X

Rapport Final : Hackathon MARGO x ENSIMAG Finance

Auteurs :
Mehdi El Idrissi El Fatmi
Hamza Aboutni
Youssef Bakka

16/01/2025

Contents

1 Méthodologie de résolution

1.1 Étape 1

Le prix d'une obligation à taux fixe est calculé en actualisant les flux de trésorerie futurs, qui comprennent les paiements de coupons et le remboursement du nominal :

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1 + r_{\text{fr}})^t} + \frac{N}{(1 + r_{\text{fr}})^T}$$

où :

- $C = N \times \frac{C_{\text{rate}}}{100}$: le coupon annuel,
- r_{fr} est le taux sans risque fixe,
- N : la valeur nominale .
- T: la maturité .

1.2 Étape 2

Le prix d'une obligation à taux sans risque variable prend en compte les taux r_t spécifiques pour chaque période t :

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r_t)^t} + \frac{N}{(1+r_T)^T}$$

où :

- $C = N \times \frac{C_{\text{rate}}}{100}$: le coupon annuel,
- r_t : le taux sans risque pour la période t,
- N : la valeur nominale,
- T : la maturité.

1.3 Étape 3

1.3.1 Prétraitement des données

Les données sont chargées depuis un fichier CSV à l'aide de la bibliothèque Python `pandas` et traitee dans le fichier 'DataPreProcessing.py'. Un nettoyage rigoureux est effectué pour garantir la qualité des données :

- Suppression des lignes incomplètes ou contenant des valeurs manquantes.
- Suppression des obligations dont les dates de maturité sont expirées (avant le 16/01/2025).
- Conversion des dates de maturité en "années restantes" pour calculer le prix des obligations.

1.3.2 Trouver r (rendement à maturité ou YTM)

Pour trouver r, le rendement à maturité, à partir de l'équation donnée, il est nécessaire de résoudre une équation non linéaire. L'équation est la suivante :

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C \times N}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^T}$$

où :

- P : prix du marché (clean price),
- C : taux de coupon (en pourcentage),
- N : valeur nominale (souvent 100),
- T : nombre d'années jusqu'à la maturité,
- r : rendement à maturité (YTM).

Explication du code pour trouver r (rendement à maturité ou YTM) : La fonction `ytm` implémente une méthode numérique (Newton-Raphson) pour trouver r à partir des paramètres d'une obligation. Voici le déroulement du code que nous avons adopté :

- **Entrées** :
  - P : Prix actuel de l'obligation (clean price),
  - N : Valeur nominale de l'obligation,
  - C : Coupon annuel (montant en euros, pas en pourcentage),
  - T : Maturité de l'obligation (en années),
  - `tol` : Tolérance pour l'arrêt de l'itération (par défaut 10^{-9}),
  - `max_iter` : Nombre maximal d'itérations autorisées (par défaut 10 000).
- **Étapes principales du code** :
  1. **Initialisation** : La valeur initiale de r est approximée par le ratio :
  $$r = \frac{C}{P}$$
  Cette estimation est raisonnable car le rendement est souvent proche du taux de coupon divisé par le prix.
  2. **Calcul de la fonction $f(r)$** : À chaque itération, la différence entre le prix observé (P) et le prix calculé avec le taux actuel (r) est évaluée :
  $$f(r) = P - \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r)^t} - \frac{N}{(1+r)^T}$$
  Cela représente l'écart entre le prix observé et le prix théorique.
  3. **Calcul de la dérivée $f'(r)$** : La dérivée de $f(r)$ est calculée pour ajuster r avec la méthode Newton-Raphson :
  $$f'(r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{t \cdot C}{(1+r)^{t+1}} + \frac{T \cdot N}{(1+r)^{T+1}}$$
  4. **Mise à jour de r** : La valeur de r est mise à jour avec la formule de Newton-Raphson :
  $$r_{\text{new}} = r_{\text{old}} - \frac{f(r_{\text{old}})}{f'(r_{\text{old}})}$$
  Cette formule ajuste r pour réduire progressivement l'écart $f(r)$.
  5. **Critère d'arrêt** : L'algorithme s'arrête lorsque la différence entre deux itérations consécutives de r est inférieure à une tolérance donnée (ϵ) :
  $$|r_{\text{new}} - r_{\text{old}}| < \epsilon$$
  Si la convergence n'est pas atteinte après `max_iter` itérations, une erreur est levée.

