第一章 原子的位形：卢瑟福模型

- 原子概念的提出、电子的发现、电子电荷的测定（密立根实验）、原子/离子的大小

- 原子的核式结构模型：卢瑟福模型
  - ✓ 卢瑟福散射实验的重要结果：发现大约1/8000的α粒子散射角度大于90°，有的甚至接近180°
  - ✓ 从经典力学出发推导库仑散射公式，进而推导卢瑟福散射公式，成功解释了α粒子的大角度散射

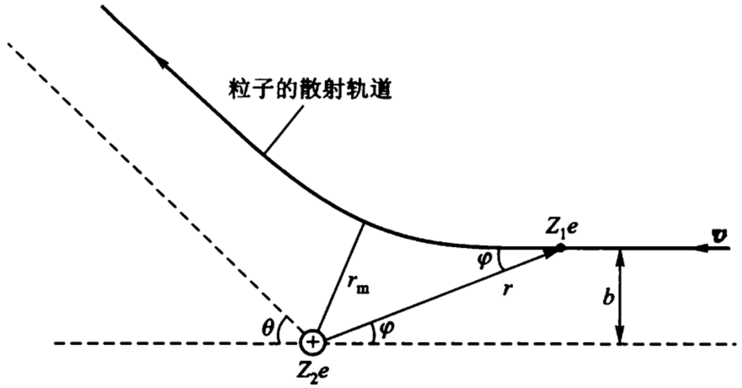
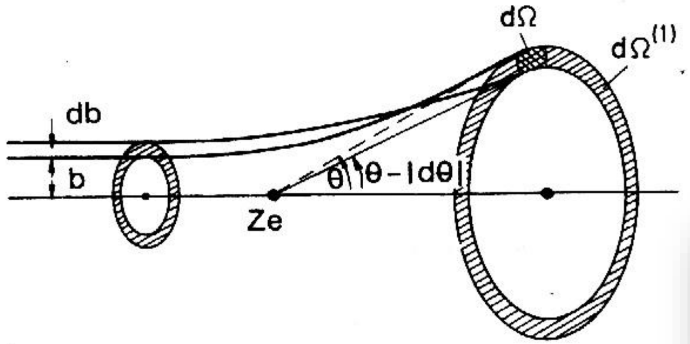


图 3.1 带电粒子的库仑散射

$$b = \frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}$$

b：瞄准距离(或碰撞参数)
θ：散射角
a:库仑散射因子

$$a \equiv \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}$$



微分截面σ(θ)，表示α粒子散射到θ角附近**单位立体角**内**每个原子有效散射截面**

$$\sigma_c(\theta) \equiv \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \equiv \frac{dN'}{Nnt\,d\Omega}$$

$$\sigma_c(\theta) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$a^2/16$

作业中的一些问题

- 回答简单，没有中间推导过程： “由库伦散射公式, 解得b=22.8 fm” 或者“由公式X, 代入数据， 解得Y=a”

- 没有区分：1） 原子质量数A 和 摩尔质量M； 2）原子质量数和原子序数； 3）密度和质量厚度

  - ✓ 质量数 A： 原子内所有质子和中子的**相对质量**取近似整数值相加而得到的数值，**质量数(A)=质子数(Z)+中子数**
  - ✓ 摩尔质量M： 单位摩尔的物质质量，**单位**g/mol； **数值上等于A**
  - ✓ **原子序数** = 核电荷数（质子数） = 核外电子数
  - ✓ **质量厚度ρ_m= ρt**， 质量密度乘上靶厚度； 质量厚度 (典型g/cm^2)和密度(典型g/cm^3) 单位不一样：

- 计算时 同一算式的单位不一致而且不写单位： g/kg, cm/m/fm, J/eV/MeV, …

1–2 (1) 动能为 5.00 MeV 的 α 粒子被金核以 90°散射时，它的瞄准距离（碰撞参数）为多大?

(2) 如果金箔厚为 1.0 μm，则入射 α 粒子束以大于 90°散射（称为背散射）的粒子数是全部入射粒子的百分之几?

解：(1) 库仑散射公式（**公式3-1和3-2**），碰撞参数b与散射角θ的关系

$$b=\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}\quad\left(\text{式中 } a=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0E_k}\right)$$

库伦散射因子：α粒子Z_1=2， 金的原子序数为Z_2=79

$$a=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0E_k}=\frac{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times2\times79}{5\ \text{MeV}}=45.5\ \text{fm}$$

电子电荷的**复合常数**（公式2-3）

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}=1.44\ \text{fm MeV}$$

$$=1.44\ eV\ nm$$

→ 瞄准距离

$$b=\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\times45.5\ \text{fm}\times\cot45°=22.8\ \text{fm}$$

1-2 （1）动能为 5.00 MeV 的 α 粒子被金核以 90°散射时，它的瞄准距离（碰撞参数）为多大?

