原子物理学 习题课

陶军全

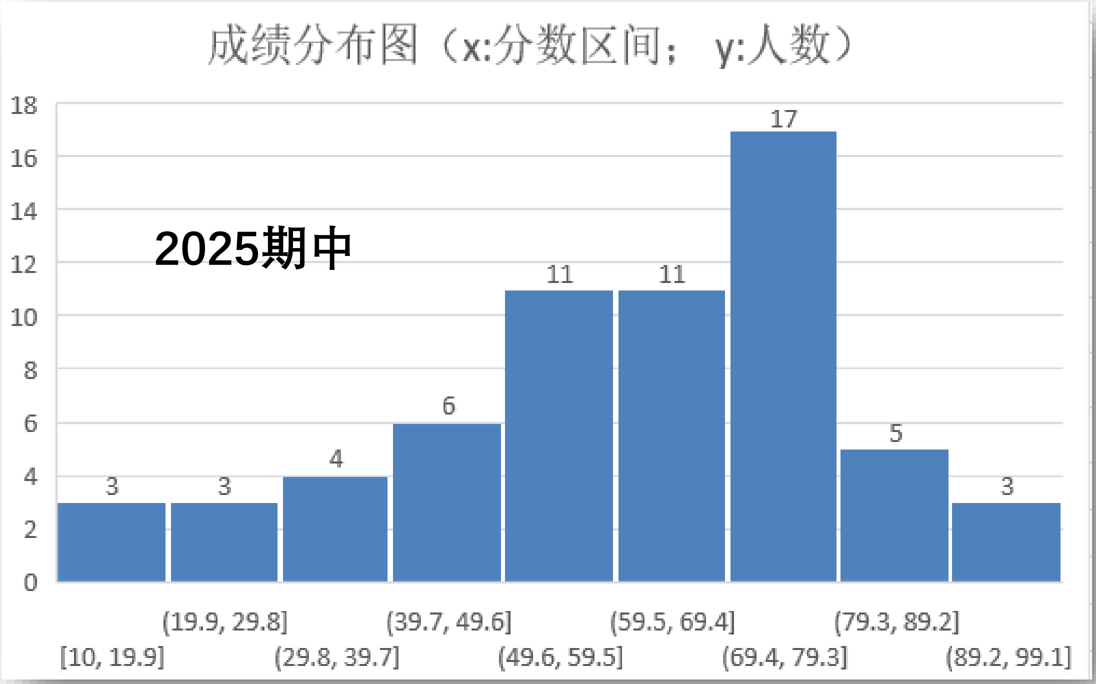
邮箱：taojq@mail.ihep.ac.cn

办公室：高能所多学科楼431

期末考试

时间：7月8日(周二)上午9:00-11:00

地点：人文楼教一阶



期中： 30%

平时（作业+考勤等）： 30%

期末： 40%

第七章 原子核物理概念

- **核素**、质能互换、**核力**
- 核模型
- 放射性衰变、**衰变常量、衰变寿命、半衰期**
- **α衰变、β衰变、γ衰变**
- 辐射剂量、吸收剂量、剂量当量
- **放射性年鉴法**

放射性和核素

铀的放射性(贝克勒尔, 1896)
→发现放射性元素钋和镭 (1897,居里夫妇)
→ 1898-1910： 射线 **α射线（氦原子核）**
+ β射线（电子）+ γ射线
→ **质子**（卢瑟福）和**中子**（查德威克）的发现

$$\alpha + {}^{14}_{7}N \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H \qquad \alpha + {}^{9}Be \rightarrow n + {}^{12}C$$

元素的**物理、化学性质或光谱特性**主要与**核外电子**有关，而**放射性现象**则归因于**原子核：**原子核对原子性质起主要贡献的是**核的质量和电荷**

原子核的大小和密度

费米模型 $R = r_0 A^{1/3}$ $\quad r_o = 1.2\text{fm}$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{A/N_0}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3A}{4\pi r_0^3 A N_0} \approx 2\times10^{17}\ \text{(kg/立方米)}$$

原子质量单位u： 同位素 ^{12}C 原子质量的1/12

$$1u = \frac{12}{6.022\times10^{23}} \times \frac{1}{12} g = 1.66\times10^{-27} kg$$

原子的质量都接近于一个整数, 称为**原子核质量数A**

中子和质子
统称**核子**

$$\begin{cases} m_n = 1.008665u = 939.5731 MeV \\ m_p = 1.007277u = 938.2796 MeV \end{cases}$$

核素符号 $\quad {}^{A}_{Z}X_{N}$

A:质量数(核子数)
Z:质子数(原子序数)
N＝A-Z:中子数

同位素:Z相同但N不同的核素 $\quad {}^{235}U, {}^{238}U$

同中子异位素:N相同但Z不同的核素 $\quad {}^{2}_{1}H, {}^{3}_{2}He$

同量异位素:A相同但Z不同的核素 $\quad {}^{40}_{18}Ar, {}^{40}_{19}K$

同质异能素:A和Z均相同但能量状态不同的核素 $\quad {}^{60}Co, {}^{60m}Co$

质能互换、核力(结合能和核能)

