Лабораторная работа №2
Тема: **Решение нелинейных уравнений**.

1. Цель работы

Использование методов решения нелинейных уравнений для решения конкретных производственных задач.

2. Учебные вопросы, подлежащие рассмотрению:

– Отделение корней уравнения.

– Решение нелинейных уравнений:

✓ метод половинного деления,

✓ метод простых итераций,

✓ метод Ньютона.

Общие сведения о решении нелинейного уравнения

Как правило, нелинейное уравнения общего вида *f(x)=0* невозможно решить аналитически. Для практических задач достаточно найти приближенное значение *x*, в определенном смысле близкое к точному решению уравнения $x_{точн}$.

В большинстве случаев поиск приближенного решения включает два этапа. На первом этапе *отделяют* корни, т. е. находят такие отрезки, внутри которых находится строго один корень. На втором этапе *уточняют* корень на одном из таких отрезков, т. е. находят его значение с требуемой точностью.

Достигнутая точность может оцениваться либо «по функции» (в найденной точке *x*, функция достаточно близка к 0, т. е. выполняется условие $|f(x)| \le ef$, где *ef* требуемая точность по оси ординат), либо «по аргументу» (найден достаточно маленький отрезок *[a,b]*, внутри которого находится корень, т. е. $|b–a| \le ex$, где *ex* требуемая точность по оси абсцисс).

Графическое отделение корней.

Для того чтобы провести графическое отделение корней, надо построить график функции $y = F(x)$ и визуально определить интервал, на котором находится ровно один корень уравнения.

Уточнение корня методом половинного деления.

Основная идея нахождения приближенного решения заключается в сокращении первоначального интервала, определенного при графическом отделении, до интервала длиной 2 ε. После того, как удалось сократить интервал до заданной величины, можно определить $\tilde{x} = (a + b) / 2$. В этом случае условие $|x^* - \tilde{x}| \le \varepsilon$ выполнено.

В методе половинного деления сокращение интервала происходит делением отрезка $[a, b]$ пополам и выбора той из половин, которой принадлежит искомый корень уравнения.

Итак, алгоритм численного решения уравнения (1) методом половинного деления заключается в выполнении следующих шагов:

1. определить начальный отрезок $[a, b]$;
2. найти точку с – середину отрезка $[a, b]$, $c = (a + b) / 2$;

3. проверить, какому из отрезков $[a, c]$ или $[c, b]$ принадлежит корень. Легко

видеть, что проверка выполняется так:

если $f(a)* f(c)<,0$, то корень принадлежит отрезка $[a, c]$ и в дальнейшем надо

положить $b=c$, в противном случае корень принадлежит отрезку $[c, b]$ и следует положить $a=c$;

4. если длина отрезка $[a, b]$ больше 2 ε, то перейти к пункту 2;

5. закончить вычисления, положив $\tilde{x}=(a+b) / 2$.

Теория электронных таблиц

Для реализации данного алгоритма необходимо воспользоваться логическими функциями. Логические функции предназначены для проверки выполнения условия или для проверки нескольких условий. В отличие от математических функций, при проведении вычислений с логическими функциями мы оперируем понятиями ИСТИНА и ЛОЖЬ.

В общем виде функция, позволяющая учесть при вычислениях условия выглядит так:

ЕСЛИ(*логическое выражение; значение1; значение2*)

логическое выражение – это выражение, принимающее значения ИСТИНА или ЛОЖЬ. Например, С15=1 – это логическое выражение. Если значение в ячейке С15 равно 1, то выражение принимает значение ИСТИНА, иначе – ЛОЖЬ.

Значение1 – это значение, которое заносится в ячейку, если *логическое выражение* равно ИСТИНА; *значение2* – это значение, которое заносится в ячейку, если *логическое выражение* равно ЛОЖЬ.

