Лабораторная работа №6

Тема: **Решение дифференциальных уравнений**.

1. Цель работы

Использование методов решения дифференциальных уравнений для решения конкретных производственных задач.

2. Учебные вопросы, подлежащие рассмотрению:

– Преобразование ДУ в систему линейных уравнений с помощью метода конечных разностей.

– Решение дифференциальных уравнений:

- ✓ метод конечных разностей,
- ✓ метод Рунге-Кутта,
- ✓ метод Эйлера.

Общие сведения о решении дифференциального уравнения

Решение большинства задач строительной механики сводится к решению некоторого дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений, например, расчет изгиба балки. Точное решение этих уравнений во многих случаях получить не удается. Применение численных методов для решения дифференциальных уравнений дает возможность получить соответствующие решения с некоторой точностью.

Метод конечных разностей (или метод сеток) является одним из универсальных и широко используемых методов решения краевых задач. Его популярность во многом объясняется относительной простотой подхода к дискретизации ДУ. Суть метода состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргумента заменяют конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемым сеткой. Вместо функций непрерывного аргумента рассматривают функции, определенные только в узлах сетки, — сеточные функции. Производные, которые входят ДУ и краевые условия, заменяют их разностными аналогами — линейными комбинациями значений сеточных функций в некоторых узлах сетки. В результате краевую задачу заменяют дискретной краевой задачей (разностной схемой), представляющей собой систему конечного числа линейных или нелинейных алгебраических уравнений. Решение разностной схемы (предполагается, что оно существует) принимают за приближенное решение краевой задачи

Несмотря на кажущуюся простоту метода, при его использовании приходится решать ряд проблем. Например, следует иметь в виду, что для одной краевой задачи можно построить большое число различных разностных схем, среди которых далеко не все пригодны для использования на практике.

Метод Рунге Кутта и Эйлера
Дано уравнение $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a;b]$ с начальным условием $y(a) = y_0$.
Рассмотрим численные методы решения уравнения. Следует отметить, что любой численный метод дает искомое решение в виде таблицы значений решения $y(x)$, найденных для аргумента, меняющегося с шагом h.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей точками x_0, x_1, x_2, …, x_n, где

$x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, …, $x_{i+1} = x_i + h$, $x_n = b$, $h = \dfrac{b-a}{n}$ - шаг интегрирования

1. **Метод Эйлера**

Искомое решение $y(x)$ получим в виде таблицы значений, которые вычисляются по формулам

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \qquad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), \ \ldots, \qquad y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Общая итерационная формула Эйлера имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{3.1}$$

Для данного уравнения $a = x_0 = 0$, $b == x_n = 1$, $y_0 = 1{,}3$, $f(x, y) = \cos y + 3x$

Следовательно, $y_{i+1} = y_i + h(\cos y_i + 3x_i)$

3. **Метод Рунге-Кутты четвертого порядка**

Решение $y(x)$ получим в виде таблицы значений

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{3.3}$$

где $k_1 = f(x_i, y_i)$, $\quad k_2 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}k_1\right)$

$k_3 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}k_2\right)$, $\quad k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$

Для данного уравнения

$$k_1 = \cos y_i + 3x_i, \qquad k_2 = \cos\left(y_i + \frac{h}{2}k_1\right) + 3\left(x_i + \frac{h}{2}\right),$$

$$k_3 = \cos\left(y_i + \frac{h}{2}k_2\right) + 3\left(x_i + \frac{h}{2}\right), \qquad k_4 = \cos(y_i + hk_3) + 3(x_i + h)$$

Лабораторная работа №6. Численное решение краевой задачи методом конечных разностей

Часть 6.1.

ЗАДАНИЕ.

Методом конечных разностей найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(a) = ya, \quad y(b) = yb \end{cases}$$

с шагами $h_1 = (b-a)/5$, $h_2 = (b-a)/10$ *и оценить погрешность по правилу Рунге. Построить графики полученных приближенных решений.*

Таблица к задаче 1

№	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	a	b	ya	yb
11	$0.4x^2$	5x	10	0	1	-2	2

РЕШЕНИЕ.

Решим задачу с шагом $h_1 = \frac{1-0}{5} = 0.2$. Разобьем отрезок $[0; 1]$ на пять интервалов длиной $h = 0.2$ точками $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2; x_2 = x_1 + h = 0.4; x_3 = 0.6; x_4 = 0.8; x_5 = 1$.
Заменим в выражении

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

производные на их конечно-разностные аппроксимации:

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Получим:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0.04} + p(x)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{0.4} + q(x)y_i = f(x_i)$$

Упростим:

$$\big(25 - 2.5p(x_i)\big)\, y_{i-1} + (q(x_i) - 50)y_i + \big(25 + 2.5p(x_i)\big)\, y_{i+1} = f(x_i)$$

Для $i = 0$ из условия имеем $x_0 = 0; y(x_0) = -2$.
Для $i = 1..4$:

i	x	$p(x) = 0{,}4x^2$	$q(x) = 5x$	$f(x) = 10$
1	0,2	0,016	1	10
2	0,4	0,064	2	10
3	0,6	0,144	3	10
4	0,8	0,256	4	10

Получим 4 линейных уравнения относительно $y_0, y_1, \dots, y_5$:
$i = 1$:

$$(25 - 2.5 \cdot 0.016)\, y_0 + (1 - 50)y_1 + (25 + 2.5 \cdot 0.016)\, y_2 = 10$$

$$24.96y_0 - 49y_1 + 25.04y_2 = 10$$

$i = 2$:

$$(25 - 2.5 \cdot 0.064)\, y_1 + (2 - 50) y_2 + (25 + 2.5 \cdot 0.064)\, y_3 = 10$$
$$24.84 y_1 - 48 y_2 + 25.16 y_3 = 10$$

$i = 3$:

$$(25 - 2.5 \cdot 0.144)\, y_2 + (3 - 50) y_3 + (25 + 2.5 \cdot 0.144)\, y_4 = 10$$
$$24.64 y_2 - 47 y_3 + 25.36 y_4 = 10$$

$i = 4$:

$$(25 - 2.5 \cdot 0.256)\, y_3 + (4 - 50) y_4 + (25 + 2.5 \cdot 0.256)\, y_5 = 10$$
$$24.36 y_3 - 46 y_4 + 25.64 y_5 = 10$$

Для $i = 5$ из условия имеем $x_5 = 1; y(x_5) = 2$

Итак, имеем систему из 6 линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = -2 \\ 24.96 y_0 - 49 y_1 + 25.04 y_2 = 10 \\ 24.84 y_1 - 48 y_2 + 25.16 y_3 = 10 \\ 24.64 y_2 - 47 y_3 + 25.36 y_4 = 10 \\ 24.36 y_3 - 46 y_4 + 25.64 y_5 = 10 \\ y_5 = 2 \end{cases}$$

Будем решать систему методом прогонки. Первое уравнение уже разрешено относительно y_0. Подставим во второе уравнение y_0, получим:

$$-49 y_1 + 25.04 y_2 = 59.92$$

Выразим y_1:

$$y_1 = 0.51102 y_2 - 1.22286$$

Подставим y_1 во второе уравнение, упростим, после чего выразим y_2. Аналогично поступим с остальными уравнениями. Система примет вид:

$$\begin{cases} y_0 = -2 \\ y_1 = 0.51102 y_2 - 1.22286 \\ y_2 = 0.71262 y_3 - 1.14359 \\ y_3 = 0.86138 y_4 - 1.29676 \\ y_4 = 1.02492 y_5 - 1.66246 \\ y_5 = 2 \end{cases}$$

Теперь проведем обратный ход метода прогонки. Последнее уравнение разрешено относительно неизвестной y_5. Подставим $y_5 = 2$ в пятое уравнение, получим

$$y_4 = 1.02492 \cdot 2 - 1.66246 = 0.38738$$

Аналогично поступим с остальными уравнениями. Получим решение:

x_i	y_i
0	-2,00000
0.2	-2,15797
0.4	-1,82990
0.6	-0,96308
0.8	0,38738
1	2,00000

Часть 2. Решение краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка методом конечных разностей с использованием Excel

Решение большинства задач строительной механики сводится к решению некоторого дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений, например, расчет изгиба балки. Точное решение этих уравнений во многих случаях получить не удается. Применение численных методов для решения дифференциальных уравнений дает возможность получить соответствующие решения с некоторой точностью.

