



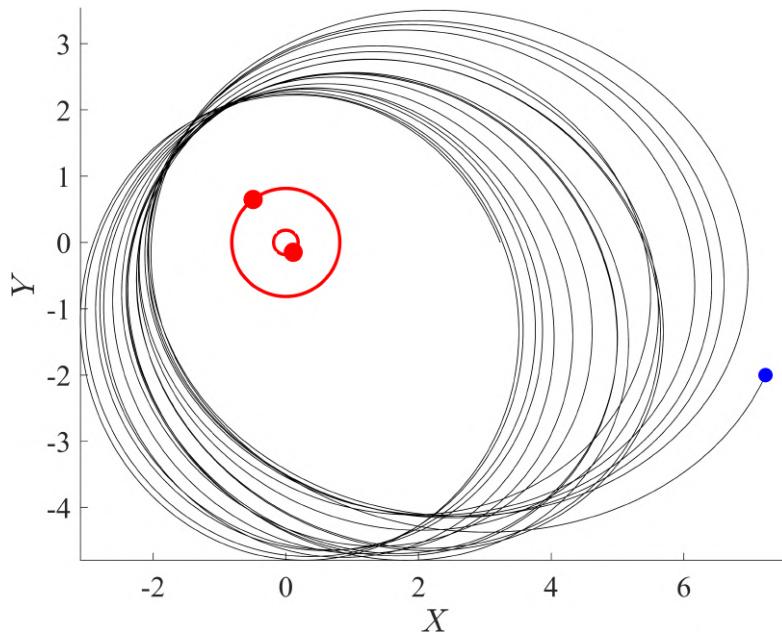
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εδνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Μηχανισμός διαφυγής εξωπλανητών με P-type orbits

Διπλωματική εργασία
του

Κωνσταντίνου Α. Μαργέτη



Αθήνα 2023



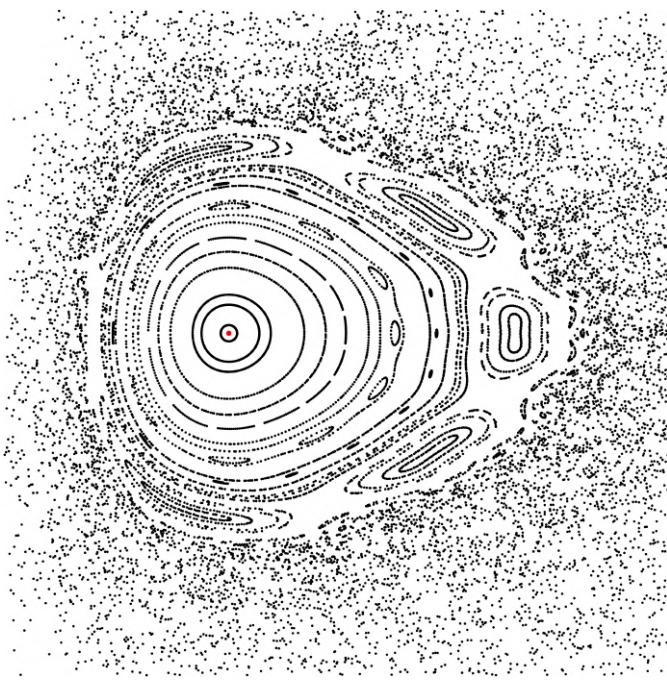
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εδνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Μηχανισμός διαφυγής εξωπλανητών με P-type orbits

Διπλωματική εργασία
του

Κωνσταντίνου Α. Μαργέτη
Αριθμός Μητρώου: 7110112100310



Επιβλέπων: Δρ. Ματθαίος Κατσανίκας

Αφιερώνω την εργασία αυτή στην μητέρα μου
Χριστίνα, που σε όλη την πορεία μου για
να πετύχω το στόχο-όνειρό μου, ήταν πάντα
δίπλα μου.

Η συγγραφή της εργασίας έγινε με τη βοήθεια του προγράμματος L^AT_EX, χρησιμοποιώντας το περιβάλλον του TeXstudio. Οι γραφικές παραστάσεις¹ έγιναν με την βοήθεια του περιβάλλοντος της MATLAB και της γλώσσας προγραμματισμού python, μέσα από το περιβάλλον του Anaconda Navigator. Κάποια γραφήματα έγιναν σε gnuplot.

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ, ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Ιούλιος 2023

¹Η εικόνα εξωφύλλου αποτελεί μία τροχιά διαφυγής ενός εξωπλανήτη κοντά στη περιοδική τροχιά P-orbit, στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Οι παράμετροι της τροχιάς είναι: $\mu = 0.185$, $C = -1.90$ ($x_0 = 3.2304$, $\dot{x}_0 = -0.2127$). Η εσωτερική εικόνα αποτελεί την τομή Poincaré $y = 0$ του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων, για $\mu = 0.185$ και $C = -1.90$. Έχει γίνει μεγέθυνση γύρω από την ευσταθή περιοδική τροχιά P-orbit (χόκκινο σημείο).

Η τριμελής επιτροπή της διπλωματικής εργασίας είναι:

1. Ματθαίος Κατσανίκας (κύριος επιβλέπων): Εντεταλμένος Ερευνητής, Κέντρο Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Ακαδημία Αθηνών.
2. Κοσμάς Γαζέας: Λέκτορας του Τμήματος Φυσικής στο Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής.
3. Θεοχάρης Αποστολάτος: Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής στο Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής.

Περίληψη

Τα διπλά συστήματα αστέρων (ή γενικότερα τα πολλαπλά), αποτελούν την πλειοψηφία των αστρικών συστημάτων στο Γαλαξία. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν ελάχιστες παρατηρήσεις εξωπλανητών σε τέτοια συστήματα. Η παρούσα εργασία προσπαθεί να απαντήσει στο αν υπάρχει κάποιος μηχανισμός που οδηγεί σε διαφυγή P-type εξωπλανητών και κατά συνέπεια κάποια συσχέτιση των παραμέτρων των συστημάτων στα οποία έχει ανακαλυφθεί εξωπλανήτης.

Αρχικά γίνεται μία εισαγωγή σε βασικές έννοιες για τα διπλά συστήματα αστέρων και το τι αποτελεί ένα δυναμικό σύστημα. Επικεντρώνεται στα Χαμιλτονιανά συστήματα και εξηγούνται έννοιες απαραίτητες για την συνέχεια όπως ευσταθής, ασταθής περιοδική τροχιά. Παρουσιάζεται ένα απλό παράδειγμα ώστε να φανούν οι διαφορές μεταξύ ολοκληρώσιμου και μη ολοκληρώσιμου συστήματος καθώς και εισάγεται η έννοια των τομών Poincaré. Στη συνέχεια αναλύεται η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των πολλαπλοτήτων των ασταθών περιοδικών τροχιών, η μέθοδος των Lagrangian Descriptors (LDs) και γίνονται τρεις απλές εφαρμογές. Παρακάτω, παρουσιάζεται το περιορισμένο πρόβλημα τριών σωμάτων μαζί με κάποιες τομές Poincaré και τροχιές ώστε να κατανοηθεί καλύτερα η συμπεριφορά του συστήματος. Στη συνέχεια γίνεται η βασική ανάλυση για τις P-orbits διπλού συστήματος αστέρων με παράμετρο μάζας $\mu = 0.185$ και ενέργειας $C = -1.90$. Ακολουθεί η στατιστική ανάλυση για τους εξωπλανήτες που έχουν ανακαλυφθεί σε διπλά ή πολλαπλά αστρικά συστήματα και τέλος, εξάγονται κάποια γενικά συμπεράσματα.

Abstract

Binary star systems (or generally multiple systems) constitute the majority of stellar systems in the Galaxy. However, there are very few observations of exoplanets in such systems. This work attempts to answer whether there is a mechanism that leads to the escape of P-type exoplanets and, consequently, some correlation of the parameters of the systems in which an exoplanet has been discovered.

Initially, an introduction is given to basic concepts of double star systems and what constitutes a dynamical system. It focuses on Hamiltonian systems and explains concepts necessary for the continuation, such as stable and unstable periodic orbits. A simple example is presented to illustrate the differences between an integrable and non-integrable system, and the concept of Poincaré sections is introduced. Then, the method used to calculate the multiplicities of unstable periodic orbits, the method of Lagrangian Descriptors (LDs), is analyzed, and three simple applications are made. Furthermore, the restricted three-body problem is presented along with some Poincaré sections and trajectories to better understand the behavior of the system. Next, the basic analysis is performed for P-orbits of a binary star system with a mass parameter $\mu = 0.185$ and energy $C = -1.90$. This is followed by a statistical analysis of the exoplanets discovered in binary or multiple star systems, and finally, some general conclusions are drawn.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	1
1.1 Διπλά αστρικά συστήματα	1
1.1.1 Εξωπλανήτες σε διπλά αστρικά συστήματα	2
1.2 Δυναμικά συστήματα	4
1.2.1 Περί Χαμιλτονιανών συστημάτων	7
1.2.2 Τομές Poincaré και ευστάθεια περιοδικών τροχιών	9
1.2.3 Παράδειγμα Χαμιλτονιανού συστήματος: Διπλός αρμονικός ταλαντωτής	13
2 Η μέθοδος των Lagrangian Descriptors	19
2.1 Μαθηματικός φορμαλίσμος των LDs	19
2.2 Παραδείγματα υπολογισμού των LDs	24
2.2.1 Ταλαντωτής Duffing	24
2.2.2 Γραμμική Χαμιλτονιανή 2.B.E.	26
2.2.3 Το Χαμιλτονιανό σύστημα Hénon-Heiles	29
3 Το περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα τριών σωμάτων	35
3.1 Περιγραφή του συστήματος	35
3.1.1 Εξισώσεις κίνησης	38
3.1.2 Ενεργειακή επιφάνεια και περιοχές επιτρεπόμενης κίνησης	40
3.1.3 Υπολογισμός των σημείων ισορροπίας	43
3.2 Τομές Poincaré για το περιορισμένο πρόβλημα τριών σωμάτων	46
4 Δυναμική των P-orbits: Διαφυγή από το σύστημα	55
4.1 Τομή Poincaré και P-orbits για $\mu = 0.185$ και $C = -1.90$	55
4.2 LDs των P-orbits για $\mu = 0.185$ και $C = -1.90$	59
5 Εξωπλανήτες σε διπλά συστήματα: Στατιστική ανάλυση	67
5.1 Στατιστική ανάλυση	69
6 Συμπεράσματα	81
Βιβλιογραφία	90

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Διπλά αστρικά συστήματα

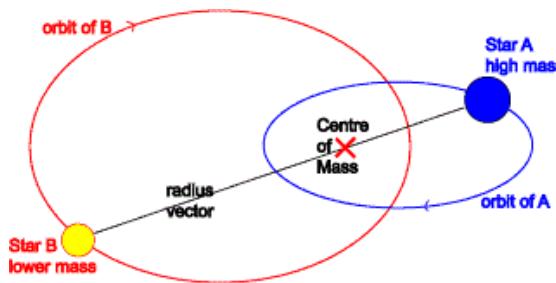
Οι περισσότεροι αστέρες στον ουρανό δεν είναι «μοναχικοί» αστέρες (single stars) αλλά είναι μέλη αστρικών συστημάτων. Ουσιαστικά τα διπλά ή γενικότερα τα πολλαπλά αστρικά συστήματα αστέρων αποτελούν τον κανόνα. Στατιστικές μελέτες (Latham et al. 1992, Pinfield et al. 2003) έχουν δείξει ότι το 50 με 60% των αστέρων στον Γαλαξία είναι μέλη διπλών ή πολλαπλών συστημάτων. Επομένως η μελέτη της δυναμικής των συστημάτων αυτών οδηγεί στην κατανόηση της συμπεριφοράς της πλειονότητας των ηλιακών συστημάτων.

Σαν διπλά αστρικά συστήματα ορίζονται τα ηλιακά συστήματα που αποτελούνται από δύο αστέρες οι οποίοι είναι βαρυτικά δέσμιοι και περιφέρονται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας (Εικόνα 1.1.1). Στον ουρανό τα συστήματα αυτά φαίνονται σαν μεμονωμένοι αστέρες δίνοντας την λανθασμένη εντύπωση ότι αποτελούν συστήματα σαν το Ήλιακό. Οι περιπτώσεις όπου σε κάποιο διπλό σύστημα είναι ευδιάκριτα και τα δύο μέλη είναι λίγες (Οπτικά διπλά συστήματα). Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί το σύστημα α Cen.

Εύλογα κάποιος θα αναρωτιόταν πώς γίνεται να παρατηρηθούν τα υπόλοιπα συστήματα στα οποία δεν ξεχωρίζουν τα μέλη τους στον ουρανό σαν διαφορετικά αντικείμενα. Αυτό μπορεί να συμβεί χρήσιμα με τρεις τρόπους:

- Στην αστροφυσική παρατηρούνται πολλοί αστέρες να έχουν μεταβλητή λαμπρότητα, γι' αυτό τον λόγο ονομάζονται μεταβλητοί αστέρες και ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τα αίτια αυτής της μεταβλητότητας. Στην πρώτη κατηγορία υπάρχουν οι φυσικοί μεταβλητοί αστέρες, οι οποίοι έχουν μεταβλητότητα στην λαμπρότητα λόγω φυσικών αιτιών, για παράδειγμα οι παλλόμενοι αστέρες. Στην άλλη κατηγορία ανήκουν οι εξωγενείς μεταβλητοί αστέρες, στους οποίους παρατηρείται μεταβολή στην λαμπρότητα λόγω γεωμετρικών φαινομένων. Αν για παράδειγμα τύχει ένας αστέρας να έχει συνοδό και ο άξονας που είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησης των αστέρων¹, σχηματίζει δηλαδή γωνία $\sim 90^\circ$ με την ευθεία παρατήρησης, τότε οι δύο αστέρες δημιουργούν περιοδικές εκλείψεις. Έτσι εάν

¹Όπως θα αναλυθεί στην συνέχεια, μία καλή προσέγγιση είναι οι αστέρες κινούνται σε δισδιάστατο επίπεδο και όχι στον χώρο.



Εικόνα 1.1.1: Ένα διπλό σύστημα αστέρων που περιφέρεται γύρω από το κέντρο μάζας του.

παρατηρηθεί περιοδική μεταβολή στην λαμπρότητα μίας πηγής στον ουρανό αποτελεί μία ένδειξη ότι υπάρχει διπλό σύστημα αστέρων. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται διπλά εκλειπτικά αστρικά συστήματα.

- Εάν ένα φάσμα ενός αστέρα φαίνεται να μεταβάλλεται περιοδικά, δηλαδή οι φασματικές γραμμές κάνουν μία ταλάντωση σε συνάρτηση με τον χρόνο, αποτελεί ένδειξη ύπαρξης και άλλου σώματος στο σύστημα. Η μεταβολή οφείλεται στο φαινόμενο Doppler που προκαλείται από την κίνηση του παρατηρούμενου αστέρα γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος.
- Η ανακάλυψη ενός μέλους σε κάποιο αστρικό σύστημα (για παράδειγμα ενός τρίτου αστέρα σε ένα γνωστό διπλό σύστημα) μπορεί να γίνει μέσα από την μελέτη του διαγράμματος O-C. Η μεταβολή στην περιόδο του συστήματος μπορεί να οφείλεται σε έναν τρίτο αστέρα-μέλος, που λόγω της βαρύτητάς του προκαλεί κίνηση και στα άλλα δύο σώματα. Για παράδειγμα με αυτήν την μέθοδο βρέθηκε ένα τέταρτο σώμα στο τριπλό σύστημα HV Aqr (Μαργέτης Κ., 2021, HV Aqr: Ένα εξωτικό σύστημα σε επαρή).

Τα διπλά αστρικά συστήματα αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στην αστροφυσική διότι χρησιμοποιώντας τις παραπάνω μεθόδους είναι δυνατόν να υπολογιστούν τόσο οι απόλυτες παράμετροι των αστέρων-μελών, (Μάζες, φωτεινότητες, ακτίνες) όσο και οι γεωμετρικές παράμετροι της τροχιάς τους (ημιάξονες τροχιάς).

1.1.1 Εξωπλανήτες σε διπλά αστρικά συστήματα

Οι μέθοδοι εύρεσης ενός επιπλέον αστέρα σε ένα σύστημα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην εύρεση ενός εξωπλανήτη. Αναγκαία συνθήκη είναι η ύπαρξη μεγαλύτερης διακριτικής ικανότητας. Συγκεκριμένα μπορεί να παρατηρηθεί μέσα από εκλείψεις (transit), μέσα από μεταβολή στο φάσμα του αστέρα (RV), μέσα από την μεταβολής των χρόνων εκλείψεων (διάγραμμα O-C) που υπάρχουν στο σύστημα (timing) ενώ μπορούν να αναγνωριστούν εξωπλανήτες και με αστρομετρία ή microlensing.

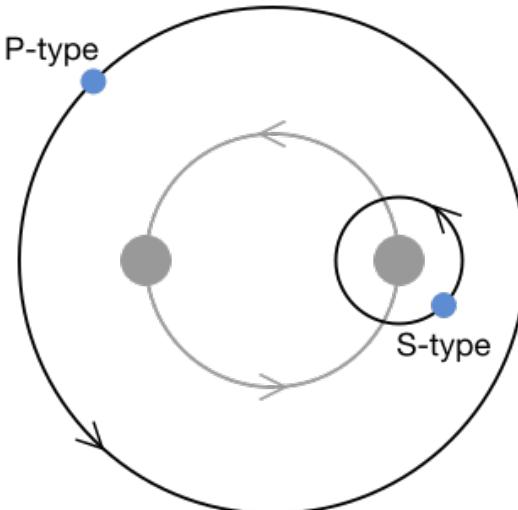
Συνεπώς τα τελευταία χρόνια με την εξέλιξη της τεχνολογίας έχει γίνει σημαντική πρόοδος στην εύρεση εξωπλανητών. Οι παρατηρήσεις ωστόσο έχουν δείξει ότι αν και σε μεμονωμένα αστέρια σαν τον Ήλιο ανακαλύπτονται εξωπλανήτες, σε διπλά ή πολλαπλά αστρικά συστήματα φαίνεται να εκλείπουν (μόνο στο 1/3 των πολλαπλών συστημάτων έχουν ανακαλυφθεί εξωπλανήτες). Μία στατιστική ανάλυση του 2019 (A. A. Abushattal et al., 2019) έδειξε ότι το 96% των εξωπλανητών που έχουν παρατηρηθεί ανήκουν σε συστήματα με ένα αστέρα, το 3% σε συστήματα με δύο αστέρες και το 1% σε συστήματα με περισσότερους αστέρες.

Οι εξωπλανήτες σε διπλά αστρικά συστήματα μπορούν να περιφέρονται γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος-πλανητικού τύπου (**P-type**) ή μπορούν να περιφέρονται γύρω από τον κάθε αστέρα-τύπου δορυφόρου (**S-type**), όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.1.2.

Επιστέφοντας στον προηγούμενο προβληματισμό, η λιγοστή εύρεση εξωπλανητών σε συστήματα με παραπάνω από έναν αστέρα μπορεί να οφείλεται στις τεχνικές παρατήρησης. Ένας εξωπλανήτης που δημιουργεί φαινόμενο Doppler στο φάσμα ενός αστέρα μέλους, θα ξεχωρίζει ελάχιστα από το φαινόμενο Doppler που προκαλείται από τον συνοδό αστέρα. Αντίστοιχα για να γίνει επιτυχημένη παρατήρηση έκλειψης (transit), χρειάζεται μεγάλη διακριτική ικανότητα γιατί το ποσοστό φωτός που «χρύβει» ο εξωπλανήτης είναι πολύ μικρό. Αποτέλεσμα, σε ένα σύστημα με δύο αστέρες να τύχει να γίνει επικάλυψη της έκλειψης του εξωπλανήτη από τον συνοδό αστέρα.

Από την άλλη μεριά, μπορεί να οφείλεται και στο γεγονός ότι οι εξωπλανήτες που δημιουργούνται σε τέτοια συστήματα, είναι πολύ πιο εύκολο να διαφύγουν στο μεσογαλαξιακό χώρο λόγω του βαρυτικού δυναμικού των δύο αστέρων.

Δημιουργείται δηλαδή ο προβληματισμός στο κατά πόσο είναι μόνο παρατηρησιακό πρόβλημα η ανίχνευση εξωπλανητών σε τέτοια συστήματα ή υπάρχει και κάποιος άλλος λόγος. Στα πλαίσια της εργασίας αυτής, ανακατασκευάστηκε η εργασία του 2019 (A. A. Abushattal et al., 2019), προσθέτοντας νέες ανακαλύψεις εξωπλανητών σε συστήματα αστέρων και δημιουργώντας περισσότερα γραφήματα ώστε να βρεθεί τυχόν συσχέτιση μεταξύ των παραμέτρων του συστήματος και των ανακαλυφθέντων εξωπλανητών.



Εικόνα 1.1.2: Οι δύο κατηγορίες εξωπλανητών σε ένα διπλό σύστημα αστέρων.

1.2 Δυναμικά συστήματα

Απαραίτητο στοιχείο για την ανάλυση της εργασίας αυτής είναι η έννοια του δυναμικού συστήματος. Τα δυναμικά συστήματα εμφανίζονται παντού στην φύση και η μελέτη τους οδηγεί σε γνώση της εξέλιξής τους. Η περιγραφή των συστημάτων μπορεί να διαφέρει (ανάλογα π.χ. την γεωμετρία), όμως τα εργαλεία και οι τεχνικές για την περιγραφή είναι παρόμοιες. Στο τέλος της παραγράφου αναφέρεται ένα απλό παράδειγμα για να γίνουν κατανοητά τα χαρακτηριστικά της κατηγορίας των δυναμικών συστημάτων που θα μας απασχολήσουν, τα Χαμιλτονιανά συστήματα.

Σαν δυναμικό σύστημα ορίζεται οποιοδήποτε φυσικό σύστημα στο οποίο (Boccaletti, D. and Pucacco, G., 2001):

1. Η κατάσταση που μπορεί να προσδιοριστεί σε κάποια χρονική στιγμή, να είναι της μορφής:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad (1.2.1)$$

όπου \mathbf{x}_n είναι διάνυσμα στο N -διάστατο χώρο $\mathbf{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nN})$ και $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ N συναρτήσεις.

2. Η χρονική εξέλιξη του συστήματος δίνεται από ένα σύστημα N εξισώσεων:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.2)$$

Το άνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ μπορεί να εξαρτάται από διάφορες φυσικές ποσότητες όπως οι θέσεις, οι ταχύτητες κ.λ.π. Το σύστημα 1.2.2 αποτελεί ένα σύστημα N εξισώσεων.

Σε κάποια δυναμικά συστήματα υπάρχει μία συνάρτηση $I(\mathbf{x}, t)$, της οποίας η τιμή είναι σταθερή σε κάθε τροχιά ($\mathbf{x}(t)$). Η συνάρτηση ονομάζεται **ολοκλήρωμα** του δυναμικού συστήματος. Η χρησιμότητα του ολοκληρώματος είναι σημαντική διότι έχοντας την εξίσωση:

$$I(x_1, \dots, x_N) = A \quad (1.2.3)$$

μπορεί να λυθεί ως προς μία μεταβλητή x_i και να γίνει αντικατάσταση στο σύστημα εξισώσεων 1.2.2, με αποτέλεσμα ο αριθμός των εξισώσεων να γίνει $N - 1$. Το παραπάνω γενικεύεται και για περισσότερα από ένα ολοκληρώματα. Εάν για παράδειγμα υπάρχουν δύο ολοκληρώματα τότε οι εξισώσεις γίνονται $N - 2$.

Μία τροχιά $\mathbf{x}(t)$ που έχει την ιδιότητα $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T)$ ονομάζεται **περιοδική** με **περίοδο** T . Οι περιοδικές τροχιές διακρίνονται σε ευσταθείς και σε ασταθείς. Στην πρώτη περίπτωση οι γειτονικές τροχιές παραμένουν κοντά στην περιοδική τροχιά, ενώ στη δεύτερη τείνουν να απομακρυνθούν εκθετικά με την πάροδο του χρόνου.

Για την επίλυση των δυναμικών συστημάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο προσεγγίσεις (Boccaletti, D. and Pucacco, G., 2001, Vol 1):

- **Αναλυτική θεωρία:** Αποδεικνύονται εκτενώς διάφορες ιδιότητες για το σύστημα και είναι δυνατόν να λυθούν αναλυτικά οι εξισώσεις 1.2.2.

- **Αριθμητική επίλυση:** Σε αντιδιαστολή με την αναλυτική προσέγγιση, η εύρεση των ιδιοτήτων του συστήματος και η επίλυση των εξισώσεων 1.2.2 γίνεται μέσα από αριθμητικούς υπολογισμούς. Η μεγάλη διαφορά με την αναλυτική προσέγγιση είναι ότι η αριθμητική επίλυση αναπόφευκτα προσδίδει ένα σφάλμα, που ανάλογα με την μέθοδο αριθμητικής επίλυσης και ανάλογα με κάποιες τιμές συγκεκριμένων παραμέτρων του συστήματος, μπορεί να είναι σημαντικό.

Όταν ένα σύστημα μπορεί να λυθεί αναλυτικά, μπορεί να περιγραφεί απόλυτα για κάθε μελλοντικό χρόνο (forward) και για κάθε παρελθοντικό χρόνο (backward). Αντίθετα αν η περιγραφή μπορεί να γίνει μόνο αριθμητικά, η «ισχύς» της λύσης είναι περιορισμένη. Τα περισσότερα συστήματα στην φύση δεν μπορούν να περιγραφούν με αναλυτική προσέγγιση. Για παράδειγμα το σύστημα 3 σωμάτων Γη-Ηλιος-Δίας, δεν έχει αναλυτική λύση. Όμως όπως και σε πολλά συστήματα, μπορεί να γίνει μία προσέγγιση: να αγνοηθεί η αλληλεπίδραση που δέχεται η Γη από τον Δία με την λογική ότι είναι πολύ μικρότερη από την αλληλεπίδραση που δέχεται η Γη από τον Ήλιο. Έτσι το σύστημα γίνεται 2 σωμάτων που επιδέχεται αναλυτική επίλυση.

Για την μελέτη των δυναμικών συστημάτων απαραίτητη είναι η σωστή περιγραφή του συστήματος με ένα σετ εξισώσεων. Η πρώτη σημαντική προσπάθεια περιγραφής συστημάτων με ένα σύστημα διανυσματικών εξισώσεων της μορφής των διαφορικών εξισώσεων 1.2.2, ήρθε από τον Νεύτωνα.

Η δημιουργία του Νεύτωνα (1642-1727), η **Νευτώνεια μηχανική**, αποτελεί την πρώτη θεωρία κίνησης της ύλης κατέχοντας μία σημαντική θέση στην ιστορία. Εξηγήθηκαν για πρώτη φορά πολύπλοκα φυσικά φαινόμενα, π.χ. προέκυψαν αναλυτικά οι ελλειπτικές τροχιές των πλανητών που ως τότε ήταν αποτέλεσμα των Νόμων του Κέπλερ, ενώ βασιζόμενοι στους απλούς φυσικούς νόμους που την διέπει, ο Adams και ο Le Verrier μπόρεσαν να προβλέψουν την ύπαρξη του πλανήτη Ποσειδώνα πριν παρατηρηθεί με τηλεσκόπιο, χρησιμοποιώντας ως μοναδικό δεδομένο τις διαταραχές της τροχιάς του Ουρανού. Η Φυσική πλέον απέκτησε την ικανότητα ακριβούς ποσοτικής πρόβλεψης σε κάθε κινούμενο σώμα.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα περιγράφει την μεταβολή της ταχύτητας \vec{u} για ένα σώμα μάζας m , που κινείται στις τρεις διαστάσεις δεχόμενο σταθερή στο χρόνο δύναμη \vec{F} :

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

με U το δυναμικό που βρίσκεται μέσα το σωμάτιο και δημιουργεί την δύναμη.

Η παραπάνω σχέση είναι μία εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς την θέση του σωματιδίου αφού $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ και γράφεται¹:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \nabla U \tag{1.2.4}$$

όπου για ένα μέγεθος a ισχύει: $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$.

¹Ο συμβολισμός του διανύσματος γίνεται είτε με το κλασσικό σύμβολο-βέλος είτε με την πιο έντονη γραφή.

Παρόλο που λύνει προβλήματα με μεγάλη ακρίβεια η νευτώνεια θεώρηση κρύβει κάποια προβλήματα. Ένα τέτοιο είναι η θεώρηση του χώρου και του χρόνου σαν δύο ασύνδετα πράγματα, κάτι που έλυσε η θεωρία της σχετικότητας ή η περιγραφή του μικρόκοσμου-χβαντομηχανική. Ακόμα η διανυσματική γλώσσα που χρησιμοποιεί η Νευτώνεια μηχανική, εξίσωση 1.2.4, περιορίζει την εφαρμογή της.

Ο Λαγκράνζ την περίοδο (1783-88) διατύπωσε τον φορμαλισμό της **Λαγκρανζιανής μηχανικής** και μαζί με την Χαμιλτονιανή θεώρηση οικοδόμησαν την αναλυτική μηχανική. Σε αντίθεση με την νευτώνεια θεώρηση, η γεωμετρία και η μηχανική χρειάζονται μόνο στην περιγραφή των βαθμών ελευθερίας του συστήματος ενώ στη συνέχεια η εργασία είναι σε ένα πρώτο επίπεδο αναλυτική. Για την περιγραφή ενός συστήματος χρειάζεται μία συνάρτηση, η Λαγκρανζιανή (συνάρτηση Lagrange), η οποία περιέχει όλη τη φυσική του συστήματος. Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση περιέχει και κάτι περισσότερο: μέσα της κρύβονται όλες οι συμμετρίες του συστήματος.

Για ένα σωματίδιο σε μία διάσταση ορίζονται οι γενικευμένες συντεταγμένες (q, \dot{q}) και γράφεται η Λαγκρανζιανή συνάρτηση (L) σαν την κινητική ενέργεια ($T(\dot{q})$) μείον το δυναμικό ($U(q)$) (Ιωάννου, Π. και Αποστολάτος, Θ., 2007):

$$L = T - U$$

Η L ελαχιστοποιείται επάνω στην φυσική τροχιά του σώματος δίνοντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange, που περιγράφουν την κίνηση του σωματιδίου:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \quad (1.2.5)$$

Η φυσική τροχιά που τελικά ακολουθεί το σωματίδιο διαδραματίζεται στον χώρο των γενικευμένων θέσεων και ταχυτήτων (q, \dot{q}). Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση μπορεί να μετασχηματιστεί (μετασχηματισμός Legendre) και να προκύψει μία νέα συνάρτηση, η Χαμιλτονιανή \mathcal{H} , η οποία θα είναι συνάρτηση της γενικευμένης θέσης (q) και γενικευμένης ορμής (p) σαν (Ιωάννου, Π. και Αποστολάτος, Θ., 2007):

$$\mathcal{H} = T(p) + V(q)$$

Η γενικευμένη ορμή (κανονική ορμή) προκύπτει από την γενικευμένη ταχύτητα σαν:

$$p = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

Παράλληλα ο φορμαλισμός του Χάμιλτον βασίζεται και σε κάτι ακόμα, στον **χώρο των φάσεων**. Η κατάσταση του συστήματος σε μία δοσμένη χρονική στιγμή μπορεί να παρασταθεί σαν σημείο στον χώρο αυτόν που εν γένει είναι πολλών διαστάσεων. Εάν για παράδειγμα το διάνυσμα της θέσης έχει 2 συντεταγμένες (x, y) και οι αντίστοιχες ορμές είναι (p_x, p_y), ο χώρος των φάσεων έχει $2 \times 2 = 4$ διαστάσεις. Το σημείο που αρχικά βρισκόταν το σωματίδιο (Αρχική συνθήκη - Α.Σ.) εξελίσσεται στον χώρο αυτόν διαγράφοντας μία πορεία που ονομάζεται **τροχιά**. Την τροχιά δεν πρέπει να την συγχέει κανείς με την φυσική διαδρομή που θα ακολουθούσε ένα σωμάτιο στον πραγματικό χώρο,

αλλά είναι η τροχιά που ακολουθεί το σωμάτιο στον χώρο των φάσεων. Προφανώς βλέποντας την τροχιά εκεί είναι δυνατόν να κατανοηθεί και η συμπεριφορά του σωματιδίου στον πραγματικό χώρο, όπως επίσης να βρεθούν και άλλα χρήσιμα χαρακτηριστικά για το σύστημα.

1.2.1 Περί Χαμιλτονιανών συστημάτων

Στην παρούσα εργασία τα συστήματα που θα αναφερθούν είναι Χαμιλτονιανά δυναμικά συστήματα. Τα συστήματα αυτά έχουν κάποια συγκεχριμένα χαρακτηριστικά που μπορούν να μελετηθούν με την βοήθεια συγκεχριμένων εργαλείων.

Ένα Χαμιλτονιανό σύστημα χαρακτηρίζεται από κάποιες ιδιότητες (Ιωάννου, Π. και Αποστολάτος, Θ., 2007):

- Με συντεταγμένες-μεταβλητές $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$, συνολικά $2n$ σε αριθμό, ο χώρος των φάσεων όπως αναφέρθηκε παραπάνω θα είναι διαστάσεων $N = 2n$. Οι μεταβλητές αυτές αποτελούν τους βαθμούς ελευθερίας (B.E.) του συστήματος.
- Με γνωστή την Χαμιλτονιανή συνάρτηση του συστήματος $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$ γράφονται οι εξισώσεις του Hamilton για τις μεταβλητές (x_i, y_i) :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Εάν μία ποσότητα $I(x_1, \dots, y_n)$ παραμένει σταθερή κατά μήκος κάθε τροχιάς, αποτελεί ολοκλήρωμα της κίνησης. Συγκεχριμένα θα ισχύει (Boccaletti, D. and Pucacco, G., 2001):

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} \right) = 0 \xrightarrow{\text{Εξ. 1.2.6}} \\ \frac{dI}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i} - \frac{\partial I}{\partial y_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Ορίζεται η αγκύλη Poisson μεταξύ των μεγεθών A και B σαν:

$$[A, B] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial y_i} - \frac{\partial A}{\partial y_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} \right) \quad (1.2.8)$$

Οπότε από τις εξισώσεις 1.2.7, 1.2.8 η ποσότητα I είναι ολοκλήρωμα εάν ισχύει:

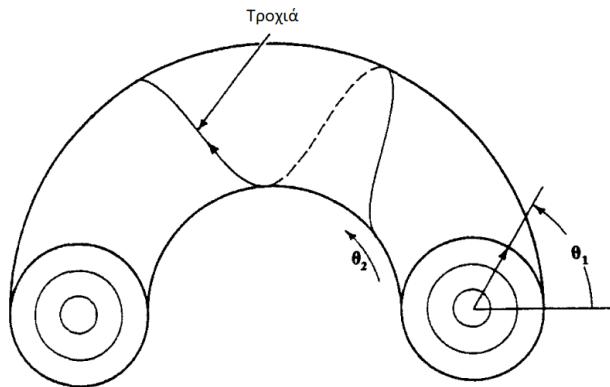
$$[I, \mathcal{H}] = 0 \quad (1.2.9)$$

Είναι προφανές ότι για $I = \mathcal{H}$ θα είναι $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 0$. Δηλαδή η Χαμιλτονιανή συνάρτηση όταν δεν εξαρτάται από τον χρόνο είναι ολοκλήρωμα, που καλείται **ολοκλήρωμα της ενέργειας**:

$$\mathcal{H}(x_1, \dots, y_n) = E \quad (1.2.10)$$

Τα Χαμιλτονιανά συστήματα n βαθμών ελευθερίας που έχουν n ανεξάρτητα ολοκληρώματα I_i ($i = 1, \dots, n$) τα οποία είναι σε ενέλιξη μεταξύ τους¹, ονομάζονται **ολοκληρώσιμα** (ολοκληρώσιμα κατά Liouville). Στα συστήματα αυτά μπορεί να γραφτεί η πλήρης λύση με μία ακολουθία ολοκληρώσεων. Αντίθετα στα συστήματα που δεν υπάρχει αυτή η δυνατότητα καλούνται **μη ολοκληρώσιμα**. Σε αυτή την περίπτωση εμφανίζεται το χάος, δηλαδή διαφορετικές αρχικές συνθήκες οδηγούν σε εκθετική απόκλιση των τροχιών (Contopoulos, 2002, Κεφ. 2).