（2）如果金箔厚为 1.0 μm，则入射 α 粒子束以大于 90°散射（称为背散射）的粒子数是全部入射粒子的百分之几?

$$dN' = N\frac{a^2 d\Omega}{16A\sin^4\frac{\theta}{2}}nAt = ntN\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \qquad (3-15)$$

定义微分截面：

$$\boxed{\sigma_c(\theta) \equiv \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \equiv \frac{dN'}{Ntd\Omega}}$$

$$\sigma_c(\theta) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \qquad (3-16)$$

(2) 方法一： N个α粒子打到金箔上，dΩ方向上测得的粒子数 (公式3-15和3-16)

$$dN' = Nnt\sigma_c d\Omega \qquad \left(\text{式中 } \underbrace{\sigma_c}_{\text{微分截面}} = \frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}, d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta\right)$$

金的摩尔质量M=197 g/mol， 密度ρ=18.88 g/cm³,

原子核的数密度: **n** = $N_A/V_m = N_A/(M/\rho) =$ **$N_A \rho / M$**

α粒子以大于90°散射的粒子数

$$N' = \int Nnt\sigma_c d\Omega = N\int_{90^\circ}^{180^\circ}\frac{N_A\rho}{M}t\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}2\pi\sin\theta d\theta$$

α粒子以大于90°散射的粒子数与全部入射粒子的比：

$$\frac{N'}{N} = \int_{90^\circ}^{180^\circ}\frac{N_A\rho}{M}t\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}2\pi\sin\theta d\theta = \int_{90^\circ}^{180^\circ}\frac{N_A\rho}{M}t\frac{a^2}{4\sin^3\frac{\theta}{2}}\pi\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$= \frac{N_A\rho t\pi a^2}{4M}\int_{90^\circ}^{180^\circ}\frac{2d\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^3\frac{\theta}{2}} = \frac{N_A\rho t\pi a^2}{4M}\left(\frac{1}{\sin^2 45^\circ} - \frac{1}{\sin^2 90^\circ}\right)$$

$$= \frac{6.02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}\times18.88\ \text{g/cm}^3\times1.0\times10^{-6}\ \text{m}\times3.142\times(45.5\ \text{fm})^2}{4\times197\ \text{g/mol}}$$

$$= 9.4\times10^{-5}$$

1-2 (1) 动能为 5.00 MeV 的 α 粒子被金核以 90°散射时，它的瞄准距离（碰撞参数）为多大？

(2) 如果金箔厚为 1.0 μm，则入射 α 粒子束以大于 90°散射（称为背散射）的粒子数是全部入射粒子的百分之几？

(2) 方法二：库仑散射公式（公式3-1和3-2），碰撞参数b与散射角θ的关系

$$b=\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}\quad\left(\text{式中 } a=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}\right)$$

θ ≥ 90°, b(θ) ≤ b(90°), 即对每一个靶核，散射角大于90°的粒子位于**b(θ) < b(90°)**的圆盘截面内，该截面面积：

$$\sigma_C=\pi b^2(90°)$$

α粒子以大于90°散射的粒子数 **N' = Nntπb²**

$$dN'=Nnt\sigma_C d\Omega$$

α粒子以大于90°散射的粒子数与全部入射粒子的比：

$$\frac{N'}{N}=nt\pi b^2=\frac{N_A\rho}{M}t\pi b^2$$

$$=\frac{6.02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}\times18.88\ \text{g/cm}^3}{197\ \text{g/mol}}\times1.0\times10^{-6}\ \text{m}\times3.142\times(22.8\ \text{fm})^2$$

$$=9.4\times10^{-5}$$

b=a/2 cot(45°)=a/2

$$a=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0E_k}=\frac{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times2\times79}{5\ \text{MeV}}=45.5\ \text{fm}$$

1-3 试问:4.5 MeV 的 α 粒子与金核对心碰撞时的最小距离是多少? 若把金核改为^{7}Li 核,则结果如何?