До семи функций ЕСЛИ могут быть вложены друг в друга в качестве значений аргументов *значение1* и *значение2* для конструирования более сложных проверок. Если любой из аргументов функции ЕСЛИ является массивом, все элементы массива вычисляются при выполнении функции ЕСЛИ.

Microsoft Excel предлагает дополнительные функции, которые можно применять для анализа данных с использованием условий. Например, для вычисления числа появлений текстовой строки или числа в диапазоне ячеек используется функция СЧЁТЕСЛИ. Для вычисления суммы значений, попадающих в интервал, заданный текстовой строкой или числами, используется функция СУММАЕСЛИ.

Для записи логических выражений (условий) служат стандартные операции

сравнения: = (равно), > (больше), < (меньше), >= (больше или равно), <= (меньше или равно), <> (не равно). Если требуется записать более сложные условия, включающие в себя несколько простых условий, то приходится применять такие логические функции, как И, ИЛИ, НЕ.

И(*логическое выражение1; логическое выражение2*; ...)

Функция И будет иметь значение ИСТИНА, если все логические выражения, перечисленные в скобках, истинны. В противном случае результатом функции И будет значение ЛОЖЬ. Всего можно указать до 30 различных условий.

ИЛИ(*логическое выражение1; логическое выражение2*; ...)

Функция ИЛИ возвращает значение ИСТИНА, если хотя бы один из аргументов имеет значение ИСТИНА и возвращает ЛОЖЬ, если все аргументы имеют значение ЛОЖЬ.

НЕ(логическое выражение)

Если логическое выражение имеет значение ЛОЖЬ, то функция НЕ возвращает значение ИСТИНА; если *логическое выражение* имеет значение ИСТИНА, то функция НЕ возвращает значение ЛОЖЬ.

3. Порядок выполнения работы

Часть 1. Решение нелинейных уравнений в Excel.

Задание 1.

Вычислить наименьший положительный корень заданного уравнения с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Работу провести в три этапа:

1) Провести графическое отделение корней уравнения.

2) Сузить отрезок, полученный графическим способом до отрезка длиной 0.1.

3) Вычислить приближенное решение методом половинного деления.

По итогам выполнения заданий представить корень уравнения, вычисленный с указанной точностью.

Номер варианта соответствует порядковому номеру в списке.

Задание 2.

Найти решение уравнения с точностью $\varepsilon=10^{-4}$, используя метод простой итерации и метод Ньютона.

Номер варианта соответствует порядковому номеру в списке.

Исполнение: Освоить реализацию итерационных процессов с использованием логических функций в MS Excel.

Оценка: Использование инструментальных пакетов для решения трансцендентных уравнений.

Методика выполнения

1.1 Отделение корней

Отделение корней может производиться сочетанием графического и аналитического исследования функции. Такое исследование опирается на теорему Вейерштрасса, в соответствии с которой для непрерывной на отрезке *[a,b]* функции $f(x)$ и любого числа y, отвечающего условию $f(a)\le y\le f(b)$, существует на этом отрезке точка x, в которой функция равна y. Следовательно, для непрерывной функции достаточно найти отрезок, на концах которого функция имеет разные знаки, и можно быть уверенным, что на этом отрезке есть корень уравнения $f(x)=0$.

Для ряда методов уточнения желательно, чтобы найденный на первом этапе отрезок содержал только один корень уравнения. Это условие выполняется, если функция на отрезке монотонна. Монотонность, можно проверить либо по графику функции, либо по знаку производной.

