Corso di Algebra Lineare - Pierluigi Möseneder Frajria - 2024/25

Jusef Azzolina

Introduzione

L'algebra lineare è un argomento la cui complessità a che fare con la sua astrattezza e l'interconnessione tra gli argomenti: la comprensione profonda di certi argomenti, alcuni dei quali verranno affrontati relativamente presto, non può che avvenire molto più tardi nel corso.

Affrontare il corso in maniera "compartimentalizzata" è un approccio fallimentare, in quanto è impossibile dividere nettamente un argomento dall'altro.

Il professor Möseneder ha strutturato il corso in quattro sezioni:

1. Parte computazionale: vettori e matrici;
2. Parte astratta: spazi vettoriali;
3. Parte di applicazione: diagonalizzazione;
4. Parte di applicazione: geometria.

Per cercare di rendere più chiara la motivazione dello studio di certi argomenti verranno fatti cenni di applicazioni per argomenti futuri, con l'obiettivo di chiarirne l'importanza.

Indice

Parte I

Parte computazionale: Vettori e matrici

1 Vettori e matrici

1.1 n-vettori

L'elemento fondamentale del corso di Algebra Lineare è il **vettore**. Invece di dare subito una definizione esatta e precisa del vettore, conviene iniziare facendosi un'idea di cos'è *operativamente* un vettore.

Definizione: n-vettori

Un n-vettore è una n-upla di numeri reali. Per esempio:

$$(0, 2) \text{ è un 2-vettore}$$
$$(1,\pi,4) \text{ è un 3-vettore}$$

Generalmente i vettori vengono chiamati con lettere minuscole in grassetto (es. $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$), con lettere minuscole con sopra un segno o una freccia (es. $\vec{v}$, $\vec{w}$) o semplicemente come lettere minuscole (es. v, w).

Può venire in mente perché usare i vettori. I vettori trovano molti utilizzi in diversi campi: dalla matematica pura alla fisica, passando per machine learning, i vettori sono fondamentali per *rappresentare dati* e *modellare problemi*. Questo ultimo aspetto verrà ripreso più avanti.

Per lavorare su questi vettori verranno definite le operazioni di **somma** e **prodotto con scalare**.

Definizione: Somma tra n-vettori

Dati due n-vettori:

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \quad \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$$

La somma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è l'n-vettore i cui elementi sono:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$$

Nota bene!

L'operazione di somma tra n-vettori è ben definita se e solo se i due vettori hanno lo stesso numero di elementi.

Esempio 1.1.1

Calcolare la seguente somma:

$$(3, 5, 9, 1) + (2, 3, 1, 1)$$

Usando la definizione di somma tra n-vettori è facile trovare che:

$$(3 + 2, 5 + 3, 9 + 1, 1 + 1) = (5, 8, 10, 2)$$

Esercizio 1.1.1

Calcolare le seguenti somme tra n-vettori:
$(5, 0, -2, 3) + (-1, -1, 0, 4)$;
$(7, 4, 2) + (-1, 5, 6)$;
$(9, 5, 2, 4, 2, 2) + (7, 7, 4, 2, 9, 1)$;

Definizione: Prodotto di un n-vettore con uno scalare

Dato un numero reale t e un n-vettore:

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$$

Il prodotto $t\mathbf{v}$ è l'n-vettore i cui elementi sono:

$$t\mathbf{v} = (tv_1, \ldots, tv_n)$$

Esempio 1.1.2

Calcolare il seguente prodotto con scalare:

$$4(7, 4, 2, 0, 11)$$

Usando la definizione di prodotto di un n-vettore con scalare è facile trovare che:

$$(4 \cdot 7, 4 \cdot 4, 4 \cdot 2, 4 \cdot 0, 4 \cdot 11) = (28, 16, 8, 0, 44)$$

Esercizio 1.1.2

Calcolare i seguenti prodotti di n-vettori con scalari:
$2(2, 4, 0, 1)$;
$\frac{1}{2}(2, 7, 7, 1, 4)$;
$e(\pi, \frac{5}{e}, 7, \sqrt{2})$;

Esiste un vettore particolare che merita una definizione a sé, ovvero il **vettore nullo**.

