题目

假设一个光子和一个电子具有相同的动能 K。

(1) 当电子速度较低时，可以忽略相对论效应。判断在动能相同的情况下，是电子的波长更短还是光子的波长更短？请给出具体的推导过程。

(2) 当电子速度很高时，则必须考虑相对论效应。

i) 导出此时电子德布罗意波长 λ_e 的表达式。

ii) 使用这个更加精确的表达式，重新证明 (1) 中的结论。

(3) i) 考察两种极限情况：

- 在低能极限下 ($K \ll m_e c^2$)，证明 (2) 中的相对论波长公式可以退化回 (1) 中的非相对论形式。
- 在极端相对论极限下 ($K \gg m_e c^2$)，电子的波长和光子的波长之间近似于什么关系？

ii) 计算动能分别为 $K = 10\,\mathrm{eV}$ (典型原子能级能量) 和 $K = 100\,\mathrm{GeV}$ (大型粒子对撞机能量) 时，波长比值 λ_e/λ_{ph} 的近似值。并讨论这两个结果如何印证了你在 (1) 和 (3)- i 中的结论。

答案

(1)

- **光子:** 能量 $K = pc$，波长
$$\lambda_{ph} = \frac{h}{p} = \frac{hc}{K}$$
- **电子 (非相对论):** 动能 $K = \frac{p^2}{2m_e}$，动量 $p = \sqrt{2m_e K}$，波长
$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e K}}$$
- **结论:** 在非相对论近似下，电子的波长更短。
- **论证:** 比较 λ_e^2 和 λ_{ph}^2：
$$\frac{\lambda_e^2}{\lambda_{ph}^2} = \frac{h^2/(2m_e K)}{(hc/K)^2} = \frac{h^2}{2m_e K} \cdot \frac{K^2}{h^2 c^2} = \frac{K}{2m_e c^2}$$
在非相对论近似成立的条件下，$K \ll m_e c^2$，所以比值 $\frac{K}{2m_e c^2} \ll 1$，因此 $\lambda_e \ll \lambda_{ph}$。

(2)

i) 电子的总能量 $E_{\text{total}} = K + m_e c^2$。相对论能量-动量关系为 $E_{\text{total}}^2 = (pc)^2 + (m_e c^2)^2$。
$$\begin{aligned}(pc)^2 &= (K + m_e c^2)^2 - (m_e c^2)^2 \\ &= K^2 + 2K m_e c^2 + (m_e c^2)^2 - (m_e c^2)^2 \\ &= K(K + 2m_e c^2)\end{aligned}$$
由此得到精确的电子波长为:
$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2m_e c^2)}}$$

ii) 比较 $\lambda_e = \frac{hc}{\sqrt{K(K+2m_e c^2)}}$ 和 $\lambda_{ph} = \frac{hc}{K}$，等价于比较它们的分母。即比较 $\sqrt{K^2 + 2K m_e c^2}$ 和 $K = \sqrt{K^2}$。显然前者更大，即 $\lambda_e < \lambda_{ph}$。

(3)

i)

- **低能极限** ($K \ll m_e c^2$)**：** 在分母 $\sqrt{K(K + 2m_e c^2)}$ 中，K 项远小于 $2m_e c^2$ 项，可忽略。
$$\lambda_e = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2m_e c^2)}} \approx \frac{hc}{\sqrt{K(2m_e c^2)}} = \frac{hc}{c\sqrt{2m_e K}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e K}}$$
公式退化为非相对论形式。
- **极端相对论极限** ($K \gg m_e c^2$)**：** 在分母 $\sqrt{K^2 + 2K m_e c^2}$ 中，K^2 是主导项。
$$\lambda_e = \frac{hc}{K\sqrt{1 + \frac{2m_e c^2}{K}}} \approx \frac{hc}{K} = \lambda_{ph}$$
此时电子波长近似等于光子波长。

ii) 计算比值 $\frac{\lambda_e}{\lambda_{ph}} = \sqrt{\frac{K}{K+2m_ec^2}}$。

- **(1)** $K = 10\,\mathbf{eV}$

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_{ph}} = \sqrt{\frac{10\,\mathrm{eV}}{10\,\mathrm{eV} + 2(5.11\times10^5\,\mathrm{eV})}} \approx \sqrt{\frac{10}{1.022\times10^6}} \approx \sqrt{10^{-5}} \approx 0.00316$$

  结果远小于 1，符合 (1) 的结论。

- **(2)** $K = 100\,\mathbf{GeV} = 10^{11}\,\mathbf{eV}$

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_{ph}} = \sqrt{\frac{10^{11}}{10^{11} + 2(5.11\times10^5)}} = \sqrt{\frac{1}{1+1.022\times10^{-5}}} \approx 0.999995$$

  结果非常接近 1，符合 (3)-i) 的极端相对论极限结论。