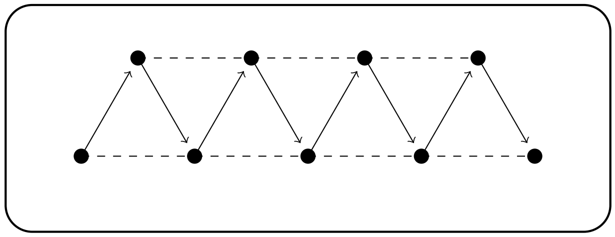


Figure 1: zig-zag conformation

1 Infiniteness of delay-1, arity-2 unary deterministic oritatami system

1.1 Introduction

In this section, we prove that unary oritatami system can form infinitely at delay 1 and arity 1 deterministically moreover the infinite terminal which its oritatami system can yield is only zig-zag conformations shown in Fig1.

Let Ξ be a deterministic oritatami system of delay 1 and arity 2. Assume its seed σ consists of n beads. Let us denote its transcript by $w = w_1 w_2 w_3 \cdots$ for some $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma = \{e\}$. For $i \geq 0$ let C_i be the unique elongation of σ by $w[1..i]$ that is foldable by Ξ. Hence $C_0 = \sigma$.

Let us consider the stabilization of the i-th bead a_i upon C_{i-1}. The bead cannot collaborate with any succeeding bead $w_{i+1}, w_{i+2}, \cdots$ at delay 1. There are just two ways to get stabilized at delay 1. One way is to be bound to another bead. The other way is through a *tunnel section*. A tunnel section consists of four beads that occupt four neighbors of a point(Fig.2). Assume that four of the six neighbors of a point p are occupied by beads $a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}, a_{j_4}$ while the other two are not occupied. We call such beads as p *inside of a tunnel* and such beads as p' *entrance of a tunnel* without a case that p' is inside of a tunnel. If the beads a_{i-2} and a_{i-1} are stabilized respectively at one of the two free neighbors and at p one after another, then the next bead a_i cannot help but be stabilized at the other free neighbor. In this way, a_i can get stabilized without being bound.

If a bead is stabilized through a tunnel section, then it can provide two binging capabilities and create tunnel sections.

Theorem 1.1 (Tunnel Troll Theorem)**.** Let Ξ be an unary oritatami system of delay 1 and arity 2. If a bead is stabilized through a tunnel section, then it consume some binging capabilities.

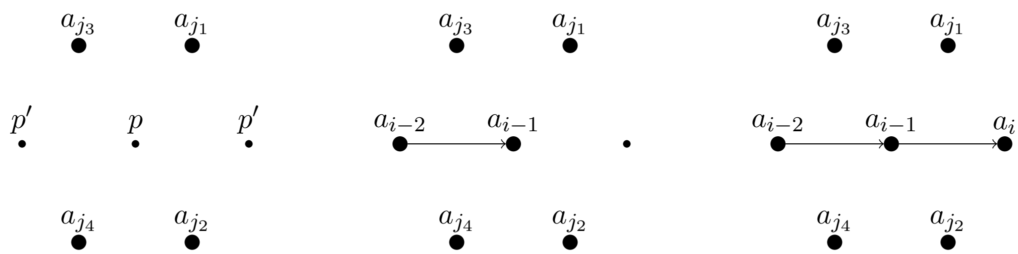


Figure 2: Through a tunnel section

1.2 Proof of Tunnel Troll Theorem

Assume Ξ is deterministic. Let us represent its transcript w as $w = w_1w_2w_3\cdots$ for beads $w_1, w_2, w_3, \cdots \in \Sigma = \{e\}$. Each of these beads is stabilized either by being bound or through a tunnel section (or by both). How they are stabilized can be described by a binary sequence S of b's (bound) and t's (tunnel section); priority is given to t, that is, $S[i] = t$ if the i-th bead w_i is stabilized not only by being bound but also through a tunnel section. On the other hand, each of beads are bound either inside of tunnel or outside (Fig. 6). If a bead is stabilized at inside of tunnel, then its successor is already decided the position either inside of a tunnel or outside. Moreover, If a bead is stabilized at outside of a tunnel, then its position is an entrance of a tunnel or otherwise.