Definizione: Vettore nullo

L'n-vettore i cui elementi sono tutti 0 è detto **vettore nullo**, ed è indicato con $\vec{0}$.

$$\vec{0} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ zeri}})$$

Le operazioni di somma e prodotto con scalare, per come sono state appena definite, rispettano 8 proprietà fondamentali, che sono analoghe a quelle con cui si è già familiari nei numeri reali:

Teorema 1.1.1: Proprietà delle operazioni sugli n-vettori

1. Proprietà commutativa della somma:
   $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
2. Proprietà associativa della somma:
   $\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}$
3. Esistenza dell'elemento nullo:
   $\exists\vec{0} : \mathbf{v} + \vec{0} = \vec{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
4. Esistenza dell'elemento inverso:
   $\forall\mathbf{v}\ \exists(-\mathbf{v}) : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \vec{0}$
5. Proprietà distributiva dello scalare:
   $t(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = t\mathbf{v} + t\mathbf{w}$
6. Proprietà distributiva del vettore:
   $\mathbf{v}(t + s) = t\mathbf{v} + s\mathbf{v}$
7. Associatività mista:
   $(ts)\mathbf{v} = t(s\mathbf{v})$
8. Legge di unità:
   $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

Ci si può chiedere come mai non si è ancora definita un'operazione di prodotto tra n-vettori; la definizione di una (o più) operazione di prodotto è un argomento più avanzato e non è ancora necessario.

Alcuni avranno già notato che gli n-vettori non sono altro che elementi di un prodotto cartesiano: infatti, generalmente, non ci si riferisce agli n-vettori così, ma si chiamano **vettori in $\mathbb{R}^n$**.

1.2 Matrici

Evidentemente i vettori, per quanto siano utili, sono di per sé limitati. Una possibile estensione del concetto di vettore e la **matrice**.

Definizione: Matrice

Una **matrice** $n \times m$ è una tabella di n righe e m colonne i cui elementi sono numeri reali. È indicata con:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

L'elemento generico di A è indicato con a_{ij}, dove i è la riga e j è la colonna.

Nota bene!

Un vettore non è altro che una matrice $1 \times n$ (vettore riga) o $n \times 1$ (vettore colonna).

Generalmente le matrici vengono indicate con lettere maiuscole dell'alfabeto latino.

Le matrici sono quindi un'estensione dei vettori in una seconda dimensione: invece di avere n elementi "in fila", si hanno nm elementi in tabella.

Le matrici sono uno strumento fondamentale che verrà incontrato di nuovo con lo studio dei sistemi di equazioni lineari e, poi, delle trasformazioni lineari. Purtroppo, molte delle cose che verranno stabilite, definite e spiegate qui acquisiranno un significato più profondo solo con l'introduzione di tali argomenti.

Si possono identificare diverse matrici *particolari*. Iniziamo con quelle più importanti.

Definizione: Matrice nulla

Una matrice $n \times m$ i cui elementi sono tutti nulli è detta **matrice nulla**, ed è indicata con:

$$0_{n,m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Definizione: Matrice identità

La **matrice identità** è una matrice $n \times n$ i cui elementi sulla diagonale sono 1 e tutti gli altri sono 0. È indicata con:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

In generale una matrice $n \times n$ è detta **matrice quadrata di ordine n**; inoltre, con diagonale, si intende l'insieme di elementi a_{ii} per qualsiasi A di dimensione $n \times m$.

Poi ci sono matrici la cui particolarità non ha a che fare con i loro valori precisi, ma per la loro disposizione.

Definizione: Matrici triangolari e diagonali

Una matrice è detta **triangolare superiore** se tutti gli elementi sotto la diagonale (esclusa) sono nulli:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{bmatrix}$$

Una matrice è detta **triangolare inferiore** se tutti gli elementi sopra la diagonale (esclusa) sono nulli:

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

Una matrice è detta **diagonale** se tutti gli elementi che non sono sulla diagonale sono nulli:

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{bmatrix}$$

È possibile, e spesso, come si vedrà tra poco, utile, ricavare delle matrici più piccole togliendo da una matrice delle righe e delle colonne.

Definizione: Sottomatrici e minori

Una **sottomatrice** è una matrice ricavata togliendo delle righe e delle colonne.
Un **minore** è una sottomatrice quadrata.

Nota bene!

Non è possibile creare una sottomatrice scegliendo elementi a caso, ma è necessario eliminare **intere righe/colonne**.

Inoltre, nei calcoli, è utile vedere una matrice più grande come una "matrice di sottomatrici".

Definizione: Matrice a blocchi

Una **matrice a blocchi** è una matrice suddivisa in più sottomatrici per comodità.

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 12 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M_2 & 0_{2,3} \\ 0_{3,2} & M_3 \end{bmatrix}$$

Essendo le matrici un'estensione dei vettori in una seconda dimensione, ha senso ridefinire le stesse operazioni di somma e prodotto con scalare in maniera analoga ai vettori.