Рассмотрим линейную краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка:

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = f(x), \; x \in [a;b], \tag{1.1}$$

$$\alpha_1 \cdot y(a) + \alpha_2 \cdot y'(a) = \alpha_3, \tag{1.2}$$

$$\beta_1 \cdot y(b) + \beta_2 \cdot y'(b) = \beta_3, \tag{1.3}$$

где $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$, функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ являются непрерывными на заданном отрезке $[a,b]$.

Решение краевой задачи заключается в определении значения функции $y(x)$, удовлетворяющего уравнению (1.1) и краевым условиям (1.2)-(1.3). На практике для решения краевой задачи (1.1)-(1.3) применяют численные методы, в частности метод конечных разностей (МКР). Основная идея МКР заключается в следующем: в заданной области выбирается система узловых точек и задача считается решенной, если найдены значения искомой функции в этих точках. При этом решение проводится в два этапа:1) конечно-разностная аппроксимация производных дифференциального уравнения и граничных условий, т.е. составление конечно-разностного аналога задачи – получается система уравнений; 2) решение полученной системы уравнений относительно узловых значений неизвестной функции.

На заданном отрезке выбирается сетка узлов: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Сетка может быть и равномерной: $x_k = a + k \cdot h$, $h = (b - a)/n$, $k = \overline{0, n}$. Проводится аппроксимация производных первого и второго порядка во внутренних узлах центральными конечно-разностными аналогами:

$$y'(x_k) \approx (y(x_k + h) - y(x_k - h))/2h = (y_{k+1} - y_{k-1})/2h, \qquad (2.1)$$

$$y''(x_k) \approx (y(x_k + h) - 2y(x_k) + y(x_k - h))/h^2 = (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})/h^2, \; k = \overline{1, n-1} \quad (2.2)$$

Центральные конечно-разностные аналоги (14.1) и (14.2) имеют второй порядок точности $o(h^2)$ (о-малое от h^2).

Рассмотрим дифференциальное уравнение (13.1) во внутренних узлах x_k, $k = \overline{1, n-1}$: $y''(x_k) + p(x_k) \cdot y'(x_k) + q(x_k) \cdot y(x_k) = f(x_k)$.

Заменяя первые и вторые производные конечно-разностными аналогами (14.1) – (14.2) получим систему $n - 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными y_k:

$$(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})/h^2 + p_k (y_{k+1} - y_{k-1})/2h + q_k \cdot y_k = f_k, \; k = \overline{1, n-1}, \quad (3.1)$$

где $p_k = p(x_k)$, $q_k = q(x_k)$, $f_k = f(x_k)$.

Недостающие два уравнения получим из аппроксимации краевых условий (1.2) и (13.3) конечно-разностными аналогами:

$$y'(a) = y'(x_0) = (y(x_0 + h) - y(x_0))/h = (y_1 - y_0)/h, \qquad (3.2)$$

$$y'(b) = y'(x_n) = (y(x_n) - y(x_{n-1}))/h = (y_n - y_{n-1})/h \qquad (3.3)$$

Погрешность аппроксимации краевых условий имеет первый порядок точности $o(h)$ (о-малое от h). Заменяя в (1.2) и (1.3) производные первого порядка конечно-разностными аналогами (3.2) и (3.3) получим недостающие два уравнения:

$$\alpha_1 \cdot y_0 + \alpha_2 \cdot (y_1 - y_0)/h = \alpha_3 \;\text{ и }\; \beta_1 \cdot y_n + \beta_2 \cdot (y_n - y_{n-1})/h = \beta_3. \qquad (4)$$

Таким образом, для определения $(n + 1)$ неизвестного y_k получили систему из $(n + 1)$ линейных алгебраических уравнений: (3.1) и (4). Для решения этой системы можно использовать, например, метод Гаусса. Матрица полученной системы является трех диагональной, поэтому для решения системы можно применить метод прогонки. Рассмотрим реализацию метода конечных разностей для краевой задачи с помощью Надстройки EXCEL «Поиск Решения». Решим следующую краевую задачу методом конечных разностей:

$$y''(x) + y'(x)/x + 2\cdot y(x) = x,\ x\in[0{,}7;1{,}0],\ h = 0{,}1 \qquad (5.1)$$

при краевых условиях: $y'(0{,}7) = 0{,}5$ и $y'(1) = 1{,}2$ (5.2)

Составим электронную таблицу согласно рис. 1. В ячейках **A2** и **B2** поместим концы отрезка $a = 0{,}7$ и $b = 1{,}0$; в ячейке **C2** – $h = 0{,}1$; значения α_1, α_2, α_3 – в ячейках, соответственно, **D2, E2, F2**; значения β_1, β_2, β_3 – в ячейках, соответственно, **G2, H2, I2**. Узловые точки x_k поместим в ячейках **A5:A8**, значения функции в узлах сетки $y(x_k) = y_k$ будут определяться в ячейках **B5:B8**, а их начальные значения в этих ячейках примем равными одному $y_k = 1, k = 0,1,2,3$. Значения первых производных на концах отрезка $y'(0{,}7)$ и $y'(1)$, которые определяются по формулам (3.2) и (3.3), вычисляются в ячейках **C5** и **C8** в виде: **«=(B6-B5)/$C$2»** и «**=(B8-B7)/$C$2**». Значения первых производных во внутренних точках, которые определяются по формуле (2.1), вычисляются в ячейках **C6:C7** следующим образом: в ячейку **C6** вводится формула «**=(B7-B5)/2/$C$2**» и она копируется в ячейку **C7**. Значения вторых производных во внутренних точках, которые определяются по формуле (2.2), вычисляются в ячейках **D6:D7** следующим образом: в ячейку **D6** вводится формула «**=(B7-2*B6+B5)/$C$2^2**» и она копируется в ячейку **D7**.

Значения функций $p(x) = 1/x$, $q(x) = 2$, $f(x) = x$ во внутренних точках отрезка $x_1 = 0{,}8$ и $x_2 = 0{,}9$ вычисляются в ячейках, соответственно, **E6:E7**, **F6:F7**, **G6:G7**. В качестве целевой функции можно выбрать любую функцию, только чтобы целевая функция содержала ячейку или ячейки со значениями искомой функции в узлах y_k. Пусть целевая ячейка **A9** имеет вид «**=B5**».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	A	B	H	A1	A2	A3	B1	B2	B3
2	0,7	1	0,1	0	1	0,5	0	1	1,2
3									
4	Xk	Yk	Y1k	Y2k	Pk	Qk	Fk		
5	0,7	-1,92	0,5						
6	0,8	-1,87	0,6842	3,6838	1,25	2	0,8		
7	0,9	-1,783	1,0342	3,3162	1,1111	2	0,9		
8	1	-1,663	1,2						
9	-1,92	←Целевая функция							
10			Ограничения						
11	6E-14	-9E-14	-5E-13	1E-13					
12									

Рис.1.