- 原子的质量可以以原子质量单位 u 来表示：根据爱因斯坦的质能关系，有

$$E = mc^2$$

$$c^2 = 931.5\text{MeV/u}$$

- 原子核的质量并不严格等于质子和中子的质量之和。
- **自由质子与中子结合成原子核时质量的减少值**，称为质量亏损。有相应的能量释放出来。
- 孤立核子组成原子核时所放出的能量，就称为**原子核的结合能**
- 平均结合能 或 **比结合能**:原子核的结合能与原子核内所包含的总核子数之比

$$\epsilon = \frac{E_B}{A}$$

其中 A 为质量数。

- **原子能(核能):** 原子核**结合能**发生变化时释放的能量
  - ✓ 获得核能的两个途径：轻核和重核的**比结合能都比较小**，因此，轻核的聚变和重核的裂变都有能量放出

Z个质子与N个中子组成原子核 时，所发生的质量亏损为

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_N \quad = Zm_p + Nm_n - (M_A - Zm_e)$$

$$= Z(m_p + m_e) + Nm_n - M_A = ZM_H + Nm_n - M_A$$

$$\boxed{E_B = \Delta mc^2 = \left[\left(ZM_H + Nm_n\right) - M_A\right]c^2}$$

如果一个原子核的质量为m_N，那么其结合能E_B满足

核质量 $$m_N = Zm_p + Nm_n - E_B/c^2$$

或

原子质量 $$\boxed{M_A = ZM_H + Nm_n - E_B/c^2}$$

核子的平均结合能越大，原子核就越稳定

原子核的自旋磁矩

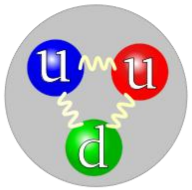
- **原子核自身的角动量**通常称为核的自旋：核的自旋是核固有的,与核的外部运动无关

中子、质子、电子 → 自旋为1/2的费米子

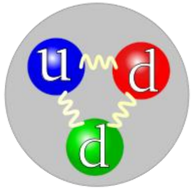
核子的自旋和各种复杂相对运动的角动量总和构成核的自旋

原子核基态的自旋规律(中子数和质子数)

偶偶核的自旋为0;
奇偶核的自旋都是半整数;
奇奇核的自旋都是整数.



质子



中子

- 质子的磁矩表达式与电子相似：费米子，质量和电荷不同

✓ **电子的磁矩**（轨道-自旋 $L+S$ 耦合）

$$\mu_e = -\frac{e\hbar}{2m_e}(g_{e,l}l + g_{e,s}s) \qquad (g_{e,l}=1, g_{e,s}=2)$$

玻尔磁子： $\boldsymbol{\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = \frac{c}{2}\alpha(ea_1) = 0.5788 \times 10^{-4}eV \cdot T^{-1}}$

✓ **质子的磁矩**（轨道-自旋 $L+S$ 耦合）

$$\boldsymbol{\mu_p = \frac{e\hbar}{2m_p}(g_{p,l}l + g_{p,s}s)} \qquad (g_{p,l}=1, g_{p,s}=2?)$$

核的玻尔磁子(核磁子)

$$\mu_N \equiv \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.152\ 451\ 259(21) \times 10^{-8}eV/T$$

$$\frac{\mu_B}{\mu_N} = \frac{m_p}{m_e} = 1836$$

观测值$g_{p,s}$=5.6

✓ **中子的磁矩**（轨道-自旋 $L+S$ 耦合）

$$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_n}(g_{n,l}l + g_{n,s}s)$$

中子过去的理论预期 $g_{n,s}$=0,实验观测是 -3.82

核子的磁矩

$$\mu_p = 2.79\mu_N$$
$$\mu_n = -1.91\mu_N$$

质子和中子，不是点粒子，**它们必定有内部结构：夸克和胶子**

核的自旋与磁矩

- 核的自旋与磁矩：与所有核子的自旋与磁矩的矢量和有关

核的自旋角动量 $\vec{\mu}_I = g_I \mu_N \vec{I}$ 　　g_I为核的朗德因子，随核而变

$\mu_{I,z} = g_I \mu_N m_I$ 　　核的自旋量子数I为整数和半整数

磁量子数 $m_I = I, I-1, \cdots, -I+1, -I$

核磁子 ≪ 玻尔磁子

⇒ 核磁矩与核子磁矩 ≪ 原子磁矩

⇒ 超精细作用

$$\begin{cases} \vec{\mu}_I = g_I \dfrac{e}{2m_p} \vec{P}_I \\ \mu_{Iz} = g_I m_I \mu_N \end{cases}$$

$\vec{\mu}_I$ 的大小

$$\mu_I = g_I \sqrt{I\ (I+1)}\ \hbar \frac{e}{2m_p} = g_I \sqrt{I\ (I+1)}\ \mu_N$$

在磁场中，核自旋磁矩与磁场相互作用所产生的附加能量： $U = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B} = g_I m_I \mu_N B$

