Лабораторная работа №4

Численное интегрирование

Интегральное исчисление имеет многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике. Оно дает общий метод нахождения площадей, объемов, центров тяжести и т.д.

Курс математического анализа содержит разнообразный материал, однако, одним из его центральных разделов является определенный интеграл. Интегрирование многих видов функций подчас представляет собой одну из труднейших проблем математического анализа.

Вычисление определенного интеграла имеет не только теоретический интерес. К его вычислению сводятся иногда задачи, связанные с практической деятельностью человека.

Также понятие определенного интеграла широко используется в физике.

Часть 1.

Численное интегрирование в MS Excel

Если же говорить о программе Excel, которая является одной из наиболее известных в обработке электронных таблиц, то без преувеличения можно утверждать, что ее возможности практически неисчерпаемы.

Обработка текста, управление базами данных - программа настолько мощна, что во многих случаях превосходит специализированные программы - редакторы или программы баз данных. Такое многообразие функций может поначалу запутать, нежели заставить применять их на практике. Но по мере приобретения опыта начинаешь по достоинству ценить то, что границ возможностей Excel тяжело достичь.

За всю историю табличных расчетов с применением персональных компьютеров требования пользователей к подобным программам существенно изменились. В начале основной акцент в такой программе, как, например, *Visi Calc*, ставился на счетные функции. Сегодня, положение другое. Наряду с инженерными и бухгалтерскими расчетами организация и графическое изображение данных приобретают все возрастающее значение. Кроме того, многообразие функций, предлагаемое такой расчетной и графической программой, не должно осложнять работу пользователя. Программы для Windows создают для этого идеальные предпосылки.

Ряд технологических задач требует увязки в математическое описание всей информации о процессе. Например, для математических моделей химико-технологических процессов одними из основных параметров, характеризующих процессы, являются концентрации реагирующих веществ, температура процесса и др. Как правило, большинство балансовых уравнений в химической технологии представлены системой интегральных и дифференциальных уравнений, в результате решения которых могут быть получены зависимости, характеризующие протекание процесса.

Часто на практике не удается вычислить интеграл аналитическим путем. В этих случаях применяют приближенные методы численного интегрирования.

Постановка задачи

Вычислить определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

при условии, что a и b конечны и F(x) является непрерывной функцией x на всем интервале x[a,b]. Во многих случаях, когда подынтегральная функция задана в аналитическом виде, интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Однако этой формулой часто нельзя воспользоваться по следующим причинам:

~ первообразная функция f(x) слишком сложна и ее нельзя выразить в элементарных функциях;

~ функция f(x) задана в виде таблицы, что особенно часто встречается в задачах химической технологии при обработке экспериментальных данных.

В этих случаях используются методы численного интегрирования.

Задача численного интегрирования состоит в нахождении приближенного значения интеграла по заданным или вычисленным значениям.

Общий подход к решению задачи будет следующим. Определенный интеграл I представляет собой площадь, ограниченную кривой f(x), осью x и переменными x=a и x=b. Необходимо вычислить интеграл, разбивая интервал [a,b] на множество меньших интервалов, находя приблизительно площадь каждой полоски и суммируя их.

В зависимости от способа вычисления подынтегральной суммы существуют различные методы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапеций, парабол, сплайнов и др.).

Все методы будут рассматриваться на примере вычисления следующего интеграла:

$$\int_{0}^{3,2} \sqrt{(x^4 - x^3 + 8)}\,dx$$

Метод прямоугольников.

Существует несколько видов формул прямоугольников:

Формула левых прямоугольников.

В общем виде формула левых прямоугольников на отрезке [x0;xn] выглядит следующим образом:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$$

Формула правых прямоугольников.

В общем виде формула правых прямоугольников на отрезке [x0;xn] выглядит следующим образом:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

В данной формуле x0=a, xn=b.

Формула средних прямоугольников.

В общем виде формула средних прямоугольников на отрезке [x0;xn] выглядит следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2})$$

где xi=xi-1+h.

В данной формуле, как и в предыдущих, требуется h умножать сумму значений функции f(x), но уже не просто подставляя соответствующие значения x0,x1,...,xn-1 в функцию f(x), а прибавляя к каждому из этих значений h/2 (x0+h/2, x1+h/2,..., xn-1+h/2), а затем только подставляя их в заданную функцию.