Систему уравнений (3.1) и краевые условия (4) для рассматриваемого примера (5.1)-(5.2) запишем в ограничения задачи оптимизации. В ячейку **A11** введем краевое условие из (4) на левом конце отрезка «**=$D$2*B5+$E$2*C5-$F$2». В** ячейки **B11:C11** введем уравнения системы (3.1) для внутренних узлов сетки в виде: в ячейку **B11** введем формулу «**=D6+E6*C6+F6*B6-G6**», в ячейку **C11** – «**=D7+E7*C7+F7*B7-G7**». В ячейку **D11** запишем краевое условие из (16) на правом конце отрезка «**=$G$2*B8+$H$2*C8-I2**». Таким образом, все ограничения задачи оптимизации представили в виде равенства.

Запустим надстройку **Поиск решения** и в появившемся окне занесем необходимые данные: адрес ячейки целевой функции **$A$9**; направление оптимизации – можно указать любое направление, либо минимум либо максимум; адреса изменяемых ячеек **$B$5:$B$8**; адреса ячеек с ограничениями задачи **$A$11:$D$11=0**.

В окне **Параметры поиска решения** установим флажки: **Автоматическое масштабирование**, **сопряженных градиентов** и щелкнув в окне **Поиск решения** левой кнопки мыши по команде **Выполнить**, получим оптимальное решение задачи, которое представлено на рис. 1. Решение краевой задачи (5.1) – (5.2) находится в ячейках **B5:B8**.

Часть **6.3. Решение задачи для линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутта и Эйлера с использованием Excel**

Найти решение дифференциального уравнения $y' = \cos y + 3x$ с начальным условием $y(0) = 1{,}3$ на отрезке $[0;1]$

1) методом Эйлера,

2) исправленным методом Эйлера,

3) методом Рунге-Кутты.

Отрезок $[0;1]$ разбить на $n = 10$ и $n = 20$ частей.

Сравнить решения, полученные разными методами, построив графики решений, полученных разными методами для $n = 10$ и $n = 20$

Для данного уравнения k_1 и k_2 будут вычисляться по формулам

$$k_1 = \cos y_i + 3x_i, \qquad k_2 = \cos(y_i + hk_1) + 3(x_i + h)$$

3. **Метод Рунге-Кутты четвертого порядка**

Решение $y(x)$ получим в виде таблицы значений

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{3.3}$$

где $k_1 = f(x_i, y_i)$, $\qquad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$

$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$, $\qquad k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$

Для данного уравнения

$$k_1 = \cos y_i + 3x_i, \qquad k_2 = \cos\left(y_i + \frac{h}{2}k_1\right) + 3\left(x_i + \frac{h}{2}\right),$$

$$k_3 = \cos\left(y_i + \frac{h}{2}k_2\right) + 3\left(x_i + \frac{h}{2}\right), \qquad k_4 = \cos(y_i + hk_3) + 3(x_i + h)$$

На листе Excel написать название темы, ввести исходные данные: дифференциальное уравнение, отрезок интегрирования $[a;b]$, начальное значение $y(a) = y_0$, количество отрезков разбиения $n = 10$, формулу расчета шага интегрирования $h = \frac{b-a}{n}$.

Метод Эйлера. Записать название метода. Построить таблицу значений аргумента x и значений функции $y_1(x)$ (решения дифференциального уравнения), найденных по формулам (3.1) метода Эйлера. Таблица может иметь вид

i	x	$y_1(x)$

Исправленный метод Эйлера. Записать название метода. Построить таблицу значений функции $y_2(x)$ - решения дифференциального уравнения, найденных по формулам (3.2) исправленного метода Эйлера. Таблица может иметь вид

$y_2(x)$	k_1	k_2

При вычислениях значений k_1 и k_2 значения аргумента x можно брать из таблицы для метода Эйлера.

Метод Рунге-Кутты. Записать название метода. Построить таблицу значений функции $y_2(x)$ - решения дифференциального уравнения, найденных по формулам (3.3) исправленного метода Эйлера. Таблица может иметь вид

$y_2(x)$	k_1	k_2	k_3	k_4

При вычислениях значений k_1, k_2, k_3 И k_4 значения аргумента x можно брать из таблицы для метода Эйлера.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**численное решение дифференциальных уравнений**							
2	y'=cosy+3x							
3	a	b	n	h				
4	0	1	10	0,1				
5								
6	начальное условие							
7	y(a)							
8	1,3							
9								
10	метод Эйлера				исправленный метод Эйлера			
11	i	x	y_1		y_2	k_1	k_2	
12	0	0	1,3		1,3	0,267499	0,541631	
13	1	0,1	1,32675		1,340456	0,528308	0,776578	
14	2	0,2	1,380913		1,393287	0,776578	0,999685	
15	3	0,3	1,459787		1,470945	0,999685	1,199883	
16	4	0,4	1,560866		1,570914	1,199883	1,380183	
17	5	0,5	1,681859		1,690902	1,380183	1,544733	
18	6	0,6	1,820775		1,82892	1,544733	1,69901	
19	7	0,7	1,976037		1,983394	1,69901	1,849888	
20	8	0,8	2,146613		2,153295	1,849888	2,005671	
21	9	0,9	2,332161		2,338283	2,005671	2,176216	
22	10	1	2,53317		2,53885			

=(B4-A4)/C4

=COS(E12+$D$4*F12)+3*(B12+$D$4)

=E12+$D$4/2*(F12+G12)

=C12+$D$4*(COS(C12)+3*B12)

=COS(E12)+3*B12

=B12+$D$4

=COS(I12+$D$4/2*K12)+3*(B12+$D$4/2)

=I12+$D$4/6*(J12+2*K12+2*L12+M12)

=COS(I12+$D$4/2*J12)+3*(B12+$D$4/2)

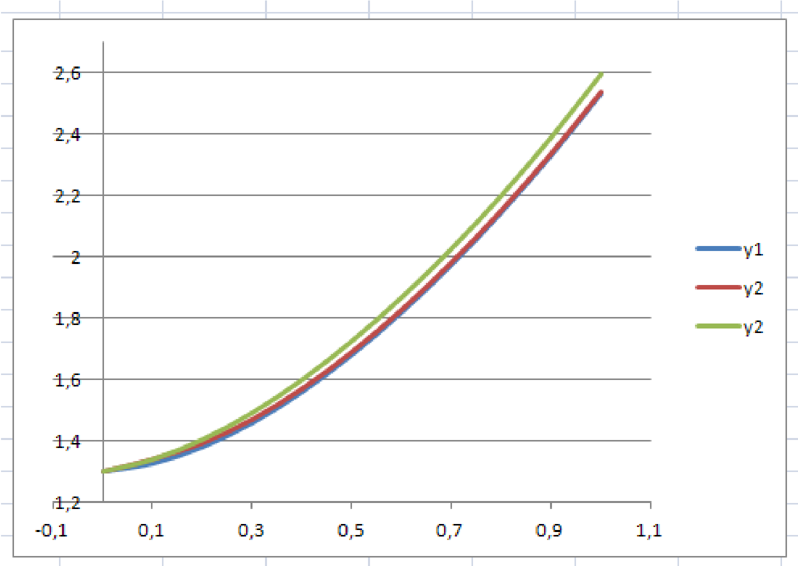
=COS(I12)+3*B12

=COS(I12+$D$4*L12)+3*(B12+$D$4)

