Corso di Algebra Lineare - Pierluigi Möseneder Frajria - 2024/25

Jusef Azzolina

Introduzione

L'Algebra Lineare è un argomento la cui complessità a che fare con la sua astrattezza e l'interconnessione tra gli argomenti: la comprensione profonda di certi argomenti, alcuni dei quali verranno affrontati relativamente presto, non può che avvenire molto più tardi nel corso.

Affrontare il corso in maniera “compartimentalizzata” è un approccio fallimentare, in quanto è impossibile dividere nettamente un argomento dall'altro.

Il professor Möseneder ha strutturato il corso in quattro sezioni:

1. Parte computazionale: vettori e matrici;
2. Parte astratta: spazi vettoriali;
3. Parte di applicazione: diagonalizzazione;
4. Parte di applicazione: geometria.

Per cercare di rendere più chiara la motivazione dello studio di certi argomenti verranno fatti cenni di applicazioni per argomenti futuri, con l'obiettivo di chiarirne l'importanza.

Inoltre è consigliata la visione del corso di **3Blue1Brown** “Essence of Linear Algebra” presente su YouTube. Il corso è dotato di sottotitoli in italiano e, grazie alle sue animazioni, è estremamente efficace nel rendere chiari i concetti dell'Algebra Lineare.

Indice

Parte I

Parte computazionale: Vettori e matrici

1 Vettori e matrici

1.1 n-vettori

Definizione

L'elemento fondamentale del corso di Algebra Lineare è il **vettore**. Invece di dare subito una definizione esatta e precisa del vettore, conviene iniziare facendosi un'idea di cos'è *operativamente* un vettore.

Definizione: n-vettori

Un n-vettore è una n-upla di numeri reali. Per esempio:

$$(0,2) \text{ è un 2-vettore}$$
$$(1,\pi,4) \text{ è un 3-vettore}$$

Generalmente i vettori vengono chiamati con lettere minuscole in grassetto (es. $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$), con lettere minuscole con sopra un segno o una freccia (es. $\vec{v}$, $\vec{w}$) o semplicemente come lettere minuscole (es. v, w).

Può venire in mente perché usare i vettori. I vettori trovano molti utilizzi in diversi campi: dalla matematica pura alla fisica, passando per machine learning, i vettori sono fondamentali per *rappresentare dati* e *modellare problemi*. Questo ultimo aspetto verrà ripreso più avanti.

Somma e prodotto con scalare

Per lavorare su questi vettori verranno definite le operazioni di **somma** e **prodotto con scalare**.

Definizione: Somma tra n-vettori

Dati due n-vettori:

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \quad \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$$

La somma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è l'n-vettore i cui elementi sono:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

Nota bene!

L'operazione di somma tra n-vettori è ben definita se e solo se i due vettori hanno lo stesso numero di elementi.

Esempio 1.1.1

Calcolare la seguente somma:

$$(3,5,9,1) + (2,3,1,1)$$

Usando la definizione di somma tra n-vettori è facile trovare che:

$$(3+2, 5+3, 9+1, 1+1) = (5, 8, 10, 2)$$

Esercizio 1.1.1

Calcolare le seguenti somme tra n-vettori:
$(5, 0, -2, 3) + (-1, -1, 0, 4)$;
$(7, 4, 2) + (-1, 5, 6)$;
$(9, 5, 2, 4, 2, 2) + (7, 7, 4, 2, 9, 1)$;

Definizione: Prodotto di un n-vettore con uno scalare

Dato un numero reale t e un n-vettore:

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$$

Il prodotto $t\mathbf{v}$ è l'n-vettore i cui elementi sono:

$$t\mathbf{v} = (tv_1, \ldots, tv_n)$$

Esempio 1.1.2

Calcolare il seguente prodotto con scalare:

$$4(7, 4, 2, 0, 11)$$

Usando la definizione di prodotto di un n-vettore con scalare è facile trovare che:

$$(4 \cdot 7, 4 \cdot 4, 4 \cdot 2, 4 \cdot 0, 4 \cdot 11) = (28, 16, 8, 0, 44)$$

Esercizio 1.1.2

Calcolare i seguenti prodotti di n-vettori con scalari:
$2(2, 4, 0, 1)$;
$\frac{1}{2}(2, 7, 7, 1, 4)$;
$e(\pi, \frac{5}{e}, 7, \sqrt{2})$;

Esiste un vettore particolare che merita una definizione a sé, ovvero il **vettore nullo**.

Definizione: Vettore nullo

L'n-vettore i cui elementi sono tutti 0 è detto **vettore nullo**, ed è indicato con $\vec{0}$.

$$\vec{0} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ zeri}})$$

Le operazioni di somma e prodotto con scalare, per come sono state appena definite, rispettano 8 proprietà fondamentali, che sono analoghe a quelle con cui si è già familiari nei numeri reali:

Teorema 1.1.1: Proprietà delle operazioni sugli n-vettori

1. Proprietà commutativa della somma:
   $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
2. Proprietà associativa della somma:
   $\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}$
3. Esistenza dell'elemento nullo:
   $\exists\vec{0} : \mathbf{v} + \vec{0} = \vec{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
4. Esistenza dell'elemento inverso:
   $\forall\mathbf{v}\ \exists(-\mathbf{v}) : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \vec{0}$
5. Proprietà distributiva dello scalare:
   $t(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = t\mathbf{v} + t\mathbf{w}$
6. Proprietà distributiva del vettore:
   $\mathbf{v}(t + s) = t\mathbf{v} + s\mathbf{v}$
7. Associatività mista:
   $(ts)\mathbf{v} = t(s\mathbf{v})$
8. Legge di unità:
   $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

Ci si può chiedere come mai non si è ancora definita un'operazione di prodotto tra n-vettori; la definizione di una (o più) operazione di prodotto è un argomento più avanzato e non è ancora necessario.

Alcuni avranno già notato che gli n-vettori non sono altro che elementi di un prodotto cartesiano: infatti, generalmente, non ci si riferisce agli n-vettori così, ma si chiamano **vettori in $\mathbb{R}^n$**.

1.2 Matrici

Definizione

Evidentemente i vettori, per quanto siano utili, sono di per sé limitati. Una possibile estensione del concetto di vettore e la **matrice**.

Definizione: Matrice

Una **matrice** $n \times m$ è una tabella di n righe e m colonne i cui elementi sono numeri reali. È indicata con:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

L'elemento generico di A è indicato con a_{ij}, dove i è la riga e j è la colonna.

Nota bene!

Un vettore non è altro che una matrice $1 \times n$ (vettore riga) o $n \times 1$ (vettore colonna).

Generalmente le matrici vengono indicate con lettere maiuscole dell'alfabeto latino.

Le matrici sono quindi un'estensione dei vettori in una seconda dimensione: invece di avere n elementi "in fila", si hanno nm elementi in tabella.

Per riferirsi alle matrici $n \times m$ si usa anche dire che appartengono all'insieme $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Le matrici sono uno strumento fondamentale che verrà incontrato di nuovo con lo studio dei sistemi di equazioni lineari e, poi, delle trasformazioni lineari. Purtroppo, molte delle cose che verranno stabilite, definite e spiegate qui acquisiranno un significato più profondo solo con l'introduzione di tali argomenti.

Matrici particolari

Si possono identificare diverse matrici *particolari*. Iniziamo con quelle più importanti.

Definizione: Matrice nulla

Una matrice $n \times m$ i cui elementi sono tutti nulli è detta **matrice nulla**, ed è indicata con:

$$0_{n,m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Definizione: Matrice identità

La **matrice identità** è una matrice $n \times n$ i cui elementi sulla diagonale sono 1 e tutti gli altri sono 0. È indicata con:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

In generale una matrice $n \times n$ è detta **matrice quadrata di ordine n**; inoltre, con diagonale, si intende l'insieme di elementi a_{ii} per qualsiasi A di dimensione $n \times m$.