Ένα πολύ ισχυρό εργαλείο αποτελεί το **KAM theorem** (Kolmogorov-Arnold-Moser theorem) (Kolmogorov 1954, Arnold 1961, 1962, 1963, Moser 1962). Προβλέπει για ένα κοντά στην ολοκληρωσιμότητα σύστημα n βαθμών ελευθερίας (εκφρασμένο σε μεταβλητές γωνίας-δράσης) τον περιορισμό της κίνησης στο χώρο των φάσεων σε έναν n -διάστατο τόρο \mathcal{M} (Εικόνα 1.2.1). Αυτό ισχύει για έναν μεγάλο αριθμό αρχικών συνθηκών (γύρω από ευσταθείς περιοδικές τροχιές)



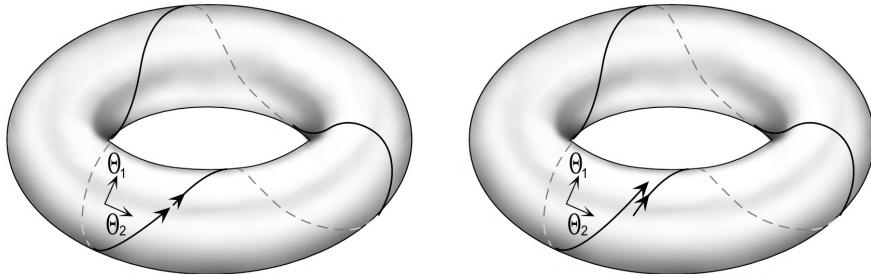
Εικόνα 1.2.1: Τροχιά σε 3-διάστατο τόρο. Οι συντεταγμένες (θ_1, θ_2) αποτελούν τις συντεταγμένες γωνίας (γωνίας-δράσης) που προκύπτουν από μετασχηματισμό της \mathcal{H} . Οι διαφορετικοί τόροι που αντιστοιχούν σε διαφορετική τιμή του ολοκληρώματος της ενέργειας φαίνονται στο εσωτερικό.

Οι n -διάστατοι τόροι αυτοί, συστήματος n βαθμών ελευθερίας, βρισκόμενοι στον $2n$ -διάστατο φασικό χώρο λέγονται αναλλοίωτοι τόροι. Μία τροχιά που ξεχινά αρχικά σε έναν τέτοιο τόρο παραμένει πάντα «κολλημένη» σε αυτόν. Γενικά, διαφορετικές αρχικές συνθήκες οδηγούν σε διαφορετικούς n -τόρους, που περιέχουν ο ένας τον άλλον (χωρίς να τέμνονται) στο χώρο των φάσεων.

Η κίνηση σε έναν συγκεκριμένο n -τόρο \mathcal{M} (οι συντεταγμένες (θ_1, θ_2) στην Εικόνα 1.2.1), είναι ακριβώς ισοδύναμη με έναν συνδυασμό n χωριστών περιοδικών κινήσεων με συχνότητες ω_i . Για παράδειγμα στην Εικόνα 1.2.1 η θ_1 περιστρέφεται με μία συχνότητα ω_1 ενώ η θ_2 περιστρέφεται με μία συχνότητα ω_2 γύρω από τον τόρο. Εάν ο λόγος ω_1/ω_2 είναι ρητός αριθμός τότε η τροχιά θα κλείσει πάνω στο \mathcal{M} και είναι ακριβώς **περιοδική** (periodic). Αντίθετα εάν ο λόγος ω_1/ω_2 είναι άρρητος η τροχιά δεν κλείνει και καλύπτει

¹ $[I_i, I_j] = 0$ για $i, j = 1, \dots, n$ και $i \neq j$.

πυκνά το M . Η τροχιά τότε είναι σχεδόν περιοδική και καλείται **ημιπεριοδική** (quasi-periodic). Η διαφορά φαίνεται στην Εικόνα 1.2.2.



Εικόνα 1.2.2: Αριστερά: $\omega_1/\omega_2 = 3$, η τροχιά κλείνει τελικά στο σημείο που ξεκίνησε αποτελώντας μία περιοδική τροχιά (3 περιστροφές για την γωνία θ_1 γίνεται μία περιστροφή για την γωνία θ_2). Δεξιά: Ο λόγος στην περίπτωση αυτή είναι άρρητος, με αποτέλεσμα η τροχιά να μην κλείνει, μία ημιπεριοδική τροχιά. Τελικά θα καλυφθεί όλη η επιφάνεια του τόρου.

Πηγή: Masoliver, J., & Ros, A. (2011)

1.2.2 Τομές Poincaré και ευστάθεια περιοδικών τροχιών

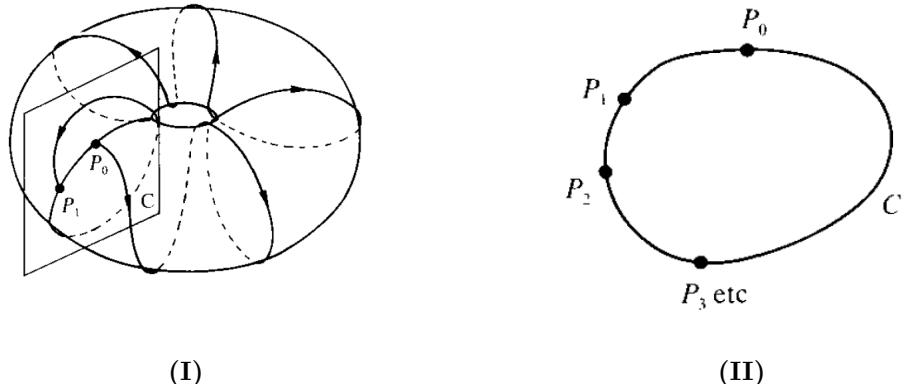
Για την κατανόηση και την μελέτη ενός Χαμιλτονιανού συστήματος είναι απαραίτητο να αναγνωριστεί η χαοτική ή όχι συμπεριφορά του. Για να γίνει αυτό κανείς εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι στα ολοκληρώσιμα -μη χαοτικά- συστήματα οι τροχιές επάνω στον n -τόρο είναι περιοδικές (ή σχεδόν περιοδικές) (Εικόνα 1.2.2). Ο Poincaré πρότεινε μία μέθοδο ανίχνευσης των χαοτικών και μη συμπεριφορών με το εργαλείο της **επιφάνειες τομής** (τομή Poincaré) (Tom W.B. Kibble & Frank H. Berkshire, 2004).

Έστω ένα σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας (x, y) . Ο χώρος των φάσεων θα είναι 4-διάστατος (x, y, \dot{x}, \dot{y}) . Η χρονοανεξάρτητη Χαμιλτονιανή $H =$ σταθερά μειώνει κατά 1 την διάσταση (αφού μπορεί να λυθεί ως προς μία μεταβλητή) και πλέον ο χώρος κίνησης είναι 3-διάστατος (x, y, \dot{x}) . Η ιδέα του Poincaré ήταν να πάρει μία επιφάνεια-επίπεδο και να «κόψει» τον τόρο (Εικόνα 1.2.3(I)). Η επιφάνεια αυτή αντιστοιχεί σε μία τιμή των μεταβλητών (x, y, \dot{x}) , π.χ. $y = 0$. Η τροχιά περνάει από την επιφάνεια σε ένα σημείο, έστω P_0 . Χρειάζεται να δώσει κανείς κατεύθυνση κατά την επιλογή του σημείου¹ με την επιλογή προσήμου στο \dot{y} , π.χ. $\dot{y} > 0$. Μετά από κάποιον χρόνο η τροχιά θα ξαναέρθει και θα περάσει από την τομή σε ένα άλλο εν γένει σημείο P_1 κλπ.

Στην περίπτωση του ολοκληρώσιμου συστήματος (ή όταν το σύστημα βρίσκεται κοντά στην ολοκληρωσιμότητα) οι περιοδικές τροχιές θα εμφανιστούν στην επιφάνεια τομής σαν πεπερασμένα σημεία ανάλογα με τον λόγο των συχνοτήτων: Εάν ο λόγος είναι 3, τα σημεία

¹Μονοσήμαντος ορισμός της επιφάνειας τομής.

που θα εμφανιστούν στην επιφάνεια τομής θα είναι 3 και η τροχιά θα περνάει συνεχώς από τα σημεία αυτά. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **πολλαπλότητα της περιοδικής τροχιάς**. Αντίστοιχα σε ημιπεριοδικές τροχιές η τροχιά θα περνάει συνεχώς σε διαφορετικά σημεία P_0, P_1, \dots και έτσι εν τέλει θα δημιουργηθεί μία κλειστή καμπύλη C (αναλοίωτη καμπύλη-invariant curve) (Εικόνα 1.2.3(II)).



Εικόνα 1.2.3: (I): Τομή ενός KAM τόρου με την επιφάνεια τομής. (II): Διακριτές συστροφές γύρω από την καμπύλη C κε κάθε επαναφορά διαδρομής.

Πηγή: Tom W.B. Kibble & Frank H. Berkshire (2004)

Σε ένα ολοκληρώσιμο σύστημα, η επιφάνεια τομής αποτελείται αποκλειστικά από αναλλοίωτες καμπύλες. Η αντίστοιχη εικόνα για ένα σχεδόν ολοκληρώσιμο σύστημα θα αποτελείται από κλειστές καμπύλες (ημιπεριοδικές τροχιές), γύρω από ευσταθείς περιοδικές τροχιές και διάσπαρτα σημεία που αντιστοιχούν σε χαοτικές τροχιές

• Χαρακτηρισμός περιοδικών τροχιών

Απαραίτητος είναι ο διαχωρισμός του είδους των περιοδικών τροχιών σε ευσταθείς και σε ασταθείς, γιατί όπως θα αναλυθεί υπάρχει διαφορετική συμπεριφορά γύρω από κάθε είδος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ένα σύστημα 2 B.E., δοσμένης ενέργειας (Contopoulos, 2002):

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = e$$

Για να γίνει η επιφάνειας τομής $y = y_0$ χρειάζεται να λυθεί η παραπάνω σχέση προς μία μεταβλητή, έστω την p_y κρατώντας την θετική μόνο τιμή. Προκύπτει οπότε η 2-διάστατη τομή \mathcal{T} στην οποία ένα αρχικό σημείο $P(x_0, p_{x_0})$ συνδέεται με το επόμενο σημείο $P_1(x_1, p_{x_1})$ που βρίσκεται και αυτό επάνω στην τομή. Η απεικόνιση \mathcal{T} δίνεται από εξισώσεις της μορφής:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_0, p_{x_0}) \\ p_{x_1} = g_2(x_0, p_{x_0}) \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Προφανώς μία περιοδική τροχιά θα έχει $x_1 = x_0$ και $p_{x_1} = p_{x_0}$ και θα είναι ένα αμετάβλητο σημείο στην τομή. Αναπτύσσοντας κατά Taylor σε μία μικρή περιοχή γύρω από την περιοδική τροχιά (μία μικρή διαταραχή στην περιοδική τροχιά) τις εξισώσεις 1.2.11 και κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους προκύπτει (Contopoulos, 2002, Κεφ. 2):

$$\Delta x_1 = a\Delta x_0 + b\Delta p_{x_0} \quad \Delta p_{x_1} = c\Delta x_0 + d\Delta p_{x_0} \quad (1.2.12)$$

όπου

$$a = \frac{\partial g_1}{\partial x_0}, \quad b = \frac{\partial g_1}{\partial p_{x_0}}, \quad c = \frac{\partial g_2}{\partial x_0}, \quad d = \frac{\partial g_2}{\partial p_{x_0}} \quad (1.2.13)$$

Το παραπάνω γράφεται σε μορφή πινάκων σαν:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta p_{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta p_{x_0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta p_{x_1} \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta p_{x_0} \end{pmatrix} \quad (1.2.14)$$

Ο χαρακτηρισμός της περιοδικής τροχιάς μπορεί να γίνει βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα \mathcal{A} , ο οποίος καλείται μονόδρομος πίνακας. Δηλαδή λύνοντας την εξίσωση

$$\det(\mathcal{A} - \lambda I_2) = 0 \quad (1.2.15)$$

όπου I_2 ο μοναδιαίος πίνακας 2×2 . Οι συντελεστές από τις σχέσεις 1.2.13 βρίσκονται αριθμητικά και έτσι μπορούν να βρεθούν οι ιδιοτιμές της συγκεκριμένης περιοδικής τροχιάς.

Προκύπτει ότι (Contopoulos, 2002, Κεφ. 2) αν $|a + d| > 2$ οι ιδιοτιμές $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| < 1$ είναι πραγματικές και η περιοδική τροχιά είναι **ασταθής**. Αντίθετα εάν $|a + d| < 2$ οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές και βρίσκονται επάνω στον μοναδιαίο κύκλο $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Η περιοδική τροχιά τότε είναι **ευσταθής**.

Ορίζεται η παράμετρος ευστάθειας Hénon α σαν:

$$\alpha = \frac{|a + d|}{2} \quad (1.2.16)$$

και η συνθήκη ευστάθειας/αστάθειας γίνεται $|\alpha| < 1$ και $|\alpha| > 1$ αντίστοιχα.

Γύρω από μία ευσταθή περιοδική τροχιά στην επιφάνεια τομής, υπάρχει ένα σετ αμετάβλητων καμπύλων και γιαυτό τον λόγο καλείται **κέντρο** (non-hyperbolic orbit). Τροχιές που ξεκινάνε κοντά σε μία ευσταθή περιοδική τροχιά παραμένουν κοντά χωρίς να πλησιάζουν ή να απομακρύνονται, διαγράφοντας ημιπεριοδικές τροχιές. Τα κέντρα είναι δομικά ευσταθή, δηλαδή δεν χάνουν τον χαρακτηρισμό τους σε μικρές διακυμάνσεις του συστήματος¹.

Από την άλλη μεριά γύρω από μία ασταθή περιοδική τροχιά στην επιφάνεια τομής, **υπερβολικό** σημείο, τα πράγματα είναι αρκετά διαφορετικά. Σε 4 διαφορετικές κατευθύνσεις (αντιδιαμετρικές μεταξύ τους) ορίζονται οι διευθύνσεις των ιδιοιδιανυσμάτων που προκύπτουν από τις ιδιοτιμές λ_1 , λ_2 (Σχέση 1.2.15). Μπορούν να οριστούν οι εξής αναλλοίωτοι υπόχωροι στον φασικό χώρο της τομής Poincaré που μελετάται (Wiggins 2003, Κατσανίκας 2012):

¹Μικρές διακυμάνσεις αφορούν διαφορετική τιμή της ενέργειας ή σε μία παράμετρο του συστήματος.

- Ο υπόχωρος που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα οι οποίες βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Ο υπόχωρος αυτός είναι ο **ευσταθής** αναλλοίωτος υπόχωρος.
- Ο υπόχωρος που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα οι οποίες βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Ο υπόχωρος αυτός είναι ο **ασταθής** αναλλοίωτος υπόχωρος

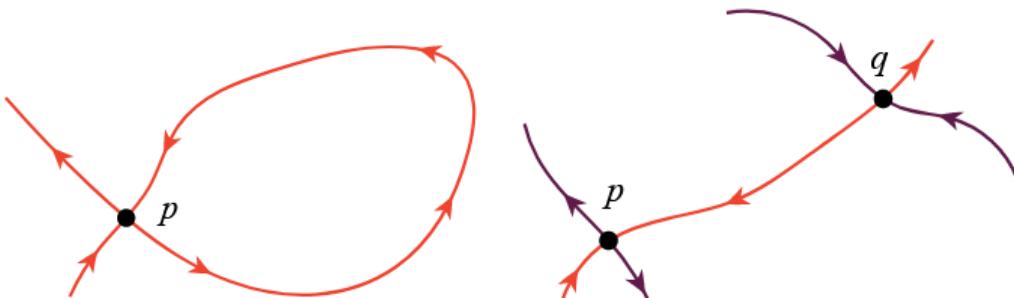
Οι υπόχωροι αυτοί αποτελούν την τοπική (γραμμική) προσέγγιση των αντίστοιχων αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων (υπερεπιφανειών-invariant manifolds). Η κάθε πολλαπλότητα (ευσταθής και ασταθής) των επιφανειών τομής αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται αντιδιαμετρικά (Εικόνα 1.2.4). Τροχιές που ξεκινάνε κοντά στους ευσταθείς κλάδους οδηγούνται (ασυμπτωτικά) στην ασταθή περιοδική τροχιά ενώ τροχιές που ξεκινάνε κοντά στον ασταθή κλάδο απομακρύνονται από αυτήν. Οι πολλαπλότητες μπορούν να έχουν σύνθετο σχήμα και ο προσδιορισμός τους παίζει καθοριστικό ρόλο στην κίνηση των σωμάτων στα Χαμιλτονιανά συστήματα.

Σε ένα ολοκληρώσιμο σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας, η ενεργειακή επιφάνεια είναι δύο διαστάσεων ενώ οι πολλαπλότητες είναι μίας διάστασης (Παράδειγμα §2.2.2 και ολοκληρώσιμου συστήματος 1 B.E.: Παράδειγμα §2.2.1). Αντίθετα σε ένα μη ολοκληρώσιμο σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας, η ενεργειακή επιφάνεια (εφόσον υπάρχει το ολοκλήρωμα ενέργειας) είναι τριών διαστάσεων ενώ οι πολλαπλότητες δύο διαστάσεων (Παράδειγμα §2.2.3).

Όταν δύο πολλαπλότητες (manifolds), της ίδιας ασταθούς περιοδικής τροχιάς τέμνονται δημιουργείται μία ομοκλινική τροχιά (**homoclinic orbit**) (Εικόνα 1.2.4(I)). Τροχιές που ξεκινάνε επάνω στον ασταθή κλάδο απομακρύνονται μέχρι που μετά από ένα σημείο αρχίζουν να ξανά πλησιάζουν στην ασταθή περιοδική τροχιά μέσα από τον ευσταθή της κλάδο.

Αντίστοιχα εάν δύο πολλαπλότητες (manifolds), διαφορετικών ασταθών περιοδικών τροχιών τέμνονται δημιουργούν μία ετεροκλινική τροχιά (**heteroclinic orbit**) (Εικόνα 1.2.4(II)). Τροχιές που ξεκινάνε κοντά στον ασταθή κλάδο μίας ασταθούς περιοδικής τροχιάς απομακρύνονται και τελικά πλησιάζουν μία διαφορετική ασταθή περιοδική τροχιά, μέσα από τον ευσταθή της κλάδο.

Οι ομοκλινικές και οι ετεροκλινικές τροχιές παίζουν καθοριστικό ρόλο στην μεταφορά των σωμάτων μεταξύ περιοδικών τροχιών στον χώρο των φάσεων.



(I)

(II)

Εικόνα 1.2.4: Αριστερά: Μία ομοκλινική τροχιά μίας ασταθούς περιοδικής τροχιάς p . Δεξιά: Μία ετεροκλινική τροχιά μεταξύ δύο ασταθών περιοδικών τροχιών q και p .

1.2.3 Παράδειγμα Χαμιλτονιανού συστήματος: Διπλός αρμονικός ταλαντωτής

- Στην πρώτη περίπτωση όταν αναλυθεί ο διπλός αρμονικός ταλαντωτής όπου δεν υπάρχει σύζευξη. Η Χαμιλτονιανή συνάρτηση είναι:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) \equiv \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \quad (1.2.17)$$

όπου τα $\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega_1^2 x^2$, $\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 y^2$ είναι οι Χαμιλτονιανές για τους δύο χωριστούς ταλαντωτές. Οι εξισώσεις του Hamilton για $m = 1$ δίνουν:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = p_x, & \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\omega_1^2 x \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = p_y, & \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -\omega_2^2 y \end{cases} \quad (1.2.18)$$

Έστω τώρα οι αρχικές συνθήκες που θα κάνουν συγκεκριμένο το πρόβλημα:

$$x_0, p_{x0} = 0, y_0 = 0, p_{y0} = 0.5$$

όπου $x_0 \in [0, 3]$. Για κάθε τιμή του x_0 το σύστημα έχει διαφορετική ενέργεια από την Σχέση 1.2.17:

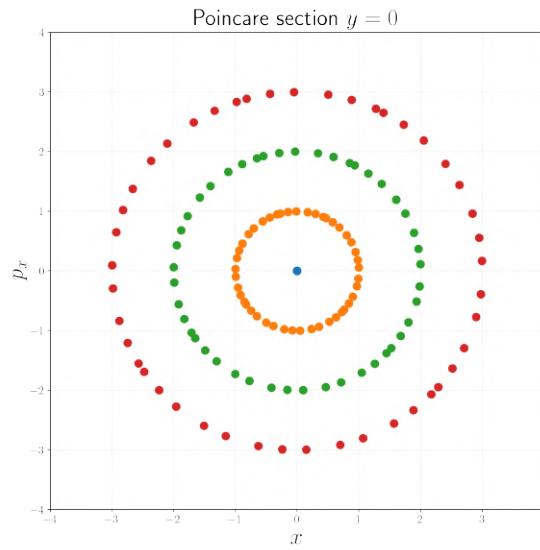
$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}0.25 + \frac{1}{2}\omega_1^2 x_0^2 \quad (1.2.19)$$

Το σύστημα αυτό εφόσον έχει δύο ολοκληρώματα (όσοι και οι B.E.) είναι ολοκληρώσιμο. Για λόγο συχνοτήτων $\omega_1/\omega_2 = c$ όλες οι τροχιές είναι περιοδικές πολλαπλότητας c (Εικόνες 1.2.5(I) & 1.2.5(II)). Αντίστοιχα για άρρητο λόγο οι τροχιές είναι ημιπεριοδικές και συμπληρώνουν τις αντίστοιχες αμετάβλητες καμπύλες (Εικόνα

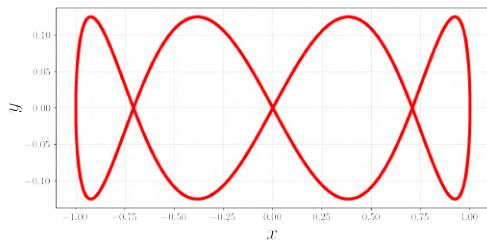
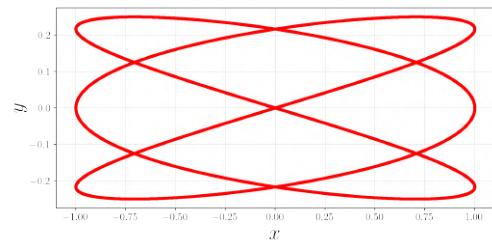
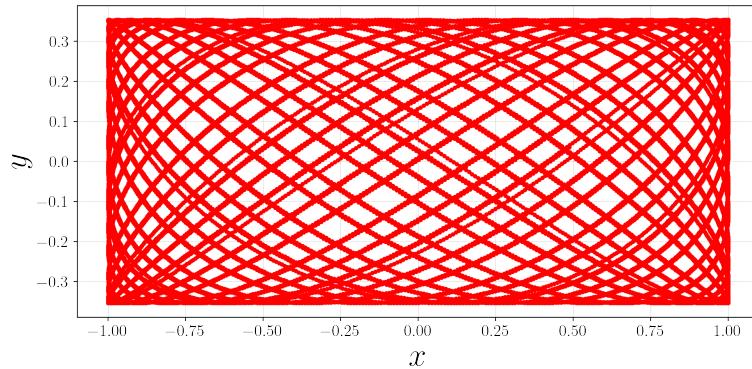
1.2.5(III)). Το κάθε χρώμα αποτελεί διαφορετική αρχική συνθήκη x_0 και κατά συνέπεια διαφορετική ενέργεια \mathcal{H} . Στην Εικόνα 1.2.6 φαίνεται η φυσική τροχιά (στον πραγματικό χώρο) του σωματιδίου m . Στην περίπτωση του άρρητου λόγου το σωματίδιο θα περάσει από όλες τις θέσεις στον χώρο (x, y) . Οι τροχιές μπορούν να προβλεφθούν μιας και το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο. Πιο συγκεκριμένα οι Εξισώσεις 1.2.18 μπορούν να λυθούν δίνοντας:

$$x = \alpha \sin \omega_1 (t - t_1), \quad y = \beta \sin \omega_2 (t - t_2)$$

με α και β τα όρια του παραλληλογράμμου της πραγματικής κίνησης του σωματιδίου στον φυσικό χώρο, π.χ. Εικόνα 1.2.6(III): $(-\alpha, \alpha) \times (-\beta, \beta) = (-1, 1) \times (-0.35, 0.35)$. Το μεγάλο πλεονέκτημα της τομής Poincaré είναι ότι οι διαφορικές αυτές εξισώσεις δε χρειάζεται να επιλυθούν προκειμένου να καταλάβουμε αν το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο.

(I) $\omega_2/\omega_1 = 4$ (II) $\omega_2/\omega_1 = 6$ (III) $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{2}$

Εικόνα 1.2.5: Τομή Poincaré για τον διπλό αρμονικό ταλαντωτή. Οι ενέργειες από μέσα προς τα έξω είναι: $\mathcal{H} = 0.125, 0.625, 2.125, 4.625$.

(I) $\omega_2/\omega_1 = 4$ (II) $\omega_2/\omega_1 = 2/3$ (III) $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{2}$

Εικόνα 1.2.6: Οι φυσικές τροχιές του σωματιδίου για συγκεκριμένους λόγους συχνοτήτων και τιμή των ενεργειών: $\mathcal{H}_{\text{I,III}} = 2.125$ & $\mathcal{H}_{\text{II}} = 18.125$.

- Στην περίπτωση όπου υπάρχει σύζευξη η Χαμιλτονιανή συνάρτηση του διπλού αφμονικού ταλαντωτή είναι:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) + \epsilon xy^2 \quad (1.2.20)$$

Οι εξισώσεις του Hamilton για $m = 1$ δίνουν:

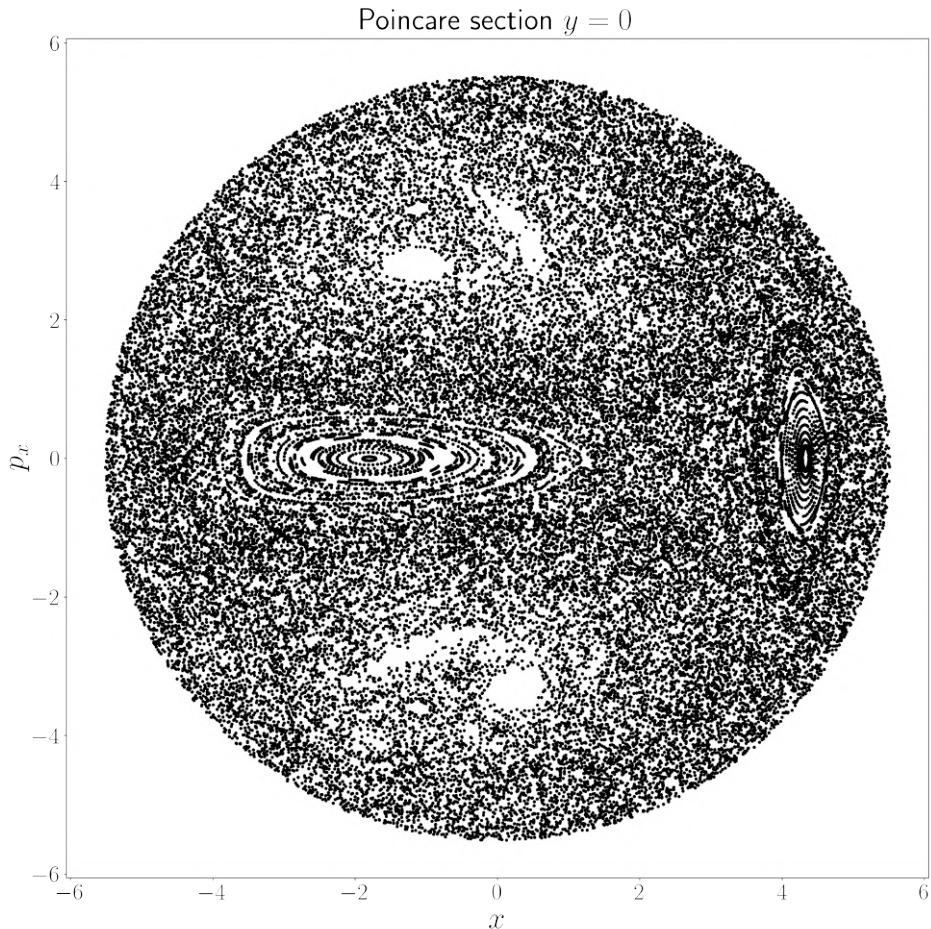
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = p_x, & \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\omega_1^2 x + \epsilon y^2 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = p_y, & \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -\omega_2^2 y + 2\epsilon xy \end{cases} \quad (1.2.21)$$

Οι παράμετροι του συστήματος επιλέγονται σαν: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.1$ και $\epsilon = -0.11$ ενώ η ενέργεια του συστήματος είναι $\mathcal{H} = E = 15.2$ (Makrina Agaoglou et al., 2019, Chemical Reactions: A Journey into Phase Space). Η ενέργεια επιλέχτηκε σαν μία τιμή σε αντιδιαστολή με το προηγούμενο παράδειγμα όπου επιλέχθηκαν πολλαπλές τιμές. Κατά συνέπεια η διαδικασία επιλογής αρχικών συνθηκών είναι διαφορετική: επιλέγονται

κατάλληλα ώστε να ικανοποιούν την Σχέση 1.2.20. Πιο συγκεκριμένα:

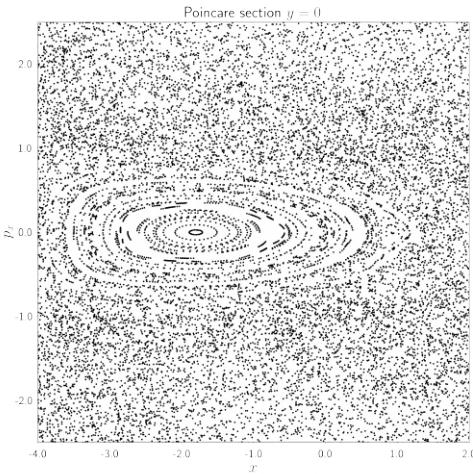
$$x_0 \in [-x_{0max}, x_{0max}], \quad p_x, \quad y_0 = 0, \quad p_{y0}$$

όπου $x_{0max} = \sqrt{2E}$. Το p_y υπολογίζεται σαν: $p_{y0} = +\sqrt{2L - p_{x0}^2}$ με $L \equiv E - V(x_0, 0) > 0$ και p_x είναι τέτοιο ώστε η υπόρριζη ποσότητα να είναι θετική. Ο λόγος που επιλέχτηκαν έτσι οι τιμές εξηγείται σε επόμενο κεφάλαιο, Σχέση 2.1.8.

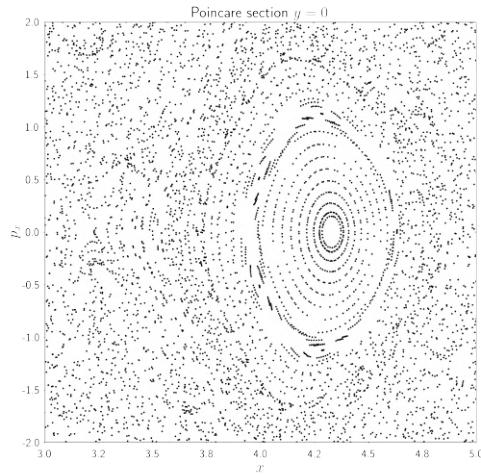


Εικόνα 1.2.7: Τομή Poincaré για τον διπλό αρμονικό ταλαντωτή με σύζευξη. Η ενέργεια είναι $\mathcal{H} = E = 15.2$.

Στην Εικόνα 1.2.7 φαίνεται η τομή Poincaré $y = 0$ για τον 2-διάστατο ταλαντωτή για τις προαναφερθείσες τιμές των παραμέτρων. Φαίνονται ξεκάθαρα οι χαοτικές τροχιές (όλα τα



(I)



(II)

Εικόνα 1.2.8: Τομή Poincaré για τον διπλό αφμονικό ταλαντωτή με σύζευξη: μεγέθυνση γύρω από τις περιοχές οργανωμένης κίνησης-ημιπεριοδικών τροχιών.

μεμονωμένα σημεία) ενώ μπορούν να διακριθούν και περιοχές που υπάρχουν ημιπεριοδικές τροχιές γύρω από δύο ευσταθείς περιοδικές τροχιές-κέντρα (Εικόνες 1.2.8(I) & 1.2.8(II)). Ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες, το σώμα μπορεί να βρεθεί είτε σε περιοχές που οδηγούν σε χαοτικές τροχιές, είτε σε περιοχές που οδηγούν σε τροχιές με τάξη (ημιπεριοδικές τροχιές).

Κεφάλαιο 2

Η μέθοδος των Lagrangian Descriptors

Οι τομές Poincaré αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο κατανόησης και μελέτης των δυναμικών συστημάτων. Όμως, σε κάποια συστήματα υπάρχουν αρχικές συνθήκες που δημιουργούν τροχιές που δεν διέρχονται ξανά από την τομή. Με άλλα λόγια σε συστήματα όπως για παράδειγμα τον 2-διάστατο ταλαντωτή με σύζευξη (§1.2.3), πολλές αρχικές συνθήκες οδηγούνται σε χαοτικές τροχιές και εν γένει μπορούν να διαφύγουν στο ∞ . Έτσι, οι τομές Poincaré της Εικόνας 1.2.7 χρειάζονται πολλές αρχικές συνθήκες για να κατασκευαστούν με λεπτομέρεια. Παράλληλα, σε συστήματα όπου η Χαμιλτονιανή συνάρτηση εξαρτάται από τον χρόνο (μη αυτόνομα συστήματα, δεν διατηρείται το ολοκλήρωμα της ενέργειας) οι τομές Poincaré δεν μπορούν να δώσουν σαφή εικόνα για την συμπεριφορά του συστήματος.

Η κατανόηση της συμπεριφοράς του χώρου των φάσεων και κατά συνέπεια της χρονικής εξέλιξης του δυναμικού συστήματος μπορεί να γίνει με την βοήθεια των **Lagrangian descriptors (LDs)** (Agaoglou, Makrina et al., 2020).

2.1 Μαθηματικός φορμαλισμός των LDs

Οι LDs παρέχουν έναν πιο απλό και αποτελεσματικό τρόπο για να περιγραφεί η εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος, διότι αποτελούν ένα βαθμωτό-διαγνωστικό εργαλείο βασισμένο στις τροχιές του συστήματος. Η ιδέα πίσω από την μέθοδο αυτή είναι η σύνδεση των αρχικών συνθηκών με έναν θετικό αριθμό, ο οποίος υπολογίζεται σαν την τιμή που παίρνει μία θετική συνάρτηση επάνω στην τροχιά όταν το σύστημα εξελίσσεται χρονικά (μπροστά και πίσω). Η θετική συνάρτηση μπορεί να οριστεί με διαφορετικούς τρόπους.

Η εφαρμογή της είναι άμεση και μπορεί να εφαρμοστεί ακριβώς με τον ίδιο τρόπο σε μη αυτόνομα συστήματα και σε συστήματα πολλών βαθμών ελευθερίας. Για παράδειγμα, ένα αυτόνομο δυναμικό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας αντιστοιχεί σε 6-διάστατο χώρο φάσεων με 5-διάστατη επιφάνεια ενέργειας. Η τομή Poincaré (αν μπορεί να βρεθεί κατάλληλη επιφάνεια) θα είναι 4-διάστατη. Προκειμένου να αναγνωριστούν οι δομές στον χώρο των φάσεων, η επιλογή των αρχικών συνθηκών πρέπει να είναι συγκεκριμένη, κάτι που δεν είναι τετριμένο. Όμως με την χρήση των LDs, είναι δυνατόν να φανούν ξεχάθαρα οι δομές του χώρου των φάσεων, δηλαδή οι πολλαπλότητες (manifolds) μίας ασταθούς περιοδικής

τροχιάς και έτσι είναι δυνατή η μελέτη και η πρόβλεψη της κίνησης στο σύστημα, μέσα από ομοκλινικές και ετεροκλινικές τροχιές (transport in dynamical systems) (A. M. Mancho et al., 2013).

