Марк Иосифович Вишик

Под редакцией А.А. Комеча, А.И. Комеча и А.И. Назарова

Версия: 28 ноября 2021

Аннотация

Профессор Марк Иосифович Вишик – один из крупнейших математиков XX века, работавший в области теории уравнений в частных производных и математической физики.

Книга основана на воспоминаниях его друзей и учеников, а также на воспоминаниях самого Марка Иосифовича, и содержит подробное описание его биографии: детства во Львове, его связи со знаменитой львовской школой Стефана Банаха, трудного путешествия в Тбилиси после начала Великой Отечественной войны, приезда в Москву и формирования собственной школы дифференциальных уравнений, в которой центральную роль играл знаменитый семинар М.И. Вишика на мехмате МГУ. На этом семинаре выросло несколько поколений известных математиков.

Также приводится подробное описание основных направлений научной работы Марка Иосифовича, составленное его учениками и коллегами.

Предисловие

Марк Иосифович Вишик – один из крупнейших математиков XX века. Он внёс фундаментальный вклад в теорию уравнений в частных производных, без которого теперь невозможно представить себе эту важнейшую область науки, являющейся основой современного естествознания. Его работы получили широкое международное признание, он был избран в самые престижные научные академии мира.

Научные труды Марка Иосифовича принадлежат области дифференциальных уравнений в частных производных, функционального анализа и математической физики, включая статистическую гидромеханику и глобальную теорию нелинейных волновых процессов. Марк Иосифович заложил математический фундамент этих областей, определив их дальнейшее развитие.

Его работы превратили теорию уравнений с частными производными в один из разделов современного функционального анализа; важную роль в этом, безусловно, сыграла его связь со львовской школой Стефана Банаха. Труды Марка Иосифовича являются вершиной математических достижений этой школы и максимальной реализацией её потенциала.

Всю жизнь Марк Вишик активно вёл огромную педагогическую работу. Он участвовал в научном становлении не одной сотни студентов и аспирантов. Многие десятки профессоров и докторов наук считают его своим научным руководителем. Его ученики ныне составляют существенную часть мирового научного сообщества.

Все, кто знал Марка Иосифовича, были очарованы его деликатностью и добротой. Он был очень открытым человеком, несмотря на внешнюю сдержанность, и был готов помогать всем своим студентам и коллегам.

Обо всём этом вспоминают в этой книге друзья и ученики Марка Вишика. Перед читателем проходит целая эпоха и ряд замечательных связанных с Марком Вишиком крупнейших учёных: С. Банах, Ю. Шаудер, И.Н. Векуа, Н.И. Мусхелишвили, Л.А. Люстерник, И.Г. Петровский, С.Л. Соболев, И.М. Гельфанд, М.Г. Крейн, А.Н. Колмогоров, Н.И. Ахиезер, Ж. Лерэ, Ж.-Л. Лионс, Л. Шварц, Л. Ниренберг и другие.

Оглавление

Глава 1

Заметки об отце

Михаил Вишик

Техасский Университет (Остин)

Мои заметки основаны на рассказах моего отца, Марка Иосифовича Вишика (М.И.), как я их запомнил, а также на моих личных воспоминаниях. За абсолютную точность обоих источников ручаться не могу.

М.И. любил рассказывать о своём детстве во Львове. Семья сильно бедствовала после смерти отца М.И., Иосифа-Хайма, когда Марку было 8 или 9 лет. М.И. рассказывал, как он ежедневно в течение года читал кадиш по отцу в синагоге. Очевидно, он воспитывался в достаточно строгой ортодоксальной иудейской традиции. М.И. мог через много лет чисто спеть отрывки пасхальных песен из Пасхальной Хаггады (Eliyahu Hanavi, Eliyahu Hatishbi, Elyahu Hagiladi...) Род занятий его отца мне не удалось определить однозначно. У М.И. было два брата, старший Бернард и младший Иосиф, который родился уже после смерти их отца. М.И. обожал свою младшую сестру Хелю. Не исключено, что она была блондинкой. Он вспоминал прогулки с младшей сестрой, когда она держала его за палец.

Во львовской гимназии №9 М.И. познакомился и подружился на всю жизнь с Владиславом Элиевичем (Владеком) Лянце[1] (В.Э.), впоследствии известным математиком, специалистом по функциональному анализу и спектральной теории. В воспоминаниях М.И. о школе большое место занимала еда. Точнее, завтраки, которые родители собирали своим детям. Его воображение поразил бутерброд с шоколадом (может быть, с шоколадным маслом), который один из гимназистов регулярно приносил на завтрак. В семье М.И. после смерти отца средств хватало только на простейшую еду. Мама М.И., Ривка (Ребекка, Регина), согласно М.И., работала библиотекарем после смерти мужа. В какой-то момент она вынуждена была продать обручальное кольцо, чтобы выручить необходимые средства на школьные завтраки. Два друга, В.Э. и М.И., часто по пятницам гуляли вместе по городу, обсуждая последние новости из области научной фантастики (например, каналы на Марсе), предварительно набив карманы выпечкой, которую мама М.И. пекла по пятницам до захода солнца. Семья В.Э. была более свободна в средствах, его отец был агентом варшавской фирмы, продававшей занавески.

М.И. рано проявил способности к математике. В гимназии ему повезло с преподавателем математики Фрейлихом, пробудившим его математическое дарование. На уроке математики по теме о "логарифмах", где использовались таблицы, а в интервалах между узловыми точками применялась линейная интерполяция, он спросил: "Откуда известно, что логарифм линейная функция на этих интервалах". Профессор математики кинул мел и стал искать имя гимназиста в журнале. Это замечание произвело на профессора впечатление, и он сообщил на педсовете своё крайнее одобрение ученика раввину. На очередном уроке Религии (отдельно для разных вероисповеданий) раввин рассыпался в похвалах М.И., хотя по его предмету М.И. не очень

[1] См. воспоминания М.И. Вишика в Главе 15. (*Прим. ред.*)

хорошо успевал. Успехи М.И. по Латыни были ещё хуже, хотя через много лет он наизусть читал по памяти латинские отрывки из Записок Цезаря и Метаморфоз Овидия ("Вот идёт Ниобея...").

После "освобождения" Львова Красной Армией в 1939 г. М.И. и В.Э. получили возможность поступить во Львовский университет. М.И. был рано замечен Стефаном Банахом, крупнейшим математиком, основавшим знаменитую научную школу во Львове. М.И. посещал семинар С. Банаха во Львовском университете. Уже после войны Стефан Банах с радостью увидел и узнал своего бывшего студента во время своего визита в Москву. С. Банах пережил немецкую оккупацию во Львове.

Переломным моментом в жизни М.И. было бегство из Львова и гибель его семьи и всех оставшихся во Львове родственников в период войны. Эти события глубоко отпечатались в его сознании, но обсуждал он в разговорах со мной лишь отдельные аспекты событий, тогда как многое оставалось и продолжает оставаться в тени. М.И. ушёл пешком на восток из Львова, когда части Вермахта входили в город в июне 1941 г. В его кармане были паспорт, комсомольский билет и зачётка из Львовского университета. Никаких личных вещей с собой не было. С этого момента начались его голодные скитания, иногда с группами беженцев. Его товарищ по бегству попросил хлеба в крестьянском доме и был убит на глазах у М.И. Картины хаоса в начале немецкого наступления и бегства частей Красной Армии хорошо известны из литературы. М.И. вспоминал бомбардировки отступающих частей Красной Армии и гражданских беженцев немецкой авиацией. Первые дни немецкой оккупации Львова сопровождались погромом в еврейских кварталах города, в котором активное участие принимало местное население. Судьбу своей семьи М.И. пытался выяснить уже после войны, приехав во Львов в конце 1940-х годов с женой, Асей (Рашель) Моисеевной (А.М.), моей мамой. Они расспрашивали соседей, которые оставались в городе во время немецкой оккупации Львова. Эта попытка реконструкции событий не была на 100% успешной. Сейчас я знаю, что старший брат М.И. погиб от голода или был расстрелян в концлагере на Яновской. Младший брат, видимо, умер от голода во львовском гетто. Такой вывод можно сделать из кладбищенской книги. Мама и сестра, вероятно, были отправлены в концлагерь Белжец до ликвидации львовского гетто. Их судьба неизвестна, но можно предположить с огромной вероятностью, что они погибли в этом концлагере. Семья В.Э. сумела купить билет на один из последних поездов, отбывавших на восток из Львова.

У М.И. много родственников по всему миру, в США, Австралии, Шотландии. Они потомки тех родственников, которые покинули Польшу до войны. Ортодоксальные еврейские семьи, как правило, имели много детей. Насколько мне известно, М.И. не имел контакта с потомками выживших после войны родственников.

Путешествуя пешком, иногда поездами или с воинскими эшелонами, М.И. с риском для жизни обходил патрули НКВД. По пути Арзамас – Дербент – Баку, после очередной счастливой случайности, когда он избежал ареста нарядом железнодорожной милиции, М.И. решил сойти в Махачкале: подходы к Баку охранялись, поскольку там была сосредоточена добыча нефти, стратегического сырья. Ему удалось устроиться на учёбу в Педагогический институт в Махачкале. С чувством юмора он описывал урок в Педагогическом институте, где возникла дискуссия между преподавателем русского языка и М.И. Один из них говорил "куз", а другой "куза". Имелось в виду русское слово "кузов". Очевидно, М.И. не владел русским языком в совершенстве в то время. Впоследствии он говорил совершенно правильно по-русски, с небольшим акцентом. Писал очень красиво, с прекрасными очертаниями букв, каллиграфическим почерком.

Важный период в его жизни начался после переезда в Тбилиси, где он учился в аспирантуре по математике в Тбилисском государственном университете. В его судьбе благородно приняли участие Илья Несторович Векуа и Николай Иванович Мусхелишвили. М.И. навсегда сохранил благодарную память о помощи, оказанной ему грузинскими математиками и друзьями в Грузии. Так, Н.И. Мусхелишвили позвонил министру лёгкой промышленности Грузии, чтобы добыть "обмундирование" для М.И., поскольку он заметил, что единственный комплект одежды М.И. сильно обветшал за годы странствий. М.И., как умел, зашивал дырки в своём "обмундировании", но, по его словам, не вполне владел искусством закрепления ниток. Близость с И.Н. Векуа сохранилась на всю жизнь. В Тбилиси М.И. приобрёл двух близких друзей: один – Карен Аветович Тер-Мартиросян, физик, впоследствии ученик Л.Д. Ландау, специалист по физике высоких энергий; другой – Александр Рувимович Хволес, математик, только что демобилизованный из-за тяжёлого ранения. В общежитии ТГУ его соседями по комнате были абхазский поэт Баграт Шинкуба (впоследствии председатель Президиума Верховного Совета Абхазии) и известный историк Абхазии Шалва Инал-Ипа.

Весной 1945 г. Н.И. Мусхелишвили договорился (по собственной инициативе) о переводе М.И. из аспирантуры ТГУ в аспирантуру Математического Института АН СССР им. Стеклова в Москве, где его руководителем согласился стать Лазарь Аронович Люстерник (Л.А.). Л.А. и М.И. позже сотрудничали в известной серии работ по уравнениям с малым параметром при старших производных.

Дружба с Л.А. продолжалась всю жизнь. Много раз Л.А. приглашал всю нашу семью на свою дачу на 42-ом километре Казанской железной дороги. Из этих визитов помню французские хроники XVII–XVIII веков, которые Л.А. читал в оригинале. Л.А. великолепно знал русскую художественную литературу и писал прекрасные стихи. Его речи были мудрые и глубокие. Гораздо позже я с ужасом узнал о деле Н.Н. Лузина. Реакция М.И., когда я у него об этом спросил через много лет после смерти Л.А., была следующая: "А, их всех заставили". Разумеется, Л.А., как и М.И., были свидетелями очень страшных времён. Л.А. Люстерник в глазах М.И. был всегда высшим авторитетом, математическим гигантом, старшим и мудрым товарищем, и примером чистого математического таланта.

Весной 1945 г. М.И. познакомился со своей будущей женой А.М., моей мамой. Их познакомил Ю.А. Шрейдер, математик и философ, ученик И.М. Гельфанда. Это был в определённом смысле конец его скитаний. М.И. всегда отмечал, что в период ухаживания А.М. потребовала, чтобы он прочёл важнейшие произведения русской литературы. В частности, требовалось прочесть всего А.С. Пушкина и всего Л.Н. Толстого. "Культурнейшая семья", – неоднократно комментировал М.И. Семья А.М. приняла М.И. в свой круг. Процесс вхождения в новую семью, видимо, не был полностью безоблачным. Будущий тесть М.И., Моисей Наумович, в начальный период любил повторять в присутствии М.И.: "Сбежит, ой сбежит! Получит постоянную прописку и сбежит!" (Речь шла о московской прописке.) М.И. вспоминал со смехом эту сентенцию всю жизнь, всегда к огромному неудовольствию своей супруги. А.М., однако не отрицала фактов, а только с возмущением замечала на повышенных тонах: "Маркус, сейчас же прекрати, ты ничего не понимаешь!" Также Моисей Наумович выражал сомнения в происхождении М.И.: "Мы же ничего не знаем о его семье, он же космополит какой-то". Будущий тесть использовал взрывоопасное слово "космополит" в его изначальном смысле. Однако в газетах и в публичной дискуссии это прекрасное слово имело совсем иной смысл. Будущая тёща М.И., когда в коммунальной квартире появились клопы, с точностью определила, что "клопы – от Марка". Через некоторое время начальные проблемы сгладились, и М.И. вошёл в семью, как полноправный член. А проблема клопов в Москве, как мне сообщают коллеги, до сих пор не решена. Они пережили горбачёвскую перестройку и начало капитализма, и поныне присутствуют и здравствуют в дешёвых московских гостиницах.

М.И. также вошёл в круг друзей А.М., который включал М.Л. Левина, А.С. Кронрода, А.М. Яглома, И.М. Яглома, Л.А. Кронрод, Б.А. Розенфельда и многих других. К этому же периоду относится начало знакомства М.И. с великим математиком 20-го века, И.М. Гельфандом, оказавшим большое математическое и человеческое влияние на М.И.

По распределению после аспирантуры М.И. получил работу в Московском Энергетическом Институте (МЭИ). В тот период заведующим кафедрой математики в МЭИ после уволенного В.И. Левина стал Н.А. Леднёв. М.И. рассказывал, что его нагрузка была огромной и распределялась следующим образом: пара лекций, два часа перерыва, ещё пара, ещё два часа перерыва, и т.д., т.е., максимально неудобное расписание лекций. В перерывах М.И. старался заниматься научной работой. Также работы того периода, получившие значительную известность, писались в условиях коммунальной квартиры на Сивцевом Вражке (переулок рядом с Арбатом), где проживало 10 семей. На всех была одна кухня и один туалет.

М.И. рассказывал, что свои лекции в МЭИ он читал с большим энтузиазмом. Когда речь зашла о теореме Тейлора о приближении функции многочленом, он попросил аудиторию встать. Таким образом, по его мнению, следовало выразить уважение к этому центральному факту математического анализа. Это "Встать" не раз вспоминали бывшие студенты МЭИ, которых он позже встречал. А через его курсы лекций прошли тысячи и тысячи будущих инженеров. Я бы не решился на подобное "Встать" в своих лекциях по математическому анализу в Университете штата Техас.

М.И. также активно участвовал в тот же период в семинаре И.Г. Петровского в МГУ по уравнениям в частных производных. И.Г. Петровский, ректор МГУ, хотел привлечь М.И. на свою кафедру на мехмате, но ему категорически отсоветовали, заявив, что М.И. близок к Н.А. Леднёву в МЭИ. Это был первый, но не последний пример околонаучных интриг в жизни М.И. Н.А. Леднёв был опровергателем теории относительности Эйнштейна и принимал участие (возможно, искренне, по непониманию, мне трудно судить) в неблаговидных кадровых перемещениях в Одессе, на физическом факультете МГУ, и в МЭИ в период борьбы с космополитизмом. Репутация Н.А. Леднёва была, мягко скажем, не очень высока в глазах И.Г. Петровского. И.Г. Петровский поинтересовался всё же у И.М. Гельфанда, что вот, как это, М.И., такой способный математик, а дружит с Н.А. Леднёвым. И.М. Гельфанд ответил: "А кто Вам это сказал, Иван Георгиевич?" На этом разговор закончился. Без дальнейших обсуждений И.Г. Петровский позвонил М.И. и предложил ему должность профессора МГУ на своей кафедре дифференциальных уравнений. С этого момента научная жизнь и преподавание М.И. была связана с МГУ, одним из важнейших центров математики в СССР и, в то время, и в мире.

Надо сказать, И.Г. Петровский очень сильно помог М.И. и гораздо раньше, – с защитой докторской диссертации. Поданная в самом начале 1950-х годов (в разгар борьбы с космополитизмом) в Совет Математического института АН СССР, она лежала год без всякого движения. М.И. звонил секретарю Совета, но получал ответы, что Совет перегружен. И.Г. Петровский, узнав об этом, поехал к И.М. Виноградову, директору МИАН. После этого разговора защита вскоре состоялась. Оппонентами были И.М. Гельфанд, С.Л. Соболев и А.Н. Тихонов.

В жизни М.И. огромную роль играли ученики и соавторы. Полный список хорошо известен. В квартиру в Лефортово напротив Лефортовской тюрьмы, а позже в квартиру рядом с метро "Ленинский Проспект" приходили в разные годы М.А. Краснов, Г.И. Макаренко, М.С. Агранович, Ю.А. Дубинский, Г.И. Эскин, В.В. Грушин, М.А. Шубин, А.В. Фурсиков, А.С. Демидов, А.И. Комеч, А.И. Шнирельман, А.В. Бабин, П.М. Блехер, С.М. Козлов, С.Б. Куксин, В.В. Чепыжов и другие. Для него были важны человеческие параметры взаимоотношений, а не только качество математики. М.И. прилагал огромные усилия к устройству судьбы учеников; когда это было возможно, то просил о содействии И.Г. Петровского и других коллег-математиков. Вспоминаются обеды в Лефортово и на Ленинском Проспекте, с учениками и соавторами М.И., с неизменным обсуждением математики, а также любых других тем, включая и политику.

Семинар М.И. в МГУ по уравнениям в частных производных был чрезвычайно успешным его начинанием. Я надеюсь, о семинаре подробнее расскажут ученики М.И. и/или постоянные участники семинара. У М.И. была привычка приглашать докладчика к себе домой (помню многочисленные визиты будущих докладчиков в квартиру в Лефортово). Обсуждался предстоящий доклад, порой с деталями, которые невозможно было уложить в стандартное академическое расписание семинара в МГУ. Будущий докладчик неизменно приглашался к обеду. Эта традиция просуществовала неизменной за всё время работы семинара М.И. в МГУ, возможно, кроме позднего периода, когда я перестал быть непосредственным её свидетелем.

Одно из моих самых первых воспоминаний об отце – поход на экзамен в музыкальную школу в Немецкой Слободе, напротив Немецкого кладбища, недалеко от квартиры в Лефортово. Экзамен, который принимал директор школы, я провалил. Он сел за фортепьяно и предложил мне спеть песню "Широка страна моя родная...", которую я с удовольствием спел, поскольку хорошо знал слова, но спел на одной ноте. М.И. любил музыку, всю классическую музыку. Я впервые услышал И.С. Баха, когда М.И. проигрывал одну из пластинок в своей коллекции с записью пассакалии до минор (BWV 582) в исполнении оркестра под управлением Леопольда Стоковского. В разные годы М.И. увлекался Брамсом, Бетховеном, Моцартом, Гайдном, Чайковским, Вагнером, концертами Баха. Из более лёгкой музыки и намного позже любил песни в исполнении Шарля Азнавура и Джо Дассена.