Poi ci sono matrici la cui particolarità non ha a che fare con i loro valori precisi, ma per la loro disposizione.

Definizione: Matrici triangolari e diagonali

Una matrice *quadrata* è detta **triangolare superiore** se tutti gli elementi sotto la diagonale (esclusa) sono nulli:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{bmatrix}$$

Una matrice è detta **triangolare inferiore** se tutti gli elementi sopra la diagonale (esclusa) sono nulli:

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

Una matrice è detta **diagonale** se tutti gli elementi che non sono sulla diagonale sono nulli:

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{bmatrix}$$

È possibile, e spesso, come si vedrà tra poco, utile, ricavare delle matrici più piccole togliendo da una matrice delle righe e delle colonne.

Definizione: Sottomatrici e minori

Una **sottomatrice** è una matrice ricavata togliendo delle righe e delle colonne.
Un **minore** è una sottomatrice quadrata.

Nota bene!

Non è possibile creare una sottomatrice scegliendo elementi a caso, ma è necessario eliminare **intere righe/colonne**.

Inoltre, nei calcoli, è utile vedere una matrice più grande come una "matrice di sottomatrici".

Definizione: Matrice a blocchi

Una **matrice a blocchi** è una matrice suddivisa in più sottomatrici per comodità.

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 12 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M_2 & 0_{2,3} \\ 0_{3,2} & M_3 \end{bmatrix}$$

Somma e prodotto con scalare

Essendo le matrici un'estensione dei vettori in una seconda dimensione, ha senso ridefinire le stesse operazioni di somma e prodotto con scalare in maniera analoga ai vettori.

Definizione: Somma tra matrici

Date due matrici $n \times m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

La somma $A+B$ è la matrice $n \times m$ i cui elementi sono:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{nm} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

Nota bene!

L'operazione di somma tra matrici è ben definita se e solo se entrambe hanno la stessa dimensione (stesso numero di righe e stesso numero di colonne).

Esempio 1.2.1

Calcolare la seguente somma:

$$\begin{bmatrix} 3 & 12 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Usando la definizione di somma tra matrici è facile trovare che:

$$\begin{bmatrix} 3+1 & 12+2 & 4+7 \\ 0+2 & 2+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 14 & 11 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.2.1

Calcolare le seguenti somme tra matrici:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 & \frac{3}{2} \\ 8 & 2 & 11 \\ 21 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 19 & 2 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \\ 10 & 21 \end{bmatrix};$$

Definizione: Prodotto di una matrice con uno scalare

Dato un numero reale t e una matrice $n \times m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Il prodotto tA è la matrice $n \times m$ i cui elementi sono:

$$tA = \begin{bmatrix} ta_{11} & \dots & ta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{n1} & \dots & ta_{nm} \end{bmatrix}$$

Esempio 1.2.2

Calcolare il seguente prodotto con scalare:

$$6 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 7 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Usando la definizione di prodotto di una matrice con uno scalare è facile trovare che:

$$\begin{bmatrix} 6 \cdot 2 & 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 10 & 6 \cdot 7 \\ 6 \cdot 9 & 6 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 20 & 42 \\ 54 & 42 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.2.2

Calcolare i seguenti prodotti di matrici con scalari:

$5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 10 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$;

$\frac{3}{4} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & 2 \end{bmatrix}$;

$3 \begin{bmatrix} e & 8 \\ 2 & 4 \\ \sqrt{2} & \pi \\ 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$;

Anche le operazioni appena definite sulle matrici rispettano le stesse proprietà delle operazioni suoi vettori.

Teorema 1.2.1: Proprietà delle operazioni sulle matrici

1. Proprietà commutativa della somma:
   $A + B = B + A$

2. Proprietà associativa della somma:
   $A+(B+C)=(A+B)+C$
3. Esistenza dell'elemento nullo:
   $\exists 0 : A+0=0+A=A$
4. Esistenza dell'elemento inverso:
   $\forall A\ \exists(-A) : A+(-A)=(-A)+A=0$
5. Proprietà distributiva dello scalare:
   $t(A+B)=tA+tB$
6. Proprietà distributiva della matrice:
   $A(t+s)=tA+sA)$
7. Associatività mista:
   $(ts)A=t(sA)$
8. Legge di unità:
   $1\cdot A=A$

Prodotto riga per colonna e potenze

Al contrario dei vettori, in questo caso verrà definita un'operazione di prodotto tra matrici. Tale operazione, però, non avrà la definizione che ci si può aspettare.

Definizione: Prodotto riga per colonna

Date due matrici $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$ e $B\in\mathbb{R}^{m\times s}$, la matrice AB sarà una matrice $n\times s$ i cui elementi c_{ij} saranno:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

Due matrici $n\times m$ e $m\times s$, ovvero tali che la prima matrice ha lo stesso numero di colonne del numero di righe della seconda, sono dette **conformabili**.

Nota bene!

Il prodotto riga per colonna **non è** commutativo.

Esempio 1.2.3

Calcolare il seguente prodotto riga per colonna:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

La prima matrice ha 2 colonne e la seconda ha due righe, quindi il prodotto riga per colonna è possibile. Dalla definizione di prodotto riga per colonna, si ha:

$$\begin{bmatrix} 4\cdot(-5)+6\cdot 2 & 4\cdot(-1)+6\cdot 4 & 4\cdot 2+4\cdot(-4) \\ 7\cdot(-5)+5\cdot 2 & 7\cdot(-1)+5\cdot 4 & 7\cdot 2+5\cdot(-4) \end{bmatrix}=$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 20 & 16 \\ -25 & 13 & -6 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.2.3

Calcolare, quando possibile, i seguenti prodotti riga per colonna:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 11 & 0 \end{bmatrix};$$

Esercizio 1.2.4

Dimostrare che, date due matrici $n \times n$ A e B, il prodotto riga per colonna AB può essere diverso da BA.

Il motivo di questa definizione particolare verrà reso più chiaro con l'introduzione dei sistemi lineari e delle trasformazioni lineari.

L'operazione di prodotto riga per colonna rispetta delle proprietà un po' diverse da quelle precedenti.

Teorema 1.2.2: Proprietà prodotto riga per colonna

Supponendo che tutti i prodotti riga per colonna siano possibili:

1. Proprietà associativa:
   $A(BC) = (AB)C$
2. Proprietà distributiva da sinistra:
   $A(B+C) = AB + AC$
3. Proprietà distributiva da destra:
   $(A+B)C = AC + BC$
4. Associatività mista:
   $(tA)B = A(tB) = t(AB)$
5. Esistenza elemento neutro:
   Dato $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $I_n A = A I_m = A$

Le matrici quadrate di ordine n sono sempre conformabili tra loro e, in particolare, sono conformabili con **se stesse**. Quindi ha senso definire la **potenza** di una matrice quadrata.

Definizione: Potenza di una matrice quadrata

Se A è una matrice quadrata, allora si può definire l'n-esima potenza di A come:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n \text{ volte}}$$

Valgono tutte le proprietà delle potenze riguardanti il prodotto. Il concetto di "divisione" non appartiene propriamente alle matrici.

Nota bene!

Per la proprietà associativa del prodotto riga per colonna si ha:

$$A^{m+n} = A^m A^n = A^n A^m$$

Esempio 1.2.4

Data la matrice A di ordine 3, calcolare A^2, A^3 e A^{10}

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si inizia con il calcolo di A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poi, per le proprietà delle potenze, si può vedere $A^3 = A^2 \cdot A$:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sempre per le proprietà delle potenze si ha che $\forall n > 3\ A^n = A^3 \cdot A^{n-3}$, e perciò:

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il che vale anche per $n = 10$.

Esercizio 1.2.5

Per ogni matrice presentata, calcolarne il quadrato e il cubo:

$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix};$$

Trasposta di una matrice

Infine è utile dare la definizione di **trasposta** di una matrice.

