1 Tunnel Troll Theorem

1.1 Introduction

決定性 Oritatami System では転写された bead が固定される時、その位置は一意に定まる。$\delta = 1$ において転写された bead が一意に定まるためには、既に固定されている別の bead とその bead が bond を結ぶか、あるいはトンネルを消費する必要がある。

ここで言う「トンネル」とは、ある三角格子上の点の周囲 6 点のうち、ちょうど 4 点が既に埋まっているような構造を指す。このトンネルの空いている頂点に直前の bead が転写され、次の bead がトンネルの中心に固定された時、その bead の周囲 5 点が埋まっていることになり、その次の bead の位置は空いている 1 点に定まる。

この「トンネル」について以下が成り立つ。

Theorem 1.1 (Tunnel Troll Theorem)**.** $|\Sigma| = 1, \delta = 1, \alpha = 2$ を満たす Oritatami System において、トンネルを消費する時、Bond の数が減少する。

1.2 Proof

この定理を示すには、トンネルを消費した際に増加する bond の数より減少する bond の数の方が多いことを示せば良い。

まず直前に固定された bead がトンネルの中にいるか外にいるかで場合分けを考える。トンネルの中にいる場合、次の bead の固定される位置は既に決定されているが、次に固定される位置が再びトンネルの中であるかトンネルの外であるかでも場合分けを考える。また、トンネルの外にいる場合、そこがトンネルから離れた位置であるかトンネルの入り口であるかで場合分けをする (fig.1)。パスは次の bead が固定された時の状態遷移である。

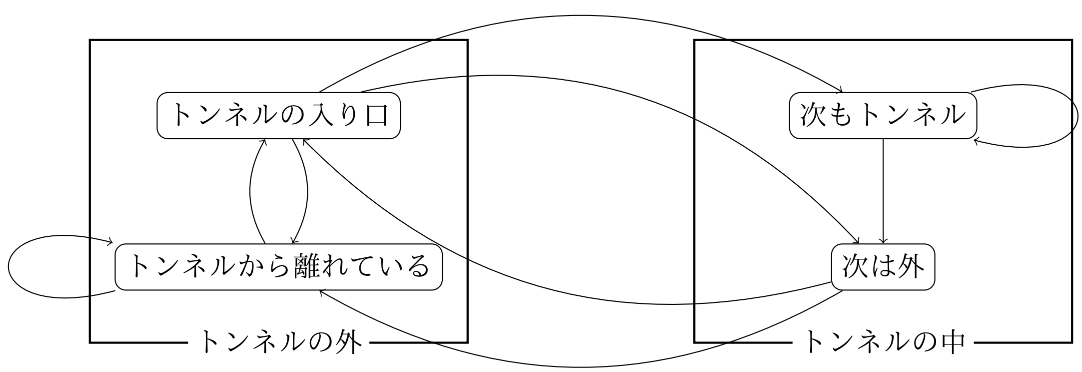
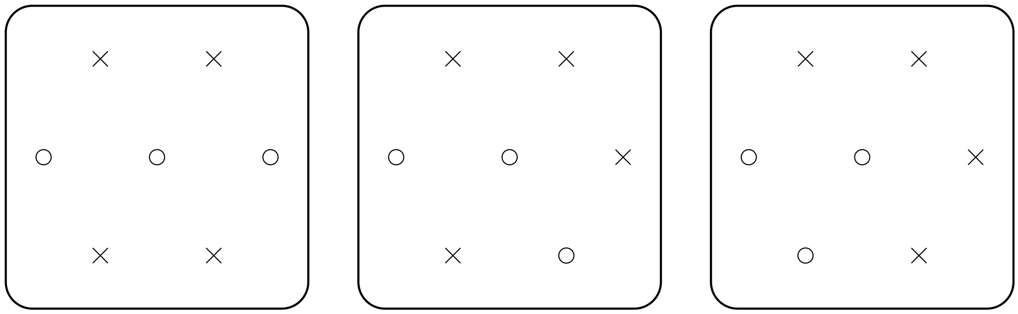


Figure 1: bead の位置による場合分け

また、bead の位置とは別にトンネルの形状についても場合分けができる。三角格子上での対称性を考えるとトンネルの形状は以下の 3 つが考えられる (fig.2)。この図において、バ