Мы с М.И. регулярно ходили в походы: зимой на лыжах, а летом в горы или на лодках. Помню с ностальгией поход на много дней (дней на десять) через перевалы Главного Кавказского хребта: Баксан – Чегем – Твиберский перевал – Местия – Чегет – Баксан. Рюкзаки были довольно тяжёлые, всю еду (консервы), палатки, спальные мешки приходилось нести с собой. Перед Твиберским перевалом мы ночевали в палатке на леднике, утром выходили часа в 4 утра, когда солнце только начинало освещать вершины гор Главного Кавказского хребта. В Местии, где башни над каждым домом, как во Флоренции, пили айран и почему-то самогон на ягодах.

Помню подготовку к поступлению в МГУ моего брата Сени и его друзей по школе, А.И. Комеча и Ф.А. Богомолова: по этому случаю все трое жили на даче, которую мои родители снимали в Подмосковье. Все трое успешно поступили на мехмат МГУ. До сих пор мне трудно понять, в чём заключалась роль М.И. в их подготовке к экзамену по математике. Но это было очень весёлое время с совместными прогулками, пешком и на велосипедах по окрестностям, купаниями в пруду и интересными беседами за столом. Иногда к компании присоединялся их школьный друг А.Н. Виленкин, живший неподалёку.

Вспоминаю одно из застолий в квартире у метро "Ленинский Проспект". Это был день рождения моей мамы. Она с воодушевлением рассказывала о своей учительнице, которую только что случайно встретила на улице (очевидно, бывшая учительница была уже в преклонном возрасте). Восхищалась её энергией и любовью к жизни. М.И. без энтузиазма относился к алкогольным напиткам, но тут бутылка коньяка стояла рядом, и он выпил чуть больше обычного. Его неожиданный комментарий, совершенно не к месту: "Ты жива ещё, моя старушка?" – совершенно взорвал аудиторию. А.М. молча взяла бутылку коньяка и унесла на кухню.

Мой ближайший друг, безвременно погибший Волек Фишман, как-то заметил: "М.И. для меня – образец христианского отношения к жизни". Это прозвучало тогда неожиданно и контринтуитивно, но сейчас кажется мне вполне справедливым. А повод был следующий. М.И. был приглашён в одну питерскую квартиру на празднование Пасхи. Сестра знаменитой хозяйки квартиры, которая приготовила угощение к празднику, спросила: "А разве нехристь будет есть пасху?" Хозяйка, близкая подруга М.И., заливисто смеялась. М.И. очень понравилось слово "нехристь", он с удовольствием и со вкусом его повторял не раз. Довольно рано он бросил погоню за академическими регалиями (хотя многие говорят, что заслуживал). Чувствовал себя счастливее после этого; говорил, что к нему стали лучше относиться потенциальные конкуренты за академические звания. Никогда не говорил плохо о людях, которые делали его жизнь более сложной.

М.И. принял с благодарностью Гумбольдтовскую премию и диплом лауреата из рук Президента Федеративной Республики Германия. Многие из учеников и соавторов М.И. были приглашены в Берлин на конференцию во Freie Universität по поводу вручения М.И. звания доктора honoris causa. Не знаю, осознавал ли он символическое значение этого события в контексте своей личной судьбы. Этот символизм упоминался в речах официальных лиц из администрации Freie Universität. Я, к сожалению, не спросил, а М.И. ничего на эту тему не сказал. Роже Темам, давний французский друг М.И., прочёл доклад, где воссоздал маршрут скитаний М.И. во время войны на карте: Львов – Махачкала – Тбилиси – Москва.

После моего отъезда с семьёй в Чикаго и Техас общение долгое время было, в основном, по телефону.

М.И. и А.М. дважды приезжали к нам в Остин, столицу штата Техас. М.И. очень радовался успехам в школе своей внучки Инны. Мы встречались в разные годы в г. Блумингтон, Индиана; в Берлине; в Лейпциге; в г. Ирвайн, Калифорния. Он радовался возможности, открывшейся после 1991 г., путешествовать по миру, сотрудничеству с новыми соавторами. Особенно близкие отношения сотрудничества и дружбы сложились у М.И. с Б. Фидлером. А.М., как правило, сопровождала М.И. в его поездках, хотя не всегда. Особенно прекрасной была встреча в Лейпциге, где мы все, в том числе и внучка М.И., Инна, посетили музей-квартиру И.С. Баха, побывали в Томас Кирхе с могилой Баха, послушали знаменитый орган Баха, и посетили множество местных ресторанов, где А.М. особенно отмечала вниманием десерты. М.И. прекрасно говорил по-немецки, немецкие коллеги восхищались полным отсутствием акцента. Видимо, это связано с тем, что в семье во Львове знали идиш, а родители М.И., родившиеся в Австро-Венгрии, владели немецким. М.И. выучил французский в школе и свободно читал лекции по-французски во Франции. Его английский – по крайней мере, математический английский, – тоже был вполне хорош; он его выучил гораздо позже. Мои коллеги, пригласившие его сделать доклад в моём университете, рассыпались в комплиментах. Это был мастерски прочитанный доклад, один из очень немногих докладов М.И., который я слышал.

М.И. позже очень интересовался занятиями физикой моей дочери, Инны. Она получила степень бакалавра, а потом и PhD. по экспериментальной физике в Стэнфорде. Его радовали её работы по физике, опубликованные в хороших физических журналах. Инна бегала марафоны с неплохим, хотя и любительским, временем (её рекордное время было 3 часа 5 минут). Это, естественно, требовало ежедневных тренировок. М.И. подобные серьёзные занятия спортом не одобрял и несколько раз настойчиво советовал их прекратить. Сам он прекрасно играл в теннис, но относился к этому, как к отдыху, и, отчасти, как к развлечению. В его жизни почти всё было подчинено научным занятиям. Моя дочь его советам не вняла. Она стала профессиональным физиком-экспериментатором в области высокотемпературной сверхпроводимости. В настоящее время Инна – профессор физики в Калифорнийском университете (Дэвис).

Отдельно расскажу о воскресных прогулках. М.И. имел обыкновение гулять каждое воскресенье в Подмосковье. Чаще всего, с одной железнодорожной станции и до другой, обычно расположенной на другой ветке. Его знание Подмосковья было феноменальным. Иногда это были довольно длинные прогулки, километров 20, а если зимой на лыжах, то и 25–30. Главным его партнёром по пешим прогулкам был И.А. Овсеевич, но в разные годы к ним присоединялись другие друзья: В.М. Штейн, Додик Ивинский, А.Я. Повзнер, Сава Гольдин и другие. Я участвовал больше в зимних походах на лыжах. Центральным моментом воскресной прогулки был завтрак (ланч). Доставались из рюкзаков припасы и термосы с чаем. Беседа часто заходила о политике, звучали последние политические (а также бытового свойства) анекдоты. Неиссякаемым источником анекдотов и прибауток (не всегда приличного свойства) был Иосиф Абрамович Овсеевич, муж сестры А.М., Виталии Моисеевны (Тали). По части политических взглядов среди друзей наблюдалось полное единодушие с одним интересным исключением. А.Я. Повзнер, замечательный математик и интересный оригинальный человек, всегда одобрял последнюю линию партии и неизменно находил глубокий смысл в решениях брежневского

Политбюро. Зимой температура порой опускалась ниже $-30°C$, но это не останавливало М.И. Помню прогулки на лыжах с ним в лютый холод в районе подмосковной Балашихи. Заблудиться на долгом пути от станции до станции без очевидных ориентиров было несложно. У М.И. были твердые принципы, как и у кого узнавать своё географическое положение и путь (направление) к конечной цели. Среди толпы пассажиров электрички М.И. и его друзья выделялись крайне ободранным видом, ветхими одеждами, заштопанными и дырявыми куртками. Однако, в противоположность многим пассажирам, они были трезвыми. Думаю, М.И. понравилась бы гениальная повесть (поэма) Венедикта (Венечки) Ерофеева "Москва – Петушки". Но он её, к большому сожалению, не читал.

Зимой 1973 г. мы с М.И. были в подмосковном посёлке Мозжинка, в доме отдыха, который использовал для жилья академические дачи, подаренные Сталиным академикам и членам-корреспондентам АН СССР. С нами отдыхал М.И. Граев, с которым мы много общались. Лыжные прогулки, в том числе, по льду Москвы-реки, оставили волшебные воспоминания. Помню беседу М.И. с Д.В. Аносовым, который подсел за наш стол за обедом. Д.В. в разговоре обозвал М.И. "Урчапистом", в ответ М.И. заметил: "А что, "обыкновенщик" разве звучит лучше?" М.И. высоко ценил знаменитые на весь мир работы Д.В. Аносова по "У-системам". В Мозжинке М.И. узнал трагическую новость о кончине И.Г. Петровского.

После смерти моей мамы в 2009 году жизнь М.И. сильно изменилась. Мама перед смертью долго болела, точную природу заболевания врачи установить не смогли. Помню, я посещал её в больнице недалеко от станции Лосиноостровская. М.И. был с ней в палате всё время, ночевал там же, в больнице. Он же договаривался в врачами и медсёстрами о процедурах. Когда её не стало, он продолжал работать, как всегда, дисциплинированно и с жёстким расписанием. Но как-то заметил года через два после смерти мамы: "Асенька полностью освободила меня от быта". Эта фраза допускает многозначную интерпретацию, просто помещу её здесь без комментариев. М.И. был достаточно крепок для дальних прогулок. В мои приезды в Москву мы с М.И. могли довольно далеко гулять по Нескучному Саду, спускались к Москве-реке, в Парк Культуры.

Подхожу к последней и самой трудной части заметок. М.И. мужественно встретил неизбежное угасание сил и работоспособности в преклонном возрасте. Не один раз в личном разговоре со мной он говорил, что относится к смерти без ужаса. Года за два до смерти он сказал мне прямо: "Я нахожусь на финишной прямой". Сказал совершенно спокойным голосом, как об очевидном ему факте. Он пытался, насколько мог, разумным образом распределить силы и работать, хотя бы в первой половине дня. В этот период он много слушал музыку и, к сожалению, смотрел телевизор, иногда даже политические программы. Вспоминаются великие стихи греческого поэта:

Час роковой настает, – и являются чёрные Керы

К людям: у первой в руках – старости тяжкий удел,

Смерти удел – у другой.

Сохраняется очень недолго

Сладостный юности плод: солнце взошло – и увял.

(Мимнерм, вторая половина VII в. до н. э.; перевод В.В. Вересаева.)

В этот период я разговаривал по телефону с М.И. каждый день. Его память об отдельных событиях далеко в прошлом и о знакомых людях была поразительной. Но воображение рисовало ему порой события, в которых он не мог принимать участие. Мне представляется, М.И. от природы был наделён сильным организмом, крепким здоровьем и высоким уровнем энергии.

Малярия, которой он переболел в годы войны, и болезнь печени оказали своё отрицательное влияние. Но, мне кажется, он мог прожить намного дольше просто из-за исключительной крепости организма. Но врачи говорят, что от инсульта умирают даже и в молодом возрасте.

Глава 2

Встречи с Марком Вишиком

Екатерина Каликинская

Член Союза писателей РФ, член союза журналистов Москвы

Марк Иосифович Вишик был научным руководителем моего мужа Владимира Чепыжова, когда тот учился на мехмате МГУ. Впоследствии они работали вместе в течение почти 30 лет. Поэтому, не будучи математиком, я нередко общалась с ним – говорила по телефону, встречалась в совместных поездках и на немногочисленных общих праздниках. В последние годы его жизни, когда Марк Иосифович остался без своего верного друга и преданной супруги, мы с мужем решили навещать его регулярно, чтобы скрасить подступившее одиночество; так же поступали и многие другие его знакомые. Без преувеличения могу сказать, что Марк Иосифович любил поговорить со мной о делах житейских, вспоминать об Асе Моисеевне, друзьях и родных, рассказывать о своей молодости, о замечательных встречах, которыми была так богата его жизнь. У нас возникла идея записать беседы с ним и потом оформить их в виде книги. К сожалению, встреч с ним предстояло уже не так много. Последняя наша беседа состоялась в январе 2010 г. Книги не получилось, но получилась статья, опубликованная на английском языке в [Kal14] в виде интервью с Марком Иосифовичем.

В этой статье я попыталась на материале наших бесед передать его воспоминания о людях, которые играли важную роль в его жизни.

Иван Георгиевич Петровский

Он был для Марка Иосифовича человеком, который деятельно и сердечно помогал ему в трудных ситуациях в начале и середине его научного пути, великим учёным и руководителем, память о котором Марк Иосифович хранил благодарно и благоговейно. Для него это был и человек-легенда, и в то же время близкий человек, которого он всегда старался понять, которого вспоминал чаще других.

Марк Вишик рассказывает: Когда в 1945 году я переехал в Москву, то всё время я проводил в старом здании университета на Моховой. Петровский тогда был деканом механико-математического факультета и заведующим кафедрой дифференциальных уравнений. Он читал в университете лекции по уравнениям с частными производными и написал три книги, посвящённые обыкновенным дифференциальным уравнениям, уравнениям с частными производными и интегральным уравнениям. (В это время ректором университета был некий Галкин, которым в университете были недовольны.) Иван Георгиевич произвёл на меня с первого взгляда огромное впечатление. Я знал, что это крупнейший учёный, в “Успехах математических наук” читал его только что вышедшую статью, где он изложил основные направления развития математики в ближайшее время.

Я ежедневно бегал на своих двоих из дома своей жены на Сивцевом Вражке до университета. Не пропускал ни одного семинара Петровского, ни одной его лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными! На семинарах Петровского в основном выступали его ученики. Помню Геню Ландиса, который ходил на семинары в военной форме. Там были также Ольга Олейник, Анатолий Мышкис. Был ещё малый семинар.

Ко мне Иван Георгиевич отнёсся очень доброжелательно, несмотря на то, что я тогда не очень хорошо говорил на русском языке, поскольку кончил польскоязычную гимназию во Львове, хорошо знал украинский и немецкий, а русский стал учить в Грузии, так что он был у меня своеобразный. Но научную литературу на русском языке я читал свободно.

Семинар Петровского проходил на очень высоком уровне. Он следил за тем, чтобы темы семинаров касались общих крупных проблем, он сам был один из тех, кто решил одну из проблем Гильберта. Многие решали эти проблемы для частных случаев, например, Сергей Натанович Бернштейн, а Иван Георгиевич доказал её для общих систем.

Обстановка на семинарах Петровского была необыкновенно дружеская, и каждую неделю были докладчики. Но в те дни, когда их почему-то не хватало, я всегда вызывался сделать доклад, и Иван Георгиевич очень ценил такую мою деятельность на его семинаре, и порой по-отечески опекал меня.

Я был счастлив, что оказался в Московском университете. Прежде всего меня поразил высокий уровень математики в МГУ. Поэтому я ходил на все семинары, какие только было можно – и к Абраму Иезекииловичу Плеснеру, и к Лазарю Ароновичу Люстернику, и к Израилю Моисеевичу Гельфанду. А также на заседания Московского математического общества, на лекции для студентов, которые в качестве общественной нагрузки читали известные математики, например Андрей Николаевич Колмогоров. В то время я занимался математикой по двенадцать часов в день.

Иван Георгиевич сыграл важную роль при защите моей кандидатской, а также и докторской диссертации. Когда в 1947 году я подготовил кандидатскую, он сам стал её оппонентом. Другим оппонентом был академик Сергей Львович Соболев, с которым я познакомился в 1946 году.

Петровский с большой добротой помог мне и в 1951 году, когда я закончил докторскую диссертацию. Официально я был прикомандирован к Институту им. В.А. Стеклова и отнёс свой труд куда положено. Я никогда не интересовался никакими интригами, вообще человеческими отношениями, и мне было невдомек, что место это совсем для меня неподходящее. В ту пору я совершенно не представлял себе, что людей с пятым пунктом в анкете в Стекловском институте очень не любят, что нечего даже и думать там защищаться!

Учёный секретарь принял мои бумаги, но сухо сказал, что Учёный совет очень загружен. Он даже отказался брать у меня все четыре экземпляра диссертации, а взял только один, добавив, что мне позвонят, когда дело сдвинется с мертвой точки. Я загрузил "ненужные" три экземпляра в портфель тестя (своего у меня в ту пору не было) и пошёл домой. Было это в январе месяце. Конечно, никаких звонков мне не последовало. Дело казалось безнадёжным. Прошло полгода – молчание. Как-то на семинаре Петровский меня спросил, как продвигается дело с моей докторской диссертацией. Я поведал, что жду звонка из Стекловки. Тогда Иван Георгиевич, ни слова мне не сказав, сел на свою ректорскую машину и поехал к академику Ивану Матвеевичу Виноградову высказать своё мнение обо мне и моей научной работе. И в тот же день мне позвонил учёный секретарь! Он потребовал, чтобы я немедленно принёс характеристику, остальные три экземпляра диссертации... Процесс пошёл! Разговор мой с Петровским был где-то в июне, учёный совет летом не заседает. Но в октябре я уже защищался.

Академик Виноградов не мог не послушаться академика Петровского: у него было всего пять этажей в институте, а у Петровского, который к тому времени стал ректором МГУ, чуть побольше. А в будущем стало и совсем много.

Этот эпизод очень характерен для Ивана Георгиевича. Он всегда активно вмешивался в то, что казалось ему несправедливым. При этом действовал быстро и решительно, не дожидаясь, что его об этом попросят. Например, его ученик Геня Ландис, которому пятый пункт также “мешал” работать в МГУ, был зачислен на кафедру дифференциальных уравнений только по личной инициативе Петровского.

Запомнился и такой эпизод из моей молодости. Когда я ещё учился в университете, учебник Петровского по уравнениям с частными производными только готовился к изданию, и нам раздавали на лекциях листы из будущей книги. Один студент нашёл в учебнике ошибку и сказал об этом Ивану Георгиевичу. Петровский не только поблагодарил его за это, но и выразил студенту благодарность в тексте учебника. Вот каким он был человеком! Истина для него была важнее всего.

Иван Георгиевич совсем не изменился, когда стал ректором университета. Каким он был деканом – заботливым, человечным – таким же он стал и ректором. Ему не раз предлагали быть ректором, но он отказывался, потому что он хотел заниматься научной работой и в то время активно работал в науке. А в годы войны, когда университет был эвакуирован в Казань, Петровский был деканом мехмата и показал себя отличным руководителем. Он заботился не просто об абстрактных вещах, а именно о куске хлеба для каждого сотрудника. И во время войны ему ещё раз предложили стать ректором. Но он снова отказался.

Тогда партийные деятели МГУ пошли на приём к товарищу Сталину и доложили, что предыдущий ректор не устраивает университетскую общественность. Сталин якобы спросил:

– Есть человек, который был бы и крупным учёным, и хорошим руководителем?

– Есть, но он отказывается.

– Назовите его фамилию.

– Иван Георгиевич Петровский.

Согласно легенде, Сталин взял листок бумаги и написал на нём: “назначить ректором МГУ И.Г. Петровского”. И в тот же день Ивана Георгиевича стали поздравлять с назначением его коллеги, хотя официально объявлено ещё не было, требовался ещё долгий путь введения его в должность. Но отказаться он уже не мог. К тому же Петровский всегда думал о том, как больше пользы принести университету. Однажды Иван Георгиевич сказал мне: “Я решил: если я останусь заведующим кафедрой, я сделаю десятки крупных научных работ, а если стану ректором – в университете будут сделаны тысячи таких работ”. Это решило дело.