<u>Пример</u> Найти с точностью до целых <u>все</u> корни нелинейного уравнения:

$y(x)=x^3-10x+7=0$

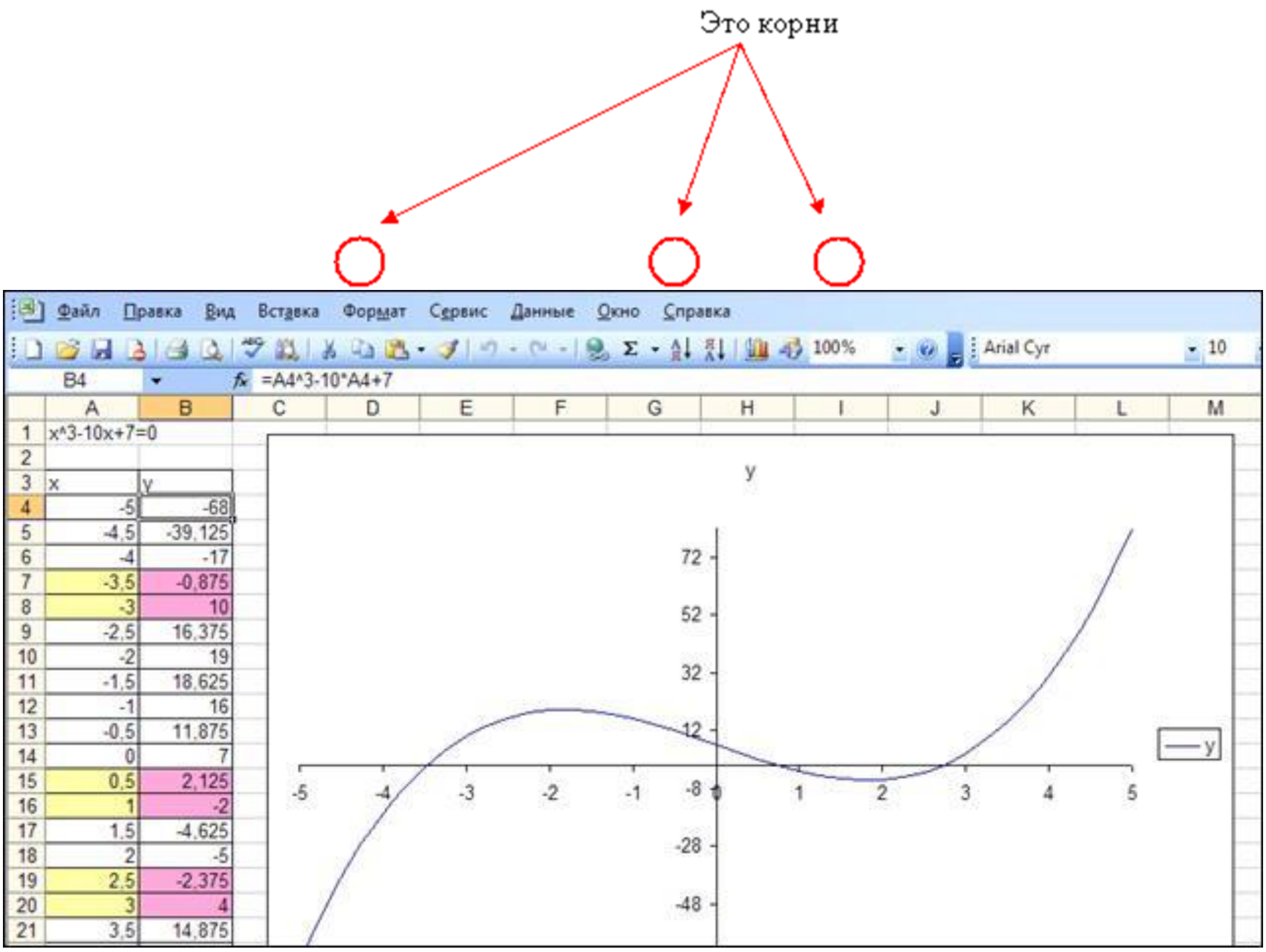
а) построив таблицу и

б) построив график.

<u>Решение</u>

Создадим в Excel таблицу, содержащую аргументы и значения функции и по ней построим <u>*точечную диаграмму*</u>. На рисунке 1 приведен снимок решения.

