Неразобранные задачи

Минский ШАД. Осень

11 января 2015 г.

1 Динамическое программирование

1. [1 балл] На прямой своими координатами задано n точек. В этих точках расположены гвоздики. Два гвоздика, находящихся в позициях x_i и x_j можно соединить ниткой длиной $|x_i - x_j|$ саженей. Необходимо натянуть нитки между гвоздями таким образом, чтоб к каждому гвоздю была присоединена как минимум одна нитка, а суммарная длина нитей была минимальна. Сложность алгоритма должна составлять $\mathcal{O}(n \log n)$.

Решение:

Отсортируем все гвоздики по координате и будем считать, что они пронумерованы в порядке увеличения координаты. Очевидно, что гвоздик стоит соединять только с соседним гвоздём (иначе можно считать что рассматриваемый гвоздь соединён с промежуточным, а промежуточный — с изначальным соседом). Тогда введём величину f_i — ответ на задачу, если бы было задано только первых i гвоздей. Тогда:

$$\boxed{f_i = \min\left(f_{i-1}, f_{i-2}\right) + |x_i - x_{i-1}|}$$

Последний гвоздь мы обязаны соединить с предпоследним. Мы выбираем из двух вариантов: первый соответствует случаю, когда мы соединяем гвоздь $i-1$ с гвоздём $i-2$, а второй — нет. Итого $\mathcal{O}(n \log n)$ на сортировку и $\mathcal{O}(n)$ на вычисление ответа.

2 КМП

2. [1 балл] Для каждой позиции строки S вычислить значение a_i — длину максимальной подстроки, которая начинается в i и совпадает с некоторым суффиксом строки S. Решение должно иметь сложность $\mathcal{O}(n)$

Решение:

Развернём строку и посчитаем префикс-функцию. Если мы развернём обратно массив, содержащий значения префикс-функций, то можно заметить, что это и есть ответ на задачу.

3 Ad-hoc

3. Дана матрица размером $n \times m$. Каждый элемент матрицы равен либо единице, либо нулю. Нужно преобразовать матрицу таким образом, чтоб элемент $a_{i,j}$ был равен 1 тогда и только тогда, когда в строке i есть хотя бы одна единица или в столбце j есть хотя бы одна единица.

(a) [1 балл] Решение должно иметь сложность $\mathcal{O}(nm)$

(b) [1 балл] Решение должно иметь сложность $\mathcal{O}(nm)$ и использовать лишь константу дополнительной памяти (т.е. результат должен оказаться в исходной матрице). Каждый элемент матрицы занимает один бит.

Решение:

Заметим, что задачу можно переформулировать так: если в позиции (i, j) исходной матрицы стоит единица, то надо заполнить строку i и столбец j единицами в результирующей матрице.

Изначально запомним, есть ли в первой строке хотя бы одна единица. Затем для каждой строки, начиная со второй, будем делать следующее:

1. Запомним есть ли в этой строке хотя бы одна единица. Эту информацию не будем запоминать между строками, так что памяти будет $\mathcal{O}(1)$
2. Если в столбце j этой строки стоит единица, поставим единицы в j-й столбец первой строки
3. Если в пункте 1 мы запомнили, что в этой строке была единица, то заполним всю строку единицами

Теперь пройдёмся по первой строке и если встречаем единицу, то заполняем весь встреченный столбец единицами. Если мы изначально запомнили, что первая строка содеражала хотя бы одну единицу, то заполняем единицами всю строку. Полученная матрица — искомая.

4. [$\frac{1}{2}$ баллов] Дан массив, где **к**аждое число, кроме одного, повторяет**с**я два раза, а одно число — встречается только **о**дин раз. Надо найти это число за 1 п**р**оход по массиву и $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.

Решение:

Найдём $\oplus$-сумму всего массива — это и будет искомое число.

5. [1 $\frac{1}{2}$ баллов] Дан массив целых чисел, где каждое число, кроме x и y, встречается по два раза, а числа x и y — ровно по одному ($x \neq y$). Надо найти эти числа за $\mathcal{O}(n)$ времени и $\mathcal{O}(1)$ памяти.

Решение:

Найдём $\oplus$-сумму всего массива — это будет $x \oplus y$. Обозначим эту сумму за S. Очевидно, что $S \neq 0$ ($x \neq y$). Найдём любой его единичный бит i (позже покажем, как это сделать за константу времени). Мы знаем, что в этом бите числа x и y различаются. Будем считать, не теряя общности, что x имеет 1 в бите i, а y — 0. Тогда найдём S_0 — $\oplus$-сумму всех чисел, у которых в i-м бите стоит 0, и аналогичную S_1 — для всех чисел, у которых в i-м бите стоит единица. Тогда $x = S_1$, $y = S_0$.

