Wykład 6

Metoda eliminacji Gaussa:

Eliminacja z wyborem częściowym

Eliminacja z wyborem pełnym

ELIMINACJA GAUSSA Z WYBOREM CZĘŚCIOWYM ELEMENTÓW PODSTAWOWYCH

Przy pomocy klasycznego algorytmu eliminacji Gaussa nie możemy znaleźć rozwiązania wszystkich układów dla których układ ma rozwiązanie tj. $\det A \neq 0$, a jedynie układów których wszystkie minory główne są różne od zera.

W k-tym kroku eliminacji Gaussa może się zdarzyć, że element podstawowy $a_{kk}^{(k-1)}=0$.

$$A^{(k-1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & \cdots & a_{11}^{(k-1)} & \cdots & a_{1,n+1}^{(k-1)} \\ 0 & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & {\color{red}a_{kk}^{(k-1)}=0} & & a_{k,n+1}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nk}^{(k-1)} & & a_{n,n+1}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Wtedy w czynniku $r=\dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ otrzymamy dzielenie przez zero – niewykonalne.

Aby tego uniknąć, należy zastosować **wybór częściowy** (ang. *pivoting*) tj. wyznaczyć indeks ***p*** taki, że

$$|a_{pk}^{(k-1)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k-1)}|$$

tzn. w wektorze $\left[a_{kk}^{(k-1)},\, a_{k+1,k}^{(k-1)},\, \ldots,\, a_{n,k}^{(k-1)}\right]^T$ znaleźć współrzędną o największym module.

Następnie należy w macierzy $A^{(k-1)}$ przestawić wiersze o numerach k i p, co jest równoważne z przestawieniem równań. Po tej operacji mamy układ równań równoważny poprzedniemu.

Wybór częściowy – algorytm

k-ty krok:

Na początku **szukamy indeksu** ***p*** **elementu** **`maks`** **maksymalnego co do modułu** (wartości bezwzględnej) w *k*-tej kolumnie od przekątnej w dół :

$$A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & \cdots & a_{1k}^{(k-1)} & \cdots & a_{1,n+1}^{(k-1)} \\ 0 & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & a_{kk}^{(k-1)} & & a_{k,n+1}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nk}^{(k-1)} & & a_{n,n+1}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Po dokonaniu wyboru częściowego możliwe są dwa przypadki:

1. jeżeli $maks \neq 0$, to **przestawiamy wiersz *k*-ty z *p*-tym** w bieżącej macierzy w eliminacji Gaussa:

```
for (i=k; j<=n+1;j++)
{
   r=a[k][j];
   a[k][j]=a[p][j];
   a[p][j]=r;
}
```

i **kontynuujemy eliminację Gaussa wykonując *k*-ty krok**, tj. zerujemy k-tą kolumnę pod przekątną odejmując od i-tego wiersza $i=k+1, k+2, \ldots, n$, wiersz k-ty pomnożony przez $r=\dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)} \qquad j=k, k+1, \ldots, n+1$$

2. jeżeli $maks=0$, to układ wejściowy jest osobliwy, **kończymy metodę eliminacji Gausa z wynikiem „*układ osobliwy*"**

Przykład 1. Rozwiązać układ równań $Ax=b$ dla danych:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Tworzymy macierz uzupełnioną:

$$A^{(0)}=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Krok *1*-szy – Szukamy elementu maksymalnego co do wartości bezwzględnej w 1-szej kolumnie

$$A^{(0)} = \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Element maksymalny to element na głównej przekątnej $a_{11}^{(0)} = 2$, $p=1$. Nie musimy zatem dokonywać zamiany wierszy ($p==k$).

Wykonujemy *1*-szy krok eliminacji Gaussa tj. zerowanie *1*-szej kolumny pod przekątną. Od wierszy od 2-go do 4-tego odejmujemy pierwszy wiersz pomnożony przez czynnik $r = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$ *i =2,3,4.*

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$w_2 \leftarrow w_2 - \frac{1}{2} \cdot w_1$$

$$w_3 \leftarrow w_3 - \frac{0}{2} \cdot w_1$$

$$w_4 \leftarrow w_4 - \frac{2}{2} \cdot w_1$$

Krok *2* – **szukamy elementu maksymalnego co do wartości bezwzględnej** w drugiej kolumnie „od przekątnej w dół”:

$$A^{(1)}=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Element o maksymalnym module to $a_{42}^{(1)}=-3$, $p=4$.
Przestawiamy wierszy *2*-gi z *4*-tym.
Otrzymujemy:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Wykonujemy teraz drugi krok eliminacji Gaussa tj. zerowanie *2*-giej kolumny poniżej przekątnej poprzez odejmowanie od wierszy pod przekątną *i=3,4* wiersza

drugiego pomnożonego przez $r = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2 & 1/3 & -4/3 \end{array}\right]$$

$$w_3 \leftarrow w_3 - \frac{1}{-3} \cdot w_2$$

$$w_4 \leftarrow w_4 - \frac{-2}{-3} \cdot w_2$$

Krok *3* - szukamy elementu maksymalnego co do wartości bezwzględnej w trzeciej kolumnie „od przekątnej w dół”:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2 & 1/3 & -4/3 \end{array}\right]$$

Element maksymalny to element na głównej przekątnej $a_{33}^{(2)}=3$, *p=3*.