Definizione: Trasposta

La **trasposta** di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ è la matrice $m \times n$ le cui righe sono le colonne di A e viceversa. La si indica con A^T, o con ${}^tA$ o A' in testi più vecchi.

L'operazione di trasposizione di una matrice ha le seguenti proprietà:

Teorema 1.2.3: Proprietà della trasposta

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2. $(A^T)^T = A$;
3. $(sA)^T = sA^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$;

Con l'introduzione della trasposta si introduce anche il concetto di matrici **simmetriche** e **antisimmetriche**.

Definizione: Matrici simmetriche ed antisimmetriche

Una matrice è **simmetrica** se è uguale alla sua trasposta: $A = A^T$.
Una matrice è **antisimmetrica**, o **emisimmetrica**, se è uguale all'opposto della sua trasposta: $A = -A^T$.

Nota bene!

Una matrice è antisimmetrica se gli elementi sulla sua diagonale sono tutti nulli.

2 Determinante

2.1 Introduzione

La definizione di determinante è una difficile da dare in questo momento, come è difficile in questo momento rendersi conto di quanto sia uno strumento potente. Una definizione adeguata di determinante, a questo punto, sarebbe la seguente:

Definizione: Determinante

Il **determinante** è un valore caratteristico di una matrice *quadrata*, che ne esprime diverse proprietà algebriche e geometriche.
Lo si indica con:

$$\det A \text{ o } |A|$$

La definizione, come facile notare, è abbastanza vaga. "In che senso è un *valore caratteristico*?"; "Quali proprietà esprime? Come?".

Purtroppo le risposte a queste domande riceveranno risposta solo più avanti.

Alcune applicazioni del determinante sono il calcolo dell'inversa di una matrice, del rango di una matrice, che sarà introdotto propriamente nella parte "astratta" del corso, e delle soluzioni di sistemi lineari crameriani; inoltre avrà un ruolo fondamentale nel problema della diagonalizzazione, argomento principe della terza parte del corso.

2.2 Determinanti di matrici di ordine 1, 2 e 3

Il determinante di una matrice 1×1 è banale.

Teorema 2.2.1: Determinante di una matrice di ordine 1

Il determinante di una matrice di ordine 1 è l'unico elemento della matrice.

$$\det[a] = a$$

Invece il determinante di una matrice 2×2 ha una leggermente formula più complessa:

Teorema 2.2.2: Determinante di una matrice di ordine 2

Il determinante di una matrice di ordine 2 è la differenza tra il prodotto degli elementi sulla diagonale discendente (*diagonale principale*)e il prodotto degli elementi sulla diagonale ascendente (*antidiagonale*).

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Esempio 2.2.1

Calcolare il determinante della seguente matrice di ordine 2:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la formula proposta qua sopra si ottiene:

$$\det A = 6 \cdot 6 - 3 \cdot 7 = 36 - 21 = 15$$

Esercizio 2.2.1

Calcolare il determinante delle seguenti matrici di ordine 2:

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$;

Quando si arriva all'ordine 3 la formula si complica ancora di più:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Ovviamente ricordarsi una formula del genere è improponibile. Fortunatamente esiste un metodo di calcolo del determinante di una matrice 3×3 relativamente semplice.

Teorema 2.2.3: Regola di Sarrus

Per calcolare il determinante di una matrice di ordine 3 la si riscrive, aggiungendo dopo l'ultima colonna le prime due, e sommando i prodotti sulle 3 diagonali discendenti e sottraendo i prodotti sulle 3 diagonali ascendenti.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & a_{21} & & a_{31} & & a_{11} & & a_{21} \\
& \searrow & & \nearrow\!\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\!\searrow & & \nearrow & \\
a_{12} & & a_{22} & & a_{32} & & a_{12} & & a_{22} \\
& \nearrow & & \nearrow\!\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\!\searrow & & \searrow & \\
a_{13} & & a_{23} & & a_{33} & & a_{13} & & a_{23}
\end{array}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Esempio 2.2.2

Calcolare il determinante della seguente matrice di ordine 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Usando la regola di Sarrus si ottiene:

$$\det A = 1\cdot 6\cdot 2 + 0\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 7 - 0\cdot 6\cdot 2 - 7\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 0 = 12 + 14 = 26$$

Esercizio 2.2.2

Calcolare il determinante della seguente matrice di ordine 3:

$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 21 & 100 & 0 \end{bmatrix}$;

2.3 Determinanti di matrici di ordine superiore

Come si può immaginare, le formule dei determinanti di matrice di ordine superiore diventano sempre più complesse. Infatti la formula del determinante di una matrice di ordine n ha ben $n!$ elementi! Naturalmente pensare di ricordarsi le formule di questi determinanti è pura follia.

Esiste, fortunatamente, un *algoritmo* ricorsivo che permette di calcolare il determinante di una qualsiasi matrice di ordine n sapendo fare il determinante per le matrici di ordine $n-1$. Questo algoritmo è detto **sviluppo di Laplace**, ma prima di affrontarlo è necessario introdurre il concetto di *minore complementare* e *complemento algebrico*.

Definizione: Minore complementare

Il **minore complementare** di una matrice quadrata $M_{i;j}$ è il minore ottenuto rimuovendo l'i-esima riga e la j-esima colonna dalla matrice di partenza.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow M_{2;2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Definizione: Complemento algebrico

Il **complemento algebrico**, o **cofattore**, di un elemento a_{ij} della matrice quadrata A è il determinante del minore complementare $M_{i;j}$ con anteposto un segno

$+$ se la somma degli indici è pari e $-$ se è dispari.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{i;j}$$

Nota bene!

Invece di dover calcolare ogni volta la somma e controllare se anteporre un $+$ o un $-$ si può notare l'alternanza nei segni e costruirsi la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

A questo punto è possibile introdurre lo sviluppo di Laplace.

Teorema 2.3.1: Sviluppo di Laplace

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora si ha che, fissata una riga i:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Parimenti, fissando una colonna j si ha:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Nota bene!

Quando si usa lo sviluppo di Laplace, è bene scegliere la riga/colonna con il maggior numero di zeri.

Esempio 2.3.1

Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per lo sviluppo di Laplace si può scegliere la quarta riga o la quarta colonna. In questo caso verrà scelta la quarta colonna. Applicando la formula si ha:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Applicando la regola di Sarrus si ottiene:

$$= (-1)(0) + (-1)(-10) = 10$$

2.4 Proprietà del determinante

Per il determinante valgono le seguenti proprietà:

Teorema 2.4.1: Proprietà del determinante

1. Il determinante della matrice quadrata identità è 1:
$\det I_n = 1\ \forall n > 0$;
2. Il determinante di una matrice e della sua trasposta sono uguali:
$\det A = \det A^T$;
3. Se A è una matrice triangolare allora il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi sulla sua diagonale:
$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$;
4. Se si scambiano due righe/colonne di A il suo determinante cambia di segno;
5. Se si moltiplica una sua riga di A per una costante k il suo determinante verrà moltiplicato per A;
6. Se si fa la somma tra multipli di due righe di A il determinante resta invariato;
7. Se una riga/colonna è nulla oppure due righe/colonne sono uguali o proporzionali allora il determinante è nullo;
8. Formula di Binet: Il determinante del prodotto è il prodotto dei determinanti:
$\det(AB) = \det A \det B$;
9. Se A è una matrice a blocchi triangolare superiore/inferiore o diagonale, allora il suo determinante è dato dal prodotto dei determinanti dei blocchi sulla diagonale.

3 Sistemi lineari

3.1 Introduzione

I sistemi lineari non sono un argomento nuovo, ma sono una parte integrante del corso, quindi vale la pena riprendere l'argomento dall'inizio per stabilire una base comune.