Благодаря Петровскому я стал преподавать в МГУ, хотя не сразу. После окончания университета меня направили в Московский Энергетический институт, но в 1951 году всех профессоров с пятым пунктом, кроме членов партии, стали увольнять. Например, В.И. Левина, зав. кафедры высшей математики в МЭИ, уволили. Я тоже был в списке на увольнение. Но ректор, профессор Михаил Григорьевич Чиликин, меня вычеркнул, поскольку я делал большую работу. На место Левина назначили Н.А. Леднёва, такого математического Лысенко. Он на каждом семинаре и заседании кафедры громил Петровского и Соболева и обещал выгнать всех, кто с пятым пунктом. А про меня кто-то пустил слух, совершенно несправедливый, разумеется, что я – лучший друг Леднёва. И благодаря этому меня не уволили.

В 1965 году Петровский решил обновить свою кафедру и стал советоваться с Гельфандом, кого взять для укрепления преподавательского и научного состава. Тот сказал: “Ясно кого – Вишика!” Иван Георгиевич осторожно спросил: “Но ведь он лучший друг Леднёва?” “Кто Вам сказал? Это неправда. Более надежного человека, чем Вишик, не знаю”, ответил Гельфанд. Это решило дело. В тот же день Петровский позвонил мне домой и сказал, что я должен сделать, чтобы стать профессором его кафедры. И уже в июне я им стал.

Наши отношения были очень хорошими до конца его дней, я часто бывал дома у Ивана Георгиевича, был хорошо знаком с его женой Ольгой Афанасьевной. Он был очень образованным, очень культурным человеком. И неожиданно для меня – человеком верующим. В одной из комнат у него висело большое полотно Корина с изображением каких-то монахов.

Впечатление от этой картины у меня было огромное.

Петровский очень любил музыку Баха. Я помню, как один аспирант возмущался: приходишь к Ивану Георгиевич, а он два часа может слушать Баха! Одного Баха. Он считал, что это кладезь. Я тоже очень люблю Баха. Его можно слушать даже после Бетховена. Но когда мы ездили в Париж с Ольгой Арсеньевной Олейник, то Иван Георгиевич просил всегда, чтобы мы тайком привезли ему на пластинках богослужебные песнопения православной церкви.

У меня в то время возможность ездить за границу была тоже благодаря Ивану Георгиевичу. В 1967 году Игорь Ростиславович Шафаревич, большой математик, приехал из научной командировки из Франции и сказал: “Французы хотят пригласить Вишика”. Мы в ту пору занимались очень интересными вещами с Гришей Эскиным и Михаилом Семёновичем Аграновичем. И французы меня знали очень хорошо, потому что Жак-Луи Лионс, их руководитель, талантливый руководитель и организатор, глава направления, был учеником Лорана Шварца, который ввёл в науку обобщённые функции, используя результаты Соболева. Они пользовались сразу обобщёнными функциями и очень нас опережали. У нас Ладыженская работала в H^1, а они работали в H^s – целая шкала пространств до бесконечности.

Когда я впервые в 1967 году поехал во Францию, это было очень сложно организовать. Но И.Г. Петровский послал меня в обмен на какого-то французского гостя, кого – не знаю, не интересовался. Иван Георгиевич лично ручался за меня. Тогда были на этот счёт строгие правила. Одна дама в администрации университета занималась только тем, что командировки за рубеж оформляла, соблюдая эти правила. Например, можно было провести за границей не больше месяца в год. Если две недели провёл в Болгарии, то можно потом ещё две недели в Швеции. Был случай, когда я был приглашён Ларсом Гордингом на месяц, но уже “потратил” две недели, и дама мне сказала: “Я бы с удовольствием, Марк Иосифович, но не могу: вам положено только месяц в год”.

А Ивану Георгиевичу было всё равно – еврей ты или русский, православный или другого вероисповедания, бунтарь или лояльный к власти человек. Ему было важно одно: чтобы в университете работали самые способные люди.

Иван Георгиевич до последних дней руководил и кафедрой, и семинаром. На семинары он порой очень сильно опаздывал, мы ждали его иногда по часу. Ничего не поделаешь – ему нужно было решать огромные административные проблемы. Но он всегда приходил. К концу доклада обычно спрашивал у выступавшего, насколько налагаемые им условия являются существенными. Он уважал только настоящие теоретические работы. А с другой стороны, очень приветствовал прикладные исследования, например, по математической физике. Помню, очень понравился ему доклад профессора Сергея Константиновича Годунова из Новосибирска, который впоследствии стал академиком.

Когда Петровский был ректором, к нему на приём можно было попасть в любое время. У него не было дней или времени приёма – он всегда был открыт людям и проблемам университета.

Иван Георгиевич, по-моему, был велик и как руководитель. Его интересовало только одно – чтобы человек принёс университету пользу. Не играла роль ни национальность, ни партийность, ни происхождение – только научный вес. Его друзьями были Гальперн и Крейнес. В то время шла компания против евреев в науке, и на физический факультет уже давно не принимали ни преподавателей, ни студентов с пятым пунктом. А Иван Георгиевич настоял, чтобы на физфаке начали преподавать Ландау и Лифшиц – они сами и не очень-то хотели отвлекаться от науки. Но по инициативе Ивана Георгиевича сделали такое великое дело. Академик Шкловский как-то подсчитал, что за время своего ректорства Иван Георгиевич сделал не менее 10 тысяч добрых дел.

Все эти заботы сократили его жизнь на несколько лет. Ведь у него было больное сердце, но он не жалел себя, до всего доходил сам. Например, боролся за то, чтобы для приёма в университет сдавали не один устный и один письменный экзамен, а два письменных. На устном экзамене кого угодно можно было завалить. По этому поводу Иван Георгиевич постоянно ходил в ЦК партии, просил изменить процедуру экзаменов. Ему отвечали: "Вы, Иван Георгиевич, крупный учёный и руководитель, но вопрос, сколько экзаменов сдавать в университет – не ваш вопрос". Во время одного из таких приёмов ему стало плохо, у него случился сердечный приступ прямо в вестибюле здания ЦК. Он упал на пол. Его стали поднимать: служащие пытались посадить его на стул – нехорошо тут лежать, не положено. Если бы вызвали сразу врачей и не поднимали, может быть, и удалось бы спасти. А из-за этой проволочки получилось так, что упустили драгоценное время.

Я не помню, чтобы Петровский когда-нибудь праздновал свои юбилеи. Но я очень хорошо помню его похороны. Играл великий скрипач Леонид Коган – "Элегию" французского композитора Жюля Массне. Я стоял прямо за его скрипкой. Приехали специально из ЦК партии – Михаил Андреевич Суслов. Я чуть вышел из зала, чтобы посмотреть, что творится, как вдруг стали всех теснить и говорить: "Проходите, проходите". Так страховали приход Суслова и хотели, чтобы лишних людей там не было в этот момент. У них были свои правила.

Стефан Банах

Ещё один человек-легенда, с которым Марку Иосифовичу Вишику посчастливилось познакомиться в юности. Гениальный учёный и профессор университета, с лекций которого, возможно, началось знакомство Марка Иосифовича с наукой. А также – человек одного с ним духа, одних жизненных целей.

Марк Вишик рассказывает: Во Львовском университете, в который я поступил в 1939 году, деканом математического факультета тогда был Стефан Банах, гениальный математик. Кроме него, нам преподавали самые выдающиеся профессора Банаховской школы: Бронислав Кнастер – аналитическую геометрию, Юлиус Шаудер – теоретическую механику, профессор Станислав Мазур – дифференциальную геометрию. Профессор Владислав Орлич читал лекции по алгебре. Всё это преподавание было на польском языке. Только заместитель декана профессор Мирон Зарицкий читал на украинском.

Я ходил на все лекции Банаха, и они вызывали у меня чувство необыкновенного счастья: я могу учиться в таком университете! Ведь Банах уже при жизни считался первым классиком польской математики...

Однако показывать своё величие – это было ему не свойственно. Ему были свойственны простота, дружелюбие и веселость, у него было прекрасное чувство юмора. Когда шёл его семинар, он постоянно вмешивался, задавал вопросы, мог дружелюбно подшутить над докладчиком. Но никто этого не боялся, общая атмосфера была очень веселая и располагающая. Ещё Банах любил перед семинаром спрятать портфель профессора Станислава Сакса, чтобы потом тот его искал и можно было немного повеселиться по этому поводу.

Каждый день они с профессором Зарицким отправлялись обедать, и когда возвращались, было ясно, что они позволили себе немножко и выпить. Он был очень жизнелюбивым человеком, большим, шумным, громогласным.

У него была требовательная жена, отчасти из-за этого он писал не только научные книги, но и учебники для средней школы, а также книги по механике. Но это было ко всеобщему благу: на его прекрасных учебниках выросло не одно поколение. Профессор Шаудер читал нам прекрасные лекции по книге Банаха. Нам очень повезло, что мы учились по этим книгам. Шаудер тоже очень уважительно обращался со студентами: каждый раз перед новой лекцией просил, чтобы кто-то из студентов, кто хочет, изложил основы предыдущей лекции или теоремы, которые были пройдены. И только после этого начинал следующую лекцию.

Большое впечатление произвели на меня также семинары Абрама Плеснера, он репатриировался из Варшавы в Россию, и потом я с ним встретился в МГУ, где он стал профессором. Помню, он дал мне реферировать статью Германа Вейля (считалось, что после Гильберта он будет руководить в Гёттингене). Тогда считалось хорошим тоном, сделав работу, отправляться с докладом к Гильберту в Гёттинген.

Однажды Банаха и Шаудера вызвали в Киев и поставили им задачу "советизировать" Львовский университет. Вернувшись, они ничего особенного не сделали по идеологии, а решили усилить работу так: решили организовать студенческие конференции, которых у нас тогда не было. Профессор Эдвард Шпильрайн собрал студентов и рассказал нам про хаусдорфовы пространства. Так было положено начало студенческим конференциям. Банах тоже посещал эти конференции и очень весело реагировал на студенческие замечания по этим вопросам.

После войны, в 1945 году в Москве, я ещё раз виделся с Банахом. Его пригласил приехать академик Колмогоров, который хотел, чтобы Банах преподавал в МГУ. Банах тогда остановился в университетской гостинице на Тверской, и я туда к нему приезжал. Он был неузнаваем – сильно похудел, стал каким-то плоским, одномерным. Рассказывал, что в годы войны спасся тем, что кормил вшей. Фашистские врачи во Львове ставили эксперименты на людях: изучали действие вшей на организм, чтобы спасти от них свою армию. И кто-то устроил Банаха к этим врачам, чтобы спасти его от гибели.[1] Ему привязывали на руку мешочек со вшами, и он должен был их кормить. За это ему даже как-то платили, так что он мог поддерживать семью и выжить сам.

Но тогда все эти ужасы остались позади, и первое, о чём меня спросил Банах: что я читал по математике во время войны? Я описал ему мои научные интересы, и он сказал: "Будьте как Шаудер – занимайтесь методами функционального анализа и дифференциальными уравнениями".

В тот же год Банах умер от рака лёгких. Он очень много курил.

В 50-е годы я ездил читать лекции в центре имени Банаха, в Математическом институте польской Академии наук. Меня пригласил ученик Банаха профессор Владислав Орлич – он был профессором в Познани, потом вернулся в Вроцлав. После лекций мы с ним обсуждали, как нужно помогать аспирантам. В то время было очень строго и в Польше, и у нас – руководитель аспиранта должен был обеспечить ему защиту кандидатской диссертации. Орлич спросил, сколько у меня аспирантов. Я ответил – шесть. У него тоже было шесть. Он спросил ещё, что я делаю, если аспирант не дотягивает. Я сказал, что помогаю. Он признался, что тоже помогает. Мы были счастливы, что делаем одинаково.

Жак-Луи Лионс и Жан Лерэ

К своим замечательным французским коллегам Марк Иосифович относился доброжелательно и с уважением, но иногда любил над ними добродушно пошутить. Многие из них были моложе его и, по его мнению, нередко шли по проторенным им путям. Марк Иосифович, по природе своего выдающегося ума, был первооткрывателем, часто "прокладывал путь по целине" в науке, и его идеи ложились в основу фундаментальных работ других учёных. Он говорил об этом с доброй улыбкой, без какой-либо обиды. В работе французских математиков многое ему импонировало, да и личные отношения складывались очень тепло.

Марк Вишик рассказывает: В 1967 году я впервые оказался во Франции, в парижском университете "Париж 6". Жак-Луи Лионс, профессор этого университета, написал пять или

[1] Во время нацистской оккупации Львова польский биолог Рудольф Вайгль, изобретатель вакцины от тифа, директор львовского Института эпидемиологии, в обязанности которого входило производство вакцины, добился разрешения под свою ответственность нанимать на работу сотрудников по своему усмотрению и использовал эту возможность для спасения многих людей. (*Прим. ред.*)

шесть книг, исходя из наших совместных работ с Соболевым и моих работ. Когда-то я придумал, как решать эти задачи и написал академику Соболеву. А он взял и сам приехал ко мне домой. Я тогда ещё жил у родителей жены на Сивцевом Вражке, в одной комнате с двумя детьми. И вот приезжает академик, на черной "Волге" с шофёром, и садится рядом со мной за один стол решать задачи. В этом эпизоде видно, каким Соболев был настоящим большим учёным. Он был счастлив заниматься чистой наукой, ему надоела работа в Курчатовском институте, где он заведовал отделом,[2] и были безразличны условности. Соболев занимался обобщёнными задачами для гиперболических и для эллиптических уравнений.

У нас вышли две заметки по этому поводу, а Жак-Луи Лионс и Энрико Мадженес после много работали и написали три тома по этой теме. Соболев предлагал написать на эту тему статью побольше, но я не мог, потому что в это время работал с Люстерником над пограничным слоем, к тому же считал, что в наших заметках уже всё есть.

Приняли меня во Франции замечательно. Французских математиков очень интересовало, чем мы занимаемся и что мы думаем. Там был молодой человек, Ален Аро, который заинтересовался моими исследованиями и после сделал по этой тематике очень хорошую работу. Мы с ним стали друзьями.

Лионс тогда был довольно молод. Он был очень образованным человеком. У французов есть одна замечательная черта: они очень много знают и великолепно эрудированы. У нас чаще человек сам всё придумывает, а эрудиция не важна. У них сочетается обычно и эрудиция, и собственный талант. И это имеет корни во французской истории: в XIX веке во Франции было много великих математиков: Лаплас, Лагранж, Коши, Галуа. Французские математики глубоко образованные люди, и их очень интересуют новые идеи.

Лионс происходил из города Грасс, где его отец был мэром города. Когда пришли фашисты, они первым делом арестовали его отца, чтобы он не организовал сопротивления, и он всю войну просидел в тюрьме. А сам Лионс, хотя и был в ту пору 15-летним парнем, пошёл в маки – партизаны. И партизанил в горах против фашистов.

Он ко мне очень хорошо относился и пригласил к себе домой. Пока жена его готовила этот приём, она звонила, чтобы мы задержались на пару часов, потому что она не успевает всё как следует сделать. Тогда Лионс пришёл в мой кабинет и сказал: расскажите мне тогда пока про интерполяцию. Я пошёл к доске и стал объяснять.

Наконец мы отправились домой к Лионсу, куда пришли ещё известные французские профессора и сказали: "Марк Иосифович, как мы вам благодарны! Мы первый раз дома у Лионса благодаря Вам. Если бы не Вы, мы бы тут не побывали".

А Лионсу когда-то подарили винный погреб в Грассе. В таком погребе хранится вино 40-летней давности. Но если ты берёшь оттуда бутылку, ты должен заложить взамен бутылку одного из лучших вин ближайшего года. Это французский закон: погреб должен жить для будущих поколений. И Лионс иногда привозил из Грасса запылённые старинные бутылки, заворачивал их в прекрасную бумагу и после угощал знатоков.

К сожалению, я не гурман и ничего не понимаю ни в еде, ни в вине. Вообще не гожусь для таких дегустаций, потому что у меня больная печень с военных лет, в Дагестане я болел малярией, ел хинин, от которого и слух портится, и печень. Поэтому я не могу пить хорошего вина. Как-то после моей лекции в Коллеж де Франс меня пригласили в знаменитый ресторан на берегу Сены, где хозяева сами делают вино из виноградников на берегу. Меня хотели удивить вином знаменитой марки. Всем торжественно разлили вино в бокалы. А я на глазах у изумлённых французов разбавил его водой. Под крики: "Что вы делаете? У вас же лягушки заведутся в животе!" А я, к сожалению, не мог пить этого вина из-за больной печени.

Когда я посетил Коллеж де Франс, там руководил кафедрой академик Жан Лерэ. Он

[2] С.Л. Соболев был заместителем И.В. Курчатова в реализации атомного проекта в СССР.

работал вместе с Шаудером, моим первым учителем и первым консультантом. И когда я приехал во Францию, он меня сразу пригласил в ресторан. Он очень любил Шаудера, и он знал, как Шаудер погиб: его затравили собаками в гетто. Лерэ пригласил меня в ресторан, и мы говорили на математические темы, он интересовался, чем я занимаюсь, угощал чрезвычайно обильно. Я не привык так есть. Когда после прекрасного обеда дали ещё мороженое и целый тазик с шоколадом, я уже не мог ни к чему прикоснуться.

Лерэ интересовала проблема трёхмерного уравнения Навье–Стокса. Он говорил, что невозможно доказать гладкость решения системы для больших чисел Рейнольдса. В 2000-м году эта проблема была объявлена одной из проблем тысячелетия.

Потом я ещё несколько раз общался с Лерэ. Ему очень нравилось, когда я приезжал и рассказывал свои идеи, он принимал меня всегда восторженно.

Во Франции я впервые понял, что новая идея – огромная ценность. У нас в Москве в то время так не считалось. Я докладывал на семинарах Петровского, Тихонова, Люстерника, Плеснера и везде рассказывал о том, что у меня выходит, не думая о том, опубликовано или нет, сдано ли в печать, не говоря уж о том, что работа ещё год могла лежать в редакции, ожидая очереди на опубликование. У французов же самым неприличным вопросом был вопрос: скажите, чем вы сейчас занимаетесь? Это тайна, спрашивать об этом неприлично. Прошлое, уже опубликованное – пожалуйста.

Итак, во Франции я понял цену новых идей. Я по природе своей генератор идей и не любил читать много. Я считаю себя малообразованным математиком: хотя ходил на много семинаров, но статьи читать не любил. Что-нибудь своё придумаю и лишь тогда посмотрю – что другие сделали на эту тему. А не наоборот, как принято. Этой моей способности все удивлялись.

Ася Моисеевна Гутерман

Значение этой удивительной женщины в жизни великого учёного переоценить невозможно: она была и женой, и другом, и немножко – матерью (родители Марка Иосифовича погибли в 1941 году в гетто), и хранителем, и катализатором. Марк Иосифович гордился тем, что жена его во время войны работала рентгенотехником, считал её авторитет непререкаемым по медицинским и иным вопросам. Я всегда с удовольствием общалась с Асей Моисеевной – глубоко интеллигентной, тактичной, тонко чувствующей женщиной. Она и её близкие родственники, в первую очередь конечно Иосиф Абрамович Овсеевич, создавали ту среду, в которой Марк Иосифович мог безмятежно существовать. После ухода Аси Моисеевны он, как "простой смертный", стал более уязвим для травм и болезней, стала слабеть его память, лишённая общих воспоминаний. Хотя ему был обеспечен хороший уход и внимание, время от времени Марк Иосифович с удивлением сообщал мне, что "теперь приходится заниматься хозяйством, теперь я знаю, где стоят чашки и заварочный чайник, а при Асеньке я этого не знал". Её неустанной и самоотверженной заботы ему, конечно же, не хватало.