На графике видно, что уравнение имеет три корня, принадлежащие отрезкам [-4, -3], [0, 1] и [2, 3]. Эти отрезки можно выявить и наблюдая за сменой знаков функции в таблице. По построенному графику можно сделать вывод, что на указанных отрезках функция *f(x)* монотонна и, следовательно, на каждом из них содержится только по одному корню.



x	y
-5	-68
-4,5	-39,125
-4	-17
-3,5	-0,875
-3	10
-2,5	16,375
-2	19
-1,5	18,625
-1	16
-0,5	11,875
0	7
0,5	2,125
1	-2
1,5	-4,625
2	-5
2,5	-2,375
3	4
3,5	14,875

Рисунок 1 – Таблица и график для отделения корней нелинейного уравнения

1.2 Метод деления отрезка пополам

1.2 Метод деления отрезка пополам

В этом методе на каждом шаге отрезок делится на две равные части. Затем сравнивают знаки функции на концах каждой из двух половинок (например, по знаку произведения значений функций на концах), определяют ту из них, в которой содержится решение (знаки функции на концах должны быть разные), и. сужают отрезок, перенося в найденную точку его границу (a или b). Условием окончания служит малость отрезка, где содержится корень («точность по x»), либо близость к 0 значения функции в средине отрезка («точность по у»). Решением уравнения считают середину отрезка, найденного на последнем шаге.

Пример. Построить таблицу для уточнения корня уравнения $x^3 -10x+7=0$ на отрезке $[-4, -3]$ методом деления отрезка пополам. Определить сколько шагов надо сделать методом деления отрезка пополам и какая при этом достигается точность по x, для достижения точности по y, равной 0,01.

Решение

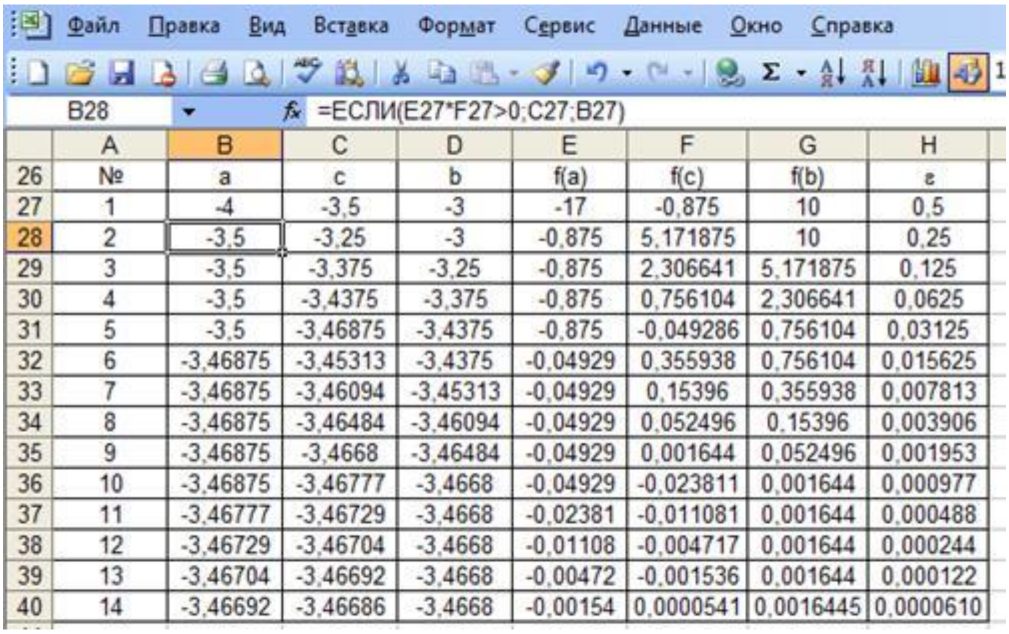
Для решения можно использовать табличный процессор Excel, позволяющий автоматически продолжать строки. На первом шаге заносим в таблицу значения левого и правого концов выбранного начального отрезка и вычисляем значение середины отрезка $c=(a+b)/2$, а затем вводим формулу для вычисления функции в точке a ($f(a)$) и растягиваем (копируем) её для вычисления $f(c)$ и $f(b)$. В последнем столбца вычисляем выражение $(b-a)/2$, характеризующего степень точности вычислений. Все набранные формулы можно скопировать во вторую строку таблицы.