- **Retour de la fonction** : Une fois la convergence atteinte, la fonction retourne le rendement à maturité (r), qui correspond au taux d'actualisation équilibrant le prix observé et les flux futurs.

- **Complexité du calcul** : La méthode Newton-Raphson est rapide et converge généralement en quelques itérations, à condition que l'estimation initiale soit raisonnable et que la fonction soit dérivable dans l'intervalle de recherche.

Application à toutes les lignes valides : Ce calcul est effectué pour chaque ligne valide des données de marché afin de déterminer r pour chaque obligation.

la méthode itérative Newton-Raphson est utilisée pour trouver r avec une précision de $\epsilon = 10^{-6}$.

Si r est négatif, il n'est pas pris en compte dans les calculs ultérieurs, conformément aux hypothèses de la théorie financière : Consommateur insatiable,riscophobe et absence d'opportunite d'arbitrage(AOA).

1.3.3 Calcul des taux sans risque (r) et estimation du taux moyen

1. Application des méthodes d'estimation du taux sans risque : Pour obtenir une estimation robuste, quatre méthodes différentes sont appliquées sur la liste des rendements r filtrés :

1. **Médiane (r_{median})** : La médiane des rendements est calculée pour réduire l'impact des valeurs aberrantes. Elle est définie comme le rendement qui divise la liste ordonnée en deux moitiés égales.

2. **Méthode de Huber (r_{huber})** : Cette méthode est robuste aux valeurs extrêmes en ajustant les rendements à l'aide d'une fonction de perte qui diminue leur influence. Elle retourne une estimation plus stable en présence de données bruitées.

3. **Moyenne pondérée des rendements long terme ($r_{\text{long term}}$)** : Cette méthode prend en compte uniquement les rendements des obligations dont la maturité est supérieure ou égale à un seuil défini (par exemple, 10 ans). Elle est utilisée pour estimer le taux sans risque à long terme.

4. **Moyenne pondérée (r_{weighted})** : Les rendements sont pondérés en fonction de l'importance relative des obligations (par exemple, une pondération uniforme).

2. Calcul de la moyenne des résultats : Les quatre estimations obtenues (r_{median}, r_{huber}, $r_{\text{long term}}$, r_{weighted}) sont ensuite utilisées pour calculer une moyenne globale :

$$r_{\text{final}} = \frac{r_{\text{median}} + r_{\text{huber}} + r_{\text{long term}} + r_{\text{weighted}}}{4}$$

Cette moyenne représente la meilleure estimation du taux sans risque, car elle combine différentes approches pour réduire l'impact des biais ou des anomalies dans les données.

4. Utilisation du taux sans risque moyen : Le taux r_{final} obtenu est ensuite utilisé pour estimer le prix des obligations (en utilisant l'étape 1).

1.4 Étape 4 :

Cette étape consiste à estimer le rendement interpolé pour une maturité cible en années et à calculer le prix d'une obligation en utilisant ce rendement. Voici les étapes suivies :

1.4.1 Extraction des obligations avec les maturités les plus proches

Les obligations dont les maturités sont les plus proches de la cible sont sélectionnées. Pour ce faire :

- Les maturités des obligations sont calculées en années restantes à partir de la date de référence donnée (`16-01-2025`).
- La différence absolue entre la maturité cible ($T_{\text{cible}} = 7$ ans) et les maturités des obligations est calculée.
- Les 3 obligations ayant les différences les plus faibles sont sélectionnées pour l'interpolation. **Remarque :** Nous avons constaté qu'une valeur donnait un r non valide. Par conséquent, nous avons décidé de choisir les trois obligations les plus proches de la date de maturité, au lieu de deux.

1.4.2 Interpolation du rendement pour la maturité cible

Une interpolation linéaire est réalisée pour estimer le rendement correspondant à la maturité cible ($T_{\text{cible}} = 7$ ans). Les rendements des deux obligations les plus proches (r_1, r_2) et leurs maturités respectives (T_1, T_2) sont utilisés pour l'interpolation :

$$r_{\text{interpolé}} = r_1 + \frac{T_{\text{cible}} - T_1}{T_2 - T_1} \cdot (r_2 - r_1)$$

1.4.3 Calcul du prix de l'obligation

Le rendement interpolé est utilisé pour estimer le prix d'une obligation hypothétique avec une maturité de 7 ans. La formule utilisée est :

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1 + r_{\text{interpolé}})^t} + \frac{N}{(1 + r_{\text{interpolé}})^T}$$

où :

- P : Prix de l'obligation,
- C : Coupon annuel (5% de la valeur nominale),
- $N = 100$: Valeur nominale,
- $r_{\text{interpolé}}$: Rendement interpolé en pourcentage.