метод Рунге-Кутты

I	J	K	L	M
y_2	k_1	k_2	k_3	k_4
1,3	0,267499	0,404588	0,397953	0,528952
1,340026	0,528728	0,652915	0,646831	0,765325
1,404918	0,765119	0,877276	0,871712	0,978626
1,49228	0,978436	1,07959	1,074534	1,171067
1,599909	1,170891	1,262455	1,257895	1,345716
1,725864	1,345553	1,429482	1,425391	1,506767
1,868565	1,506612	1,585496	1,581826	1,659683
2,026914	1,659534	1,736641	1,733336	1,811298
2,200427	1,811153	1,890473	1,887497	1,96996
2,389378	1,969822	2,056175	2,053557	2,145838
2,594964				

Построить графики решений, полученных разными методами, используя функции **ВСТАВКА → ТОЧЕЧНАЯ ДИАГРАММА → ТОЧЕЧНАЯ С ГЛАДКИМИ КРИВЫМИ** и **ВЫБРАТЬ ДАННЫЕ → ДОБАВИТЬ**.

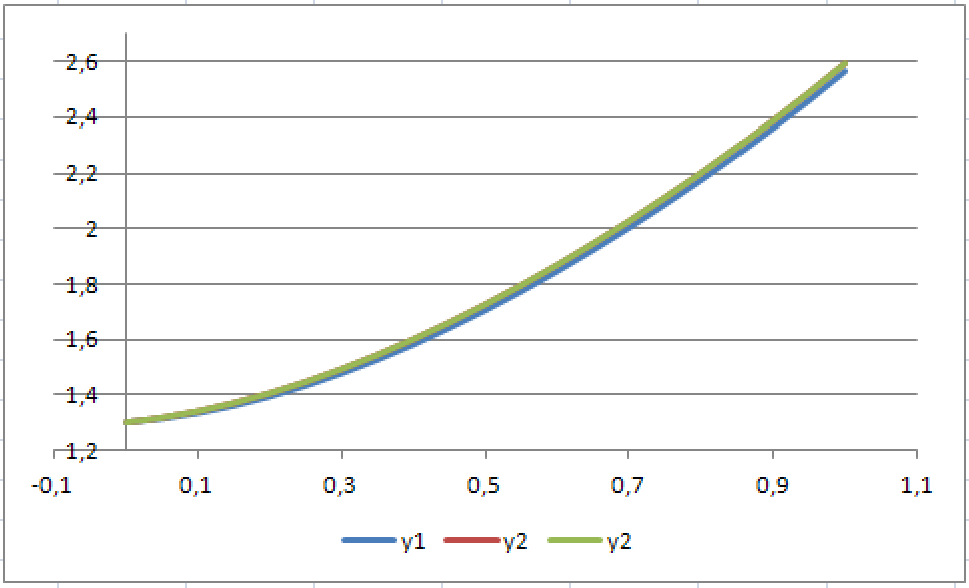


Скопировать на тот же лист результаты вычислений, повторить решение дифференциального уравнения при $n = 20$.

24	a	b	n	h			
25	0	1	20	0,05			
26							
27	начальное условие						
28	y(a)						
29	1,3						
30							
31	метод Эйлера				исправленный метод Эйлера		
32	i	x	y_1		y_2	k_1	k_2
33	0	0	1,3		1,3	0,267499	0,404588
34	1	0,05	1,313375		1,316802	0,401272	0,531803
35	2	0,1	1,333604		1,340129	0,528627	0,652819
36	3	0,15	1,360353		1,369665	0,649778	0,767844
37	4	0,2	1,393298		1,405106	0,764934	0,877099
38	5	0,25	1,432126		1,446157	0,874317	0,980836
39	6	0,3	1,476537		1,492535	0,978181	1,079348
40	7	0,35	1,526243		1,543974	1,07682	1,172985
41	8	0,4	1,58097		1,600219	1,170582	1,262162
42	9	0,45	1,640462		1,661037	1,259881	1,347364
43	10	0,5	1,704481		1,726218	1,345203	1,429154
44	11	0,55	1,772817		1,795577	1,427107	1,508173
45	12	0,6	1,845284		1,868959	1,506235	1,585147
46	13	0,65	1,921732		1,946244	1,583311	1,660885
47	14	0,7	2,002043		2,027349	1,659144	1,736285
48	15	0,75	2,086143		2,112235	1,734631	1,812335
49	16	0,8	2,174001		2,200909	1,810764	1,890126
50	17	0,85	2,265637		2,293431	1,888637	1,970859
51	18	0,9	2,361123		2,389918	1,969453	2,055858
52	19	0,95	2,460594		2,490551	2,054547	2,146596
53	20	1	2,564247		2,59558		

метод Рунге-Кутты

y_2	k_1	k_2	k_3	k_4
1,3	0,267499	0,336049	0,334394	0,401352
1,316748	0,401325	0,466601	0,465017	0,528754
1,340025	0,528728	0,590841	0,589324	0,649948
1,369517	0,649923	0,708977	0,707526	0,765143
1,404918	0,765119	0,821224	0,819837	0,874562
1,445933	0,874539	0,927818	0,926493	0,978458
1,49228	0,978436	1,029029	1,027766	1,077125
1,543689	1,077104	1,12518	1,123978	1,170912
1,599909	1,170892	1,216649	1,215507	1,260233
1,660704	1,260213	1,303885	1,302801	1,345573
1,725864	1,345553	1,387412	1,386384	1,427492
1,795202	1,427473	1,46783	1,466855	1,506631
1,868565	1,506613	1,545821	1,544896	1,583715
1,945829	1,583697	1,622153	1,621273	1,659553
2,026913	1,659535	1,697677	1,69684	1,735042
2,111777	1,735023	1,773338	1,772539	1,811172
2,200426	1,811154	1,850174	1,849412	1,889037
2,292921	1,889019	1,929331	1,928608	1,969841
2,389377	1,969823	2,012074	2,011392	2,054913
2,489974	2,054897	2,099803	2,09917	2,145734
2,594963				



Часть 6.4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений в SciLab

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$H(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)})=0 \tag{6.1}$$

Решением дифференциального уравнения является функция $x(t)$, которая обращает уравнение в тождество.

Системой дифференциальных уравнений n-го порядка называется система вида:

$$\begin{matrix} x_1'=f_1(t, x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n) \\ x_2'=f_2(t, x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n) \\ x_n'=f_n(t, x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n) \end{matrix} \tag{8.2}$$

Решение системы - вектор который обращает уравнения системы (8.2) в тождества:

$$x(t)=\begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{matrix} \tag{6.3}$$

Дифференциальные уравнения и системы имеют бесконечное множество решений, которые отличаются друг от друга константами. Для однозначного определения решения требуется задать дополнительные начальные или граничные условия. Количество таких условий должно совпадать с порядком дифференциального уравнения или системы. В зависимости от вида дополнительных условий в дифференциальных уравнениях различают: *задачу Коши* – все дополнительные условия заданы в одной (чаще начальной) точке интервала; *краевую задачу* – дополнительные условия указаны на границах интервала.