ツが既に bead が存在する頂点、白マルが空いている頂点である。また、トンネルの入口に注目すると、トンネル A,B はどちらもトンネル内部に入る時の transcript のエッジに対して両側に bead が存在する。一方でトンネル C は片側にのみ bead が存在する (fig.3)。出口についてはいずれのトンネルも同じ形になる (fig.4)。



Tunnel A　Tunnel B　Tunnel C

Figure 2: トンネルの形状

Tunnel A,B　Tunnel C

Figure 3: トンネルの入り口

今、トンネル A とトンネル B の場合だけを考える。Appendix より、各状態遷移において bond の増加量の最大値をそれぞれの edge に加えると以下のようになる (fig.5)。ただし a は自然数とし、「次は外」の状態に遷移するたびに値が更新される。この図のように、トンネルの内と外を往来すると bond の数が減少する。

次にトンネル C について考える。fig.3 と fig.4 よりトンネル C の入口に bead が固定される時、トンネルの出口とトンネル C の入口は共存出来ないため、トンネル C は連続したトンネル構造の途中や出口に使用することはできない。これを考慮し、トンネル C が使用されるケースについて場合分けを考える (fig.6)。この場合分けの内、上 2 つはトンネル A,B の中

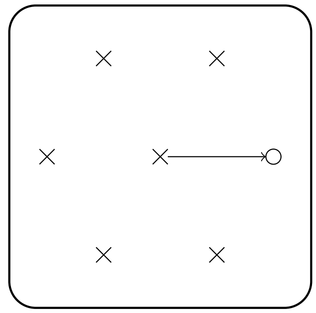


Figure 4: トンネルの出口

へ入るため bond の数が減少する。そのため下 2 つについて考えれば良い。Appendix より、いずれの場合も bond の数が減少する。

以上より、トンネル A,B,C いずれを消費した場合も増加する bond の数より減少する bond の数の方が多い。よってこの定理は示された。

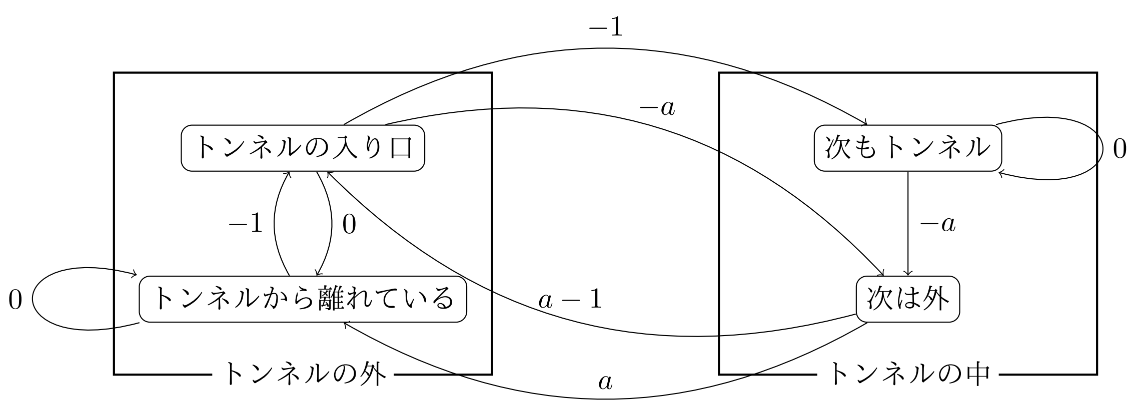


Figure 5: Tunnel A,B における bond の増加量

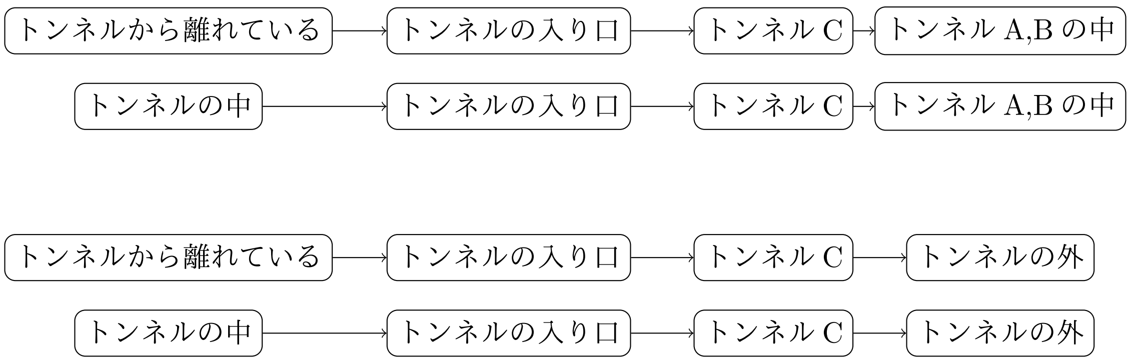


Figure 6: Tunnel C の場合分け

1.3 Appendix of Tunnel Troll Theorem

1.3.1 Entrance of TunnelA,B

Tunnel の入口に固定された bead が、どの方向から来たかで場合分けをする (fig.7)。その結果 3 通りの場合分けが出来るが、以下のようにいずれの場合も bond の総数は減少する。

