Williams Chapter 2

koma

2023 年 6 月 26 日

2.1

実験用モデル $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

ランダム性を伴う実験のモデルは，セクション 1.5 の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ の形式を取る．

標本空間 Ω は標本空間と呼ばれる．

標本点 Ω の ω は標本点と呼ばれる．

事象 Ω 上の σ 加法族 $\mathcal{F}$ は事象族と呼ばれ，Ω の $\mathcal{F}$ 可測集合である $\mathcal{F}$ の要素は事象となります．

確率空間の定義により $\mathbf{P}$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ の確率測度です。

2.2

直感的な意味

チャンスの女神テュケは，法則 $\mathbf{P}$ に従って Ω の点 ω を「ランダムに」選択する．つまり，$\mathcal{F}$ の F について，$\mathbf{P}(F)$ は (私たちの直観によって理解される意味で)「確率」を表す．テュケが選んだ点 ω は F に属する．

選択した点 ω によって実験の結果が決まるので，以下のような写像が存在する．

$$\Omega \to \text{結果の集合},$$
$$\omega \to \text{結果}$$

この「写像」は必ずしも 1 対 1 対応である必要がある理由はない．実験には明らかな「最小」または「標準」モデルがあるにもかかわらず、より豊富なモデルを使用する方が良い場合がよくある．

たとえば，ランダムウォークをブラウン運動に埋め込むことで，コイン投げの多くの特性を読み取ることができる．

2.3

$(\Omega, \mathcal{F})$ の例

(a) 実験: コインを二回投げる．すると

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) := \Omega\text{の全てのすべての部分集合の集合族}.$$

このモデルでは，「少なくとも 1 回の結果が表になる」という直感的な事象は，数学的な事象 ($\mathcal{F}$ の要素) $\{HH, HT, TH\}$ によって記述される．

(b) 実験: コインを無限に投げる．すると

$$\Omega = \{H, T\}^{\mathbf{N}}$$

であるので Ω の ω は以下のように書くことができる．

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots), \omega_n \in \{H, T\}.$$

ここで，直感的な事象 $\omega_n = W$ ',$W \in \{H, T\}$ について

$$\mathcal{F} = \sigma(\{\omega \in \Omega \colon n \in \mathbf{N}, W \in \{H, T\})$$

のように自然に決めることができる．

$\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(\Omega)$ だが，$\mathcal{F}$ は十分に大きいことがわかる．例えば，3.7 節では

$$\frac{n\ \text{回のトスでの表の数}}{n} \to \frac{1}{2} \tag{1}$$

という文の真理集合

$$F = \left\{\omega \colon \frac{\#(k \le n \colon \omega_k = H)}{n} \to \frac{1}{2}\right\}$$

が $\mathcal{F}$ の要素となることがわかる．

なお，(a) の実験では，サンプル点と結果の写像 $\omega \mapsto (\omega_1, \omega_2)$ を用いて，モデルをより情報量の多いモデルとして使うことができる．

(c) 実験:0 と 1 の間の点を一様に無作為に選ぶ．選択された点を表す $\Omega = [0, 1], \mathcal{F} = \mathcal{B}[0, 1], \omega$ を考える．この場合，明らかに $\mathbf{P} = \mathrm{Leb}$ となる．このモデルが公正なコインのモデル (b) を含む意味の説明については，後とする．

2.4

Almost surely(a.s.)

結果に関する状態 S は次の場合，ほとんど確実に (a.s.)，または確率 1(w.p.1) で真であると言われる．

$$F := \{\omega \colon S(\omega)\ \text{は真}\ \} \in \mathcal{F}\ \text{かつ}\ \mathbf{P}(F) = 1. \tag{2}$$

(a) 命題 $F_n \in \mathcal{F}(n \in \mathbf{N})$ かつ $\forall n, \mathbf{P}(F_n) = 1$ であれば $\mathbf{P}(\bigcap_n F_n) = 1$ である．