На втором шаге нужно автоматизировать процесс поиска той половины отрезка, где содержится корень. Для этого испльзуется логическая функция ЕСЛИ (*Меню*: Вставка→Функция→Логические). Для нового левого края отрезка мы проверяем истинность условия $f(a)*f(c)>0$, если оно верно, то мы в качестве нового значения левого конца отрезка берем число c (т. к. это условие показывает, что корня на отрезке $[a, c]$ нет), иначе оставляем значение a. Аналогично, для нового правого края отрезка мы проверяем истинность условия $f(c)*f(b)>0$, если оно верно, то мы в качестве нового значения правого конца отрезка берем число c (т. к. это условие показывает, что корня на отрезке $[c, b]$ нет), иначе оставляем значение b.

Вторую строку таблицы можно продолжить (скопировать) на необходимое число последующих строк.

Итерационный процесс завершается, когда очередное значение в последнем столбце становится меньшим, чем заданный показатель точности ε. При этом, значение середины отрезка в последнем приближении, принимается в качестве приближенного значения искомого корня нелинейного уравнения. На рисунке 6 приведен снимок решения.

Итак, одним из трех корней нелинейного уравнения $x^3 - 10x + 7=0$, найденным с точностью e=0,0001, является x= - 3,46686. Как мы видим, он действительно принадлежит отрезку [-4; -3].



	A	B	C	D	E	F	G	H
26	№	a	c	b	f(a)	f(c)	f(b)	ε
27	1	-4	-3,5	-3	-17	-0,875	10	0,5
28	2	-3,5	-3,25	-3	-0,875	5,171875	10	0,25
29	3	-3,5	-3,375	-3,25	-0,875	2,306641	5,171875	0,125
30	4	-3,5	-3,4375	-3,375	-0,875	0,756104	2,306641	0,0625
31	5	-3,5	-3,46875	-3,4375	-0,875	-0,049286	0,756104	0,03125
32	6	-3,46875	-3,45313	-3,4375	-0,04929	0,355938	0,756104	0,015625
33	7	-3,46875	-3,46094	-3,45313	-0,04929	0,15396	0,355938	0,007813
34	8	-3,46875	-3,46484	-3,46094	-0,04929	0,052496	0,15396	0,003906
35	9	-3,46875	-3,4668	-3,46484	-0,04929	0,001644	0,052496	0,001953
36	10	-3,46875	-3,46777	-3,4668	-0,04929	-0,023811	0,001644	0,000977
37	11	-3,46777	-3,46729	-3,4668	-0,02381	-0,011081	0,001644	0,000488
38	12	-3,46729	-3,46704	-3,4668	-0,01108	-0,004717	0,001644	0,000244
39	13	-3,46704	-3,46692	-3,4668	-0,00472	-0,001536	0,001644	0,000122
40	14	-3,46692	-3,46686	-3,4668	-0,00154	0,0000541	0,0016445	0,0000610

Рисунок 2 – Уточнение корня методом деления отрезка пополам в Excel

Уточнение корней методом касательных (Ньютона)

Обширную группу методов уточнения корня представляют *итерационные методы* - методы последовательных приближений. Здесь в отличие от метода дихотомии задается не начальный интервал местонахождения корня, а его начальное приближение.

Наиболее популярным из итерационных методов является *метод Ньютона (метод касательных)*.

Этот метод обеспечивает сходящийся процесс приближений лишь при выполнении некоторых условий (например при непрерывности и знакопостоянстве первой и второй производной функции в окрестности корня) и при их нарушении либо дает расходящийся процесс, либо приводит к другому корню.