• The Arclength Definition

Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι γνωστή στη βιβλιογραφία σαν συνάρτηση M . Έστω ένας οποιοδήποτε χώρος των φάσεων που κάποιος θέλει να εντοπίσει δομές στον χρόνο $t = t_0$. Μέσα σε αυτόν επιλέγονται ομογενείς αρχικές συνθήκες $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ και χρόνος ολοκλήρωσης τ όπου θα εξελιχθούν οι τροχιές μπροστά $(t_0 + \tau)$ και πίσω στον χρόνο $(t_0 - \tau)$. Καλύπτεται δηλαδή χρονικό διάστημα 2τ με κέντρο το t_0 , ο οποίος είναι ο χρόνος που θα παρθεί το στιγμιότυπο του χώρου των φάσεων και θα αποκαλύψει τυχούσες δομές. Το μήκος τόξου (arclength) μίας τροχιάς εξελισσόμενη μπροστά στον χρόνο υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα (Agaoglou, Makrina et al., 2020,):

$$\mathcal{L}^f(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \|\dot{\mathbf{x}}\| dt \quad (2.1.1)$$

όπου $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ και $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα εφαρμοσμένη στο διανυσματικό πεδίο που ορίζει το δυναμικό σύστημα (Σχέση 1.2.2). Αντίστοιχα, ορίζεται το μήκος τόξου όταν η τροχιά εξελίσσεται πίσω στο χρόνο:

$$\mathcal{L}^b(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \|\dot{\mathbf{x}}\| dt \quad (2.1.2)$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές ποσότητες σε μία:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) = \mathcal{L}^f(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) + \mathcal{L}^b(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) \quad (2.1.3)$$

Το παραπάνω βαθμωτό πεδίο που προκύπτει (πεδίο LD) θα αποκαλύψει ευσταθείς και ασταθείς κλάδους των πολλαπλοτήτων στο ίδιο στιγμιότυπο. Κοιτώντας όμως τα δύο επιμέρους πεδία που προέκυψαν από την ολοκλήρωση μπροστά και πίσω στον χρόνο, μπορούν να φανούν ξεχωριστά οι ευσταθείς και οι ασταθείς πολλαπλότητες αντίστοιχα.

Έστω ένα δυναμικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας το οποίο έχει σημείο ισορροπίας (x_e, p_e) σάγμα τύπου (παράδειγμα §2.2.1). Ακριβώς επάνω στο σημείο αυτό η τιμή της συνάρτησης \mathcal{L} είναι μηδέν. Παίρνοντας τώρα δύο αρχικές συνθήκες σχετικά κοντά και εξελίσσοντας τον χρόνο μπροστά, οι A.Σ. που βρίσκονται επάνω στον ευσταθή κλάδο κατευθύνονται προς σημείο ισορροπίας, ενώ οι A.Σ. που βρίσκονται δίπλα θα ακολουθήσουν τις αντίστοιχες τροχιές που προκύπτουν. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι κάποιες A.Σ. οδηγούν σε μήκος τόξου που συγκλίνει (αυτές που βρίσκονται επάνω στον ευσταθή κλάδο) ενώ οι υπόλοιπες όχι. Έτσι, στον ευσταθή κλάδο εμφανίζεται ελάχιστη τιμή για το \mathcal{L}^f .

Αντίστοιχα με εξέλιξη πίσω στο χρόνο, οι A.Σ. που βρίσκονται στον ασταθή κλάδο πηγαίνουν προς το σημείο ισορροπίας, ενώ οι διπλανές A.Σ. ακολουθούν τις αντίστοιχες τροχιές. Προκύπτει λοιπόν κάτι αντίστοιχο με πριν: το \mathcal{L}^b παίρνει την ελάχιστη τιμή επάνω

στον ασταθή κλάδο. Συνδυάζοντάς τα, η συνάρτηση \mathcal{L} (το πεδίο LD) παίρνει ελάχιστη τιμή επάνω στις πολλαπλότητες.

Η ελάχιστη τιμή αυτή αυξάνεται απότομα σε διπλανά σημεία του πεδίου. Η απότομη μετάβαση ισοδυναμεί με πολύ μεγάλη τιμή της βαθμίδας της συνάρτησης. Μάλιστα αχριβώς επάνω στους ευσταθείς και ασταθείς κλάδους το πεδίο LD είναι μη παραγωγίσιμο. Στην βιβλιογραφία αναφέρεται σαν “singular features” ενώ δίνει στο πεδίο LD έναν εύκολο τρόπο οπτικοποίησης και αναγνώρισης των πολλαπλοτήτων (C. Lopesino et al., 2017).

Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό για την κατασκευή του πεδίου LD είναι η παράμετρος ολοκλήρωσης τ . Η επιλογή του τ μπορεί να εμφανίσει την σύνθετη γεωμετρία του χώρου των φάσεων μέσα από το βαθμωτό πεδίο LD. Ένας μεγάλος χρόνος ολοκλήρωσης μπορεί να δώσει λεπτομέρειες στις υπάρχουσες δομές ή αιόμα και να εμφανίσει δομές που δεν είχαν αναγνωριστεί, προσδιδόντας πληροφορίες για την δυναμική εξέλιξη των τροχιών του συστήματος τόσο στο παρελθόν όσο και σε μελλοντικούς χρόνους.

Η επιλογή του τ είναι υπεύθυνη για τον έλεγχο της πολυπλοκότητας και της γεωμετρίας των πολλαπλοτήτων (manifolds) του χώρου των φάσεων. Για μεγάλη τιμή του τ αποκαλύπτονται περισσότερες λεπτομέρειες των υποκείμενων πολλαπλοτήτων, αφού ενσωματώνονται περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το παρελθόν και το μελλοντικό δυναμικό ιστορικό των τροχιών. Η παράμετρος τ σχετίζεται στενά με τις χρονικές κλίμακες των δυναμικών φαινομένων που συμβαίνουν στο εκάστοτε δυναμικό σύστημα. Έτσι η επιλογή της τιμής αυτής θα πρέπει να έχει κάποια φυσική σύνδεση με το πρόβλημα που μελετάται (Agaoglou, Makrina et al., 2020).

• The p-norm Definition

Ένας εναλλακτικός τρόπος ορισμού των LDs προκύπτει από την p -νόρμα του διανυσματικού πεδίου του συστήματος. Συγκεκριμένα για τιμές $p \in (0, 1]$ ορίζεται το LD σαν (Agaoglou, Makrina et al., 2020):

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \sum_{k=1}^n |f_k(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0), t)|^p dt, \quad p \in (0, 1] \quad (2.1.4)$$

όπου f_k είναι η k συνιστώσα του διανυσματικού πεδίου Σχέση 1.2.2. Μία τυπική τιμή για το p είναι $p = 1/2$. Αντίστοιχα με πριν, μπορεί να γίνει ο διαχωρισμός για να αναγνωριστούν οι ευσταθείς και οι ασταθείς κλάδοι με ολοκλήρωση μπροστά και πίσω στον χρόνο:

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) = \mathcal{L}_p^f(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) + \mathcal{L}_p^b(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) \quad (2.1.5)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p^f(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} \sum_{k=1}^n |f_k(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0), t)|^p dt, \\ \mathcal{L}_p^b(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) &= \int_{t_0-\tau}^{t_0} \sum_{k=1}^n |f_k(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0), t)|^p dt. \end{aligned}$$

Αν και αυτός ο ορισμός των LDs δεν έχει τόσο διαφορετική φυσική ερμηνεία από τον arclength ορισμό, έχει εντούτοις πολλά πλεονεκτήματα. Για παράδειγμα, επιτρέπει μια αυστηρή ανάλυση των “singular features” και εδραιώνει μια μαθηματική σύνδεση αυτής της έννοιας με τις ευσταθείς και τις ασταθείς πολλαπλότητες (Shibabrat Naik et al., 2019). Ένα άλλο μεγάλο πλεονέκτημα είναι η αναγνώριση των ευσταθών και ασταθών κλάδων για τα Normally hyperbolic invariant manifolds (NHIMs) σε συστήματα πολλών βαθμών ελευθερίας (πάνω από δύο) (Shibabrat Naik and Stephen Wiggins, 2019). Τέλος, μπορεί να εντοπίσει πολλαπλότητες για πεδία τα οποία δεν είναι διαφορίσιμα.

- **Ορισμός βασισμένος στην αρχή της ελάχιστης δράσης**

Ο τελευταίος ορισμός των LDs βασίζεται στην αρχή της ελάχιστης δράσης στην Χαμιλτονιανή δυναμική (V. I. Arnol'd, 2013). Ορίζεται (Agaoglou, Makrina et al., 2020):

$$\mathcal{L}(\text{initial condition}) = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \text{PositiveFunction}(\text{trajectory}) dt \quad (2.1.6)$$

Η θετική αυτή συνάρτηση του ολοκληρώματος συχνά εκφράζεται μέσα από μία απόλυτη τιμή, η οποία όμως δεν είναι απαραίτητα η δράση του συστήματος.

- **Μεταβλητός χρόνος ολοκλήρωσης για τους LDs**

Ένα πρόβλημα που προκύπτει από τον ορισμό των Σχέσεων 2.1.3 και 2.1.4 είναι ότι, σε μη ολοκληρώσιμα συστήματα, τροχιές μπορούν να διαφύγουν στο ∞ σε πεπερασμένο χρόνο (ανοιχτά συστήματα) (Shibabrat Naik and Stephen Wiggins, 2019). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το πεδίο να λαμβάνει μεγάλες τιμές, κρύβοντας τις περιοχές που το πεδίο παίρνει σημαντικά μικρότερες τιμές. Οι πολλαπλότητες στις οποίες το πεδίο έχει ελάχιστη τιμή χάνονται τελείως. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό οι LDs ορίζονται λίγο διαφορετικά χρησιμοποιώντας μη σταθερό χρόνο ολοκλήρωσης. Οι LDs υπολογίζονται για έναν σταθερό ορισμένο χρόνο ολοκλήρωσης το ή μέχρι η τροχιά που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη αρχική συνθήκη να ξεφύγει από μία περιοχή \mathcal{R} του φασικού χώρου, ο οποίος ονομάζεται χώρος ολοκλήρωσης (Shibabrat Naik and Stephen Wiggins, 2019). Έτσι ο χρόνος ολοκλήρωσης εξαρτάται από την αρχική συνθήκη $\tau(\mathbf{x}_0)$. Συνδυάζοντας το παραπάνω και τον p-norm ορισμό για $p \in (0, 1]$ (Agaoglou, Makrina et al., 2020):

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) = \int_{t_0-\tau_{\mathbf{x}_0}^-}^{t_0+\tau_{\mathbf{x}_0}^+} \sum_{k=1}^n |f_k(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0), t)|^p dt = \mathcal{L}_p^f(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) + \mathcal{L}_p^b(\mathbf{x}_0, t_0, \tau) \quad (2.1.7)$$

όπου ο συνολικός χρόνος ολοκλήρωσης για κάθε αρχική συνθήκη ορίζεται σαν:

$$\tau_{\mathbf{x}_0}^\pm(\tau_0, \mathcal{R}) = \min \{\tau_0, |t^\pm|\}$$

και t^+, t^- είναι οι χρόνοι που η τροχιά διαφεύγει από την περιοχή \mathcal{R} μπροστά και πίσω στον χρόνο αντίστοιχα.

Ο ορισμός αυτός έχει την δυνατότητα να εμφανίζει τους ευσταθείς και ασταθείς κλάδους που υπάρχουν, εκμεταλλευόμενος την μεγάλη διαφοροποίηση που έχει το πεδίο ακριβώς γύρω από τις πολλαπλότητες. Ακόμα και οι ΚΑΜ τόροι που μπορεί να υπάρχουν λόγω κάποιας ευσταθούς περιοδικής τροχιάς, θα φανούν από το περίγραμμα τους, που θα σχηματιστεί μέσω του πεδίου LD (Agaoglou, Makrina et al., 2020). Τέλος η μετατροπή αυτή μπορεί να εισαχθεί και στους άλλους ορισμούς.

• Βιβλιοθήκη για τον υπολογισμό του πεδίου

Για τον υπολογισμό των LDs αλλά και την οπτικοποίησή τους χρησιμοποιήθηκε μία ανοιχτή βιβλιοθήκη γραφμένη σε python που ονομάζεται LDDS¹. Αναπτύχθηκε και συντηρείται από τους Broncio Aguilar-Sanjuan², Víctor J. García-Garrido³, Vladimír Krajňák² και Shibabrat Naik² με την βοήθεια του καθηγητή Stephen Wiggins². Η προσπάθεια αυτή γίνεται κάτω από το CHAMPS project⁴.

Ο υπολογισμός είναι αρκετά ευθύς και ακολουθεί τα παρακάτω βήματα. Αρχικά ο χρήστης ορίζει την παράμετρο ολοκλήρωσης τ , το βήμα ολοκλήρωσης dt , το t_0 , την τιμή του p για τον εκθέτη ενώ δίνεται και η ενέργεια του συστήματος H_0 . Στη συνέχεια δηλώνεται η επιφάνεια τομής που θα υπολογιστεί το πεδίο. Η μεταβλητή “dims_fixed” δέχεται ένα διάνυσμα της μορφής $[x, y, p_x, p_y]$ εισάγοντας την τιμή 1 στην μεταβλητή που θα πραγματοποιηθεί η τομή ενώ στην μεταβλητή “dims_fixed_values” εισάγεται η τιμή που θα πάρει η τομή. Για παράδειγμα σε ένα σύστημα 2 B.E. (x, y) επιθυμούμε να γίνει η τομή στο $y = 0$, θα γίνει η εισαγωγή: $\text{dims_fixed} = [0, 1, 0, 0]$ και $\text{dims_fixed_values} = [0]$.

Έπειτα, ο χρήστης εισάγει το grid για το διάγραμμα που θα παρουσιαστεί το πεδίο LD ορίζοντας και την ανάλυση. Στο προηγούμενο παράδειγμα η εισαγωγή δύο διαστημάτων, για το x και το p_x , θα δώσει τις αρχικές συνθήκες που χρειάζονται στον υπολογισμό του πεδίου. Το y όπως αναφέρθηκε έχει την τιμή 0 ενώ το p_y για κάθε ζευγάρι τιμών $(x, p_x, y = 0)$ υπολογίζεται από την σχέση της ενέργειας:

$$\begin{aligned} H_0 &= T(p_x, p_y) + V(x, y) \Leftrightarrow H_0 - V(x, y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} \Leftrightarrow \\ p_y^2 &= 2m(H_0 - V(x, y)) - p_x^2 \Leftrightarrow p_y = \pm \sqrt{2m(H_0 - V(x, y)) - p_x^2} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Πρέπει να επιλεχθεί μία τιμή από τις δύο, κάτι που γίνεται με την μεταβλητή “momentum_sign” η οποία παίρνει +1 για θετικό πρόσημο και -1 για αρνητικό. Τέλος, με την μεταβλητή “dims_slice” επιλέγεται ο επιθυμητός συνδυασμός για τον οποίο θα γίνει η παρουσίαση της τομής. Στο παράδειγμα, εάν θέλαμε να υπολογιστεί και να παρουσιαστεί το πεδίο LD στο x, p_x αρκεί $\text{dims_slice} = [1, 0, 1, 0]$. Σε ανοιχτά συστήματα χρησιμοποιείται ο τελευταίος ορισμός και ο χρήστης μπορεί να δώσει εύρος τιμών με την μεταβλητή “box_boundaries”, που θα είναι η περιοχή \mathcal{R} .

¹<https://github.com/champsproject/ldds>

²University of Bristol, UK

³Universidad de Alcalá, Spain

⁴<https://champsproject.com/>

Η βιβλιοθήκη παρέχει πληθώρα Χαμιλτονιανών από διάφορα συστήματα. Υπάρχει όμως η δυνατότητα εισαγωγής οποιασδήποτε Χαμιλτονιανής συνάρτησης από τον χρήστη μέσα από την συνάρτηση “my_vector_field”.

Η ολοκλήρωση μπροστά και πίσω στον χρόνο αντίστοιχα γίνεται με την βοήθεια της συνάρτησης “compute_lagrangian_descriptor”. Στην περίπτωση της ολοκλήρωσης πίσω στο χρόνο εισάγεται χρόνος ολοκλήρωσης το $-\tau$ και αρνητικό βήμα ολοκλήρωσης. Το συνολικό πεδίο LD δεν είναι τίποτα άλλο παρά το άθροισμα των επιμέρους πεδίων. Να σημειωθεί ότι τα πεδία έχουν κανονικοποιηθεί στην μονάδα. Τέλος η συνάρτηση “draw_lagrangian_descriptor” οπτικοποιεί και παρουσιάζει το πεδίο.

2.2 Παραδείγματα υπολογισμού των LDs

2.2.1 Ταλαντωτής Duffing

Το πρώτο παράδειγμα που θα παρουσιαστεί αποτελεί το Χαμιλτονιανό σύστημα του ταλαντωτή Duffing (Duffing oscillator). Το σύστημα είναι 1 B.E., δηλαδή η κίνηση γίνεται σε μία διάσταση (επάνω στον άξονα x) και είναι ολοκληρώσιμο εφόσον η Χαμιλτονιανή δεν έχει εξάρτηση από τον χρόνο. Η Χαμιλτονιανή για το σύστημα, με $m = 1$ είναι:

$$\mathcal{H}(x, p_x) = \frac{1}{2} \left(p_x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 \right) \quad (2.2.1)$$

ενώ οι εξισώσεις Χάμιλτον δίνουν:

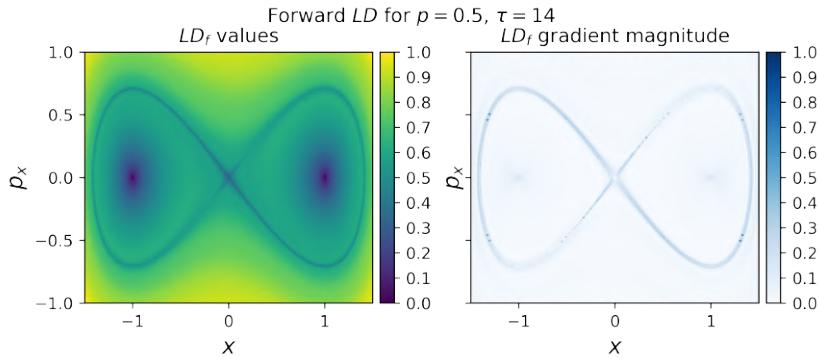
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = p_x \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = x - x^3 \end{cases}$$

Τα σημεία ισορροπίας μπορούν να βρεθούν εύκολα βάζοντας τις παραπάνω σχέσεις εξισώνοντάς τις με το μηδέν και είναι το $(0, 0)$ και τα $(\pm 1, 0)$. Υπολογίζοντας την δεύτερη παράγωγο προκύπτει ότι το $(0, 0)$ αποτελεί ασταθές σημείο ισορροπίας ενώ τα άλλα δύο είναι ευσταθή. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι για μία τιμή της ενέργειας το σημείο $(0, 0)$ έχει τις αντίστοιχες ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες, ενώ τα σημεία $(\pm 1, 0)$ αποτελούν κέντρα. Γύρω από τα κέντρα αναμένεται να υπάρχουν άπειρες κλειστές καμπύλες-ημιπεριοδικές τροχιές (invariant curves).

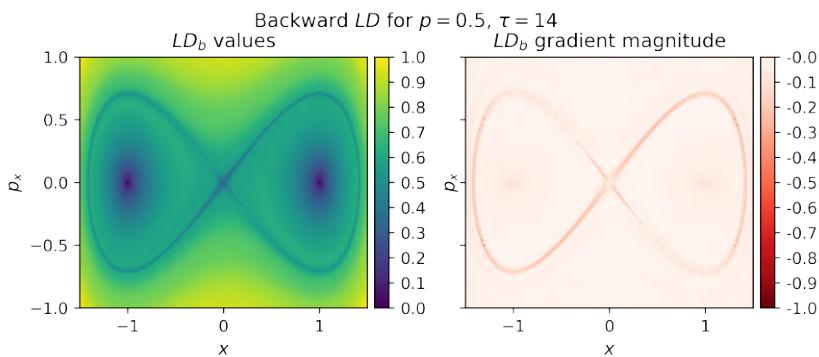
Το πεδίο LD για αυτό το παράδειγμα υπολογίστηκε για 2 τιμές του χρόνου ολοκλήρωσης $\tau_1 = 14$ και $\tau_2 = 2$ ώστε να γίνει κατανοητή η επιλογή κατάλληλου τ . Οι άλλες παράμετροι είναι:

$$p = 0.5, \quad \text{grid} = [(x_{\min}, x_{\max}) \times (p_{x_{\min}}, p_{x_{\max}})] = [(-1.5, 1.5) \times (-1, 1)].$$

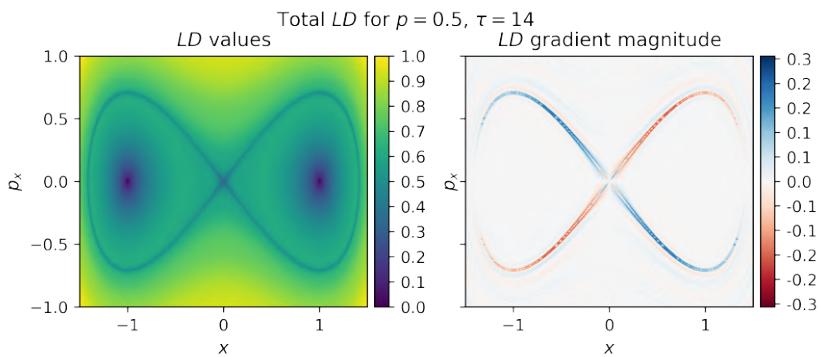
Τα δύο αυτά διαστήματα διαμερίστηκαν σε 400 σημεία. Η ενέργεια δεν δίνεται γιατί υπολογίζεται από κάθε ζευγάρι παραμέτρων (x, p_x) και έτσι η κάθε τροχιά αποτελεί διαφορετική τιμή της ενέργειας.



(I)



(II)



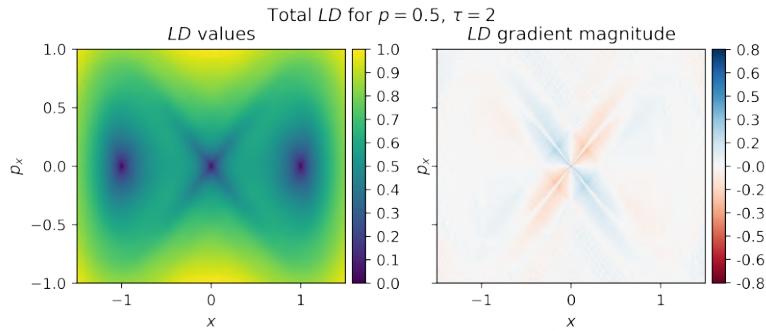
(III)

Εικόνα 2.2.1: Το πεδίο LD στον φασικό χώρο για τον αυτόνομο ταλαντωτή Duffing, για $\tau = 14$. Δεξιά έχει γίνει αναπαράσταση της κλίσης του πεδίου για να φανούν καλύτερα οι πολλαπλότητες (manifolds).

Οι εικόνες αυτές αποτελούν την ολοκλήρωση για μεγάλο χρόνο. Η Εικόνα 2.2.1(I) αφορά στην ολοκλήρωση μπροστά στον χρόνο φανερώνοντας την ευσταθή πολλαπλότητα.

Αντίστοιχα, στην Εικόνα 2.2.1(II) εμφανίζεται η ασταθής πολλαπλότητα, που αφορά στην ολοκλήρωση πίσω στον χρόνο. Στην Εικόνα 2.2.1(III) φαίνεται το άθροισμα των δύο πεδίων. Οι ευσταθείς και οι ασταθείς πολλαπλότητες ενώνονται δημιουργώντας δύο ομοκλινικές τροχιές. Οι ομοκλινικές τροχιές «κλείνουν» σχηματίζοντας δύο περιοχές στις οποίες υπάρχουν οι αμετάβλητες καμπύλες, γύρω από τα δύο κέντρα ($\pm 1, 0$). Ένα σώμα που θα ξεκινήσει επάνω στην ασταθή πολλαπλότητα θα απομακρυνθεί από το σάγμα $(0, 0)$ και στη συνέχεια κινούμενο επάνω στην ευσταθή πολλαπλότητα θα το προσεγγίσει ξανά (ασυμπτωτικά).

Στην Εικόνα 2.2.2 έχει υπολογιστεί το πεδίο με μικρότερο χρόνο ολοκλήρωσης τ . Η διαφορά στην ανάλυση είναι ξεκάθαρη: οι δομές κοντά στην ασταθή περιοδική τροχιά στο $(0, 0)$ ξεχωρίζουν με δυσκολία και οι δύο ομοκλινικές τροχιές δεν διακρίνονται. Είναι προφανές λοιπόν, ότι εάν η παράμετρος δ επιλεχθεί «σωστά» μπορεί να αποκρυφτούν δομές του συστήματος.



Εικόνα 2.2.2: Το πεδίο LD στον φασικό χώρο για τον αυτόνομο ταλαντωτή Duffing, με $\tau = 2$.

2.2.2 Γραμμική Χαμιλτονιανή 2 B.E.

Το δεύτερο παράδειγμα αφορά στη γραμμική Χαμιλτονιανή 2 B.E., η οποία δίνεται από την συνάρτηση:

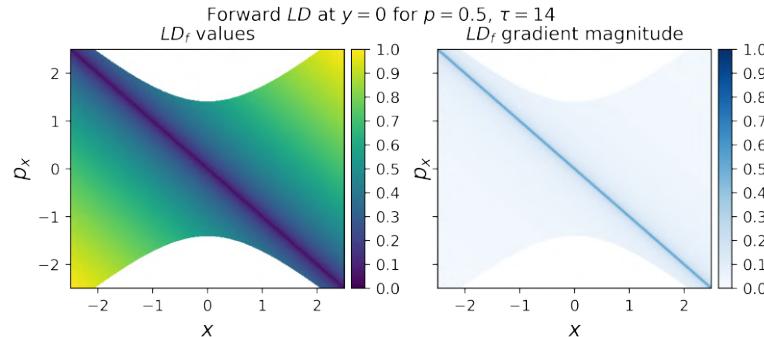
$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = \frac{\lambda}{2} (p_x^2 - x^2) + \frac{\omega}{2} (p_y^2 + y^2) \quad (2.2.2)$$

και για $\lambda = \omega = 1$ οι εξισώσεις Χάμιλτον δίνουν:

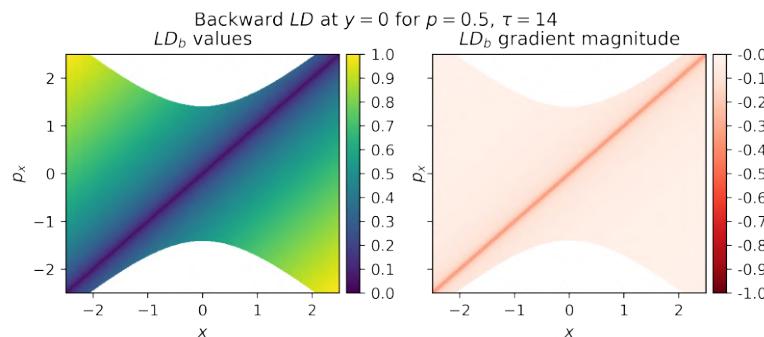
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = p_x, & \dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = p_y, \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = x, & \dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -y. \end{cases}$$

Το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $(0, 0, 0, 0)$. Συχνά καλείται σάγμα-κέντρο (ή απλά ασταθές-index 1 saddle), αφού έχει δύο πραγματικές (σάγμα) και δύο φανταστικές ιδιοτιμές (κέντρο). Στην πρώτη μεταβλητή (x) εμφανίζεται το σάγμα ενώ στη δεύτερη

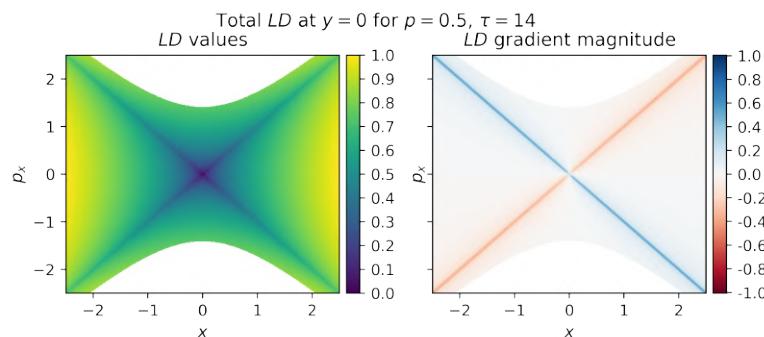
(y) εμφανίζεται το κέντρο. Το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο διότι υπάρχουν τα επιμέρους ολοκληρώματα $\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} (p_x^2 - x^2)$ και $\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} (p_y^2 + y^2)$ με $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Η ενέργεια επιλέχτηκε $\mathcal{H}_0 = 1$.



(I)



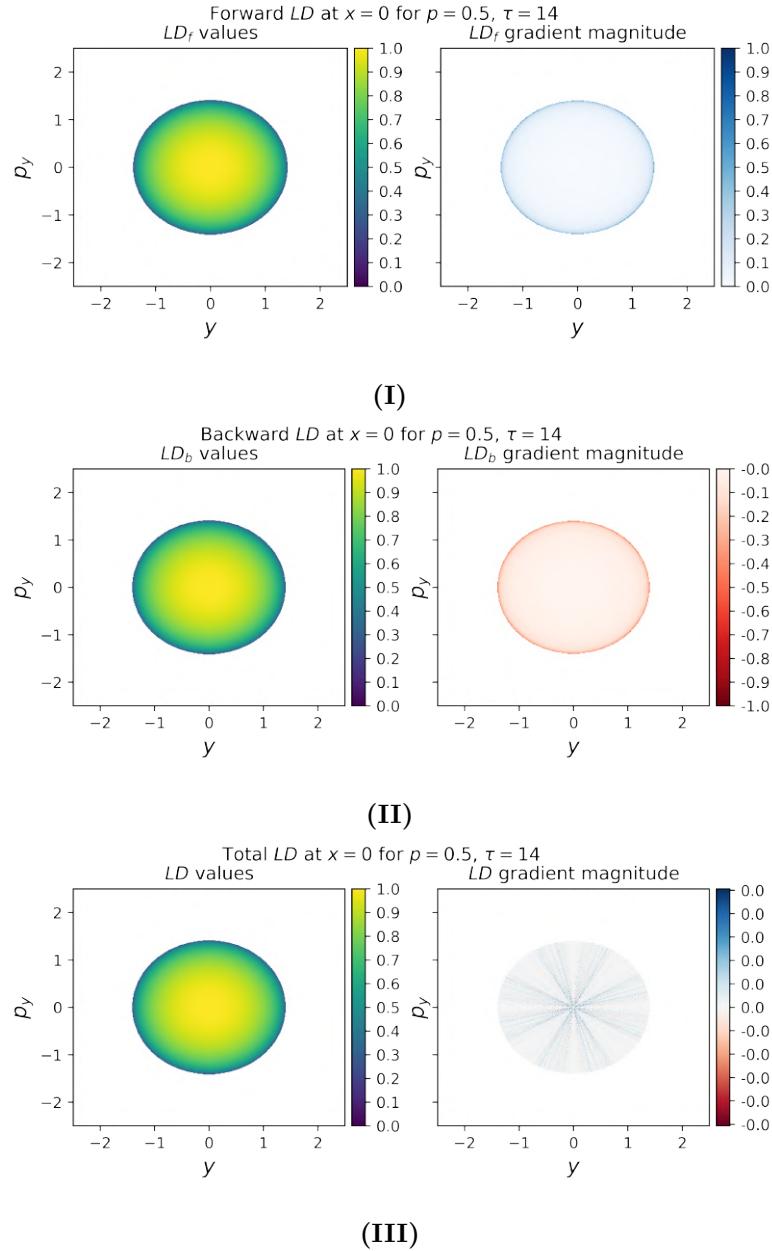
(II)



(III)

Εικόνα 2.2.3: Το πεδίο LD για την γραμμική Χαμιλτονιανή 2 B.E. στο $y = 0$, για ενέργεια $\mathcal{H}_0 = 1$ και $\tau = 14$. Δεξιά έχει γίνει αναπαράσταση της κλίσης του πεδίου για να φανούν καλύτερα οι πολλαπλότητες (manifolds).

Στην Εικόνα 2.2.3 έχει υπολογιστεί το πεδίο LD επάνω στην τομή $y = 0$ ($p_x > 0$). Εμφανίζονται οι πολυπλοκότητες με τους ευσταθείς και ασταθείς κλάδους μιας και στην περίπτωση αυτή υπάρχει μόνο το σάγμα. Παράλληλα φαίνονται οι άσπρες περιοχές που αποτελούν απαγορευμένες περιοχές για την συγκεκριμένη ενέργεια.



Εικόνα 2.2.4: Το πεδίο LD για την γραμμική Χαμιλτονιανή 2 B.E. στο $x = 0$, για ενέργεια $\mathcal{H}_0 = 1$ και $\tau = 14$.

Από την άλλη μεριά, οι αρχικές συνθήκες με $x = 0$ ($p_y > 0$) και η αντίστοιχη επιφάνεια τουμής, οδηγούν στο κέντρο που αναφέρθηκε (Εικόνα 2.2.4). Στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται αμετάβλητες καμπύλες (invariant curves) καθώς και οι απαγορευμένες περιοχές.

Η εμφάνιση των ασταθών και ευσταθών κλάδων οδηγούν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει περιοδική τροχιά. Αυτό συμβαίνει διότι στην γενική περίπτωση ένα σώμα βρισκόμενο σε αυτό το δυναμικό κάνει μία σύνθεση των παραπάνω εικόνων (μιας και το σύστημα είναι διαχωρίσιμο). Από την μία μεριά ακολουθεί τις πολλαπλότητες (x, p_x) ενώ από την άλλη ακολουθεί μία ταλάντωση γύρω από το κέντρο (y, p_y) . Στην περίπτωση που βρίσκεται επάνω στις πολλαπλότητες θα είναι $x = \pm p_x$ και $\mathcal{H}_1 = 0$. Οπότε η συνολική ενέργεια δίνεται από την $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_2 > 0$. Έτσι υπάρχει μία ασταθής περιοδική τροχιά γ . Οι πολλαπλότητες που την χαρακτηρίζουν δίνονται στον χώρο των φάσεων από τους υποχώρους (Agaoglou, Makrina et al., 2020):

$$W^u(\gamma) = \left\{ (x, y, p_x, p_y) \mid \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2) = \mathcal{H}_0 > 0, x = p_x \right\}$$

$$W^s(\gamma) = \left\{ (x, y, p_x, p_y) \mid \frac{1}{2}(p_y^2 + y^2) = \mathcal{H}_0 > 0, x = -p_x \right\}$$

όπου ο δείκτης s δηλώνει τον ασταθή υπόχωρο ενώ ο δείκτης u τον ευσταθή.