Definizione: Somma tra matrici

Date due matrici $n \times m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

La somma $A + B$ è la matrice $n \times m$ i cui elementi sono:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{nm} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

Nota bene!

L'operazione di somma tra matrici è ben definita se e solo se entrambe hanno la stessa dimensione (stesso numero di righe e stesso numero di colonne).

Esempio 1.2.1

Calcolare la seguente somma:

$$\begin{bmatrix} 3 & 12 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Usando la definizione di somma tra matrici è facile trovare che:

$$\begin{bmatrix} 3+1 & 12+2 & 4+7 \\ 0+2 & 2+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 14 & 11 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.2.1

Calcolare le seguenti somme tra matrici:

$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 & \frac{3}{2} \\ 8 & 2 & 11 \\ 21 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 19 & 2 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \\ 10 & 21 \end{bmatrix};$$

Definizione: Prodotto di una matrice con uno scalare

Dato un numero reale t e una matrice $n \times m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Il prodotto tA è la matrice $n \times m$ i cui elementi sono:

$$tA = \begin{bmatrix} ta_{11} & \dots & ta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{n1} & \dots & ta_{nm} \end{bmatrix}$$

Esempio 1.2.2

Calcolare il seguente prodotto con scalare:

$$6 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 7 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Usando la definizione di prodotto di una matrice con uno scalare è facile trovare che:

$$\begin{bmatrix} 6 \cdot 2 & 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 10 & 6 \cdot 7 \\ 6 \cdot 9 & 6 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 20 & 42 \\ 54 & 42 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.2.2

Calcolare i seguenti prodotti di matrici con scalari:

$$5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 10 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix};$$
$$\frac{3}{4} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & 2 \end{bmatrix};$$
$$3 \begin{bmatrix} e & 8 \\ 2 & 4 \\ \sqrt{2} & \pi \\ 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix};$$

Anche le operazioni appena definite sulle matrici rispettano le stesse proprietà delle operazioni suoi vettori.

Teorema 1.2.1: Proprietà delle operazioni sulle matrici

1. Proprietà commutativa della somma:
   $A + B = B + A$
2. Proprietà associativa della somma:
   $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. Esistenza dell'elemento nullo:
   $\exists 0 : A + 0 = 0 + A = A$
4. Esistenza dell'elemento inverso:
   $\forall A\ \exists(-A) : A + (-A) = (-A) + A = 0$
5. Proprietà distributiva dello scalare:
   $t(A + B) = tA + tB$
6. Proprietà distributiva della matrice:
   $A(t + s) = tA + sA)$
7. Associatività mista:
   $(ts)A = t(sA)$
8. Legge di unità:
   $1 \cdot A = A$

Al contrario dei vettori, in questo caso verrà definita un'operazione di prodotto tra matrici. Tale operazione, però, non avrà la definizione che ci si può aspettare.

Definizione: Prodotto riga per colonna

Date due matrici A $n \times m$ e B $m \times s$, la matrice AB sarà una matrice $n \times s$ i cui elementi c_{ij} saranno:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Due matrici $n \times m$ e $m \times s$, ovvero tali che la prima matrice ha lo stesso numero di colonne del numero di righe della seconda, sono dette **conformabili**.

Nota bene!

Il prodotto riga per colonna **non è** commutativo.

Esempio 1.2.3

Calcolare il seguente prodotto riga per colonna:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

La prima matrice ha 2 colonne e la seconda ha due righe, quindi il prodotto riga per colonna è possibile. Dalla definizione di prodotto riga per colonna, si ha:

$$\begin{bmatrix} 4\cdot(-5)+6\cdot 2 & 4\cdot(-1)+6\cdot 4 & 4\cdot 2+4\cdot(-4) \\ 7\cdot(-5)+5\cdot 2 & 7\cdot(-1)+5\cdot 4 & 7\cdot 2+5\cdot(-4) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 20 & 16 \\ -25 & 13 & -6 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.2.3

Calcolare, quando possibile, i seguenti prodotti riga per colonna:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 11 & 0 \end{bmatrix};$$

Esercizio 1.2.4

Dimostrare che, date due matrici $n \times n$ A e B, il prodotto riga per colonna AB può essere diverso da BA.

Il motivo di questa definizione particolare verrà reso più chiaro con l'introduzione dei sistemi lineari e delle trasformazioni lineari.

