

Project-2: Mesh Simplification

1. 代码明细

目录结构如下，每个文件夹下存放一个实验的源码和编译产生的可执行文件。

```
.
├── assets                # 原始网格模型 (.obj 格式)
├── build                 # CMake 构建产物
├── external/glm          # 数学库依赖
├── meshark
│   ├── apps             # 应用入口: simplify.cc (简化器主程序)
│   ├── include          # 头文件: 定义半边表结构与简化逻辑
│   └── src              # 源码实现: 核心拓扑操作与 QEM 算法
├── output               # 结果输出目录
│   ├── 0.25 | 0.5 | 0.75 # 按简化率分类的输出模型
│   ├── fig              # 模型对比截图
│   └── readme.md        # 模型效果展示与说明书
├── build_and_run.sh     # 自动化编译并批量运行脚本
├── run.sh               # 批量运行脚本
├── CMakeLists.txt       # 项目构建配置文件
├── README.md            # 项目说明书
└── README.pdf           # 项目说明书 PDF 版
```

2. 环境配置

由于支持实验环境 (Ubuntu 20.04) 的 gcc 最高版本仅有 gcc-11, 且不支持 C++20 标准中的 库, 本项目改为使用 <fmt/core.h> 库进行字符串格式化, 并在 meshark/CMakeLists.txt 中添加了链接库选项 fmt。

```
add_executable(simplify apps/simplify.cc)
target_link_libraries(simplify meshark fmt)
```

3. 程序编译及运行命令

一键编译并运行 (请将替换为您想使用的简化率, 例如 0.5) : 该脚本会自动检查 build 目录, 调用 CMake 和 Make 进行编译, 随后处理 assets 下的所有模型。

```
sh ./build_and_run.sh <alpha>
```

仅运行程序 (前提是已编译) :

```
sh ./run.sh <alpha>
```

上述脚本会自动将 `assets` 中的网格模型全部按照指定的简化率进行简化，简化后的模型放在 `output/<简化率>` 目录下。

4. 算法实现与实验结果

4.1 算法原理：二次误差度量 (QEM)

本项目基于 Garland 和 Heckbert 提出的 **Quadric Error Metric (QEM)** 算法实现网格简化。其核心思想是：

- 误差量化**：每个顶点 v 维护一个 4×4 的对称矩阵 Q ，代表该点到其相邻平面集合的距离平方和。误差 $E(v) = v^T Q v$ 。
- 边坍塌代价**：对于边 (v_1, v_2) ，计算其坍塌后的新顶点 \bar{v} 的最佳位置。新顶点的误差矩阵为 $Q_{\text{new}} = Q_1 + Q_2$ 。
- 贪心策略**：将所有边按照坍塌产生的误差代价排序放入优先队列，每次取出代价最小的边进行坍塌，并更新周围受影响元素的误差矩阵和代价。

4.2 核心代码实现

4.2.1 半边表迭代器实现

为了高效遍历顶点的邻域，在 `Project2/meshark/include/meshark/mesh-elements.h` 的 `VertexElement` 中实现了 `OutgoingHalfEdgeRange` 迭代器。

- 逻辑**：利用半边结构的 `twin` 和 `next` 指针，公式为 `h_next = h_current->twin->next`，从而实现围绕顶点的逆时针遍历。

```
Iterator &operator++() {
    // TODO: implement operator++ for OutgoingHalfEdgeRange::Iterator
    it = it->twin->next;
    if (it == start) it = static_cast<HalfEdge>(nullptr); // 如果回到了起点，置
    为空，表示结束
    return *this;
}
```

4.2.2 QEM 矩阵与代价计算

在 `src/mesh-simplifier.cc` 中实现了数学计算核心：

- computeQuadricMatrix**：遍历顶点周围的面，获取法线 $n=[a,b,c]$ 和距离 $d = -n \cdot v$ ，构建平面向量 $p=[a,b,c,d]^T$ ，累加 $K_p = p \cdot p^T$ 得到 Q 矩阵。

```
glm::mat4 MeshSimplifier::computeQuadricMatrix(Vertex v) const {
    // TODO: implement this function
    // ax + by + cz + d = 0
    // n = [a, b, c]^T
    // p = [a, b, c, d]^T
    // K_p = p * p^T
    // Q_v = \sum_{f \in faces(v)} K_{p,f}
```

```

glm::mat4 Q(0.0f);
for (HalfEdge h : v->outgoingHalfEdges())
{
    Face f = h->face;

    if (!f) continue; // 防止边界情况
    glm::vec3 n = mesh.normal(f); // 平面法线
    // 利用 v 坐标求出 d
    glm::vec3 v_pos = mesh.pos(v);
    float d = -glm::dot(n, v_pos);

    glm::vec4 p(n.x, n.y, n.z, d);
    glm::mat4 Kp = glm::outerProduct(p, p);
    Q += Kp;
}

return Q;
}