2.2.3 Το Χαμιλτονιανό σύστημα Hénon-Heiles

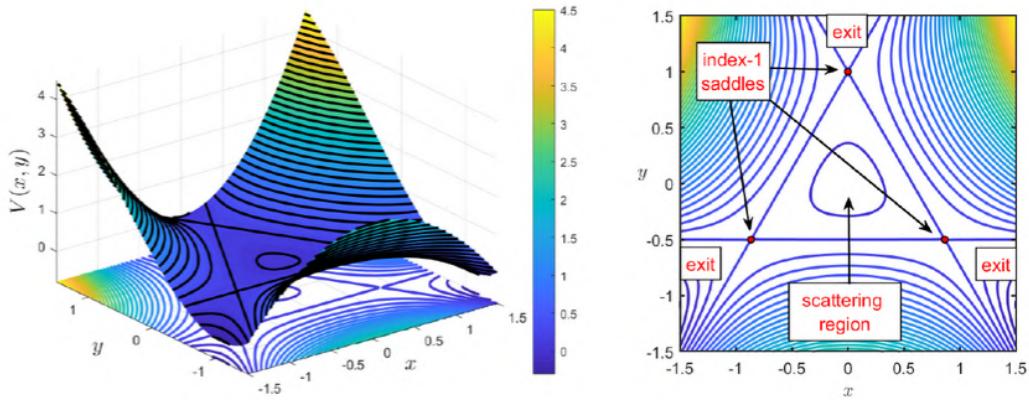
Το τελευταίο παράδειγμα αφορά στο σύστημα Hénon-Heiles όπου περιγράφει την κίνηση ενός αστέρα γύρω από το κέντρο γαλαξία (M. Hénon and C. Heiles, 1964). Η Χαμιλτονιανή δίνεται από την συνάρτηση:

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \quad (2.2.3)$$

και οι εξισώσεις Χάμιλτον δίνουν:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = p_x, & \dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = p_y, \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -x - 2xy, & \dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -x^2 - y + y^2. \end{cases}$$

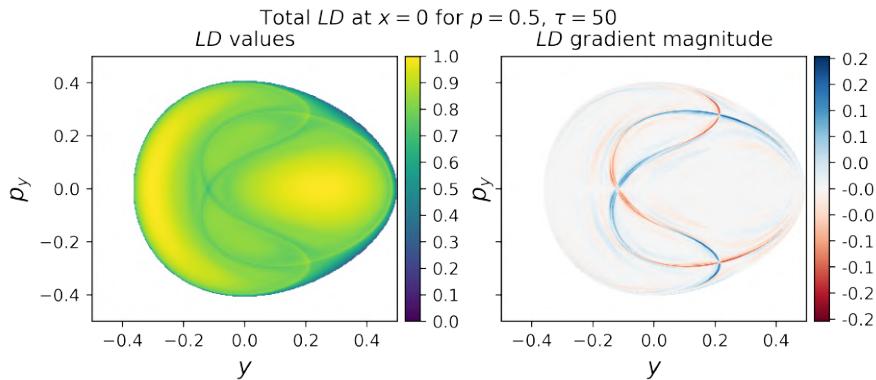
Το σύστημα έχει τέσσερα σημεία ισορροπίας: ένα ελάχιστο στο $(0, 0)$ το οποίο αποτελεί ευσταθές σημείο ισορροπίας και τρία σάγματα-κέντρα, στο $(0, 1)$ και στα $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2)$ (Makrina Agaoglou et al., 2019). Οι ενέργειες που αντιστοιχούν σε αυτά είναι $\mathcal{H}_1 = 0$ και $E \equiv \mathcal{H}_{2,3,4} = 1/6$. Οι LDs υπολογίστηκαν για παραπάνω από μία τουμή και για διαφορετικές τιμές της ενέργειας, ώστε να κατανοηθεί το πως αυτή επηρεάζει τη μεταφορά μέσα στο χώρο. Να σημειωθεί ότι επειδή οι τροχιές στο σύστημα αυτό, μπορούν να διαφύγουν στο ∞ είναι απαραίτητη η εφαρμογή της μεθόδου μεταβλητού χρόνου ολοκλήρωσης τ . Η γραφική παράσταση του δυναμικού φαίνεται στη Εικόνα 2.2.5.



Εικόνα 2.2.5: Το δυναμικό του Χαμιλτονιανού συστήματος Hénon-Heiles.

Πηγή: Makrina Agaoglou et al., 2019, Chemical Reactions: A Journey into Phase Space

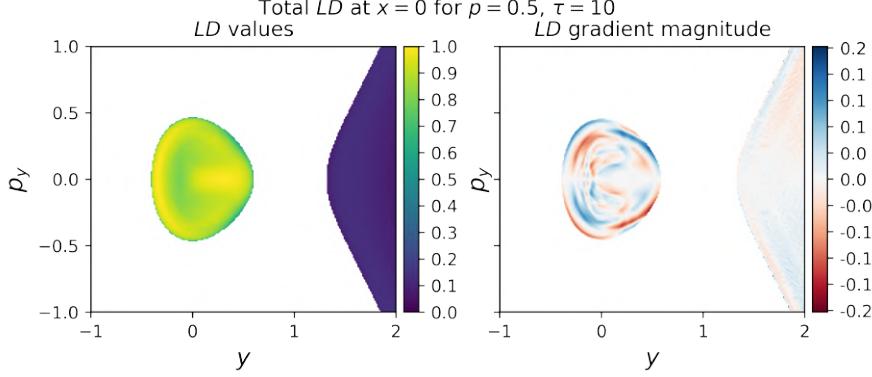
Ξεκινώντας με τιμή ενέργειας \mathcal{H}_0 μικρότερης της E , το σώμα είναι παγιδευμένο στην περιοχή γύρω από το κέντρο (ή αντίστοιχα στις περιοχές μακριά από τα 3 Σ.Ι. προς το ∞). Όπως φαίνεται και από την μορφή δυναμικού τα κανάλια διαφυγής δεν έχουν ανοίξει, οπότε οι δύο περιοχές είναι απομονωμένες. Παίρνοντας την τιμή $x = 0$ για τιμή της ενέργειας $\mathcal{H}_0 = 1/12$ έχουμε την εμφάνιση ευσταθών και ασταθών περιοδικών τροχιών. Από την Εικόνα 2.2.6, φαίνεται ότι οι ευσταθείς περιοδικές τροχιές αναγνωρίζονται μέσα από τις αμετάβλητες καμπύλες που βρίσκονται γύρω τους. Από την άλλη μεριά, οι πολλαπλότητες της ασταθούς περιοδικής τροχιάς, τέμνονται δημιουργώντας ομοκλινικές τροχιές, οι οποίες είναι υπεύθυνες για την κίνηση μέσα στον χώρο.



Εικόνα 2.2.6: Δομές φασικού χώρου για το σύστημα Hénon-Heiles όπως προκύπτουν από τους LDs με $p = 1/2$. Το πεδίο έχει υπολογιστεί για τιμή της ενέργειας $\mathcal{H} = 1/12$ στο $x = 0$.

Αυξάνοντας την ενέργεια σε $\mathcal{H}_0 = 0.11$ και αλλάζοντας τα όρια του άξονα της y μεταβλητής, μπορεί να φανεί και ο χώρος έξω από το κεντρική περιοχή. Οι δύο χώροι δεν

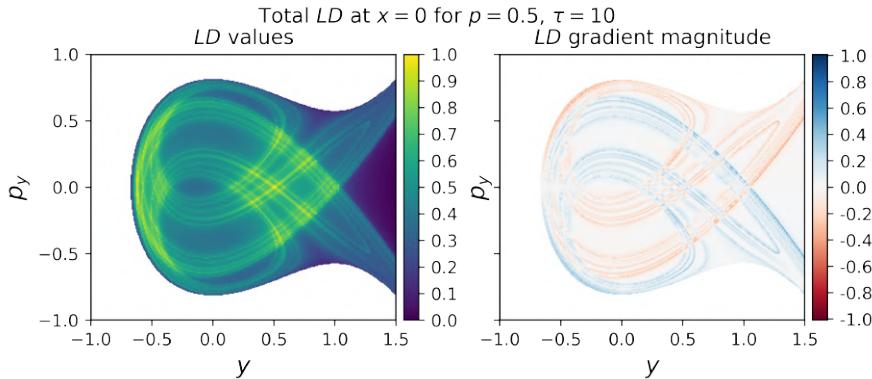
έχουν ενωθεί και κατά συνέπεια ένα σώμα δεν μπορεί να μετακινηθεί από την μία περιοχή στην άλλη (Εικόνα 2.2.7).



Εικόνα 2.2.7: Δομές φασικού χώρου για το σύστημα Hénon-Heiles όπως προκύπτουν από τους LDs με $p = 1/2$. Το πεδίο έχει υπολογιστεί για τιμή της ενέργειας $\mathcal{H} = 0.11$ στο $x = 0$.

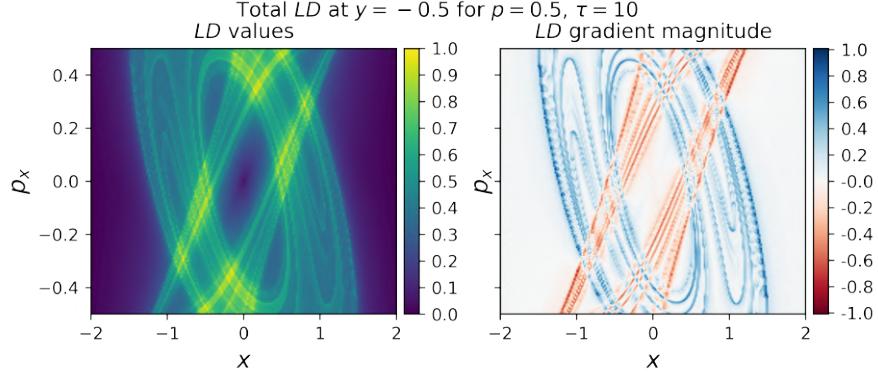
Αυξάνοντας ακόμα περισσότερο την ενέργεια πάνω από το κατώφλι των 3 Σ.Ι., δηλαδή $\mathcal{H}_0 > 1/6$, τα πράγματα διαφοροποιούνται έντονα. Πλέον υπάρχει η δυνατότητα διαφυγής του σώματος προς το ∞ και οι δύο περιοχές της παραπάνω εικόνας ενώνονται μέσα από τα 3 κανάλια (από τα 3 Σ.Ι. της Εικόνας 2.2.5). Ανάλογα με την τομή, εξάγονται οι αντίστοιχες πληροφορίες.

Στην Εικόνα 2.2.8 έχει γίνει η τομή $x = 0$ για ενέργεια $\mathcal{H}_0 = 1/3$. Παρατηρώντας την μορφή του δυναμικού (Εικόνα 2.2.5) για την τομή $x = 0$ φαίνεται το κανάλι διαφυγής από το σημείο ισορροπίας $(0, 1)$. Το πεδίο των LDs δίνει ακριβώς αυτή την εικόνα: υπάρχει πληθώρα πολλαπλοτήτων των ασταθών περιοδικών τροχιών (ισχυρή ύπαρξη χάους), οι



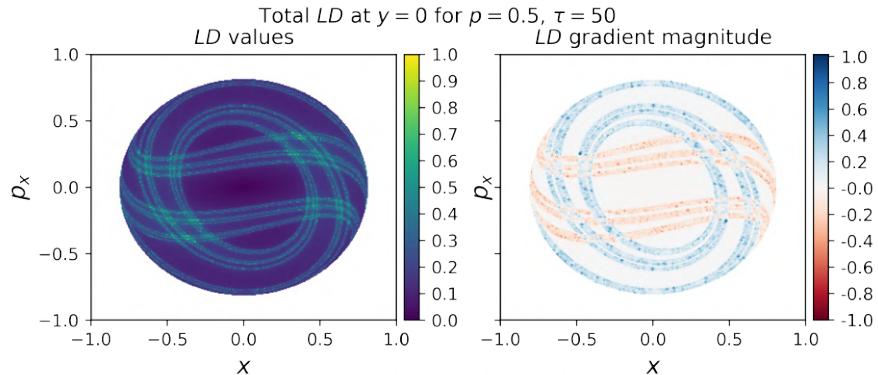
Εικόνα 2.2.8: Δομές φασικού χώρου για το σύστημα Hénon-Heiles όπως προκύπτουν από τους LDs με $p = 1/2$. Το πεδίο έχει υπολογιστεί για τιμή της ενέργειας $\mathcal{H} = 1/3$ στο $x = 0$.

οποίες τέμνονται δημιουργώντας ετεροκλινικά σημεία (ετεροκληνικές τροχιές) και οδηγούν το σώμα στο $y \rightarrow +\infty$. Υπάρχει δηλαδή, διαφυγή από την εσωτερική περιοχή.



Εικόνα 2.2.9: Δομές φασικού χώρου για το σύστημα Hénon-Heiles όπως προκύπτουν από τους LDs με $p = 1/2$. Το πεδίο έχει υπολογιστεί για τιμή της ενέργειας $\mathcal{H} = 1/3$ στο $y = -0.5$.

Ακόμη για ενέργεια $\mathcal{H}_0 = 1/3$ έγινε η τομή $y = -0.5$ (Εικόνα 2.2.9), ώστε να φανούν τα δύο κανάλια διαφυγής από τα άλλα δύο σημεία ισορροπίας ($\pm\sqrt{3}/2, -1/2$). Η διαφυγή μπορεί να γίνει μέσα από τις ετεροκλινικές τομές των ασταθών πολλαπλοτήτων των ασταθών περιοδικών τροχιών της κεντρικής περιοχής με τις ευσταθείς πολλαπλότητες της εξωτερικής περιοχής. Αντίστοιχα η προσέγγιση στη κεντρική περιοχή από την εξωτερική περιοχή γίνεται μέσω των ετεροκλινικών τομών των ευσταθών πολλαπλοτήτων των ασταθών περιοδικών τροχιών της κεντρικής περιοχής με τις ασταθείς πολλαπλότητες των ασταθών περιοδικών τροχιών της εξωτερικής περιοχής.



Εικόνα 2.2.10: Δομές φασικού χώρου για το σύστημα Hénon-Heiles όπως προκύπτουν από τους LDs με $p = 1/2$. Το πεδίο έχει υπολογιστεί για τιμή της ενέργειας $\mathcal{H} = 1/3$ στο $y = 0$.

Τέλος χαοτική συμπεριφορά εμφανίζεται και στη κεντρική περιοχή, όπως φαίνεται στην

Εικόνα 2.2.10 (τομή $y = 0$ και ενέργεια $H_0 = 1/3$). Το σύστημα αυτό έχει πολύ χώρο για σχολιασμό κάτι που ξεφεύγει από τα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας.

Κεφάλαιο 3

Το περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα τριών σωμάτων

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθούν τροχιές εξωπλανητών σε διπλά αστρικά συστήματα. Ένα τέτοιο χαμηλονιανό δυναμικό σύστημα αποτελεί το σύστημα 3-σωμάτων το οποίο δεν είναι ολοκληρώσιμο.

Απαραίτητη είναι η περιγραφή του συστήματος: Τα δύο μαζικά σώματα (οι δύο αστέρες) θεωρούνται ότι περιφέρονται γύρω από το κέντρο μάζας τους σε κυκλικές τροχιές, δεν επηρεάζονται από την βαρυτική έλξη του εξωπλανήτη και συνολικά το σύστημα δεν έχει 3η διάσταση δηλαδή η κίνηση των σωμάτων περιορίζεται στο επίπεδο (x, y). Οι προσεγγίσεις αυτές περιορίζουν το γενικό πρόβλημα των τριών σωμάτων και ορίζουν το **περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα τριών σωμάτων** (planar circular restricted three body problem - PCR3BP).

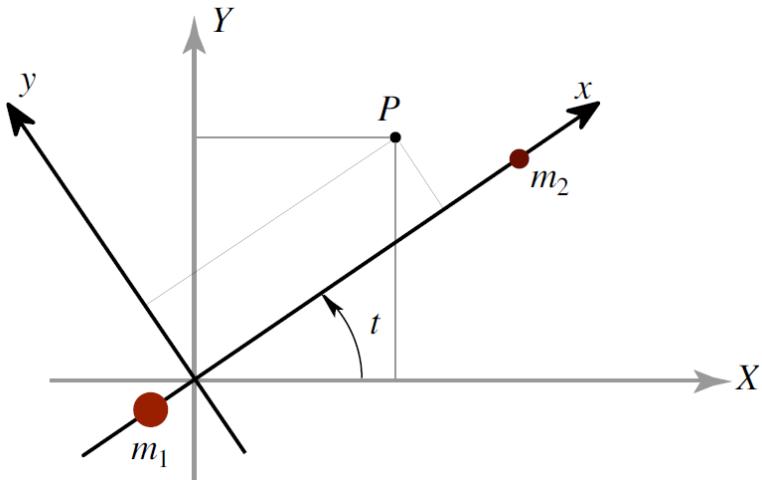
3.1 Περιγραφή του συστήματος

Έστω, η κίνηση σώματος P (ο εξωπλανήτης στο σύστημα) αμελητέας μάζας κάτω από την βαρυτική έλξη δύο μαζικών σωμάτων (οι δύο αστέρες), μάζας m_1 (**πρωτεύων αστέρας**) και m_2 (**δευτερεύων αστέρας**), με $m_1 > m_2$. Οι μάζες m_1, m_2 καλούνται και σαν **κύριες μάζες**. Όπως αναφέρθηκε, το σώμα P μπορεί να κινηθεί ελεύθερα στο επίπεδο ενώ οι μάζες m_1 & m_2 κινούνται σε κυκλικές τροχιές γύρω από το κέντρο μάζας τους, ανεπηρέαστες από την κίνηση του P .

Το σύστημα μπορεί να γίνει αδιάστατο και κανονικοποιημένο με την παρακάτω λογική: σαν μονάδα μάζας επιλέγεται η τιμή $m_1 + m_2$, σαν μονάδα μήκους επιλέγεται η απόσταση των μαζών m_1 και m_2 ενώ σαν μονάδα χρόνου επιλέγεται ο χρόνος, τέτοιος ώστε η περίοδος των μαζών m_1 και m_2 γύρω από το κέντρο μάζας να είναι 2π . Έτσι, προκύπτει ότι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης γίνεται $G = 1$ και ότι η μέση κίνηση των κύριων μαζών \bar{r} είναι ταυτόχρονη. Η μόνη παράμετρος που υπάρχει τελικά στο σύστημα είναι η παράμετρος μάζας μ οποία ορίζεται σαν (Boccaletti, D. and Pucacco, G., 2001):

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.1.1)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παράμετρος μάζας είναι διαφορετική έννοια από την ανηγμένη μάζα $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ και από τον λόγο μαζών $q = \frac{m_2}{m_1}$ (που χρησιμοποιείται στα διπλά αστρικά συστήματα). Ορίζεται έτσι, αφενός ώστε να αδιαστατικοποιηθεί και να κανονικοποιηθεί το σύστημα και αφετέρου να γραφούν σε απλή μορφή οι εξισώσεις κίνησης για το τρίτο σώμα. Τέλος, συνδέεται με την θέση των σημείων ισορροπίας του συστήματος, όπως φαίνεται στην παραγράφο §3.1.3.



Εικόνα 3.1.1: Αδρανειακό και περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Το περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων x και y περιστρέφεται αντιωρολογικά με γωνιακή ταχύτητα ίση με μονάδα σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων X και Y .

Πηγή: Koon, W. S. et al., 2006.

Η περιγραφή του συστήματος θα ξεκινήσει από το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (Boccaletti, D. and Pucacco, G., 2001). Έστω $X - Y$ το επίπεδο κίνησης των σωμάτων με αρχή των αξόνων να βρίσκεται το κέντρο μάζας των μαζών m_1, m_2 και οι άξονες $x - y$ που φαίνονται στην Εικόνα 3.1.1. Ο άξονας x είναι ο άξονας που ενώνει τις δύο μάζες m_1 και m_2 , ενώ ο άξονας y είναι κάθετος σε αυτόν. Το σύστημα αξόνων x, y περιστρέφεται με μία γωνιακή ταχύτητα γύρω από το κέντρο μάζας σε σχέση το αδρανειακό σύστημα αναφοράς $X - Y$. Η ταχύτητα περιστροφής αποτελεί την μέση κοινή ταχύτητα των μαζών m_1 και m_2 , η οποία στο αδιάστατο σύστημα αναφέρεται σαν n . Η περίοδος όπως αναφέρθηκε στο σύστημα αυτό είναι 2π . Παράλληλα οι μάζες των m_1 και m_2 γίνονται:

$$\mu_1 = 1 - \mu \quad \text{και} \quad \mu_2 = \mu \quad (3.1.2)$$

Έστω (x, y) η θέση του σώματος P στο περιστρεφόμενο σύστημα και (X, Y) στο αδρανειακό. Η σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες είναι:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathcal{A}_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

$$\text{με } \mathcal{A}_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

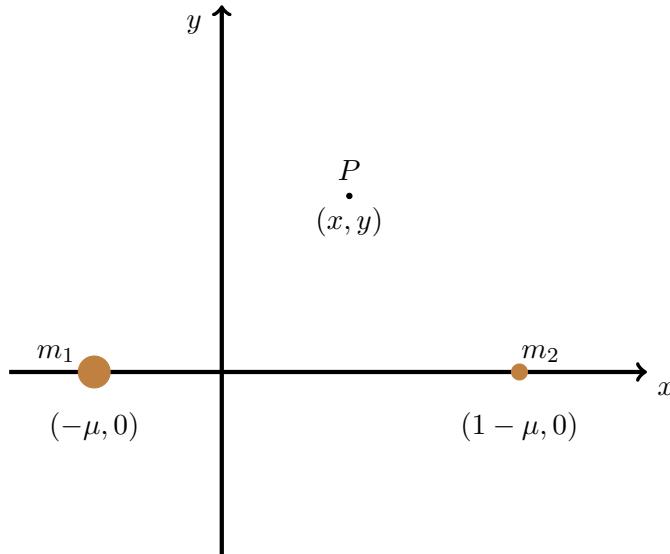
Η παράγωγος της Σχέσης 3.1.3 δίνει τον μετασχηματισμό της ταχύτητας από το ένα σύστημα στο άλλο σαν:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} &= \dot{\mathcal{A}}_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{A}_t \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &= -\mathcal{A}_t \mathcal{J} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{A}_t \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &= \mathcal{A}_t \begin{pmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\text{όπου } \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα του περιστρεφόμενου συστήματος, σε σχέση με του αδρανειακού είναι ότι οι κύριες μάζες είναι ακίνητες (Εικόνα 3.1.2). Για την μάζα m_1 η θέση είναι $(\mu_2, 0)$ ενώ για την μάζα m_2 είναι η θέση $(\mu_1, 0)$. Οι αντίστοιχες θέσεις στο αδρανειακό σύστημα είναι:

$$(X_1, Y_1) = (-\mu_2 \cos t, -\mu_2 \sin t) \quad \text{και} \quad (X_2, Y_2) = (\mu_1 \cos t, \mu_1 \sin t) \quad (3.1.5)$$



Εικόνα 3.1.2: Το περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Οι μάζες m_1 και m_2 είναι ακίνητες σε συγκεκριμένες θέσεις κατά μήκος του άξονα x .

Το βαρυτικό δυναμικό που δέχεται το σώμα P λόγω της ύπαρξης των μαζών m_1 και m_2 (στις κανονικοποιημένες μονάδες) είναι (Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design, Koon, W. S. et al., 2006):

$$\mathcal{U} = -\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2 \quad (3.1.6)$$

με r_1 και r_2 οι αποστάσεις του σώματος P από τις μάζες m_1 και m_2 , που σε συνδυασμό με τις θέσεις των κύριων μαζών (Σχέση 3.1.5) δίνονται σαν (Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design, Koon, W. S. et al., 2006):

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (X + \mu_2 \cos t)^2 + (Y + \mu_2 \sin t)^2 \\ r_2^2 &= (X - \mu_1 \cos t)^2 + (Y - \mu_1 \sin t)^2 \end{aligned}$$

3.1.1 Εξισώσεις κίνησης

Νευτώνεια προσέγγιση. Στο αδρανειακό σύστημα οι εξισώσεις του Νεύτωνα είναι:

$$\ddot{X} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}, \quad \ddot{Y} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y} \quad (3.1.7)$$

Το σύστημα εξαρτάται από τον χρόνο. Κανείς, μπορεί να κάνει μετασχηματισμό στο περιστρεφόμενο σύστημα δηλαδή στις συντεταγμένες (x, y) . Αυτό επιτυγχάνεται και με την παρακάτω μέθοδο.

Λαγκρανζιανή προσέγγιση. Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση L στο αδρανειακό σύστημα είναι:

$$L(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) = T - \mathcal{U} = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \mathcal{U}(X, Y, t)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για την συνάρτηση αυτή (Σχέση 1.2.5) δίνουν τις εξισώσεις του Νεύτωνα (Σχέση 3.1.7).

Αντίστοιχα, μπορεί να γραφτεί η Λαγκρανζιανή συνάρτηση \tilde{L} στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς σαν κινητική ενέργεια μείον την δυναμική, οι οποίες είναι εκφρασμένες στο περιστρεφόμενο σύστημα:

$$\tilde{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} [(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2] - U(x, y)$$

η οποία πλέον είναι **ανεξάρτητη του χρόνου**. Η κινητική ενέργεια στο περιστρεφόμενο σύστημα προκύπτει από την Σχέση 3.1.4:

$$\frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) = \frac{1}{2} [(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2]$$

Αντίστοιχα η δυναμική ενέργεια:

$$U(x, y) = -\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2 \quad (3.1.8)$$

με r_1 και r_2 εκφρασμένα στις περιστρεφόμενες συντεταγμένες από την Σχέση 3.1.3:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu_2)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x - \mu_1)^2 + y^2 \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange έχουν ισχύ ακόμα και σε μη αδρανειακό σύστημα δίνοντας τις εξισώσεις κίνησης (Boccaletti, D. and Pucacco, G., 2001):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\dot{x} - y) = \dot{y} + x - \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d}{dt}(\dot{y} + x) = -(\dot{x} - y) - \frac{\partial U}{\partial y}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

To $\bar{U}(x, y)$ ονομάζεται ενεργό δυναμικό και είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= -\frac{1}{2} (x^2 + y^2) + U(x, y) = \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} - \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2 = \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$= -\frac{1}{2} (\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} \quad (3.1.11)$$

Χαμιλτονιανή προσέγγιση. Όπως έχει αναφερθεί, μία Λαγκρανζιανή συνάρτηση μπορεί να μετασχηματιστεί σε μία νέα συνάρτηση την Χαμιλτονιανή. Οι γενικευμένες ορμές προκύπτουν σαν (Boccaletti, D. and Pucacco, G., 2001):

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y, \\ p_y = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x. \end{cases}$$

Οπότε η Χαμιλτονιανή συνάρτηση είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) &= \frac{1}{2} [(p_x + y)^2 + (p_y - x)^2] + \bar{U} \\ &= \frac{1}{2} [(p_x + y)^2 + (p_y - x)^2] - \frac{1}{2} (\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Οι εξισώσεις Χάμιλτον γράφονται:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = p_x + y, & \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = p_y - x - \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = p_y - x, & \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -p_x - y - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}. \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Ισοδύναμα ξαναγυρνώντας στις ταχύτητες (\dot{x}, \dot{y}) προκύπτει η Χαμιλτονιανή:

$$\mathcal{H}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \bar{U}(x, y) \quad (3.1.14)$$

Η παραπάνω Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου, ενώ ο χώρος των φάσεων είναι 4-διάστατος χώρος (x, y, \dot{x}, \dot{y}) . Το γεγονός ότι η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου σημαίνει ότι υπάρχει το **ολοκλήρωμα της ενέργειας**. Πιο συγκεκριμένα, εκφρασμένο στις ταχύτητες (\dot{x}, \dot{y}) :

$$E(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \bar{U}(x, y) \quad (3.1.15)$$

Στην αστρονομία χρησιμοποιείται το **ολοκλήρωμα Jacobi** και είναι ίσο με $-2E$:

$$C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2\bar{U}(x, y) \quad (3.1.16)$$

Το περιορισμένο πρόβλημα τριών σωμάτων εν γένει δεν έχει άλλο ολοκλήρωμα κίνησης, κάνοντάς το μη ολοκληρώσιμο.

3.1.2 Ενεργειακή επιφάνεια και περιοχές επιτρεπόμενης κίνησης

Με βάση την σχέση 3.1.15 και το γεγονός ότι δεν υπάρχει άλλο ολοκλήρωμα της κίνησης, το σώμα P κινείται σε έναν 3-διάστατο χώρο \mathcal{M} εμβαπτισμένο στον συνολικό 4-διάστατο φασικό χώρο. Δηλαδή, η ενεργειακή επιφάνεια για σταθερή ενέργεια e και παρόμετρο μάζας μ ορίζεται σαν:

$$\mathcal{M}(\mu, e) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid (E(x, y, \dot{x}, \dot{y})) = e\} \quad (3.1.17)$$

Η προβολή στον χώρο των θέσεων στο περιστρεφόμενο σύστημα, $x - y$ επίπεδο, είναι η επιτρεπόμενη περιοχή κίνησης του σώματος P για ενέργεια e και παρόμετρο μάζας μ . Έστω $M(e, \mu)$ η προβολή αυτή,

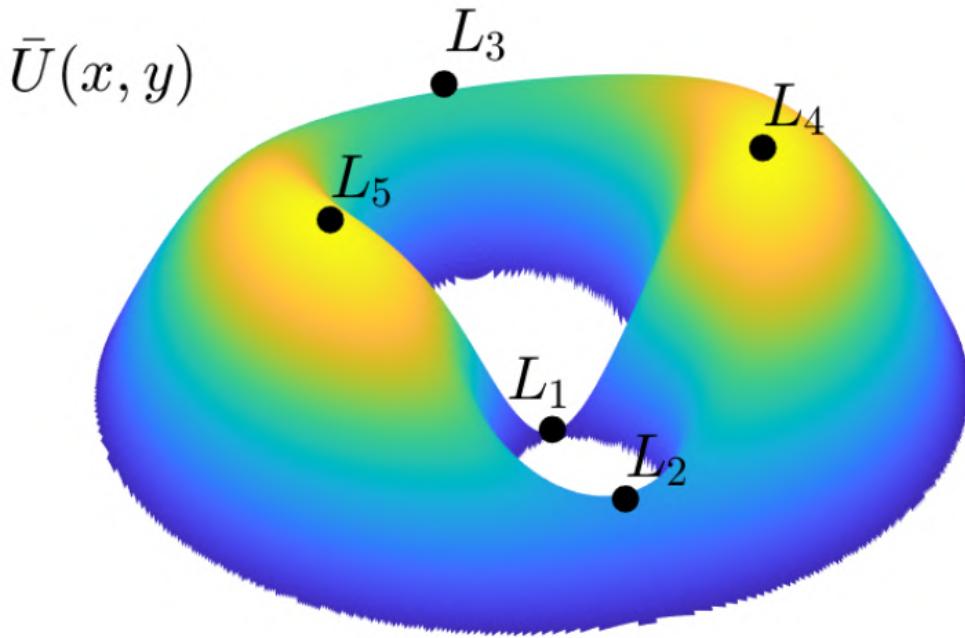
$$M(\mu, e) = \{(x, y) \mid \bar{U}(x, y) \leq e\} \quad (3.1.18)$$

Γνωστή σαν Hill's region. Η συνοριακή καμπύλη της περιοχής αυτής ονομάζεται **καμπύλη μηδενικής ταχύτητας** (zero velocity curve). Ορίζεται όπως φαίνεται στην Σχέση 3.1.18, από τα σημεία που η κινητική ενέργεια είναι μηδέν:

$$e = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \bar{U}(x, y) \Leftrightarrow e - \bar{U}(x, y) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$$

Το σώμα P περιορίζεται από την καμπύλη αυτή και δεν μπορεί να κινηθεί στην περιοχή όπου η κινητική ενέργεια γίνεται αρνητική, δηλαδή να ισχύει $e < \bar{U}(x, y)$ (forbidden realm).

Η ενέργεια $E(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = e$ ρυθμίζει το «ύψος» στο ενεργό δυναμικό $\bar{U}(x, y)$ όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.1.3. Η επιφάνεια της ενέργειας ουσιαστικά είναι ένα επίπεδο που «κόβει» κάθετα το ενεργό δυναμικό. Ετσι, ανάλογα με την τιμή της ενέργειας που έχει το σώμα, μπορεί να κινηθεί σε συγκεκριμένη περιοχή.

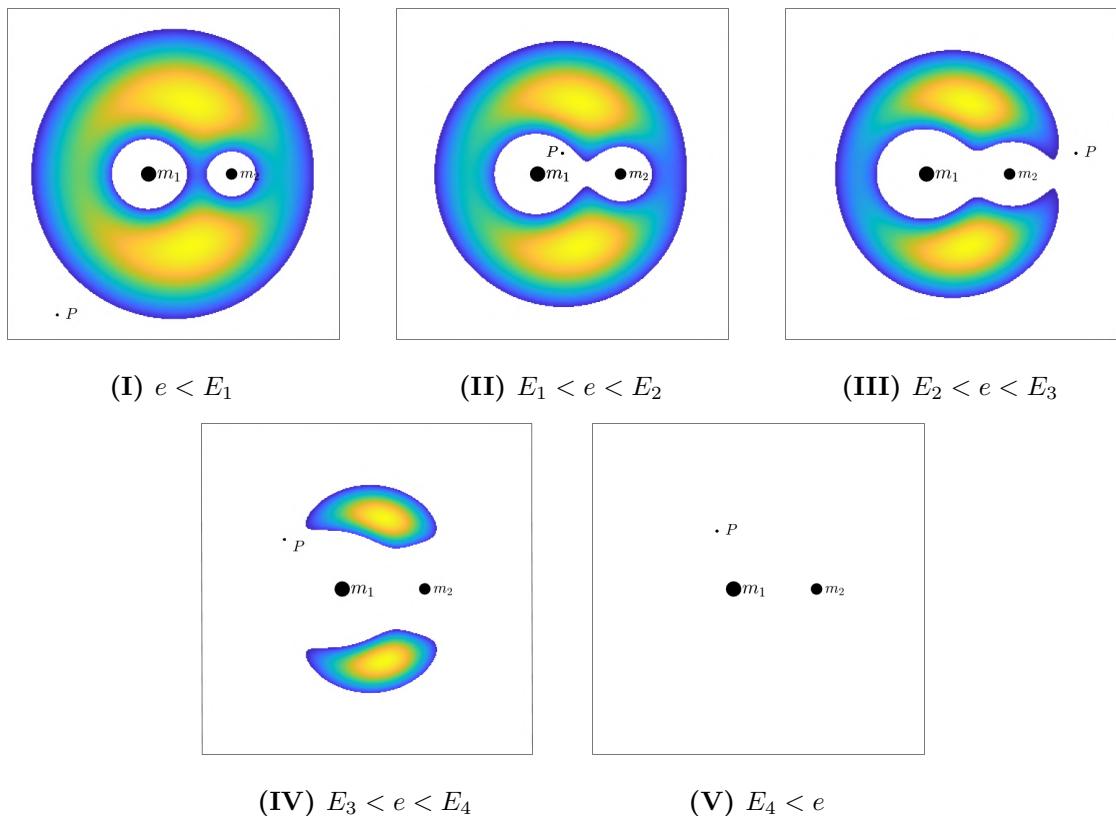


Εικόνα 3.1.3: Η γραφική παράσταση του ενεργού δυναμικού $\bar{U}(x, y)$ για $\mu = 0.3$. Τα χρίσιμα σημεία είναι τα 5 σημεία ισορροπίας του δυναμικού, L_i για $i = 1, \dots, 5$.

Με βάση την μορφή του ενεργού δυναμικού $\bar{U}(x, y)$ (Εικόνα 3.1.3) προκύπτει ότι κοντά στις μάζες m_1 και m_2 υπάρχει πηγάδι δυναμικού (όταν $r_{1,2} \rightarrow 0$ το $\bar{U}(x, y) \rightarrow -\infty$), κάτι που συμβαίνει και σε μεγάλες αποστάσεις. Από την Σχέση 3.1.10 ο όρος $x^2 + y^2$ κυριαρχεί σε σχέση των υπολοίπων και οδηγεί στο $U(x, y) \rightarrow -\infty$. Τα σημεία L_i για $i = 1, \dots, 5$ είναι τα σημεία ισορροπίας του δυναμικού. Ένα σώμα που θα αφεθεί με μηδενική ταχύτητα σε σχέση με τις κύριες μάζες σε ένα από τα σημεία αυτά, σε όλους τους μελλοντικούς χρόνους θα παραμείνει εκεί.

Το «ύφος» των σημείων L_i για $i = 1, \dots, 5$ οδηγεί σε 5 περιπτώσεις, δηλαδή σε συγκεκριμένες επιτρεπτές περιοχές κίνησης ανάλογα με την αρχική ενέργεια e του σώματος και για δεδομένη τιμή μ της παραμέτρου μ . Οι περιπτώσεις αυτές ονομάζονται **energy cases** και φαίνονται στην Εικόνα 3.1.4. Οι άσπρες περιοχές αποτελούν το Hill's region, ενώ η πολύχρωμη περιοχή είναι η απαγορευμένη περιοχή, forbidden realm.

- **Περίπτωση I,** $e < E_1$: Αν η ενέργεια e του σώματος είναι κάτω από την E_1 , τότε το σώμα μπορεί να κινηθεί, μόνο κοντά στις κύριες μάζες και όχι ενδιάμεσα. Προφανώς μπορεί να κινηθεί και εξωτερικά του συστήματος (Εικόνα 3.1.4(I)).
- **Περίπτωση II,** $E_1 < e < E_2$: Καθώς αυξάνεται η ενέργεια του σώματος, δημιουργείται ένας «λαιμός» (neck) που ενώνει τις δύο κύριες μάζες και επιτρέπεται πλέον η κίνηση μεταξύ των δύο περιοχών (Εικόνα 3.1.4(II)).