Nie musimy zatem dokonywać zamiany wierszy (*p=k*).

Wykonujemy teraz 3-ci krok eliminacji Gaussa tj. zerowanie *3*-ciej kolumny poniżej przekątnej poprzez odejmowanie od wiersza *4-tego* wiersza trzeciego

pomnożonego przez $r=\frac{a_{i3}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$

$$A^{(3)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/9 & -8/9 \end{array}\right] \quad w_4 \leftarrow w_4 - \frac{-2}{3} \cdot w_3$$

W ten sposób doszliśmy do układu górnie trójkątnego.

Postępowanie odwrotne Gaussa: Rozwiązując powyższy układ od końca otrzymujemy: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 8$.

```
bool GaussCzD(double** A, int n, double * x)
{   //zerowanie kolumn od 0-wej do n-2
    for (int k=0; k <= n-2; k++)
    {//Element maksymalny z k-tej kolumny:
        int ielmax = k;//indeks el. max
        double elmax = fabs(A[k][k]);
        for (int m = k+1; m < n; m++)
          if (fabs(A[m][k]) > elmax)
          {
             elmax = fabs(A[m][k]);
             ielmax = m;
           }
```

```
//sprawdzamy czy elem na gl.przek!=0
if (elmax == 0)// Macierz osobliwa
     return false;
if (ielmax != k)//jest zamiana
{//Zamiana wierszy-równañ "k" z "ielmax"
    double * rob = A[k];
    A[k] = A[ielmax];
    A[ielmax] = rob;
}
```

```
        //k-ty krok eliminacji Gaussa
        for (int i = k+1; i < n; i++)
        {
            double r= A[i][k]/A[k][k];
            for (int j = k+1; j <= n; j++)
              A[i][j]=A[i][j] - r*A[k][j];
         }
    }//for  k -po kolejnych kolumnach
//sprawdzamy  ostatni el. na glownej przekatnej
if (A[n-1][n-1] == 0) //macierz osobliwa
    return false;
```

```
 // postępowanie odwrotne Gaussa
 x[n-1] = A[n-1][n]/A[n-1][n-1];
 for (int i = n-2; i >= 0; i--)
 {
   double s = 0;
   for (int j = i+1; j < n; j++)
          s += A[i][j]*x[j];
   x[i] = (A[i][n] - s) / A[i][i];
 }
 return true;
}
```

PEŁNY WYBÓR ELEMENTU PODSTAWOWEGO

Wybór pełny zapewnia większą stabilność metody eliminacji Gaussa. Przestawiać będziemy zarówno wiersze jak i kolumny macierzy. Tworzymy wektor $Q=[1, 2, \ldots, n]$, w którym będziemy pamiętać kolejność kolumn (zmiennych).

k-ty krok: W k-tym kroku postępowania prostego wyznaczamy indeksy p i q takie, że

$$|a_{pq}^{(k-1)}| = \max_{\substack{k \le i \le n \\ k \le j \le n}} |a_{ij}^{(k-1)}|$$

tzn. szukany elementu o największym module w bloku macierzy:

$$A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & \cdots & a_{1k}^{(k-1)} & \cdots & a_{1n}^{(k-1)} & a_{1n+1}^{(k-1)} \\ 0 & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & a_{k,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k,n}^{(k-1)} & a_{k,n+1}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k-1)} & a_{n,n+1}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Po znalezieniu indeksów p i q, jeżeli $a_{pq}^{(k-1)} \neq 0$ przestawiamy wiersz k-ty z p-tym (jeśli jest taka potrzeba: $k!=p$) oraz kolumnę q-tą z k-tą (jeśli $k!=q$).

Przestawienie kolumn o numerach k i q oznacza przestawienie w wektorze rozwiązań $x=[x_1,\ldots,x_n]^T$ współrzędnej x_k z x_q. Dlatego dodatkowo w wektorze $Q=[1, 2,\ldots,n]$ przestawiamy współrzędne q i k tzn. .

$$r=Q[k],\quad Q[k]=Q[q],\quad Q[q]=r\ .$$

Jeżeli $a_{pq}^{(k-1)}=0$ postępowanie kończymy, w przeciwnym razie wykonujemy k-ty krok eliminacji Gaussa. Ostatecznie więc, po wykonaniu postępowania prostego i odwrotnego otrzymuje się rozwiązanie $x_{Q[1]},\ x_{Q[2]},\ldots,x_{Q[n]}$.