```

- **computeOptimalCollapsePosition**: 构建线性方程组 $A\bar{v} = [0,0,0,1]^T$ 求解最优位置。对于矩阵不可逆的退化情况，此时在端点和中点间选择代价最小者。

```

glm::vec3 MeshSimplifier::computeOptimalCollapsePosition(Edge e) const {
    // TODO: implement this function
    Vertex v1 = e->firstVertex();
    Vertex v2 = e->secondVertex();

    glm::mat4 Q1 = Q(v1);
    glm::mat4 Q2 = Q(v2);
    glm::mat4 Q_sum = Q1 + Q2;

    // 修改Q_sum最后一行 (Row 3)
    glm::mat4 A = Q_sum;
    A[0][3] = 0.0f;
    A[1][3] = 0.0f;
    A[2][3] = 0.0f;
    A[3][3] = 1.0f;

    // 目标向量 b = [0, 0, 0, 1]
    glm::vec4 b(0.0f, 0.0f, 0.0f, 1.0f);

    // 尝试求解方程组
    // 检查行列式是否接近 0, 防止除以零或数值不稳定
    if (std::abs(glm::determinant(A)) > 1e-7) {
        // 矩阵可逆, 直接求解: x = A^-1 * b
        glm::mat4 A_inv = glm::inverse(A);
        glm::vec4 v_opt = A_inv * b;
        return glm::vec3(v_opt); // 隐式转换为 vec3 (丢弃 w)
    }
}

```

```
// 如果矩阵不可逆，在两个端点和中点之间选择代价最小的位置
glm::vec3 p1 = mesh.pos(v1);
glm::vec3 p2 = mesh.pos(v2);
glm::vec3 p_mid = (p1 + p2) * 0.5f;

// 定义一个临时的 lambda 来计算代价:  $v^T * Q * v$ 
auto calculate_cost = [&](const glm::vec3& p) -> double {
    glm::vec4 v(p, 1.0f);
    // glm::dot(v, Q * v) 等价于  $v^T * Q * v$ 
    return glm::dot(v, Q_sum * v);
};

double cost1 = calculate_cost(p1);
double cost2 = calculate_cost(p2);
double cost_mid = calculate_cost(p_mid);

// 返回代价最小的位置
if (cost_mid < cost1 && cost_mid < cost2) return p_mid;
if (cost1 < cost2) return p1;
return p2;
}
```

4.2.3 拓扑操作：边坍塌

实现了 `collapseEdge` 函数。这是实验中最复杂的部分，为了保证网格的流形性质和程序的健壮性，重点处理了以下细节：

1. **指针修复与野指针防御**：在删除顶点 `v_{remove}` 之前，不仅将其所有邻居的 `tail` 指针重定向到 `v_{keep}`，还特别修复了 `v_left` 和 `v_right` 的 `halfEdge` 指针。

```
// 1. 修改 v_remove 所有出边的 tail 为 v_keep, 以及它们对边的 tip 为 v_keep
for (HalfEdge h : v_remove->outgoingHalfEdges())
{
    h->tail = v_keep;
    h->twin->tip = v_keep;
}
// 2. 保证 v_keep v_left v_right 指向的半边不是将被删除的半边
v_keep->halfEdge() = h_right_prev->twin; // 必须是从 v_keep 发出的半边!!
v_left->halfEdge() = h_left_next->twin;
v_right->halfEdge() = h_right_next->twin;
```