Научимся находить единичный бит у числа за $\mathcal{O}(1)$. Для этого заметим, что $\text{prev}(x) = x \& (x-1)$ — это число x с занулённым младшим единичным битом. Тогда, если мы вычислим $x \oplus \text{prev}(x)$, то мы как раз получим число с одним взведённым битом — самым младшим единичным битом числа x.

Затем, для определения куда отнести число z: в S_0 или S_1 необходимо просто проверять результат $z \& (x \oplus \text{prev}(x))$.

4 Геометрия

6. Дано n точек на плоскости. Необходимо сказать сколько треугольников на этих точках содержат точку $(0, 0)$.

(a) [½ баллов] Решение должно иметь сложность $\mathcal{O}(n^3)$

(b) [½ баллов] Решение должно иметь сложность $\mathcal{O}(n^2 \log n)$

(c) [1 балл] Решение должно иметь сложность $\mathcal{O}(n \log n)$

Решение:

Посчитаем количество треугольников, которые **не** содержат точку $(0,0)$, а затем вычтем из общего (C_n^3) количества треугольников найденное количество и получим ответ на задачу.

Все такие треугольники содержатся в одной полуплоскости относительно начала координат. Отсортируем все точки по углу, относительно $(0,0)$. Начнём с полуплоскости, полученной осью oX. Будем вращать её по часовой стрелке. Когда точка A входит в полуплоскость, посчитаем сколько треугольников будет содержаться в этой новой полуплоскости и иметь A как одну из вершин. Очевидно, что если в полуплоскости ровно m точек, то количество искомых треугольников C_m^2. Число m можно легко поддерживать: при вхождении точки увеличиваем его на 1, при выходе — уменьшаем.

7. [3 балла] Дан массив из $n+1$ числа, в котором содержатся целые числа от 1 до n (какие-то числа могут отсутствовать). Необходимо найти любое такое x, что x встречается в массиве как минимум дважды.

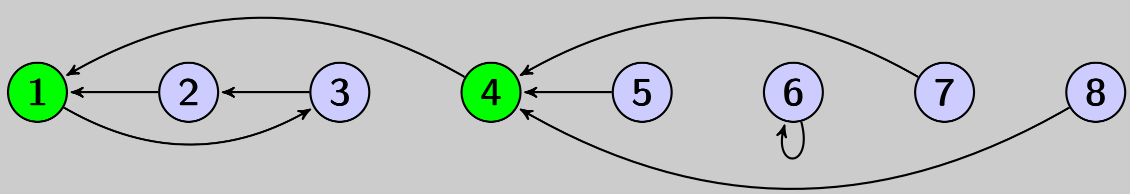
Решение:

Рассмотрим граф из $n+1$ вершины, и дугами $i \to a_i$. В таком орграфе $n+1$ вершина и $n+1$ дуга, а значит он состоит только из циклов, каждая вершина которого — корень какого-нибудь корневого дерева.

Например, исходный массив:

a_i	3	1	2	1	4	3	7	4
i	1	2	3	4	5	6	7	8

Породит следующий граф:



Зелёным отмечены числа, которые подходят под ответ. Эти числа соответствуют вершинам, в которые входят больше одной дуги.

Забудем на время про ориентацию дуг. Посмотрим на компоненту связности, в которой лежит вершина $n+1$. Очевидно, что в этой компоненте есть цикл (в компоненте m вершин и m рёбер). Однако, вершина $n+1$ на цикле лежать не может (в неё не входит ни одна дуга) — значит если мы встанём в неё и будем идти по дугам, то рано или поздно придём в цикл. Заметим, что первая вершина цикла, в которую мы попадём обязательно будет «зелёной». Действительно, в неё входит как минимум одна дуга из цикла и та дуга, по которой мы пришли.

Ну, теперь задача получилась простая. Надо встать в вершину $n+1$ и идти по дугам до цикла, а после найти первую вершину цикла. В данном случае можно сделать это так.

1. Сделаем от вершины $n + 1$ ровно $n + 1$ шаг. Пусть мы попали в вершину x. Очевидно, это вершина цикла (предпериод не может быть длинней $n + 1$).

2. Пойдём от вершины x по дугам и будем считать количество шагов, пока опять не попадём в вершину x. Пусть это количество l. Заметим, что l — длина цикла.

3. Заведём два указателя. Один будет указывать на вершину $n + 1$, другой на вершину через l шагов от вершины $n + 1$. Будем двигать эти указатели одновременно по шагу, пока они не станут указывать на одну и ту же вершину. Очевидно, что это и будет первая вершина цикла.