На практике данные способы реализуются следующим образом:

Для того, чтобы вычислить интеграл по формуле левых прямоугольников в Excel, необходимо выполнить следующие действия:

Ввести в ячейку A1 текст a=.

Ввести в ячейку B1 число 0.

Ввести в ячейку A2 текст b=.

Ввести в ячейку B2 число 3,2.

Ввести в ячейку A3 текст n=.

Ввести в ячейку B3 число 10.

Ввести в ячейку A4 текст h=.

Ввести в ячейку B4 формулу =(B2-B1)/B3.

Вести в ячейку A6 текст i, в B6 - x, в C6 - y0,...,y(n-1).

Ввести в ячейку A7 число 0.

Ввести в ячейку A8 формулу =A7+1, скопировать эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек A8:A17.

Ввести в ячейку B7 число 0.

Ввести в ячейку B8 формулу =B7+$B$4, скопировать эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек B8:B17.

Ввести в ячейку C7 формулу =КОРЕНЬ(B7^4-B7^3+8), скопировать эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек C8:C16.

Ввести в ячейку B18 текст сумма:.

Ввести в ячейку B19 текст интеграл=.

Ввести в ячейку C18 формулу =СУММ(C7:C16).

Ввести в ячейку C19 формулу =B4*C18.

Ввести в ячейку C20 текст левых.

(Как на Рис. 1)

В итоге получаем следующее:

	A	B	C
1	a=	0	
2	b=	3,2	
3	n=	10	
4	h=	0,320	
5			
6	i	x	y0,...,y(n-1)
7	0	0	2,828427
8	1	0,320	2,824485
9	2	0,640	2,811695
10	3	0,960	2,822164
11	4	1,280	2,930393
12	5	1,600	3,233821
13	6	1,920	3,809417
14	7	2,240	4,683683
15	8	2,560	5,845721
16	9	2,880	7,273871
17	10	3,200	
18		Сумма:	39,063678
19		интеграл=	12,500377
20			левых

Рис.1

Ответ: значение заданного интеграла равно 12,500377.

Для того, чтобы вычислить интеграл по формуле правых прямоугольников в Excel, необходимо выполнить следующие действия:

Продолжить работу в том же документе, что и при вычислении интеграла по формуле левых прямоугольников.

В ячейку D6 ввести текст y1,…,yn.

Ввести в ячейку D8 формулу =КОРЕНЬ(B8^4-B8^3+8), скопировать эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек D9:D17

Ввести в ячейку D18 формулу =СУММ(D7:D17).

Ввести в ячейку D19 формулу =B4*D18.

Ввести в ячейку D20 текст правых.

(Как на Рис. 2)

В итоге получаем следующее:

	A	B	C	D
1	a=	0		
2	b=	3,2		
3	n=	10		
4	h=	0,320		
5				
6	**i**	**x**	**y0,...,y(n-1)**	**y1,...,yn**
7	0	0	2,828427	
8	1	0,320	2,824485	2,824485
9	2	0,640	2,811695	2,811695
10	3	0,960	2,822164	2,822164
11	4	1,280	2,930393	2,930393
12	5	1,600	3,233821	3,233821
13	6	1,920	3,809417	3,809417
14	7	2,240	4,683683	4,683683
15	8	2,560	5,845721	5,845721
16	9	2,880	7,273871	7,273871
17	10	3,200		8,949279
18		Сумма:	39,063678	45,184530
19		интеграл=	12,500377	14,45905
20			левых	правых

Рис.2

Ответ: значение заданного интеграла равно 14,45905.

Для того, чтобы вычислить интеграл по формуле средних прямоугольников в Excel, необходимо выполнить следующие действия:

Продолжить работу в том же документе, что и при вычислении интеграла по формулам левых и правых прямоугольников.

В ячейку E6 ввести текст xi+h/2, а в F6 - f(xi+h/2).

Ввести в ячейку E7 формулу =B7+$B$4/2, скопировать эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек E8:E16

Ввести в ячейку F7 формулу =КОРЕНЬ(E7^4-E7^3+8), скопировать эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек F8:F16

Ввести в ячейку F18 формулу =СУММ(F7:F16).

Ввести в ячейку F19 формулу =B4*F18.

Ввести в ячейку F20 текст средних.