2. **拓扑缝合**：当边坍塌时，左右两个三角形退化，需要将保留边的外侧半边 (`h_left_next->twin`) 与删除边的外侧半边 (`h_left_prev->twin`) 互连。正确更新了 `twin` 指针以及 `Edge` 对象的 `halfEdge` 指向，防止悬空指针。

```
// 3. 缝合左右面的另外两条边
// 修改半边的 twin
h_left_next->twin->twin = h_left_prev->twin;
```

```

h_left_prev->twin->twin = h_left_next->twin;
h_right_next->twin->twin = h_right_prev->twin;
h_right_prev->twin->twin = h_right_next->twin;
// 修改左右面半边 twin 的 edge 成员为保留边
h_left_next->twin->edge = h_left_prev->twin->edge = e_keep_left;
h_right_next->twin->edge = h_right_prev->twin->edge = e_keep_right;

// 修改半边所属 Edge 的 halfEdge 引用, 保证其不指向即将被删除的半边
e_keep_left->halfEdge() = h_left_next->twin;
e_keep_right->halfEdge() = h_right_prev->twin;

```

3. **数据与拓扑同步删除**: 框架代码中 `edge_collapse_cost.removeEdgeData()` 操作会改变 `cost` 数组的大小并移动数据, 它访问 `cost` 数组时使用的是 `mesh` 维护的索引, 但它不负责更新索引。索引的更新工作由 `mesh.removeEdge()` 来完成。

因此, 为了避免两次连续的 `edge_collapse_cost.removeEdgeData()` 操作中, 后一次操作使用错误的索引访问 `cost` 数组 (一般情况下会导致逻辑错误, 极端情况会导致 Segment Fault), 必须严格遵守每完成一次 `edge_collapse_cost.removeEdgeData()` 就需要一次 `mesh.removeEdge()` 的删除顺序。这一顺序确保了在删除后续边时, 索引始终是有效且对应的, 解决了在处理 `torus.obj` 等复杂模型时出现的崩溃问题。

```

// 必须一条一条边删除, 且严格保证 Data 和 Mesh 的操作是原子的
eraseEdgeMapping(e); // 1. 从优先队列 Map 中移除
edge_collapse_cost.removeEdgeData(e); // 2. 从 Data 数组移除 (发生数据交换)
mesh.removeEdge(e); // 3. 从 Mesh 数组移除 (发生元素交换, 更新索引)

```

4.2.4 级联更新:

实现了 `updateVertexPos`, 利用 `std::set` 和自定义比较器 (基于裸指针比较) 收集受影响的边, 触发 `computeEdgeCost` 的重新计算和优先队列的更新。

```

void MeshSimplifier::updateVertexPos(Vertex v, const glm::vec3 &pos) {
    // TODO: implement this function
    // 设置点坐标
    mesh.setVertexPos(v, pos);

    // 记录需要更新的点
    std::vector<Vertex> vertices_to_update;
    vertices_to_update.push_back(v);
    for (HalfEdge h : v->outgoingHalfEdges()) {
        vertices_to_update.push_back(h->tip);
    }

    // 更新这些顶点的Q矩阵, 并记录需要更新的边
    // 定义一个 Lambda 比较器用于 set
    auto edgeComparator = [](Edge a, Edge b) {
        return a.get() < b.get(); // 比较原始指针地址
    };
}

```

```
};
// 使用自定义比较器的 set 来收集受影响的边
std::set<Edge, decltype(edgeComparator)> edges_to_update(edgeComparator);

for (Vertex u : vertices_to_update) {
    Q(u) = computeQuadricMatrix(u);
    // 收集该顶点连接的所有边
    for (HalfEdge h : u->outgoingHalfEdges()) {
        edges_to_update.insert(h->edge);
    }
}

// 更新这些边的代价（移出和重新插入优先队列由updateEdgeCost处理）
for (Edge e : edges_to_update) {
    Real new_cost = computeEdgeCost(e);
    updateEdgeCost(e, new_cost);
}
}
```

4.3 结果展示

程序成功在不同简化率（0.25, 0.5, 0.75）下对所有测试模型完成了简化。所有简化后的 OBJ 文件均已保存在 `output/` 目录下，可直接使用 MeshLab 或 Open3D 或通过 VScode 的 mesh-viewer 插件查看。