L'operazione di prodotto riga per colonna rispetta delle proprietà un po' diverse da quelle precedenti.

Teorema 1.2.2: Proprietà prodotto riga per colonna

Supponendo che tutti i prodotti riga per colonna siano possibili:

1. Proprietà associativa:
   $A(BC) = (AB)C$
2. Proprietà distributiva da sinistra:
   $A(B + C) = AB + AC$
3. Proprietà distributiva da destra:
   $(A + B)C = AC + BC$

4. Associatività mista:
   $(tA)B = A(tB) = t(AB)$

5. Esistenza elemento neutro:
   Dato A $n \times m$ $I_n A = A I_m = A$

Le matrici quadrate di ordine n sono sempre conformabili tra loro e, in particolare, sono conformabili con **se stesse**. Quindi ha senso definire la **potenza** di una matrice quadrata.

Definizione: Potenza di una matrice quadrata

Se A è una matrice quadrata, allora si può definire l'n-esima potenza di A come:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ volte}}$$

Valgono tutte le proprietà delle potenze riguardanti il prodotto. Il concetto di "divisione" non appartiene propriamente alle matrici.

Nota bene!

Per la proprietà associativa del prodotto riga per colonna si ha:

$$A^{m+n} = A^m A^n = A^n A^m$$

Esempio 1.2.4

Data la matrice A di ordine 3, calcolare A^2, A^3 e A^{10}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si inizia con il calcolo di A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poi, per le proprietà delle potenze, si può vedere $A^3 = A^2 \cdot A$:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sempre per le proprietà delle potenze si ha che $\forall n > 3$ $A^n = A^3 \cdot A^{n-3}$, e perciò:

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il che vale anche per $n = 10$.

Esercizio 1.2.5

Per ogni matrice presentata, calcolarne il quadrato e il cubo:
$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;
$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$;
$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

Infine è utile dare la definizione di **trasposta** di una matrice.

Definizione: Trasposta

La **trasposta** di una matrice A $n \times m$ è la matrice $m \times n$ le cui righe sono le colonne di A e viceversa. La si indica con A^T, o con ${}^tA$ o A' in testi più vecchi.

L'operazione di trasposizione di una matrice ha le seguenti proprietà:

Teorema 1.2.3: Proprietà della trasposta

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2. $(A^T)^T = A$;
3. $(sA)^T = sA^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$;

Con l'introduzione della trasposta si introduce anche il concetto di matrici **simmetriche** e **antisimmetriche**.

Definizione: Matrici simmetriche ed antisimmetriche

Una matrice è **simmetrica** se è uguale alla sua trasposta: $A = A^T$.
Una matrice è **antisimmetrica**, o **emisimmetrica**, se è uguale all'opposto della sua trasposta: $A = -A^T$.

Nota bene!

Una matrice è antisimmetrica se gli elementi sulla sua diagonale sono tutti nulli.

1.3 Operazioni elementari di riga

Uno strumento molto potente che si userà molto spesso è la *riduzione a gradini* di una matrice tramite il **metodo di eliminazione di Gauss (MEG)**.

Però, prima di introdurre l'argomento, che tornerà utile a partire dalla risoluzione di sistemi lineari, sarà necessario introdurre le *operazioni elementari di* *riga*. La definizione propria di operazioni elementari di riga sarà introdotta più tardi, però vale la pena introdurle adesso.

Definizione: Operazioni elementari di riga (1)

Ci sono 3 **operazioni elementari di riga**:

1. **Scambio** di due righe;
2. **Prodotto con scalare** di una riga;
3. **Somma** tra multipli di due righe.

2 Determinante

2.1 Definizione

La definizione di determinante è una difficile da dare in questo momento, come è difficile in questo momento rendersi conto di quanto sia uno strumento potente. Una definizione adeguata di determinante, a questo punto, sarebbe la seguente:

Definizione: Determinante

Il **determinante** è un valore caratteristico di una matrice *quadrata*, che ne esprime diverse proprietà algebriche e geometriche.
Lo si indica con:

$$\det A \text{ o } |A|$$

La definizione, come facile notare, è abbastanza vaga. "In che senso è un *valore caratteristico*?"; "Quali proprietà esprime? Come?".

Purtroppo le risposte a queste domande riceveranno risposta solo più avanti.

2.2 Determinanti di matrici di ordine 1, 2 e 3

Il determinante di una matrice 1×1 è banale.