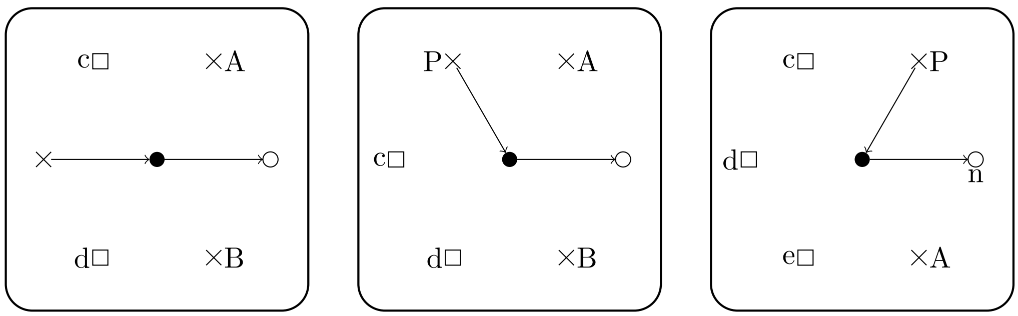
- Pattern1 の時
  四角で表されてる 2 頂点が埋まっているかどうかで分けられる。もしどちらも埋まっているとすると、トンネルの入り口ではなくトンネルの中になってしまうので、必ず少なくとも一方は空いている。今、頂点 c が空いているとする。すると頂点 A の周囲は 3 点以上空いている事になる。A の周囲 2 頂点は back bone としてつながっている。そのためもし B が既に bond を消費しているならば、残りの 1 頂点に存在する bead とのみ bond を結ぶ事となる。頂点 B の周囲は 3 点空いている事を考えると B は 1 つ以上の bond を残している。そのため入口に固定される bead と必ず bond を結ぶ事になる。もし頂点 d も空いている場合、固定される bead は bond を 2 つとも消費し、かつ既存の bond も 2 つ消費し bond の総数は減少する。頂点 d が埋まっていたとしても、頂点 A とは同様にして bond を結び、決定的に固定するために頂点 B か d と bond を結ぶ。故にいずれの場合も bond の総数は減少する。

- Pattern2 の時
  Pattern1 と同様にして頂点 c,d が埋まっているかどうかで分けられる。Pattern1 の例よりどちらも埋まっていることはない。頂点 c が空いている場合決定的に bead を固定するために A,B 少なくとも一方の bond を消費する。一方、頂点 c が埋まっていて頂点 d が空いている場合、Pattern1 のように、固定される bead と頂点 B は bond を結ぶため bond を消費する。

  Pattern2 の場合、固定される bead は bond を 1 つ増やす可能性がある。もし仮に bond が増えたとするならば、その bond を使用するためはに頂点 c か d に bead が固定され

る必要がある。しかし今頂点 B と P は back bone によってつながっている。Jordan curve theorem より、これ以降に転写され得る bead の領域に頂点 c,d は含まれないため、この bond を消費することはできず、bond の数は増加しない。よって既存の bond を減少させ、かつ新たに有効な bond を増やさないことから bond の総数は減少する。