Εικόνα 3.1.4: Οι επιτρέπομενες περιοχές κίνησης του σώματος P , στο $x-y$ επίπεδο. Με πολύχρωμη απόχρωση φαίνεται η τομή της καμπύλης μηδενικής ταχύτητας με το επίπεδο της ενέργειας e , αποτελώντας την απαγορευμένη περιοχή που δεν μπορεί να βρεθεί το σώμα P (forbidden realm) για 5 διαφορετικές περιπτώσεις. Η εξωτερική περιοχή εκτείνεται ουσιαστικά μέχρι το άπειρο. Στην περίπτωση (V) η ενέργεια είναι αρκετή και το σώμα μπορεί να κινηθεί παντού στο επίπεδο $x-y$.

- **Περίπτωση III, $E_2 < e < E_3$** : Μόλις η ενέργεια είναι λίγο περισσότερη από την E_2 , το σώμα μπορεί να κινηθεί ανάμεσα στις μάζες m_1 , m_2 αλλά και να οδηγηθεί εξωτερικά μέσα από τον «λαϊμό» που σχηματίζεται στο L_2 (Εικόνα 3.1.4(III)).
- **Περίπτωση IV, $E_3 < e < E_4$** : Όταν η ενέργεια αυξηθεί περισσότερο, το σώμα μπορεί να περάσει στην εξωτερική περιοχή μέσα από την περιοχή της μάζας m_1 και τον «λαϊμό» που σχηματίζεται στο L_3 (Εικόνα 3.1.4(IV)).
- **Περίπτωση V, $E_4 < e$** : Η απαγορευμένη περιοχή εξαφανίζεται, και το σώμα P μπορεί να κινείται πλέον ελεύθερο στο επίπεδο $x-y$ (Εικόνα 3.1.4(V)).

Οι ενέργειες E_i με $i = 1, \dots, 4$ αποτελούν τις ενέργειες των σημείων ισορροπίας του δυναμικού L_i με $i = 1, \dots, 4$ και υπολογίζονται παρακάτω.

3.1.3 Υπολογισμός των σημείων ισορροπίας

Τα σημεία ισορροπίας πάζουν καθοριστικό ρόλο στην γενικότερη συμπεριφορά των τροχιών. Με βάση το θεώρημα Lyapunov Subcenter theorem (Weinstein 1973, Moser 1976, Rabinowitz 1982) ένα ασταθές σημείο ισορροπίας εγγυάται την ύπαρξη τουλάχιστον μίας οικογένειας¹ περιοδικών τροχιών. Ενώ ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας εγγυάται την ύπαρξη τουλάχιστον δύο οικογενειών περιοδικών τροχιών. Στην πρώτη περίπτωση η οικογένεια των περιοδικών τροχιών «ξεκινάει» (για χαμηλή ενέργεια) σαν ασταθής. Αντίστοιχα, στην περίπτωση του ευσταθούς Σ.Ι., οι δύο οικογένειες «ξεκινάνε» σαν ευσταθείς.

Το PCR3BP έχει όπως αναφέρθηκε, πέντε σημεία ισορροπίας. Τρία σημεία (L_1, L_2, L_3) βρίσκονται επάνω στον άξονα x , δηλαδή $y_e = 0$, ενώ τα άλλα δύο (L_4, L_5) δεν βρίσκονται επάνω στον άξονα (Εικόνα 3.1.5). Σε όλες τις περιπτώσεις οι θέσεις των Σ.Ι. μπορούν να βρεθούν από τις εξισώσεις 3.1.9 που μπορούν να γραφτούν σαν:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_x, \\ \dot{y} = u_y, \\ \dot{u}_x = 2u_y - \bar{U}_x, \\ \dot{u}_y = -2u_x - \bar{U}_y. \end{cases} \quad (3.1.19)$$

όπου \bar{U}_x και \bar{U}_y οι αντίστοιχες μερικές παραγώγους. Τα Σ.Ι. έχουν $u_x = u_y = 0$ οπότε είναι της μορφής $(x_e, y_e, 0, 0)$ και αρκεί να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \bar{U}_x = 0, \\ \bar{U}_y = 0. \end{cases} \quad (3.1.20)$$

Η σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες x, y του περιστρεφόμενου συστήματος με τις αποστάσεις r_1 και r_2 είναι:

$$x^2 + y^2 = (1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2 - \mu(1 - \mu)$$

ενώ τέλος το ενεργό δυναμικό:

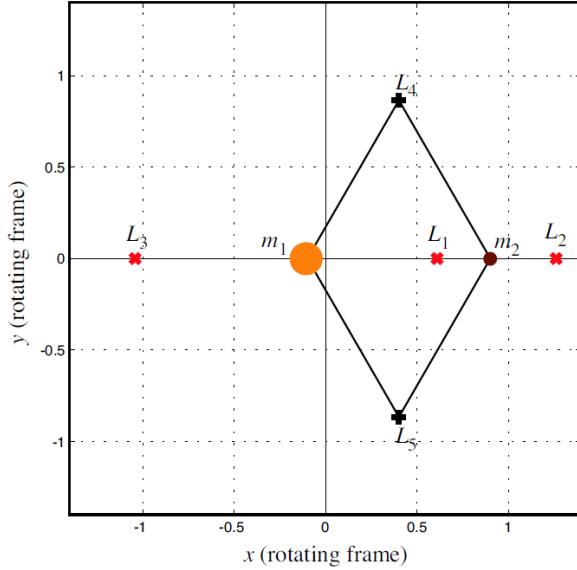
$$-\bar{U}(r_1, r_2) = \frac{1}{2}(1 - \mu)r_1^2 + \frac{1}{2}\mu r_2^2 + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

- Για τα L_4, L_5

Τα δύο σημεία ισορροπίας (L_4, L_5) δεν είναι επάνω στον άξονα x , οπότε για $y \neq 0$ είναι εύκολο να δειχθεί ότι $\bar{U}(r_1, r_2)$ και $\bar{U}(x, y)$ έχουν τα ίδια σημεία ισορροπίας. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει:

$$\begin{cases} \bar{U}_x = \bar{U}_{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \bar{U}_{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = \bar{U}_{r_1} \frac{x+\mu}{r_1} + \bar{U}_{r_2} \frac{x-(1-\mu)}{r_2} = 0 \\ \bar{U}_y = \bar{U}_{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \bar{U}_{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = \bar{U}_{r_1} \frac{y}{r_1} + \bar{U}_{r_2} \frac{y}{r_2} = 0 \end{cases}$$

¹Αλλάζοντας κάποια παράμετρο του συστήματος, για παράδειγμα την ενέργεια, συνεχίζει να υπάρχει η περιοδική τροχιά δημιουργώντας έτσι μία οικογένεια από περιοδικές τροχιές.



Εικόνα 3.1.5: Τα σημεία ισορροπίας του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων, στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς $x - y$. Είναι σχεδιασμένα για $\mu = 0.3$.

Πηγή: Koon, W. S. et al., 2006.

Λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} -\bar{U}_{r_1} = \mu r_2 - \frac{\mu}{r_2^2} = 0 \\ -\bar{U}_{r_2} = (1-\mu)r_1 - \frac{(1-\mu)}{r_2^2} = 0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση $r_1 = r_2 = 1$.

Αυτή η λύση βρίσκεται στην κορυφή ενός ισόπλευρου τριγώνου με τις κύριες μάζες να αποτελούν τις άλλες δύο κορυφές του. Το L_4 βρίσκεται σε θετικά y , ενώ αντιδιαμετρικά βρίσκεται το L_5 (Εικόνα 3.1.5). Τελικά οι συντεταγμένες των σημείων είναι (Koon, W. S. et al., 2006):

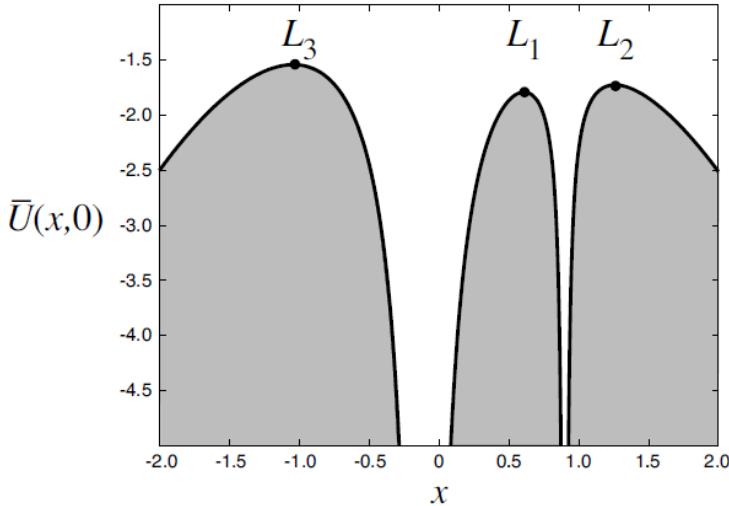
$$\begin{aligned} L_4 : & \quad \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ L_5 : & \quad \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

- Για τα L_1, L_2, L_3

Για τον προσδιορισμό των σημείων που βρίσκονται επάνω στον άξονα x όταν $y = 0$. Άρα το ενεργό δυναμικό μπορεί να γραφτεί σαν:

$$\bar{U}(x, 0) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1-\mu}{|x+\mu|} - \frac{\mu}{|x-1+\mu|}$$

Αποδεικνύεται (Koon, W. S. et al., 2006) ότι στα διαστήματα $(-\infty, -\mu)$, $(-\mu, 1-\mu)$ και $(1-\mu, +\infty)$ έχουν τρία μέγιστα (Εικόνα 3.1.6), με αποτέλεσμα η παράγωγος $\bar{U}_x(x_e, 0) = 0$ να έχει 3 ακριβώς ρίζες, στα σημεία αυτά.



Εικόνα 3.1.6: Το ενεργό δυναμικό $\bar{U}(x, 0)$ για $\mu = 0.1$. Κοντά στις κύριες μάζες $\bar{U} \rightarrow -\infty$. Τα μέγιστα της συνάρτησης ισοδυναμούν με τα σημεία ισορροπίας L_1, L_2, L_3 .
Πηγή: Koon, W. S. et al., 2006.

Ο υπολογισμός των μεγίστων αυτών μπορεί γίνεται μέσα από αριθμητική μέθοδο. Προκύπτει μία προσέγγιση για τα x_e του κάθε σημείου ισορροπίας:

$$\begin{aligned} L_1 : & \quad \left(1 - \mu - r_H \left(1 - \frac{r_H}{3} - \frac{r_H^2}{9} \right), 0 \right), \\ L_2 : & \quad \left(1 - \mu + r_H \left(1 + \frac{r_H}{3} - \frac{r_H^2}{9} \right), 0 \right), \\ L_3 : & \quad \left(-1 - \mu + \frac{7}{12}\mu \left[1 + \frac{23}{84} \left(\frac{7}{12}\mu \right)^2 \right], 0 \right), \end{aligned}$$

όπου $r_H = (\frac{\mu}{3})^{\frac{1}{3}}$, καλείται ακτίνα Hill και ορίζει ουσιαστικά τα όρια μεταξύ της περιοχής της μάζας m_1 με της μάζας m_2 .

Και στα πέντε σημεία μπορεί να υπολογιστεί η ενέργεια από το ολοκλήρωμα Jacobi, Σχέση 3.1.16, αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες $(x_e, y_e, 0, 0)$. Προκύπτουν τα C_i με $i = 1, \dots, 5$ όπου

$$C_5 = C_4 < C_3 < C_2 < C_1$$

Τα σημεία L_1, L_2, L_3 είναι **ασταθή** σημεία ισορροπίας για οποιαδήποτε τιμή του μ . Τα L_4, L_5 είναι **ασταθή** για $\mu > 0.0385$, ενώ **ευσταθείς** σε αντίθετη περίπτωση.

3.2 Τομές Poincaré για το περιορισμένο πρόβλημα τριών σωμάτων

Οι τομές Poincaré για το περιορισμένο πρόβλημα τριών σωμάτων μπορούν να δώσουν τα βασικά χαρακτηριστικά των τροχιών που θα ακολουθήσει ένας εξωπλανήτης, ενώ για διαφορετική ενέργεια γίνεται διάκριση μεταξύ των περιπτώσεων (I-IV) που σημειώθηκαν προηγουμένως. Όλες οι τομές που παρουσιάζονται είναι $\eta = 0$ και για $\dot{y} < 0$. Λόγω της μορφής του δυναμικού, η επιφάνεια $y = 0$ αποκαλύπτει την ένωση στις περιοχές μεταξύ των αστέρων και κατά συνέπεια την οποιαδήποτε διαφυγή από το σύστημα, εφόσον η ενέργεια του συστήματος το επιτρέπει. Οι αρχικές συνθήκες επιλέγονται σαν ένα grid για το (x_0, \dot{x}_0) , $y_0 = 0$ ενώ το \dot{y}_0 υπολογίζεται από την σχέση ενέργειας (Σχέση 3.1.15) και επιλέγεται η αρνητική τιμή. Στα παρακάτω γραφήματα φαίνεται με κόκκινο η απαγορευμένη περιοχή κίνησης (forbidden realm).

Η παράμετρος μάζας που θα χρησιμοποιηθεί στις τομές είναι $\mu = 0.185$, η οποία είναι η παράμετρος μάζας του διπλού αστρικού συστήματος HU Aqr, στο οποίο έχουν παρατηρηθεί τρεις P-type εξωπλανήτες (K. Gozdziewski et al., 2014).

Τα σημεία ισορροπίας L_i για $i = 1, \dots, 5$ μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις της παραπάνω παραγράφου:

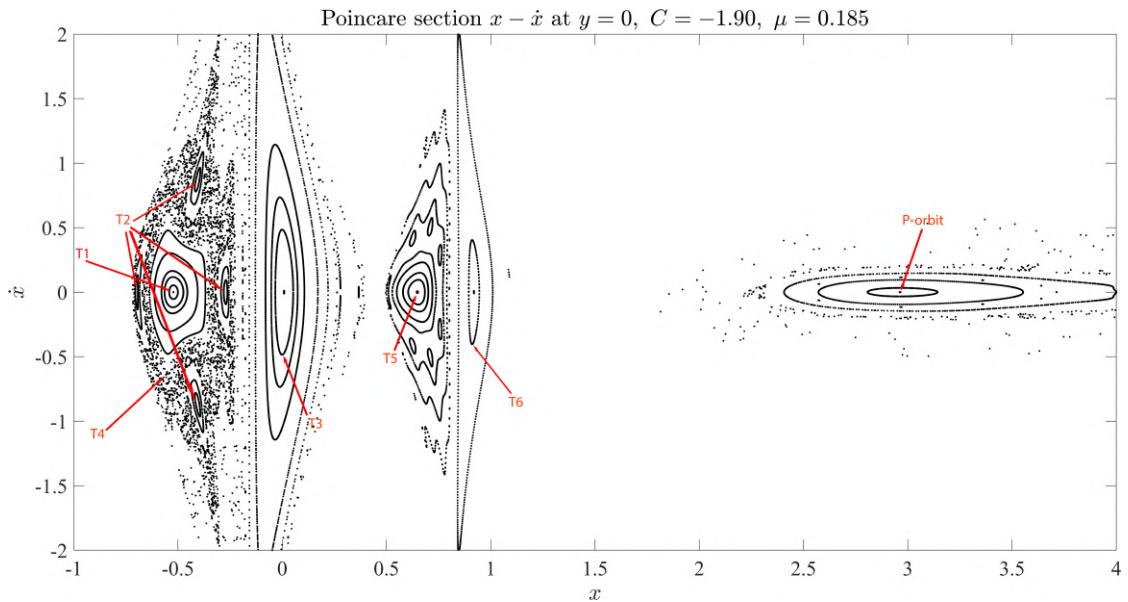
Πίνακας 3.1: Τα σημεία ισορροπίας για το περιορισμένο πρόβλημα τριών σωμάτων για $\mu = 0.185$.

Σημείο Ισορροπίας	Θέση (x, y)	Ενέργεια C_i
L_1	$(0.479, 0)$	-1.893
L_2	$(1.289, 0)$	-1.774
L_3	$(-1.077, 0)$	-1.5914
L_4	$(0.315, 0.866)$	-1.425
L_5	$(0.315, -0.866)$	-1.425

- Περίπτωση I: $C = -1.90$

Η ενέργεια για το συγκεκριμένο μ δεν είναι αρκετή ώστε να ενώσει τις περιοχές των κύριων μαζών οπότε αναφερόμαστε στην Περίπτωση I (Εικόνα 3.1.4(I)). Αυτό μπορεί να φανεί και στην επιφάνεια τομής (Εικόνα 3.2.1) σαν τρεις αποχωρισμένες περιοχές: γύρω από το $x \sim 0$, γύρω από το $x \sim 1$ και σε μεγαλύτερα x . Στην πρώτη περιοχή φαίνονται όλες οι τροχιές που είναι βαρυτικά δέσμιες από το μαζικό σώμα m_1 , το οποίο βρίσκεται στο σημείο $(x, y) = (-\mu, 0) = (-0.185, 0)$ (S-orbits). Στην δεύτερη περιοχή όλες οι βαρυτικά δέσμιες τροχιές από το λιγότερα μαζικό σώμα m_2 , το οποίο βρίσκεται στο σημείο $(x, y) = (1 - \mu, 0) = (0.715, 0)$ (S-orbits). Τέλος, στην πιο μακρινή περιοχή φαίνονται οι τροχιές που υπάρχουν γύρω και από τα δύο σώματα (P-orbits). Στην επιφάνεια τομής έχουν σημειωθεί κάποιες τροχιές T_i που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Η περιοχή που είναι αριστερά του σώματος m_1 αποτελείται από τροχιές που είναι

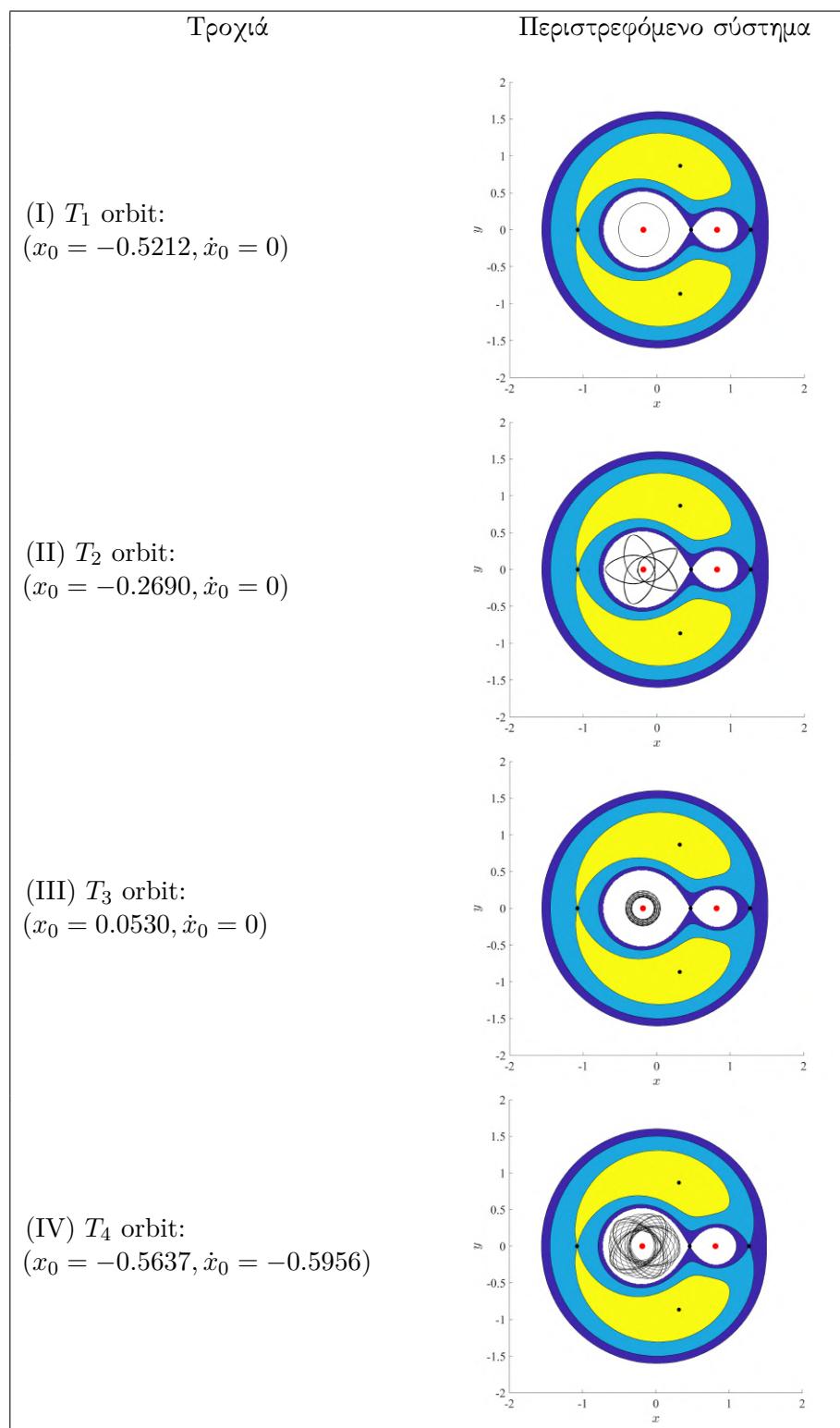


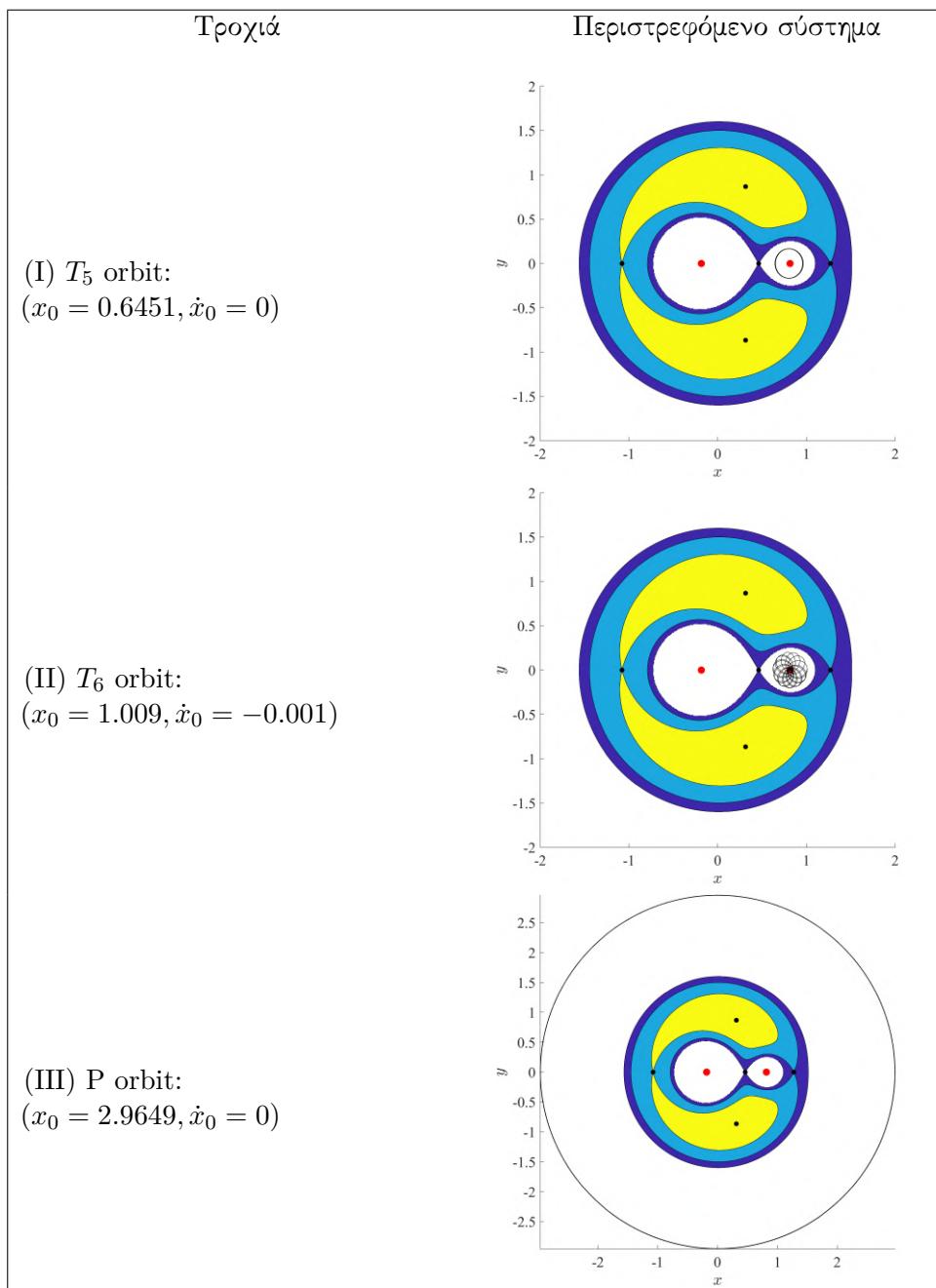
Εικόνα 3.2.1: Τομή Poincaré του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων για $\mu = 0.185$ και ενέργεια $C = -1.90$. Έχουν σημειωθεί με κόκκινο χρώμα κάποιες τροχιές.

ορθόδρομες (direct orbits), δηλαδή ο εξωπλανήτης κινείται σύμφωνα με τη φορά του m_2 (στο αδρανειακό σύστημα) (T_1, T_2, T_4 orbits). Αντίθετα, στην δεξιά περιοχή είναι τροχιές που είναι ανάδρομες (retrograde orbits), δηλαδή ο εξωπλανήτης κινείται με αντίθετη φορά από αυτήν του m_2 (T_3). Αντίστοιχα, υπάρχουν direct και retrograde orbits γύρω από το μ_2 .¹.

- Η T_1 έχει σχεδιαστεί για χρόνο $t = 30$ (Εικόνα 3.2.2(I)) και αποτελεί ευσταθής περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 1 γύρω από το μαζικό σώμα μ_1 . Η τροχιά στην τομή Poincaré φαίνεται σαν ένα σημείο.
- Η T_2 έχει σχεδιαστεί για χρόνο $t = 30$ (Εικόνα 3.2.2(II)) και αποτελεί ευσταθής περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 4 γύρω από το μαζικό σώμα μ_1 . Στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς το σώμα διαγράφει αυτό το απλό σχήμα που κλείνει μετά από 4 «κύκλους».
- Η T_3 έχει σχεδιαστεί για χρόνο $t = 10$ (Εικόνα 3.2.2(III)) αποτελεί αμετάβλητη καμπύλη (invariant curve) γύρω από μία ευσταθής περιοδική τροχιά, γύρω από το σώμα μ_1 . Είναι μία ημιπεριοδική τροχιά. Όπως φαίνεται στο περιστρεφόμενο σύστημα, το σώμα θα γεμίσει τον δακτύλιο και δεν θα κλείσει ποτέ η τροχιά του.
- Η T_4 έχει σχεδιαστεί για χρόνο $t = 50$ (Εικόνα 3.2.2(IV)) και αποτελεί μία χαοτική τροχιά γύρω από το σώμα μ_1 . Τέτοιες τροχιές έχουν ενδιαφέρον όταν αυξηθεί η

¹Η χρησιμοποίηση του συμβολισμού m_1 και άλλοτε μ_1 δεν είναι τυχαία, αλλά ουσιαστικά περιγράφει το σύστημα που εξετάζεται: για το m_1 είναι το αδρανειακό ενώ για μ_1 το περιστρεφόμενο.

**Εικόνα 3.2.2**

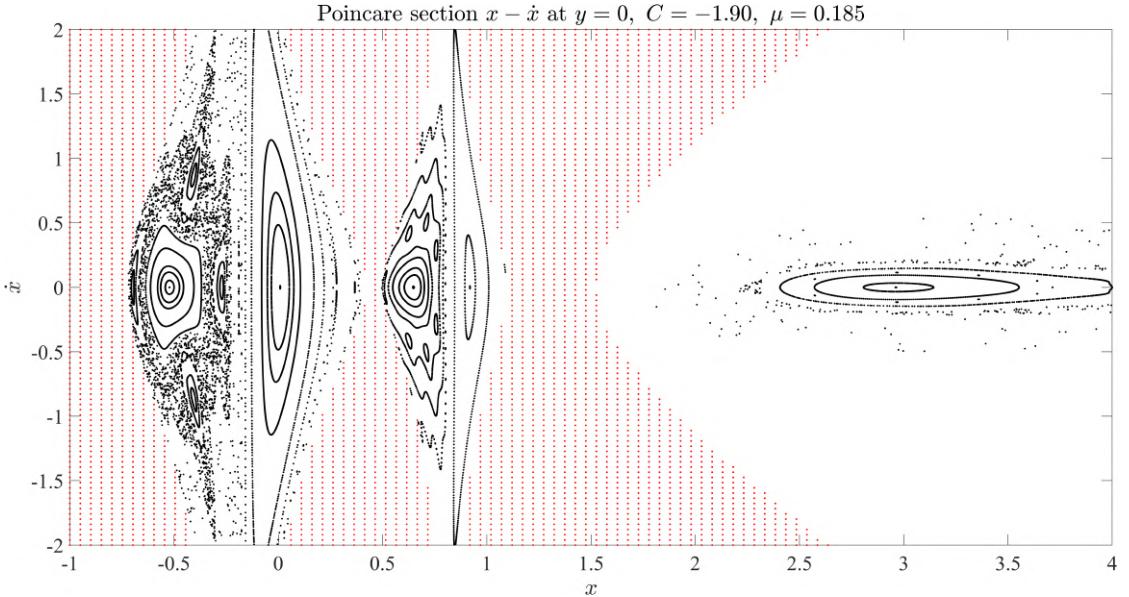


Εικόνα 3.2.3

ενέργεια και ανοίζουν τα κανάλια μεταφοράς μεταξύ των περιοχών, μέσα από τα σημεία ισορροπίας L_i (Εικόνα 3.2.7).

- Η T_5 έχει σχεδιαστεί για χρόνο $t = 30$ (Εικόνα 3.2.3(I)) και αποτελεί ευσταθής περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 1 γύρω από το λιγότερο μαζικό σώμα μ_2 .
- Η T_6 έχει σχεδιαστεί για χρόνο $t = 10$ (Εικόνα 3.2.3(II)) και αποτελεί αμετάβλητη καμπύλη γύρω από μία ευσταθής περιοδική τροχιά, γύρω από το σώμα μ_2 . Είναι μία ημιπεριοδική τροχιά.
- Η P orbit έχει σχεδιαστεί για χρόνο $t = 100$ (Εικόνα 3.2.3(III)) και αποτελεί ευσταθής περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 1 γύρω από τις δύο μάζες.

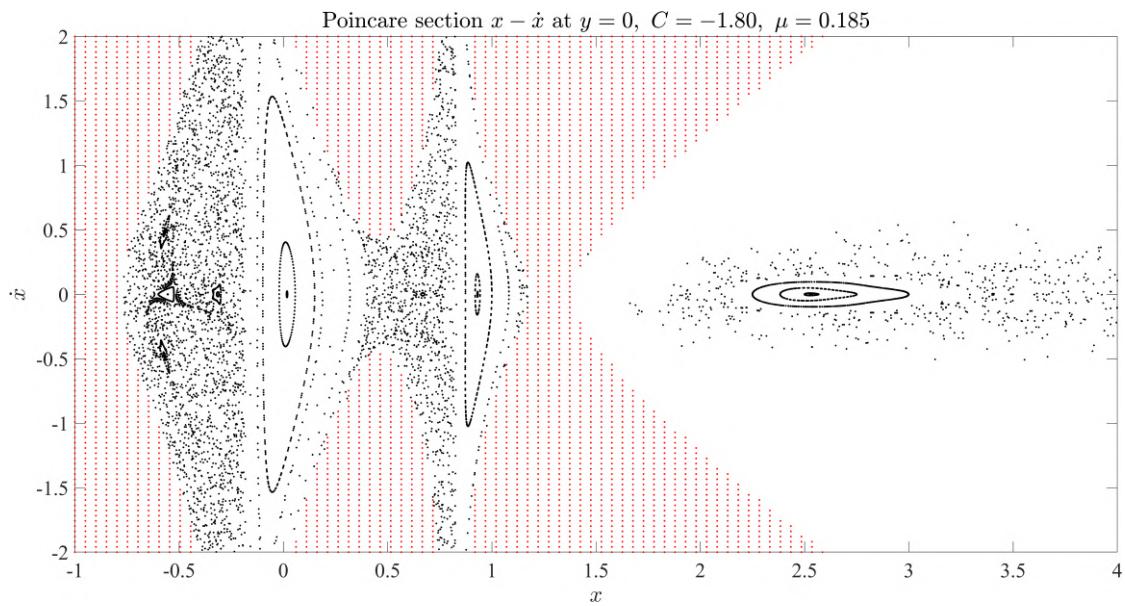
Παρουσιάζεται η επιφάνεια τομής της Εικόνας 3.2.1, όπου έχει σχεδιαστεί με κόκκινο χρώμα η απαγορευμένη περιοχή κίνησης:



Εικόνα 3.2.4: Τομή Poincaré του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων για $\mu = 0.185$ και ενέργεια $C = -1.90$. Με κόκκινο χρώμα φαίνεται η απαγορευμένη από την ενέργεια, περιοχή κίνησης.

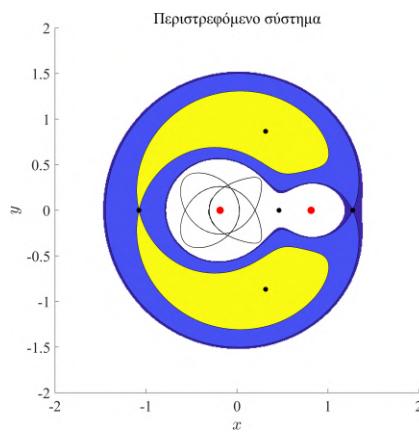
- **Περίπτωση II: $C = -1.80$**

Αυξάνοντας την ενέργεια πάνω από το L_1 , επιτρέπεται πλέον η μεταφορά-κίνηση μεταξύ των περιοχών γύρω από τους αστέρες. Αυτό φαίνεται στην ενωμένη περιοχή της Εικόνας 3.2.5. Με βάση την τομή, φαίνεται ότι υπάρχουν πολλές χαοτικές τροχιές στις direct orbits, στις περιοχές των δύο μαζών. Επίσης οι περιοδικές τροχιές πολλαπλότητας 1 γύρω από τις μάζες και η ευσταθής περιοδική P-orbit διατηρούνται, όπως οι δύο συμβαίνουν και στην αντίστοιχη περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 4 που σχεδιάστηκε

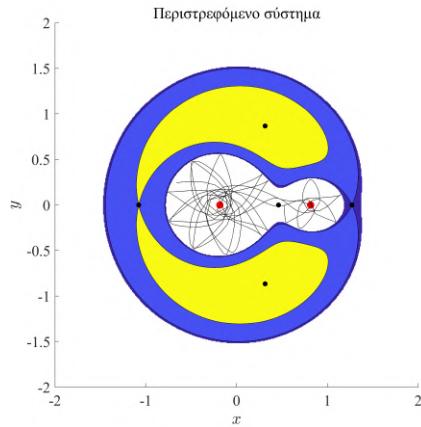


Εικόνα 3.2.5: Τομή Poincaré του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων για $\mu = 0.185$ και ενέργεια $C = -1.80$.

προηγουμένως (T_2 orbit). Εμφανίζεται μία ευσταθής περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 3 η οποία έχει σχεδιαστεί στην Εικόνα 3.2.6. Στην Εικόνα 3.2.7 φαίνεται μία χαοτική τροχιά που δείχνει την κίνηση από την μεταφορά μεταξύ των δύο περιοχών. Ο μηχανισμός που οδηγεί στην μεταφορά αυτή δεν είναι αντικείμενο της εργασίας αυτής.