(Как на Рис. 3)

В итоге получаем следующее:

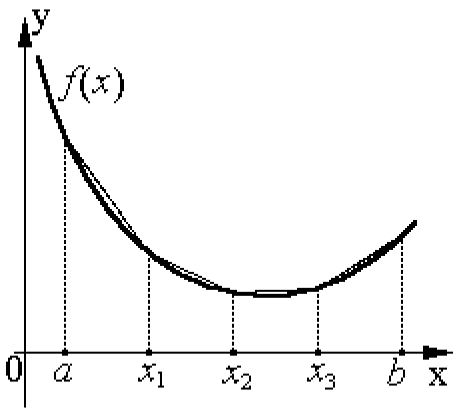
	A	B	C	D	E	F
1	a=	0				
2	b=	3,2				
3	n=	10				
4	h=	0,320				
5						
6	i	x	y0,....,y(n-1)	y1,...,yn	xi+h/2	f(xi+h/2)
7	0	0	2,828427		0,16	2,827819
8	1	0,320	2,824485	2,824485	0,48	2,818243
9	2	0,640	2,811695	2,811695	0,8	2,810267
10	3	0,960	2,822164	2,822164	1,12	2,858075
11	4	1,280	2,930393	2,930393	1,44	3,051857
12	5	1,600	3,233821	3,233821	1,76	3,484731
13	6	1,920	3,809417	3,809417	2,08	4,209373
14	7	2,240	4,683683	4,683683	2,4	5,230067
15	8	2,560	5,845721	5,845721	2,72	6,527838
16	9	2,880	7,273871	7,273871	3,04	8,081628
17	10	3,200		8,949279		
18		Сумма:	39,063678	45,184530		41,8999
19		интеграл=	12,500377	14,45905		13,40797
20			левых	правых		средних

Рис.3

Ответ: значение заданного интеграла равно 13,40797.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что формула средних прямоугольников является наиболее точной, чем формулы правых и левых прямоугольников.

Метод трапеций.



В общем виде формула трапеций на отрезке [x0;xn] выглядит следующим образом:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx h\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)$$

В данной формуле x0=a, xn=b, так как любой интеграл в общем виде выглядит:

$$\int_a^b f(x)dx$$

h можно вычислить по следующей формуле: h=(b-a)/n (19).

y0, y1,..., yn - это значения соответствующей функции f(x) в точках x0, x1,..., xn (xi=xi-1+h)" [3].

На практике данный способ реализуется следующим образом:

Для того, чтобы вычислить интеграл по формуле трапеций в Excel, необходимо выполнить следующие действия:

Ввести в ячейку A1 текст n=.

Ввести в ячейку B1 число 10.

Ввести в ячейку A2 текст a=.

Ввести в ячейку B2 число -1.

Ввести в ячейку A3 текст b=.

Ввести в ячейку B3 число 1.

Ввести в ячейку A4 текст h=(b-a)/n.

Ввести в ячейку B4 формулу =(B3-B2)/B1.

Заполнить диапазон ячеек A6:D6 следующим образом:

	A	B	C	D
6	**i**	**x**	**y0,yn**	**y1,y2,…,yn-1**

Ввести в ячейку A7 число 0.

Ввести в ячейку A8 формулу =A7+1, скопировать эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек A8:A17.

Ввести в ячейку B7 число -1.

Ввести в ячейку B8 формулу =B7+$B$4, скопировать эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек B8:B17.

Ввести в ячейку C7 формулу =КОРЕНЬ(B7^4-B7^3+8), а в ячейку C17 формулу =КОРЕНЬ(B17^4-B17^3+8).

Ввести в ячейку D8 формулу =КОРЕНЬ(B8^4-B8^3+8), скопировать эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек D8:B16.

Ввести в ячейку B18 текст суммы:.

Ввести в ячейку C18 формулу =СУММ(C7;C17).

Ввести в ячейку D18 формулу =СУММ(D8:D16).

Ввести в ячейку A19 текст интеграл=.