Definizione: Sistema lineare

Un **sistema lineare** è un sistema di n equazioni in m incognite in cui il massimo grado presente è il primo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_n$ sono le *incognite*, $a_{11}, \dots, a_{nm}$ sono i *coefficienti* e $b_1, \dots, b_n$ sono i *termini noti*.

$x + y = 3$ è lineare $\qquad xy + z = 3$ non è lineare $\qquad y^2 + x = 0$ non è lineare $\qquad e^x + 4y = 7$ non è lineare

Definizione: Sistema lineare omogeneo

Un sistema lineare è detto **omogeneo** se $b_1 = \dots = b_n = 0$, ovvero se è nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

La particolarità dei sistemi lineari è che un insieme di valori, per essere soluzione, deve soddisfare ***contemporaneamente*** tutte e n le equazioni.

Definizione: Soluzione di un sistema lineare

Una **soluzione** di un sistema lineare è un insieme $\{s_1, \dots, s_m\}$ di m valori che, quando si pone $s_1 = x_1; \dots; s_m = x_m$, tutte le n equazioni sono vere.
Un sistema lineare può avere 0, 1 o infinite soluzioni.

3.2 Metodi di risoluzione

Metodo per sostituzione

Si saranno già imparati diversi modi di risolvere sistemi di equazioni lineari. Si prenda per esempio il semplice sistema lineare:

$$\begin{cases} 5x+4y=-7 \\ 5x+2y=-4 \end{cases}$$

Il metodo più basilare è quello per sostituzione, che con sistemi come questo è ammissibile, ma molto inefficace per sistemi con più variabili. Per risolvere un sistema lineare con questo metodo si riscrive una variabile in funzione delle altre e si cerca di semplificare man mano le equazioni fino a trovare il valore di una delle variabili e trovare di conseguenza quello delle altre. In pratica:

$$\begin{cases} 5x+4y=-7 \\ 5x=-4-2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4-2y+4y=-7 \rightarrow 2y=-3 \\ 5x=-4-2y \rightarrow x=-\frac{4}{5}-\frac{2}{5}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{2} \\ x=-\frac{1}{5} \end{cases}$$

Esercizio 3.2.1

Risolvere con il metodo di sostituzione i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 6x+3y=-6 \\ 4x+6y=6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3x+6y=3 \\ 3x+2y=-7 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 12x-6y=6 \\ 3x+12y=-2 \end{cases};$$

Metodo di riduzione

Un metodo generalmente preferibile è il metodo di riduzione. In sostanza si stratta di risolvere il sistema eliminando man mano le incognite dalle altre equazioni sfruttando il **principio di equivalenza dei sistemi lineari**.

Per rendere più chiare le idee: il primo principio di equivalenza dice che:

$$\text{Se } A=B \text{ allora } A+C=B+C$$

Si prenda allora il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dots \\ A=B \\ C=D \\ \dots \end{cases}$$

Se $C = D$ allora C e D sono la stessa quantità, e perciò se $A = B$ è vero lo è anche $A+C = B+D$. Quindi si può sostituire ad $A = B$ la seconda equazione:

$$\begin{cases} \dots \\ A+C=B+D \\ C=D \\ \dots \end{cases}$$

Inoltre, per il secondo principio di equivalenza:

$$\text{Se } A = B \text{ allora } \alpha A = \alpha B$$

Da cui si può dedurre che se $C = D$ allora $\beta C = \beta D$, e perciò, per lo stesso ragionamento di prima, si può dire che:

$$\begin{cases} \dots \\ A+\beta C=B+\beta D \\ C=D \\ \dots \end{cases}$$

Nota bene!

Non si può sostituire una qualsiasi equazione con la nuova equazione ricavata: si possono solo sostituire $A = B$ o $C = D$.

Questa proprietà può essere sfruttata per *eliminare* un'incognita per volta dalle equazioni, per arrivare poi a trovare il valore di una delle incognite e, di conseguenza, trovare quello delle altre.

Si prenda, a titolo d'esempio, il seguente sistema lineare di 3 equazioni e 3 incognite:

$$\begin{cases} 4x+3y+6z=2 \\ x+6y+4z=5 \\ 3x+6y+4z=-2 \end{cases}$$

Come abbiamo detto l'obiettivo è eliminare, una per una, tutte le incognite tranne una, di cui rimarrà semplicemente il valore.

La cosa più sensata da fare è sostituire alla seconda (o alla terza) equazione la differenza tra la seconda e la terza equazione, in quanto hanno entrambi gli stessi coefficienti per y e z.

$$\begin{array}{cccc} x & 6y & 4z & 5 \\ -3x & -6y & -4z & 2 \\ \hline -2x & 0 & 0 & 7 \end{array}$$

$$-2x = 7 \rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

Facendo un po' di ordine e sostituendo x nelle altre due equazioni si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x=-\frac{7}{2} \\ 3y+6z=16 \\ 6y+4z=\frac{17}{2} \end{cases}$$

A questo punto, per eliminare y, si può sostituire alla terza equazione la differenza tra due volte la seconda equazione e la terza equazione:

$$\begin{array}{ccc} 6y & 12z & 32 \\ -6y & -4z & -\frac{17}{2} \\ \hline 0 & 8z & \frac{47}{2} \end{array}$$

$$8z = \frac{47}{2} \rightarrow z = \frac{47}{16}$$

Quindi il nuovo sistema lineare è:

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ 3y + 6z = 16 \\ z = \frac{47}{16} \end{cases}$$

A questo punto trovare y è banale:

$$3y + 3 \cdot \frac{47}{8} = 16 \rightarrow y + \frac{47}{8} = \frac{16}{3} \rightarrow y = -\frac{13}{24}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ y = -\frac{13}{24} \\ z = \frac{47}{16} \end{cases}$$

Esercizio 3.2.2

Risolvere con il metodo di riduzione i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 7z = 6 \\ 7x + 6y + z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = -2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x + 7y + 2z = 2 \\ 3x + 4y + 6z = -4 \\ 2x + 6y + 2z = 6 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 6x + 6y + 7z = 6 \\ 6x + 6y + 6z = 2 \\ 4x + y + 6z = 6 \end{cases} ;$$

Esistono altri metodi di risoluzione, che però per la maggior parte verranno ignorati. L'altro metodo che verrà esplorato più avanti, nella parte astratta, è il metodo di Cramer.

3.3 Sistemi come matrici e vettori

Riprendendo il discorso teorico sui sistemi lineari, questi si possono rappresentare tramite matrici e vettori.

Definizione: Rappresentazione matriciale dei sistemi lineari

Un sistema lineare generico può essere rappresentato come:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove A è la matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ è il vettore delle incognite:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

E $\mathbf{b}$ è il vettore dei termini noti:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Quindi, nel caso particolare del sistema lineare:

$$\begin{cases} 4x+3y+6z=2 \\ x+6y+4z=5 \\ 3x+6y+4z=-2 \end{cases}$$

Questo diventerebbe:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Da qui si può vedere il motivo della definizione di prodotto riga per colonna data all'inizio. Infatti, svolgendolo, si riottengono le equazioni del sistema iniziale:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+3y+6z \\ x+6y+4z \\ 3x+6y+4z \end{bmatrix}$$

Definizione: Matrice completa di un sistema lineare

Dato un certo sistema lineare, la **matrice completa** del sistema è la matrice dei coefficienti a cui viene affiancato il vettore colonna dei termini noti.

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

3.4 Metodo di Eliminazione di Gauss (MEG)

Le operazioni elementari di riga

Con questa nuova rappresentazione è possibile definire azioni che non cambiano l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare anche sulle matrici. Queste azioni sono dette **operazioni elementari di riga**.

Definizione: Operazioni elementari di riga

Le **operazioni elementari di riga** sono operazioni fatte sulle righe che non cambiano l'insieme delle soluzioni del sistema lineare associato. Sono:

1. **Scambio** di due righe;
2. **Prodotto con scalare** di una riga;
3. **Somma tra multipli** di due righe.

