Теор. вер.

Лекция 1

Статистическое понятие вероятности

Пусть проводится n экспериментов в ходе которых событие A

опр. Отношение $\frac{n_A}{n}$ называется частотой события A

Реальные эксперименты показывают что при увеличении n эта частота стабилизируется около некоторго числа под которым мы понимаем статистическую вероятность $P(A) \simeq \frac{n_A}{n}$ при $n \to \infty$

Пространство исходов. Случайные события

опр. Пространством элементарных исходов Ω называется множество, содержащее все возможные результаты данного эксперимента, из которых при испытание происходит ровно один

Элементы этого множества называются элементарными иходами ω

опр. Случайными событиями называется подмножество $A \subseteq \Omega$

событие A наступает, если произошёл один из элементарных исходов $\omega \in A$

примеры:

1) бросание монеты Ω = {О, Р}, А = {О}
2) кость Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, А = {2, 4, 6}
3) монета подбрасывается дважны
   можно рассмотреть два момента (учитываем порядок или нет)
   учитывая: Ω = {ОО, ОР, РР, РО}
   не учитывая Ω = {ОО, ОР, РР}
4) кубик два раза Ω = {ij | 1<=i,j<=6}
   A = разность делится на 3
5) монета бросается до первого герба Ω = {Г, РГ, РРГ, РРРГ, ...}
6) положение монеты при броске на плоскость Ω = {x,y | x,y \in R}

Операции над событиями

Ω - достоверное событие (универсальное множество)
происходит всегда так как содержит все элементарные исходы

ф - невозможное события
никогда не происходит

опр1. Суммой A + B называется событие, состоящее в том, что произошло событие A ***или*** событие B (объединение множеств)

опр2. Произведение A * B называется событие состоящее в том что произошло событие A ***и*** событие B (пересечение множеств)

Note. A1+A2+...+An - произошло хотя бы одно из них
A1*A2*...*An - произошли все из них

опр3. Противоположное событию А называется соб $\overline{A}$ (дополнение множества)

опр4. Дополнением А \ В называется событие, состоящее в том, что произошло событие А и не произошло событие В
(разность множеств)

опр5. События А и В называются несовместными если их произведение - пустое событие
(не могут произойти в ходе одного эксперимента)

опр6. Событие А влечёт событие В, если $A \subseteq B$

Вероятность

Каждому случайному событию А хотим приписать числовую характеристику, отражающую частоту его появление

Классическое определение вероятности

Пусть Ω состоит из конечного числа исходов, которые считаем равновозможными (например из соображения симметрии) тогда применимо классическое определение вероятности:

P(A) = |A|/|Ω| = m/n, где n - число всех элементарных исходов
m - число элементарных исходов благоприятных событию А

в частности, если |Ω| = n, Ai - элементарное событие, P(Ai) = 1/n

Свойства:
1) P - [0; 1]
2) P(Ω) = 1
3) вероятность невозможного события = 0
4) если А и В несовместны, то P(A + B) = P(A) + P(B)

$\triangleright$ $|A| = m_1$, $|B| = m_2$, $|\Omega| = n$

тогда $|A+B| = m_1 + m_2$

$$P(A) = \frac{|A+B|}{|\Omega|} = \frac{m_1 + m_2}{n} = P(A) + P(B) \quad \triangleleft$$

пример
найти вероятность того что при бросании кубика выпадет чётное число очков
P(A) = 1/2

недостатки классического определения:

1) исходы не всегда равновозможны
2) число исходов может быть бесконечным

Геометрическое определение вероятности

Ввёл Граф де Бюффон примерно в 1733г

Пусть Ω \in R^n - замкнутая и ограниченная область
m(Ω) - Риманова мера Ω (длина в R, площадь в R^2...) конечна
Если вероятность события A зависит лишь от меры m(A) но не от её расположение, то применимо геометрическое определение вероятности:

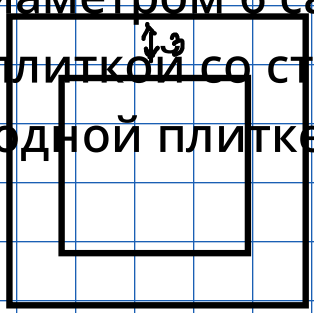
P(A) = m(A) / m(Ω)

note. Так как мера точки равна 0, то согласно определению вероятность попадания в точку равна нулю (хотя попасть туда мы можем)
note. Свойства геометрической вероятности идентичны свойствам классической вероятности