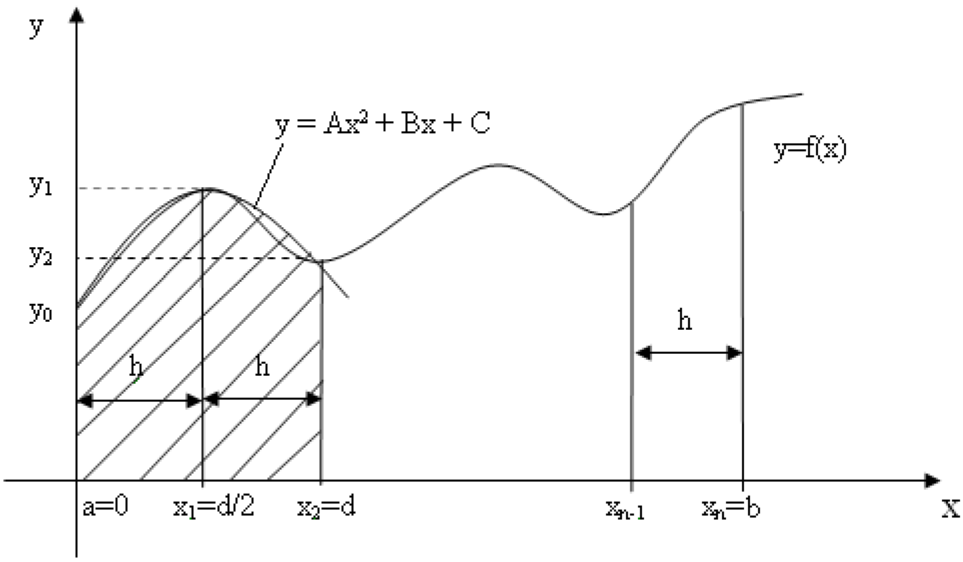
Ввести в ячейку B19 формулу =B4*(C18/2+D18).

	A	B	C	D
1	n=	10		
2	a=	0		
3	b=	3,2		
4	h=(b-a)/n	0,32		
5				
6	**i**	**x**	**y0,yn**	**y1,y2,….yn-1**
7	0	0	2,828427	
8	1	0,32		2,824485
9	2	0,64		2,811695
10	3	0,96		2,822164
11	4	1,28		2,930393
12	5	1,6		3,233821
13	6	1,92		3,809417
14	7	2,24		4,683683
15	8	2,56		5,845721
16	9	2,88		7,273871
17	10	3,2	8,949279	
18		суммы:	11,777706	36,235251
19	интеграл=	13,47971		

Метод парабол или Симпсона.

Этот метод более точный по сравнению с методами прямоугольников и трапеций, а поэтому наиболее широко известный и применяемый метод численного интегрирования.

Метод аналогичен рассмотренным ранее методам прямоугольников и трапеций: интервал интегрирования разбивается на множество более мелких отрезков; однако для вычисления площади под каждым из отрезков через три последовательных ординаты разбиения проводится квадратичная парабола.



Формулу Симпсона получаем, проводя параболу через три ординаты на концах двух соседних интервалов и складывая получившиеся при этом площади.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{2\cdot h}{3}\left[\frac{y_0 - y_n}{2} + (2\cdot y_1 + y_2) + (2\cdot y_3 + y_4) + \ldots + (2\cdot y_{n-1} + y_n)\right]$$

Поскольку в методе Симпсона парабола проводится через три ординаты на концах двух соседних интервалов, то при реализации этого метода необходимо требовать, чтобы «n» было четным числом.

На практике данный способ реализуется следующим образом:

Для того, чтобы вычислить интеграл по формуле Симпсона в Excel, необходимо выполнить следующие действия:

Ввести в ячейку A1 текст n=.

Ввести в ячейку B1 число 10.

Ввести в ячейку A2 текст a=.

Ввести в ячейку B2 число 0.

Ввести в ячейку A3 текст b=.

Ввести в ячейку B3 число 3,2.

Ввести в ячейку A4 текст h=.

Ввести в ячейку B4 формулу =(B3-B2)/B1.

Заполнить диапазон ячеек A6:D6 следующим образом:

	A	B	C	D	E
6	**i**	**x**	**y0yn**	**y1,y3,y5,y7**	**y2,y4,y6,y8,y10**

Ввести в ячейку A7 число 0.

Ввести в ячейку A8 формулу =A7+1, скопировать эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек A8:A17.

Ввести в ячейку B7 число 0.

Ввести в ячейку B8 формулу =B7+$B$4, скопировать эту формулу методом протягивания в диапазон ячеек B8:B17.

Ввести в ячейку C7 формулу =КОРЕНЬ(B7^4-B7^3+8), а в ячейку C17 формулу =КОРЕНЬ(B17^4-B17^3+8).