Большое количество уравнений может быть решено точно. Однако есть уравнения, а особенно системы уравнений, для которых точное решение записать нельзя. Такие уравнения и системы решают при помощи численных методов. Так же численные методы применяют, если для уравнений с известным аналитическим решением требуется найти числовое значение при определенных исходных данных.

Для решения дифференциальных уравнений и систем в `Scia`b предусмотрена функция:

```
[y,w,iw]=ode([type],y0,t0,t [,rtol [,atol]],f [,jac] [,w,iw])
```

для которой, *обязательными входными параметрами* являются:

`y0` – вектор начальных условий;

`t0` – начальная точка интервала интегрирования;

`t` – координаты узлов сетки, в которых происходит поиск решения;

`f` – внешняя функция, определяющая правую часть уравнения или системы уравнений (6.2);

`y` – вектор решений (6.3).

Таким образом, для того чтобы решить обыкновенное дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dt}=f(t,y), y(t_0)=y_0$, необходимо вызвать функцию `y=ode(y0,t0,t,f)`.

Рассмотрим необязательные параметры функции `ode`:

`type` – параметр с помощью которого можно выбрать метод решения или тип решаемой задачи, указав одну из строк:

″adams″ - применяют при решении дифференциальных уравнений или систем методом прогноза-коррекции Адамса;

″stiff″ - указывают при решении жестких задач;

″rk″ - используют при решении дифференциальных уравнений или систем методом Рунге_Кутта четвертого порядка;

″rkf″ - указывают при выборе пятиэтапного метода Рунге_Кутта четвертого порядка;

″fix″ - тот же метод Рунге_Кутта, но с фиксированным шагом;

`rtol,atol` - относительная и абсолютная погрешности вычислений, вектор, размерность которого совпадает с размерностью вектора `y`, по умолчанию `rtol=0.00001`, `atol=0.0000001` , при использовании параметров ″rkf″ и ″fix″ – `rtol=0.001`, `atol=0.0001`;

`jac` – матрица, представляющая собой якобиан правой части жесткой системы дифференциальных уравнений, задают матрицу в виде внешней функции вида `J=jak(t,y)`;

`w,iw` – векторы, предназначенные для сохранения информации о параметрах интегрирования, которые применяют для того, чтобы последующие вычисления выполнялись с теми же параметрами.

Рассмотрим использование функции на примере следующих задач.

ЗАДАЧА 6.1. Решить задачу Коши

$$\frac{dx}{dt}+x=\sin(xt), x(0)=1.5.$$

Перепишем уравнение следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}=-x+\sin(xt), x(0)=1.5.$$

Далее представим его в виде внешней функции , так как показано в листинге 6.1 и применим функцию `y=ode(x0,t0,t,f)`, в качестве параметров которой будем использовать

- `f` – ссылка на предварительно созданную функцию `f(t,x)`;
- `t` – координаты сетки;

- `x0,t0` – начальное условие x(0)=1.5;
- `y` – результат работы функции.

График, моделирующий процесс, описанный заданным уравнением, представлен на рис.6.1.

```
-->function yd=f(t,x),yd=-x+sin(t*x),endfunction;
-->x0=1.5;t0=0;t=0:1:35;
-->y=ode(x0,t0,t,f);
-->plot(t,y)
```

Листинг 6.1

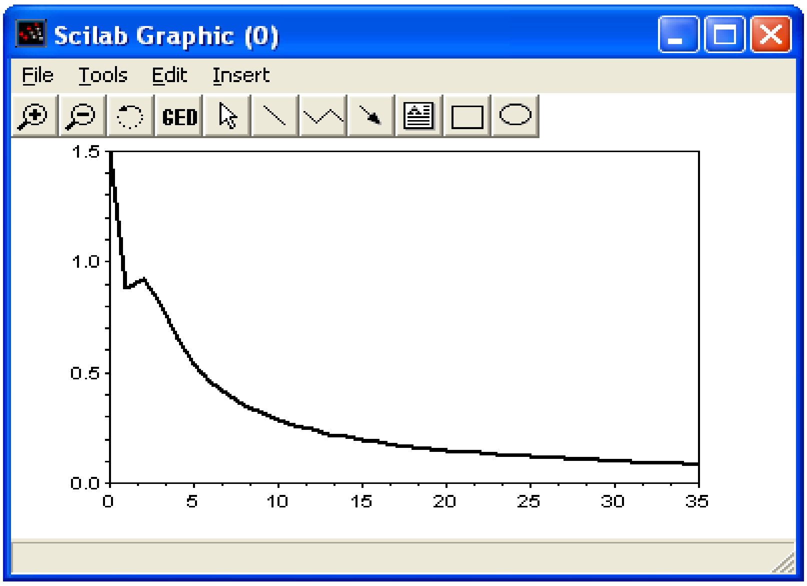


Рис. 6.1. Решение дифференциального уравнения из задачи 8.1

ЗАДАЧА6.2. Решить задачу Коши

$$x'=\cos(x\,y),$$
$$y'=\sin(x+t\,y),$$
$$x(0)=0, y(0)=0.$$

на интервале [0; 10].

Листинг 8.2 содержит функцию, описывающую заданную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и команды `Sciab` необходимые для ее численного и графического решения (рис.8.2).

```
>>%Функция, описывающая систему дифференциальных уравнений
-->function dy=syst(t,y)
-->dy=zeros(2,1);
-->dy(1)=cos(y(1)*y(2));
-->dy(2)=sin(y(1)+y(2)*t);
-->endfunction
>>%Решение системы дифференциальных уравнений
-->x0=[0;0];t0=0;t=0:1:10;
-->y=ode(x0,t0,t,syst);
>>%Формирование графического решения
-->plot(t,y)
```