Per indicare lo svolgimento di queste operazioni si utilizza il simbolo $\sim$.

Forma a gradini

L'obiettivo del MEG è quello di portare la matrice completa del sistema una forma detta a gradini

Definizione: Matrice a gradini

Una matrice $n \times m$ è detta **a gradini** se il *pivot* (primo elemento non nullo) di ogni riga è in una colonna più a destra di quello della riga precedente.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Nota bene!

Non tutte le *colonne* hanno necessariamente un pivot.

Il motivo per cui si punta ad arrivare a una matrice a gradini è che questa corrisponde a un sistema "ridotto", ovvero in cui è stato applicato il metodo di riduzione in maniera completa. Per esempio:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ equivale a } \begin{cases} 7x+3y+z+4w=3 \\ 9y+z+5w=0 \\ 3z+w=10 \\ 5w=2 \end{cases}$$

A questo punto non resta che introdurre effettivamente il MEG:

Metodo di Eliminazione di Gauss

Teorema 3.4.1: Metodo di Eliminazione di Gauss

Il **Metodo di Eliminazione di Gauss** è un metodo di riduzione di una matrice nella sua forma a gradini tramite operazioni elementari di riga. Il metodo è il seguente:

1. Attraverso lo scambio di righe, portare la matrice a non avere righe con pivot più a sinistra dei pivot delle righe precedenti, avendo cura di mettere eventuali righe nulle in fondo alla matrice;
2. Individuare il pivot della riga in analisi (inizialmente la prima) ed eliminare attraverso la somma tra multipli di righe tutti gli elementi della colonna corrispondente sottostanti il pivot;
3. Ripetere il processo per la riga successiva fino ad avere una matrice a gradini.

Una volta ottenuta una matrice a gradini si può risolvere il sistema associato alla matrice sostituendo man mano i valori trovati.

Esempio 3.4.1

Risolvere il seguente sistema lineare usando il MEG:

$$\begin{cases} 3x+5y+3z+4w=1 \\ 6x+5y+3z+5w=-5 \\ 3x+2y+3z+4w=4 \\ 6x+5y+6z+4w=5 \end{cases}$$

Si inizia scrivendo la matrice completa del sistema:

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Qui sotto verranno scritti i vari passaggi del MEG svolti:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} R_2 = 2R_1 - R_2 \\ R_3 = R_1 - R_3 \\ R_4 = 2R_1 - R_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} R_3 = R_2 - \frac{5}{3}R_3 \\ R_4 = R_2 - R_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad R_4 = R_3 - R_4$$

Ora che la matrice è a gradini si può risolvere il sistema associato:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 3z + 4w = 1 \\ 5y + 3z + 3w = 7 \\ 3z + 3w = 12 \\ 4w = 2 \rightarrow w = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$3z + \frac{3}{2} = 12 \rightarrow z = \frac{7}{2}$$

$$5y + \frac{21}{2} + \frac{3}{2} = 7 \rightarrow y = -1$$

$$3x - 5 + \frac{21}{2} + 2 = 1 \rightarrow x = -\frac{13}{6}$$

Il vettore soluzione sarà:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{6} \\ -1 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Esercizio 3.4.1

Risolvere i seguenti sistemi lineari con il MEG:

$$\begin{cases} -4x + 10y - z = -6 \\ -12x + 2y + 2z = -5 \\ 9x + 10y + 2z = 3 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} -7x+4y-11z=3 \\ -6x-2y+2z=-1 \\ 5x-4y-11z=-5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 6x+6y+4z+2w=-7 \\ 2x+2y+5z+7w=-4 \\ 2x+6y+6z+4w=5 \\ 4v+2w+4z+4w=-7 \end{cases};$$

Forma a gradini ridotta

Per completezza, soprattutto nei testi anglofoni, viene introdotta la cosiddetta *reduced row-echelon form*, che verrà chiamata qui la **forma a gradini ridotta**.

Definizione: Forma a gradini ridotta

Una **matrice a gradini ridotta** è una matrice $n \times m$ a gradini in cui:

- I pivot valgono 1;
- I pivot sono gli unici elementi della loro colonna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

È spesso indicata con $\mathrm{rref}A$.
Esiste un'**unica** forma a gradini ridotta per ogni matrice e le operazioni elementari di riga non la cambiano.

Nota bene!

Molti software hanno la capacità di calcolare la forma a gradini ridotta delle matrici, quindi un ottimo modo per controllare se si è svolto il MEG correttamente è controllare tramite software che le due forme a gradini ridotte coincidano.

La comodità della forma a gradini ridotta è che corrisponde, nella forma di sistema lineare, a un sistema in cui quasi tutte le variabili hanno il loro valore esplicitato.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ equivale a } \begin{cases} x=3 \\ y=9 \\ z=4 \\ t=5 \end{cases}$$

L'algoritmo che utilizza le operazioni elementari di riga per portarsi nella forma a gradini ridotta si chiama **Metodo di Eliminazione di Gauss-Jordan**.

3.5 Soluzioni di un sistema lineare

È stato già introdotta la definizione di soluzione di un sistema lineare, ed è già stato detto che un sistema può avere solo 0, 1 o infinite soluzioni. Ora vale la pena approfondire il discorso delle soluzioni di un sistema lineare.

Nessuna soluzione

Definizione: Sistema impossibile

Un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è detto **impossibile** se non esiste alcun vettore $\mathbf{s}$ che soddisfa il sistema.

Spesso questo risultato deriva da un'incoerenza tra due equazioni che sono fondamentalmente uguali i cui termini noti sono diversi.

$$\begin{cases} \dots \\ \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha x + \beta y = \delta \\ \dots \end{cases}$$

Le due equazioni, all'inizio, possono anche non essere uguali (impedendo quindi di notare l'incongruenza), ma tramite il MEG si arriverà a una situazione del tipo:

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a & \beta b & \gamma c & \delta d & \varepsilon e \\ \zeta a & \eta b & \iota c & \kappa d & \lambda f \end{bmatrix}$$

Ignorando i coefficienti, è facile notare che le due righe differiscono solo nell'ultima colonna, cosa che si traduce invariabilmente nella forma:

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Che, nel sistema associato, equivale a dire $0 = *$, dove $*$ è un numero diverso da zero, che è un'equazione sempre falsa. Perciò:

Nota bene!

Quando la forma a gradini della matrice completa ha un pivot in ultima colonna ciò vuol dire che il sistema associato è impossibile.

Esempio 3.5.1

Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3w = 5 \\ 2x - y + 4z - w = 6 \\ 3x + y + z + 2w = 7 \\ 7x + 4y + 3z + 7w = 30 \end{cases}$$

Si scrive la matrice completa del sistema:

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 7 & 30 \end{bmatrix}$$

Poi si applica il metodo di riduzione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 7 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 14 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} R_2 &= 2 \cdot R_1 - R_2 \\ R_3 &= 3 \cdot R_1 - R_3 \\ R_4 &= 7 \cdot R_1 - R_4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} R_3 &= R_2 - R_3 \\ R_4 &= 2 \cdot R_2 - R_4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad R_4 = R_3 - R_4$$

Il sistema è **impossibile**. Infatti la matrice ottenuta corrisponderebbe al seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3w = 5 \\ 5y - 6z + 7w = 4 \\ -2z = -4 \\ 0 = -7 \end{cases}$$

Essendo l'ultima equazione sempre falsa, il sistema **non ha soluzione**.

Teorema 3.5.1: Esistenza della soluzione di un sistema omogeneo

Ogni sistema sistema lineare omogeneo ha almeno una soluzione, ovvero $\mathbf{s} = \vec{0}$. In altre parole, non esiste alcun sistema lineare omogeneo impossibile.

