

# АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина  $\xi$  имеет *абсолютно непрерывное распределение*, если существует функция  $f(x)$ , такая что  $P(\alpha < \xi < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  для любых вещественных чисел  $a, b$ .

Данная функция  $f(x)$  называется *функцией плотности распределения*.

Абсолютно непрерывная случайная величина задается функцией плотности либо, что чаще удобнее, *функцией распределения*  $F(x) = P(\xi < x)$ .

Основные свойства этих функций:

- 1).  $f(x) \geq 0$  и выполнено условие нормировки:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- 2).  $F(x)$  – непрерывная неубывающая функция,  $0 \leq F(x) \leq 1$ ,  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(\infty) = 1$
- 3).  $f(x) = F'(x)$ ,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$
- 4).  $P(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Числовые характеристики непрерывного распределения находим по формулам:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx; \quad D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (E\xi)^2; \quad \sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$$

$$F(x) = P(\xi < x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

$$f(x) = F'(x)$$

98. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ ax, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр  $a$ , ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервал  $(0,5; 1,5)$ , построить графики плотности и функции распределения.

1)  $a$  - ?

$$1) \int_0^2 ax dx = \left. \frac{ax^2}{2} \right|_0^2 = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

2)  $E_{\xi}, D_{\xi}, \sigma$  - ?

$$2) E_{\xi} = \int_0^2 xf(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} \cdot x dx = \left. \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{4}{3}$$

3)  $F(x)$  - ?

$$D_{\xi} = \int_0^2 x^2 f(x) dx - (E_{\xi})^2 = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

4)  $P(0,5 < \xi < 1,5)$

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$3) F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

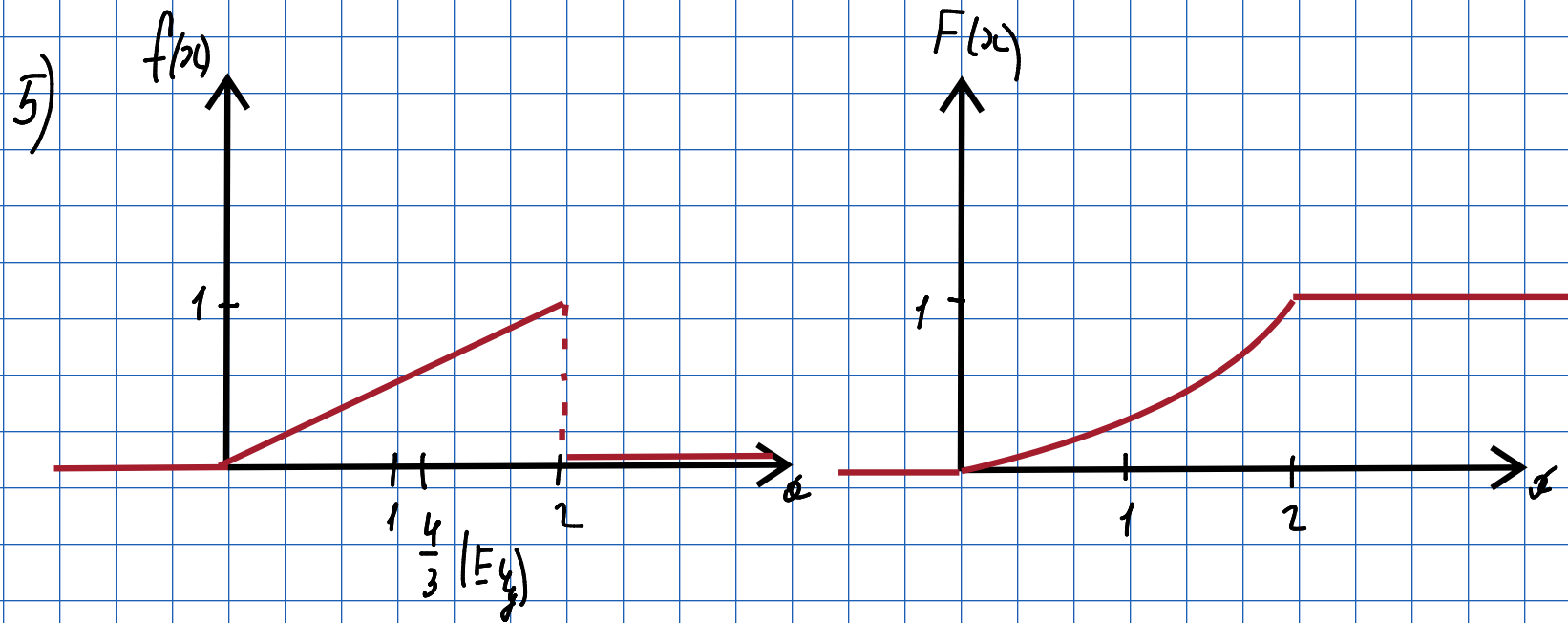
при  $x < 0$ ,  $F(x) = 0$

$$\text{при } 0 \leq x \leq 2, F(x) = \int_0^x \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4}$$