(1) 根据**公式4-2**,

$$r_m = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_c} \equiv a$$

(**金核质量远大于入射α粒子质量**, $E_c \sim E_k$

→

$$r_m = a = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\varepsilon_0 E_k} = \frac{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times 2\times 79}{4.5\ \text{MeV}} = 50.6\ \text{fm}$$

(2) 改为^{7}Li核, **靶核质量m' 不再远大于入射粒子质量m**, 动能E_k要用**质心系能量E_c**

质心系能量（公式3-10和3-11）

$$E_c = \frac{1}{2}m_\mu v^2 \quad \left(\text{式中 } m_\mu = \frac{m'm}{m+m'}\right)$$

$$E_c = \frac{1}{2}m_\mu v^2 = \frac{m'}{m+m'}E_k \approx \frac{A_{Li}}{A_{He}+A_{Li}}E_k = \frac{7}{4+7}E_k = \frac{7}{11}E_k$$

$$r_{min} = a = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\varepsilon_0 E_c} = \frac{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times 2\times 3\times 11}{4.5\ \text{MeV}\times 7} = 3.0\ \text{fm}$$

（2）做错的同学较多：直接使用了Ek，或者误使用原子序数计算3/(3+2)，或者误使用4/11

1-5 动能为 1.0 MeV 的窄质子束垂直地射在质量厚度为 1.5 mg/cm^2 的金箔上，计数器记录以60°角散射的质子. 计数器圆形输入孔的面积为 1.5 cm^2，离金箔散射区的距离为 10 cm，输入孔对着且垂直于射到它上面的质子. 试问：散射到计数器输入孔的质子数与入射到金箔的质子数之比是多少？（质量厚度定义为 $\rho_m=\rho t$，其中 ρ 为质量密度，t 为靶厚.）

解： 窄质子束打到金箔上，散射到θ→θ-Δθ方向上ΔΩ立体角内的**概率η**为

$$\eta=\frac{\Delta N}{N}=nt\sigma_C\Delta\Omega$$

原子核的**数密度n** = N_A/V_m = N_A / (M/ρ) = N_A ρ /M
ΔΩ = S/r², 以及**散射截面（公式3-16）**

$$\sigma_C=\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

→ $$\eta=\frac{\Delta N}{N}=\frac{N_A\rho t}{M}\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{S}{r^2}$$

库仑散射公式因子

$$a=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0E_k}=\frac{1.44\ \mathrm{fm}\cdot\mathrm{MeV}\times1\times79}{1\ \mathrm{MeV}}=113.76\ \mathrm{fm}$$

金的摩尔质量M=197 g/mol，质量厚度ρ_m=ρt =1.5 mg/cm^2

$$\eta=\frac{N_A\rho t}{M}\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{S}{r^2}$$

1fm = 10^{-15} m
= 10^{-13} cm

cm

$$=\frac{6.02\times10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}\times1.5\ \mathrm{mg/cm^2}\times(113.76\times10^{-13}\ \mathrm{fm})^2\times1.5\ \mathrm{cm^2}}{197\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}\times16\sin^4 30°\times(10\ \mathrm{cm})^2}$$

$$=8.9\times10^{-6}$$

1-7 单能的窄 α 粒子束垂直地射到质量厚度为 2.0 mg/cm^2 的钽箔上，这时以散射角 $\theta_0>20°$散射的相对粒子数（散射粒子数与入射粒子数之比）为 4.0×10^{-3}. 试计算：散射角 $\theta=60°$相对应的微分散射截面$\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

解：α粒子束垂直射到钽(Tantalum)箔上，
散射角θ > θ0(20°) 散射的相对粒子数

$$\frac{\Delta N}{N}=nt\pi b^2=\frac{N_A\rho}{M}t\pi b^2=\frac{N_A\rho_m}{M}\pi\left(\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)^2$$

→ **库伦散射因子的平方**：

$$a^2=\frac{\Delta N}{N}\frac{4M}{N_A\rho_m\pi}\tan^2\frac{\theta}{2}$$

相对粒子数$\Delta N/N=4.0\times10^{-3}$, 钽箔质量厚度$\rho_m$= 2.0 mg/cm^2， 钽的摩尔质量M=181 g/mol

→ $a^2=2.38\times10^{-23}\ cm^2=2.38\times10^{-27}\ m^2$

$$\sigma_c(\theta)=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \qquad (3-16)$$

由**公式3-16**得到散射角θ=60°相对应的**微分散射截面**为：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}=\frac{a^2}{16\sin^4\frac{60°}{2}}=a^2=2.38\times10^{-27}\ m^2/sr$$

米^2/球面度 (steradian)

$1b=10^{-28}m^2$

需要根据已知的散射角>20°散射的相对粒子数推导出a^2的值