塞曼能级分裂，一条核能级在磁场中就分裂为2(I+1)条

相邻两条分裂能级间的能量差为：$\Delta U = g_I \mu_N B$

- 原子核的电四极矩、电偶极矩=0
- **原子的超精细结构**：超精细相互作用

视原子核为点电荷Ze，得到原子光谱的粗结构

考虑**电子的自旋-轨道作用**后，得到**原子光谱的精细结构**

考虑**核的自旋、磁矩和电四极矩**，得到**原子光谱的超精细结构**

能级分裂程度比精细结构还要小3个数量级

Na 原子黄双线

主线系 $3^2P \rightarrow 3^2S$

$^2P \rightarrow {}^2P_{3/2}$，$^2P_{1/2}$（精细结构）

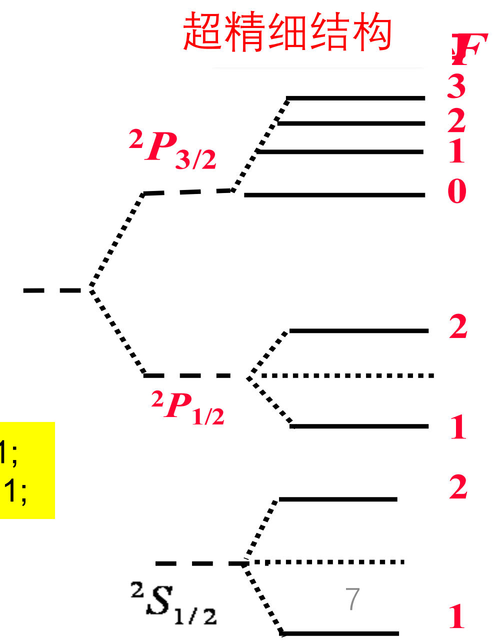
$^2P_{3/2}$: j =3/2; **I=3/2** → F=3,2,1,0

$^2P_{1/2}$: j =1/2; **I=3/2** → F=2,1

$^2S \rightarrow {}^2S_{1/2}$（精细结构）

$\Delta F = 0; \pm 1;$
$\Delta M_F = 0; \pm 1;$

$^2S_{1/2}$: j=1/2; I=3/2 → F = 2,1



核力和壳层模型

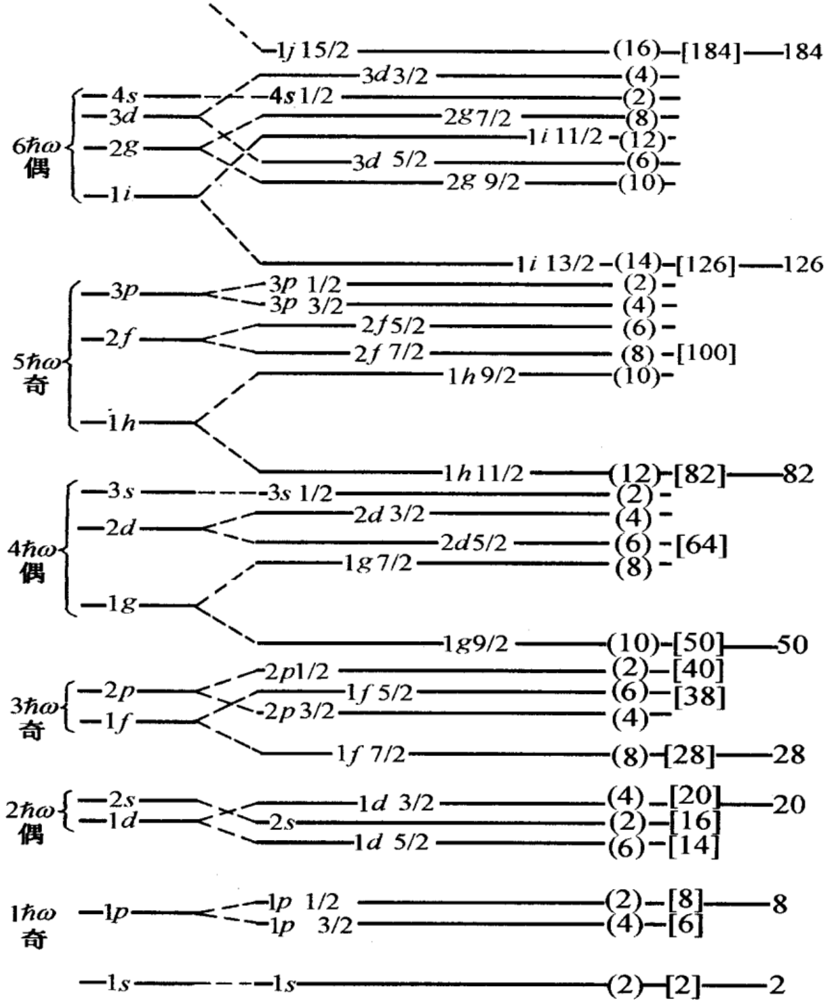
- **核力（强相互作用）：核子紧密结合形成高密度核的力**

- **核力的特性:** 具有**饱和性**（核的结合能近似与核子数A成正比）的**短程力**（ $<10^{-14}$m ），**与电荷无关**（质子和中子间的核力相等），**与自旋有关**（核子自旋平行和自旋相反时散射截面也不同）

- 费曼图和核力的介子理论

- **核模型**：液滴模型、费米气体模型、**壳层模型**、集体模型 （液滴模型与壳模型综合）

壳层模型在解释**幻数**和**原子核基态**的许多性质(如自旋、磁矩、宇称等)方面比较成功，但有局限性



放射性衰变的基本规律

- 放射性衰变的统计性规律： **指数衰变律**
  - ✓ 一种核(称为母核)转变为另一种核(称为子核)，同时放出射线
  - ✓ 无论母核数目的减少，还是射线强度的减弱，都遵从指数衰减的规律
  - ✓ 母核减少的数目应正比于t时刻母核的数目N，也应正比于衰变经历的时间dt

$$-dN = \lambda N dt$$

积分后得到

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

λ为衰变常数

放射性核素的特征量：

衰变常量λ、半衰期$T_{1/2}$和平均寿命τ

- **半衰期**：放射性核素母核数目衰变掉一半所需要的时间，或者放射性活度减弱一半所需要的时间

在t=$T_{1/2}$时，N= $N_0/2$，有

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

- **平均寿命**：所有核存在时间的平均值

$$\tau = \frac{\int_0^{N_0} (-\mathrm{d}N)\cdot t}{N_0} = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = 1.44 T_{1/2}$$