Tunnel sections have three possible shape with considering symmetry such as acute turn, straight and obtuse turn (Figure 3). Let us focus entrances of a tunnel such as p', then Entrances have two possible shape (Figure 4).

Let us consider tunnel sections only tunnel A and B. See Figure 7. According to appendix, we add maximum number which each transitions provide binding capabilities for each edge where a is number of consuming binding capabilities when the bead is stabilized at position of *successer in outside*.

Next, we consider on tunnel C section. If $w[i]$ is stabilized by tunnel C and $S[i+1]$ is t, then $w[i+1]$ is stabilized by tunnel A or B because if $w[i+1]$ is stabilized by tunnel C, then C_{i+1} is a terminal. Hence, tunnel C section is devided cases sush as Figure 8. Cases of $S[i...] = bt^l (l \geq 2)$ are already considered (Upper). According to appendix, cases of $S[i..i+2] = btb$ also consume some binding capabilities.

Thus, if a bead is stabilized through a tunnel section, then it consume some binging capabilities.

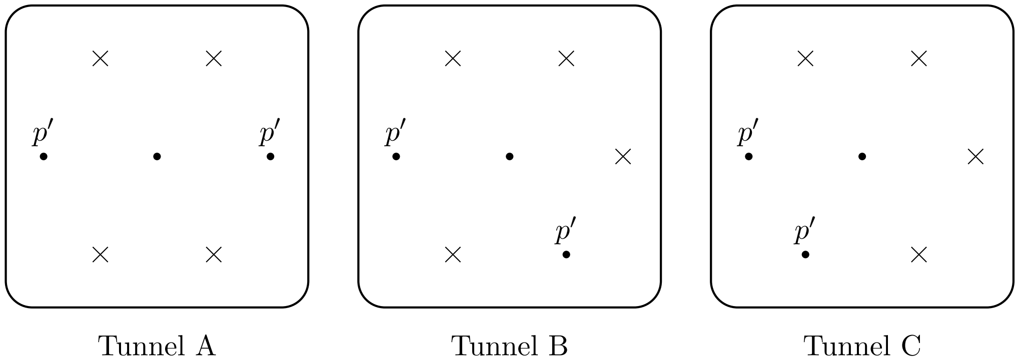


Figure 3: All possible tunnel sections

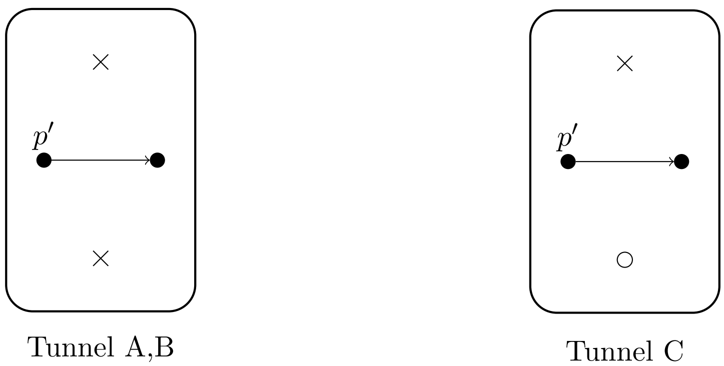


Figure 4: Entrance of a tunnel

1.3 Appendix of Tunnel Troll Theorem

1.3.1 Entrance of TunnelA,B

Tunnel の入口に固定された bead が、どの方向から来たかで場合分けをする (fig.9)。その結果 3 通りの場合分けが出来るが、以下のようにいずれの場合も bond の総数は減少する。

- Pattern1 の時
  四角で表されてる 2 頂点が埋まっているかどうかで分けられる。もしどちらも埋まっているとすると、トンネルの入り口ではなくトンネルの中になってしまうので、必ず少なくとも一方は空いている。今、頂点 c が空いているとする。すると頂点 A の周囲は 3 点以上空いている事になる。A の周囲 2 頂点は back bone としてつながっている。そのためもし B が既に bond を消費しているならば、残りの 1 頂点に存在する bead とのみ bond を結ぶ事となる。頂点 B の周囲は 3 点空いている事を考えると B は 1 つ以