Заполнить нижеприведенные ячейки:

	D	E
8	=КОРЕНЬ(B8^4-B8^3+8)	
9		=КОРЕНЬ(B9^4-B9^3+8)
10	=КОРЕНЬ(B10^4-B10^3+8)	
11		=КОРЕНЬ(B11^4-B11^3+8)
12	=КОРЕНЬ(B12^4-B12^3+8)	
13		=КОРЕНЬ(B13^4-B13^3+8)
14	=КОРЕНЬ(B14^4-B14^3+8)	
15		=КОРЕНЬ(B15^4-B15^3+8)
16	=КОРЕНЬ(B16^4-B16^3+8)	
17		=КОРЕНЬ(B17^4-B17^3+8)

Ввести в ячейку C18 формулу =(C7-C17)/2.

Ввести в ячейку D18 формулу =2*D8+2*D10+2*D12+2*D14+2*D16.

Ввести в ячейку E18 формулу =E9+E11+E13+E15+E17.

Ввести в ячейку A19 текст интеграл=.

Ввести в ячейку B19 формулу =(2*B4/3)*(C18+D18+E18).

В итоге получаем следующее:

	A	B	C	D	E
1	n=	10			
2	a=	0			
3	b=	3,2			
4	h=	0,32			
5					
6	**i**	**x**	**y0yn**	**y1,y3,y5,y7**	**y2,y4,y6,y8,y10**
7	0	0	2,828427125		
8	1	0,32		2,824485397	
9	2	0,64			2,811694891
10	3	0,96		2,822164162	
11	4	1,28			2,930392902
12	5	1,6		3,233821269	
13	6	1,92			3,809416879
14	7	2,24		4,683682927	
15	8	2,56			5,845721252
16	9	2,88		7,273871002	
17	10	3,2	8,949279301		8,949279301
18			-3,060426088	41,67604952	24,34650523
19	интеграл=	13,43192			

Часть 2.

Численное интегрирование и дифференцирование в Scilab

Интегрирование по методу трапеций

В Scilab численное интегрирование по методу трапеций реализовано с помощью функции inttrap([x,]y). Эта функция вычисляет площадь фигуры под графиком функции y(x), которая описана набором точек (x, y). Параметр x является необязательным. Для функции inttrap(y) элементы вектора x принимают значения номеров элементов вектора y.

Задача 5.1.

Вычислить определенный интеграл

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_5^{13} \sqrt{2x-1}\,dx$.

Этот интеграл легко сводится к табличному

$$\int\limits_5^{13} \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3}$$

,

поэтому вычислить его по формуле Ньютона–Лейбница не составит труда:
Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)\,.$$

```
-->a=5;b=13;
-->I=1/3*(2*b-1)^(3/2)-1/3*(2*a-1)^(3/2)
 I  =  32.666667
```

Листинг 7.1. Точное решение задачи

-->a=5;b=13;

-->I=1/3*(2*b-1)^(3/2)-1/3*(2*a-1)^(3/2)

I = 32.666667

Теперь применим для отыскания заданного определенного интеграла метод трапеций. Рассмотрим несколько вариантов решения данной задачи. В первом случае интервал интегрирования делится на отрезки с шагом один, во втором 0.5 и в третьем 0.1. Не трудно заметить, что чем больше точек разбиения, тем точнее значение искомого интеграла:

Листинг 5.2. Приближенное решение задачи с использованием функции

```
-->x=a:b;y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(x,y)
 ans  =
    32.655571
-->h=0.5; x=a:h:b; y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(x,y)
 ans  =
    32.66389
-->h=0.1; x=a:h:b; y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(x,y)
 ans  =
    32.666556
```

Далее в листинге 5.3 приведен пример использования функции inttrap с одним аргументом. Как видим, в первом случае значение интеграла, вычисленного при помощи этой функции, неточно и совпадает со значением, полученным функцией *inttrap(x,y)* на интервале [5; 13] с шагом 1. Т.е. мы нашли сумму площадей восьми прямолинейных трапеций с основанием h = 1 и боковыми сторонами, заданными вектором y. Во втором случае, при попытке увеличить точность интегрирования, значение интеграла существенно увеличивается. Дело в том, что, уменьшив шаг разбиения интервала интегрирования до 0.1, мы увеличили количество элементов векторов x и y, и применение функции inttrap(y) приведет к вычислению суммы площадей восьмидесяти трапеций с основанием h = 1 и боковыми сторонами, заданными вектором y. Таким образом, в первом и втором примерах вычисляются площади совершенно разных фигур.

Для вычисления интеграла методом трапеций участок интегрирования разбивают на определенное количество равных отрезков, каждую из полученных криволинейных трапеций заменяют прямолинейной и вычисляют приближенное значение интеграла как сумму площадей этих трапеций.