Марк Вишик рассказывает: С Асей мы прожили вместе счастливо и безмятежно 63 года. Были во всём едины с того самого дня, как встретились в День Победы в 1945 году в университете, до её ухода в 2009 году. Я иногда в шутку говорил, что Асенька меня на себе женила и тем спасла от голода и гибели. После той ужасной жизни, которая была у меня во время войны, я попал в прекрасную семью, у меня появился дом. И Ася всегда брала на себя всё, что касается быта, я никогда не знал, где у нас что лежит, откуда что берётся. Я был от всего этого освобождён, чтобы заниматься наукой. Асенька в нашей обыденной жизни была генералиссимусом: она решала все проблемы, кроме научных. И конечно, мне просто невозможно представить, как я буду обходиться без неё...

[Kal14] E. I. Kalikinskaya, *Interview with Mark Iosifovich Vishik*, Communications on Pure and Applied Analysis **13** (2014), 5, i–ix.

Глава 3

Памяти профессора Марка Иосифовича Вишика[1]

Мовлуд Керимов (1925–2017)

Вычислительный центр РАН (Москва)

23 июня 2012 г. на 91-м году жизни скончался выдающийся учёный, математик, всемирно известный специалист в области дифференциальных уравнений, функционального анализа, математической физики Марк (Марко) Иосифович Вишик.

М.И. Вишик во всех этих областях оставил научные результаты, которыми пользуются не только математики-теоретики, но и те учёные, которые широко используют такие результаты в своих прикладных исследованиях. Он публиковал мало работ, непосредственно посвящённых вычислительной и прикладной математике, но его знаменитые теоретические работы, посвящённые асимптотическим методам решения дифференциальных уравнений с большим и малым параметрами, выполненные совместно с его учителем Л.А. Люстерником, широко цитируются в работах по численным методам.

М.И. Вишик опубликовал первоклассные работы, посвящённые уравнениям математической физики (статистическая гидродинамика, системы реакции-диффузии, уравнения Гинзбурга–Ландау, трёхмерные системы уравнений Навье–Стокса, уравнения Шредингера и др.). Широко известны специалистам работы М.И. Вишика и его учеников, посвящённые аттракторам дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

М.И. Вишик родился 19 октября 1921 года в городе Львове (который в те годы относился к Польше). В возрасте 8 лет он лишился отца, и его воспитывала мать. Он учился в гимназии №9 города Львова, а затем в лицее №5, и в 1939 г. окончил лицей. В то время Западная Украина вошла в состав СССР, и М.И. Вишик стал гражданином СССР. Сразу после окончания лицея Марк Иосифович без вступительных экзаменов был принят на физико-математический факультет Львовского университета. В то время Львовский университет был известным математическим центром Европы, где работали такие выдающиеся математики, как Стефан Банах, Юлиуш Шаудер, Станислав Мазур, Бронислав Кнастер, Эдвард Шпильрайн и др. Общаясь с этими учёными, М.И. Вишик впитал первые математические идеи.

В июне 1941 г. фашистская Германия вероломно напала на нашу страну, и её войска быстро приближались к Львову. 28 июня 1941 г. во время дежурства в университете в связи с бомбёжкой университета всем студентам, желающим сражаться с наступающими фашистами, было предложено немедленно эвакуироваться из Львова, даже не заходя домой, поскольку немецкие войска уже вошли в город. М.М. Вишик вынужден был покинуть город, даже не попрощавшись с матерью и другими родными, которые впоследствии все погибли. Так начался длинный и опасный путь Марка Иосифовича на восток, сначала пешком, далее на попутном транспорте; через две недели он добрался до Киева. Просьбу М.И. Вишика о зачислении в Красную

[1] Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики, **54**:1 (2014), 172–173. Печатается с разрешения редколлегии журнала. (*Прим. ред.*)

армию отклонили, так как он много лет жил в Польше, и ему было предложено поехать на Кубань для выполнения сельскохозяйственных работ. В связи с приближением немецких войск Марку Иосифовичу пришлось двигаться ещё дальше, и после многочисленных трудностей он оказался в Махачкале. Здесь его приняли в Дагестанский педагогический институт, и он за короткое время сдал экзамены за весь курс института и получил диплом учителя. Перипетии своих очень трудных странствий по Украине и Кавказу при эвакуации Марк Иосифович рассказал в своём интервью Владимиру Михайловичу Тихомирову и Василию Борисовичу Демидовичу [Дем08]. Автор этих строк к началу войны был студентом Кабардино-Балкарского педагогического института, и к нам в математическое отделение влилась большая группа бывших студентов Львовского университета и других вузов Украины, с которыми до лета 1942 г. мы учились вместе. В августе 1942 г. фашисты подступили к Нальчику, мне вместе с отрядом студентов пришлось эвакуироваться по труднопроходимым горным перевалам в Грузию; мы перенесли лишения, аналогичные тем, которые испытал М.И. Вишик. (В отличие от судьбы М.И. Вишика, моя просьба о добровольном вступлении в Красную армию была удовлетворена, и я служил солдатом до ноября 1945 г.)

В 1942 г. М.И. Вишик (опять с большими трудностями) отправился с полученным дипломом в Тбилиси, поступил в Тбилисский университет, и в 1943 г. окончил университет с золотой медалью. В 1943–1945 гг. он учился в аспирантуре Тбилисского математического института имени Размадзе под руководством профессора (позже академика АН СССР) Ильи Несторовича Векуа. В 1945 г. благодаря исключительным математическим способностям по рекомендации академика Н.И. Мусхелишвили Марк Иосифович перевёлся в аспирантуру Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР в Москве, где он в 1947 г. защитил кандидатскую диссертацию под руководством члена-корреспондента АН СССР Лазаря Ароновича Люстерника. Диссертация была посвящена методу ортогональных проекций для общих самосопряжённых уравнений эллиптического типа. Оппонентами диссертации были академики Иван Георгиевич Петровский и Сергей Львович Соболев.

По приезде в Москву Марку Иосифовичу посчастливилось встретить верного друга Асю Моисеевну Гутерман, с которой он в мире и согласии прожил 63 года; их сыновья Семён и Михаил тоже стали математиками.

Начиная с 1946 г. мы с Марком Иосифовичем Вишиком оказались в аспирантуре одного и то го же института и с одним и тем же руководителем – Л.А. Люстерником. Правда, наша совместная учёба в аспирантуре продолжалась всего один год, но в дальнейшем мы посещали одни и те же семинары по дифференциальным уравнениям в Московском государственном университете, больше всего научно исследовательский семинар трёх академиков: И.Г. Петровского, С.Л. Соболева и А.Н. Тихонова. После защиты кандидатской диссертации в те годы было принято направлять молодого специалиста на работу в определённое научно-учебное учреждение, и М.И. Вишик был направлен на преподавательскую работу на кафедре высшей математики Московского энергетического института, где он работал в 1953–1965 гг. в качестве ассистента, доцента, профессора. Наряду с преподавательской деятельностью М.И. Вишик активно занимался наукой, и в 1951 г. в том же Математическом институте АН СССР успешно защитил диссертацию на степень доктора физико-математических наук. Докторская диссертация была посвящена решению задачи Дирихле для сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений. Эти системы уравнений имеют дивергентную форму порядка 2, симметрическую положительно определённую часть и кососимметрическую часть. По совету Л.А. Люстерника такие системы он назвал сильно эллиптическими. Оппонентами докторской диссертации были три известных учёных: И.М. Гельфанд, С.Л. Соболев и А.Н. Тихонов. В 1965–1993 гг. Марк Иосифович работал профессором на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского университета. В 1993 г. он перешёл в Институт передачи информации имени Харкевича Российской академии наук, где до кончины работал главным научным сотрудником. В 1966–1991 гг. он по совместительству работал также в Институте проблем механики АН СССР, а с 1993 г. до кончины – на кафедре Общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета.

М.И. Вишик являлся всемирно известным специалистом по теории дифференциальных уравнений, по функциональному анализу, по их приложениям. Он внёс большой вклад в теорию краевых задач для эллиптических, параболических уравнений, задач пограничного слоя, нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, псевдодифференциальных операторов, уравнений с бесконечным числом переменных, статистической гидродинамики, теории аттракторов эволюционных уравнений и др. Он опубликовал более 250 научных статей и 8 монографий. М.И. Вишик создал большую математическую школу, в которую входят многие известные учёные, работающие в различных областях математики в нашей стране и в некоторых зарубежных странах. Он персонально был руководителем 57 молодых кандидатов наук, более 10 из которых стали известными учёными, докторами наук.

С 1961 г. М.И. Вишик вёл специальный семинар по дифференциальным уравнениям в Московском университете, на заседаниях которых делали доклады многие известные учёные, в том числе из зарубежных стран. Этот семинар Марк Иосифович считал одним из главных дел своей жизни. Все эти годы семинар проводился каждый понедельник без исключения, вплоть до конца апреля 2012 г., т.е. фактически до последних дней его жизни. Этот семинар собирал цвет математического сообщества, и выступать на его заседаниях считалось весьма почётным делом. Он был также основателем (вместе с М.А. Красносельским) семинара по нелинейному анализу, который продолжает работать до сих пор.

Марк Иосифович особое внимание уделял своим ученикам. Он работал с ними, не считаясь со своим временем: тщательным образом редактировал их статьи, курсовые и дипломные работы, терпеливо учил их всему необходимому. Некоторых своих учеников поддерживал даже материально. Он был удивительно простым и доступным в общении, скромным, благожелательным, объективным. Замечательные научные достижения М.И. Вишика – следствие не только его одарённости, но и исключительного трудолюбия. Его организованность в быту и на работе и самодисциплина поражали всех окружающих. По воскресным дням он отправлялся в поход с друзьями в Подмосковье и ходил 20–30 километров с рюкзаком за плечами. Его интересы были самими разнообразными: музыка, литература, спорт, туризм. Однако главным его увлечением оставалась математика.

Незадолго до кончины М.И. Вишика в Москве 4–7 июня 2012 г. в Институте передачи информации совместно с Московским университетом состоялась посвящённая юбилею Марка Иосифовича международная конференция “Дифференциальные уравнения и их применения” (опубликован сборник тезисов докладов на английском языке), на заседаниях конференции были прочитаны доклады многих учёных, в том числе из зарубежных стран.

М.И. Вишик оставил богатое научное наследие, к которому долго будут обращаться специалисты, и вспоминать его как крупного учёного и замечательного человека.

[Дем08] В. Демидович, *Интервью с М.И. Вишиком*, *Мехматяне вспоминают*, 103–135, МГУ, Москва (2008).

Глава 4

Вспоминая Марка Иосифовича

Леонид Покровский

Московский Государственный Технический Университет имени Баумана

Я поступил в аспирантуру к Марку Иосифовичу в 1964 году во время появления его грандиозного цикла работ совместно с Григорием Ильичом Эскиным по теории псевдодифференциальных уравнений (уравнений в свёртках). Эти результаты произвели огромное впечатление на математическую общественность и вместе с развитой ранее с Лазарем Ароновичем Люстерником теорией пограничного слоя легли в основу научных интересов учеников Марка Иосифовича.

Выдающийся учёный, блестящий лектор, большой эрудит, доброжелательный и отзывчивый человек – таким запомнился Марк Иосифович всем, с кем он сотрудничал или просто общался. Изящество математических рассуждений и выкладок, непревзойдённый юмор, слог и манеры профессионального рассказчика, гагаринская улыбка создавали в аудитории атмосферу маленького спектакля.

Марк Иосифович очень точно характеризовал степень содержательности математических результатов ("по гамбургскому счёту") и не поощрял общих контрпродуктивных рассуждений.

Вспоминая Марка Иосифовича, нельзя не упомянуть о его колоритных репликах, которые быстро расходились на цитаты. Приведу здесь несколько.

О некоторых зарубежных коллегах: – *Это линейная публика.*

Обращаясь к докладчику, которого "доставал" участник семинара: – *Ну скажите ему, что его вопрос законный.*

О нумерации формул (на лекции): – *Надо правильно считать..... один, два, три, ...не пропуская ни одной, ...запишем интеграл энергии, ...да, товарищи, ...и не повторяясь.....*

Советы молодежи: – *Отмечать праздники надо ограниченным образом.*
– *Математикой надо заниматься каждый день....по десять часов, ...а в воскресенье можно отдохнуть........часть дня.*

Отдавая практически всё своё время математике, Марк Иосифович, как человек разнообразно одарённый, находил возможность проявить себя и в других направлениях. В его кабинете постоянно негромко звучало музыкальное радио "Орфей". О его увлечении музыкой и глубоком её понимании, наверное, в этой книге кто-нибудь расскажет более обстоятельно, а я здесь хочу похвалить себя за то, что приглашал Марка Иосифовича на серьёзные лыжные переходы по северу Подмосковья. В одном из них приняла участие Ася Моисеевна и достойно преодолела маршрут более двадцати километров (с небольшой поддержкой на некоторых склонах).

Число благодарных учеников Марка Иосифовича огромно. Это в поэтической форме отметила замечательный математик и педагог Екатерина Фёдоровна Поршнева:

Всё выше и выше и выше
Стремим мы полёт наших птиц;
Тех птиц выпускает нам Вишик,
Пред ним мы склоняемся ниц.

Глава 5

Мой научный руководитель Марк Иосифович Вишик

Зибилле Хандрок-Мейер

Технический Университет Кемниц

В 1963-ом году я приехала из Германской Демократической Республики (ГДР) в Москву, чтобы поступить на механико-математический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. На мехмате было три отделения: математики, вычислительной математики и механики. Я была у математиков, а когда после второго курса надо было определиться с выбором кафедры, выбрала кафедру дифференциальных уравнений.

На третьем курсе у нас были лекции по уравнениям в частных производных. Читал эти лекции М.И. Вишик, и я была в восторге от ясности его изложения. Он был блестящим лектором, который сложные факты математики мог изложить просто и понятно. Поэтому я стала участвовать в семинаре по дифференциальным уравнениям под руководством М.И. Вишика и слушала у него ряд специальных курсов. На семинар под руководством М.И. Вишика ходили тоже мои однокурсники Андрей Фурсиков и Саша Демидов и мои друзья Саша Комеч и Люда Араманович.

На пятом курсе полагалось написать дипломную работу. В то время одним из главных направлений развития в теории дифференциальных уравнений были псевдодифференциальные операторы, и Марк Иосифович предложил мне в качестве темы дипломной работы *Вырождающиеся гиперболические уравнения в свёртках.* Теория символов, которая в это время была совсем новой, давала возможность исследовать такие задачи очень элегантным образом.

После успешной защиты дипломной работы в 1968-ом году я вернулась в ГДР и начала работать в Высшем Техническом Училище Карл-Маркс-Штадта (сейчас Технический университет Кемница). В то время в Карл-Маркс-Штадте группа молодых математиков под руководством профессора Пресдорфа (Siegfried Prößdorf) занималась сингулярными интегральными уравнениями. Я была членом этой группы и в 1973-ом году защитила кандидатскую диссертацию на тему *Некоторые вклады в теорию сингулярных интегральных уравнений ненормального типа (Einige Beiträge zur Theorie singulärer Integralgleichungen nicht normalen Typs).*

Хотя я была в ГДР, связь с МГУ и с профессором Вишиком не прервалась. В сентябре 1973-го года я опять поехала в Москву на годовую стажировку, и посещала снова семинар Вишика. Марк Иосифович обратил моё внимание на его совместные работы с Л.А. Люстерником по асимптотике решений сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных (метод малого параметра или метод Вишика–Люстерника). Он предложил мне подробно исследовать случай, когда кроме малого параметра при старших производных ещё имеются вырождения в коэффициентах при старших производных по независимым переменным дифференциального уравнения. Надо было найти условия, при которых ещё существует асимптотика.

В семидесятые годы Марк Иосифович бывал в ГДР, и я воспользовалась возможностью пригласить его на несколько дней в Высшее Техническое Училище в Карл-Маркс-Штадте. Мы обсуждали математические вопросы, и я показала ему некоторые достопримечательности в окрестностях Карл-Маркс-Штадта; например, замок Аугустусбург. Я помню, что это было ему очень интересно. В 1981-ом году я защитила докторскую диссертацию на тему *Вклад в теорию сингулярно возмущённых уравнений (Ein Beitrag zur Theorie singulär gestörter Gleichungen).*

С 1994-го до 1997-го года я работала в Институте прикладного анализа и стохастики имени Вейерштрасса (WIAS) в Берлине. Этот Институт является наследником математического отделения Академии наук ГДР. Марк Иосифович был в то время членом Учёного совета Института имени Вейерштрасса. Берлинские университеты пригласили его, и я имела возможность встретиться с ним и с его женой Асей Моисеевной. Ася Моисеевна была приятная, очень умная и всем интересующаяся женщина, и я её очень уважала. Мы вели друг с другом долгие интересные беседы.

Последняя личная встреча с Марком Иосифовичем Вишиком состоялась на Берлинском Симпозиуме в декабре 2001-го года, где он 20 декабря получил звание почётного доктора Свободного Берлинского университета (Doktor honoris causa). Присутствующие и я были в восторге от его доклада *The sources of my work*, который он сделал на английском языке. Он мог делать доклады на многих языках: например, по-французски и по-немецки.

Я испытываю глубокое уважение и благодарность к моему научному руководителю профессору Марку Иосифовичу Вишику. Помню его как чудесного человека. Светлая ему память!

Глава 6

М.И. Вишик в моей жизни

Андрей Фурсиков

Мехмат, Кафедра общих проблем управления, Московский Государственный Университет

В 1965 году, когда я был студентом 3-го курса, моим научным руководителем стал Марк Иосифович Вишик. В то время теория линейных уравнений с частными производными, которой он тогда занимался, переживала период бурного развития, и я, вместе с другими его учениками, с энтузиазмом приступил к изучению её основ, а именно – незадолго до того возникшей совершенно удивительной теории обобщённых функций и ряда других разделов. С удовольствием вспоминаю, с каким интересом мы – студенты – изучали эти вещи.

Марк Иосифович вёл не только спецсеминар для студентов: уже тогда работал его знаменитый общемосковский научный семинар. Многих знаменитых математиков мне удалось впервые увидеть именно на этом семинаре. В то время одним из главных направлений развития в теории уравнений с частными производными была теория псевдодифференциальных операторов, и многие учёные во всём мире, включая участников научного семинара М.И. Вишика, ею активно занимались, рассказывая на семинаре свои результаты.

Я пытался овладеть этой теорией, слушая эти доклады и читая соответствующие статьи. Однако по настоящему глубоко понять её мне удалось лишь благодаря тому, что на 4-м курсе я слушал замечательный спецкурс М.И. Вишика на эту тему. Ведь Марк Иосифович глубоко понимал теорию псевдодифференциальных операторов, будучи одним из основных её создателей. При этом он был блестящим лектором, который совершенно нетривиальные факты этой теории смог изложить исключительно просто и понятно.

Мне сильно повезло, что я слушал эти лекции. Дело в том, что на 4-м курсе Марк Иосифович предложил мне заняться изучением вырождающихся эллиптических операторов. Через некоторое время, после чтения одной замечательной работы В.А. Кондратьева о параболических уравнениях, мне удалось понять, что теорию псевдодифференциальных операторов можно эффективно использовать для изучения одного класса вырождающихся эллиптических уравнений. Эта идея оказалась новой и была мной использована в моей дипломной работе и кандидатской диссертации.

Большой удачей моей жизни я считаю многолетнюю совместную научную работу с Марком Иосифовичем (с 1973 по 1979 годы). В тот период, естественно, мне удалось узнать его гораздо ближе. Безусловно, научная работа была смыслом его жизни, и ей было подчинено всё. Распорядок дня был жёсткий: подъём в 7 утра, далее зарядка, завтрак, а с 9 утра и до 7-8 вечера – работа, с перерывом на обед. Далее ужин и прогулка перед сном. По воскресеньям – прогулки 20–30 км в Подмосковье. И во всём Марка Иосифовича поддерживала его супруга – Ася Моисеевна, всю жизнь посвятившая созданию необходимых условий для его научной работы. Она воистину была его ангелом-хранителем.