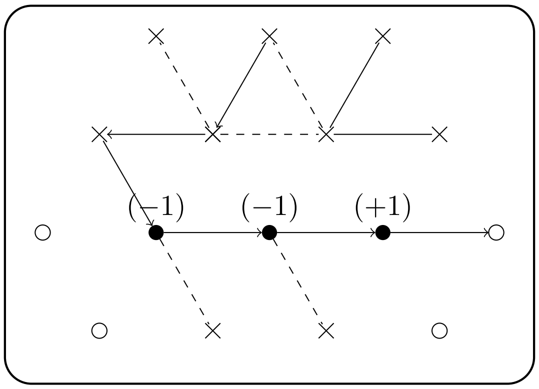


Figure 5: 増加量が -1 となる例

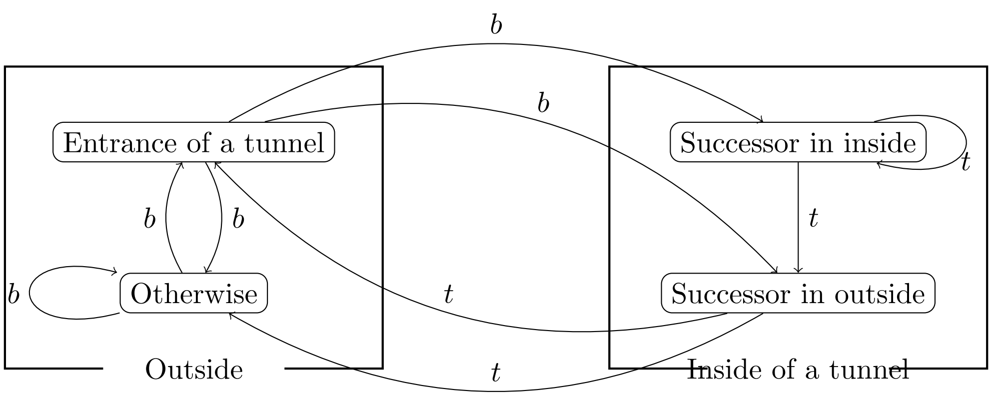


Figure 6: Cases on position of a bead

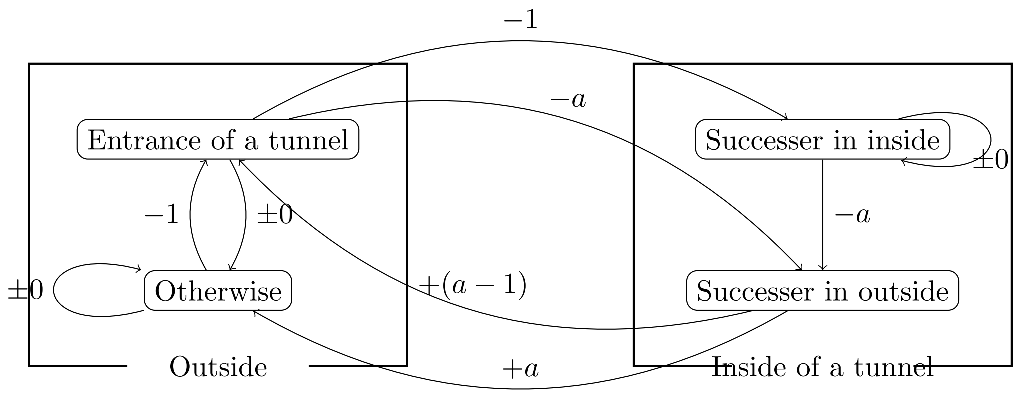


Figure 7: Tunnel A,B における bond の増加量

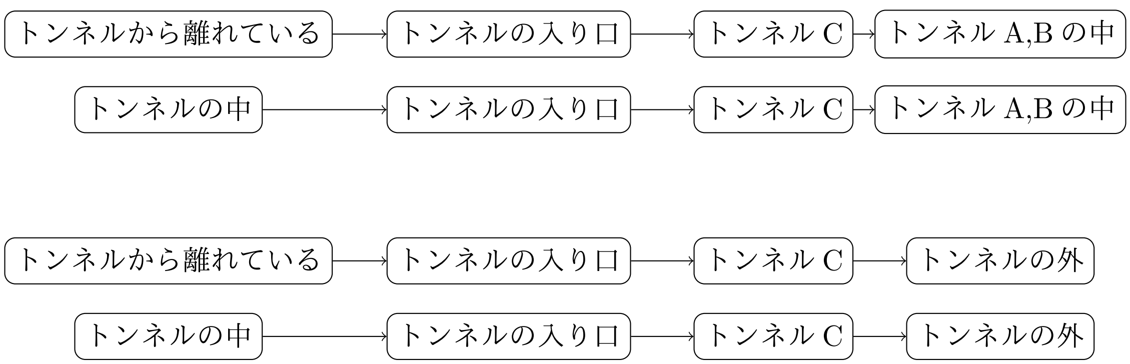


Figure 8: Tunnel C の場合分け

上の bond を残している。そのため入口に固定される bead と必ず bond を結ぶ事になる。もし頂点 d も空いている場合、固定される bead は bond を 2 つとも消費し、かつ既存の bond も 2 つ消費し bond の総数は減少する。頂点 d が埋まっていたとしても、頂点 A とは同様にして bond を結び、決定的に固定するために頂点 B か d と bond を結ぶ。故にいずれの場合も bond の総数は減少する。

- Pattern2 の時
  Pattern1 と同様にして頂点 c,d が埋まっているかどうかで分けられる。Pattern1 の例よりどちらも埋まっていることはない。頂点 c が空いている場合決定的に bead を固定するために A,B 少なくとも一方の bond を消費する。一方、頂点 c が埋まっていて頂点 d が空いている場合、Pattern1 のように、固定される bead と頂点 B は bond を結ぶため bond を消費する。