- **放射性活度**：$R = \lambda N$，国际单位制中单位为贝克勒尔（Bq），表示每秒1次核衰变，过去常用居里单位Ci

$$1\mathrm{Ci} = 3.7\times 10^{10}\,\mathrm{Bq}$$

原子核辐射：α，β，γ射线

- 放射性衰变的类型：α衰变(氦原子核)，β衰变(电子)和 γ衰变

放射性衰变的类型

α衰变：$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow\ ^{222}_{86}\mathrm{Rn} +\ ^{4}_{2}\alpha(^{4}_{2}\mathrm{He})$

α衰变的位移定则：子核在元素周期表中的位置左移2格。

β衰变：$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow\ ^{210}_{84}\mathrm{Po} +\ ^{0}_{-1}\mathrm{e}$ （电子）

β衰变的位移定则：子核在元素周期表中的位置右移1格。

γ衰变：$^{60}_{27}\mathrm{Co}^{*} \rightarrow\ ^{60}_{27}\mathrm{Co} + \gamma$

高能短波电磁辐射（即电子波）

衰变方程：$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow\ ^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} +\ ^{4}_{2}\mathrm{He} + Q$

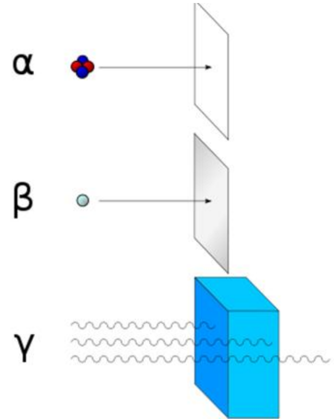
衰变方程：$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow\ ^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^{-} + (?) + Q$

中微子！ (1930)

各种类型的β衰变：

- β^{-}衰变：$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow\ ^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^{-} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}$
- β^{+}衰变：$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow\ ^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}}$
- EC过程与Auger电子（Auger effect）：$^{A}_{Z}\mathrm{X} + \mathrm{e}^{-} \rightarrow\ ^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + \nu_{\mathrm{e}} + (\mathrm{X, Auger})$

- α，β，γ射线的穿透性



- α粒子相当于氦的原子核可被纸所阻挡；
- β粒子相当于电子可被铝箔所阻挡；
- γ射线则具有高穿透性。

放射性应用

- 示踪原子、射线检测、**放射性年代学**

- 放射性^{14}C鉴年法

假定：大气中 $^{14}_{6}C$ 、 $^{12}_{6}C$ 的比值是恒定的（$N_{^{14}_{6}C}/N_{^{12}_{6}C} = 1.3 \times 10^{-12}$）

$^{14}_{6}C$的半衰期:$T_{1/2} = 5730a$

活体因新陈代谢致使体内**N(^{14}C)/N(^{12}C)与大气相同**。**活体死亡后^{14}C数目衰减**。设大气中N(^{14}C)/N(^{12}C) = 10^{-12}；若某文物中N(^{14}C)/N(^{12}C) = x，求此**文物的年龄y**。

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = 1.44T_{1/2}$$

$$x = \frac{N_0(^{14}\mathrm{C})e^{-\lambda y}}{N_0(^{12}\mathrm{C})} = 10^{-12}e^{-\lambda y}$$

都灵裹尸布的年代鉴定

级联衰变

- 两代衰变 A → **B** → C

  ✓ B一方面衰变为C，一方面又不断从A处获得补充

  ✓ B的衰变规律与$\boldsymbol{\lambda_A}$和$\boldsymbol{\lambda_B}$有关

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B$$

$$N_A = N_{A0} e^{-\lambda_A t}$$

$$\boldsymbol{N_B = N_{A0} \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)}$$

如果$\lambda_A << \lambda_B$，即 $\tau_A >> \tau_B$，当 t >> τ_B时:

$$N_B = N_{A0} \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right) \approx N_{A0} \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t}$$

子体与母体具有相同的衰变规律

$$N_B \approx N_{A0} \frac{\lambda_A}{\lambda_B} e^{-\lambda_A t} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} N_A$$

因而 $\lambda_A N_A = \lambda_B N_B$

穆斯堡尔效应

- **γ衰变的反冲能：** 放出γ射线的原子核有个反冲，放出射线的能量 $E_{\gamma e}=E_0-E_R$
- **吸收的核**也有个反冲(**反冲能E_R**)，因此要发生**共振吸收**就必须提供能量 $E_{\gamma a}=E_0+E_R$
- **共振吸收:** 发射谱和吸收谱互相重叠 ⇒ 显著共振吸收，**能级宽度 $\Gamma>E_R$**