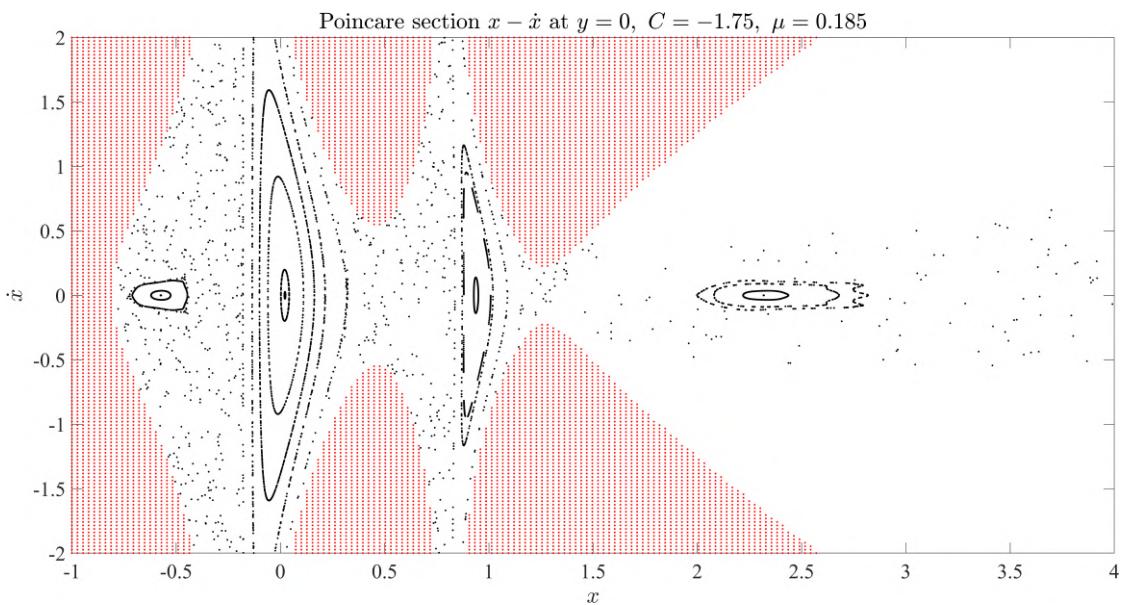


Εικόνα 3.2.6: Ευσταθής περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 3 για $\mu = 0.185$ και $C = -1.80$. Οι αρχικές συνθήκες είναι $(x_0 = -0.315, \dot{x}_0 = 0)$, ενώ ο χρόνος για τον σχεδιασμό της είναι $t = 30$.



Εικόνα 3.2.7: Χαοτική τροχιά για $\mu = 0.185$ και $C = -1.80$. Οι αρχικές συνθήκες είναι $(x_0 = 0.5273, \dot{x}_0 = 0)$, ενώ ο χρόνος για τον σχεδιασμό της είναι $t = 50$.

- **Περίπτωση III: $C = -1.75$**

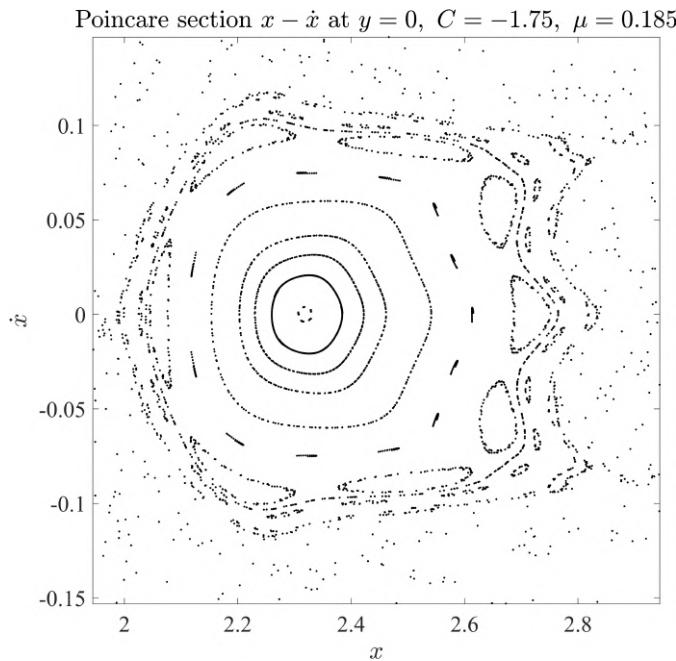


Εικόνα 3.2.8: Τομή Poincaré του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων για $\mu = 0.185$ και ενέργεια $C = -1.75$.

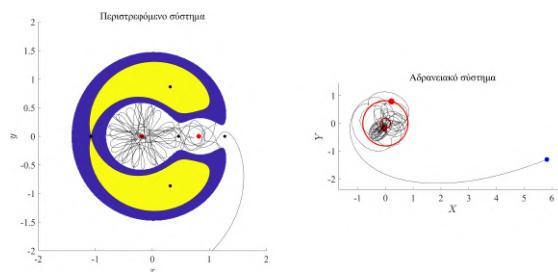
Στην περίπτωση αυτή η ενέργεια είναι πάνω από το σημείο ισορροπίας L_2 ανοίγοντας το κανάλι διαφυγής από το μ_2 στην εξωτερική περιοχή. Από την τομή Poincaré της Εικόνας 3.2.8 μπορεί να διακρίνει κανείς την σύνδεση πλέον των τριών περιοχών όπως επίσης και το γέμισμα των περιοχών με χαοτικές τροχιές. Για τις direct orbits: η ευσταθής τροχιά πολλαπλότητας 2 που υπήρχε γύρω από το μ_1 γίνεται ασταθής, όπως γίνεται και για την

ευσταθή τροχιά πολλαπλότητας 1 γύρω από το μ_2 . Για τις retrograde orbits και για την P-orbit η ευστάθεια των τροχιών διατηρείται. Στη μεγεθυμένη περιοχή των P orbits (Εικόνα 3.2.9) μπορούν να διακριθούν μεγαλύτερης πολλαπλότητας περιοδικές τροχιές.

Συμπερασματικά, εφόσον η ενέργεια είναι αρκετή, είναι δυνατή η διαφυγή εξωπλανητών από το σύστημα που ξεκινάνε από την εσωτερική περιοχή (Εικόνα 3.2.10). Ο μηχανισμός που οδηγεί στην μεταφορά και στην εκτόξευση ξεφεύγει από τα πλαίσια της εργασίας και είναι ένα μελλοντικό ερευνητικό αντικείμενο.

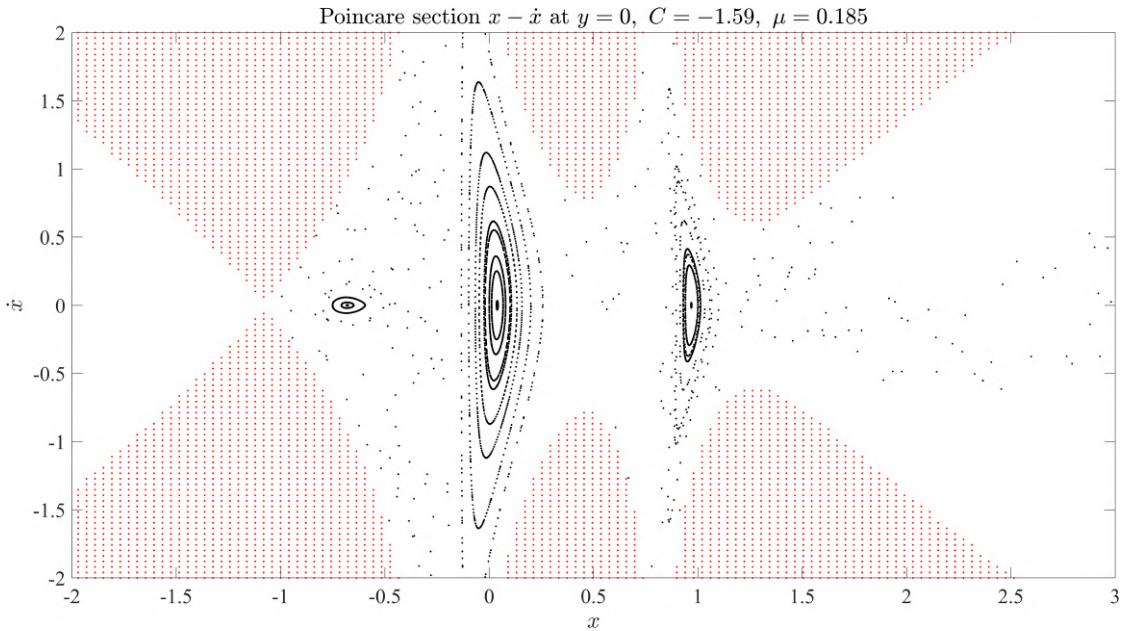


Εικόνα 3.2.9: Τομή Poincaré του περιορισμένου πρόβλημας τριών σωμάτων για $\mu = 0.185$ και ενέργεια $C = -1.75$, μεγεθυμένη στην περιοχή των P-orbits.



Εικόνα 3.2.10: Χαοτική τροχιά που ξεκινάει από την εσωτερική περιοχή οδηγεί τον εξωπλανήτη σε εκτόξευση από το σύστημα για $\mu = 0.185$ και $C = -1.75$. Δεξιά φαίνεται η τροχιά στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Η τροχιά σχεδιάστηκε για $t = 70.5$, με αρχικές συνθήκες: $(x_0 = 0.4993, \dot{x}_0 = 0)$.

- Περίπτωση IV: $C = -1.59$



Εικόνα 3.2.11: Τομή Poincaré του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων για $\mu = 0.185$ και ενέργεια $C = -1.59$

Πλέον η ενέργεια είναι αρκετή ώστε να ανοίξει και το άλλο κανάλι από το σημείο ισορροπίας L_3 ($x = -1.077$). Οι χαοτικές τροχιές κυριαρχούν, ενώ όπως φαίνεται και στην τομή δεν υπάρχουν άλλες ευσταθείς περιοδικές τροχιές εκτός από 3 S orbits: οι δύο γύρω από το μαζικό σώμα μ_1 (μία direct και μία retrograde αντίστοιχα) και μία direct orbit γύρω από το λιγότερο μαζικό σώμα μ_2 . Η P-orbit έχει γίνει ασταθής περιοδική.

Κεφάλαιο 4

Δυναμική των P-orbits: Διαφυγή από το σύστημα

4.1 Τομή Poincaré και P-orbits για $\mu = 0.185$ και $C = -1.90$

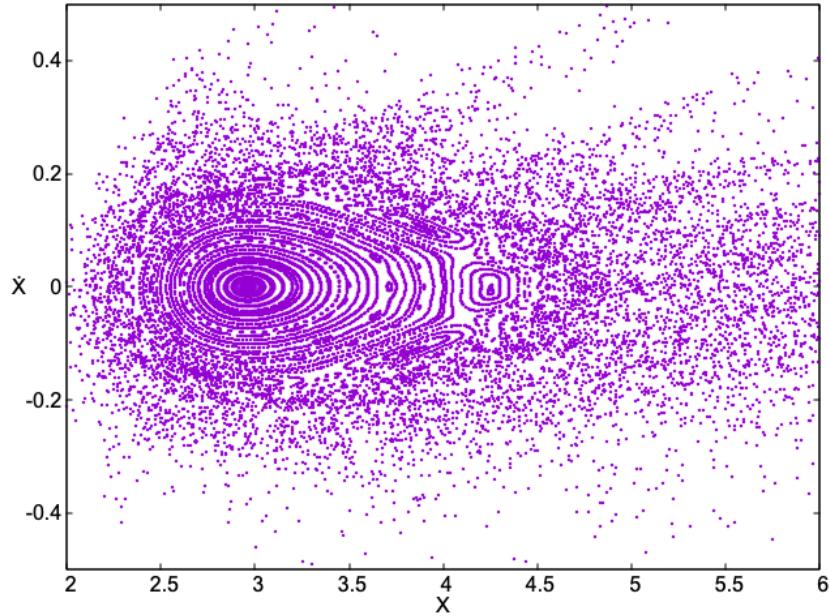
Η βασική περιοδική τροχιά P-orbit ξεκινάει ευσταθής σε χαμηλή ενέργεια, για $C = -1.90$. Γύρω της υπάρχουν αμετάβλητες καμπύλες και νησιά ευστάθειας, δηλαδή περιοδικές τροχιές μεγαλύτερης πολλαπλότητας (Εικόνα 4.1.1). Στην Εικόνα 4.1.2 έχει γίνει μεγέθυνση και έχουν σημειωθεί κάποιες τροχιές που παρουσιάζονται.

Σχεδιάστηκαν αρχικά δύο ευσταθείς περιοδικές τροχιές: Η βασική P-orbit, P_1 , πολλαπλότητας 1 και η ευσταθής περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 5, T_1 . Η T_1 αποτελείται από 5 νησίδες ευστάθειας ανάμεσα σε αμετάβλητες καμπύλες της P_1 . Οι τροχιές φαίνονται στην Εικόνα 4.1.3.

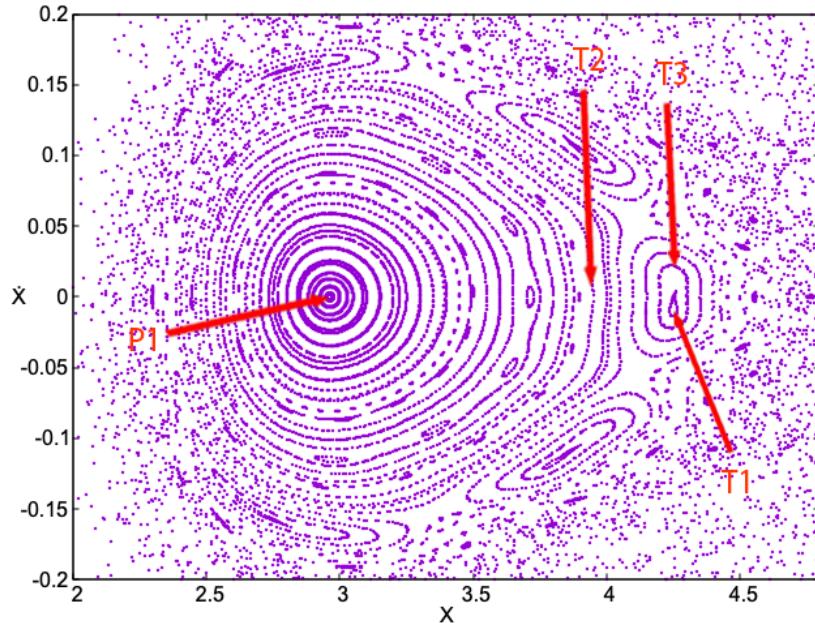
Όπως αναφέρθηκε, γύρω από ευσταθείς περιοδικές τροχιές υπάρχουν αμετάβλητες καμπύλες (ημιπεριοδικές τροχιές), T_2 και T_3 αντίστοιχα στην τομή. Στην Εικόνα 4.1.4 φαίνονται αυτές οι τροχιές: η T_2 γύρω από την P_1 και η T_3 γύρω από την περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 5, T_1 . Όλες οι τροχιές σχεδιάστηκαν με βάση τον Πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1: Οι αρχικές συνθήκες και ο χρόνος ολοκλήρωσης των σχεδιασμένων τροχιών P orbits, για $\mu = 0.185$ και $C = -1.90$.

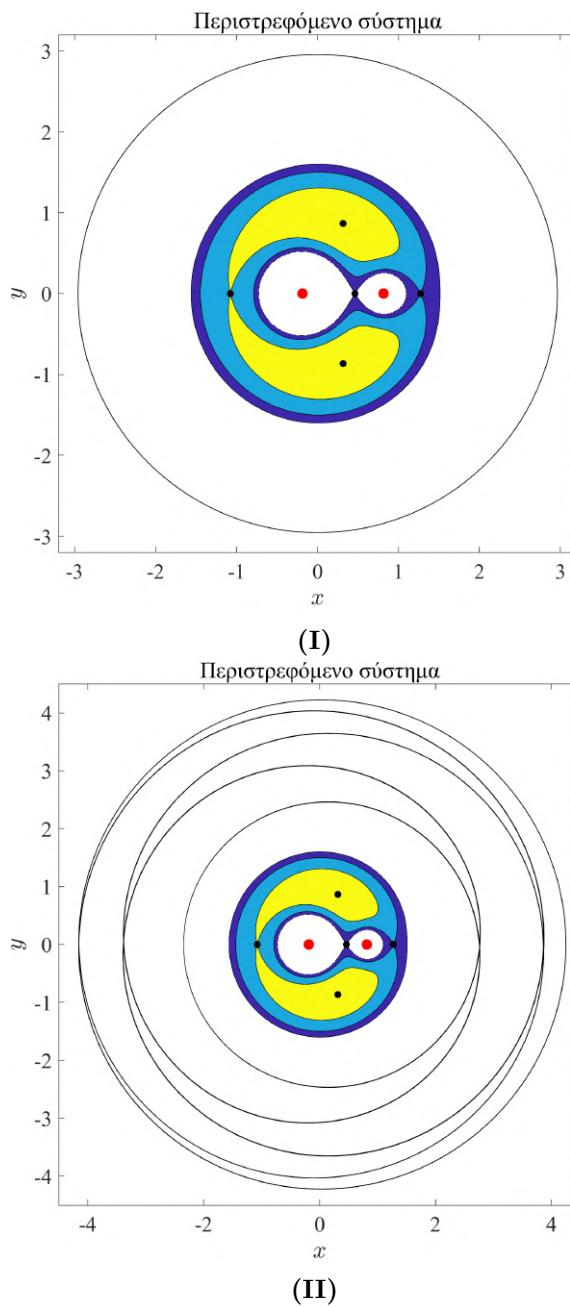
Τροχιά	Αρχικές συνθήκες (x_0, \dot{x}_0)	Αδιάστατος χρόνος ολοκλήρωσης t
P_1	(2.96275773, 0)	500
T_1	(4.25123, 0)	500
T_2	(3.85211, 0.001646)	500
T_3	(4.277, 0)	500



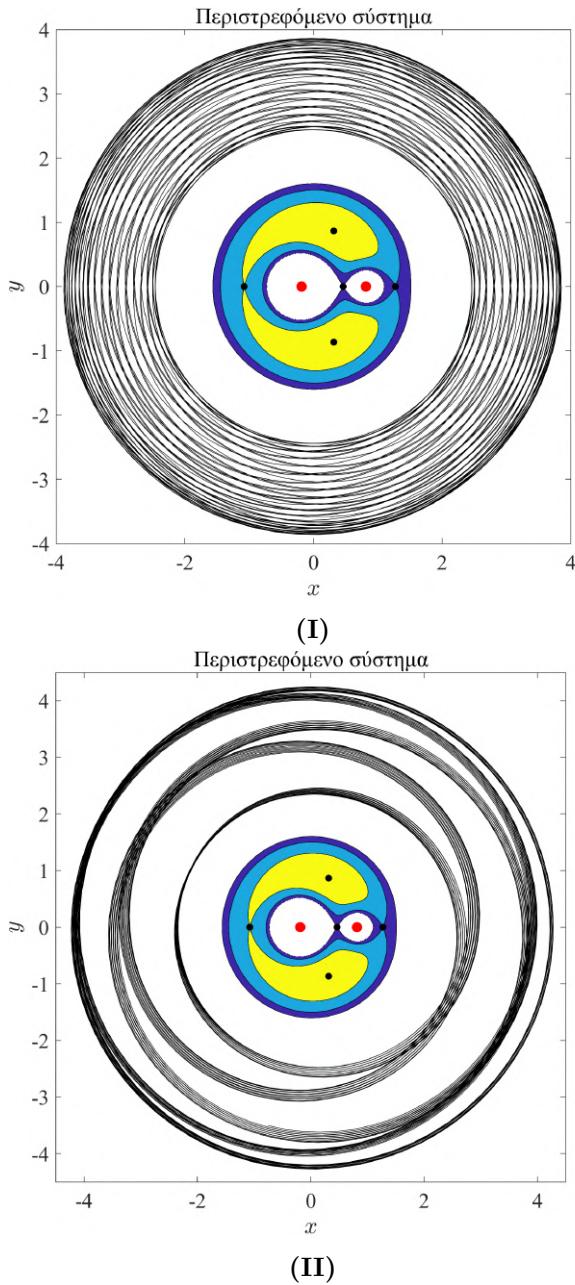
Εικόνα 4.1.1: Τομή Poincaré του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων για $\mu = 0.185$ και ενέργεια $C = -1.90$, μεγεθυμένη στην περιοχή των P -orbits.



Εικόνα 4.1.2: Τομή Poincaré του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων για $\mu = 0.185$ και ενέργεια $C = -1.90$, μεγεθυμένη στην περιοχή των P -orbits με σημειωμένες κάποιες τροχιές.

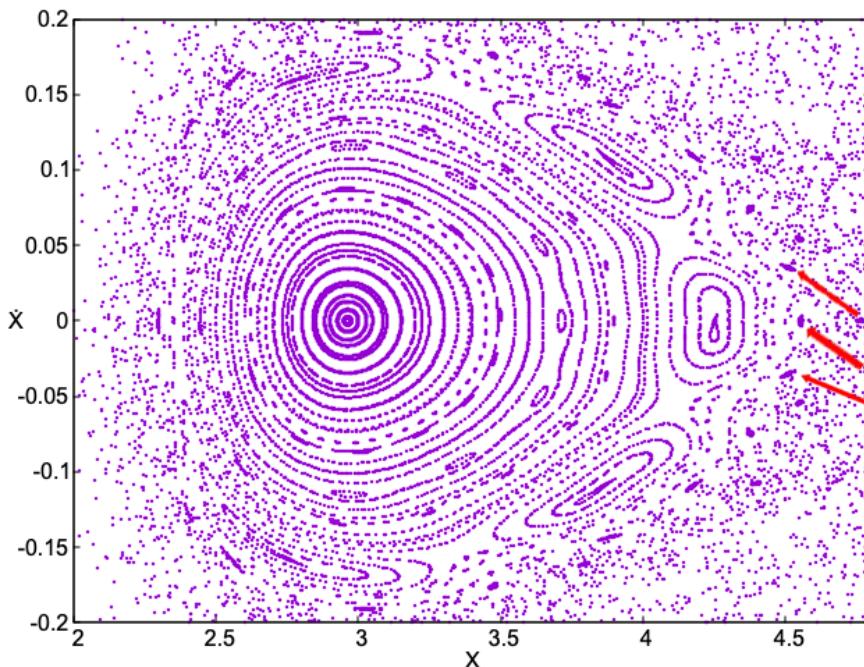


Εικόνα 4.1.3: (I): Η βασική ευσταθής περιοδική τροχιά P -orbit πολλαπλότητας 1 (P_1 της Εικόνας 4.1.2), για $\mu = 0.185$ και $C = -1.90$. (II): Η ευσταθής περιοδική τροχιά P -orbit πολλαπλότητας 5 (T_1 της Εικόνας 4.1.2), για $\mu = 0.185$ και $C = -1.90$.



Εικόνα 4.1.4: (I): Η ημιπεριοδική τροχιά της βασικής ευσταθής περιοδικής τροχιάς P -orbit πολλαπλότητας 1 (T_2 της Εικόνας 4.1.2), για $\mu = 0.185$ και $C = -1.90$. (II): Η ημιπεριοδική τροχιά της ευσταθής περιοδικής τροχιάς P -orbit πολλαπλότητας 5 (T_3 της Εικόνας 4.1.2), για $\mu = 0.185$ και $C = -1.90$.

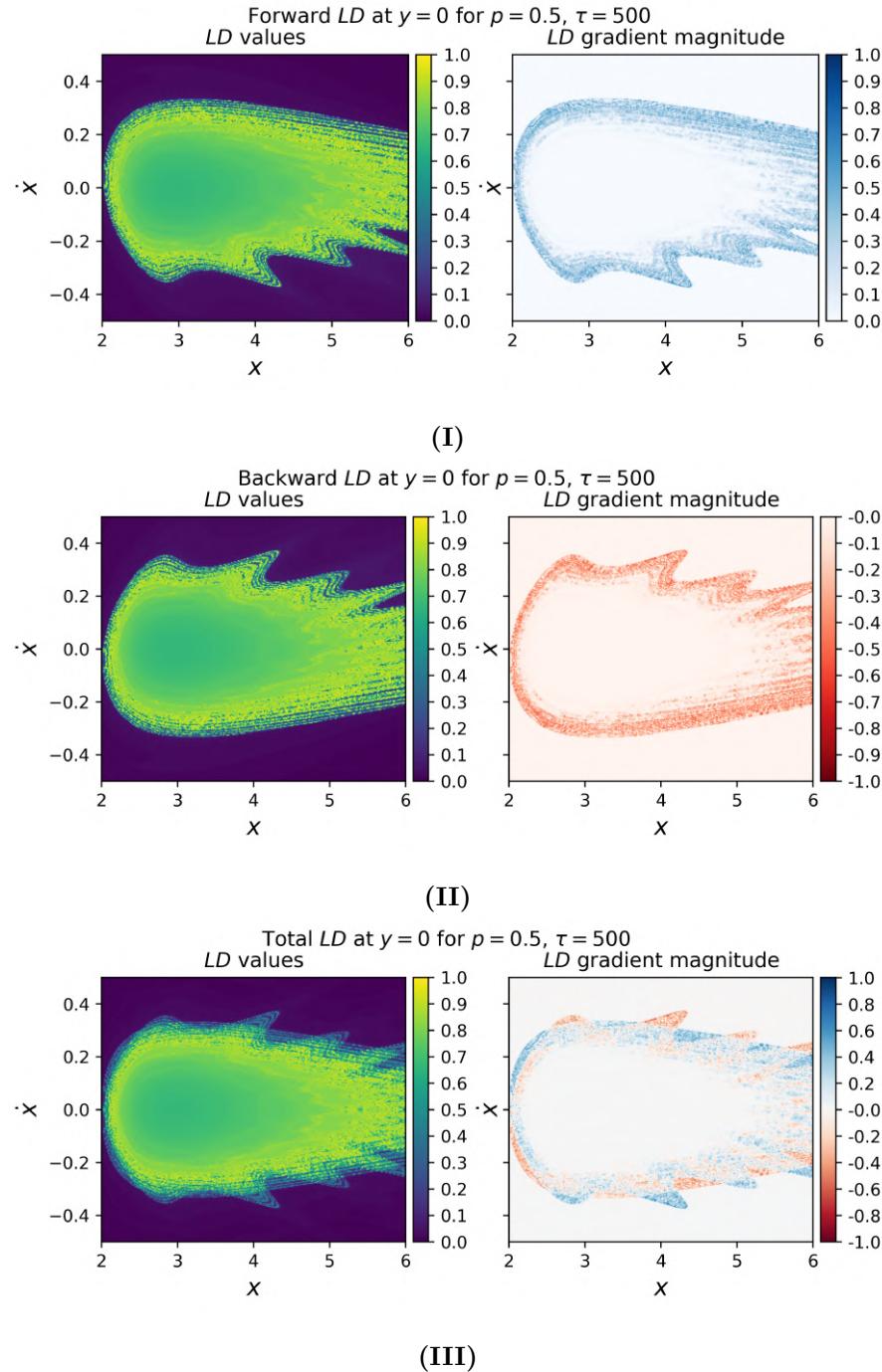
Εξωτερικά των αμετάβλητων καμπύλων της βασικής περιοδικής τροχιάς P_1 , υπάρχει η «θάλασσα» χάους. Όμως όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.1.5, υπάρχουν κάποιες νησίδες τάξης. Για παράδειγμα, έχει σημειωθεί μία ευσταθής περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 16, η οποία είναι ανάμεσα σε χαοτικές τροχιές. Με βάση το Poincaré-Birkhoff θεώρημα, θα υπάρχει η αντίστοιχη ασταθής περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 16, η οποία θα βρίσκεται ανάμεσα στις νησίδες αυτές. Η ύπαρξη της ασταθούς περιοδικής τροχιάς μέσα στη «θάλασσα» χάους, οδηγεί σε πολλές ομοκλινικές τομές. Παράλληλα, η ύπαρξη μεγαλύτερων πολλαπλοτήτων περιοδικών τροχιών (δύσκολα ξεχωρίζουν), δημιουργεί και ετεροκλινικές τομές μεταξύ των manifolds των διαφορετικών τροχιών.



Εικόνα 4.1.5: Τομή Poincaré του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων για $\mu = 0.185$ και ενέργεια $C = -1.90$ μεγεθυσμένη στην περιοχή των P -orbits. Με κόκκινο χρώμα επισημαίνονται 3 από τις 16 νησίδες της ευσταθούς περιοδικής τροχιάς πολλαπλότητας 16, η οποία βρίσκεται μέσα στην «θάλασσα» χάους.

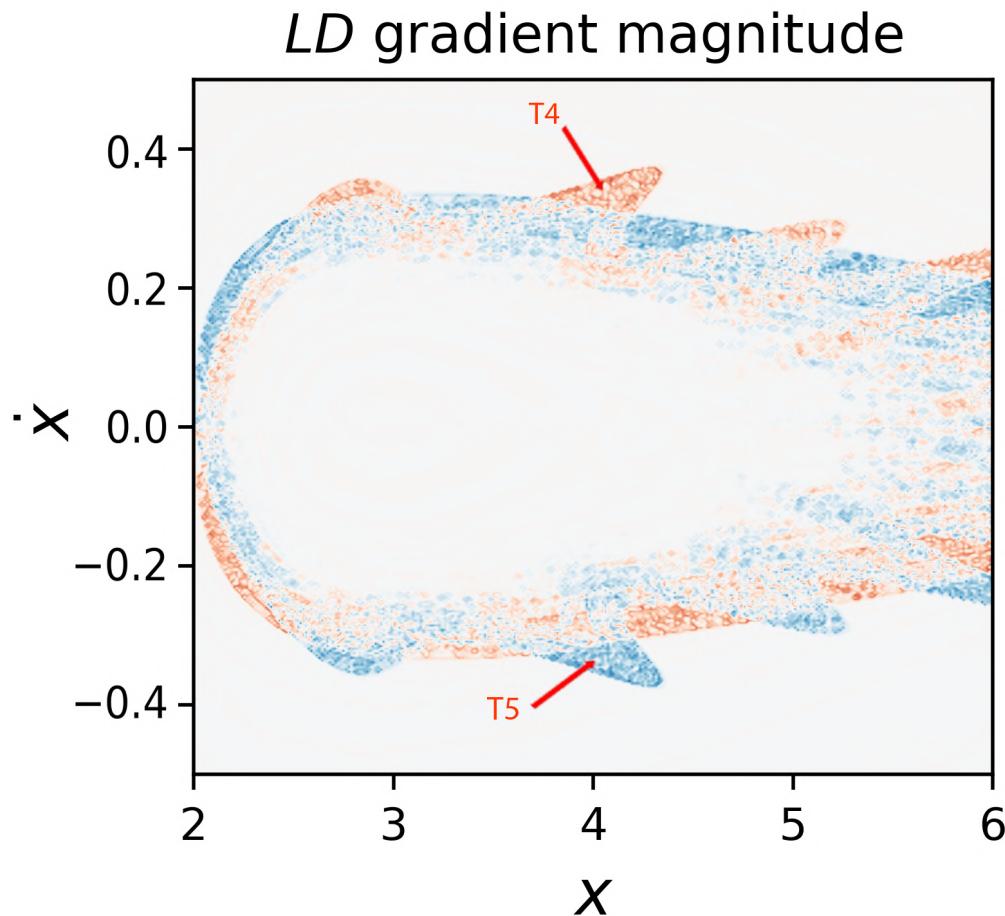
4.2 LDs των P -orbits για $\mu = 0.185$ και $C = -1.90$

Υπολογίζοντας τους LDs για την περιοχή αυτή, μπορούν να ανακαλυφθούν οι μηχανισμοί που οδηγούν τροχιές στη διαφυγή. Οι LDs υπολογίστηκαν για $\tau = 500$, για $\mu = 0.185$ και $C = -1.90$. Μπορούν να φανούν στην Εικόνα 4.2.1. Η γενική μορφή των πολλαπλοτήτων (manifolds), προκύπτει από την ασταθή περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 16, ενώ φαίνεται και το ομοκλινικό πλέγμα που αναφέρθηκε.



Εικόνα 4.2.1: Το πεδίο LD για το περιορισμένο πρόβλημα τριών σωμάτων στη περιοχή των P -orbits, στο $y = 0$, για $\mu = 0.185$, για ενέργεια $C = -1.90$ και $\tau = 500$.

Τροχιές που ξεκινάνε στην περιοχή των πολλαπλοτήτων, ήα ακολουθήσουν τις δομές με αποτέλεσμα να διαφύγουν εν τέλει από το σύστημα. Ανάλογα από που θα ξεκινήσουν, μπορεί να παγιδευτούν για μεγάλο χρόνο στο σύστημα μέχρι να γίνει η διαφυγή. Ακολουθούν μερικές τέτοιες χαοτικές τροχιές.

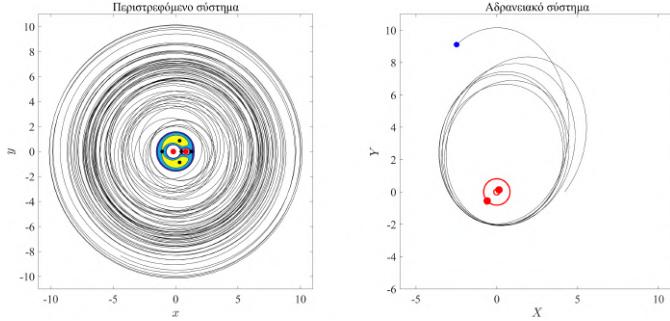
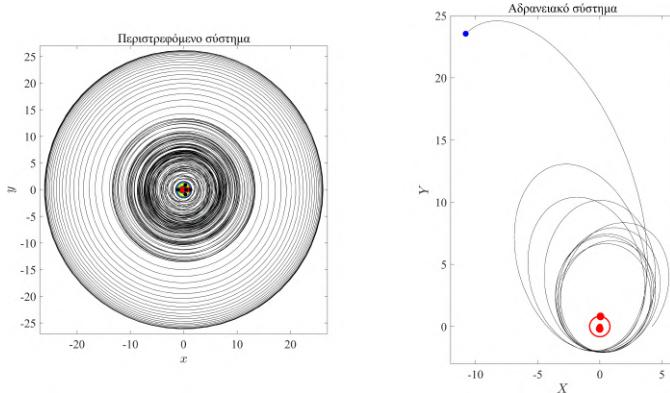
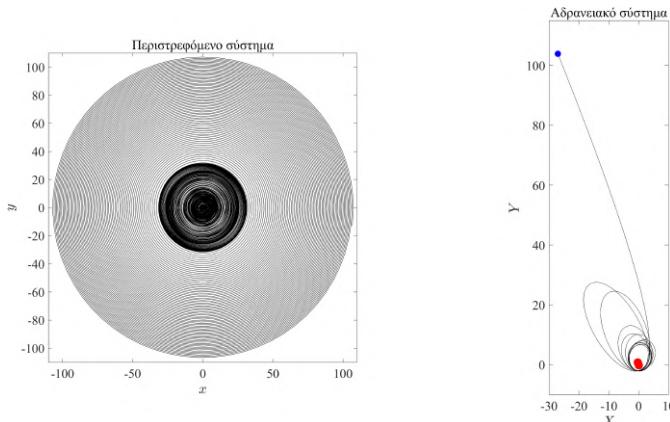


Εικόνα 4.2.2: Χαοτικές τροχιές εντοπισμένες πάνω στις πολλαπλότητες (manifolds).