Листинг 5.3. Использование функции *inttrap* с одним аргументом

```
-->x=a:b;y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(y)
 ans  =     32.655571
-->h=0.1;x=a:h:b;y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(y)
 ans  =     326.66556
```

Интегрирование по квадратуре

Методы трапеций являются частными случаями квадратурных формул Ньютона–Котеса, которые, вообще говоря, имеют вид (5.1)

$$\int_a^b y\,dy = (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i$$

где *Hi* -это некоторые константы, называемые постоянными Ньютона–Котеса.

Если для (5.1) принять n = 1, то получим метод трапеций, а при n = 2- метод Симпсона. Эти методы называют квадратурными методами низших порядков. Для n > 2 получают квадратурные формулы Ньютона–Котеса высших порядков. Вычислительный алгоритм квадратурных формул реализован в Scilab функцией:

integrate(fun, x, a, b, [,er1 [,er2]])

где *fun*_функция, задающая подынтегральное выражение в символьном виде; *x*-переменная интегрирования, так же задается в виде символа; *a, b*-пределы интегрирования, действительные числа; *er1* и *er2*-параметры, отражающие абсолютную и относительную точность вычислений (действительные числа).

Задача 5.2.

Вычислить интеграл из задачи 5.1

Решение показано в листинге 5.4.

Листинг 5.4. Использование функции integrate

```
-->integrate('(2*x-1)^0.5','x',5,13)
 ans  =     32.666667
```

Интегрирование внешней функции

Наиболее универсальной командой интегрирования в Scilab является:

[I,err]=intg(a, b, name [,er1 [,er2]])

где *name*_имя функции, задающей подынтегральное выражение (здесь функция может быть задана в виде набора дискретных точек (как таблица) или с помощью внешней функции*);* *a* и *b*_пределы интегрирования; *er1* и *er2*_абсолютная и относительная точность вычислений (необязательные параметры).

Задача 5.3.

Вычислить интеграл из задачи 5.1

Решение показано в листинге 5.5.

Листинг 5.5. Использование функции *intg*

```
-->deff('y=G(x)','y=sqrt(2*x-1)'); intg(5,13,G)
 ans  =     32.666667
```

Задача 5.4.

Вычислить интеграл

Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{(3+\sin(t))}}\,dt.$

Численное решение интеграла показано в листинге 5.6.

Листинг 5.6. Решение задачи 5.4

```
-->function y=f(t),y=t^2/sqrt(3+sin(t)),endfunction;
-->[I,er]=intg(0,1,f)
 er  =  1.933D-15
 I  =
        0.1741192
```

Приближенное дифференцирование, основанное на интерполяционной формуле Ньютона

Идея численного дифференцирования заключается в том, что функцию $y(x)$, заданную в равноотстоящих точках x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ отрезка $[a, b]$ с помощью значений $y_i = f(x_i)$, приближенно заменяют интерполяционным полиномом Ньютона, построенном для системы узлов $x_0, x_1, \ldots, x_k$ $(k \leqslant n)$, и вычисляют производные $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ и т. д.

На практике приближенное дифференцирование применяют в основном для функций, заданных в виде таблицы.

В Scilab численное дифференцирование реализовано командой *dy=diff(y[,n])*, где *y*-значения функции *y(x)* в виде вектора вещественных чисел, n-порядок дифференцирования. Результат работы функции-вектор вещественных чисел *dy*, представляющий собой разности порядка *n* интерполяционного полинома Ньютона $\Delta y, \Delta_2 y, \ldots, \Delta_k y$.

Рассмотрим работу функции на примере.

Задача 5.5.

Найти *y'(50)* функции *y = lg(x),* заданной в виде таблицы.

Решение данной задачи с комментариями представлено в листинге 5.7.