Dimostrazione

Si prenda il generico sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

In forma matriciale questo sistema diventa:

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizzando le operazioni elementari di riga, è impossibile avere un elemento non nullo in ultima colonna:

- **Scambio:** Lo scambio non cambia i valori dell'ultima colonna;
- **Prodotto con scalare:** Ogni prodotto che coinvolge lo 0 vale 0, quindi i valori dell'ultima colonna continuano a valere 0;
- **Somma tra multipli:** Come detto prima, i prodotti che coinvolgono lo 0 valgono 0, e la somma tra 0 vale 0.

Quindi la forma a gradini ridotta della matrice non avrà mai un pivot in ultima colonna, e quindi esisterà sempre una soluzione.
Per dimostrare che $\vec{0}$ è sempre soluzione di $A\mathbf{x} = \vec{0}$, basta fare la sostituzione $a_{11} = \cdots = a_{nm} = 0$ e vedere che si ottiene:

$$\begin{cases} 0x_1 + \cdots + 0x_m = 0 \\ 0x_1 + \cdots + 0x_m = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0x_1 + \cdots + 0x_m = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Che sono equazioni sempre vere. Perciò il sistema ha sempre almeno una soluzione, ovvero $\mathbf{s} = \vec{0}$.

□

Una sola soluzione

Definizione: Sistema determinato

Un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è detto **determinato** se esiste un solo vettore $\mathbf{s}$ che soddisfa il sistema.

Perché un sistema lineare abbia una sola soluzione è necessario che ci siano almeno tante equazioni quante sono le incognite; nel caso in cui ce ne siano di più dev'essere possibile ridurre il sistema in un sistema con n equazioni e n incognite. Queste n equazioni devono, naturalmente, aggiungere informazioni nuove e non devono essere sostanzialmente uguali ad una o più delle altre: questo concetto verrà approfondito quando si parlerà, nella parte astratta, di *indipendenza lineare*.

Nota bene!

Se un sistema ha una sola soluzione, allora la sua matrice completa avrà un pivot in tutte le colonne tranne per quella corrispondente al vettore dei termini noti.

Infinite soluzioni

Definizione: Sistema indeterminato

Un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è detto **indeterminato** se esistono infiniti vettori $\mathbf{s}$ che soddisfano il sistema.

I sistemi lineari indeterminati hanno un numero di equazioni "nuove" (ovvero non derivate da combinazioni di altre equazioni del sistema) più basso del numero di incognite.

Quando si parla di soluzioni di un sistema indeterminato, è importante notare che non si parla di infinite soluzioni casuali: è possibile infatti esprimere in maniera parametrica la "famiglia" di vettori che risolve il sistema di equazioni. Nella risoluzione di sistemi lineari indeterminati si avrà, infatti, un insieme di variabili *libere*, ovvero che possono assumere un qualunque valore reale, e un insieme di variabili *vincolate*, ovvero il cui valore è fisso ma determinato dalle variabili libere.

Esempio 3.5.2

Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x+y-z+2w=4 \\ 2x-y+w=5 \\ -x+3y+z=6 \\ -x+10y-z+5w=19 \end{cases}$$

Si scrive la matrice completa del sistema:

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 10 & -1 & 5 & 19 \end{bmatrix}$$

Poi si applica il MEG.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 11 & -2 & 7 & 23 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} R_2 &= 2\cdot R_1 - R_2 \\ R_3 &= R_1 + R_3 \\ R_4 &= R_1 + R_4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & -16 & 12 & -36 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} R_3 &= 4\cdot R_2 - 3\cdot R_3 \\ R_4 &= 11\cdot R_2 - 3\cdot R_4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_4 = 2\cdot R_3 - R_4$$

Come è possibile vedere, le prime tre colonne, corrispondenti a x, y e z, hanno un pivot: queste saranno le variabili vincolate. Invece la quarta colonna, quella di w, non ha alcun pivot: questa è la variabile libera. Passando al sistema lineare associato:

$$\begin{cases} x+y-z+2w=4 \\ 3y-2z+3w=3 \\ -8z+6w=-18 \\ 0=0 \end{cases}$$

A questo punto si trovano x, y e z in funzione di w.

$$\begin{cases} x+y-z+2w=4 \\ 3y-2z+3w=3 \\ 8z=18+6w \to z=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}w \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z+2w=4 \\ 3y-\frac{9}{2}-\frac{3}{2}w+3w=3 \to y=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}w \\ z=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}w \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}w-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}w+2w=4 \to x=\frac{15}{4}+\frac{3}{4}w \\ y=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}w \\ z=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}w \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{15}{4}+\frac{3}{4}w \\ y=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}w \\ z=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}w \end{cases}$$

Il vettore soluzione sarà quindi:

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{15}{4}+\frac{3}{4}w \\ \frac{5}{2}-\frac{1}{2}w \\ \frac{9}{4}+\frac{3}{4}w \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{9}{4} \\ 0 \end{bmatrix}+w\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}, w\in\mathbb{R}$$

Nota bene!

Nella forma a gradini, la matrice dei coefficienti avrà almeno una colonna senza pivot: a quelle colonne corrispondono le variabili libere.

Relazione tra soluzione di un sistema e del sistema omogeneo associato

Si prendano in considerazione i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x+4y-3z=3 \\ x+2y+z=2 \\ 8x+16y-22z=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+4y-3z=0 \\ x+2y+z=0 \\ 8x+16y-22z=0 \end{cases}$$

I due sistemi hanno apparentemente la stessa matrice dei coefficienti, ma uno dei due ha dei termini noti non nulli. Avendo la stessa matrice dei coefficienti, l'unica differenza nella forma ridotta delle due matrici sarà l'ultima colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Anche le soluzioni sono molto simili: infatti la soluzione del sistema omogeneo è presente nella soluzione del sistema non omogeneo, benché sommata a un altro vettore.

Quello presentato non è un caso particolare, ma questa relazione tra un sistema e il suo sistema omogeneo associato è valida per qualunque sistema lineare.

Teorema 3.5.2: Soluzione particolare + omogenea

Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si può esprimere l'insieme delle sue soluzioni come l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \vec{0}$ sommato a una soluzione particolare.

$$\text{Sol}\,(A, \mathbf{b}) = \mathbf{x}_{\text{part}} + \text{Sol}\,(A, \vec{0})$$

Dimostrazione

Si considerino $y \in \textbf{Sol}\,(A, \vec{0})$, ovvero $Ay = \vec{0}$, e $\mathbf{x}_{\text{part}} \in \textbf{Sol}\,A, \mathbf{b}$, ovvero $A\mathbf{x}_{part} = \mathbf{b}$. Calcolando il sistema per $\mathbf{x}_{\text{part}} + y$ si ottiene:

$$A(\mathbf{x}_{\text{part}} + y) = A\mathbf{x}_{\text{part}} + Ay = \mathbf{b} + \vec{0} = \mathbf{b}$$

Quindi la somma con una soluzione del sistema omogeneo continua ad essere soluzione del sistema non omogeneo. Perciò è lecito concludere che, avendo una soluzione del sistema lineare non omogeneo, aggiungere una soluzione del sistema omogeneo mantiene il risultato nell'insieme $\text{Sol}\,(A, \mathbf{b})$.
Si consideri ora $\mathbf{x}' \in \textbf{Sol}\,(A, \mathbf{b})$. Allora si ha $y = \mathbf{x}' - \mathbf{x}_{\text{part}}$. Infatti:

$$Ay = A(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{\text{part}}) = A\mathbf{x}' - A\mathbf{x}_{\text{part}} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \vec{0}$$

Perciò due soluzioni del sistema non omogeneo differiscono di una soluzione del sistema omogeneo. Perciò:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\text{part}} + y$$

ovvero ogni soluzione può essere espressa come la somma tra una soluzione particolare del sistema non omogeneo e una soluzione del sistema omogeneo, che è esattamente la tesi proposta.