- **Τροχιά T_4**

Η τροχιά T_4 ξεκινά μέσα στο σύμπλεγμα των ασυμπτωτικών καμπυλών των ασταθών πολλαπλοτήτων (manifolds) οδηγώντας την εκτόξευση από το σύστημα σε μικρό σχετικά χρόνο. Παρακάτω φαίνεται πότε γίνεται περίπου η εκτόξευση, και τι τροχιά κάνει ο εξωπλανήτης αφού έχει διαφύγει. Για $t \sim 500$ (Εικόνα 4.2.3(I)) οι συντεταγμένες του εξωπλανήτη (x, y) παίρνουν μεγαλύτερη τιμή από 10. Στην δεύτερη εικόνα (Εικόνα 4.2.3(II)) φαίνεται το σύστημα μετά από χρόνο $t \sim 900$ και ο εξωπλανήτης έχει μία

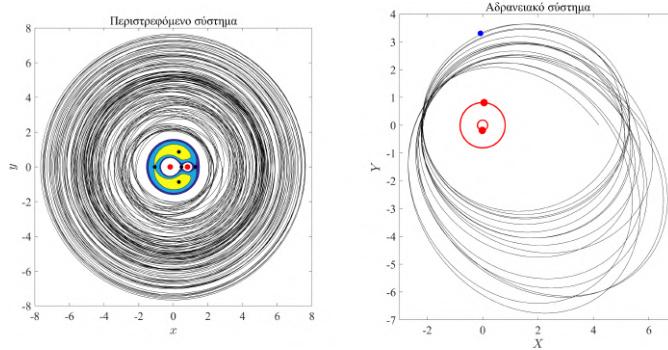
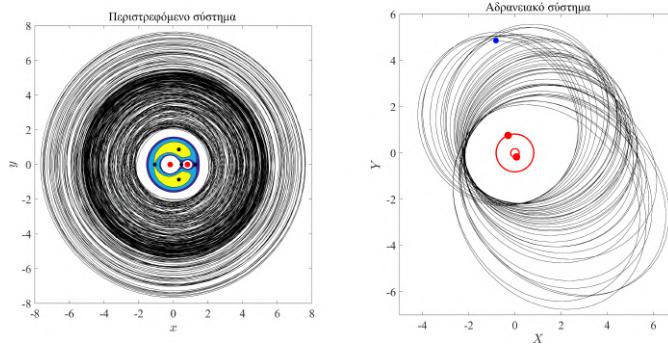
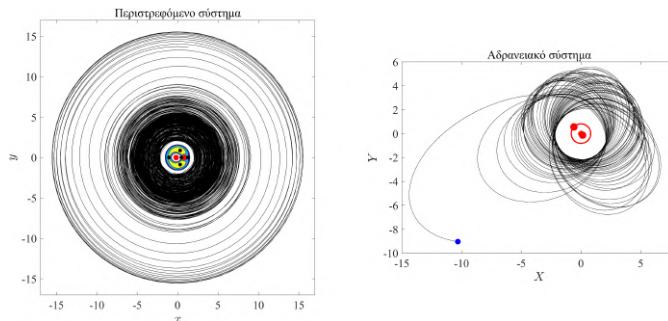
τεράστια ελλειπτική τροχιά. Τέλος, στην Εικόνα 4.2.3(III) (μετά από χρόνο $t \sim 2000$) ο εξωπλανήτης έχει διαφύγει τελείως από το σύστημα. Στις Εικόνες 4.2.3 και 4.2.4 φαίνεται και η κίνηση του εξωπλανήτη στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

(I) $t = 450$ (II) $t = 900$ (III) $t = 2000$

Εικόνα 4.2.3: Η χαοτική τροχιά T_4 για διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Αρχικές συνθήκες: $(x_0 = 4.200, \dot{x}_0 = 0.325)$.

- **Τροχιά T_5**

Η τροχιά T_5 επιλέχθηκε ακριβώς αντιδιαμετρικά της T_4 μέσα στο σύμπλεγμα των ασυμπτωτικών καμπυλών των ευσταθών πολλαπλοτήτων (manifolds). Ο εξωπλανήτης μένει παγιδευμένος για πολύ χρόνο γύρω από τους δύο αστέρες (Εικόνα 4.2.4(II)). Διαφεύγει εν τέλει ($x, y > 10$) σε $t \sim 3000$ (Εικόνα 4.2.4(III)).

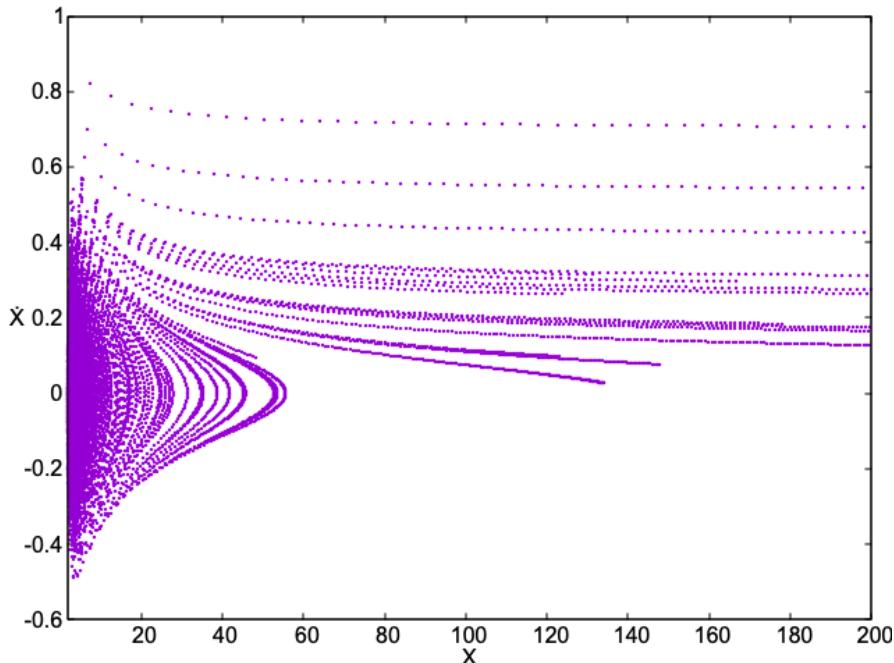
(I) $t = 900$ (II) $t = 2000$ (III) $t = 3100$

Εικόνα 4.2.4: Η χαοτική τροχιά T_5 για διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Αρχικές συνθήκες: $(x_0 = 4.200, \dot{x}_0 = -0.325)$.

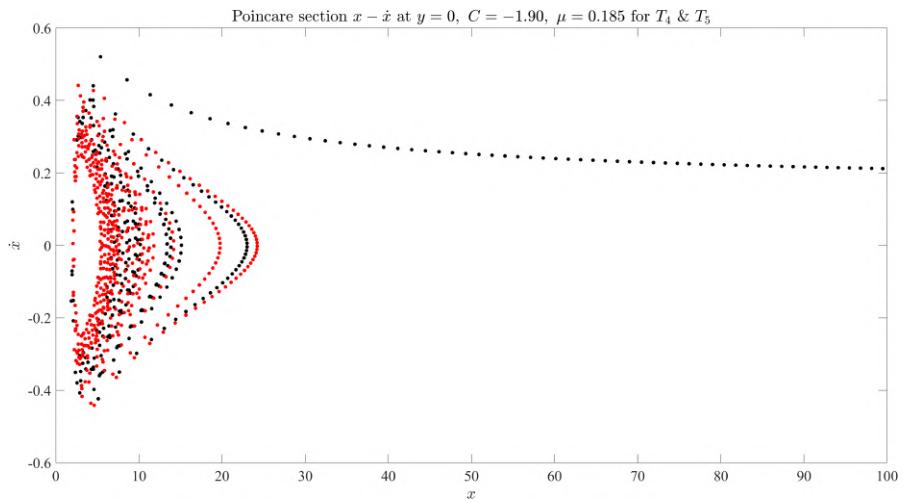
Εάν ένας εξωπλανήτης βρεθεί στις πολλαπλότητες της Εικόνας 4.2.1, θα διαφύγει από το σύστημα τελικά. Μπορεί ένας εξωπλανήτης να βρίσκεται στην ευσταθή περιοδική τροχιά πολλαπλότητας 16 (ή σε κάποια αμετάβλητη καμπύλη της), και να υποστεί κάποια διαταραχή για παράδειγμα από κάποιο άλλο αστέρι που περνάει σχετικά κοντά στο αστρικό σύστημα. Αυτή η διαταραχή θα το οδηγήσει επάνω στις πολλαπλότητες και από εκεί και πέρα είναι «καταδικασμένος» να διαφύγει από το σύστημα. Ο χρόνος που θα μείνει «κολλημένος» στο σύστημα, εξαρτάται από ποιες ομοκλινικές και ετεροκλινικές τροχιές θα ακολουθήσει. Ο χρόνος διαφυγής είναι ένα αντικείμενο για μελλοντική μελέτη.

Μία γενική εικόνα για τις τροχιές που διαφέρουν παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.2.5. Ξεχωρίζουν δύο ειδών διαφυγών. Η μία περίπτωση είναι τα λεγόμενα **Ray Escapes** (απόδραση σε μία ακτίνα). Ο εξωπλανήτης ακολουθεί μία υπερβολική τροχιά έχοντας αρκετή ταχύτητα, ώστε να διαφύγει-εκτοξευτεί κατά μήκος μίας ακτίνας προς το ∞ (οι γραμμές που φαίνονται στην παρακάτω τομή). Σε αυτή την κατηγορία είναι η τροχιά T_4 , όπως φαίνεται και στην Εικόνα 4.2.6. Κάποια χρονική στιγμή ένας εξωπλανήτης που διαφέρει με αυτόν τον τρόπο, θα βρεθεί σε κάποια συνθήκη η οποία θα τον οδηγήσει σε ακτίνα διαφυγής προς το ∞ (αυτό συμβαίνει και στην T_5 για μεγαλύτερο χρόνο).

Από την άλλη μεριά υπάρχει η διαφυγή **Belt Type-Curves** (διαφυγή μέσων ζωνών) (Contopoulos, G. and Patsis, P. A., 2006). Αποτελούν τις καμπύλες που υπάρχουν στην τομή (Εικόνα 4.2.5). Ο εξωπλανήτης θα παραμένει δέσμιος στο σύστημα κάνοντας συνεχώς μεγαλύτερη belt type καμπύλη. Σε αυτή την κατηγορία είναι η τροχιά T_5 , όπως φαίνεται και στην Εικόνα 4.2.6. Κάποια χρονική στιγμή ένας εξωπλανήτης που διαφέρει με αυτόν τον τρόπο, θα βρεθεί σε κάποια συνθήκη η οποία θα τον οδηγήσει σε ακτίνα διαφυγής προς το ∞ (αυτό συμβαίνει και στην T_5 για μεγαλύτερο χρόνο).



Εικόνα 4.2.5: Τομή Poincaré του περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων για $\mu = 0.185$ και ενέργεια $C = -1.90$ σε μεγάλες αποστάσεις από το σύστημα.



Εικόνα 4.2.6: Η τομή Poincaré για τις δύο τροχιές: T_4 με μαύρο και T_5 με κόκκινο.

Κεφάλαιο 5

Εξωπλανήτες σε διπλά συστήματα: Στατιστική ανάλυση

Με βάση την εργασία του 2019 (A. A. Abushattal et al., 2019) γεννήθηκε το ερώτημα για το αν υπάρχει οποιαδήποτε συσχέτιση μεταξύ των συστημάτων (διπλών ή πολλαπλών) στα οποία έχει ανακαλυφθεί εξωπλανήτης, και κάποιων βασικών παραμέτρων του συστήματος. Εικάζεται ότι η έλλειψη σε παρατηρήσεις εξωπλανητών σε πολλαπλά συστήματα αστέρων μπορεί να μην οφείλεται μόνο στις τεχνικές παρατήρησης. Παράλληλα, το γεγονός ότι έχουν ανακαλυφθεί καινούργιοι εξωπλανήτες, δίνει την δυνατότητα εξέλιξης, εμπλουτισμού και ανανέωσης των εξαγόμενων αποτελεσμάτων της προαναφερθείσας εργασίας.

Τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν στην παρούσα εργασία βασίστηκαν σε δύο sites που παρέχουν πληροφορίες για αστρικά συστήματα με εξωπλανήτες. Το *Open Exoplanet Catalogue*¹ και το *NASA Exoplanet Archive*². Στην περίπτωση που κάποια από τις παραμέτρους δεν υπήρχε στα προηγούμενα sites έγινε αναζήτηση σε αντίστοιχες δημοσιεύσεις. Με βάση τα παραπάνω, δημιουργήθηκε ένα αρχείο-πίνακας με τις εξής παραμέτρους:

¹<https://www.openexoplanetcatalogue.com>

²<https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>

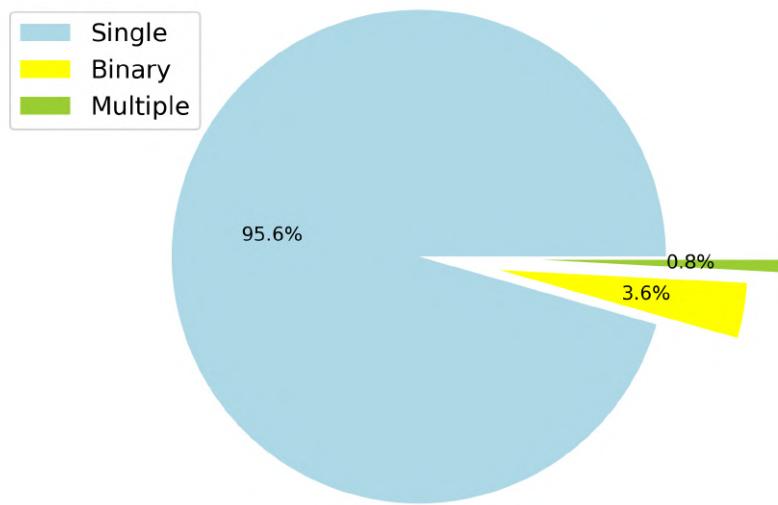
Πίνακας 5.1: Οι παράμετροι που συλλέχθηκαν για την ανάλυση.

Γενικές πληροφορίες για το σύστημα			
Όνομα συστήματος Τπολογισμένη απόσταση του συστήματος (ly)	Αριθμός εξωπλανητών στο σύστημα	Αριθμός αστέρων στο σύστημα	Παράλλαξη (mas)
Φυσικές και τροχιακές παράμετροι του αστρικού συστήματος			
Μάζα του m_1 (M_{\odot}) Τροχιακή περίοδος του συστήματος (days) Φασματικός τύπος του m_1 Projected separation (AU)	Μάζα του m_2 (M_{\odot}) Ημιάξονας τροχιάς του συστήματος (AU) Μεταλλικότητα του m_2 [Fe/H] Εκκεντρότητα της m_2	Τπολογισμένη παράμετρος μάζας μ Μεταλλικότητα του m_1 [Fe/H] Θερμοκρασία (T_1) του m_1 (K) Φασματικός τύπος του m_2	Εκκεντρότητα του συστήματος Θερμοκρασία (T_1) του m_1 (K) Φασματικός τύπος του m_2
Φυσικές και τροχιακές παράμετροι του εξωπλανήτη			
Όνομα του εξωπλανήτη Τροχιακή περίοδος (days)	Τύπος (S ή P) Ημιάξονας της τροχιάς (AU)	Μέσοδος ανακάλυψης Εκκεντρότητα της τροχιάς	Μάζα (M_J)

Σχόλια για τις παραμέτρους και τα γραφήματα που δημιουργήθηκαν:

- Η απόσταση του συστήματος υπολογίστηκε σαν $1/\pi$, όπου π η παράλλαξη, ενώ το Projected separation υπολογίστηκε σαν $d \cdot \tan \theta$, όπου d η απόσταση του συστήματος από την Γη και θ η φαινόμενη γωνιακή απόσταση μεταξύ των δύο αστέρων (angular separation).
- Για τα αστρικά συστήματα με παραπάνω από δύο μέλη δεν αποθηκεύτηκαν οι παράμετροι του συστήματος (μάζες αστέρων, περίοδος κλπ). Εξαίρεση αποτέλεσαν κάποια στενά διπλά αστρικά συστήματα με έναν τρίτο συνοδό σε πολύ μεγαλύτερη απόσταση.
- Ένας διαχωρισμός που έγινε στα περισσότερα γραφήματα ήταν σε στενά (close binary systems) και σε αποχωρισμένα διπλά αστρικά συστήματα (wide binary systems). Το όριο ήταν ο ημιάξονας της τροχιάς ή εκεί που δεν υπήρχε το projected separation στα 100 AU. Στη παρούσα εργασία, ο ημιάξονας και το projected separation θα αναφέρεται απλά σαν a , εκτός εάν επισημανθεί διαφορετικά.
- Διαχωρισμός έγινε επίσης σε συστήματα με εξωπλανήτη S-type και εξωπλανήτη P-type.
- Ο αριθμός των συνολικών διπλών ή πολλαπλών αστρικών συστημάτων ήταν 158 ενώ ο συνολικός αριθμός εξωπλανητών σε αυτά ήταν 229. Από αυτούς οι 186 βρίσκονται σε διπλά αστρικά συστήματα και οι υπόλοιποι εξωπλανήτες (43) σε πολλαπλά.

5.1 Στατιστική ανάλυση

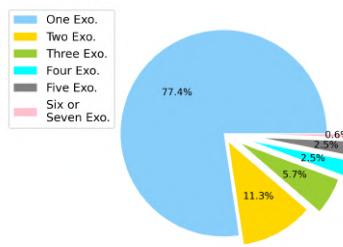


Εικόνα 5.1.1: Ποσοστιαία αναλογία για τους εξωπλανήτες με μονό αστέρα, σε διπλό αστρικό σύστημα ή σε πολλαπλό αστρικό σύστημα.

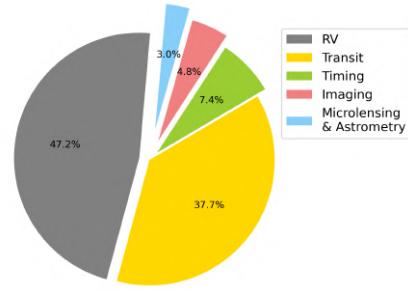
Για την Εικόνα 5.1.1 χρειάστηκε ο αριθμός των εξωπλανητών γύρω από συστήματα με μονό αστέρα, ο οποίος από το Open Exoplanet Catalogue είναι 4934. Με βάση τις μέχρι σήμερα (2023) πληροφορίες, προκύπτει ότι μονάχα το 4.2 % αποτελούν μέλη διπλού ή πολλαπλού αστρικού συστήματος.

Εστιάζοντας την ανάλυση μόνο στα διπλά ή πολλαπλά αστρικά συστήματα παρουσιάζονται τα παρακάτω γραφήματα. Στη πλειοψηφία τους έχει ανακαλυφθεί ένας εξωπλανήτης κάτι που μπορεί είναι αποτέλεσμα της διακριτικής ικανότητας των σημερινών τηλεσκοπίων (Εικόνα 5.1.2(I)). Στις μεθόδους παρατήρησης «χυριαρχούν» εκείνες των RV (φασματοσκοπία) και transit (Εικόνα 5.1.2(II)).

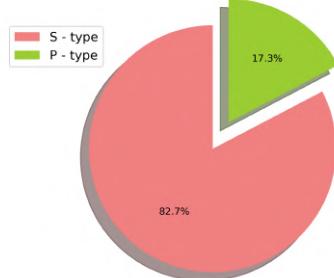
Από τις Εικόνες 5.1.2(III) και 5.1.2(IV) προκύπτει ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα. Εξετάζοντας όλα τα συστήματα (ανεξάρτητα του a) φαίνεται εκ πρώτης όψεως ότι οι P-type εξωπλανήτες είναι πιο σπάνιοι από του αντίστοιχους S-type, ενώ αν κοιτάξουμε μόνο τα αστρικά συστήματα που είναι στενά διπλά θα δούμε ότι η κατανομή μεταξύ των δύο τύπων εξωπλανητών είναι ισοπίθανη. Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι σε αποχωρισμένα συστήματα (wide systems) δεν παρατηρούνται P-type εξωπλανήτες (από τα 83 αποχωρισμένα συστήματα μόνο τα 2 αποτελούν P-type). Αυτό μπορεί να οφείλεται σε παρατηρησιακούς περιορισμούς, μιας και η παρατήρηση ενός εξωπλανήτη που περιφέρεται σε μεγάλη απόσταση από ένα ήδη αποχωρισμένο σύστημα είναι εξαιρετικά δύσκολη.



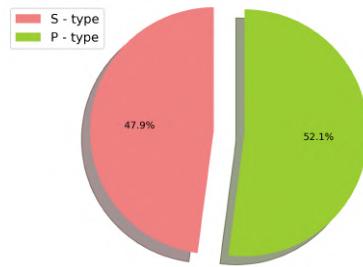
(I) Αριθμός εξωπλανητών σε διπλά ή πολλαπλά αστρικά συστήματα.



(II) Μέθοδοι παρατήρησης εξωπλανητών σε διπλά ή πολλαπλά αστρικά συστήματα.



(III) Τύπος εξωπλανήτη σε διπλά ή πολλαπλά αστρικά συστήματα.



(IV) Τύπος εξωπλανήτη σε στενά διπλά αστρικά συστήματα ($a < 100$ AU).

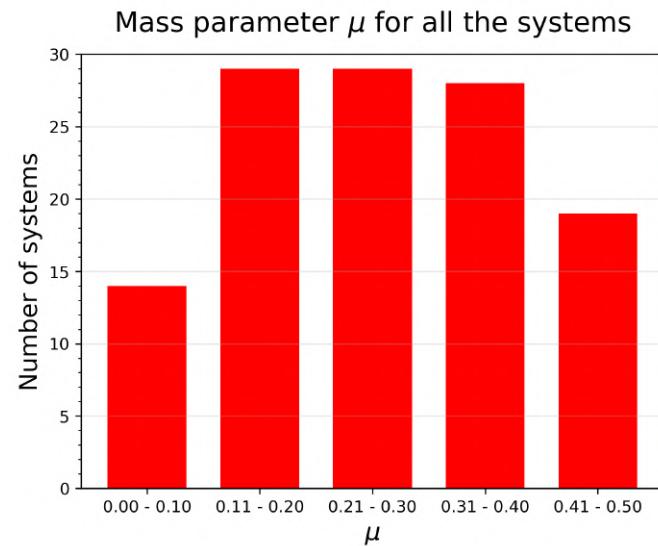
Εικόνα 5.1.2: Ποσοστιαίες αναλογίες για τους εξωπλανήτες σε διπλά ή πολλαπλά αστρικά συστήματα.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ιστογράμματα για την παράμετρο μάζας μ : Στην Εικόνα 5.1.3 φαίνεται η κατανομή της παραμέτρου μάζας μ σε όλα τα συστήματα (I) και η κατανομή της παραμέτρου μάζας μ μόνο στα στενά διπλά αστρικά συστήματα (II), ενώ στην Εικόνα 5.1.4 φαίνεται η κατανομή της παραμέτρου μάζας μ στα στενά διπλά αστρικά συστήματα με S-type εξωπλανήτη (I) και αντίστοιχα με P-type εξωπλανήτη (II).

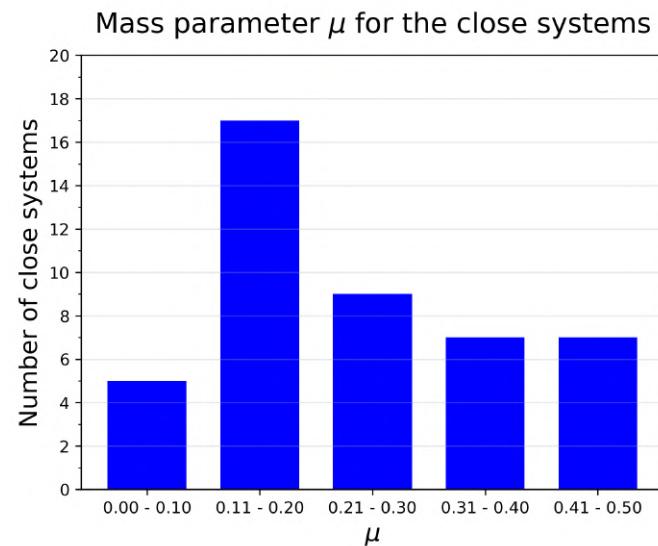
Από τις Εικόνες 5.1.3(I) και 5.1.3(II) φαίνεται ότι υπάρχει ένα ελάχιστο για μικρές τιμές της παραμέτρου $\mu \in (0, 0.10)$ το οποίο μπορεί να οφείλεται σε δύο λόγους. Αρχικά μπορεί να οφείλεται σε παρατηρησιακούς λόγους διότι σε αυτά τα συστήματα οι δευτερεύοντες αστέρες έχουν πολύ μικρή μάζα, κάνοντας τους δύσκολα παρατηρήσιμους (μπορεί δηλαδή να υπάρχουν τέτοια συστήματα αλλά να μην έχουν βρεθεί ότι είναι διπλά αστρικά συστήματα). Από την άλλη μεριά όπως αναφέρθηκε, μικρή παράμετρος μάζας ισοδυναμεί σε μικρή μάζα του δευτερεύοντα αστέρα (σε σχέση με το σύστημα). Σε αυτή την περίπτωση ενδέχεται ένας εξωπλανήτης να έχει συγκρίσιμη μάζα με αυτόν και έτσι να δημιουργείται μηχανισμός

διαφυγής. Πιθανόν η διαφυγή θα συμβαίνει από S-orbits γύρω του m_2 .

Ακόμα από την Εικόνα 5.1.3(II) παρατηρείται ένα μέγιστο για $\mu = 0.11 - 0.20$, δηλαδή στις υπόλοιπες τιμές της παραμέτρου μάζας έχουν παρατηρηθεί λιγότεροι εξωπλανήτες. Αυτό μπορεί να υποδεικνύει την ύπαρξη άλλων ισχυρών μηχανισμών διαφυγής, διαφορετικών από αυτόν του του Κεφαλαίου 4. Η τιμή της παραμέτρου μάζας της ανάλυσης του Κεφαλαίου 4 ($\mu = 0.185$) βασίστηκε σε αυτό το γεγονός ότι δηλαδή οι περισσότεροι εξωπλανήτες P-type που έχουν ανακαλυφθεί μέχρι σήμερα (2023) παρατηρούνται σε συστήματα με παράμετρο μάζας κοντά σε αυτό το όριο. Οι εξωπλανήτες που βρίσκονται σε αυτές τις τροχιές, δεχόμενοι μία διαταραχή, μπορούν να βρεθούν στις πολλαπλότητες της Εικόνας 4.2.2 και να διαφύγουν από το σύστημα. Αυτές οι διαταραχές μπορεί να εξαρτώνται από παραμέτρους του συστήματος, όπως για παράδειγμα μπορεί να προκληθούν από μία έντονη αστρική δραστηριότητα του πρωτεύοντα αστέρα. Σε αυτή την περίπτωση, δεν θα υπήρχαν παρατηρήσεις εξωπλανητών σε διπλά αστρικά συστήματα με πρωτεύοντα αστέρα για κάποια συγκεκριμένη θερμοκρασία. Να σημειωθεί πάντως ότι το δείγμα είναι σχετικά μικρό (48 συστήματα), οπότε τα συμπεράσματα πρέπει να επιβεβαιωθούν με καινούργιες παρατηρήσεις.

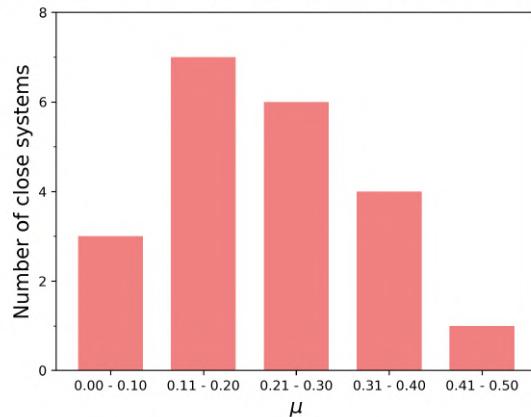


(I) Κατανομή της παραμέτρου μάζας μ για όλα τα αστρικά συστήματα (διπλά ή πολλαπλά).

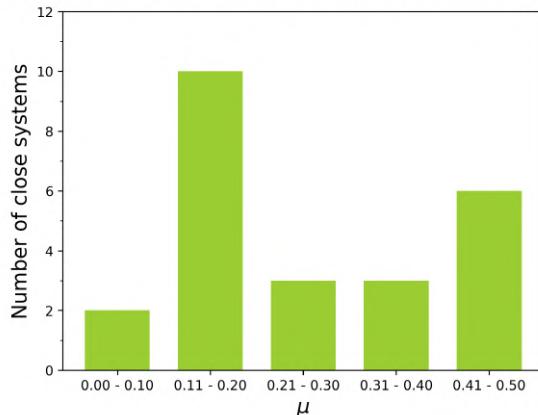


(II) Κατανομή της παραμέτρου μάζας μ για τα στενά συστήματα ($a < 100$ AU).

Εικόνα 5.1.3: Κατανομή της παραμέτρου μάζας μ σε όλα τα διπλά αστρικά συστήματα (I) και σε στενά διπλά αστρικά συστήματα (II).

Mass parameter μ for the close systems with S type exo.

(I) Κατανομή της παραμέτρου μάζας μ για τα στενά συστήματα ($a < 100$ AU) που υπάρχει *S*-type εξωπλανήτης.

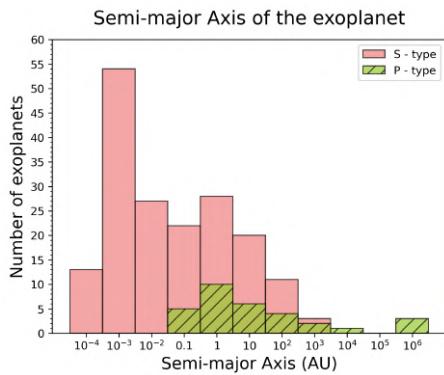
Mass parameter μ for the close systems with P type exo.

(II) Κατανομή της παραμέτρου μάζας μ για τα στενά συστήματα ($a < 100$ AU) που υπάρχει *P*-type εξωπλανήτης.

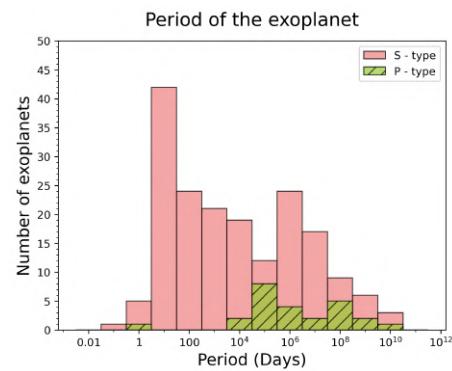
Εικόνα 5.1.4: Κατανομή της παραμέτρου μάζας μ σε στενά αστρικά συστήματα με εξωπλανήτη *S*-type (I) και *P*-type (II).

Στην Εικόνα 5.1.5 φαίνεται η κατανομή του ημιάξονα της τροχιάς, της περιόδου και της εκκεντρότητας των εξωπλανητών στα συστήματα. Η κατανομή στην περίοδο και στον ημιάξονα ακολουθούν παρόμοια μορφή, ενώ στην εκκεντρότητα υπάρχει μέγιστο σε κυκλικές τροχιές.

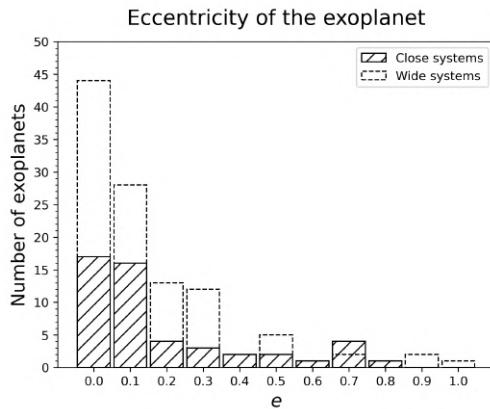
Η συσχέτιση μεταξύ των φυσικών και τροχιακών παραμέτρων μπορεί να οδηγήσει σε περαιτέρω συμπεράσματα. Ο μεγάλος ημιάξονας τροχιάς, η περίοδος και η εκκεντρότητα του εξωπλανήτη μπορεί να απεικονιστεί σε συνάρτηση την παράμετρο μάζας του συστήματος στο οποίο ανήκει. Η κατανομή της περιόδου P_{exo} και του ημιάξονα a_{exo} του



(I) Κατανομή του ημιάξονα της τροχιάς των S-type και P-type εξωπλανητών.



(II) Κατανομή της περιόδου των S-type και P-type εξωπλανητών.

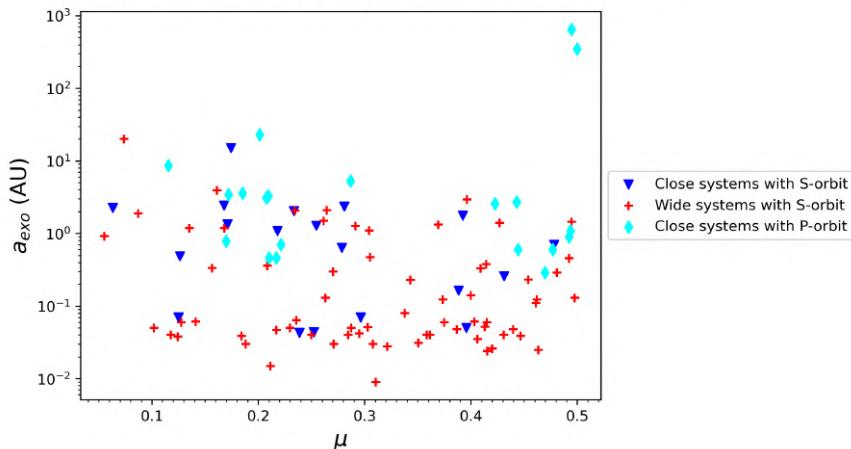


(III) Κατανομή της εκκεντρότητας των εξωπλανητών, σε στενά και σε αποχωρισμένα συστήματα.

Εικόνα 5.1.5: Κατανομή του ημιάξονα της τροχιάς (I), της τροχιακής περιόδου (II) και της εκκεντρότητας των εξωπλανητών σε διπλά ή πολλαπλά αστρικά συστήματα (III).

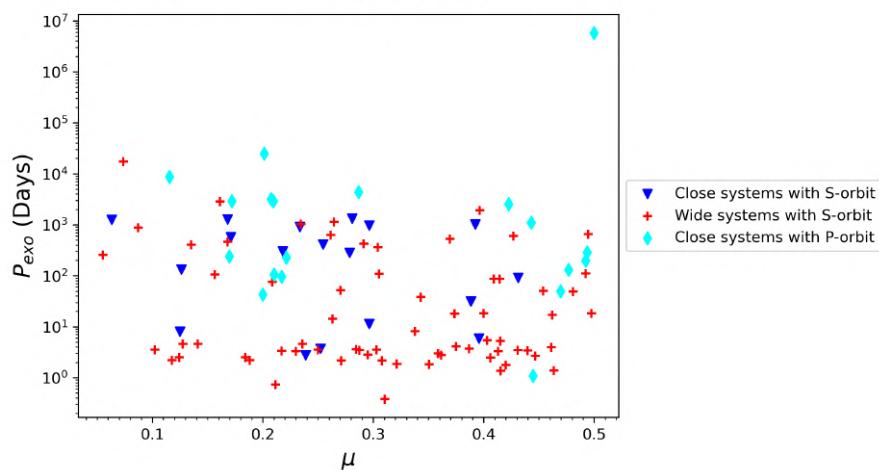
εξωπλανήτη φαίνεται να είναι ομοιόμορφη και ανεξάρτητη της τιμής του μ (Εικόνα 5.1.6). Στα γραφήματα της εκκεντρότητας δεν φαίνεται κάποια συσχέτιση με καμία από τις δύο παραμέτρους (μόνο η προτίμηση σε χυκλικές τροχιές) (Εικόνα 5.1.7).

Semi-major Axis of exo. vs Mass parameter of the system



(I) Ο ημιάξονας της τροχιάς των εξωπλανητών συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του συστήματος.

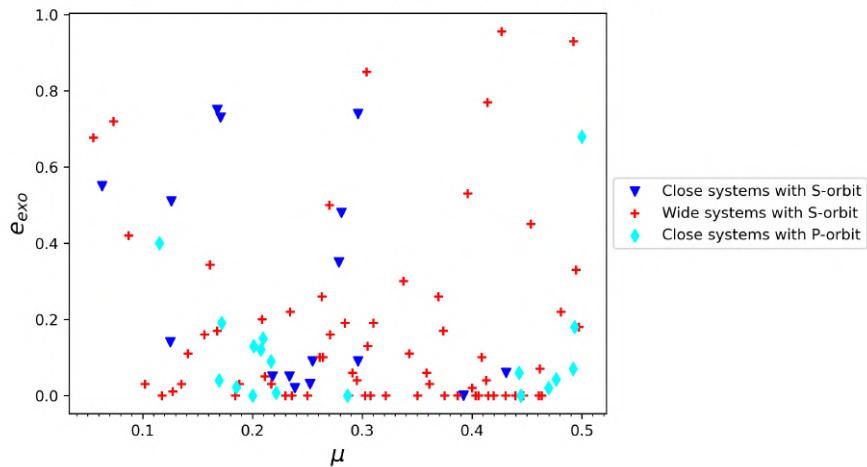
Period of exo. vs Mass parameter of the system



(II) Η περίοδος της τροχιάς των εξωπλανητών συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του συστήματος.