跃迁前后能量守恒：

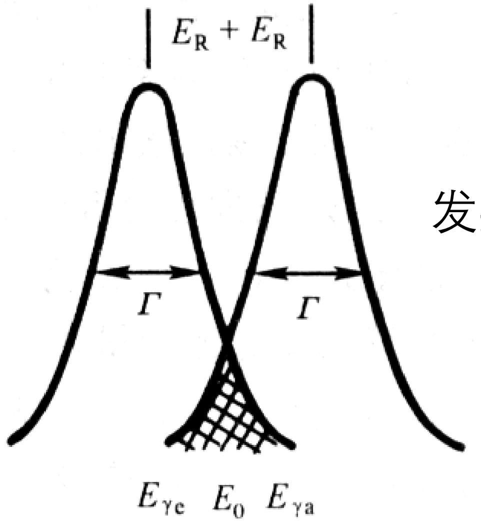
$$E_0=E_{up}-E_{low}=E_\gamma+E_R=h\nu+E_R$$

光子动量：$p=mv=\dfrac{h\nu}{c}$

反冲动能：$E_R=\dfrac{p^2}{2m}=\dfrac{(h\nu)^2}{2mc^2}$

- **穆斯堡尔效应**：

1958年，德国物理学家Mossbauer发现：如果**将放射性核素固定在晶体中**,，遭反冲的就不是单个原子核，而是整块晶体。此时由于有效的m很大，所以**原子核的反冲能$E_R\to 0$**；这时上述核**共振吸收**就可以发生。这种无反冲γ共振吸收现象称为穆斯堡尔效应。



发射线和吸收线相差$2E_R$

在无反冲发射γ的情况下，γ光子能量测量的相对误差可达：$\dfrac{\Gamma}{E_0}\approx 3\times10^{-13}$

穆斯堡尔效应应用：测量引力波

核反应

➢ 核反应

（在高能粒子轰击下核素发生的变化）

低能热反应　中能热反应　高能热反应

10^1　10^2　10^3　10^4　10^5　10^6　10^7　10^8　10^9　E/MeV

E：轰击粒子的能量

几个著名的核反应：

1) 第一个人工核反应(1919,卢瑟福)：$^{14}N(\alpha,p)^{17}O$

输入能量0.5MeV
输出能量17.8MeV

2) 第一次在加速器上实现的核反应(1932,英)：$^{7}Li(p,\alpha)^{4}He$

3) 第一个人工放射性核素的反应(1934,法,居里夫妇)：$^{27}Al(\alpha,n)^{30}P$

其产物 ^{30}P 的半衰期为2.6min　$^{30}P \rightarrow {}^{30}Si + \beta^+ + \nu$

4)导致发现中子的核反应：$^{9}Be(\alpha,n)^{12}C$

➢ 核反应中的守恒定律

- **质量数A守恒**.即反应前后总的质量数保持不变;
- **电荷数Z守恒**.即反应前后总的电荷数保持不变;
- **动量守恒**.即反应前后各粒子动量的矢量和保持不变;
- **能量守恒**.即反应前后粒子的能量之和保持不变(按相对论质能关系确定)。

➢ 反应Q值（Q方程）

核反应的一般表示：

$$a + A \rightarrow b + B \quad or \quad A(a,b)B$$

入射粒子　靶 核　出射粒子　剩余核

反应能

$$Q \equiv [(M_a + M_A) - (M_b + M_B)]c^2 = (E_b + E_B) - (E_a + E_A)$$

$Q > 0$：放能反应
$Q < 0$：吸能反应

在实验时,靶核一般处于静止状态,即EA=0,故

$$Q = E_b + E_B - E_a$$

根据Q方程导出的**轻粒子(出射粒子)的动能表达式**

Q 方程的另一个十分有用的表达形式是

$$K_1(\theta) = (u \pm \sqrt{u^2 + w})^2 \qquad (41-11)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} u &\equiv \frac{\sqrt{m_i m_1 K_i}}{m_1 + m_R}\cos\theta \\ w &\equiv \frac{m_R Q + K_i(m_R - m_i)}{m_1 + m_R} \end{aligned}\right\} \qquad (41-12)$$

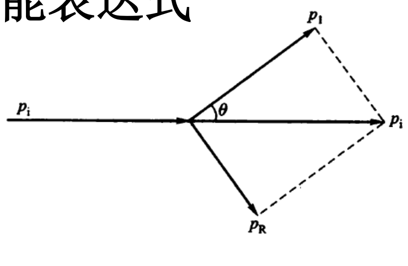


图 41.2　反应中的动量守恒

➢ 重核裂变：浓缩铀、反应堆、原子弹

➢ 轻核聚变：太阳能（热核聚变）等

辐射剂量防护

- **电离辐射**：能够将原子分子电离的辐射，α、β、γ或X射线

- 辐射剂量：**吸收剂量**和**剂量当量**

  - ✓ **吸收剂量：是辐射剂量作为单位质量吸收能量的量度，表示被一个特定的物体所实际吸收的剂量，单位为戈瑞(Gy)，历史上曾用拉德（rad）**

    $1\text{rad} = 100erg/g$　　$\mathbf{1Gy = 1J / kg = 100rad}$

  - ✓ **剂量当量：考虑了不同射线的生物效应不同，把吸收剂量乘以一个表示剂量的生物效应的数字因子RBE（Relative biological effectiveness），单位为希沃特(Sv，**别称西弗**)，历史上曾用雷姆（rem）**

    $1\ \text{Sv} = 100\ \text{rem}$

RBE = 1 (X/γ射线、电子), = 5 （中子), = 10 (alpha 粒子)