- Pattern3 の時
  頂点 n は空いているため、決定的に固定するために頂点 c,d,e のいずれかと bond を結ぶ必要がある、そのため既存の bond を消費する。一方、固定される bead は bond を１つ増やす可能性があるが、pattern2 と同様に頂点 A と P が back bone でつながっているため、これ以降に転写され得る bead の領域に頂点 c,d,e は含まれていないため、増やされる bond を使用できない。よって既存の bond を減少させ、かつ新たに有効な bond を増やさないことから bond の総数は減少する。



Pattern 1 Pattern 2 Pattern 3

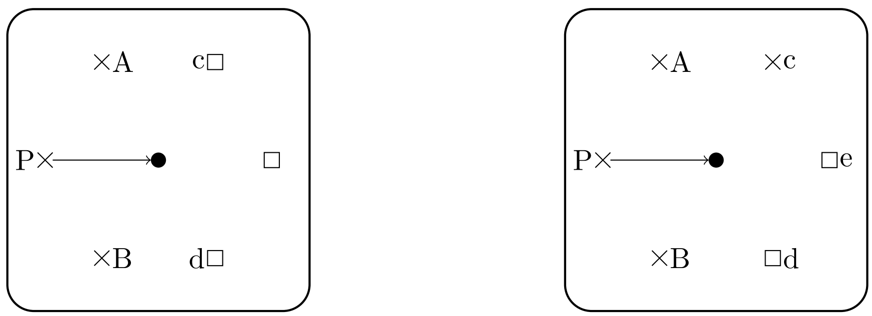
Figure 7: 入口へ至る方向

1.3.2 Exit of Tunnel

Tunnel の出口について場合分けを考える (fig.8)。この場合分けは頂点 c,d についてその頂点が既に埋まっているか埋まっていないかで場合分けされている。なお、頂点 c,d の両方とも埋まっている場合は、Tunnel の出口ではなくトンネルの中になるため場合分けに含めない。今、出口に固定される bead の 1 つ前の bead が、a 以下の bond 消費したとする。すると以下で示されるように Tunnel の出口で増加する bond の数は高々a 程度となる。つまり、Tunnel を出る事によって増加する bond の最大値は 0 となる。

- Pattern1 の時
  頂点 c,d が空いていたとする。入口の時と同様に考えると、頂点 A,B は bond を残しているため、頂点 P は頂点 A,B と bond を結ぶ。すなわち $a = 2$ となる。$\alpha = 2$ を考えると Tunnel 出口に固定される bead のよって増加する bond は高々$a = 2$ 程度。

- Pattern2 の時
  頂点 c のみが埋まっていたとする。頂点 B は bond を残しているため、頂点 P と B は bond を結ぶ。よって $a \geq 1$ また、Tunnel 出口で固定される bead は bond を 2 増加させる可能性があるが、空いている頂点 e,d について一方は back bone として消費されるため、この bead が増加させた bond を使用できるのは後に bead が頂点 e,d のいずれかに来た時のみ。よって Tunnel 出口に固定される bead は有効な bond を高々1 程度しか増やさない。よって増加する bond の数は高々a 程度であることが言える。



Pattern 1　　　　Pattern 2

Figure 8: 出口のパターン

1.3.3 Tunnel C

Tunnel C の入口に固定される bead について、その bead が Tunnel を消費して固定されたか、そうでないかによって場合分けをする。なお、Tunnel C の出口は TunnelA,B の中でないとする。

1.3.4 Tunnel C の入口の bead が Tunnel を消費して固定された場合

Tunnel C の構造を維持したまま入口に Tunnel 消費による bead を固定するパターンは fig.9 の 2 通りがある。

- Pattern1
  頂点 t_1 が転写される前では、t_3 がトンネルの外であることから頂点 A の周囲 3 点は空いてる。よって頂点 A の bead は 1 つ以上 bond を持つため、頂点 A と t_1 は bond を結ぶ。また、頂点 t_2 が決定的に固定されるためには頂点 B,C,D との間と bond を結ぶ必要がある。一方で、頂点 t_1, t_2 は、たとえ bond を増やしたとしても周囲 6 点が埋まっているため、それを使うことができない。つまり t_2 が固定された時点で bond は 2 減少している。今、t_3 が固定された時を考えると、この bead は bond を最大で 2 つ増やす可能性がある。しかし今 t_3 の周囲で空いているのは頂点 e,f で、このうち一方は

back bone のために使われるため、t_3 の増やした bond は 1 つのみが有効な bond となる。よって全体で bond の総数を 1 以上減少させる。