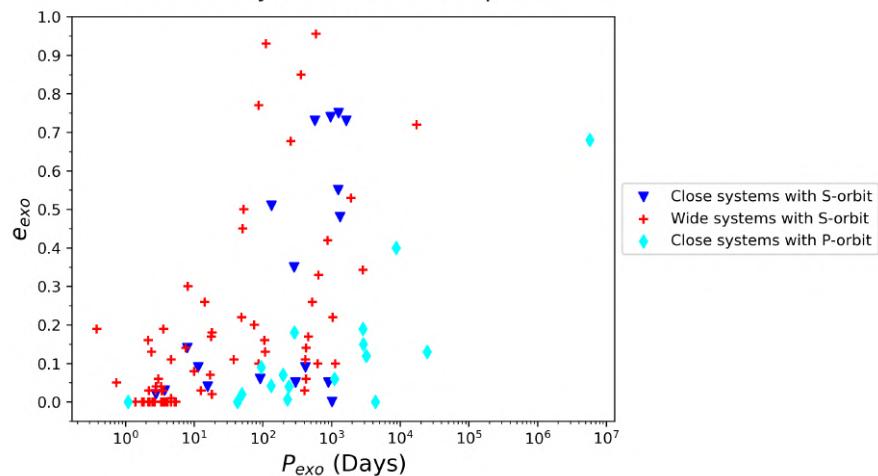
Εικόνα 5.1.6: Ο ημιάξονας της τροχιάς (I) και η τροχιακή περίοδος των εξωπλανητών (II) συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του συστήματος.

Eccentricity of exo. vs Mass parameter of the system



(I) Η εκκεντρότητα της τροχιάς των εξωπλανητών συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του συστήματος.

Eccentricity vs Period of exoplanet



(II) Η εκκεντρότητα συναρτήσει της περιόδου της τροχιάς των εξωπλανητών.

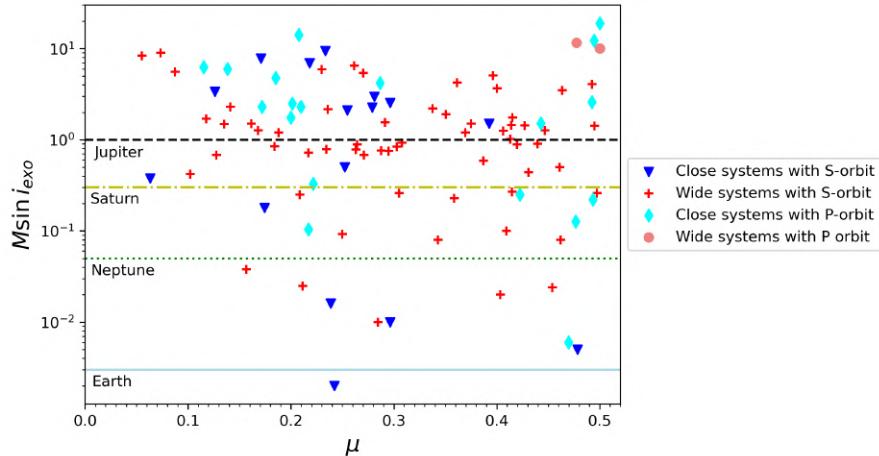
Εικόνα 5.1.7: Η εκκεντρότητα της τροχιάς των εξωπλανητών συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του συστήματος (I) και της τροχιακής περιόδου του εξωπλανήτη (II).

Στην Εικόνα 5.1.8 φαίνονται τα γραφήματα της συνάρτησης μάζας¹ $m \sin i$ και της περιόδου του εξωπλανήτη συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του συστήματος. Σε αυτά έχουν επισημανθεί κάποιες χαρακτηριστικές τιμές μαζών (Δίας, Κρόνος, Ποσειδώνας, Γη). Για τους P-type εξωπλανήτες στα 2 αποχωρισμένα συστήματα έχει ανακαλυφθεί μόνο η

¹ Λόγω του ότι δεν είναι πάντα γνωστή η γωνία του συστήματος i , υπάρχει σαν ελεύθερη μεταβλητή ο όρος $\sin i$.

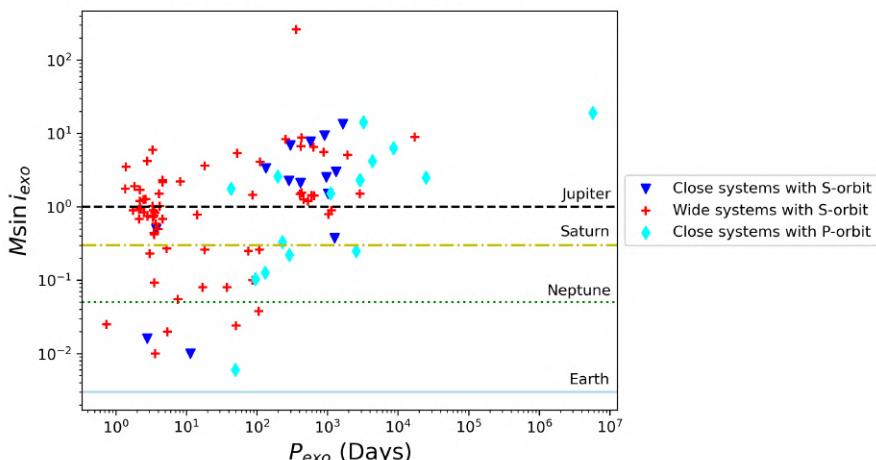
συνάρτηση μάζας τους.

Mass of exo. vs Mass parameter of the system



(I) Η συνάρτηση μάζας των εξωπλανητών συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του συστήματος.

Mass vs Period of exoplanet

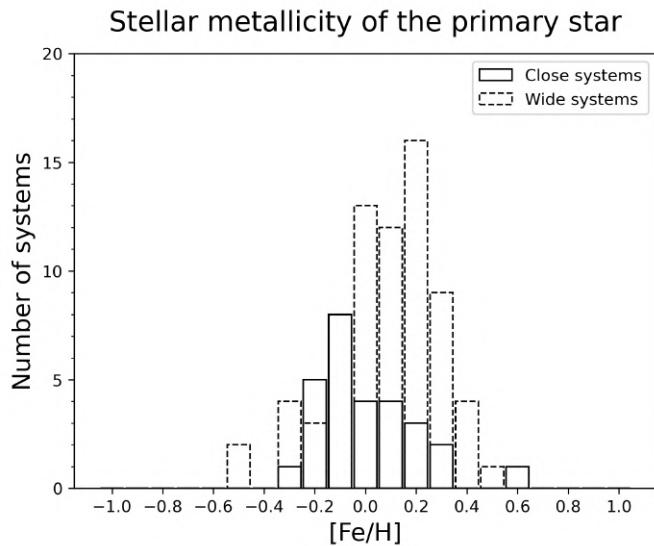


(II) Η συνάρτηση μάζας συναρτήσει της τροχιακής περιόδου του εξωπλανήτη.

Εικόνα 5.1.8: Η συνάρτηση μάζας των εξωπλανητών συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του συστήματος (I) και της τροχιακής περιόδου του εξωπλανήτη (II).

Στα παρακάτω γραφήματα απεικονίζονται μόνο διπλά αστρικά συστήματα με εξωπλανήτη, ώστε να μπορούν να οριστούν οι παράμετροι της τροχιάς (περίοδος, ημιάξονας, εκκεντρότητα του διπλού αστρικού συστήματος). Στην Εικόνα 5.1.9 φαίνεται η κατανομή της μεταλλικότητας του πρωτεύοντα αστέρα στα διπλά αστρικά συστήματα με εξωπλανήτη.

Στην Εικόνα 5.1.10 φαίνεται η θερμοκρασία του πρωτεύοντα και του δευτερεύοντα

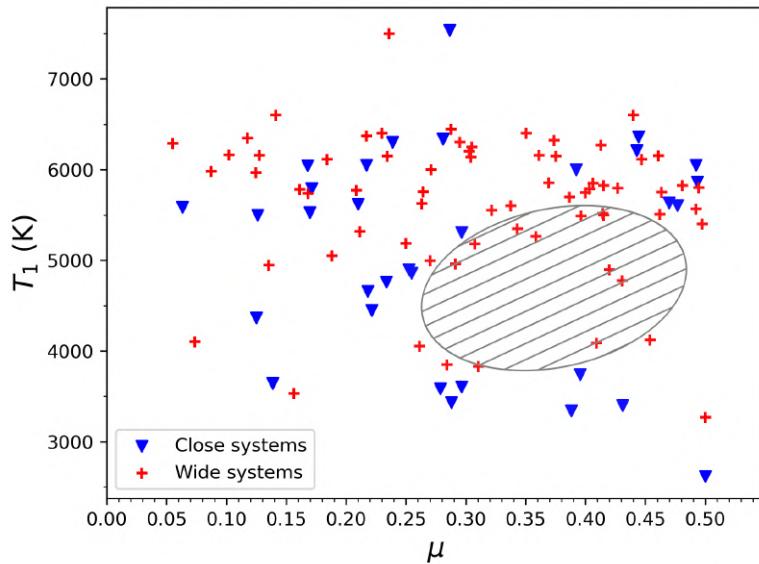


Εικόνα 5.1.9: Κατανομή της μεταλλικότητας του πρωτεύοντα αστέρα σε στενά και αποχωρισμένα διπλά αστρικά συστήματα με εξωπλανήτη.

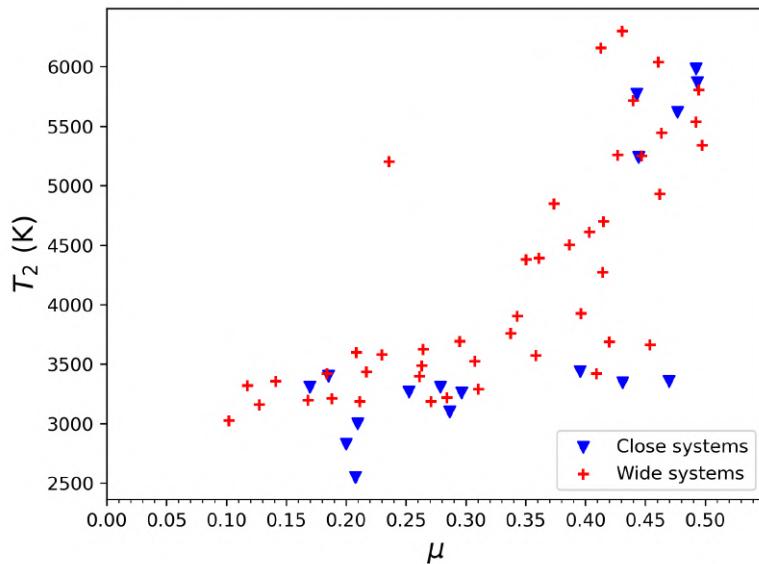
αστέρα συναρτήσει της παραμέτρου μάζας του διπλού αστρικού συστήματος, ενώ η Εικόνα 5.1.11 απεικονίζει την γραφική παράσταση του ημιάξονα της τροχιάς (εκεί που δεν υπήρχε projected separation a_{sep}) και της παραμέτρου μάζας του συστήματος.

Κοιτώντας μόνο τα στενά συστήματα: Στην Εικόνα 5.1.10(I) έχει γίνει η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας του πρωτεύοντα αστέρα συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του διπλού αστρικού συστήματος. Έχει σημειωθεί μία γραμμοσκιασμένη περιοχή στην οποία δεν έχουν παρατηρηθεί εξωπλανήτες κάτι το οποίο παρατηρείται και στην Εικόνα 5.1.11. Θα μπορούσαμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι τα στενά διπλά αστρικά συστήματα που αντιστοιχούν στις γραμμοσκιασμένες περιοχές, οδηγούν τους εξωπλανήτες σε διαφυγή. Για να επιβεβαιωθεί όμως αυτό θα χρειαστούν περισσότερες μελλοντικές παρατηρήσεις.

Για την γραφική παράσταση της θερμοκρασίας του δευτερεύοντα αστέρα (Εικόνα 5.1.10(II)) φαίνεται ότι όλα τα συστήματα συγκεντρώνονται σε μία περιοχή, εκτός από ένα αποχωρισμένο σύστημα που ξεχωρίζει. Το σύστημα αυτό είναι το KELT-19 το οποίο έχει έναν δευτερεύοντα αστέρα με μεγάλη θερμοκρασία, $T_2 = 5200$ K και ταυτόχρονα μικρή μάζα, $m_2 = 0.5 M_\odot$. Από την άλλη ο πρωτεύοντας αστέρας έχει σχετικά μεγάλη μάζα, $m_1 = 1.6 M_\odot$ (Siverd et al., 2018) τοποθετώντας το στη συγκεκριμένη περιοχή του διαγράμματος.

T_1 vs Mass parameter of the system

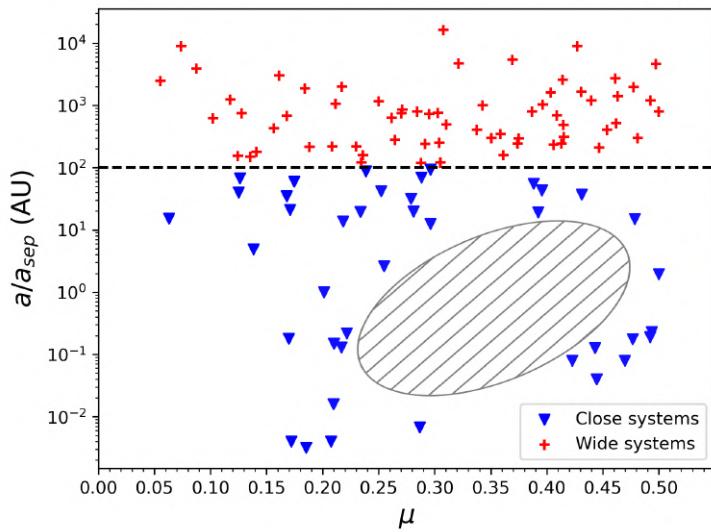
(I) Η θερμοχρασία του πρωτεύοντα αστέρα T_1 συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του διπλού αστρικού συστήματος.

 T_2 vs Mass parameter of the system

(II) Η θερμοχρασία του δευτερεύοντα αστέρα T_2 συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του διπλού αστρικού συστήματος.

Εικόνα 5.1.10: Η θερμοχρασία του πρωτεύοντα (T_1) (I) και του δευτερεύοντα αστέρα (T_2) (II) συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του διπλού αστρικού συστήματος.

Semi-major Axis or Projected Separation of the binary system vs Mass parameter of the system



Εικόνα 5.1.11: Ο ημιάξονας της τροχιάς ή Projected separation συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του διπλού αστρικού συστήματος.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν οι μηχανισμοί διαφυγής εξωπλανητών σε P-orbits για παράμετρο μάζας $\mu = 0.185$ και ενέργεια $C = -1.90$. Για την καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων και των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν έγιναν και παρουσιάστηκαν διάφορα παραδείγματα. Παράλληλα με την θεωρητική μελέτη, έγινε μία στατιστική ανάλυση με σκοπό την σύνδεση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας με τις έως τώρα παρατηρήσεις εξωπλανητών σε διπλά ή πολλαπλά αστρικά συστήματα.

Αρχικά, έγινε εμφανής η χρησιμότητα των τομών Poincaré μέσα από το παράδειγμα του διπλού αρμονικού ταλαντωτή. Όπως προέκυψε, καθίσταται ευκολότερη τόσο η αναγνώριση των KAM τόρων (υπάρξη περιοδικών και ημιπεριοδικών τροχιών) όσο και η κατανόηση της διαφοράς ολοκληρώσιμου και μη ολοκληρώσιμου συστήματος (Εικόνες 1.2.5 & 1.2.8). Στην μεν πρώτη περίπτωση όλες οι τροχιές (ανεξαρτήτως της ενέργειας) βρίσκονται επάνω στους KAM τόρους και είναι, όπως αναφέρθηκε, περιοδικές ή ημιπεριοδικές, ενώ στη δεύτερη περίπτωση που υπάρχει σύζευξη, «σπάει» η ολοκληρώσιμότητα και εμφανίζονται χαοτικές τροχιές. Πλέον πέρα από τις περιοχές «τάξης» γύρω από τις δύο ευσταθείς περιοδικές τροχιές που υπάρχουν, με τις αντίστοιχες αμετάβλητες καμπύλες (Εικόνα 1.2.8), υπάρχουν χαοτικές τροχιές σε όλη τη περιοχή.

Ωστόσο φάνηκε, πως μέσω του εργαλείου των τομών Poincaré δεν γίνεται να εξαχθούν εύκολα γενικά συμπεράσματα για τη χαοτική κίνηση - μεταφορά που προκαλούν οι ασταθείς περιοδικές τροχιές μέσα από τις πολλαπλότητές τους (manifolds). Σε αντιδιαστολή, η μέθοδος των Langragian Descriptors (LDs) αποκάλυψεν τις πολλαπλότητες αυτές όπως παρουσιάστηκε σε τρία παραδείγματα. Στο πρώτο παράδειγμα, ταλαντωτής Duffing, εντοπίστηκαν οι πολλαπλότητες του ασταθούς σημείου ισορροπίας μιας και είναι ενός B.E. (Εικόνα 2.2.1). Οι ομοκλινικές τροχιές αρχικά θα απομακρύνουν το σώμα από το Σ.I. και εν τέλει θα το ξανά οδηγήσουν πίσω σε αυτό (ασυμπτωτικά). Θα ακολουθήσει την ασταθή και στη συνέχεια την ευσταθή πολλαπλότητα του σάγματος. Στο δεύτερο παράδειγμα (γραμμική Χαμιλτονιανή 2 B.E.) μελετήθηκε ένα ολοκληρώσιμο σύστημα 2 B.E. και εντοπίστηκαν οι πολλαπλότητες της ασταθούς περιοδικής τροχιάς που υπάρχει (Εικόνα 2.2.3(III)). Η πραγματική ισχύς της μεθόδου των LDs φάνηκε στο τελευταίο κατά σειρά παράδειγμα, το Χαμιλτονιανό σύστημα Hénon-Heiles. Με την εφαρμογή του πεδίου LD σε συγκεκριμένες τομές και για συγκεκριμένη τιμή της ενέργειας φάνηκαν τα κανάλια διαφυγής από το σύστημα (Εικόνα 2.2.8 & 2.2.9). Ένα

σώμα θα διαφύγει από την κεντρική περιοχή προς την εξωτερική περιοχή ακολουθώντας τις ετεροκλινικές τομές από τις ασταθείς πολλαπλότητες των ασταθών περιοδικών τροχιών της εσωτερικής περιοχής με τις ευσταθείς πολλαπλότητες των ασταθών περιοδικών τροχιών της εξωτερικής περιοχής. Με την αντίστροφη διαδικασία ένα σώμα μπορεί να προσεγγίσει την κεντρική περιοχή ερχόμενο από την εξωτερική.

Στη συνέχεια έγινε μία αναλυτική παρουσίαση για το περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα τριών σωμάτων. Οι τομές Poincaré αποκάλυψαν κατευθείαν τις διαφορετικές περιοδικές τροχιές που υπάρχουν στο σύστημα (S-type γύρω από τον πρωτεύοντα, S-type γύρω από τον δευτερεύοντα και P-type) μαζί με τις αμετάβλητες καμπύλες τους και την απαγορευμένη περιοχή κίνησης (Εικόνα 3.2.4). Παράλληλα η μελέτη χαοτικών S-type τροχιών που διαφέύγουν από την περιοχή των αστέρων προς το ∞ (Εικόνα 3.2.10) θα αποτελέσει μελλοντικός στόχος εξέλιξης της παρούσας εργασίας.

Εστιάζοντας στη βασική θεωρητική ανάλυση και στο συμπέρασμα για τη διαφυγή, οι εξωπλανήτες που περιφέρονται «σταθερά» γύρω από δύο αστέρες σε P-orbit, μπορούν να βρίσκονται είτε σε κάποια περιοδική τροχιά (βασική P-orbit ή μεγαλύτερης πολλαπλότητας) είτε σε κάποια αμετάβλητη καμπύλη γύρω από αυτές (ημιπεριοδική τροχιά). Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των LDs για το περιορισμένο πρόβλημα τριών σωμάτων στην περιοχή των P-orbits, εντοπίστηκε ο μηχανισμός που οδηγεί σε διαφυγή (ejection) αυτούς τους εξωπλανήτες (Εικόνα 4.2.1(I)). Αυτό συμβαίνει μέσα από τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες (manifolds) της ασταθούς περιοδικής τροχιάς πολλαπλότητας 16, η οποία βρίσκεται μέσα στη «θάλασσα» χάους (Εικόνα 4.1.5). Οι εξωπλανήτες οδηγούνται από τις ασταθείς πολλαπλότητες (manifolds) σε μικρό χρόνο (τροχιά T_4 της Εικόνας 4.2.2) μακριά από το διπλό αστρικό σύστημα ή ακολουθώντας τις ευσταθείς πολλαπλότητες (manifolds) παγιδεύονται για μεγάλο χρονικό διάστημα (τροχιά T_5 της Εικόνας 4.2.2) στο ομοκλινικό πλέγμα μέχρι τελικά να φύγουν και αυτές από το σύστημα. Έτσι, οι εξωπλανήτες που θα βρεθούν στη περιοχή των πολλαπλοτήτων (manifolds) λόγω κάποιας διαταραχής, οδηγούνται νομοτελειακά σε διαφυγές μέσα από Ray escapes ή μέσα από Belt type curves (Εικόνα 4.2.5).

Η ενέργεια του συστήματος που επιλέχτηκε στη θεωρητική ανάλυση ήταν αρκετά μικρότερη από τις ενέργειες (των σημείων L_4, L_5), ώστε να αντιπροσωπεύει εξωπλανήτη που κινείται σε «σταθερή» τροχιά γύρω από δύο αστέρες δηλαδή ένα ρεαλιστικό σενάριο (Εικόνα 4.1.3). Εάν για κάποιο λόγο διαταραχτεί η τροχιά του εξωπλανήτη, υπάρχει δυνατότητα να βρεθεί στις πολλαπλότητες των ασταθών περιοδικών τροχιών και να οδηγηθεί στην διαφυγή. Αντίθετα, η περίπτωση όπου η ενέργεια υπερβαίνει τις τιμές αυτές, δεν χρήζει μελέτης αφού δεν έχει φυσική σημασία καθώς ο εξωπλανήτης θα μπορεί να κινηθεί σε όλο το χώρο και επομένως να διαφύγει (Εικόνα 3.1.4(V)).

Η στατιστική ανάλυση που έγινε αποκάλυψε ότι οι ανακαλυφθέντες εξωπλανήτες σε διπλά αστρικά συστήματα είναι συντριπτικά λιγότεροι από τους ανακαλυφθέντες γύρω από συστήματα με έναν αστέρα (Εικόνα 5.1.1). Με βάση την Εικόνα 5.1.2(III) φαίνεται η πλειοψηφία των εξωπλανητών να είναι S-Type καθώς αναφέρεται τόσο σε στενά (close systems) όσο και σε αποχωρισμένα συστήματα (wide systems). Στη περίπτωση που μελετάμε ξεχωριστά τα στενά συστήματα (Εικόνα 5.1.2(IV)) οι εξωπλανήτες είναι εξίσου S ή P-Type, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια προτίμηση. Έτσι εξάγουμε το συμπέρασμα ότι

στα αποχωρισμένα συστήματα ενδέχεται να υπάρχουν εξωπλανήτες P-Type, οι οποίοι είναι δύσκολα παρατηρήσιμοι. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχει μικρή πιθανότητα (ενεργός διατομή) για να γίνει κάποια διάβαση μπροστά από τους αστέρες. Τέτοιοι εξωπλανήτες θα μπορούσαν να ανακαλυφθούν κυρίως μέσα από την μέθοδο RV ή μέσα από astrometry.

Για την παράμετρο μάζας μ : Τόσο σε όλα τα συστήματα (στενά και αποχωρισμένα) όσο και στα στενά ξεχωριστά υπήρχε ένα ελάχιστο στα συστήματα με μικρή παράμετρο μάζας, $\mu \in (0, 0.10)$ (Εικόνα 5.1.3). Στα συστήματα αυτά μπορεί να υπάρχουν ισχυροί μηχανισμοί διαφυγής, για παράδειγμα από τον δευτερεύοντα αστέρα, που θα είναι αντικείμενο μελλοντικής μελέτης. Από την άλλη μεριά, στα στενά διπλά αστρικά συστήματα, φαίνεται να υπάρχει ένα μέγιστο στις τιμές $\mu = 0.11 - 0.20$ (Εικόνα 5.1.3(II)). Αντίστοιχα μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι υπάρχουν μηχανισμοί σε διαφορετικές τιμές της παραμέτρου μάζας, όπου οδηγούν με μεγαλύτερο ρυθμό σε διαφυγή από ότι ο μηχανισμός της παρούσας εργασίας. Σε ό,τι αφορά στα γραφήματα της θερμοκρασίας του πρωτεύοντα αστέρα (T_1) και του ημιάξονα της τροχιάς (ή projected separation) (a) συναρτήσει της παραμέτρου μάζας μ του συστήματος (Εικόνες 5.1.10(I) & 5.1.11), παρατηρήθηκε ότι δεν έχουν ανακαλυφθεί διπλά στενά αστρικά συστήματα με εξωπλανήτη για ένα σετ τιμών των παραμέτρων. Ενδεχομένως για συγκεκριμένα μ και θερμοκρασία T_1 να υπάρχουν μηχανισμοί που σχετίζονται με την αστρική δραστηριότητα του πρωτεύοντα (δημιουργεί διαταραχές στις τροχιές των εξωπλανητών). Αντίστοιχα για συγκεκριμένα μ και τιμές για την απόσταση a των δύο αστέρων, μπορεί να προκαλούν διαταραχές στις τροχιές των εξωπλανητών μέσα από συντονισμούς. Για όλες τις παραπάνω υποθέσεις απαραίτητο είναι να υπάρχουν νεότερες παρατηρήσεις.

Προοπτικές εξέλιξης:

- Στη παρούσα εργασία επιλέχτηκε η παράμετρος μάζας $\mu = 0.185$, η οποία αντιπροσωπεύει τον μεγαλύτερο αριθμό γνωστών διπλών στενών συστημάτων με εξωπλανήτη. Για να ανακαλυφθούν και άλλοι μηχανισμοί, οι οποίοι μπορεί να οδηγούν σε διαφυγή πιο ισχυρά τους εξωπλανήτες, πρέπει να γίνει εμπλουτισμός της θεωρητικής ανάλυσης με περισσότερες τιμές της παραμέτρου μάζας μ αλλά και ενέργειας C . Παράλληλα, μπορεί να γίνει πιο λεπτομερής μελέτη των ομοκλινικών και ετεροκλινικών πλεγμάτων των manifolds, ώστε να μελετηθούν οι χρόνοι που «παγιδεύεται» η κάθιση τροχιά μέχρι εν τέλει να διαφύγει.
- Εμπλουτισμός της στατιστικής ανάλυσης με περισσότερες παρατηρήσεις εξωπλανητών σε διπλά αστρικά συστήματα, δεδομένης της εξέλιξης της τεχνολογίας και της δημιουργίας νέων τηλεσκοπίων (James Webb Telescope, E-ELT, Magellan, TMT) αλλά και πιο ευαίσθητων ανιχνευτών, με στόχο μία πιο ισχυρή σύνδεση με τους θεωρητικούς μηχανισμούς διαφυγής.

Κάποιοι μελλοντικοί στόχοι:

- Μελέτη των μηχανισμών μεταφοράς στις S-orbits, στην περιοχή των δύο αστέρων.

Συσχέτιση των μηχανισμών αυτών με τους μηχανισμούς διαφυγής P-orbits ώστε να εξηγηθούν τροχιές σαν την Εικόνα 3.2.10.

- Θεώρηση πιο σύνθετης Χαμιλτονιανής που αντιπροσωπεύει το πιο ρεαλιστικό πρόβλημα. Μπορεί να εισαχθεί η εκκεντρότητα της τροχιάς των αστέρων ή η ύπαρξη της τρίτης διάστασης στη κίνηση. Θα διαφοροποιηθεί ο μηχανισμός της παρούσας εργασίας και ταυτόχρονα θα ανακαλυφθούν περισσότεροι.

Βιβλιογραφία

- [1] Ahmad Abushattal et al. “Extrasolar Planets in Binary Systems (Statistical Analysis)”. In: *Journal of Physics: Conference Series* 1258 (Oct. 2019), p. 012018. DOI: [10.1088/1742-6596/1258/1/012018](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1258/1/012018).
- [2] *Advanced Astrodynamics*. 2023. URL: <https://github.com/dsavransky/MAE6720>.
- [3] Makrina Agaoglou et al. *Chemical Reactions: A Journey into Phase Space*. Zenodo. 2019. DOI: [10.5281/zenodo.3568210](https://doi.org/10.5281/zenodo.3568210). URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3568210>.
- [4] Makrina Agaoglou et al. *Lagrangian Descriptors: Discovery and Quantification of Phase Space Structure and Transport*. Zenodo. 2020. DOI: [10.5281/zenodo.3958985](https://doi.org/10.5281/zenodo.3958985). URL: https://champsproject.github.io/lagrangian_descriptors/.
- [5] B. Aguilar-Sanjuan et al. *LDDS: Python package for computing and visualizing Lagrangian Descriptors in Dynamical Systems*. <https://github.com/champsproject/ldds>.
- [6] Vladimir I Arnol'd. In: *Sov. Math. Dokl* 2, 245 (1961).
- [7] Vladimir I Arnol'd. In: *Sov. Math. Dokl* 3, 136 (1962).
- [8] Vladimir I Arnol'd. In: *Russian Mathematical Surveys* 18.(6) (1963), p. 85. DOI: [10.1070/RM1963v01n06ABEH001143](https://doi.org/10.1070/RM1963v01n06ABEH001143). URL: <https://doi.org/10.1070/RM1963v01n06ABEH001143>.
- [9] Vladimir Igorevich Arnold. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Vol. 250. Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] D. Boccaletti and G. Pucacco. *Theory of Orbits*. Springer-Verlag, 2001. URL: https://books.google.gr/books?id=5-_azgEACAAJ.
- [11] G. Contopoulos and P. A. Patsis. “Outer dynamics and escapes in barred galaxies”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 369.3 (May 2006), pp. 1039–1054. URL: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10388.x>.
- [12] George Contopoulos. “Order and Chaos in General”. In: *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002, pp. 11–376. ISBN: 978-3-662-04917-4. DOI: [10.1007/978-3-662-04917-4_2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-04917-4_2). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-04917-4_2.

- [13] K. Goź dziewski et al. “The HU Aqr planetary system hypothesis revisited”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 448.2 (2015), pp. 1118–1136. DOI: [10.1093/mnras/stu2728](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2728). URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stu2728>.
- [14] Michel Henon and Carl Heiles. “The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments”. In: *Astronomical Journal* 69 (1964), p. 73. DOI: [10.1086/109234](https://doi.org/10.1086/109234).
- [15] Tom Kibble and Frank H Berkshire. *Classical mechanics*. World Scientific Publishing Company, 2004.
- [16] A N Kolmogorov. “On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton’s function”. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 98 (1954), 527–530. URL: <http://cds.cern.ch/record/430016>.
- [17] Wang Sang Koon et al. “Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design”. In: 2006.
- [18] D. W. Latham et al. “Spectroscopic Binaries in the Halo”. In: *IAU Colloq. 135: Complementary Approaches to Double and Multiple Star Research*. Vol. 32. 1992, p. 158. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1992ASPC...32..158L>.
- [19] C. Lopesino et al. “A Theoretical Framework for Lagrangian Descriptors”. In: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 27.01 (2017), p. 1730001. DOI: [10.1142/S0218127417300014](https://doi.org/10.1142/S0218127417300014). URL: <https://doi.org/10.1142/S0218127417300014>.
- [20] Ana M. Mancho et al. “Lagrangian Descriptors: A Method for Revealing Phase Space Structures of General Time Dependent Dynamical Systems”. In: *arXiv e-prints*, arXiv:1106.1306 (June 2011), arXiv:1106.1306. DOI: [10.48550/arXiv.1106.1306](https://doi.org/10.48550/arXiv.1106.1306). arXiv: [1106.1306 \[nlin.CD\]](https://arxiv.org/abs/1106.1306).
- [21] Jaume Masoliver and Ana Ros. “Integrability and chaos: the classical uncertainty”. In: *European Journal of Physics* 32.2 (2011), p. 431. DOI: [10.1088/0143-0807/32/2/016](https://doi.org/10.1088/0143-0807/32/2/016). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/32/2/016>.
- [22] J. Moser. “Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein”. In: *Communications in Pure Applied Mathematics* 29 (Nov. 1976), pp. 727–747.
- [23] Möser, J. “On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus”. In: *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II* (1962), 1–20. URL: [https://cds.cern.ch/record/430015](http://cds.cern.ch/record/430015).
- [24] Shibabrat Naik, Víctor J. García-Garrido, and Stephen Wiggins. “Finding NHIM: Identifying high dimensional phase space structures in reaction dynamics using Lagrangian descriptors”. In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 79 (2019), p. 104907. ISSN: 1007-5704. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104907>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S100757041930228X>.

- [25] Shibabrat Naik and Stephen Wiggins. “Finding normally hyperbolic invariant manifolds in two and three degrees of freedom with Hénon-Heiles-type potential”. In: *Phys. Rev. E* 100 (2 2019), p. 022204. doi: [10.1103/PhysRevE.100.022204](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.022204). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.100.022204>.
- [26] NASA Exoplanet Archive. 2023. URL: <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu>.
- [27] Open Exoplanet Catalogue. 2023. URL: <https://www.openexoplanetcatalogue.com>.
- [28] D. J. Pinfield et al. “Brown dwarfs and low-mass stars in the Pleiades and Praesepe: membership and binarity”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 342.4 (2003), pp. 1241–1259. URL: <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06630.x>.
- [29] Paul H. Rabinowitz. “Periodic Solutions of Hamiltonian Systems: A Survey”. In: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 13.3 (1982), pp. 343–352. doi: [10.1137/0513027](https://doi.org/10.1137/0513027). URL: <https://doi.org/10.1137/0513027>.
- [30] Robert J. Siverd et al. “KELT-19Ab: A P \sim 4.6-day Hot Jupiter Transiting a Likely Am Star with a Distant Stellar Companion”. In: *Astronomical Journal* 155.1, 35 (2018), p. 35. doi: [10.3847/1538-3881/aa9e4d](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa9e4d). arXiv: [1709.07010 \[astro-ph.EP\]](https://arxiv.org/abs/1709.07010).
- [31] K. Vogtmann, A. Weinstein, and V.I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. URL: <https://books.google.gr/books?id=50Q1BQAAQBAJ>.
- [32] Alan Weinstein. “Normal Modes for Nonlinear Hamiltonian Systems.” In: *Inventiones mathematicae* 20 (1973), pp. 47–58. URL: <http://eudml.org/doc/142203>.
- [33] Stephen Wiggins. *Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos*. Vol. 4. Jan. 2003. ISBN: 0-387-00177-8. doi: [10.1007/b97481](https://doi.org/10.1007/b97481).
- [34] Stephen Wiggins. *Chaotic transport in dynamical systems*. Vol. 2. Springer Science & Business Media, 2013.
- [35] Αντωνιάδης Π. Δ. “Το Περιορισμένο Πρόβλημα Των Τριών Σωμάτων Στο Σύστημα Γη – Σελήνη”. Διπλωματική εργασία. Αριστοτελείο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2006.
- [36] Βλάσης Ι. “Τροχιές Γύρω από Διπλά Συστήματα Σωμάτων”. Πτυχιακή εργασία. Αριστοτελείο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2017.
- [37] Αποστολάτος Θ. Ιωάννου Π. Θεωρητική Μηχανική, ‘Έκδοση B’. Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.
- [38] Μαργέτης Κ. “HV Aqr: Ένα εξωτικό σύστημα σε επαφή”. Πτυχιακή εργασία. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2021.

- [39] Κατσανίκας Μ. “Η δομή του φασικού χώρου σε περιστρεφόμενα Χαμιτλονιανά συστήματα τριών βαθμών ελευθερίας Γαλαξιακού τύπου”. Διδακτορική διατριβή. Εύνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2012.