Pattern2 の場合、固定される bead は bond を 1 つ増やす可能性がある。もし仮に bond が増えたとするならば、その bond を使用するためはに頂点 c か d に bead が固定される必要がある。しかし今頂点 B と P は back bone によってつながっている。Jordan curve theorem より、これ以降に転写され得る bead の領域に頂点 c,d は含まれないため、この bond を消費することはできず、bond の数は増加しない。よって既存の bond を減少させ、かつ新たに有効な bond を増やさないことから bond の総数は減少する。

- Pattern3 の時
  頂点 n は空いているため、決定的に固定するために頂点 c,d,e のいずれかと bond を結ぶ必要がある、そのため既存の bond を消費する。一方、固定される bead は bond を 1 つ増やす可能性があるが、pattern2 と同様に頂点 A と P が back bone でつながっているため、これ以降に転写され得る bead の領域に頂点 c,d,e は含まれていないため、増やされる bond を使用できない。よって既存の bond を減少させ、かつ新たに有効な bond を増やさないことから bond の総数は減少する。

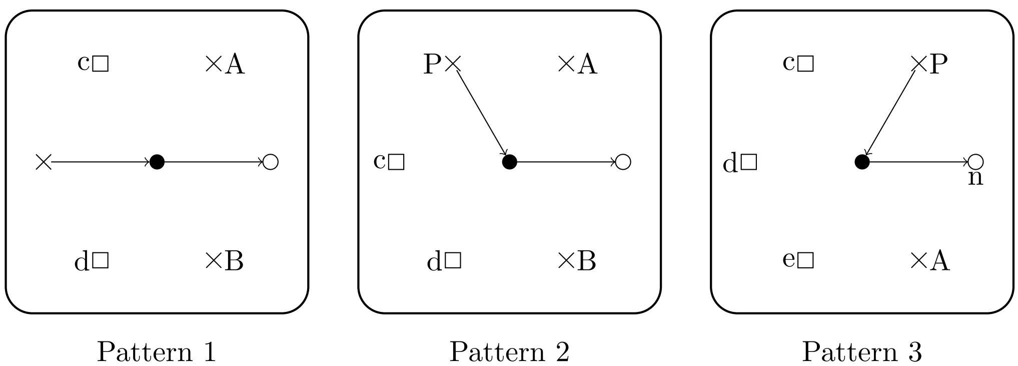


Figure 9: 入口へ至る方向

1.3.2 Exit of Tunnel

Tunnel の出口について場合分けを考える (fig.10)。この場合分けは頂点 c,d についてその頂点が既に埋まっているか埋まっていないかで場合分けされている。なお、頂点 c,d の両方とも埋まっている場合は、Tunnel の出口ではなくトンネルの中になるため場合分けに含めない。今、出口に固定される bead の 1 つ前の bead が、a 以下の bond 消費したとする。すると以下で示されるように Tunnel の出口で増加する bond の数は高々a 程度となる。つまり、Tunnel を出る事によって増加する bond の最大値は 0 となる。