В годы нашей совместной работы обычно мы встречались у него на квартире 1–2 раза в неделю и целый день вместе решали очередные математические проблемы. Да и в остальные дни каждая свободная минута использовалась на общее дело. Эта работа приносила большое удовлетворение и радость. И сейчас те годы мне вспоминаются как очень счастливые.

Мы начали нашу совместную деятельность с решения задачи о построении первых интегралов квазилинейных параболических уравнений (поставленную Марком Иосифовичем), которые являются решением соответствующего линейного уравнения в частных производных от бесконечного числа переменных. Мы и строили эти первые интегралы как решения указанных уравнений, аналитически зависящие от начальных условий. Довольно быстро стало ясно, что с помощью функционально-аналитических разложений по начальным условиям можно строить и решения квазилинейных параболических уравнений [95–101], [103–106].[1] Расширяя класс исходных параболических уравнений, мы перенесли построенную теорию первых интегралов и метод построения решений с помощью функционально-аналитических разложений и на случай системы Навье–Стокса, описывающей течение вязкой несжимаемой жидкости [102], [107–110]. Таким образом мы от абстрактной теории уравнений от бесконечного числа переменных перешли к весьма интересному и содержательному разделу математической физики.

Следует отметить, что к тому времени, помимо огромной литературы по статистической гидромеханике, написанной на физическом уровне строгости (см. [МЯ65, МЯ67] и цитированную там литературу), уже были известны математически строгие работы Ч. Фояша [Foi72, Foi73]. Мы начали заниматься этой областью, рассчитывая использовать в ней нашу теорию первых интегралов и функционально-аналитических разложений. Эти планы полностью оправдались, причём, помимо прямого перенесения указанных фактов, была впервые построена математически строгая теория моментов статистических решений в случае малых чисел Рейнольдса: определены моменты, выведена бесконечная цепочка уравнений для моментов, доказана её однозначная разрешимость, а также сформулирована и решена проблема замыкания бесконечной цепочки моментных уравнений [132].

Гораздо более существенным в гидродинамике является случай больших чисел Рейнольдса. Для случая произвольных чисел Рейнольдса нами были разработаны новые методы, позволившие математически обосновать существование пространственно-однородных статистических решений [111, 112, 114, 116], [123–127], [130, 132]. Пространственно-однородные статистические решения – точнее, соответствующие им моментные функции, – возникают во многих важных прикладных исследованиях по статистической гидромеханике. Они заданы на всём пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, причём имеют бесконечную энергию. Это обстоятельство делало неприменимыми к пространственно-однородному случаю имеющиеся на тот момент методы доказательства существования статистических решений, потому что все они основываются на использовании энергетического неравенства. Однако нам удалось построить некоторый аналог энергетического неравенства и с его помощью доказать теорему существования пространственно-однородного статистического решения.

После построения пространственно-однородного статистического решения естественно встал вопрос о доказательстве существования решений системы Навье–Стокса с бесконечной энергией, составляющих носитель статистического решения. Выяснилось, что статистическое решение, введённое в [Foi72, Foi73], не приспособлено к доказательству подобных теорем. Поэтому было введено понятие пространственно-временного статистического решения [123–127], и с его помощью получена новая теорема существования решения системы Навье–Стокса с бесконечной энергией, определённого во всём пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. Понятие пространственно-временного статистического решения оказалось полезным и в других случаях, и неоднократно использовалось как нами, так и другими авторами (см., например, одну из последних ра-

[1] Ссылки по порядковым номерам относятся к списку публикаций М.И. Вишика в конце сборника; алфавитные ссылки относятся к списку литературы в конце главы. (*Прим. ред.*)

бот [BFMT19]). Основные результаты, полученные по статистической гидромеханике, были изложены в нашей монографии “Математические задачи статистической гидромеханики”, переведённой на немецкий и английский языки [132, 173, 186]. Отметим также, что в то же время М.И. Вишиком и А.И. Комечем были изучены стохастические системы Навье–Стокса с белым шумом [113, 115, 122], [125–128], [131–133].

Многолетняя совместная работа, безусловно, дала мне очень многое. Я это хорошо почувствовал, когда после окончания совместной работы начал успешно заниматься совершенно другой областью математики.

У нас с Марком Иосифовичем близкие отношения сохранялись до последних дней его жизни. Больше всего, естественно, мы общались на его семинаре, но не только там. Я уже отмечал, что по воскресеньям он обычно совершал прогулки по Подмосковью. В какой-то момент (во времена нашей совместной работы) он пригласил меня, и в течение нескольких лет я довольно часто участвовал в этих прогулках. Последний раз, уже после большого перерыва, мы с ним совершили прогулку по Подмосковью зимой без лыж, пройдя заведомо больше 10 километров. Было это в 2002–2003 годах, то есть когда Марку Иосифовичу было уже более 80 лет. Вот такую замечательную физическую форму он имел в то время!

Марк Иосифович был мудрым человеком. Неоднократно я обсуждал с ним различные возникающие жизненные ситуации, и он давал мне свои советы. Не всегда я им следовал, но практически всегда прав оказывался именно он.

[BFMT19] A. Biswas, C. Foias, C. F. Mondaini, E. S. Titi, *Downscaling data assimilation algorithm with applications to statistical solutions of the Navier–Stokes equations*, Ann. Inst. H. Poincaré **36** (2019), 2, 295–326.

[Foi72] C. Foiaş, *Statistical study of Navier–Stokes equations, I*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova **48** (1972), 219–348.

[Foi73] C. Foiaş, *Statistical study of Navier–Stokes equations, II*, Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova **49** (1973), 9–123.

[МЯ65] А. Монин, А. Яглом, *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 1*, Наука, Москва (1965).

[МЯ67] А. Монин, А. Яглом, *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 2*, Наука, Москва (1967).

Глава 7

Выдающийся математик профессор Вишик[1]

Жерар Тронель (1934–2017)

Университет Пьера и Марии Кюри (Париж)

Жерар Тронель (1934–2017) был учеником Жака-Луи Лионса и всегда сохранял с ним тесные деловые отношения. Тронель очень увлёкся теорией гистерезиса, и даже выучил русский язык для того, чтобы читать работы М.А. Красносельского в оригинале. Он приезжал в Советский Союз ещё 1970-е годы, чтобы поговорить лично с Марком Александровичем! Это был первый прорыв железного занавеса для западных математиков!

Жерар очень много сделал для популяризации математики и модернизации школьной системы во Франции, организации письменных выпускных экзаменов с анонимной проверкой в Париже.

Жерар был очень дружен с М.И. Вишиком, много с ним общался и в Париже, и в Москве. Он был очень добрым и преданным другом всех математиков из Союза. Он их всех встречал в Париже как самых близких друзей, даже если видел в первый раз. Встречал на аэродроме, устраивал у себя дома на первые дни, организовывал им бесплатное университетское жильё в Париже и опекал как своих детей.[2]

Жерар был очень культурным, деликатным и порядочным человеком. Дружба с ним была счастьем.

Александр Комеч

Многочисленные ученики профессора Вишика лучше меня расскажут о его математических работах, а я бы просто хотел рассказать о том влиянии, которое он оказал на некоторых французских математиков, особенно принадлежащих к школе Жака-Луи Лионса, основываясь на моих личных воспоминаниях.

В 1950-х годах во Франции, несмотря на трудности научного обмена, имя профессора Вишика было уже известно, особенно среди математиков и механиков, которые использовали результаты, полученные им при изучении уравнений в частных производных с малым параметром. Этот тип уравнений очень часто появляется в моделях, которые встречаются в механике при описании пограничных слоёв, тонких пластин и оболочек. Однако строгие методы, используемые в асимптотическом изучении решений некоторых уравнений в частных производных – в частности, в теории гомогенизации – были в значительной степени разработаны в статьях, опубликованных профессором Вишиком в 1950-е годы. Говоря о его первых работах, следует подчеркнуть один курьёз: результат, известный как теорема Лакса–Мильграма,

[1] Перевод выполнен А.И. Комечем и А.А. Комечем. Оригинал приводится ниже. (*Прим. ред.*)

[2] См. http://www.ljll.math.upmc.fr/Hommage-Gerard-Tronel-12janv2018

должен был бы быть теоремой Вишика, поскольку у него этот результат фигурирует у него в статье раньше, чем впервые появляется в работах Лакса и Мильграма.

Впервые я увидел профессора Вишика только в 1960-х годах, когда он был приглашён выступить на семинаре Лионса–Шварца в Институте Анри Пуанкаре. Он был одним из первых советских математиков, посетивших Париж после начала холодной войны. Амфитеатр Эрмита был полон. Слушатели были очарованы докладчиком, рассказывающем на замечательном французском о своих последних результатах по теме, упомянутой выше (насколько я помню): уравнения в частных производных с малым параметром. Слушатели восхищались ясностью, строгостью и точностью формулировок результатов. Надо напомнить, что тогда во французской математике царила школа Бурбаки, и предметы на стыке чистой и прикладной математики не особенно ценились великими французскими мастерами того времени, которые, разумеется, не были на этом докладе. Думаю, что они были неправы, потому что могли бы оценить замечательную строгость изложения этого русского математика, представляющего а-ля Бурбаки раздел математики, который они считали “нечистым”.

Моя вторая встреча с профессором Вишиком произошла на Международном математическом конгрессе в Ницце в 1970 году. Это был замечательный конгресс под председательством выдающегося французского математика Жана Лерэ, который поддерживал тесные контакты с советскими математиками, несмотря на препоны холодной войны. Этот 1970 год стал для советских математиков годом оттепели, поскольку на конгресс была послана большая делегация, каких не было на предыдущих съездах, когда советские власти отказывали математикам в разрешении на выезд. Конечно, я был очень рад приезду профессора Вишика, и во время конгресса он был в центре внимания коллег со всех континентов. Я помню, что встречал профессора Вишика на многих докладах; он прилежно посещал заседания и делал заметки. После этого конгресса советские граждане, и в том числе математики, могли легче отзываться на приглашения своих зарубежных коллег.

С 1970-х годов я несколько раз приезжал в Советский Союз. Поскольку города, открытые для иностранцев, были ограничены Москвой, Ленинградом и Новосибирском, я очень часто бывал в Москве для работы с группой под руководством профессора Олейник по вопросам гомогенизации и с группой профессора Красносельского на тему гистерезиса. Эти темы были довольно далеки от математических интересов профессора Вишика, но во время каждой остановки в Москве мне было приятно встречаться с ним, чтобы поговорить о математике, – о той, которая делалась в Париже, и той, что развивалась в Москве. Я всегда с удовольствием посещал его семинар в МГУ: этот семинар был мне доступнее, чем другой, – семинар профессора Гельфанда. Даже если темы, затронутые на семинаре Вишика, не совпадали с моими интересами, мне всегда удавалось почерпнуть там что-то интересное для себя. Но что я ценил превыше всего – атмосфера семинара, который проходил в совершенно непринуждённой обстановке, благоприятной для дискуссии, в отличие от всегда напряжённой атмосферы парижских семинаров. Профессор Вишик не вмешивался постоянно, что было обычным делом для некоторых его коллег; его участие ограничивалось краткими замечаниями, если он считал, что что-то было неверно или если докладу не хватало ясности до такой степени, что он становился невоспринимаемым. Только в конце доклада профессор Вишик брал слово, чтобы выделить главные идеи, которые нужно усвоить; поделиться наблюдениями о содержании и форме доклада. Конечно, он исправлял ошибки, но главное, на чём он настаивал – это чёткая формулировка основных результатов: нужно, чтобы теоремы были ясно сформулированы, условия должны вводиться в порядке, в котором они будут использоваться в доказательствах, утверждения также должны быть представлены в том порядке, в котором они будут получены в процессе доказательства; если доказательства были слишком длинными, он рекомендовал ввести промежуточные леммы, которые могут быть полезными в других обстоятельствах. Что в нём поражало – это качества большого математика: ясность, строгость, точность, краткость, но его замечания всегда делались в дружеском тоне, без агрессивности. Он всегда признавал, что любой математик, в особенности молодой, может допускать ошибки, но я никогда не слышал, чтобы он строго критиковал докладчика из-за того, что выступление было неудовлетворительным. Я вернусь к этому позже, но эти наблюдения позволяют мне написать, что профессор Вишик был большим математиком.

В период 1980–2010 гг. профессор Вишик много раз бывал в Париже и в других странах, в частности, в Италии. Во время своего пребывания в Италии он опубликовал замечательную работу об асимптотическом поведении решений эволюционных уравнений;[3] уже в этой книге можно найти все фундаментальные идеи, которые вскоре стали главным предметом его последующих исследований по теории аттракторов. В 1980-х профессор Вишик был приглашён Жаком-Луи Лионсом в Коллеж де Франс, где прочёл замечательный курс, содержание которого частично соответствует упомянутой выше книге. Хотя предмет был достаточно далёк от моих математических занятий того времени, я заинтересовался тем, что курс будет посвящён уравнениям Навье–Стокса, которые до сих пор являются источником фундаментальных математических проблем для широкого круга исследователей. На примере уравнений Навье–Стокса в курсе изложены методы, применимые к построению аттракторов общих нелинейных систем. Насколько я знаю, конспекта лекций нет, но я хорошо помню стиль изложения: на первых лекциях были перечислены задачи, которые будут рассматриваться; затем, в следующих лекциях, были намечены основные свойства рассматриваемых моделей. В последующих лекциях были введены необходимые методы, и в заключительных лекциях были даны основные идеи доказательства самых тонких моментов. В конце курса были перечислены открытые проблемы. То, что я вынес из посещения этого курса, подтвердило моё мнение о выдающихся качествах этого математика: ясность, точность, строгость, лаконичность, ни одного лишнего слова, постоянное желание быть понятым, что свидетельствует об очень большом педагогическом мастерстве. Вишик всегда вежливо отвечал на вопросы; никакие вопросы он не считал глупыми. Этот курс оставил у слушателей замечательные воспоминания.

Я мог бы продолжать свои воспоминания от моих встреч с профессором Вишиком, но я хотел бы закончить несколькими замечаниями о его жизни, о которой он мне рассказывал. Он говорил достаточно мало о себе: без сомнения, из скромности; но во время одного из визита к нему, в Москве, в присутствии мадам Вишик, настоящей леди, очень культурной и умеющей принимать гостей мужа, профессор Вишик рассказал мне, что во время последней войны 1940–1945 годов нацисты забрали и убили всю его семью. Он хотел взяться за оружие, чтобы отомстить за них, но известный русский математик отговорил его, так как его математический дар обещал ему большое будущее; иногда хорошо, когда ты молод, слушать советы! Другое его воспоминание связано с драматической судьбой очень известного математика Шаудера: во Львове, находясь в больнице, профессор Банах узнал, что Шаудер, видимо, будет арестован нацистами. Банах обеспокоился этой новостью и хотел спасти Шаудера, для чего написал своему немецкому коллеге, Бибербаху, математику, очень влиятельному в сферах нацистского режима. Но из этого ничего не вышло: через несколько дней после того, как письмо был отправлено, Шаудер был арестован и отправлен в лагерь смерти, откуда он не вернулся. Эта очень грустная история показывает, что математики не могут быть оторваны от общества: ни такие хорошие, как Банах, ни такие жестокие, как Бибербах. Этот пример также показывает, что хотя математика и может быть нейтральной, математики – нет.

Профессор Вишик, математики, встречавшие Вас, те, кто использовал Ваши результаты, не забудут Вас, так же как и все те, кто будут их использовать в будущем. Ваши качества оставят о Вас память как о великом математике и великом гуманисте.

---

[3] *Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations*, Cambridge University Press, 1992. (*Прим. ред.*)

Un grand mathématicien, le Professeur Vishik

Gérard Tronel

Les nombreux élèves du professeur Vishik parleront mieux que moi de son oeuvre mathématique, je voudrais apporter un témoignage simple de l'influence qu'il a eu sur quelques mathématiciens français, notamment sur ceux de l'école de Jacques-Louis Lions, pour cela je ferai appel à des souvenirs personnels.

Dans les années 1950, en France, malgré les difficultés des communications, le nom du Professeur Vishik était déjà connu, notamment parmi les mathématiciens et les mécaniciens qui utilisaient les résultats qu'il avait obtenus dans l'étude des équations aux dérivées partielles dépendant de petits paramètres; en fait ce type d'équations est très fréquent dans des modèles que l'on rencontre en mécanique, – couches limites, plaques et coques minces – mais pour ce qui concerne les mathématiques, des outils utilisés dans les études asymptotiques des solutions de certaines équations aux dérivées partielles, les théories de l'homogénéisation, sont déjà largement construits dans les articles publiés par le Professeur Vishik jusqu'aux années 1950 ; à propos de ses premiers travaux, il faut souligner une curiosité : le résultat connu sous le nom de théorème de Lax–Milgram devrait être un théorème de Vishik puisque qu'il figure dans un article antérieur à celui dans lequel on rencontre ce théorème pour la première fois dans les travaux de Lax et Milgram.

Mais c'est dans les années 1960 que j'ai vu pour la première fois le Professeur Vishik, il avait été invité à faire une conférence au séminaire Lions–Schwartz à l'Institut Henri Poincaré, il était l'un des premiers mathématiciens soviétiques à venir à Paris depuis le début de la guerre froide. L'amphithéâtre Hermite était complet. L'auditoire avait été immédiatement séduit par ce conférencier qui s'exprimait dans un français remarquable, si mes souvenirs sont exactes sa conférence portait ses derniers résultats sur le thème évoqué plus haut: les équations aux dérivées partielles dépendant de paramètres. Les auditeurs ont été enchantés par la clarté, la rigueur, la précision des énoncés des résultats ; il faut rappeler qu'à cette époque l'école de Bourbaki régnait sur les mathématiques françaises et que des sujets à l'interface entre des mathématiques pures et des mathématiques appliquées n'étaient pas spécialement appréciés par les grands maîtres français de l'époque qui bien entendu n'ont pas assisté à la conférence, mais ils ont eut tort car ils auraient apprécié une prouesse remarquable celle d'un mathématicien russe exposant à la « Bourbaki »un sujet relevant des mathématiques qu'ils considéraient comme non pures.

Ma deuxième rencontre avec le Professeur Vishik remonte au Congrès International de Mathématiciens à Nice en 1970. Ce congrès était tout à fait exceptionnel, il était présidé par un grand mathématicien français, Jean Leray, qui avait gardé des contacts étroits avec les mathématiciens soviétiques malgré les obstacles de la guerre froide. Cette année 1970 a été pour les mathématiciens soviétiques l'année du dégel puisque une importante délégation avait été autorisée à assister au congrès, ce qui ne s'était pas produit pour les congrès précédents puisque les autorités politiques soviétiques avaient refusé les autorisations de sorties des mathématiciens. Je n'ai pu que saluer le Professeur Vishik car, pendant le congrès, il a été très sollicité par ses collègues venus de tous les continents. Je me souviens d'avoir assisté à de nombreux exposés auxquels assistait le Professeur Vishik, il était très assidu et il prenait des notes. C'est à partir de ce congrès que les citoyens soviétiques, les mathématiciens notamment, ont pu répondre plus facilement aux invitations de leurs collègues étrangers.