$\square$

4 Inversa di una matrice

4.1 Definizione

Nell'insieme dei numeri reali ogni numero ha un inverso, ovvero:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists a^{-1} : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

Quindi per ogni numero reale esiste un altro numero che, moltiplicato con esso, ha come risultato 1.

Ora si risolverà il problema analogo sulle matrici: avendo già definito il concetto di potenza per le matrici ha senso chiedersi se per ogni matrice quadrata esiste un'altra matrice che, quando moltiplicata, dà come risultato la matrice identità.

Definizione: Matrice inversa

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è detta **invertibile** se esiste $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Questo problema è fondamentale nel caso delle trasformazioni lineari, in quanto se la matrice associata alla trasformazione è invertibile anche la trasformazione lo sarà; a questo argomento, però, ci si arriverà a tempo debito.

4.2 Calcolo tramite determinante

Per calcolare il determinante in questo modo bisogna definire l'*aggiunto classico* di una matrice.

Definizione: Aggiunto classico

L'**aggiunto classico** di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è la trasposta della matrice C i cui elementi sono il complemento algebrico dei corrispondenti elementi di A.

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{agg} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema 4.2.1: Determinante con aggiunto classico

La matrice quadrata diagonale i cui elementi non nulli sono il determinante di A è data dal prodotto di A con il suo aggiunto classico; questo prodotto è anche commutativo.

$$A \operatorname{agg} A = \operatorname{agg}(A) A = \det(A) I$$

Dimostrazione

Sia $A \operatorname{agg} A = B$. Si prenda l'elemento generico b_{ij} della matrice.
Per $i = j$ si ha:

$$b_{ii} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} =$$
$$= (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_{i;1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det M_{i;2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det M_{i;n} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det M_{i;j} = \det A$$

Per $i \neq j$ la questione è più complessa. Formalmente si ha:

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} =$$
$$= (-1)^{j+1} a_{i1} \det M_{j;1} + (-1)^{j+2} a_{i2} \det M_{j;2} + \cdots + (-1)^{j+n} a_{in} \det M_{j;n}$$

Questa può essere vista come lo sviluppo di Laplace del determinante di una matrice con due righe uguali, e perciò vale 0.
Per poter intuirlo meglio si prenda il caso 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

I complementi algebrici A_{11}, A_{12}, A_{13} sono rispettivamente:

$$A_{11} = \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_{12} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_{13} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Il secondo elemento di B sarà dato da:

$$a_{21} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{22} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{33} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

(nb. il $(-1)^{i+j}$ è già stato preso in considerazione). Questo può essere visto come lo sviluppo di Laplace sulla prima riga di un'altra matrice, che verrà chiamata M. I complementi algebrici rispetto alla prima riga sono uguali a quelli di A, quindi le prime due righe saranno le stesse:

$$M = \begin{bmatrix} * & * & * \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

I coefficienti dello sviluppo di Laplace sono a_{21}, a_{22}, a_{23}, quindi questi saranno gli elementi della prima riga:

$$M = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Avendo due righe uguali, si avrà che $\det M = 0$, e perciò ogni elemento della matrice B che non si trova sulla diagonale principale sarà nullo.

□

Usando l'identità appena dimostrata è possibile trovare la formula per l'inversa della matrice tramite i seguenti passaggi:

$$\text{agg}\,(A)A = \det(A)I$$

$$\frac{\text{agg}\,A}{\det A}A = I$$

$$\frac{\text{agg}\,A}{\det A} = A^{-1}$$

Per cui:

Teorema 4.2.2: Formula dell'inversa con il determinante

L'inversa della matrice A è data dal rapporto tra il suo aggiunto classico e il suo determinante:

$$A^{-1} = \frac{\text{agg}\,A}{\det A}$$

Questa formula implica direttamente il seguente criterio:

Teorema 4.2.3: Criterio di invertibilità (1)

Una matrice è **invertibile** se e solo se il suo determinante non è nullo.

$$\exists A^{-1} \iff \det A \neq 0$$

Esempio 4.2.1

Determinare se la seguente matrice è invertibile e, in tal caso, calcolarne l'inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tramite la regola di Sarrus si trova che:

$$\det A = 0+0+1-1-1-0 = -1 \neq 0$$

La matrice A è invertibile.
Per trovarne l'inversa si deve trovare l'aggiunto classico di A.

$$\text{agg}\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\operatorname{agg} A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dividendo per il determinante si ottiene la matrice inversa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.2.1

Determinare se le seguenti matrici sono invertibili e, in tal caso, calcolarne l'inversa:

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ -7 & -8 & 4 & 14 \end{bmatrix};$$

4.3 Calcolo tramite Gauss-Jordan

Un altro metodo, che richiede meno calcoli per matrici più grandi, è quello di affiancare a destra della propria matrice la matrice identità e provare a portarla, attraverso operazioni elementari, a sinistra. Ovvero:

Teorema 4.3.1: Calcolo dell'inversa con Gauss-Jordan

Affiancando a destra della matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice identità I_n e applicando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan si ottiene, al posto di I, A^{-1}.

$$(A|I_n) \sim (I_n|A^{-1})$$

Evidentemente il tutto può funzionare se e solo se nell'algoritmo non si ottengono righe di zeri, ovvero se e solo se ogni colonna di A ha un pivot.

Teorema 4.3.2: Criterio di invertibilità (2)

Una matrice è **invertibile** se e solo se la sua forma a gradini ridotta è uguale alla matrice identità.

$$\exists A^{-1} \iff \operatorname{rref} A = I_n$$

Esempio 4.3.1

Determinare se la seguente matrice è invertibile e, in tal caso, calcolarne l'inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Si affianca ad A la matrice identità, ottenendo:

$$(A|I) = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Facendo le seguenti operazioni elementari di riga ci si porta ad avere la seguente matrice:

1. $R_2 \leftrightharpoons R_3$
2. $R_2 = R_1 - R_2$
3. $R_3 = R_2 - 3 \cdot R_3$
4. $R_2 = 4 \cdot R_2 - R_3$
5. $R_1 = 4 \cdot R_1 + R_3$
6. $R_1 = 6 \cdot R_1 - 7 \cdot R_2$
7. $R_1 = \frac{R_1}{96}$
8. $R_2 = \frac{R_2}{24}$
9. $R_3 = -\frac{R_3}{8}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{32} & -\frac{13}{32} & \frac{5}{32} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = (I|A^{-1})$$

Dato che le prime tre colonne della forma a gradini ridotta hanno un pivot la matrice è invertibile e l'inversa è:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{32} & -\frac{13}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.3.1

Determinare se le seguenti matrici sono invertibili e, in tal caso, calcolarne l'inversa:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 6 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix};$$

5 Vettori fisici

Uno dei modi migliori di visualizzare i concetti spiegati nelle prossime parti è quello geometrico: se si è già studiata una materia come Fisica, si sarà già familiari con i vettori come "frecce nello spazio", ma è utile reintrodurre questi concetti e porre le basi della visualizzazione dei concetti dell'Algebra Lineare con l'uso dei vettori fisici.

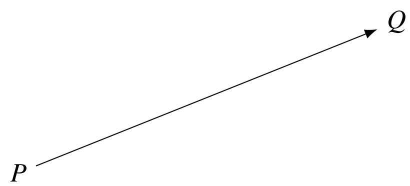
5.1 Definizione

Definizione: Vettore fisico

Un **vettore fisico** è definito da 3 caratteristiche:

1. **Norma:** la sua lunghezza; è anche chiamata intensità;
2. **Direzione:** la retta su cui giace;
3. **Verso:** dove sta puntando.

