда на поле не остаётся пустых клеток, либо когда на поле появляется строка без пустых клеток или столбец без пустых клеток, в которых ноликов строго больше, чем крестиков, либо крестиков строго больше, чем ноликов. Если после окончания игры есть заполненный столбец или строка, в которой одной фигуры больше, чем другой, то игрок, играющий этой фигурой объявляется победителем. Иначе игра оканчивается ничейным результатом. Малыш Тик гораздо старше малыша Так и всегда выигрывал у него. Лишь вчера малышу Таку удалось свести одну партию вничью. И всё бы ничего, но чтоб произвести впечатление на малышку Тоу, ему хочется показать поле той легендарной партии. Но вот незадача, некоторые из котиков чихнули и стёрли часть фигур. Тем не менее, они настолько спокойны, что остались на своих местах. Теперь задача Така состоит в том, чтоб расставить фигуры на стёртые места таким образом, чтоб образовывалось поле, которое могло получиться в результате ничейной игры.

Например, если поле вот такое:



То из него могло получиться следующее:



3 Задачи на повторение

8. [1 ½ балла] Дано дерево на n вершинах. Посчитать суммарную длину (по рёбрам) всех простых путей в этом дереве за $\mathcal{O}(n)$.

9. [2 балла] Задано конечное множество A. На нём задана функция $f : A \to A$ своей таблицей значений. Найти минимальное натуральное k такое, что f^k идемпотентна или сказать, что такого k не существует. Алгоритм должен иметь сложность $\mathcal{O}(|A| \log |A|)$, можно считать, что A — множество натуральных чисел от 1 до $|A|$.

4 Практические задачи

Ссылка на контест: `https://contest.yandex.ru/contest/1080/problems/`

10. [2 балла] Реализуйте решение задачи 4

11. [2 балла] Реализуйте решение задачи 6

12. [2 балла] Реализуйте решение задачи 7

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Сумма
Баллы	2½	2	2½	1	2	2	2	1½	2	2	2	2	23½