# Динамическое программирование на деревьях

Минский ШАД. Осень

7 января 2015 г.

## 1 Тематические задачи

1. [1 балл] Дерево на $n$ вершинах задано своим списком рёбер. На каждом ребре написан вес $w_{a,b} \in \mathbb{R}$. Необходимо за $\mathcal{O}(n)$ предоставить вес самого тяжелого простого пути (вес пути — сумма весов рёбер). Вес пустого пути считается равным нулю.

**Решение:** Подвесим дерево за любую вершину. Введём величину $f(x)$ равную весу самого тяжелого пути от вершины $x$ до какой-либо вершины её поддерева (включая саму вершину $x$). Введённую величину легко пересчитать через сыновей $S_x$ вершины $x$, а именно:

$$f(x) = \max\left(0, \max_{y \in S_x}(w_{x,y} + f(y))\right)$$

Вычислять эту величину можно с помощью обхода в глубину.

Теперь для каждой вершины $x$ найдём $g(x)$ — вес самого тяжёлого простого пути среди таких, что вершина $x$ является самой близкой (по количеству рёбер) к корню вершиной этого пути. Очевидно, что вес такого пути либо равен $f(x)$, либо $\max\limits_{y_1 \in S_x, y_2 \in S_x, y1 \neq y2} f(y_1) + w_{x,y_1} + f(y_2) + w_{x,y_2}$.

Последнюю величину легко вычислить за $\mathcal{O}(|S_x|)$ — нужно просто найти два максимума $f(y) + w_{x,y}$ по $S_x$.

Таким образом, ответ на задачу — $\max\limits_x g(x)$

2. [3 балла] По дереву на $n$ вершинах определить сколько существует различных (с точностью до переименования цветов) способов раскрасить дерево в $m$ цветов, при условии, что вершины одного цвета должны образовывать связное множество.

## 2 Задачи на повторение

3. [1 балл] Задано прямоугольное поле размерами $n \times m$. В клетке с координатами $(i, j)$ находится ровно $a_{i,j} \in \mathbb{N}$ котиков. Нужно найти такой путь из клетки $(1, 1)$ в клетку $(n, m)$, что суммарное количество котиков на пути будет максимально. Двигаться по пути можно только вправо, либо только вниз (т.е разрешённые ходы $(i, j) \to (i + 1, j)$ либо $(i, j) \to (i, j + 1)$). Время работы должно составлять $\mathcal{O}(nm)$

4. Задано поле, как в предыдущей задаче. Путь из клетки $(1, 1)$ в клетку $(n, m)$, двигаясь только вправо либо вниз, назовём «путём сильной и независимой женщины». По пути сильная независимая женщина может в каждой клеток взять или не взять ровно одного кота (т.е. из одной клетки можно взять только одного, но можно брать хоть в каждой клетке пути). Надо сказать, сколько минимум нужно сильных независимых женщин, чтоб собрать всех котов с поля.

(a) [1 балл] Время решения должно быть $\mathcal{O}\left(nm \times \sum a_{i,j}\right)$

(b) [2 балла] Время решения должно быть $\mathcal{O}(nm)$

## 3 Практические задачи

5. [1 балл] Реализуйте решение задачи 1 (`http://unexisting/link/to/contest.yandex.ru`).

6. [1 балл] Реализуйте задачу бинаризации корневного дерева (`http://second/unexisting/link/to/contest.yandex.ru`).

| Задание | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Баллы | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 10 |