A partir des années 1970, j'ai effectué plusieurs missions en Union soviétique, les villes ouvertes aux étrangers étaient limitées à Moscou, Léningrad et Novosibirsk, je me suis trouvé très souvent à Moscou pour travailler avec des équipes dirigées l'une par par le Professeur Oleinik sur le thème de l'homogénéisation et l'autre par le Professeur Krasnoselskii sur le thème de l'hystérésis, ces thèmes étaient assez loin des préoccupations mathématiques du Professeur Vishik mais à chaque séjour à Moscou j'avais plaisir à la rencontrer pour parler de mathématiques, celles qui se faisaient à Paris et celles qui se développaient à Moscou ; c'est toujours avec plaisir que j'assistais à son séminaire au MGY, ce séminaire était pour moi plus accessible qu'un autre séminaire, celui du Professeur Gelfand. Même si les sujets traités au cours de ce séminaire Vishik ne correspondaient pas à mes préoccupations, j'arrivais toujours à glaner quelques idées, mais ce que j'appréciai surtout était l'atmosphère de ce séminaire qui se déroulait dans une certaine décontraction favorable aux discussions, à l'opposé de l'atmosphère toujours tendue des séminaires parisiens. Le Professeur Vishik n'intervenait pas constamment comme avait l'habitude de le faire certains de ces collègues, ses interventions se limitaient à des remarques brèves lorsqu'il estimait que le conférencier s'était trompé ou que l'exposé manquait de clarté au point de le rendre incompréhensible. Ce n'est qu'à la fin de la conférence que le Professeur Vishik prenait la parole pour dégager les grandes idées qui devaient être retenues, pour faire des observations de fond et de forme, bien entendu il rectifiait des erreurs, mais il insistait sur la présentation des résultats fondamentaux : il fallait que les théorèmes soient clairement formulés, les hypothèses devaient être introduites dans l'ordre dans lequel elles seraient utilisées dans les démonstrations, les conclusions devaient être aussi présentées dans l'ordre où elle seraient obtenues dans les démonstrations; si les démonstrations étaient trop longues il recommandait d'introduire des lemmes intermédiaires qui pouvaient être utiles dans d'autres circonstances. Ce qui frappait était les qualités du grand mathématicien : clarté, rigueur précision, concision, mais ses interventions étaient toujours faites sur un ton amical, sans agressivité, il acceptait qu'un mathématicien, surtout jeune, commette des erreurs, mais je ne l'ai jamais entendu critiquer sévèrement un conférencier sous prétexte que son exposé n'était pas satisfaisant. J'y reviendrai plus loin mais ces remarques me permettent d'écrire que le Professeur Vishik était un grand mathématicien.

Sur la période 1980–2010, le Professeur Vishik a effectué de nombreux séjours à Paris et dans d'autres pays, notamment en Italie, pendant son séjour en Italie il a publié un petit ouvrages merveilleux qui reflète ses conceptions sur « Asymptotic behaviour of solutions evolutionary equations » ; on trouvera dans ce livre toutes les idées fondamentales sur ce qui allait devenir un des thèmes principaux de ses recherches ultérieures : la théorie des attracteurs. Le Professeur Vishik invité au Collège de France par Jacques-Louis Lions avait donné dans les années 1980 un cours remarquable que l'on peut retrouver partiellement dans son livre cité ci-dessus ; bien que le sujet ait été assez éloigné de mes préoccupations mathématiques du moment, j'avais été attiré par le fait qu'il traiterait des équations de Navier–Stokes, un sujet qui pose encore aujourd'hui de sérieux problèmes à la communauté mathématique internationale; à partir du problème des attracteurs dans les problèmes de Navier–Stokes, le cours développait tous les outils utiles à la théorie des attracteurs dans un cadre non linéaire abstrait. Il n'y a pas eu à ma connaissance de notes sur ses cours, mais je me souviens bien de la présentation : premières leçon faisait l'inventaire des problèmes qu'il souhaitait abordés, puis dans les leçons suivantes il avait donné les grandes lignes des modèles qu'il traiterait, dans les exposés suivants il a introduit les méthodes qu'il utiliserait, puis dans les dernières leçons il a donné des idées essentielles mises en oeuvre dans quelques démonstrations de points délicats et enfin son cours se terminait une liste de problèmes ouverts ; ce que j'ai retenu en assistant à ces cours confortait mes opinions sur les immenses qualités du mathématicien : clarté précision, rigueur, économie de langage, aucun mot de trop, un souci contant de vouloir être compris traduisant de très grandes qualités pédagogiques. Le Professeur Vishik répondait toujours avec gentillesse aux questions, pour lui il n'y avait jamais de questions stupides. Ce cours a laissé dans la mémoire des auditeurs d'excellents souvenirs.

Je pourrai continuer à égrener des souvenirs laissés par mes rencontres avec le Professeur Vishik, mais je voudrais terminer par quelques remarques sur sa vie et qu'il m'a raconté, il parlait assez peu de lui même, par modestie sans doute ; mais c'est au cours d'invitations chez lui à Moscou, en présence de Madame Vishik, une grande dame très cultivée et qui savait recevoir les invités de son mari, que le Professeur Vishik m'a dit que pendant la dernière guerre, celle de 1940–1945, les nazis avaient déporté et assassiné toute sa famille et qu'il voulait prendre les armes pour les venger, mais un mathématicien russe de renom l'en a dissuadé, car ses dons pour les mathématiques lui promettaient une très grande carrière, il est quelques fois bon quand on est jeune d'écouter les conseils ! L'autre souvenir qu'il a évoqué est lié au sort dramatique du mathématicien Schauder très connu: à Lvov ou se trouvait exilé dans un hôpital le Professeur Banach, ce dernier apprend que Schauder allait être arrêté par les nazis, inquiété par cette nouvelle, Banach veut le sauver et pour ce faire écrit à son collègue allemand, Bieberbach, mathématicien très influent dans les sphères du régime nazi, le résultat ne s'est pas fait attendre, quelques jours après l'envoi de cette lettre, Schauder a été arrêté et envoyé dans un camp d'extermination d'où il ne reviendra pas; voici une bien triste histoire qui montre que les mathématiques ne peuvent pas être déconnectés de la société, aussi bonne soit-elle avec Banach et aussi cruelle soit-elle avec Bieberbach. C'est aussi un exemple qui montre que si les mathématiques peuvent être neutres, les mathématiciens ne le sont pas.

Professeur Vishik, les mathématiciens qui vous ont rencontré, ceux qui ont utilisé vos résultats ne vous oublierons pas ainsi que tous ceux qui les utiliseront, vos qualités laisseront de vous le souvenir d'un grand mathématicien et d'un grand humaniste.

Глава 8

Слово о Вишике

Александр Демидов

Мехмат, Кафедра общих проблем управления, Московский Государственный Университет

Московский Физико-Технический Институт

Центральная Школа Лиона (Лион)

Технический Университет Чване (Претория)

Масштаб личности Марка Иосифовича Вишика велик. Можно было бы даже ограничиться перечислением имён математиков, выступавших с докладами на его знаменитом семинаре в МГУ. В их числе – академики И.М. Гельфанд, В.Е. Захаров, А.М. Ильин, С.В. Конягин, В.П. Маслов, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко; из иностранцев – Лоран Шварц, Ларс Хёрмандер, Жак-Луи Лионс, Луис Ниренберг и многие другие крупнейшие математики.

С.П. Новиков прислал поздравление к 90-летию М.И. Вишика: "Дорогой Марк Иосифович, с большим удовольствием я и моя жена Эля поздравляем Вас, выдающегося математика и одного из наших учителей, со славным Юбилеем. Мы все рады, что Вы встречаете свой Юбилей столь энергичным и активным".

Начало педагогической деятельности Марка Иосифовича Вишика было связано с МЭИ. Там он читал с большим успехом огромное число различных математических курсов. И там же он организовал и вёл свой научный семинар, ставший центром притяжения математиков Москвы, работавших в области дифференциальных уравнений и функционального анализа. О том, насколько это подняло престиж МЭИ, говорит следующий факт: в те далеко не простые времена середины 50-х годов руководство МЭИ предоставило Марку Иосифовичу двухкомнатную квартиру.

В этой квартире вечером 19 октября 1971 года собрались около тридцати его друзей-коллег, чтобы отпраздновать его 50-летие. А до этого там же Марк Иосифович в день своего юбилея потратил на меня около двух часов, обсуждая за письменным столом текст моей кандидатской диссертации (он был моим научным руководителем). Этот письменный стол стоит сейчас в комнате кафедры ОПУ в первом гуманитарном корпусе (в котором расположен факультет ВМК).

В 1976 году в Лионе состоялась весьма представительная конференция по сингулярным возмущениям. Достаточно назвать такие имена: Ж.-Л. Лионс, Л. Тартар, Р. Темам, Б. Мальгранж, М. Ван-Дайк, В. Экхауз, Р. О'Малей, Э. Санчес-Паленсия. Организаторы очень сожалели, что Марк Иосифович не смог туда приехать. Но они попросили меня передать, как они сказали, академику Вишику художественный альбом и ещё ряд сувениров.

Мадженес, принимая Вишика в Павиа, подвёл его к своей шикарной вилле и сказал: "А этот дом я построил на гонорар книги "Неоднородные граничные задачи", в которой мы вместе с Лионсом развили те идеи, которые Вы, Марк Иосифович, и Соболев изложили в своей короткой заметке 1956 года". Импульсом к написанию этой заметки послужило то, что Марк

Иосифович выразил таким образом: “Я понял, что стандартное граничное условие в задаче Неймана нефизично. Физически оправдано не задание нормальной производной в точках границы, а задание потока через границу, т.е. функционала на гладких функциях, который может быть даже обобщённой функцией”.

Накануне похорон Марка Иосифовича я позвонил своей одногруппнице Наташе Севастьяновой. Она не смогла прибыть на прощание, так как должна была принимать экзамены в МАИ. Я хотел бы здесь, пусть не столь ярко как она, передать её слова о Вишике. Она сказала, что не ей говорить о величии Вишика-математика, но она может говорить о том исключительно уважительном отношении к студентам как коллегам, которое она с благоговением восприняла и сама теперь этому следует. Вот только два примера из её воспоминаний. Вишик ведёт свой семинар для студентов по обобщённым функциям. Приходит с некоторым запозданием его студент. Вишик его встречает с радостным восклицанием: “Ой, Петя пришёл!”, будто бы пришёл великий учёный. Другой случай: на семинаре Вишика в 13-06 Миша Шубин докладывает работу Хёрмандера. Вишик ощущает, что для участников семинара (а там были незаурядные математики) далеко не всё понятно. Тогда Вишик говорит: “Миша, разрешите, я попробую сказать, что я понял из Вашего доклада”. И Вишик не только ясно изложил суть работы Хёрмандера, но и красоту его результата. А Миша поблагодарил Вишика, сказав, что он и сам теперь стал лучше понимать работу Хёрмандера.

Марк Иосифович обладал завидным чувством юмора и умел с лёгкостью и деликатно гасить конфликтные ситуации. Вот лишь два примера. В конце 60-х годов Марк Иосифович читал спецкурс по эллиптическим псевдодифференциальным задачам в огромной аудитории 01. Она – включая балкон – была полна слушателей. И вот кто-то на балконе сказал какую-то дерзость, грозящую скандалом. Но Марк Иосифович мгновенно мягко (можно сказать, даже нежно) свёл всё в шутку и продолжал читать лекцию. А вот что рассказал Георгий Георгиевич Магарил-Ильяев. Он был свидетелем такой сценки в сберкассе. Марк Иосифович стоит в очереди за мужчиной. Вдруг появляется некоторая дама и с раздражением говорит, что она стояла за этим мужчиной. Марк Иосифович, понимая, что дама фантазирует, отвечает: “Да, конечно, пожалуйста, вставайте за ним”. Дама, не ожидая такой деликатности, застыла в изумлении и стала опять бурно повторять, что она действительно стояла за этим мужчиной. Марк Иосифович ей только поддакивал.

И ещё несколько моментов, о которых, я хотел бы сказать.

В интервью, которое Вишик дал Кате Каликинской, Марк Иосифович так ответил на вопрос о роли в его жизни Аси Моисеевны (Глава 2 в этой книге): “Мы прожили вместе счастливо и безмятежно 63 года. Были во всём едины с того самого момента, как встретились в День Победы в 1945 году в университете, до её ухода в 2009 году. Я иногда в шутку говорил, что Асенька меня на себе женила и тем спасла от голода и гибели. После той ужасной жизни, которая была у меня во время войны, я попал в прекрасную семью, у меня появился дом. И Ася всегда брала на себя всё, что касается быта, я никогда не знал, где у нас чайные чашки стоят, где заварка, где что. Я был от всего этого отгорожен, чтобы заниматься наукой. Асенька в нашей обыденной жизни была генералиссимусом: она решала все проблемы, кроме научных. И конечно, мне было просто невозможно представить, как я буду обходиться без неё...” Должен добавить, что последние годы жизни Ася Моисеевна тяжело болела. И Марк Иосифович проявлял к ней необычайную заботу. Однажды, когда я привез их в госпиталь для ветеранов войны, где должна была лечиться Ася Моисеевна, кто-то из ожидавших госпитализации сказал мне: “Они как молодожены”.

После ухода из жизни Аси Моисеевны Марк Иосифович сильно сдал. За два года до кончины у него случился сильный инсульт. Он был госпитализирован в академическую больницу в Ясенево. Положение было крайне тяжёлое. Врачи готовили нас к самому худшему. Но произошло чудо. Наверно, в результате постоянной умственной работы функции поражённой части мозга взяла на себя другая его часть. И после этого Марк Иосифович продолжал вести свой научный семинар в МГУ вплоть до его последнего заседания в весеннем семестре 2012 года, завершив тем самым 50 лет его работы. А через два месяца, буквально за минуту до смерти, он впервые на вопрос “Что болит, Марк Иосифович?” ответил: “Всё болит”.

Заканчивая моё слово о М.И. Вишике, не могу не отметить глубочайшее почтение, благоговение, которое Марк Иосифович испытывал всю свою жизнь к дорогим его сердцу И.Г. Петровскому, Л.А. Люстернику, И.Н. Векуа, Н.И. Мусхелишвили, С.Л. Соболеву, оказавших ему поддержку в трудные моменты его нелёгкой жизни. “Иконостас” этих его великих учителей-коллег занимал почётное место в его кабинете.

Глава 9

Марк Иосифович Вишик

Александр Шнирельман

Университет Конкордия (Монреаль)

Два урока от Марка Иосифовича

Однажды В.И. Арнольд попросил меня написать рецензию на статью, поданную в “Успехи”. Статья была посвящена классификации стационарных двумерных течений идеальной несжимаемой жидкости. На мой взгляд, работа была неинтересная и бессодержательная, и в ней не было ничего кроме тривиальностей. Я так и написал в своей рецензии.

Когда через несколько дней я встретил Арнольда, он выглядел озадаченным и слегка растерянным. Он как-то даже робко спросил меня: “Что же это Вы, Саша, так сурово с ним? Может быть, посмотрите ещё раз?”

Это было так непохоже на Арнольда; я смутно почувствовал, что сделал что-то не то, нарушил какие-то правила игры. И тогда я решил пойти и посоветоваться с Марком Иосифовичем.

Реакция Марка Иосифовича была неожиданно бурной, как будто мои слова задели его за живое. Я никогда не видел его в таком возбуждении. Он выпрямился и торжественно произнес: “Саша! Забудьте всё, думайте только о том, принесёт ли Ваша рецензия пользу Математике! Не думайте больше ни о чём! Пусть ничто Вас не отвлекает от главного! Конечно, это звучало бы эффектно, что Шнирельман отверг статью, за которую хлопотал Арнольд; но это такая ерунда по сравнению с главным! Думайте только о Математике!”

Я подумал, подумал... и написал одобрительную рецензию. Статью напечатали.

Из этой крошечной истории я мог бы извлечь два урока.

1. В затруднительных случаях, когда непонятно, какое принять решение, полезно бывает посмотреть на всю ситуацию с более высокой точки зрения. Насколько я помню, Марк Иосифович делал так неоднократно.

2. Конечно, статья была неказистая, и её вполне можно было и не печатать. Но сама тематика стационарных течений оказалась гораздо интереснее, чем представлялось тогда, и там открываются совершенно неожиданные связи. В частности, им посвящена довольно большая часть моей собственной работы. Похоже, что Арнольд уже тогда догадывался, что этот путь ведёт в глубину, а Марк Иосифович как-то понял это из моего рассказа. Отсюда второй урок: не надо вести себя как самоуверенный мальчишка, особенно с такими людьми, как Марк Иосифович и Арнольд.

О классиках и романтиках

Однажды мы говорили с Марком Иосифовичем о классиках и романтиках в науке. Неожиданно Марк Иосифович спросил меня: “Саша, а как Вы думаете, кто Вы сами, классик или романтик”? Я немного растерялся и пробормотал что-то в том роде, что и то и другое было бы хорошо. Но если говорить о самом Марке Иосифовиче, то он, несомненно, классик. Он любил повторять: “Нужно убирать за собой”, имея в виду, что если ты что-то придумал хорошее, то надо это как следует написать и опубликовать, не оставляя всех в недоумении, что сделано, а что нет. Также Марк Иосифович умел находить правильный момент, когда следует сменить тему работы. Он вспоминал, как какой-то видный математик сетовал, что Вишик перестал работать в одной области и переключился на другую: “Марк Иосифович, у Вас здесь такой высокий потенциал, зачем Вы это бросаете?” По этому поводу Марк Иосифович цитировал Гильберта, который про какую-то область математики сказал, что это “abgegrasene Wiese”, т.е. “объеденный лужок”.

Сам Марк Иосифович всегда следовал этим правилам. Он оставил после себя несколько грандиозных сооружений: это его циклы работ по теории краевых задач как теории расширений операторов, по квазилинейным уравнениям, по асимптотическим методам, по уравнениям в свёртках, по статистической гидродинамике, по теории аттракторов для уравнений в частных производных... Его работы в совокупности – это грандиозный пример того, как на самом деле должна делаться математика.

Я был в какой-то степени очевидцем работы Марка Иосифовича над краевыми задачами для уравнений в свёртках. На Международном Математическом Конгрессе в Москве в 1966 году Марк Иосифович делал получасовой доклад об этой теории в аудитории 02 (на доске, мелом, без слайдов). Тогда я ничего практически не понял; и немудрено. Потом Марк Иосифович прочитал блестящий семестровый курс по эллиптическим краевым задачам, адаптированный для студентов, куда включил и элементы своей теории. А потом я несколько лет осваивал эту теорию, посвятил ей две курсовые и дипломную работы, и кое-что стал понимать. Эта теория представляет собой колоссальное расширение и обобщение существовавшей к тому времени и уже установившейся теории эллиптических и параболических уравнений. Сюда включаются как псевдодифференциальные уравнения и системы, так и, например, разностные уравнения. Мне долго было непонятно, зачем нужно такое далёкое обобщение, откуда оно берётся и куда ведёт. Для дифференциальных эллиптических уравнений оно представляется излишним, так как той же полноты результаты получаются другими, более экономными методами. Сам Марк Иосифович от таких вопросов уходил (что тоже характерно для классиков), предоставляя мне дойти до ответов самому. Ссылки на то, что максимальное обобщение хорошо само по себе, меня не устраивали. Мне потребовалось много времени, чтобы представить себе мотивы, подвигшие Марка Иосифовича на такое грандиозное предприятие.

Первыми публикациями по теории краевых задач для уравнений в свёртках стали четыре короткие и очень концентрированные заметки, опубликованные в ДАН в 1964 году. Там излагались уже практически все результаты будущей теории, разумеется, без всяких объяснений и доказательств. В то время распутать эту криптограмму было для меня затруднительно; однако задним числом, после изучения больших и подробных работ, появившихся в последующие несколько лет, всё начало вставать на своё место.

Конечно, сама теория краевых задач для дифференциальных эллиптических уравнений может развиваться самостоятельно, без ухода в теорию уравнений в свёртках (иными словами, псевдодифференциальных уравнений). Однако нужда в таком обобщении возникает при рассмотрении менее классических задач, и прежде всего задачи Зарембы. Напомню, что в “классической” теории эллиптическая краевая задача состоит из дифференциального уравнения $Au = f$ эллиптического типа внутри некоторой области G, ограниченной гладкой поверхностью Γ коразмерности 1, и граничного условия на границе вида $Bu|_\Gamma = g$ (для уравнений высших порядков таких условий может быть несколько). Тогда, при выполнении определённых алгебраических условий, задача “почти разрешима” (т.е. фредгольмова) в определённых функциональных пространствах. Всё это было хорошо известно к началу 60-х годов.