Очевидно, что для функций, производная от которых в окрестности корня близка к нулю, использовать метод Ньютона не рекомендуется. Расчетная формула:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Пример 1.3. Решить уравнение $x^3 + x - 1 = 0$ на отрезке $[0; 1]$ методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ с помощью программы Excel.

Порядок решения (рис. 1.8).

1) Ввести в ячейки **A1:D1** заголовки столбцов.
2) В ячейку **A2** – значение начального приближения **1**
3) В ячейку **B3** – формулу функции **=A2^3+A2-1**
4) В ячейку **C3** – формулу производной функции **=3*A2^2+1**
5) В ячейку **A3** – формулу первого приближения **=A2-B3/C3**
6) В ячейку **D3** – погрешность **=ABS(A3-A2)**
7) Выделить ячейки **A3:D3** и скопировать формулы в соседние ячейки расположенных ниже строк **A4:D4**, **A5:D5**, и т.д. при помощи маркера заполнения. Каждая новая строка содержит результаты очередного приближения.
8) В столбце **A** найти значение корня, соответствующее заданной точности.

Приближенное решение данного уравнения $x = 0{,}68233 \approx 0{,}682$ содержится в ячейке **A6** (погрешность $0{,}00001 < 0{,}001$ в ячейке **D6**).

	A	B	C	D
1	x	F(x)	F'(x)	погрешность
2	1,00000			
3	0,75000	1,00000	4,00000	0,25000
4	0,68605	0,17188	2,68750	0,06395
5	0,68234	0,00894	2,41198	0,00371
6	0,68233	0,00003	2,39676	0,00001

Рисунок 3 – Уточнение корня методом Ньютона в Excel

Уточнение корней методом простой итерации

Другим представителем итерационных методов является *метод простой итерации*.

Здесь уравнение $f(x)=0$ заменяется равносильным уравнением $\boldsymbol{x=\varphi(x)}$ и строится последовательность значений. Если функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на некотором интервале, причем $|\varphi'(x)|<1$, то эта последовательность сходится к корню уравнения $x=\varphi(x)$ на этом интервале.

Если $f'(x)>0$, то подбор равносильного уравнения можно свести к замене $x=x-l*f(x)$, т.е. к выбору $\varphi(x)=x-l*f(x)$, где $l>0$ подбирается так, чтобы в окрестности корня $0<\varphi'(x)=1-l*f'(x)$. Отсюда может быть построен итерационный процесс

$$X_{n+1}=X_n-\frac{f(X_n)}{M},\quad n=0,1,2,\ldots$$

где $M=max\,|f'(x)|$ (в случае $f'(x)<0$ возьмите функцию $f(x)$ с противоположным знаком).

Возьмем для примера уравнение $x^3+x-1000=0$. Очевидно, что корень данного уравнения несколько меньше 10. Если переписать это уравнение в виде $x=1000-x^3$ и начать итерационный процесс при $x_0=10$, то из первых же приближений очевидна его расходимость. Если же учесть

$f'(x)=3x^2+1>0$ и принять за приближенное значение максимума $f'(x)$ $M=300$, то можно построить сходящийся итерационный процесс на основе представления

$$X=X-\frac{X^3+X-1000}{300}.$$

Пример 1.4. Решить уравнение $x^3 + x - 1 = 0$ на отрезке $[0; 1]$ методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ с помощью программы Excel.

Порядок решения (рис. 1.11).

1) Ввести в ячейки **A1:D1** заголовки столбцов.
2) В ячейку **A2** – значение начального приближения **1**
3) В ячейку **B3** – формулу функции **=A2^3+A2-1**
4) В ячейку **C2** – значение ***M*** **5**
5) В ячейку **A3** – формулу первого приближения **=A2-B3/C2**
6) В ячейку **D3** – погрешность **=ABS(A3-A2)**
7) Выделить ячейки **A3:D3** и скопировать формулы в соседние ячейки расположенных ниже строк **A4:D4**, **A5:D5**, и т.д. при помощи маркера заполнения. Каждая новая строка содержит результаты очередного приближения.
8) В столбце **A** найти значение корня, соответствующее заданной точности.

