

Exercise 4

- a. $\{x/A, y/B, z/B\}$
- b. 无合一置换
- c. $\{x/John, y/John\}$
- d. 无合一置换

Exercise 28

- a. $\forall x \text{Horse}(x) \Rightarrow \text{Animal}(x)$

$$\forall x \forall h \text{Horse}(x) \wedge \text{HeadOf}(h,x) \Rightarrow \exists y \text{Animal}(y) \wedge \text{HeadOf}(h,y)$$

- b. **结论的否定**: $\exists x \exists h [\text{Horse}(x) \wedge \text{HeadOf}(h,x) \wedge \forall y (\text{Animal}(y) \Rightarrow \neg \text{HeadOf}(h,y))]$

前提的合取范式: $\neg \text{Horse}(x) \vee \text{Animal}(x)$

结论否定的合取范式:

- (1) 引入 Skolem 常量 a, b 替换存在量词变量 h, x :

$$\text{Horse}(a) \wedge \text{HeadOf}(b,a) \wedge \forall y (\neg \text{Animal}(y) \vee \neg \text{HeadOf}(b,y))$$

- (2) 消除全称量词: **$\text{Horse}(a) \wedge \text{HeadOf}(b,a) \wedge (\neg \text{Animal}(y) \vee \neg \text{HeadOf}(b,y))$**

- c. 消解法证明:

前提: $\neg \text{Horse}(x) \vee \text{Animal}(x)$

否定结论的子句: $\text{Horse}(a), \text{HeadOf}(b,a), \neg \text{Animal}(y) \vee \neg \text{HeadOf}(b,y)$

对前提替换 $\{x/a\}$ 得 $\neg \text{Horse}(a) \vee \text{Animal}(a)$

用 $\text{Horse}(a)$ 消解得 $\text{Animal}(a)$

用 $\neg \text{Animal}(y) \vee \neg \text{HeadOf}(b,y)$ 消解得 $\neg \text{HeadOf}(b,y)$

用 $\text{HeadOf}(b,a)$ 消解得 空子句 \square , 故原结论是有效的。

Exercise 29

a. (A) 对于任意一个自然数, 总存在一个自然数比它小或等于它

(B) 存在这样一个自然数, 任何一个自然数都大于它或等于它

b. 正确。y 取与 x 相同的数总能保证 A 语句成立

c. 正确。y 取 0 即可

d. 否。

e. 是。

f. 证明 $B \Rightarrow A$, 只需证明 $B \wedge \neg A$ 是不可满足的

$\neg A: \exists x \forall y \neg(a \geq y)$

$\neg A$ 的 CNF: $\neg(a \geq y)$

B 的 CNF: $x \geq b$

对 $\neg A$ 做置换 $\{y/b\}$: $\neg(a \geq b)$

对 B 做置换 $\{x/a\}$: $a \geq b$

归结得空子句 \square , 即 $B \Rightarrow A$ 是有效的

g. 证明 $A \Rightarrow B$, 只需证明 $A \wedge \neg B$ 是不可满足的

A 的 CNF: $x \geq f(x)$ 由于 y 依赖于 x, 做置换 $\{y/f(x)\}$

$\neg B: \forall y \exists x \neg(x \geq y)$

$\neg B$ 的 CNF: $\neg(g(y) \geq y)$ 由于 x 依赖于 y, 做置换 $\{x/g(y)\}$

无法通过替换 $\{x/g(y), y/f(x)\}$ 导出矛盾, 归结失败, 原结论错误。