Листинг 6.2

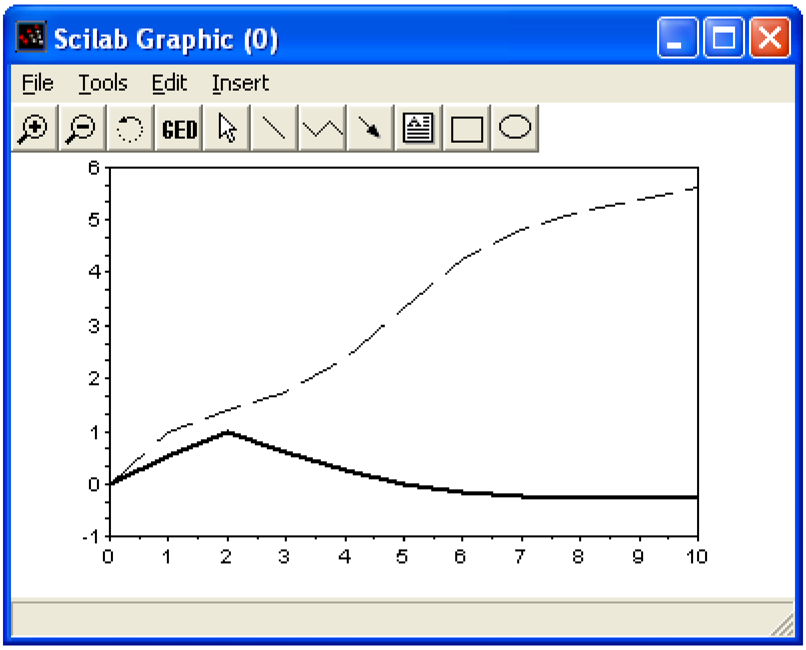


Рис. 6.2. Решение задачи 8.2

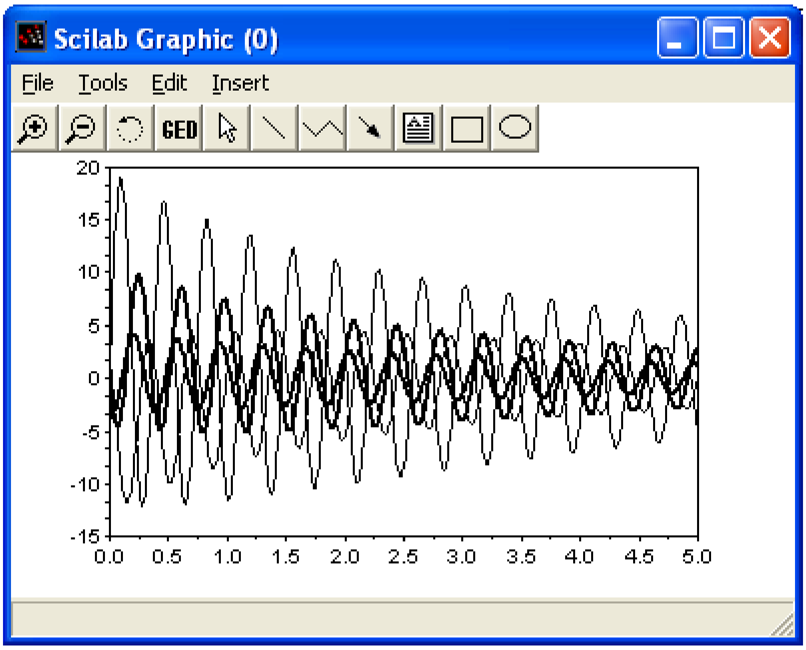


Рис. 6.3. Графическое решение жесткой системы

ЗАДАЧА 6.3. Найти решение задачи Коши для следующей жесткой системы:

$$\frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} 119.46 & 185.38 & 126.88 & 121.03 \\ -10.395 & -10.136 & -3.636 & 8.577 \\ -53.302 & -85.932 & -63.182 & 54.211 \\ -115.58 & -181.75 & -112.8 & -199 \end{pmatrix} X\,;\, X(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы показано в листинге 6.3. Графическое решение показано на рис. 6.3.

```
-->B=[119.46 185.38 126.88 121.03;-10.395 -10.136 -3.636 8.577;
-->-53.302 -85.932 -63.182 -54.211;-115.58 -181.75 -112.8 -199];
-->function dx=syst1(t,x), dx=B*x,endfunction
-->function J=Jac(t,y),J=B,endfunction
-->x0=[1;1;1;1]; t0=0; t=0:0.01:5;
```

```
-->y=ode("stiff",x0,t0,t,syst1,Jacobian);
-->plot(t,y)
```

Листинг 6.3

ЗАДАЧА 6.4. Решить нелинейную жесткую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -7x_1 + 7x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 157x_1 - 1.15x_2 x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 0.96x_1 x_2 - 8.36x_3 \end{cases}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

На рис. 6.4 показано решение системы на интервале [0; 2]. Команды Sciab необходимые для достижения этого решения приведены в листинге 6.4.

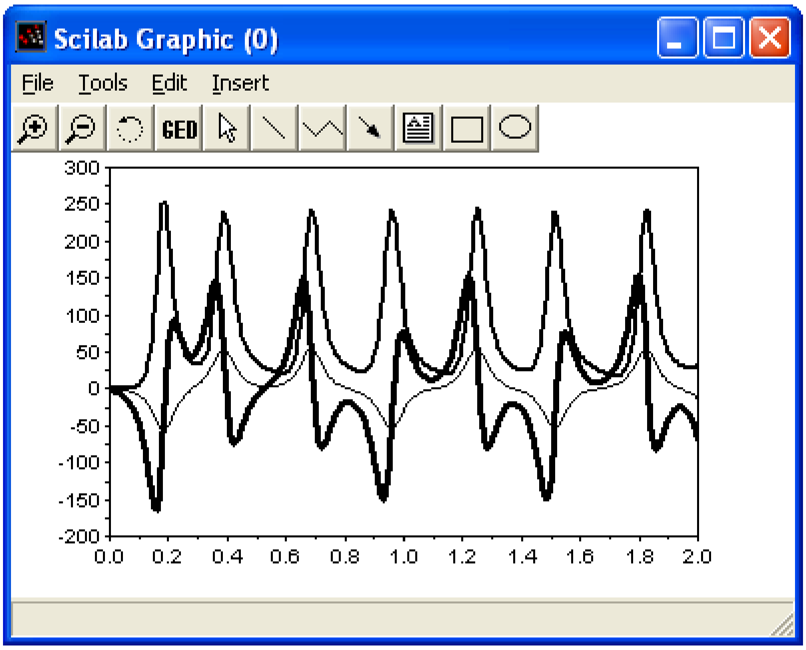


Рис. 6.4. Решение жесткой нелинейной системы

```
//Функция задающая систему ОДУ
function dx=syst2(t,x)
dx=zeros(3,1);
dx(1)=-7*x(1)+7*x(2);
dx(2)=157*x(1)+x(2)-1.15*x(1)*x(3);
dx(3)=0.96*x(1)*x(2)-8.36*x(3);
endfunction
-->>//Решение ОДУ
-->x0=[-1;0;1]; t0=0; t=0:0.01:2;y=ode("stiff",x0,t0,t,syst2);
-->plot(t,y)
```

Листинг 6.4

ЗАДАЧА 6.5. Решить следующую краевую задачу

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 13 = e^{\sin(t)}, \; x(0.25) = -1, \; x'(0.25) = 1.$$

на интервале [0.25; 2].

Преобразуем уравнение в систему, сделав замену $y=\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt}=-4y-13x+e^{\sin(t)}, \frac{dx}{dt}=y, y(0.25)=1, x(0.25)=-1.$$

Составим функцию вычисления системы и решим ее так, как показано в листинге 6.5. График решения приведен на рис. 6. 5.

```
function F=FF(t,x)
F=[-4*x(1)-13*x(2)+exp(t);x(1)];
endfunction
-->//Решение системы дифференциальных уравнений
-->X0=[1;-1];t0=0.25;t=0.25:0.05:2;
-->y=ode("stiff",X0,t0,t,FF);
-->//Вывод графика решения
-->plot(t,y)
```

Листинг 6.5

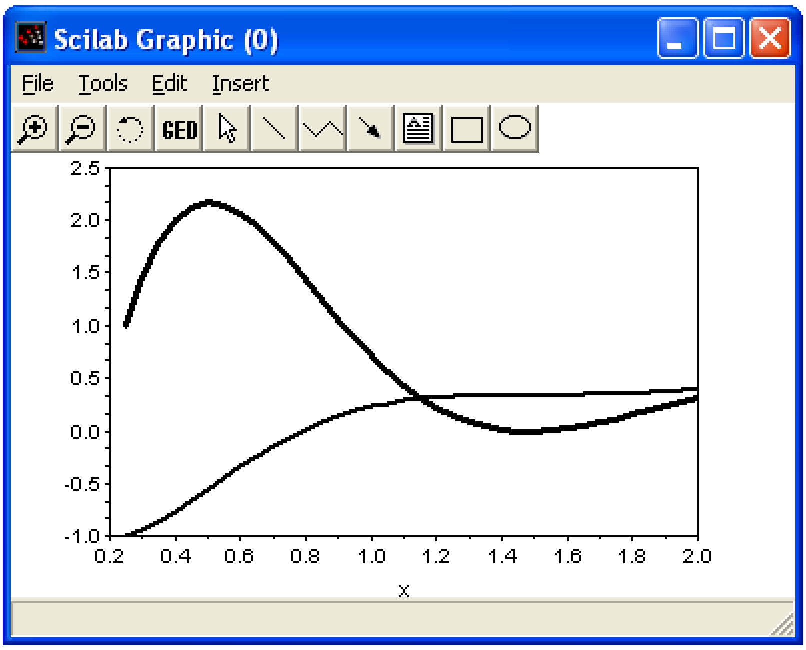


Рис.6.5. Решение задачи 6.5

Часть 6.5. Решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка методом конечных разностей в SciLab