Приближенное решение данного уравнения $x = 0{,}68427 \approx 0{,}68$ содержится в ячейке **A9** (погрешность $0{,}00179463 < 0{,}01$ в ячейке **D9**).

	A	B	C	D
1	x	f(x)	M	погрешность
2	1		5	
3	0,8	1		0,2
4	0,7376	0,312		0,0624
5	0,70982	0,13889		0,02777881
6	0,69633	0,06746		0,01349237
7	0,68954	0,03396		0,00679209
8	0,68606	0,01738		0,0034769
9	0,68427	0,00897		0,00179463

Рисунок 4 – Уточнение корня методом простой итерации в Excel

Часть 2. Решение нелинейных уравнений в SciLab

Пример. Найти корни уравнения $\frac{e^x}{5} - 2\cdot(x-1)^2 = 0$

Этап 1. Отделение корней. С помощью конструкции function ... endfunction определяется вид функции, задается вектор диапазона значений аргумента x, вычисляется вектор значений функции y и строится график функции (рис. 5).

```
-->function [y]=F(x)
-->y=exp(x)/5-2*(x-1).^2
-->endfunction

-->x=[-1:0.01:6];

-->y=F(x);

-->plot(x,y)
```

Рис. 5. Команды для задания вида функции и построения графика функции

Этап 2. По графику функции (рис. 6) определяются начальные приближения корней (0, 2, 5). Уточнить корни можно: либо последовательно вызывая функцию fsolve с различными начальными приближениями (рис. 7); либо задав вектор начальных приближений, тогда fsolve вызывается один раз (рис. 8).

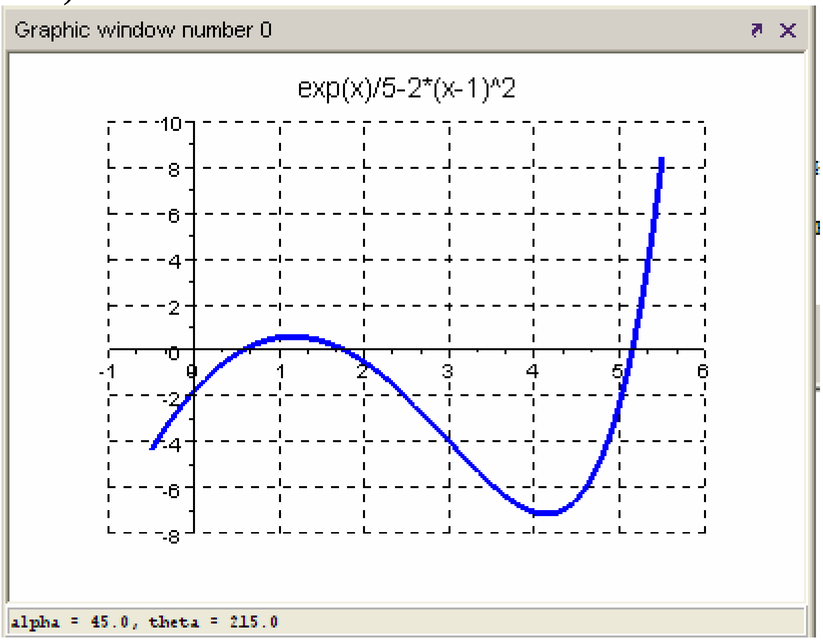


Рис. 6. Графическое решение трансцендентного уравнения

```
-->X(1)=fsolve(0,F); X(2)=fsolve(2,F); X(3)=fsolve(5,F);

-->X
 X  =

    0.5778406
    1.7638701
    5.1476865
```

Рис. 7. Последовательный вызов fsolve с различным начальным приближением

```
-->X=fsolve([0;2;5],F)
 X  =

    0.5778406
    1.7638701
    5.1476865
```