при  $x > 2$ ,  $F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/4, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$4) P(0,5 < \xi < 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = \frac{1}{4}(2) = \frac{1}{2}$$



100. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{a}{x^4}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр  $a$ , ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервалы  $(2; 4)$ ,  $(0; 3)$ ,  $(4; \infty)$ , построить графики плотности и функции распределения.

$$1) \int_1^{\infty} \frac{a}{x^4} dx = a \int_1^{\infty} x^{-4} dx = a \int_1^{\infty} \frac{x^{-3}}{-3} dx = a \left( -\frac{x^{-3}}{3} \Big|_1^{\infty} \right) = \frac{a}{3}, \quad a = 3$$

$$2) E\xi = 3 \int_1^{\infty} x^{-3} dx = 3 \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^{\infty} = \frac{3}{2}$$

$$D\xi = 3 \int_1^{\infty} x^{-2} dx - (E\xi)^2 = 3 \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^{\infty} - \frac{9}{4} = 3 - 2\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3)

101. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2; \\ Ax + B, & -2 \leq x \leq 4; \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Найти неизвестные параметры  $A$  и  $B$ , плотность, ее числовые характеристики, вероятность попадания в интервал  $(0; 3)$ , построить графики плотности и функции распределения.

$$\begin{cases} 4A + B = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \quad 6A = 1, \quad A = \frac{1}{6}$$

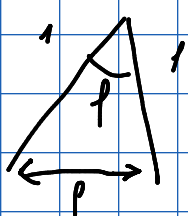
$$B = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = A = \frac{1}{6}$$

$$F(3) - F(0) = 3A = \frac{1}{2}$$

107. Ножки циркуля, каждая из которых имеет длину 1, раздвинуты на случайный угол  $\varphi \in [0; \pi]$ .

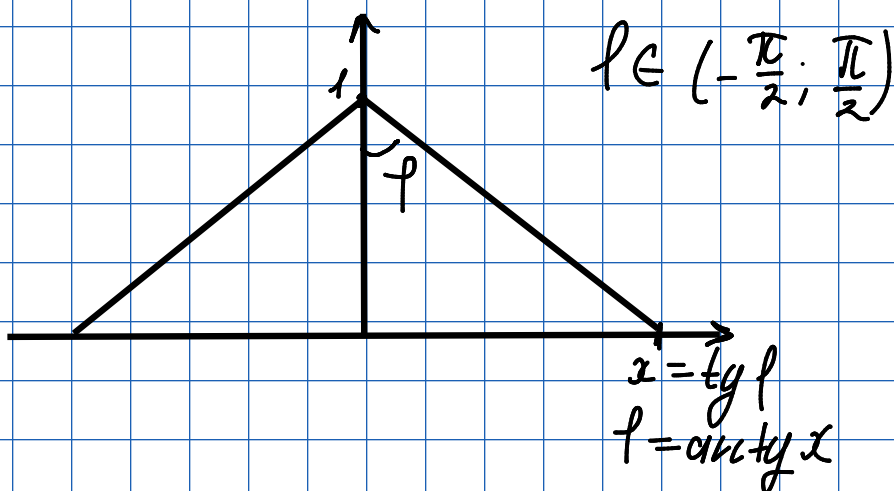
Найти математическое ожидание расстояния между концами ножек.



$$r(\varphi) = \sqrt{2 - 2\cos\varphi} = \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2\cos\frac{\varphi}{2}$$

110. В точке  $(0,1)$  находится источник излучения, равномерно испускающий частицы во все стороны. Случайная величина  $\xi$  – точка пересечения частицы с осью  $OX$ .

Найти ее функцию распределения, плотность и математическое ожидание.



$$F(x) = P(\xi \leq x) = P\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \arctg x\right) = \frac{\arctg x + \frac{\pi}{2}}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$E_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2\pi} \ln(x^2+1) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

абс. со. не  
мат. ож не сущ.