- 剂量当量限值

  - 对于辐射工作人员，年有效剂量当量限值为50mSv，眼晶体的年剂量当量限值为150mSv，其它单个器官或组织的年剂量当量值限值为500mSv。辐射工作人员一次事件中所受的有效剂量当量值不得超过100mSv，在一生中不得超过250mSv。
  - 普通人的年有效剂量当量值不得超过1mSv，终生剂量平均的年有效剂量当量值不超过1mSv。某些年份允许以每年5mSv作为剂量限制。普通人的皮肤及眼晶体的年剂量当量限值为50mSv。

- 放射性核素对肿瘤的治疗：系统特异性的靶向治疗，^{131}I治疗甲状腺癌

作业

- 384页：1，3，9，15

- 水分子H_2**O**包含的质子数：2p+8p=10p

7－1　试计算核素^{40}Ca和^{56}Fe的结合能和比结合能.

原子核的结合能表示自由核子组成原子核是所释放的能量，

$$E_B = \Delta Mc^2 = (ZM_H + Nm_n - M_{Ca})c^2$$

对于核素^{40}Ca,

$$Z = 20, A = 40, N = 20,$$
$$M_H = 1.007825u,$$
$$m_n = 1.008665u,$$
$$M_{Ca} = 39.96259u$$

其中$u = 1.66 \times 10^{-27}kg$, $uc^2 = 931.494MeV$

代入上式

$$E_B = (20M_H + 20m_n - M_{Ca})c^2$$
$$= 20(M_H + m_n)c^2 - M_{Ca}c^2$$
$$= 20(1.007825u + 1.008665u)c^2 - 39.96259uc^2$$
$$= 40.3298uc^2 - 39.96259uc^2 = \mathbf{0.36721uc^2}$$
$$= 0.36721 \times 931.494\ MeV = 342.054\ MeV$$

比结合能$\frac{E_B}{A} = \frac{342.054MeV}{40} = 8.55\ MeV$

同理对于铁元素

$$E_B = \Delta Mc^2 = (ZM_H + Nm_n - M_{Fe})c^2$$

$$Z = 26, A = 56, N = 30, M_H = 1.007825u,$$
$$m_n = 1.008665u, M_{Fe} = 55.9349u$$

$$E_B = (26M_H + 30m_n - M_{Fe})c^2$$
$$= (26 \times 1.007825u + 30 \times 1.008665u$$
$$- 55.9349u)c^2$$
$$= (26.20345u + 30.25995u - 55.9349u)c^2$$
$$= (56.4634u - 55.9349u)c^2$$
$$= \mathbf{0.5285uc^2}$$
$$= 0.5285 \times 931.494\ MeV$$
$$= 492.29\ MeV$$

比结合能$\frac{E_B}{A} = \frac{492.29MeV}{56} = 8.79MeV$

7－3 活着的有机体中，^{14}C 对 ^{12}C 的比与大气中是相同的，约为 1.3×10^{-12}. 有机体死亡后，由于 ^{14}C 的放射性衰变，^{14}C 的含量就不断减少，因此，测量每克碳的衰变率就可计算有机体的死亡时间. 现测得：取之于某一骸骨的 100 g 碳的 β 衰变率为 300 次衰变/min，试问该骸骨已有多久历史？

$$\frac{N_{14C}}{N_{12C}} = 1.3\times10^{-12}$$

活着的有机体100克碳中所含的^{14}C核素的个数($N_0=N_{14C}$)为

$$N_{14C} = N_{12C}\times1.3\times10^{-12}$$
$$= \frac{m}{12\,g/mol}\times6.02\times10^{23}mol^{-1}\times1.3\times10^{-12}$$
$$= \frac{100g}{12\,g/mol}\times6.02\times10^{23}mol^{-1}\times1.3\times10^{-12}$$
$$= \mathbf{6.52\times10^{12}}$$

根据放射性活度A(单位时间内发生衰变的原子核数)

$$A \equiv -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t} \qquad (37-5)$$

$$\longrightarrow \quad t = -\frac{1}{\lambda}ln\frac{A}{A_0} = \frac{1}{\lambda}ln\frac{A_0}{A}$$

根据β衰变率推出^{14}C**现在的活度**$A = 300/min = 5/s$，则需要求出A_0和λ

$$A_0 = \lambda N_{14C}，\quad \lambda = \frac{ln\,2}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{0.693}{T_{\frac{1}{2}}}$$（公式37.3）为衰变常数，表示一个原子在**单位时间内发生衰变的几率**

^{14}C 的 半 衰 期 为 $T_{1/2} = 5730a$

$$\lambda = \frac{ln\,2}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{5730\times365\times24\times3600} = 3.835\times10^{-12}s^{-1}$$

$$t = \frac{1}{\lambda}ln\frac{\lambda N_{14C}}{A} = \frac{1}{3.835\times10^{-12}}ln\frac{3.835\times10^{-12}\times6.52\times10^{12}}{5/s}$$
$$= \frac{1}{3.835\times10^{-12}}ln\frac{3.835\times6.52}{5/s} = \frac{1}{3.835\times10^{-12}}ln\frac{25.0042}{5/s}$$
$$= \frac{1}{3.835\times10^{-12}}ln\,5.00084\,s = \frac{1}{3.835\times10^{-12}}1.6096s$$
$$= 0.419\times10^{12}s = \mathbf{1.33\times10^{4}}\text{年}$$

7－9　试问：用多大能量的质子轰击固定的氚靶，才能发生 $p+{}^3H\longrightarrow n+{}^3He$ 反应？若入射质子的能量为 3.00 MeV，而发射的中子与质子的入射方向成 90° 角，则发射的中子和 ^3He 的动能各为多少？

这里，为了便于记忆，我们分别用 i，T，l 和 R 代表入射粒子(incoming particle)，靶核(Target)，出射轻粒子(outgoing light-weight particle)，剩余核(Residue nucleus)．它们相应的静质量和动能分别为 $m_i, m_T, m_l, m_R; K_i, K_T, K_l, K_R$.