Краевая задача для линейного дифференциального уравнения

$$y'' + p\,(x)\,y' + q\,(x)\,y = f\,(x)\,, \tag{1}$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ — некоторые непрерывные на $[a, b]$ функции, состоит в нахождении его решения $y = y\,(x)$, удовлетворяющего двухточечным линейным краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 y\,(a) + \alpha_2 y'\,(a) = A, \\ \beta_1 y\,(b) + \beta_2 y'\,(b) = B, \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, A, B$ - постоянные и $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0,\ |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0.$

При решении этой задачи методом конечных разностей отрезок $[a, b]$ разбивают на равные части с шагом h, где $h = \frac{b-a}{n}$.

Точки разбиения имеют абсциссы

$$\begin{aligned} &x_k = x_1 + (k-1)\cdot h, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1, \\ &x_1 = a, \qquad x_{n+1} = b. \end{aligned}$$

Значения в точках деления x_k искомой функции и ее производных $y' = y'\,(x)\,,\ y'' = y''\,(x)$ обозначим соответственно через $y_k = y\,(x_k)\,,\ y_k^{'} = y'\,(x_k)\,,\ y_k^{''} = y''\,(x_k)\,.$

Заменяя производные правыми односторонними конечно - разностными отношениями для внутренних точек x_k отрезка $[a, b]$, приближенно будем иметь

$$\begin{aligned} y_k^{'} &= \frac{y_{k+1} - y_k}{h}, \\ y_k^{''} &= \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для концевых точек $x_1 = a$ и $x_{n+1} = b$ полагаем

$$y_1^{'} = \frac{y_2 - y_1}{h} \text{ и } y_{n+1}^{'} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}. \qquad (4)$$

Используя формулы (3), дифференциальное уравнение (3) при $x = x_k \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$ приближенно можно заменить системой линейных уравнений

$$\frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2} + p\left(x_k\right) \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + q\left(x_k\right) y_k = f\left(x_k\right),$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Кроме того, в силу формул (4) краевые условия (2) дополнительно дают еще два уравнения

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 \frac{y_2 - y_1}{h} = A,$$
$$\beta_1 y_{n+1} + \beta_2 \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = B.$$

Таким образом, получена система $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$, представляющими собой значения искомой функции $y = y\left(x\right)$,

$$\begin{cases} \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2} + p\left(x_k\right) \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + q\left(x_k\right) y_k = f\left(x_k\right), \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 \frac{y_2 - y_1}{h} = A, \\ \beta_1 y_{n+1} + \beta_2 \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = B. \end{cases}$$

Обозначим $p\left(x_k\right) = p_k,\ q\left(x_k\right) = q_k,\ f\left(x_k\right) = f_k$.

После алгебраических преобразований система примет вид

$$\begin{cases} \left(h^2 q_k - h p_k + 1\right) y_k + \left(h p_k - 2\right) y_{k+1} + y_{k+2} = h^2 f_k, \\ \left(\alpha_1 h - \alpha_2\right) y_1 + \alpha_2 y_2 = hA, \\ -\beta_2 y_n + \left(\beta_1 h + \beta_2\right) y_{n+1} = hB. \end{cases} \qquad (5)$$

Решив систему, получим таблицу значений искомой функции $y\,(x)$.

Пример. Найти решение уравнения $y'' + e^x y' + 2xy = x^3$ на $[0, 1, 1, 3]$ $(n = 4)$ с начальными условиями

$$
\begin{aligned}
&2y(0,1) - 2,5y'(0,1) = 0,\\
&3y(1,3) - 3,4y'(1,3) = 5.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{array}{lll}
p\,(x) = e^x, & q\,(x) = 2x, & f\,(x) = x^3,\\
\alpha_1 = 2, & \alpha_2 = -2,5, & A = 0,\\
\beta_1 = 3, & \beta_2 = -3,4, & B = 5.
\end{array}
$$

Построим систему (5) линейных алгебраических уравнений, где неизвестными являются $y_1, \ldots, y_5$.

Коэффициенты системы рассчитываются по формулам

$$
\begin{aligned}
&a_{k,k} = h^2 q_k - h p_k + 1,\\
&a_{k,k+1} = h p_k - 2,\\
&a_{k,k+2} = 1,\\
&k = 1, 2, \ldots, n-1.
\end{aligned}
$$

Для последних двух уравнений (n -го и $(n+1)$-го) используются начальные условия

$$
\begin{aligned}
&a_{n,1} = \alpha_1 h - \alpha_2,\\
&a_{n,2} = \alpha_2,\\
&a_{n+1,n} = -\beta_2,\\
&a_{n+1,n+1} = \beta_1 h + \beta_{2.}.
\end{aligned}
$$

Матрица B свободных членов формируется по формулам

$$
\begin{aligned}
&b_k = h^2 f_k,\\
&b_n = hA,\\
&b_{n+1} = hB,\\
&k = 1, \ldots, n-1.\\
&h = \frac{1,3-0,1}{4} = 0,3.
\end{aligned}
$$

Остальные коэффициенты системы равны нулю.

Решая полученную систему, найдем приближенное решение дифференциального уравнения.

Реализовать решение в пакете Scilab можно следующим образом

```
clear;
//Define differential equation
deff('[y]=p(x)','y=exp(x)')
deff('[y]=q(x)','y=2*x')
deff('[y]=f(x)','y=x^3')
alpha1=2; alpha2=-2.5; Ac=0;
beta1=3; beta2=-3.4; Bc=5;
a1=0.1; b1=1.3;
//Grid
n=4;
for i=1:n+1
  A(i,i)=0;
  B(i)=0;
end
h=(b1-a1)/n;
for k=1:n+1
  x(k)=a1+(k-1)*h;
end
//System coefficients
for k=1:n-1
  A(k,k)=h^2*q(x(k))-h*p(x(k))+1;
  A(k,k+1)=h*p(x(k))-2;
  A(k,k+2)=1;
  B(k)=h^2*f(x(k));
end
A(n,1)=alpha1*h-alpha2;
A(n,2)=alpha2;
A(n+1,n)=-beta2;
```

```
A(n+1,n+1)=beta1*h+beta2;
B(n)=h*Ac;
B(n+1)=h*Bc;
//Solve system
y=linsolve(A,-B)
```

Результат:

```
--> y  =

    0.9387045
    1.1639936
    1.2977811
    1.2936448
    1.159357
```

Задание 1 выполняется только в SciLab. Задание 2 ручной счет, в Excel и SciLab.

.