2 Étape 5

Cette étape consiste à calculer le prix de l'obligation en actualisant ses flux de trésorerie futurs, à estimer le coupon couru, et à déterminer le prix total de l'obligation.

2.1 Prix de l'obligation (flux actualisés)

Le prix de l'obligation est obtenu en actualisant tous les flux de trésorerie futurs, y compris les coupons annuels et le remboursement du nominal à maturité. Les étapes sont les suivantes :

- Calcul des flux de trésorerie annuels :

$$C = N \times \frac{\text{Coupon Rate}}{100}$$

  où :

  - C : le coupon annuel.
  - N : la valeur nominale .
  - Coupon Rate : le taux de coupon annuel en pourcentage (4% dans notre cas).

- Actualisation des flux de trésorerie :

$$P_{\text{obligation}} = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{C+N}{(1+r)^T}$$

  où :

  - r: le taux sans risque calculé à l'étape 3 (2.34965%),
  - $T = 5$: la maturité .

  Le premier terme correspond aux coupons annuels actualisés, et le second terme inclut le remboursement du nominal.

2.2 Calcul du coupon couru

Le coupon couru représente la fraction du coupon annuel accumulée entre le dernier paiement et la date actuelle. La formule utilisée est :

$$\text{Coupon Couru} = C \times \frac{\text{Days Elapsed}}{360}$$

où :

- C est le coupon annuel,
- Days Elapsed est le nombre de jours écoulés depuis le dernier paiement,
- 360 correspond à une année conventionnelle en jours dans les calculs financiers.

Le dernier paiement de coupon est estimé comme ayant eu lieu à la même date dans l'année précédente, soit le `16 juillet 2024`. La différence en jours avec la date actuelle (`16 janvier 2025`) est calculée.

2.3 Prix total de l'obligation

Le prix total de l'obligation est obtenu en additionnant le prix actualisé des flux de trésorerie et le coupon couru :

$$P_{\text{total}} = P_{\text{obligation}} + \text{Coupon Couru}$$

Remarque : Le coupon couru n'est pas actualisé car il ne s'agit pas d'un flux futur. C'est un montant qui reflète une obligation déjà partiellement échue, et donc il est traité comme une somme immédiate à ajouter au prix actualisé des flux futurs.

3 Résultats

3.1 Résultat pour Étape 1

Le prix de l'obligation avec un taux sans risque fixe de 3% a été calculé comme suit :

$$\text{Prix} = \sum_{t=1}^{5} \frac{4}{(1+0.03)^t} + \frac{100}{(1+0.03)^5}$$

$$\text{Prix} = 104.5797072 \,€$$

3.2 Résultat pour Étape 2

En utilisant des taux sans risque variables, le prix de l'obligation est de :

$$\text{Prix avec taux variables} = 100.3555809 \,€$$

3.3 Résolution pour Étape 3

- En appliquant la méthode de Newton, nous avons obtenu un taux d'équilibre de 2.349654%.
- Le prix du bond estimé par : 119.8685098428794 €

3.4 Résolution pour Étape 4

- Prix estimé de l'obligation avec une maturité de 7 ans : 116.5802699667 €

3.5 Résolution pour l'Étape 5

- Coupon couru : 2,0444444 €
- Prix total de l'obligation : 109.7449629449 €

Remarque : Toutes les étapes décrites dans ce rapport peuvent être exécutées automatiquement en utilisant le script `run.py`.

4 Conclusion

Ce hackathon a permis de démontrer l'efficacité des méthodes quantitatives appliquées au pricing des obligations. En utilisant des techniques d'actualisation des flux de trésorerie, nous avons estimé avec précision le prix des obligations dans des scénarios de taux d'intérêt fixes et variables. La méthode de Newton a été utilisée pour résoudre les rendements à maturité (YTM), assurant ainsi un calcul fiable du taux sans risque. L'interpolation des rendements a permis d'estimer les prix des obligations pour des maturités non cotées, augmentant la flexibilité de notre modèle. En combinant ces approches, le modèle développé présente une solution robuste pour le pricing des produits Fixed Income. Ce travail constitue une base solide pour l'extension de ces techniques à des instruments financiers plus complexes, offrant des perspectives intéressantes pour les marchés financiers.