不管其内部反应如何，根据能量守恒，我们总有：

$$m_ic^2+K_i+m_Tc^2+K_T=m_lc^2+K_l+m_Rc^2+K_R \quad (41-7)$$

定义反应能 Q 为：

$$Q\equiv[(m_i+m_T)-(m_l+m_R)]c^2$$
$$=(K_l+K_R)-(K_i+K_T) \quad (41-8)$$

根据核反应过程的能量守恒，得到反应过程的衰变能（Q值）

$$Q=(m_i+m_T)c^2-(m_l+m_R)c^2=(K_l+K_R)-(K_i+K_T)$$

$$p+{}^3H\rightarrow{}^3He+n$$

入射粒子i为质子，质量为$m_i=m_p=1.007825u$

靶粒子T为氚核，$m_T=m_{3H}=3.016050u$

剩余核R为氦核，质量为$m_R=m_{3He}=3.016029u$

出射轻粒子l为中子n

$1u=1.66\times10^{-27}kg$

$1eV=1.602\times10^{-19}J$

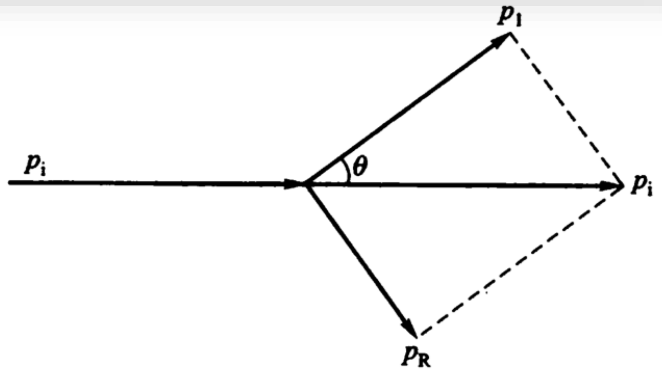


图 41.2　反应中的动量守恒

$$Q=(m_i+m_T)c^2-(m_l+m_R)c^2$$
$$=(m_i+m_T-m_l-m_R)c^2$$
$$=(1.007825u+3.016050u-1.008665u-3.016029u)c^2=\mathbf{-0.000819uc^2}$$
$$=-0.000819\times1.66\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2\,J$$
$$=-0.000819\times1.66\times10^{-11}\times9\,J$$
$$=\mathbf{-0.01223586\times10^{-11}\,J}$$

$$Q=-0.01223586\times10^{-11}J\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1.602\times10^{-19}}}\boldsymbol{eV/J}$$
$$=-0.00763\times10^8\,eV=-0.763MeV$$

7－9 试问：用多大能量的质子轰击固定的氚靶，才能发生 $p + {}^3H \longrightarrow n + {}^3He$ 反应？若入射质子的能量为 3.00 MeV，而发射的中子与质子的入射方向成 90° 角，则发射的中子和 ^3He 的动能各为多少？

根据Q方程导出的**轻粒子的动能表达式**

$$K_l(\theta) = \left(u \pm \sqrt{u^2 + w}\right)^2$$

$$u = \frac{\sqrt{m_i m_l K_i}}{m_l + m_R} cos\,\theta \qquad w = \frac{m_R Q + K_i(m_R - m_i)}{m_l + m_R}$$

Q 方程的另一个十分有用的表达形式是

$$K_l(\theta) = (u \pm \sqrt{u^2 + w})^2 \qquad (41-11)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} u &\equiv \frac{\sqrt{m_i m_l K_i}}{m_l + m_R}\cos\theta \\ w &\equiv \frac{m_R Q + K_i(m_R - m_i)}{m_l + m_R} \end{aligned}\right\} \qquad (41-12)$$

因为这道题是吸能反应，Q<0,所以要使$K_l(\theta) = \left(u \pm \sqrt{u^2 + w}\right)^2$方程成立，需要满足$\boldsymbol{u^2 + w \geq 0}$

即

$$\frac{m_i m_l K_i}{(m_l + m_R)^2} cos^2\,\theta + \frac{m_R Q + K_i(m_R - m_i)}{m_l + m_R} \geq 0$$

当$\theta = 0$时，K_i最小　推出 $\boldsymbol{K_i \geq -Q\frac{m_l + m_R}{m_l + m_R - m_i}}$