Варианты

Задание №1

№	$f(x,y)$	a	b	c	h
1	$xy^2 - x^2 + 1$	4	5	0,7	0,1
2	$\sqrt{5x^2+3} - 3y^2$	2,6	4,6	1,8	0,2
3	$cos\left(4,5x - y^3\right) - 1,3$	-1	1	0,2	0,2
4	$2x^2 + xy + 3y^2$	2	3	1,2	0,1
5	$e^{-\left(2y^2+3\right)} + 2x$	0	0,5	0,3	0,05
6	$cos\left(2,5y + x\right)^2 + 2,4$	1	2	0,9	0,1
7	$5,1x - 2y^2 + 0,8$	0,6	2,6	3,4	0,2
8	$\frac{1}{2+3x^3y} + 2y$	1,5	2	2,1	0,05
9	$3x + 2cos\frac{y}{\sqrt{15}}$	2,1	3,1	2,5	0,1
10	$\frac{4xy}{x+2} - 6,4$	3	5	1,7	0,2
11	$5x + 3cos\left(y + 2,6\right)$	1	3	1,5	0,2
12	$3x + 5y^2 + 3$	1	2	0,9	0,1
13	$5 - 2sin\left(x + 2y\right)^2$	2	3	2,3	0,1
14	$\frac{4}{x+3} + x + 5$	0,1	0,5	1,25	0,05
15	$7x + 2cos\left(\frac{y}{3}\right)$	-2	-1	3	0,1

Задание №2

Таблица 4

Вариант	Краевая задача	Вариант	Краевая задача
1	2	3	4
1	$Y'' + Y' + Y = 1$ $1,2Y(0,1) - 0,3Y'(0,1) = 1,4$ $1,3Y'(2,2) = -2,2$	16	$Y'' + \left(X^2 - 2,2\right)Y' + 1,37XY = X$ $1,22Y(-1) + 2,12Y'(-1) = 0$ $Y(3) = 1,23$
2	$Y'' + Y' - 1,3Y = X$ $2,5Y'(1,2) = 1,5$ $-1,25Y(3,1) = 1$	17	$Y'' + \left(X^2 + 2,4\right)Y' + 2XY = X - 1,37$ $1,3Y(-2,5) + 2,3Y'(-2,5) = 0,3$ $1,7Y(2,5) - 1,7Y'(2,5) = 2$
3	$Y'' - 0,4Y' + 1,1Y = X - 1,2$ $1,4Y(-1,1) + 1,25Y'(-1,1) = 1$ $-2,3Y(1,1) + 0,1Y'(1,1) = 3$	18	$Y'' - \left(1,2X^2\right)Y' + 0,17\left(X^2 - 1,3\right)Y = X + 0,4$ $2,04Y(1,1) - 1,06Y'(1,1) = 0$ $1,7(2,2) - 2,13Y'(2,2) = 1,2$

1	2	3	4
4	$Y'' - 2,4Y' + 2,28Y = X^x - 1,2$ $0,1Y(0,8) - 1,1Y'(0,8) = 2$ $-2,1Y(4,2) + 2,1Y'(4,2) = 0$	19	$Y'' + (0,2 + X)Y' - XY = X - 2,47$ $1,56Y(1) - 0,17Y'(1) = 2,3$ $2,18Y(3,3) + 0,03Y'(3,3) = -0,1$
5	$Y'' + 2,3Y' + 0,45Y = 1,3X$ $2,01Y(0,1) + 0,2Y'(0,1) = 2,2$ $1,3Y(1,7) - 3,4Y'(1,7) = 0$	20	$Y'' - 2Y' + (X - 3,7)Y = X^2$ $2,1Y(-2,4) + 0,07Y'(-2,4) = 0$ $0,03Y(2,5) - 2,1Y'(2,5) = 1$
6	$Y'' - 0,15Y' - 1,5Y = 2,5X^2$ $2,75Y(0) - Y'(0) = 1,4$ $-0,12Y(3) + 1,4Y'(3) = 0,3$	21	$Y'' + XY' + (X + 0,4)Y = X^2$ $2,01Y(-5) + 1,03Y'(-5) = 0,11$ $3,01Y(0) + 1,05Y'(0) = 1,1$
7	$Y'' + 0,8Y' + 3,12Y = 1,6X^2$ $0,2Y(-1,25) + Y'(-1,25) = 0$ $-2,12Y'(2,5) = 0,9$	22	$Y'' + XY' + (2,2X - 1,08)Y = 2,7X + 0,2$ $0,01Y(-1,2) + 0,02Y'(-1,2) = 0,3$ $0,04Y(2,2) + 0,05Y'(2,2) = 0,6$
8	$Y'' + XY' + 1,25Y = 0,13$ $1,18Y(-2,4) - 0,2Y'(-2,4) = 1$ $1,24Y'(2,3) = 1$	23	$Y'' + X^3Y' + (1 - X)Y = 2,76$ $Y(0,1) = 2$ $-Y'(0,9) = 3$
9	$Y'' + 1,24XY' - 2,3Y = 5,67$ $-2,1Y(0) = 1,6$ $2,8Y'(1,5) = 1$	24	$Y'' + 1,2X^3Y' + (2,72 - X)Y = 0,12X$ $0,02Y(0) + 1,24Y'(0) = 2,31$ $-2,1Y(1,12) = 0,08$
10	$Y'' + (X + 1,27)Y' + 0,24Y = -2,1$ $Y(-2,4) - 1,7Y'(-2,4) = 1$ $-Y(4,8) = 0,36$	25	$Y'' - 2,4X^3Y' + 0,81XY = -3,37X$ $0,1Y(0,5) + 0,5Y'(0,5) = 0,9$ $0,98Y(1,55) + 0,37Y(1,55) = 0$
11	$Y'' + X^2Y' + XY = -2,42$ $1,12Y(1,2) + 0,12Y'(1,2) = 0$ $-0,03Y(5,6) + 0,13Y'(5,6) = 1$	26	$Y'' + XY' - (2,1X + 1,4)Y = 2,45 - X^2$ $1,2Y(-2) + 1,21Y'(-2) = 0,1$ $-1,03Y(3) = 1$
12	$Y'' + X^3Y' + XY = -2,42$ $0,17Y(0) - 2,21Y'(0) = 0$ $-2,1Y'(2,24) = 1$	27	$Y'' + 3XY' + 2,71X^3Y = 2,89X + 1$ $-2,3(-1,2) = 1,1$ $1,8Y(1,2) - 0,75Y'(1,2) = 0,66$

1	2	3	4
13	$Y'' + 1,3X^3Y' + 0,7XY = 1,32$ $1,2Y(-0,2) - 2,63Y'(-0,2) = 0$ $3,25Y(2,5) + 0,11Y'(2,5) = 0$	28	$Y'' + X^3Y' + 2,1XY = -3,81X$ $1,2Y'(1,1) = 1$ $-2,1Y(2,3) = 3,1$
14	$Y'' + 0,7X^2Y' + (X - 1)Y = 1,32$ $Y(0) = 2$ $-2Y'(5,25) = 1$	29	$Y'' + (X^3 - 1,2)Y' + (X^3 + 2)Y = X^3 + 1,3$ $1,1Y(-2,4) = 1,2$ $-1,2Y'(2,4) = 0,89$
15	$Y'' + 0,02Y' + 0,24Y = 2,3X - 0,18$ $0,1Y(0,1) = -1$ $-1,4Y'(2,4) = 1$	30	$Y'' = -0,107X^3 - 1,2X^2 + 1,144$ $Y(0) = 0$ $Y(6) = 0$

Вопросы к защите лабораторной работы

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

2. Метод Эйлера.

3. Метод Эйлера-Коши.

4. Метод Рунге-Кутты.

5. Решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка методом конечных разностей.