Przykład. Korzystając z eliminacji Gaussa z pełnym wyborem elementów podstawowych rozwiązać układ równań $Ax=b$ dla danych:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Tworzymy macierz uzupełnioną:

$$A^{(0)}=\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

oraz wektor `Q=[1,2].`

Szukamy elementu o maksymalnej wartości bezwzględnej w zaznaczonym obszarze

Q=[1,2]

$$A^{(0)}=\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & \boxed{3} \end{array}} & & \begin{array}{c} 2 \\ 8 \end{array} \end{array}\right]$$

Jest to element a$_{22}$. Przestawiamy wiersze pierwszy z drugim:

Q=[1,2]

$$A^{(0)}=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

A następnie zamieniamy kolumny pierwszą z drugą oraz przestawiamy pierwszy z drugim elementy wektora `Q`:

`Q=[2,1]`

$$A^{(0)}=\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Wykonujemy eliminację Gaussa:

`Q=[2,    1]`

$$A^{(1)}=\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 0 & -2/3 & -2/3 \end{array}\right] \quad w_2 \leftarrow w_2 - \frac{1}{3} \cdot w_1$$

Na koniec postępowanie odwrotne Gaussa pamiętając o przestawieniu zmiennych zgodnie z wektorem Q=[2,1], czyli: $x_{Q[1]}$, $x_{Q[2]}$

$$A^{(1)}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 0 & -2/3 & -2/3 \end{array}\right] \end{array}$$

-2/3 x_1=-2/3 => $\boldsymbol{x_1=1}$

3x_2 +2x_1=8

3x_2 +2*1=8 => 3x_2=6 => $\boldsymbol{x_2=2}$

Koszt obliczeń eliminacji Gaussa (liczba długich działań):

```
dla k = 1,2,…,n-1 oblicz
{ r = a_ik/a_kk;
  dla j = k+1, …,n+1 oblicz
      a_ij = a_ij-r*a_kj;
}
```

W *k-tym* kroku dla *i*-tego wiersza mamy: $n-k+2$ działań:

1 ($/$ w r) + $2(n-k+1)$ ($*$, $-$ w wierszu), zaś wierszy jest $n-k$.

Łącznie $\sum_{k=1}^{n-1}\left(2\left(n-k+1\right)+1\right) \approx {}^{2}/_{3}\ n^3 + O(n^2)$ działań.

Postępowanie odwrotne Gaussa :

dla i = n,n-1,…,1 oblicz

$$x_i = (a_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j)/a_{ii}$$

jest mniej kosztowne, wymaga dla obliczenia x_i

1 (/)+(n-i+1)(*) + 1 (-)+(n-i)(+).

Łącznie n^2 operacji.

Zatem całkowity koszt eliminacji Gaussa to

$^2/_3\, n^3 + O(n^2)$ **działań.**

Zastosowanie eliminacji Gaussa

1. Obliczanie wyznaczników

$$\det A = a_{11}^{(n-1)} \cdot a_{22}^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)}$$

Przekształcanie elementarne dopuszczalne w postępowaniu prostym Gaussa nie zmieniają wartości wyznacznika. Jeżeli przestawilibyśmy wiersze lub kolumny, to należy jednocześnie zmienić znak wyznacznika:

$$\det A = a_{11}^{(n-1)} \cdot a_{22}^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)} (-1)^{l.p.wierszy + l.p.kolumn}$$

Odwracanie macierzy

Jeśli macierz $A=[a_{ij}]_{nxn}$ jest nieosobliwa, $\det A\neq 0$, to istnieje macierz $X=[x_{ij}]_{nxn}$, taka że $AX=XA=I$.

Macierz X oznaczamy A^{-1} i nazywamy macierzą odwrotną.

Bezpośrednio z definicji wynika, że macierz odwrotna jest rozwiązaniem macierzowego układu równań $AX=I$.

Jej wyznaczenie można przeprowadzić przy pomocy metody

eliminacji Gaussa zastosowanej do macierzy uzupełnionej

postaci $[A|I]\rightarrow[I|A^{-1}]$.

Źródła błędu w rozwiązywaniu układów równań liniowych:

1. Błędy danych wejściowych (macierz A i wektor b), np. dla danych empirycznych

2. Zaokrąglenia wykonywane w czasie obliczeń, wynikające ze stosowania skończonej arytmetyki maszynowej. Ich wpływ kumuluje się w trakcie obliczeń. Czasami niewielkie modyfikacje wzorów pozwalają na poprawienie dokładności. Wzory Cramera ze względu na zbyt duży koszt i złą jakość wyniku nie są stosowane.

Przykład. (arytmetyka zmiennopozycyjna z 2 cyframi dziesiętnymi)

$$\begin{cases} 0.99x + 0.70y = 0.54 \\ 0.70x + 0.50y = 0.38 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0.80 \\ y = -0.36 \end{cases}$$

Metoda Cramera

$$\begin{cases} x = 0.00 \\ y = 0.00 \end{cases}$$

Metoda eliminacji Gaussa

otrzymamy układ równań nieoznaczony

Zadania

1) Korzystając z eliminacji Gaussa bez wyboru elementów podstawowych wyznacz macierz odwrotną do macierzy

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

2) Sprowadź macierz $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

do postaci górnie trójkątnej. Oblicz wyznacznik macierzy.