Однако польский математик Станислав Заремба ещё до Первой мировой войны поставил такую задачу: допустим, поверхность Γ разделена на две области, Γ_1 и Γ_2, имеющие общую границу Δ коразмерности 2, и допустим, что в каждой из них задано своё граничное условие: $B_1 u = g_1$ на Γ_1, $B_2 u = g_2$ на Γ_2. Например, на Γ_1 задано условие Дирихле, а на Γ_2 – условие Неймана (это была исходная задача Зарембы). Требовалось сформулировать условия, при которых данная задача обладает свойством фредгольмовости; при этом следовало определить функциональные пространства, в которых это свойство выполняется.

Как оказалось, эта задача при сведении на границу приводит к системе парных уравнений, т.е. псевдодифференциальных уравнений с разрывом вдоль многообразия Δ. Мы приходим к задаче, в которой есть сразу все трудности: и уравнения нелокальные, и при факторизации индекс непостоянный, ... Зараз все трудности не преодолеть, нужно разделить задачу на части и решать их последовательно. Первый шаг – это уравнения и системы в свёртках в области с гладкой границей в предположении выполнения “условия гладкости”; это ближе всего к классической теории. Следующий шаг – уравнения в области с переменным индексом на границе, что требует введения весовых пространств переменной гладкости и операторов переменного порядка (кто бы стал изучать такие вещи без особой нужды). И только потом становится возможно подойти к собственно задаче Зарембы. В результате появляется полная теория, с описанием экзотических, но естественных для этой задачи, пространств функций, с определением необходимого числа граничных условий или дополнительных потенциалов, или степеней свободы (то, что Борис Юрьевич Стернин метко назвал “коусловиями”) на границе Γ и на поверхности раздела Δ, с точным описанием их регулярности, и т.д.

Эта колоссальная работа заняла несколько лет. Я помню, как мы занимались в кабинете Марка Иосифовича, а в другой комнате Ася Моисеевна правила корректуру очередной статьи. Время от времени она входила к нам с листком корректуры и спрашивала “Маркус, а что в этом месте должно быть”? У них статьи этой серии назывались “красная”, “синяя”, и т. д., в соответствии с цветом обложки журнала.

Если бы я пытался восстановить генезис этих работ, я бы предположил, что их началом была работа по задаче Зарембы, а дальше вся теория разворачивалась как подготовка необходимых орудий для её решения. Но, может быть, всё было по-другому (у классиков всё не так, как у романтиков). Но в целом это был грандиозный пример, как надо делать математику.

Глава 10

Записки бывшей студентки Мехмата МГУ

Людмила Майстер (Араманович)

В 1964 году я поступила на механико-математический факультет Московского государственного университета, знаменитый мехмат МГУ. Начало шестидесятых годов можно считать самым расцветом мехмата. Лекции нам читали такие замечательные математики, как А.Г. Курош (алгебра), М.А. Крейнес (математический анализ), В.И. Арнольд (дифференциальные уравнения), В.М. Тихомиров (функциональный анализ), М.И. Вишик (спецкурс по дифференциальным уравнениям) и многие-многие другие.

На мехмате того времени было три отделения: математики, вычислительной математики (кратко "вычислители") и механики. Все они располагались с 12-го по 16-й этаж Главного Здания МГУ. Позднее, в 1970 году "вычислители" превратились в факультет Вычислительной Математики и Кибернетики и переехали в отдельное здание, а в Главном Здании остались математики и механики. Интересно, что в МГУ факультет называется механико-математическим (мехмат), а в Ленинградском (теперь Петербургском) университете – матмех. Я поступила на отделение математики (выбор отделения надо было указать при подаче вступительных документов).

Первый курс пролетел для меня быстро и как-то сумбурно. По-видимому, сказывались усталость и волнение от школьных выпускных и вступительных в МГУ экзаменов, обилие новых впечатлений и другие факторы, ибо, как поётся в популярной песне, "в жизни раз бывает 18 лет".

На 14-ом этаже мехмата была Доска объявлений, которая пестрела от напечатанных и написанных от руки разноцветных объявлений о работе различных спецкурсов и спецсеминаров. Глаза разбегались от соблазнительных названий и известных имен руководителей, хотелось побывать всюду.

В начале второго курса на Доске объявлений среди прочих я увидела объявление о начале работы семинара по дифференциальным уравнениям под руководством М.И. Вишика. Побывав к тому времени на нескольких разных семинарах, я поняла, что нравится мне именно этот, и стала регулярно присутствовать на занятиях. Меня привлекала манера Марка Иосифовича вести семинар – спокойная и уважительная. Привлекало также, что на семинаре разбирались в том числе главы и задачи из недавно вышедшей книги Лорана Шварца "Математические методы для физических наук", а физика всегда притягивала меня. На семинаре Марка Иосифовича присутствовали в основном студенты старших курсов и аспиранты, младшекурсников было не очень много, тем не менее темы и обсуждения строились так, что и нам (мне) удавалось что-то понять.

Однажды Марк Иосифович устроил что-то вроде контрольной работы: всем участникам было дано 5 задач по теме "Обобщённые функции", а Марк Иосифович ходил вдоль рядов и смотрел, как идут дела. К тому времени, как он подошёл к столу, за которым сидела я и ещё одна девушка, мы с соседкой решили каждая по одной задаче. Марк Иосифович посмотрел и с такой откровенной радостью сказал: "Верно! У вас всё правильно решено". Видно было, что он искренне рад за нас и доволен, что студентки хоть немного, но разобрались в достаточно сложном материале.

Чаще всего на семинаре шло обсуждение вопросов, связанных с темой научного интереса Марка Иосифовича, который в это время опубликовал целый ряд статей по теории краевых задач для эллиптических и параболических уравнений, псевдодифференциальных операторов, задач с разрывными граничными условиями. Помню, однажды мне и ещё одной студентке Аде "на двоих" было дано задание разобрать и рассказать на семинаре одно из доказательств. Рассказ на семинаре начала Ада. Где-то на середине длинного доказательства она остановилась и замолчала, тогда я вышла к доске и продолжила рассказ. Интересно, что именно Марк Иосифович напомнил мне этот случай, когда был много лет спустя в гостях у нас с мужем в Германии. То есть он очень внимательно относился к тому, что делали даже самые младшие участники семинара, и даже, казалось бы, мелкие, незначительные подробности, связанные с участниками семинара, хранились в его памяти.

Из нас, второкурсников, ходивших на семинар Марка Иосифовича, особенно подружились мы с Сашей Шнирельманом и Сашей Комечем. Так втроём и ходили на семинар, а когда после второго курса надо было определяться с выбором кафедры, выбрали Кафедру дифференциальных уравнений. Заведующий кафедрой был ректор МГУ, Иван Георгиевич Петровский, а Марк Иосифович Вишик читал спецкурс и вёл спецсеминар. Он стал нашим научным руководителем. Надо сказать, что в этот период в моде были такие области математики, как алгебраическая и дифференциальная топология, теория групп, шло увлечение аксиоматизацией в духе Бурбаки.

Летом 1966 года в Москве проходил 15-й Международный Математический Конгресс, на котором студенты работали волонтёрами и помогали иностранцам ориентироваться в МГУ. Вопросы иностранцев иногда были очень смешными, например: "Где можно купить то, что русские едят каждый день – черную икру", или, на уровне анекдота, "Правда ли, что буквы "М" и "Ж" на дверях туалета означают "Мадам" и "Жентельмен". Много лет спустя я разговаривала с немецким математиком – участником этого Конгресса. Он рассказал про обед, устроенный для участников, и с мечтательной улыбкой добавил, что никогда в жизни так вкусно не ел, как там, и этот обед он вспоминает до сих пор.

На Конгрессе было много докладов по модным в то время направлениям топологии и теории множеств, что ещё больше подогрело интерес студентов к этим областям математики, поэтому выбор такой "старомодной" Кафедры дифференциальных уравнений вызвал недоумённые вопросы некоторых моих друзей. Однако семинар М.И. Вишика был настолько интересен, что никакого желания переключаться на модную топологию не было.

С каждым годом обсуждения на семинаре М.И. Вишика становились для меня понятнее, а его спецкурс сделал слова "обобщённые функции", "псевдодифференциальный оператор", "правый и левый регуляризаторы" практически родными. У нас даже шутки были типа: "Советский правый регуляризатор – самый правый в мире".

В 1967 году М.И. Вишик впервые поехал за границу во Францию. Он отсутствовал целый месяц, во время которого на семинаре его по очереди замещали. Отсутствие Марка Иосифовича очень сказывалось, и без него было скучно. Когда он наконец вернулся, на семинар пришло столько народу, что всем не хватило места и пришлось внести дополнительные стулья. Все стали хором просить Марка Иосифовича рассказать про Францию. Он с видимым удовольствием согласился и целый час рассказывал о своих французских впечатлениях и встречах с коллегами. Мне особенно запомнились его слова о встрече с Жак-Луи Лионсом: "Представляете, Лионс сказал мне: "Вы, советские математики, даже не представляете, какие вы счастливые. Вы можете спокойно думать над задачей сколько потребуется – год, два, три... А мы просто обязаны публиковать что-нибудь каждый год". Это замечание было очень неожиданным для

60-х годов, поэтому я его запомнила. Среди многочисленных вопросов о Франции был и вопрос о “французской моде”. На это Марк Иосифович ответил коротко: “Там все ходят зимой без шапок! Но ведь там тепло, и вы уж, пожалуйста, этой моде не следуйте”.

Иногда на семинаре Марк Иосифович рассказывал, как он пишет статьи: “Когда вы решаете задачу, записывайте черновики аккуратно, нумеруйте их и раскладывайте перед собой. Когда задача решена – перед вами практически готовая статья”. Этот совет потом не раз пригодился мне в работе.

Лекции, семинары, опять лекции, опять семинары, обязательные для всего курса, обязательные по выбору кафедры, а также спецкурсы и спецсеминары по выбору студента – время учёбы было заполнено до предела. Тем не менее, выпадали и свободные минутки. Помню, стоим мы втроём на 14-м этаже у окна и горячо обсуждаем связь Венгрии и Хазарского царства. Идёт мимо Григорий Исаакович Баренблатт (он читал нам курс “Механика сплошных сред”, и под его руководством мы выполняли практикум по вычислительной математике), подходит к нам и интересуется, о чём такая горячая беседа. Мы ему отвечаем, что о венграх и хазарах. Он засмеялся, потом тяжело вздохнул и сказал: “Эх! Мне бы ваши заботы”.

На пятом курсе полагалось написать дипломную работу, причём защита диплома превращалась в своего рода экзамен. В сентябре 1968 года Марк Иосифович предложил мне в качестве темы дипломной работы “Эллиптические краевые задачи с разрывными граничными условиями”. Я представляла в общих чертах, что надо делать: преобразованием пространства убрать критическую граничную точку разрыва в бесконечность, при этом область перейдет в бесконечный “цилиндр”, в сечении которого задача будет иметь решение, зависящее от параметра сечения. Получить это решение, а затем обратным преобразованием “вернуться” в исходное пространство. Мне казалось, что я должна самостоятельно разобраться во всех деталях и не докучать лишний раз научному руководителю. Кроме того, мне хотелось понять, существуют ли реальные процессы, описываемые такой моделью или это чисто абстрактная конструкция. Три месяца я не разгибаясь трудилась за письменным столом; наконец, диплом был почти готов. Благодаря курсу “Механика сплошных сред” мне даже удалось найти, что моя задача с разрывными граничными условиями описывает процессы, возникающие при отрыве воздушного потока от задней кромки крыла самолёта. В начале декабря 1968 года я с толстой пачкой исписанных листов отправилась к Марку Иосифовичу. Он встретил меня изумлённым возгласом: “Люда, здравствуйте! Куда же Вы пропали? Я уже начал беспокоиться!” Мне стало стыдно, что он беспокоился из-за меня, я смущённо ответила, что работала и протянула ему толстую пачку. Мы зашли в полупустую аудиторию (пустых на мехмате не было!), сели, и Марк Иосифович стал перелистывать бумаги, исписанные моим аккуратным почерком, изредка задавая вопросы и слушая мои комментарии. Постепенно лицо его прояснялось всё больше, поскольку диплом был действительно практически готов. Видя, что всё в порядке, я даже начала рассказывать про “кромку самолёта”. Марк Иосифович внимательно выслушал, но сказал: “Люда, Вы математик или кто? Давайте не будем отклоняться от темы”.

В июне 1969 года защита Диплома, Государственные экзамены (математика и философия) были позади, и мы отметили в ресторане окончание студенческой жизни. После окончания МГУ я получила распределение в Московский Институт Теплотехники, где мне пришлось заниматься самыми различными задачами, и я часто вспоминала этот вопрос, задавая его самой себе: “я математик или кто?”

Теперь сделаем большой перерыв (работа, дети) и перенесёмся сразу в 1993 год. Осенью того года я получила стипендию Немецкой Службы Академических Обменов (DAAD) и приглашение на 2 месяца в Технический университет города Дармштадта в Германии. Там я познакомилась с профессором Эрхардом Майстером, который возглавлял кафедру “Математические методы физики”. Через несколько месяцев мы поженились, и с тех пор я живу в Германии. Когда муж узнал, что моим научным руководителем в МГУ был М.И. Вишик, он пришёл в страшный восторг. Он рассказал, что в шестидесятые годы был профессором математики в университете Западного Берлина и организовал там целую группу по изучению работ Марка Иосифовича. Муж даже пытался учить русский язык, чтобы читать его статьи немедленно, не дожидаясь перевода. “Мы должны пригласить профессора Вишика к нам в университет”, – решительно сказал муж. В мае 1997 года Марк Иосифович и Ася Моисеевна приехали в Дармштадт и остановились на несколько дней у нас в доме. Мужчины обсуждали математические и философские вопросы, а я исполняла обязанности хозяйки и разговаривала с Асей Моисеевной на “житейские темы”. Когда разговор касался мехмата, Марк Иосифович вспоминал много мелких подробностей и с большой теплотой говорил о всех своих учениках. 14 мая 1997 года у него был доклад в Техническом университете Дармштадта на тему: “Trajectory attractors for nonautonomous dynamical systems”. После доклада Марк Иосифович, Ася Моисеевна, мы с мужем и другие сотрудники кафедры отправились в ресторан, где можно было продолжить беседу в неформальной обстановке. Ася Моисеевна тихонько спрашивала меня: “Люда, скажите, понравилась ли слушателям лекция?” Видно было, как она заботится о муже и близко к сердцу принимает все его дела. Через день Марк Иосифович и Ася Моисеевна уехали. Эти несколько дней запомнились мне потому, что я лишний раз убедилась какой тактичный и деликатный человек Марк Иосифович, с какой теплотой упоминал он в разговоре своих коллег и помнил всех студентов, бывших и настоящих.

В этих коротких заметках, конечно, невозможно передать всё то глубокое уважение, которое я испытываю к моему научному руководителю профессору Марку Иосифовичу Вишику. Время проходит. Но теплота и благодарность в душе после общения с замечательным человеком остаются навсегда.

Глава 11

Учитель и друг

Александр Комеч

Институт Проблем Передачи Информации РАН (Москва)

Мехмат, Кафедра теории вероятностей, Московский Государственный Университет

Венский Университет

Моё первое знакомство с Марком Иосифовичем произошло в 1964, когда я учился вместе с его сыном Сеней в 444 школе и иногда бывал у них дома. После окончания школы Вишики пригласили нас с Федей Богомоловым к себе на дачу в Кратово для подготовки к вступительным экзаменам на мехмат. Эти чрезвычайно насыщенные тренировки для нас троих (Сеня, Федя и я) продолжались почти весь июнь под руководством опытнейшего преподавателя, который жил по соседству. МИ присутствовал на всех занятиях и следил очень внимательно за нашими ответами и ошибками. В результате мы все благополучно сдали экзамены и поступили, хотя абсолютно никакой гарантии для этого не было.

Наше вторичное знакомство состоялось в сентябре 1965, когда МИ начал вести семинар для студентов второго курса вместе с О.А. Олейник и В.В. Грушиным. Виктор Васильевич виртуозно излагал нам теорию обобщённых функций и давал множество замечательных задач. МИ всегда очень внимательно и строго, но притом чрезвычайно корректно и благожелательно, следил за реакцией студентов и их активностью в решении задач. Это сочетание строгости с корректностью и благожелательностью всегда было очень характерно для МИ в общении со студентами и аспирантами. Из этого семинара в первом составе и в следующих поколениях вышли многие известные математики: А.В. Бабин, П.М. Блехер, А.М. Габриэлов, А.С. Демидов, А.В. Фурсиков, А.И. Шнирельман и многие другие. Этот семинар по существу впервые ввёл в Москве в математический обиход теорию обобщённых функций Шварца в полном объёме.

Глубочайшее впечатление на всех нас производили спецкурсы, которые читал МИ в эти годы в МГУ: теория обобщённых функций, псевдодифференциальные операторы, эллиптические краевые задачи. Эти лекции были очень фундаментально обставлены, что явно было организовано ректором МГУ Петровским: в дневное время, в огромной солнечной аудитории 01 Главного Здания МГУ, которая была почти полностью заполнена студентами, аспирантами и профессорами! Энтузиазм лектора и слушателей взаимно усиливали друг друга.

МИ читал лекции чрезвычайно ясно и артистично, громко и с безукоризненной дикцией. Держался очень уверенно и молодцевато, и только иногда после лекций можно было видеть, каких усилий всё это ему стоило. Он считал своим долгом принести максимальную пользу всем слушателям. Был очень пунктуален во времени.

Писал слова и формулы мелом на доске очень крупно и красиво рукописными буквами, как прописью. Повторял некоторые пояснения по нескольку раз, варьируя аргументы. С блеском применял методы комплексного анализа, вкус к которым, видимо, был привит в тбилисской школе Мусхелишвили и Векуа. Тщательно объяснял применения методов функционального анализа, разработанных Соболевым, и топологических методов Шаудера.

Кстати, Юлиуш Шаудер, по словам МИ, был его первым научным руководителем во Львове. В то время МИ занимался каждый день после обеда в университетской библиотеке. Шаудер заметил, что МИ читает математические книги на немецком языке, сам подошёл к нему и завёл разговор про математику. После этого они там же каждую неделю специально регулярно встречались и подолгу беседовали.

Шаудер имел звание доцента, но до 1939 года работал просто преподавателем во 2-й львовской гимназии (где его доцентство не оплачивалось) и ассистентом Львовского университета. Погиб во львовском гетто в 1943.

МИ часто вспоминал учёбу во львовской гимназии, где пробудился его интерес к математике, хотя его главным увлечением тогда был футбол... Большое влияние на МИ, по-видимому, произвела атмосфера, царившая в гимназии. Например, там устраивались публичные диспуты об основах религии между преподавателями православия, католицизма и иудаизма, которые проходили в атмосфере взаимного уважения.

Кстати, я однажды спросил МИ, как правильно его называть: Марк или Марко? Он сказал, что его всё устраивает. С рождения его звали Марк, но когда ему пришлось получать советский паспорт, его записали как Марко. Он пошёл к начальнику отделения милиции объяснять, что он Марк, но начальник замахал на него руками: "Иди, иди – так лучше!"

Во Львовском университете МИ попал в знаменитую львовскую математическую школу: С. Банах, Г. Штейнгауз, Ю. Шаудер, В. Орлич, С. Мазур... Банах обладал большим чувством юмора. Любил подшучивать над коллегами и говорил, что нужно каждый день принимать двести грамм портвейна, так как без этого невозможно заниматься наукой!