Teorema 2.2.1: Determinante di una matrice di ordine 1

Il determinante di una matrice di ordine 1 è l'unico elemento della matrice.

$$\det[a] = a$$

Invece il determinante di una matrice 2×2 ha una leggermente formula più complessa:

Teorema 2.2.2: Determinante di una matrice di ordine 2

Il determinante di una matrice di ordine 2 è la differenza tra il prodotto degli elementi sulla diagonale discendente (*diagonale principale*)e il prodotto degli elementi sulla diagonale ascendente (*antidiagonale*).

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Esempio 2.2.1

Calcolare il determinante della seguente matrice di ordine 2:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la formula proposta qua sopra si ottiene:

$$\det A = 6 \cdot 6 - 3 \cdot 7 = 36 - 21 = 15$$

Esercizio 2.2.1

Calcolare il determinante delle seguenti matrici di ordine 2:

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$;

Quando si arriva all'ordine 3 la formula si complica ancora di più:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Ovviamente ricordarsi una formula del genere è improponibile. Fortunatamente esiste un metodo di calcolo del determinante di una matrice 3×3 relativamente semplice.

Teorema 2.2.3: Regola di Sarrus

Per calcolare il determinante di una matrice di ordine 3 la si riscrive, aggiungendo dopo l'ultima colonna le prime due, e sommando i prodotti sulle 3 diagonali discendenti e sottraendo i prodotti sulle 3 diagonali ascendenti.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{21} & & a_{31} & & a_{11} & & a_{21} \\ & \searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow & \\ a_{12} & & a_{22} & & a_{32} & & a_{12} & & a_{22} \\ & \nearrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \searrow & \\ a_{13} & & a_{23} & & a_{33} & & a_{13} & & a_{23} \end{array}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Esempio 2.2.2

Calcolare il determinante della seguente matrice di ordine 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Usando la regola di Sarrus si ottiene:

$$\det A = 1 \cdot 6 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 7 - 0 \cdot 6 \cdot 2 - 7 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 12 + 14 = 26$$

Esercizio 2.2.2

Calcolare il determinante della seguente matrice di ordine 3:

$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 21 & 100 & 0 \end{bmatrix}$;

2.3 Determinanti di matrici di ordine superiore

Come si può immaginare, le formule dei determinanti di matrice di ordine superiore diventano sempre più complesse. Infatti la formula del determinante di una matrice di ordine n ha ben $n!$ elementi! Naturalmente pensare di ricordarsi le formule di questi determinanti è pura follia.

Esiste, fortunatamente, un *algoritmo* ricorsivo che permette di calcolare il determinante di una qualsiasi matrice di ordine n sapendo fare il determinante per le matrici di ordine $n-1$. Questo algoritmo è detto **sviluppo di Laplace**, ma prima di affrontarlo è necessario introdurre il concetto di *minore complementare* e *complemento algebrico*.

Definizione: Minore complementare

Il **minore complementare** di una matrice quadrata $M_{i;j}$ è il minore ottenuto rimuovendo l'i-esima riga e la j-esima colonna dalla matrice di partenza.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow M_{2;2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Definizione: Complemento algebrico

Il **complemento algebrico**, o **cofattore**, di un elemento a_{ij} della matrice quadrata A è il determinante del minore complementare $M_{i;j}$ con anteposto un segno $+$ se la somma degli indici è pari e $-$ se è dispari.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{i;j}$$

Nota bene!

Invece di dover calcolare ogni volta la somma e controllare se anteporre un $+$ o un $-$ si può notare l'alternanza nei segni e costruirsi la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

A questo punto è possibile introdurre lo sviluppo di Laplace.

Teorema 2.3.1: Sviluppo di Laplace

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora si ha che, fissata una riga i:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Parimenti, fissando una colonna j si ha:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Nota bene!

Quando si usa lo sviluppo di Laplace, è bene scegliere la riga/colonna con il maggior numero di zeri.

Esempio 2.3.1

Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per lo sviluppo di Laplace si può scegliere la quarta riga o la quarta colonna. In questo caso verrà scelta la quarta colonna. Applicando la formula si ha:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Applicando la regola di Sarrus si ottiene:

$$= (-1)(0) + (-1)(-10) = 10$$

2.4 Proprietà del determinante

Per il determinante valgono le seguenti proprietà:

Teorema 2.4.1: Proprietà del determinante

1. Il determinante della matrice quadrata identità è 1:
   $\det I_n = 1 \ \forall n > 0$;

2. Il determinante di una matrice e della sua trasposta sono uguali:
   $\det A = \det A^T$;

3. Se A è una matrice triangolare allora il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi sulla sua diagonale:
   $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$;