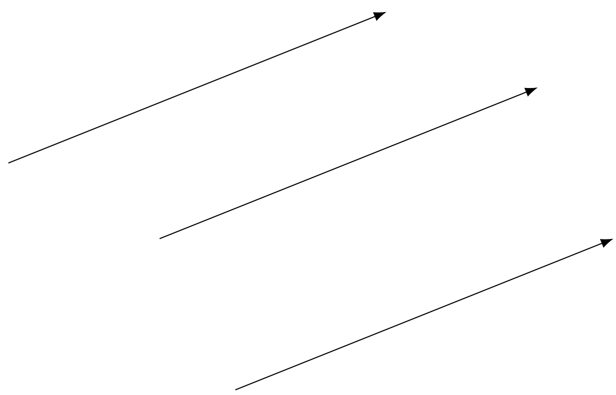
Definendo il punto di partenza e il punto d'arrivo del vettore è possibile rappresentarlo come un segmento orientato:



Nota bene!

Il vettore nullo è rappresentato dal segmento orientato $\vec{PP}$.

Questo segmento orientato è anche chiamato *vettore libero*. Questo perché è possibile disegnare più segmenti orientati che descrivono lo stesso vettore, ovvero che hanno stessa norma, direzione e verso.



Questi segmenti sono detti equipollenti.

Definizione: Equipollenza

Due segmenti orientati sono detti **equipollenti** se collegano due coppie di punti diverse e hanno stessa norma, direzione e verso.
Un vettore libero è la **classe di equipollenza** di tutti i segmenti orientati che lo rappresentano.

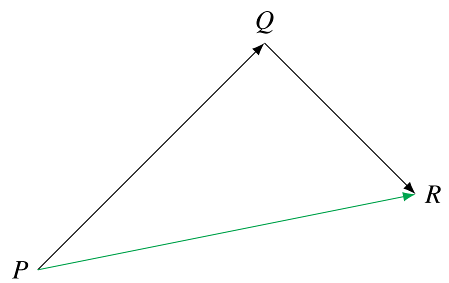
5.2 Somma e prodotto con scalare

Le operazioni di somma e prodotto con scalare sono sempre le stesse e seguono le solite proprietà, ma è necessario comprendere come vengono svolte con i vettori liberi.

Somma - Legge di Galileo

Il primo modo di sommare i vettori liberi è la legge di Galileo:

$$\vec{PQ}+\vec{QR}=\vec{PR}$$

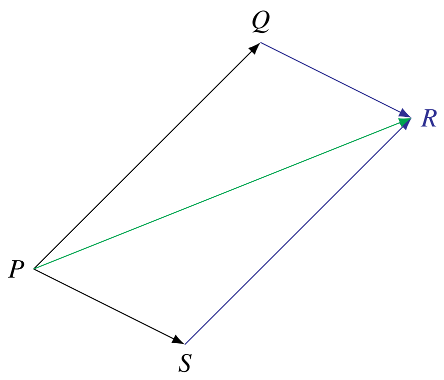


Teorema 5.2.1: Legge di Galileo

Per calcolare la somma di due vettori liberi con la **legge di Galileo** basta porre la coda del secondo vettore sulla testa del primo vettore e, per trovare il vettore somma, bisogna collegare la coda del primo vettore alla testa del secondo vettore.

Somma - Regola del parallelogramma

Un modo alternativo di esprimere lo stesso concetto è tramite la regola del parallelogramma:



$$\vec{PQ}+\vec{PS}=\vec{PR}$$

Teorema 5.2.2: Regola del parallelogramma

Per calcolare la somma di due vettori liberi con la **regola del parallelogramma**: si fanno coincidere le code dei due vettori; si duplica il primo vettore sulla testa del secondo e viceversa; le due teste si incontreranno nello stesso punto; collegando le code in comune e le teste in comune si otterrà il vettore somma.

I due metodi sono totalmente equivalenti.

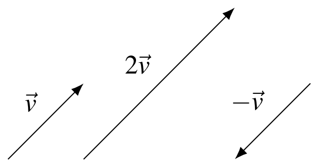
Prodotto con scalare

Con i vettori liberi il prodotto con scalare influisce sulla norma e su verso del vettore. In particolare:

Teorema 5.2.3: Prodotto con scalare

Il **prodotto con scalare** sui vettori liberi è svolto nel seguente modo:

- **Norma:** Moltiplicata per il modulo del numero reale moltiplicato;
- **Direzione:** Invariata;
- **Verso:** Cambia se e solo se il numero con cui il vettore è moltiplicato è negativo

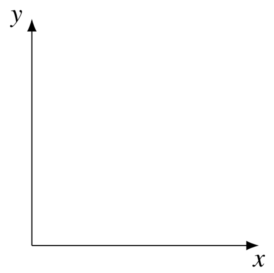


5.3 Sistemi di assi cartesiani

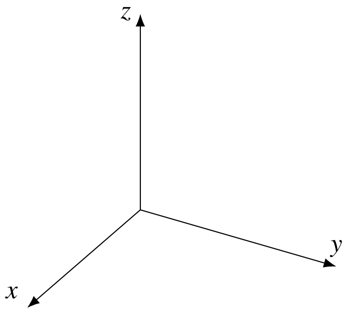
Spesso, per poter lavorare in maniera efficace con vettori ed elementi geometrici, è utile avere un *sistema di riferimento*: fin dalle elementari si utilizza come sistema di riferimento quello **cartesiano**.

Definizione: Sistema di riferimento cartesiano

Il **sistema di riferimento cartesiano** è un sistema di riferimento che è caratterizzato da degli assi ortogonali tra loro. Il punto in cui si intersecano gli assi è detta **origine** degli assi.



Sistema cartesiano per il piano

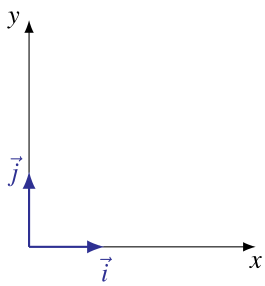


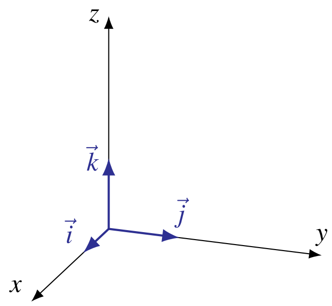
Sistema cartesiano per lo spazio

Per definire le direzioni degli assi si prendono in considerazione i cosiddetti **versori**.

Definizione: Versori

I **versori** sono dei vettori di norma unitaria che definiscono le direzioni e il verso degli assi.
Per convenzione $\vec{i}$ è il versore dell'asse x, $\vec{j}$ è il versore dell'asse y e $\vec{k}$ è il versore dell'asse z.



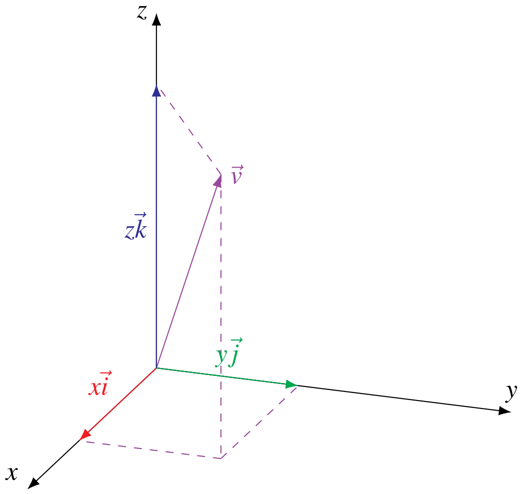


La comodità del sistema cartesiano è che ogni 2-vettore può essere espresso in maniera diretta come una combinazione lineare tra i versori. Infatti:

Teorema 5.3.1: Vettori nel sistema cartesiano

L'n-vettore $\vec{v}$, nel sistema cartesiano, può essere espresso come combinazione lineare dei versori usando le sue componenti come scalare da moltiplicare ai versori.

$$\vec{v} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Con questa nuova comprensione dei vettori, è possibile verificare che la somma di n-vettori e di vettori liberi è completamente equivalente.

Parte II

Parte astratta: Spazi vettoriali