- Pattern1 の時
  頂点 c,d が空いていたとする。入口の時と同様に考えると、頂点 A,B は bond を残して

いるため、頂点 P は頂点 A,B と bond を結ぶ。すなわち $a=2$ となる。$\alpha=2$ を考えると Tunnel 出口に固定される bead のよって増加する bond は高々$a=2$ 程度。

- Pattern2 の時
  頂点 c のみが埋まっていたとする。頂点 B は bond を残しているため、頂点 P と B は bond を結ぶ。よって $a \geq 1$ また、Tunnel 出口で固定される bead は bond を 2 増加させる可能性があるが、空いている頂点 e,d について一方は back bone として消費されるため、この bead が増加させた bond を使用できるのは後に bead が頂点 e,d のいずれかに来た時のみ。よって Tunnel 出口に固定される bead は有効な bond を高々1 程度しか増やさない。よって増加する bond の数は高々a 程度であることが言える。

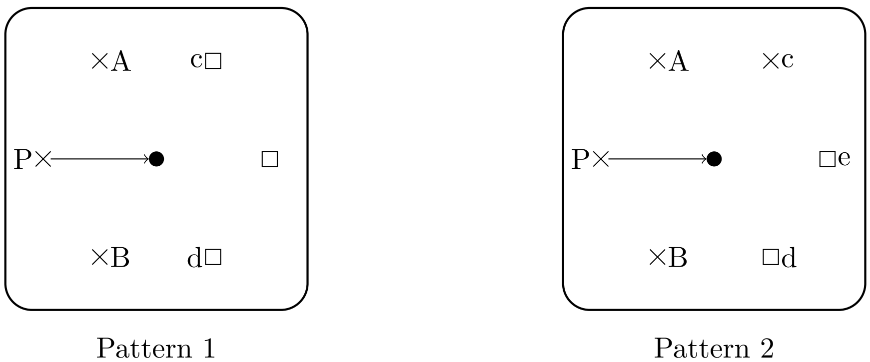


Figure 10: 出口のパターン

1.3.3 Tunnel C

Tunnel C の入口に固定される bead について、その bead が Tunnel を消費して固定されたか、そうでないかによって場合分けをする。なお、Tunnel C の出口は TunnelA,B の中でないとする。

1.3.4 Tunnel C の入口の bead が Tunnel を消費して固定された場合

Tunnel C の構造を維持したまま入口に Tunnel 消費による bead を固定するパターンは fig.11 の 2 通りがある。

- Pattern1
  頂点 t_1 が転写される前では、t_3 がトンネルの外であることから頂点 A の周囲 3 点は空いてる。よって頂点 A の bead は 1 つ以上 bond を持つため、頂点 A と t_1 は bond を結ぶ。また、頂点 t_2 が決定的に固定されるためには頂点 B,C,D との間と bond を結ぶ必要がある。一方で、頂点 t_1, t_2 は、たとえ bond を増やしたとしても周囲 6 点が埋

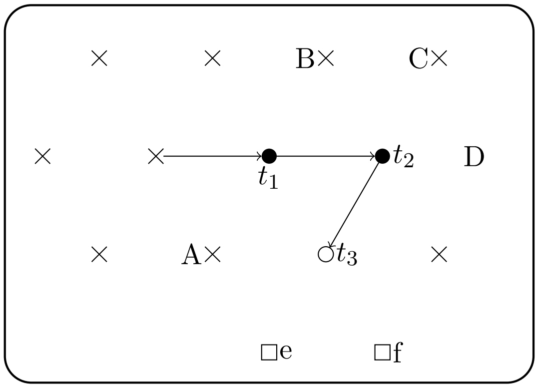
まっているため、それを使うことができない。つまり t_2 が固定された時点で bond は 2 減少している。今、t_3 が固定された時を考えると、この bead は bond を最大で 2 つ増やす可能性がある。しかし今 t_3 の周囲で空いているのは頂点 e,f で、このうち一方は back bone のために使われるため、t_3 の増やした bond は 1 つのみが有効な bond となる。よって全体で bond の総数を 1 以上減少させる。