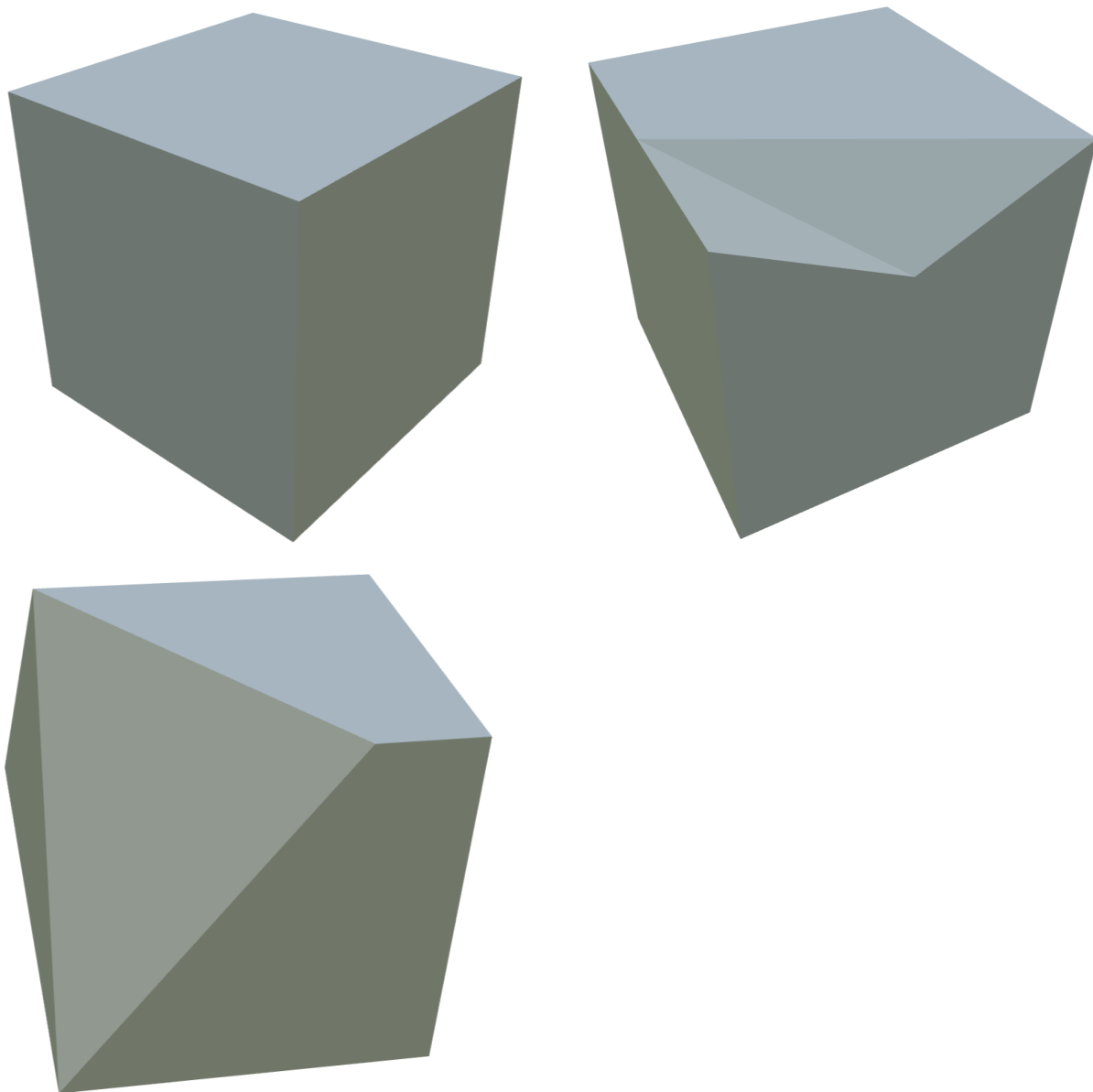
简化效果概览

- **Armadillo:** 在简化率 0.25 下，轮廓特征保持良好，手指等细微结构在低多边形下有所退化但依然清晰可辨。



24

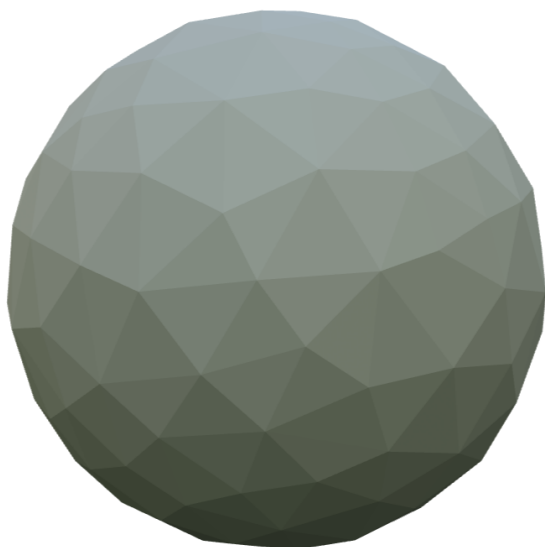
- **Cube_triangle:** 在简化率 0.75 下，正确地将三角形合并，保留了立方体的平面和尖锐边角特征（得益于 QEM 对平面误差的敏感性）。但是在简化率 0.5 下，出现了平面内陷的情况。简化率 0.25 时这种情况就更加严重。



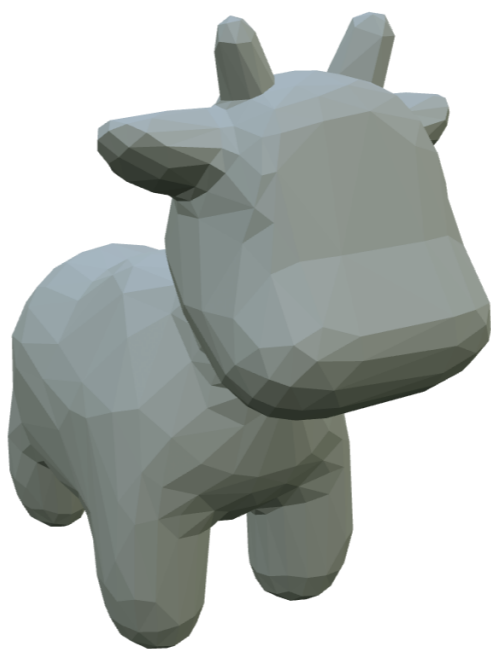
- **complex_bunny**: 图为简化率 0.25。轮廓特征保持良好，眼部细节纹理有所退化。



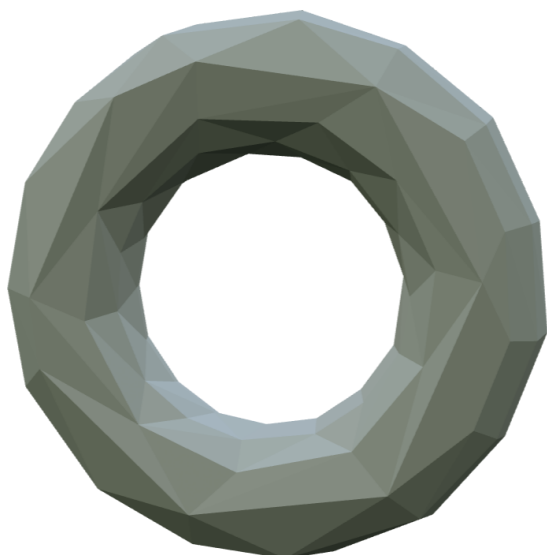
- **Sphere:** 均匀简化, 保持了球体的凸性。图为简化率 0.25。



- **Spot:** 图为简化率 0.25。轮廓特征保持良好, 脸部纹理完全被磨平。



- **Torus:** 成功处理了非亏格为零的复杂拓扑，简化后圆环的孔洞特征保持完好，简化效果均匀。



简化效果详细分析（以Armadillo为例）

简化前模型效果

顶点数：49990 面数：99976

简化前的模型纹理非常细腻，表面平滑，需要仔细观察才能辨别出一些三角面片。



简化率 75% 效果

顶点数: 37493 面数: 74982

简化 75% 的模型纹理依旧细腻，视觉效果与原模型基本一致，但胸口处已经可以较明显地观察出一些三角面片。



es: 74982

简化率 50% 效果

顶点数: 24996 面数: 49988

简化 50% 的模型已经开始丢失一些纹理细节（如耳廓明显变得不平滑），在身体各处都可以轻松地观察出三角面片，但简化效果仍然很好，保留了大部分原模型的特征，粗看并不影响视觉效果。



9988

简化率 25% 效果

顶点数: 12499 面数: 24994

简化 25% 的模型已经大量丢失纹理细节，身体各处都呈现明显的 Low-poly 风格，但总的来说简化效果还是比较成功，保留了原模型的基本特征。



34