証明. $\forall n, \mathbf{P}(F_n^c) = 0$ であるので 1.10(c) より $\mathbf{P}(\bigcup_n F_n^c) = 0$ となる．
ここで，$\bigcap_n F_n = (\bigcup_n F_n^c)^c$ より $\mathbf{P}(\bigcap_n F_n) = 1$ である． □

μ-null set との違い

almost surely：命題が真であること ((a): 可算個の a.s.⇒ a.s.)
μ-null set：命題が偽であること (真であることについて考えると測度が ∞ になる場合があるため)

2.5

注意：$\limsup, \liminf, \downarrow \lim$ 等

(a) $(x_n : n \in \mathbf{N})$ を実数列とする.

$$\limsup x_n \coloneqq \inf_m \left\{ \sup_{n \geq m} x_n \right\} =\downarrow \lim_m \left\{ \sup_{n \geq m} x_n \right\} \in [-\infty, \infty] \tag{3}$$

のように定義する．$y_m \coloneqq \sup_{n \geq m} x_n$ は広義単調減少であるので，y_m の極限は $[-\infty, \infty]$ に必ず存在する.

$y_m \coloneqq \sup\{x_n : n \geq m\}$ であり，$\{x_n : n \geq m\} \supset \{x_n : n \geq m+1\}$ より広義単調減少

単調な極限を意味する $\uparrow \lim$ や $\downarrow \lim$ は便利で，$y_\infty = \downarrow \lim y_n$ を意味する $y_n \downarrow\ y_\infty$ の使用も便利である.

(b) 同様にして

$$\liminf x_n \coloneqq \sup_m \left\{ \inf_{n \geq m} x_n \right\} =\uparrow \lim_m \left\{ \inf_{n \geq m} x_n \right\} \in [-\infty, \infty] \tag{4}$$

(c) x_n が $[-\infty, \infty]$ に収束する $\Longleftrightarrow \limsup x_n = \liminf x_n$ このとき，$\lim x_n = \limsup x_n = \liminf x_n$

(d)

(i) $z > \limsup x_n$ の場合，最終的に (つまり，十分に大きいすべての n について)$x_n < z$ となる.

$$z > \limsup x_n = \lim_{m \to \infty} \sup_{n \geq m} x_n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbf{N} s.t. \forall n \in \mathbf{N}, n \geq m, z > x_n$$

(ii) $z < \limsup x_n$ の場合，無限回 (つまり，無限に多くの n について)$x_n > z$ となる.

$$z < \limsup x_n = \lim_{m \to \infty} \sup_{n \geq m} x_n \Longleftrightarrow \forall m \in \mathbf{N} s.t. \exists n \in \mathbf{N}, n \geq m, x_n > z$$

2.6

定義 $\limsup E_n, (E_n, \mathrm{i.o.})$

事象 (真理集合)「表が出た回数/投げた回数 $\to \frac{1}{2}$」は,「n 回目の試行で表が出る」といった単純な事象から、かなり複雑な方法で構築されます。」

集合の $\liminf$ と $\limsup$ を取るという考え方により示す.

E がである場合、次のトートロジーに注意すると役立つかもしれない.

$$E = \{\omega : \omega \in E\}$$

ここで $(E_n : n \in N)$ が事象列であると仮定する.

(a) 以下のように定義する.

$$\begin{aligned}(E_n, \mathrm{i.o.}) &\coloneqq (E_n\text{が無限回起こる}) \\ &\coloneqq \limsup E_n \coloneqq \bigcap_m \bigcup_{n \geq m} E_n \\ &= \{\omega \colon \text{任意の } m \in \mathbf{N} \text{ について}, \exists n(\omega) \geq m (\text{ただし}, \omega \in E_{n(\omega)} \text{である})\} \\ &= \{\omega \colon \text{無限に多くの } n \text{ について} \omega \in E_n\}\end{aligned}$$

$\limsup E_n \coloneqq \bigcap_{m\in\mathbf{N}} \bigcup_{n\geq m} E_n$ の意味

$$\begin{aligned}
&\omega \in \bigcap_{m\in\mathbf{N}} \bigcup_{n\geq m} E_n \\
\Leftrightarrow &\forall m \in \mathbf{N}, \omega \in \bigcup_{n\geq m} E_n \\
\Leftrightarrow &\forall m \in \mathbf{N}, \exists n \geq m, \omega \in E_n
\end{aligned}$$