Листинг 5.7. Использование функции *diff*

```
-->h=5;x=50:5:65;
-->y=log10(x)
 y  =  1.69897    1.7403627    1.7781513    1.8129134
-->dy=diff(y)
 dy  = 0.0413927    0.0377886    0.0347621
-->dy2=diff(y,2)
 dy2  =  - 0.0036041  - 0.0030265
-->dy3=diff(y,3)
 dy3  =  0.0005777
-->//Приближенное значение y'(50) по формуле (7.2)
-->Y=(dy(1)-dy2(1)/2+dy3(1)/3)/h
 Y  =  0.0086775
-->//Значение y'(50) для lg'(x)=1/ln(10)/x
-->1/log(10)/x(1)
 ans  =     0.0086859
-->//Приближенное значение y'(x), x=50,55,60 (7.2)
-->Y=(dy-dy2(1:$-1)/2+dy3(1:$-2)/3)/h
 Y  =   0.0086389    0.0079181    0.0073128
-->//Значение y'(x), x=50,55,60, для lg'(x)=1/ln(10)/x
-->(1/log(10))./x(1:$-1)
 ans  =  0.0086859    0.0078963    0.0072382
```

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К РАЗДЕЛУ

Ниже приводятся типовые варианты заданий. Найти значение интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

для $a \le x \le b$ всеми рассмотренными методами и сравнить результаты.

1). $\frac{x^2}{x-1}$; $1,5 \le x \le 3,5$.

2). $1+\sin(x^2)$; $\frac{\pi}{4} \le x \le$до $5\frac{\pi}{4}$.

3). $x \cdot arctg(x)$; $\frac{\sqrt{3}}{3} \le x \le$до $\sqrt{3}$.

4). $\frac{x}{x^3+16}$; $-2 \le x \le$до 1.

11). $\frac{x^2+5}{x^2+2}$; $0 \le x \le 2$.

12). $\frac{x}{1+x^2}$; $0,5 \le x \le 2,5$.

13). $x^2 \cdot e^{-x^2}$; $1 \le x \le 3$.

14). $\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{\sqrt{6}} \le x \le \frac{2.5}{\sqrt{6}}$.

5). $3\cdot\sqrt{x}$; $4,3 \le x \le$до 6,8.

15). $(x+\frac{1}{x})^2$; $4,3 \le x \le 6,8$.

6). $x^{1/2} - x^{1/3}$; $0 \le x \le 4$.

16). $\sin(x)$; $0 \le x \le \pi$.

7). $\cos(x)$; $\frac{\pi}{2} \le x \le 2\pi$.

17). $\frac{1}{\sqrt{50-x^2}}$; $2 \le x \le 4$.

8). $\frac{16x^2+2x+7}{x^2-8}+1$; $5 \le x \le 8$.

18). $\frac{1}{\sin(\frac{\ln(\sqrt{5x-x^2})}{\cos(3x)})}$; $0,14 \le x \le 3,67$.

9). $\ln(x)$; $0,5 \le x \le 2,5$.

19). $6x^2-3x+5$; $5 \le x \le 8$.

10). $\frac{(e^x-1)\cdot(e^{2x}+1)}{e^x}$; $5 \le x \le 8$.

20). $\frac{2x^2-3x+1}{x+1}$; $5 \le x \le 8$.

Заключение

Рассмотренные выше примеры практических задач, дают нам ясное представление значимости определенного интеграла для их разрешимости.

Трудно назвать научную область, в которой бы не применялись методы интегрального исчисления, в общем, и свойства определенного интеграла, в частности. Так в процессе выполнения работы нами были рассмотрены примеры практических задач в области физики, геометрии, механики, биологии и экономики. Конечно, это еще далеко не исчерпывающий список наук, которые используют интегральный метод для поиска устанавливаемой величины при решении конкретной задачи, и установлении теоретических фактов.

Также определенный интеграл используется для изучения собственно самой математики. Например, при решении дифференциальных уравнений, которые в свою очередь вносят свой незаменимый вклад в решение задач практического содержания. Можно сказать, что определенный интеграл - это некоторый фундамент для изучения математики. Отсюда и важность знания методов их решения.

Из всего выше сказанного понятно, почему знакомство с определенным интегралом происходит еще в рамках средней общеобразовательной школы, где ученики изучают не только понятие интеграла и его свойства, но и некоторые его приложения.

Литература

1. Волков Е.А. Численные методы. М., Наука, 1988.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Интеграл-Пресс, 2004. Т. 1.
3. Шипачев В.С. Высшая математика. М., Высшая школа, 1990.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по высшей математике для инженеров и учащихся втузов. - М.: Наука , 1981 . - 718 с.
5. Белецкий Я. Excel с графикой для персональных компьютеров перевод с польского Д.И.Юренкова. -М.: Машиностроение , 1991. - 320 с.
6. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы.М.:Наука,1989. – 430 с.
7. http://tgspa.ru/info/education/faculties
8. http://www.machinelearning.ru/wiki