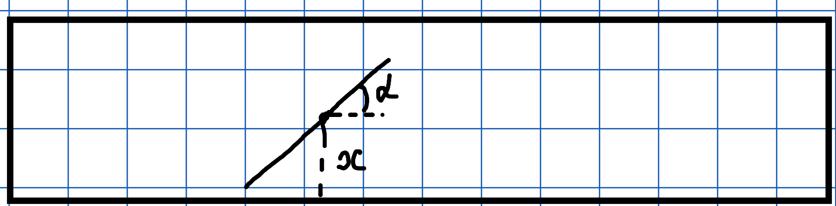
примеры:

1) игра "франк-карр"
монета диаметром 6 сантиметров на удачу бросается на пол вымощенный квадратной плиткой со стороной 20 см, какова вероятность того что она целиком окажется на одной плитке?

$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{196}{400} = 0,49$



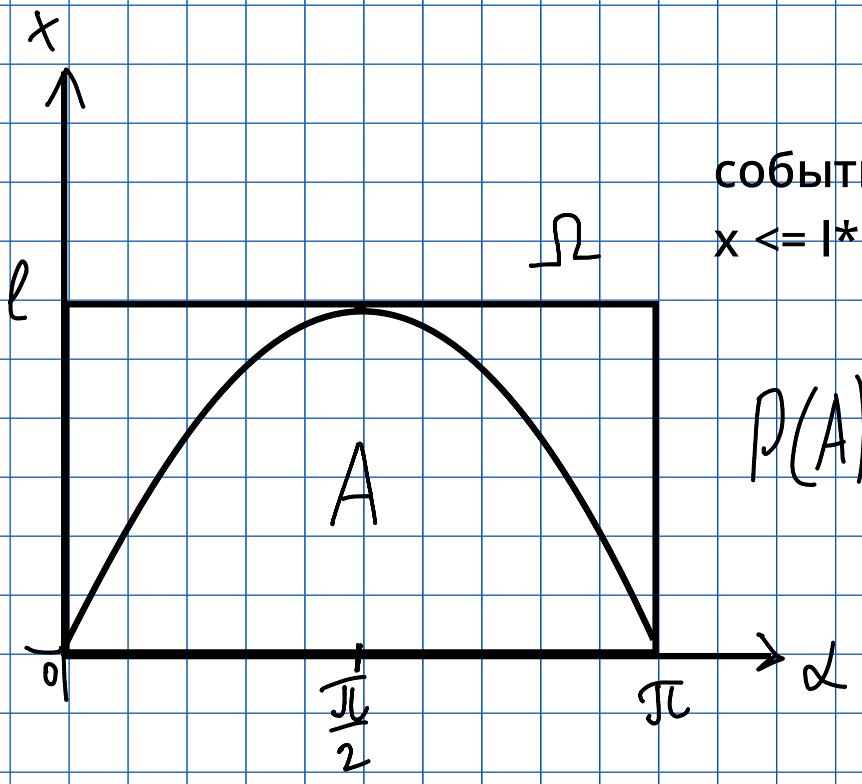
2) задача Бюффона об игле
пол выстлан ламинатом и на пол бросается игла, длина которой равна ширине доски найти вероятность того, что игла пересечёт стык



I длина иглы - $2l$

положение игры определяется её центром и углом к доске,
которые можно считать независимыми

пусть x - это расстояние до ближайшего края
x - [0; l]
a - [0; pi]
Ω = [0; l] x [0; pi]



событие А произойдёт, если
x <= l*sin(a)

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2l}{\pi \cdot l} = \frac{2}{\pi} \approx 0,64$$

$$S(\Omega) = \pi \cdot l$$

$$S(A) = \int_0^{\pi} l \sin \varphi \, d\varphi = 2l$$

недостатки геометрического определения:

1) предполагаем, что вероятность зависит лишь от меры А, но не от его расположения
в дальшейшем такие распределения будем называть равномерными. Но на практике они встречаются крайне редко. Обычно вероятность зависит от расположения А.

2) пространство элементарных исходов может быть счётным

3) даже если эксперимент удовлетворяет геометрическому определению, то не всегда можно найти P(A) так как существуют неизмеримые множества

примеры когда не работает? посмотрите на лекции

1) Статистика Максвелла Больцмана
2) Статистика Бозе Эйнштейна
3) Статистика Аферми Берака