代入Q方程　$\boldsymbol{m_l + m_R - m_i = m_T - \frac{Q}{c^2}}$

$$K_i \geq -Q\frac{m_T + m_i - \frac{Q}{c^2}}{m_T - \frac{Q}{c^2}} \qquad \boldsymbol{K_i \geq -Q\frac{m_T c^2 + m_i c^2 - Q}{m_T c^2 - Q}}$$

$$K_i \geq -Q\frac{m_{3H}c^2 + m_p c^2 - Q}{m_{3H}c^2 - Q} = -Q\frac{3.016050uc^2 + 1.007825uc^2 - Q}{3.016050uc^2 - Q}$$

$$= -Q\frac{4.023875uc^2 - Q}{3.016050uc^2 - Q} = -Q\frac{4.023875\times1.66\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2 J - Q}{3.016050\times1.66\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2 J - Q}$$

$$= -Q\frac{4.023875\times4.98\times10^{-11} - Q}{3.016050\times4.98\times10^{-11} - Q} = -Q\frac{2.00388975\times10^{-10} - Q}{1.5019929\times10^{-10} - Q}$$

因为$Q = -0.01223586 \times 10^{-11} J$，相对较小，所以分子分母可以忽略“-Q”项

7－9 试问：用多大能量的质子轰击固定的氚靶，才能发生 $p+{}^3H \longrightarrow n+{}^3He$ 反应？若入射质子的能量为 3.00 MeV，而发射的中子与质子的入射方向成 90°角，则发射的中子和 ${}^3He$ 的动能各为多少？

$$K_i \ge -Q\frac{2.00388975\times10^{-10}-Q}{1.5019929\times10^{-10}-Q}$$

$$\approx -Q\frac{2.00388975\times10^{-10}}{1.5019929\times10^{-10}}$$

$$= -(-0.01223586\times10^{-11}J)\times\frac{2.00388975}{1.5019929}$$

$$= 0.01223586\times10^{-11}\times1.33415394$$

$$= 1.632452\times10^{-13}J$$

$$= 1.632452\times10^{-13}J\times\frac{1}{1.602\times10^{-19}}eV/J$$

$$= 1.019\times10^{6}\,eV = 1.019\,MeV$$

（2） 根据Q方程，出射轻粒子(中子)的动能

$$K_l(\theta) = \left(u \pm \sqrt{u^2+w}\right)^2$$

$$u = \frac{\sqrt{m_i m_l K_i}}{m_l+m_R}\cos\theta \qquad w = \frac{m_R Q + K_i(m_R-m_i)}{m_l+m_R}$$

当$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$u=0，\ K_l(\theta) = w = \frac{m_R Q + K_i(m_R-m_i)}{m_l+m_R}$$

$$K_l = \frac{m_R Q + K_i(m_R-m_i)}{m_l+m_R} = \frac{m_{3He} Q + K_i(m_{3He}-m_p)}{m_n+m_{3He}}$$

$$= \frac{3.016029uQ + K_i(3.016029u-1.007825u)}{1.008665u+3.016029u}$$

$$= \frac{3.016029Q + K_i(3.016029-1.007825)}{1.008665+3.016029}$$

$$= \frac{3.016029\times(-0.763MeV) + 3MeV\times(3.016029-1.007825)}{1.008665+3.016029}$$

$$= \frac{3.016029\times(-0.763MeV) + 3MeV\times2.008204}{4.024694}$$

$$= \frac{3.016029\times(-0.763MeV) + 3MeV\times2.008204}{4.024694}$$

$$= \frac{-2.30123013MeV + 6.024612MeV}{4.024694} = \frac{3.72338187MeV}{4.024694}$$

$$= 0.925MeV$$

Q方程 $Q = (K_l + K_R) - (K_i + K_T)$

靶粒子静止$K_T = 0$，出射粒子的动能为 $K_R = Q - K_l + K_i$

$$K_{3He} = K_R = -0.763MeV - 0.925MeV + 3MeV$$

$$= 1.312MeV$$

7－15　有人认为质子可能会衰变，其平均寿命约为 1.2×10^{32} a. 若要测量它的放射性（例如，每月测量到一次衰变事件），那么至少要用多少水？

质子的平均寿命$\tau = 1.2\times10^{32}$年

寿命和衰变常数λ的关系为　$\tau = \dfrac{1}{\lambda}$

$$\lambda = \frac{1}{1.2\times10^{32}\text{年}}$$

于是，任一核素的平均寿命为：

$$\tau = \frac{\int_0^\infty \lambda N t \mathrm{d}t}{N_0} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = 1.44T_{1/2} \qquad (37-4)$$

因此，平均寿命为衰变常数的倒数；它比半衰期长一点，是 $T_{1/2}$的 1.44 倍.

把式(37－4)代入式(37－2)，即得：

$$N = N_0 e^{-1} \approx 37\% N_0$$

每月发生有一次放射性衰变，所以**放射性活度**为

$$A = \frac{1}{30\times24\times3600s}$$

$$A = \lambda N$$

$$N = \frac{\lambda}{A} = \frac{1.2\times10^{32}\times365\times24\times3600s}{30\times24\times3600s} =$$

$$= 0.04\times10^{32}\times365 = \mathbf{1.46\times10^{33}}$$

1 mol 水的质量为 18 g，含 6.02×10^{23}个水分子，而每一个水分子中有 10 个质子，即每 18 g 水中含有 6.02×10^{24}个质子. 所以 N 个质子对应的水质量为

水分子H_2O包含的质子数：　2p+8p=10p

$$m = \frac{N}{6.02\times10^{23}\times10/\text{mol}}\times18\,g/mol$$

$$= \frac{1.46\times10^{33}}{6.02\times10^{24}}\times18\,g = 4.365\times10^{9}g$$

$$= 4.36\times10^{6}\,\text{kg}$$