- Pattern2
  頂点 t_1 が固定される時その bead が幾つ周囲の bond を消費するかで場合分けできる。

  - t_1 が bond を消費しない場合
    頂点 t_2 が決定的に固定される時、bond を 1 以上消費しかつ有効な bond を増やさない。頂点 t_3 が固定される時、頂点 t_1 は bond を持っているため、t_3,t_1 の間で bond を結ぶ。よって t_3 の固定で増加する bond の数は 0 以下。一方で、この時 t_1 はまだ有効な bond を一つ持っている。もし頂点 e が埋まっているならこの bond は有効でなくなり bond の総数は減少する。そこで仮に頂点 e が空いている場合を考える。今 t_3 の次に固定される bead を t_4 とする。もし t_4 が頂点 e に固定されたなら、t_1 の bond を消費しかつ t_4 は bond を 1 つ消費し 1 つ増やす。よって t_1 から t_4 の固定において bond の総数は減少する。次に t_4 が頂点 f,g のどちらかに固定される場合を考える。頂点 e は空いているため、決定的に固定するに t_4 は 2 つの bond を消費する必要がある。よって t_1 が増やした bond を加味しても bondt_1 から t_4 の固定で bond の総数を減らすことになる。よっていずれのケースを考えても bond の総数は減少する。
  - t_1 が bond を 1 つ消費する場合
    t_2 は同様にして bond の総数を 1 つ減少させ、t_3 も増加させる bond の数は 0 以下。この時 t_1 は bond を増やさない。よって bond の総数は 2 以上減少する。
  - t_1 が bond を 2 つ消費する場合
    t_2 は bond を 1 つ以上減少させ、t_3 は bond を 2 つ増加させる。よって bond の総数は減少する。

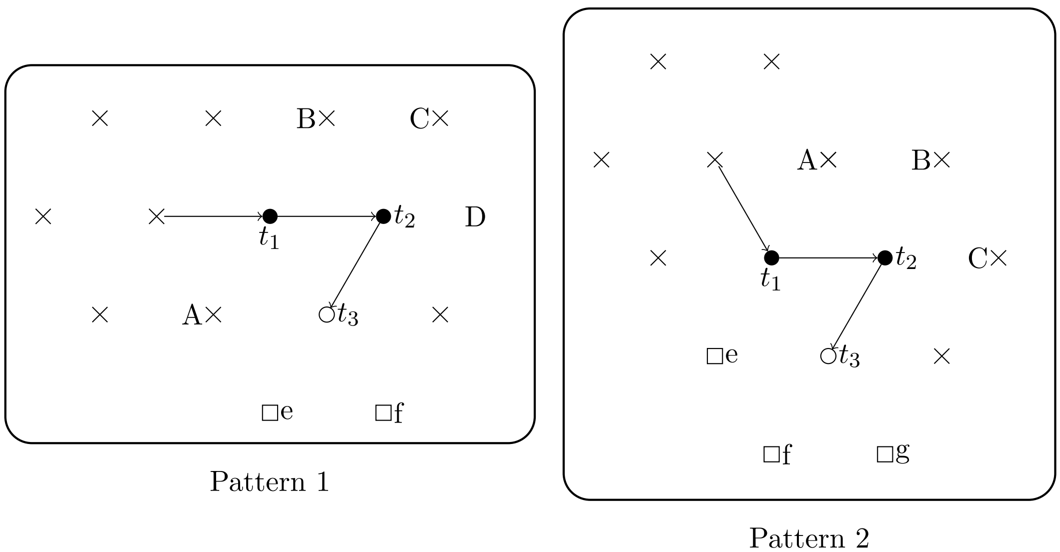


Figure 9: Tunnel を消費して入口に固定された bead