Рис. 8. Вызов fsolve при задании начальных приближений в виде вектора

На рис. 8 приведен файл-сценарий нахождения корней трансцендентного уравнения.

```
//Задание вида функции
function [y]=F(x)
y=exp(x)/5-2*(x-1).^2
endfunction
//
//Задание значений аргумента
x=[-0.5:0.01:5.5];
//
//Вычисление значений функции
y=F(x);
//
//Изменение параметров графика
a=gca();
a.x_location="origin";
a.y_location="origin";
xgrid();
xtitle('exp(x)/5-2*(x-1)^2')
//
//Построение графика функции
plot(x,y)
//
//Нахождение трех корней транцендентного
//уравнения при их заданных начальных
//приближениях 0 2 5
fsolve([0;2;5],F)
```

Рис. 8. Файл-сценарий построения графика трансцендентного уравнения и нахождения его корней

Контрольные вопросы.

1) Какие точные методы решения нелинейных уравнений вы знаете?
2) Для чего нужен первый этап - отделение корней?
3) Сформулируйте условия существования решения уравнения. Являются ли эти требования необходимыми и достаточными?
4) Что можно сказать о точности методов половинного деления, хорд, касательных и комбинированного? По каким параметрам их еще можно сравнить?

Задание на самостоятельную работа.

Номер варианта выбирается по номеру в журнале.

Варианты функции $y(x)$ к Заданию 1

Таблица 1

№ варианта	Функция $y(x)$
0	$sin^2 3x - lg(x+2)$
1	$sin^2\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 - \frac{x}{5}$
2	$0.2\,x - cos^2 3x$
3	$\log_2(x+4) - \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x+6}{3}\right)^3 + 5\right)$
4	$\frac{sin(x-8)^2}{3} - \frac{x-2}{5}$
5	$\frac{cos(x-8)^2}{3} + ln(x+3) - 1.5$
6	$\frac{cos(x-8)^2 - sin(x+1)}{2} - 0.2$
7	$\frac{1}{2} sin \frac{(x+5)^2}{2} + \left(\frac{x-2}{4}\right)^2$
8	$sin\,(x^2+3) + \frac{sin^2 x}{2}$
9	$\frac{2\,sin\,8x}{3} + \frac{3\,cos\,x}{4}$
10	$cos\,5x\;\; ln\frac{x+3}{2}$
11	$\frac{3}{x+3}\, sin\left(\frac{2x+6}{3}\right)^2$
12	$cos\frac{(x+2)^2}{2}\;\; ln\left(\frac{x+3}{2}\right)$
13	$\frac{cos\left((x-5)^2+1\right)}{2}\; ln(x+2.5)$
14	$\frac{\sin(x-1)^2}{e^{x/4}} - 0.1$
15	$\frac{1}{2} sin\frac{(x+3)^2}{2}\; ln\,(x+2)$

№ варианта	Функция $y(x)$
16	$\frac{1}{2}\sin\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{\ln(x+2)}{2}-1$
17	$\frac{\sin\left(2(x-2)^2\right)}{e^{x/4}}-0.1x$
18	$\frac{\sin 10x}{e^{\frac{(x-2)^2}{5}}}+0.5$
19	$\frac{\sin(10x-20)}{e^{\frac{(x-2)^2}{5}}}+0.25x$
20	$\frac{\cos(5x+10)}{\ln(4x+8)}$
21	$\frac{2\cos 5x}{3}-\frac{x}{6}+\frac{1}{3}$
22	$2\sqrt{2\cos^2(\frac{x}{2}+2)^2+2}-\frac{x}{5}-3$
23	$\frac{\sin(10x-20)}{e^{\frac{(x-2)^2}{5}}}-0.25x$
24	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{3}\right)-\sin^2(3x)$
25	$\sin\left(\frac{x}{3}\right)-\cos^2(3x)$