4. Se si scambiano due righe/colonne di A il suo determinante cambia di segno;

5. Se si moltiplica una sua riga di A per una costante k il suo determinante verrà moltiplicato per A;

6. Se si fa la somma tra multipli di due righe di A il determinante resta invariato;

7. Se una riga/colonna è nulla oppure due righe/colonne sono uguali o proporzionali allora il determinante è nullo;

8. Formula di Binet: Il determinante del prodotto è il prodotto dei determinanti:
   $\det(AB) = \det A \det B$;

9. Se A è una matrice a blocchi triangolare superiore/inferiore o diagonale, allora il suo determinante è dato dal prodotto dei determinanti dei blocchi sulla diagonale.

3 Sistemi lineari

3.1 Introduzione

I sistemi lineari non sono un argomento nuovo, ma sono una parte integrante del corso, quindi vale la pena riprendere l'argomento dall'inizio per stabilire una base comune.

Definizione: Sistema lineare

Un **sistema lineare** è un sistema di n equazioni in m incognite in cui il massimo grado presente è il primo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_n$ sono le *incognite*, $a_{11}, \ldots, a_{nm}$ sono i *coefficienti* e $b_1, \ldots, b_n$ sono i *termini noti*

$x + y = 3$ è lineare $\qquad xy + z = 3$ non è lineare

$y^2 + x = 0$ non è lineare $\qquad e^x + 4y = 7$ non è lineare

La particolarità dei sistemi lineari è che un insieme di valori, per essere soluzione, deve soddisfare ***contemporaneamente*** tutte e n le equazioni.

Definizione: Soluzione di un sistema lineare

Una **soluzione** di un sistema lineare è un insieme $\{s_1, \ldots, s_m\}$ di m valori che, quando si pone $s_1 = x_1; \ldots; s_m = x_m$, tutte le n equazioni sono vere. Un sistema lineare può avere 0, 1 o infinite soluzioni.

3.2 Metodi di risoluzione

Si saranno già imparati diversi modi di risolvere sistemi di equazioni lineari. Si prenda per esempio il semplice sistema lineare:

$$\begin{cases} 5r + 4s = -7 \\ 5r + 2s = -4 \end{cases}$$

Il metodo più basilare è quello per sostituzione, che con sistemi come questo è ammissibile, ma molto inefficace per sistemi con più variabili. Per risolvere un sistema lineare con questo metodo si riscrive una variabile in funzione delle altre e si cerca di semplificare man mano le equazioni fino a trovare il valore di una delle variabili e trovare di conseguenza quello delle altre. In pratica:

$$\begin{cases} 5r + 4s = -7 \\ 5r = -4 - 2s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4 - 2s + 4s = -7 \rightarrow 2s = -3 \\ 5r = -4 - 2s \rightarrow r = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}s \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -\frac{3}{2} \\ r = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Un metodo generalmente preferibile è il metodo di riduzione. In sostanza si stratta di risolvere il sistema eliminando man mano le incognite dalle altre equazioni sfruttando il **principio di equivalenza dei sistemi lineari**.

Per rendere più chiare le idee: il primo principio di equivalenza dice che:

$$\text{Se } A = B \text{ allora } A + C = B + C$$

Si prenda allora il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \ldots \\ A = B \\ C = D \\ \ldots \end{cases}$$

Se $C = D$ allora C e D sono la stessa quantità, e perciò se $A = B$ è vero lo è anche $A + C = B + D$. Quindi si può sostituire ad $A = B$ la seconda equazione:

$$\begin{cases} \ldots \\ A + C = B + D \\ C = D \\ \ldots \end{cases}$$

Inoltre, per il secondo principio di equivalenza:

$$\text{Se } A = B \text{ allora } \alpha A = \alpha B$$

Da cui si può dedurre che se $C = D$ allora $\beta C = \beta D$, e perciò, per lo stesso ragionamento di prima, si può dire che:

$$\begin{cases} \ldots \\ A + \beta C = B + \beta D \\ C = D \\ \ldots \end{cases}$$

Questa proprietà può essere sfruttata per *eliminare* un'incognita per volta dalle equazioni, per arrivare poi a trovare il valore di una delle incognite e, di conseguenza, trovare quello delle altre.

Si prenda, a titolo d'esempio, il seguente sistema lineare di 3 equazioni e 3 incognite:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 6z = 2 \\ x + 6y + 4z = 5 \\ 3x + 6y + 4z = -2 \end{cases}$$

4 Inversa di una matrice