- Pattern2
  頂点 t_1 が固定される時その bead が幾つ周囲の bond を消費するかで場合分けできる。
  - t_1 が bond を消費しない場合
    頂点 t_2 が決定的に固定される時、bond を 1 以上消費しかつ有効な bond を増やさない。頂点 t_3 が固定される時、頂点 t_1 は bond を持っているため、t_3,t_1 の間で bond を結ぶ。よって t_3 の固定で増加する bond の数は 0 以下。一方で、この時 t_1 はまだ有効な bond を一つ持っている。もし頂点 e が埋まっているならこの bond は有効でなくなり bond の総数は減少する。そこで仮に頂点 e が空いている場合を考える。今 t_3 の次に固定される bead を t_4 とする。もし t_4 が頂点 e に固定されたなら、t_1 の bond を消費しかつ t_4 は bond を 1 つ消費し 1 つ増やす。よって t_1 から t_4 の固定において bond の総数は減少する。次に t_4 が頂点 f,g のどちらかに固定される場合を考える。頂点 e は空いているため、決定的に固定するに t_4 は 2 つの bond を消費する必要がある。よって t_1 が増やした bond を加味しても bondt_1 から t_4 の固定で bond の総数を減らすことになる。よっていずれのケースを考えても bond の総数は減少する。
  - t_1 が bond を 1 つ消費する場合
    t_2 は同様にして bond の総数を 1 つ減少させ、t_3 も増加させる bond の数は 0 以下。この時 t_1 は bond を増やさない。よって bond の総数は 2 以上減少する。
  - t_1 が bond を 2 つ消費する場合
    t_2 は bond を 1 つ以上減少させ、t_3 は bond を 2 つ増加させる。よって bond の総数は減少する。

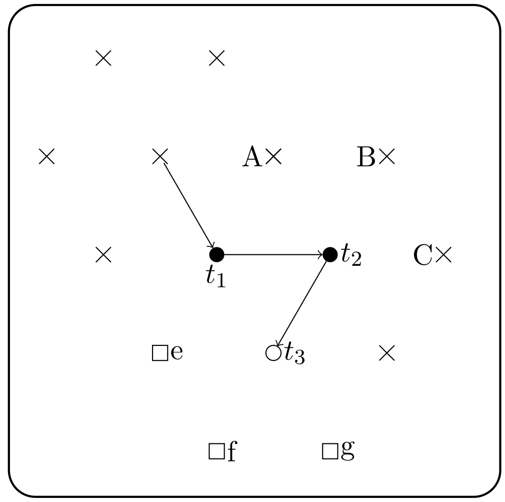
1.3.5 TunnelC の入口の bead が Tunnel を使わずに固定された場合

TunnelC の入口の bead が Tunnel を使わずに固定される時、その bead は既存の bond を使うことによって固定される。fig.12 において t_1 がいくつの bond を消費したかで場合分けを考える。

- t_1 が 1 つの bond を消費する場合
  この時 t_1 は 1 つの有効な bond を生み出す。t_2 は頂点 A,B,C の少なくとも一つと bond を結ぶ必要があり、かつ有効な bond を増やさない。t_3 について考えると、t_1 が bond を残していることから t_3 と t_1 は bond で結ばれる。故に bond の総数は 1 以上減少する。



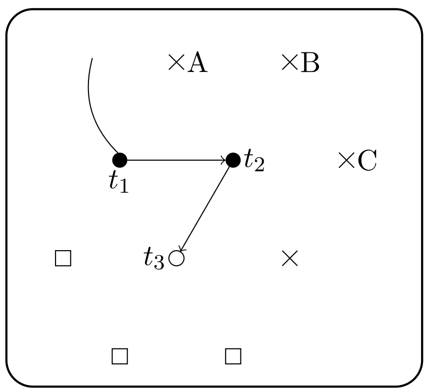
Pattern 1



Pattern 2

Figure 11: Tunnel を消費して入口に固定された bead

- t_1 が 2 つの bond を消費する場合
  この時 t_1 は bond を生み出さない。t_2 については先程と同様 bond の総数を 1 減らす。今、t_3 はどの bead とも bond を結ばない可能性があるため、bond の総数を最大で 2 増加させる。故に bond の総数は 1 以上減少する。



Pattern 1

Figure 12: Tunnel を消費せずに入口に固定された bead