つまり，$m \in \mathbf{N}$ がどんなに大きくても $\exists n \in \text{s.t.} n \geq m, \omega \in E_n$

(b) 逆 Fatou の補題 ($\mathbf{P}$ の有限性が必要)

$$\mathbf{P}(\limsup E_n) \geq \limsup \mathbf{P}(E_n).$$

証明. $G_m \coloneqq \bigcup_{n\geq m} E_n$ とする．このとき，$G_m \downarrow G (G \coloneqq \limsup E_n)$ である．よって 1.10(b) より，$\mathbf{P}(G_m) \downarrow \mathbf{P}(G)$ となる．

ここで，明らかに

$$\mathbf{P}(G_m) \geq \sup_{n\geq m} \mathbf{P}(E_n).$$

したがって，

$$\mathbf{P}(G) \geq \downarrow \lim_{m} \left\{ \sup_{n\geq m} \mathbf{P}(E_n) \right\} =: \limsup \mathbf{P}(E_n).$$

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}(G_m) > \sup_{n\geq m} \mathbf{P}(E_n) - \varepsilon$$

が成り立つので，$\varepsilon \downarrow 0$ を考えると

$$\mathbf{P}(G_m) > \sup_{n\geq m} \mathbf{P}(E_n)$$

が成立する．

□

2.7

Borel–Cantelli の補題

$(E_n : n \in \mathbf{N})$ を $\sum_n \mathbf{P}(E_n) < \infty$ であるような事象列とする．このとき，以下が成り立つ．

$$\mathbf{P}(\limsup E_n) = \mathbf{P}(E_n, \text{i.o.}) = 0.$$

証明. 2.6(b) のように G_m, G を表すとする．1.9(b),1.10(a) より，各 $m \in \mathbf{N}$ において

$$\mathbf{P}(G) \leq \mathbf{P}(G_m) \leq \sum_{n\geq m} \mathbf{P}(E_n)$$

が成り立つ．ここで $m \uparrow \infty$ とすれば示すことができる．

$$z > \limsup x_n = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} x_n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbf{N} s.t. \forall n \in \mathbf{N}, n \geq m, z > x_n$$

□

2.8

定義 $\liminf E_n, (E_n, \mathrm{ev})$

もう一度 $(E_n : n \in N)$ が事象列であるとする.

(a) 以下のように定義する.

$$\begin{aligned}(E_n, \mathrm{ev}) &\coloneqq (E_n\text{が最終的に起こる}) \\ &\coloneqq \liminf E_n \coloneqq \bigcup_m \bigcap_{n\geq m} E_n \\ &= \{\omega\colon \text{ある } m \in \mathbf{N} \text{ について}, \forall n \geq m(\omega), \omega \in E_n\text{が成り立つ}\} \\ &= \{\omega\colon \text{すべての大きな } n \text{ に対して} \omega \in E_n\}\end{aligned}$$

(b) $(E_n, \mathrm{ev})^c = (E_n^c, \mathrm{i.o.})$ である.

(c) Fatou の補題 (任意の測度空間で成り立つ)

$$\mathbf{P}(\liminf E_n) \leq \liminf \mathbf{P}(E_n).$$

証明. $G_m \coloneqq \bigcap_{n\geq m} E_n$ とする. このとき, $G_m \uparrow G (G \coloneqq \liminf E_n)$ である. よって 1.10(b) より, $\mathbf{P}(G_m) \uparrow \mathbf{P}(G)$ となる.

ここで, 明らかに

$$\mathbf{P}(G_m) \leq \inf_{n\geq m} \mathbf{P}(E_n).$$

したがって,

$$\mathbf{P}(G) \leq\uparrow \lim_m \left\{\inf_{n\geq m} \mathbf{P}(E_n)\right\} =: \liminf \mathbf{P}(E_n).$$

□