МИ был чрезвычайно тактичен по отношению к людям. Учил, что всегда особое внимание адресовано женщинам. Рассказывал, как приехал в Германии к известному профессору, и тот двинулся навстречу ему с приветствиями, но МИ прежде всего подошёл и поклонился его секретарше, и только потом обратился к хозяину.

Вообще тактичность МИ была необыкновенна. В обращении с коллегами и со студентами одинаково! Меня очень удивило его внимание к каким-то моим фантазиям на тему уравнений Максвелла, когда я ещё был студентом второго курса: я задал ему довольно нестандартный вопрос, и он очень серьёзно стал меня расспрашивать, откуда я это взял, и что-то мне посоветовал. Я часто это вспоминаю, когда работаю с младшими коллегами.

Большую роль в жизни МИ играли его друзья. Он восторженно отзывался о мудрости Иосифа Абрамовича Овсеевича, его преданности Институту (ИППИ) и его воинских заслугах. Чрезвычайно уважительно относился к Виктору Борисовичу Лидскому как блестящему математику и бывшему фронтовику, который на своих плечах притаскивал из разведки "языков". Самая нежная дружба связывала его с Лазарем Ароновичем Люстерником, который был его научным руководителем и соавтором знаменитых работ по малому параметру, коими МИ очень гордился. Часто тепло вспоминал Сергея Львовича Соболева, Мстислава Всеволодовича Келдыша, Марка Григорьевича Крейна и научные контакты с ними. С огромным пиететом относился к математическому гению Израиля Моисеевича Гельфанда, хотя и не одобрял его стиля общения с коллегами. Посещал его семинар каждую неделю без исключений в течение 33 лет. Он говорил: "Мы много лет не могли ездить по свету, и нам было трудно получать научную информацию, но зато у нас был Гельфанд!"

МИ обладал необыкновенным чувством юмора, очень любил хорошую шутку. Вспоминал, как Люстерник спрашивал его: "Марк! Когда Вы встаёте? – В 7 часов, Лазарь Аронович! – А разве есть такое время суток?" Однажды играли в шарады – загадывали друг друга – и МИ спросил "на какое животное похож этот человек". Ему ответили, что на опоссума. Он спросил, как выглядит опоссум, и ему сказали, что это такая черная свинья. Тогда МИ воскликнул: "Так это Вы, Лазарь Аронович?"

МИ всегда рано вставал. Час-полтора – прогулка и зарядка в Нескучном Саду (когда жил на новой квартире). В 8 часов завтрак, в 9 часов садился за рабочий стол. Как-то раз я заехал к нему утром по делам и заметил на абсолютно пустом письменном столе стопку чистой бумаги – примерно 50 листов. Спрашиваю: "Марк Иосифович, а что Вы собираетесь писать? – А этого я ещё не знаю!" Нарушать распорядок научной работы он не позволял ни под каким предлогом. Концерты или спектакли – как редчайшие исключения – два-три раза в год.

Состояние его здоровья было не лучшим после лихорадки, перенесённой в 1942 году в Махачкале. По этому поводу он однажды консультировался у знаменитого терапевта-эндокринолога Исаака Григорьевича Баренблатта, который с 1930 года работал в Кремлёвской больнице. Тот выписал ему целую кипу рецептов, и когда МИ пришёл в аптеку на (старом) Арбате, провизоры спросили его участливо хором: "Это Вам, наверное, профессор Баренблатт выписал?" В результате ему выдали гору лекарств. МИ вышел из аптеки, зимнее солнце слепило глаза и звенела капель с сосулек. МИ засунул всю эту гору лекарств в ближайшую урну и решил вести здоровый образ жизни.

Про И.Г. Баренблатта МИ рассказывал, что во время "дела врачей" (1952 год) к нему в Кремлёвской больнице прибежала медсестра: "в вашей палате пациентка кричит, что её отравили творожниками и у неё резь в желудке". ИГ бегом в палату: быстро проглотил оставшиеся творожники и объяснил, что они немного горчат, – "соды переложили!" Так что вещдоки были съедены, и ИГ остался на свободе! К сожалению, он не избежал лагеря в более вегетарианские времена в 1958 году за неуважительные высказывания о Хрущёве, которые его ближайшие друзья, как и положено, передали куда следует... (эта история подробно описана в воспоминаниях его сына, замечательного механика Григория Исааковича Баренблатта, посвящённых А.Д. Сахарову [Бар96]).

В дальнейшем МИ культивировал спортивный образ жизни. Каждое утро – интенсивная и долгая зарядка, КАЖДОЕ воскресение – поход 20–25 км по Подмосковью. В компании близких друзей. Всегда с Овсеевичем.

После защиты кандидатской диссертации в 1947 МИ начал преподавать в МЭИ. Он чрезвычайно ответственно подходил к преподаванию и прославился в МЭИ как экстраординарный лектор. Однако на сдаче политзачёта он потерпел фиаско: ему достался трудный вопрос о "ножницах", про которые он не имел ни малейшего понятия. Он совсем плохо понимал эту "грамоту" и от отчаяния начал декламировать то, что знал: "пролетариат берёт власть в свои руки..." Доцент марксизма-ленинизма, принимавший экзамен, радостно воскликнул: "Так ты совсем дурак!" – и сразу поставил зачёт.

МИ, начиная с работы в МЭИ, очень увлекался большим теннисом и с восторгом рассказывал про свои победы над более молодыми партнёрами.

МИ не признавал точного разграничения математических дисциплин и всегда говорил, что математика едина. Его собственные математические интересы были очень разнообразны, хотя не во всех этих областях он работал: теория множеств и теория чисел, топология и комплексный анализ, функциональный анализ и спектральная теория, теория меры и теория упругости...

МИ всегда и неустанно искал темы для работы. Считал правильный выбор темы решающим для успешного развития математических методов. Всех расспрашивал и был в постоянном сомнении, чем надо заниматься.

Повторял, что Гильберт считал нужным менять тематику работы каждые четыре года (сам Гильберт так и делал: алгебра и алгебраическая геометрия, интегральные уравнения, теория относительности, логика...). МИ также начинал с проекций Вейля и самосопряжённых расширений оператора Лапласа, затем работы по малому параметру с Люстерником (которые получили огромную цитируемость), корректность задачи Коши (совместная работа с Соболевым, развитие которой послужило основой трёх томов Лионса и Мадженеса), нелинейные сильно эллиптические уравнения, краевые задачи для псевдодифференциальных операторов (с Эскиным), аналитические методы для уравнений в частных производных (с Фурсиковым), уравнения с бесконечным числом переменных (с Блехером и Марченко), потом статистическая гидродинамика (с Фурсиковым и мною), аттракторы автономных и неавтономных уравнений (с Бабиным и Чепыжовым).

В плане выбора тематики МИ очень внимательно прислушивался к Гельфанду. Был обрадован, когда Гельфанд сказал ему "Вы делаете героическое дело" по поводу занятий уравнениями с бесконечным числом переменных. С восхищением относился МИ к Марку Крейну.

МИ был знаком с И.Г. Петровским с 1946 и активно участвовал в его семинаре, когда был прикомандирован к аспирантуре МИАН. Это знакомство переросло в большую дружбу начиная с 1965, когда МИ перешёл на работу на кафедру дифференциальных уравнений мехмата МГУ, которой заведовал Петровский (он же был ректором МГУ с 1951 г.). Оба они относились друг к другу доверительно, с большим уважением и интересом, и по-человечески, и как учёные.

Петровский был легендарной личностью, преданной науке и людям. Он был депутатом и членом Президиума Верховного Совета СССР и председателем комиссии по помилованию. МИ рассказывал, что Петровский иногда жаловался, что не спал всю ночь: решал чью-то судьбу... Иногда говорил, показывая вверх: "сегодня утром ещё двоих туда отправил..."

Как член Президиума Верховного Совета, Петровский вёл приём в своем кабинете в Главном здании МГУ на Моховой. После его смерти в этом кабинете был устроен мемориальный кабинет-библиотека, в которую были переданы его семьёй все его книги. Возможно, этот кабинет существует до сих пор... Все аспиранты и сотрудники нашей кафедры участвовали в перевозе множества книг с дачи Петровского в Абрамцеве: целый грузовик!

Друг Петровского, известный астрофизик академик И.С. Шкловский, писал о нём так: "Судьба ректора Московского университета академика Ивана Георгиевича Петровского была глубоко трагична. Это ведь древний сюжет – хороший человек на трудном месте в тяжёлые времена! Надо понять, как ему было тяжело. Я был свидетелем многих десятков добрых дел, сделанных этим замечательным человеком. Отсюда, будучи достаточно хорошо знакомым со статистикой, я с полной ответственностью могу утверждать, что количество добрых дел, сделанных им за всё время пребывания на посту ректора, должно быть порядка 10^4. Много ли у нас найдётся людей с таким жизненным итогом?"[1] МИ рассказывал, что однажды люди на приёме пожаловались Петровскому, что никак не могут попасть к высокому бюрократу, чтобы решить важный вопрос. Тогда Петровский сам пришёл с этими людьми к нему на приём – и тоже получил отказ в приёме! После чего Петровский вошёл в кабинет этого начальника и сказал, что он сам будет вести приём посетителей в этом кабинете – он имел на это право как член Верховного Совета!

Петровский очень скрупулёзно относился к своей обязанности помогать людям. Однажды двое профессоров мехмата захотели вступить в хороший жилкооператив, для чего были нужны очень сильные ходатайства – письма в Моссовет. Один просил подписать письмо премьер-министра Косыгина, а другой просил Петровского. Так вот, просьбу Петровского Моссовет уважил, а премьера – нет! Дело в том, что Петровский в конце письма приписал, что просит сообщить ему о принятом решении, а премьер ничего такого не просил...

Петровский сильно переживал парткомовский произвол на вступительных экзаменах, но ничего не мог сделать один против целой системы. Его близкая знакомая, жившая на соседней даче в Абрамцеве, рассказывала: однажды у Петровского гостили профессора мехмата Самарий Александрович Гальперн и Михаил Александрович Крейнес – его ближайшие друзья. Дело было в начале июля – как раз во время вступительных экзаменов. Крейнес пришёл

[1] И.С. Шкловский, "Эшелон. Невыдуманные рассказы". – Москва, "Новости", 1991.

из сада и говорит, что у калитки стоит мальчик. Через час – стоит. Через три часа – опять стоит! Тогда Петровский говорит: “Позовите его”. Оказалось, конечно, что мальчика завалили на устном экзамене на мехмат, и поставили неуд. Расспросили как проходил экзамен – всё понятно... Тогда эти три профессора составили экзаменационную комиссию и проэкзаменовали. Поставили отлично и составили протокол. Все трое подписали. Что было потом – не знаю...

Всё, что касалось успешности работы Университета, было для Петровского абсолютным приоритетом. Он привлёк к работе на физфаке Льва Давидовича Ландау и Евгения Михайловича Лифшица, преодолевая упорное сопротивление тамошних антисемитов. На мехмате в 1964 году он организовал новую кафедру химической механики во главе с Вениамином Григорьевичем Левичем. Таких кафедр тогда, наверное, нигде в мире не было. Там собрался уникальный коллектив выдающихся ученых. С этой кафедрой сотрудничали такие крупнейшие физики-теоретики в области статистической физики и теории сверхпроводимости, как Анатолий Иванович Ларкин и Игорь Ехиельевич Дзялошинский. Они были впоследствии частыми участниками семинара по математической физике имени Петровского, читали на мехмате блестящие спецкурсы. В 1972 году власти разогнали эту кафедру из-за того, что Левич подал заявление на выезд в Израиль. Петровский не смог этого предотвратить, но он сохранил ВЕСЬ состав кафедры, зачислив их на свою кафедру дифуравнений. Так что мы все на кафедре оказались в таком блестящем обществе, пока Петровский был жив. Потом многих из этих физиков, конечно, выжили. После этого Ларкин и Дзялошинский много лет украшали самые престижные университеты мира.

Доступность Петровского была легендарной. Он часто прохаживался с кем-нибудь по вестибюлю главного здания МГУ – там, где лифтовые холлы. В это время любой человек мог к нему подойти и поговорить по любому поводу. Я сам однажды на ПЕРВОМ курсе явился в приёмную ректора на 9-м этаже с какой-то дурацкой просьбой подписать письмо на Московский международный кинофестиваль – очень хотелось туда попасть... Секретарша посмотрела на меня с соболезнованием, как на больного, и сказала, что ректор меня примет через 10 минут. Точно через 10 минут ректор вышел в секретариат и присел со мной на диван. Прочел письмо и сказал, что он его подпишет и пошлёт по адресу, но себе он просить билет не будет. Дружески со мной попрощался...

В другой раз он меня вызвал для знакомства через 7 лет, когда принимал меня на работу на свою кафедру. Мне повезло, что он пришёл на заседание кафедры, когда я представлял кандидатскую диссертацию. На следующий день Петровский позвонил МИ и спросил, рекомендует ли он меня оставить для работы на кафедре. МИ сказал, что да, рекомендует. Когда я пришёл на приём к ректору в его маленький кабинет (10 кв. м), он разговаривал по телефону. Не отрываясь от трубки, он протянул мне руку и буквально обнёс вокруг своего письменного стола и усадил в кресло. Потом сказал 2–3 слова о дальнейшем движении дела, и на этом всё было кончено. Через полгода его не стало...

На панихиде по Петровскому в МГУ я стоял последним в очереди для прощания. Передо мной в очереди стоял Зельдович. Рядом Ростропович играл Баха на виолончели.

После кончины Петровского МИ совместно с Олейник и Новиковым вели общемосковский семинар по математической физике имени Петровского. МИ почти 20 лет не пропускал ни одного заседания, даже когда все другие руководители отсутствовали. На семинаре выступали известные физики и математики с сообщениями о новейших теоретических и экспериментальных достижениях. В частности, Дзялошинский рассказывал о жидких кристаллах и принёс небольшой кружок 3 см в диаметре с жидкокристаллической плёнкой. Мы на неё нажимали пальцем, и она меняла цвет. В 1975 было совершенно непонятно, зачем всё это, но теперь-то все мы знаем эти экраны ТВ, мониторов, смартфонов и пр.

Петровский приложил большие усилия, чтобы командировать МИ в 70-е годы для чтения лекций в Коллеж де Франс по приглашению Жака-Луи Лионса. Там МИ была вручена именная медаль Коллеж де Франс, которую он показывал близким друзьям (но без особого восторга). МИ приобрёл в лице Жака-Луи Лионса друга и последователя в математике (в частности, известные три тома Лионса–Мадженеса развивают результаты работ МИ с Соболевым о корректности задачи Коши, о чем говорилось выше). МИ ещё несколько раз бывал в Париже и читал лекции в институте Анри Пуанкаре. Последний раз я встречался с МИ в Париже в 1995. Он очень тепло относился к французским коллегам и друзьям: Ж. Лерэ, Л. Шварц, Ж. Тронель, А. Бенсуссан, А. Аро, Х. Брезис, Р. Темам и другие. Эти контакты и, в частности, диссертации М. Вио и Э. Парду оказали важное влияние на дальнейшие исследования МИ по статистической гидродинамике. Также результаты Аро по теории аттракторов оказали большое влияние на исследования МИ по аттракторам диссипативных уравнений. В свою очередь, Аро рассказывал, что на него огромное влияние оказали лекции МИ в Коллеж де Франс и контакты с ним. Аро приезжал в Москву в 2012 и делал доклад на конференции 90-летия МИ в ИППИ (там же выступали, в частности, Ниренберг и Темам).

Кстати, Жак-Луи Лионс очень часто приезжал в Москву по поводу французских запусков на Байконуре, на которых он всегда присутствовал как министр Франции по космосу в 1984–1992 гг. Во многих таких случаях он заезжал в МГУ на семинар МИ и беседовал с нами на кафедре дифференциальных уравнений. В 1976 он привез с собой большую группу своих молодых учеников (Темам и другие, примерно 10 человек) на первую конференцию имени Петровского. Все они были тогда на семинаре МИ.

Из зарубежных контактов МИ необходимо отметить также его визиты к Брюнингу в Аугсбург, к Вендланду в Штутгарт, а также в Берлин, где он много работал с молодыми математиками (Фидлер, Шеель и другие). Кроме того, он неоднократно посещал США, где познакомился с Като, Селлом и другими.

МИ знал многие языки: по-французски говорил свободно, немецким владел в совершенстве – так говорили все немецкие коллеги. Его русский язык был безупречен. Свободно говорил по-польски и по-украински. Очень любил украинские песни и напевал их. Говорил, что украинский – его первый язык, которому его выучила кормилица-украинка. Она-то и научила его украинским песням.

В жизни МИ очень большую роль играла музыка, которую он любил слушать вечером после занятий математикой. Любимые композиторы – Моцарт, Брамс, Бетховен... Особенно восхищался девятой симфонией Бетховена: я прихожу к ним домой, а он напевает слова Шиллера “все люди – братья!” Эти слова приводили его в восторг.

Чуть ли не главным своим вкладом в науку МИ считал свой семинар на мехмате МГУ – знаменитый семинар по понедельникам вечером в аудитории 13-06. В этом семинаре выросло множество выдающихся математиков. Много десятков, если не сотен. Приезжали участники и докладчики из других городов и республик (В.Я. Иврий из Магнитогорска, А.С. Диканский из Баку и многие другие). МИ обязательно беседовал с каждым докладчиком перед семинаром – как правило, приглашал к себе домой.

Также он часто приглашал к себе домой своих студентов и аспирантов для научной работы в спокойной обстановке. МИ всегда очень радовался успехам и талантам своих учеников и заботливо к ним относился. Помогал им, чем только мог: и в математике, и поддерживал материально (часто безвозмездно).

Требования к докладам на семинаре были очень строгие: всё должно быть точно и понятно сформулировано. Доказательства только короткие и поучительные. Важно объяснить происхождение тематики доклада и дать общую картину состояния области. Свои результаты – потом, желательно в конце... Говорить надо ОЧЕНЬ громко и ВСЁ писать на доске! Часто МИ останавливал докладчиков и просил повторить, прикладывал ладонь к уху и говорил: “Не слышно! Громче!” или “Звук!” Этот семинар, несомненно, сыграл важную роль в развитии теории уравнений в частных производных. На нём сложилась научная школа М.И. Вишика, одна из ведущих мировых научных школ на мехмате того времени, наряду со школой А.Н. Колмогорова по теории вероятностей, школой И.М. Гельфанда по функциональному анализу и теории представлений, школой Б.В. Шабата по комплексному анализу и другими.

Множество замечательных математиков приходили на семинар МИ и делали доклады. Из постоянных участников в течение многих лет: М.С. Агранович, А.В. Бабин, Л.А. Багиров, Б.Р. Вайнберг, Н.Д. Введенская, Л.Р. Волевич, А.И. Вольперт, А.М. Габриэлов, В.В. Грушин, А.С. Демидов, Ю.А. Дубинский, С.В. Зелик, А.М. Ильин, С.М. Козлов, Е.А. Копылова, С.Н. Кружков, С.Б. Куксин, А.Д. Мышкис, В.П. Паламодов, Б.П. Панеях, Л.Д. Покровский, А.Л. Пятницкий, М.В. Федорюк, Б.В. Федосов, А.В. Фурсиков, В.В. Чепыжов, А.И. Шнирельман, М.А. Шубин, Г.И. Эскин и многие другие. Неоднократно делали доклады также В.В. Жиков, В.Е. Захаров, В.Я. Иврий, Ю.С. Ильяшенко, А.Г. Костюченко, М.А. Красносельский, О.А. Ладыженская, В.Б. Лидский, Жак-Луи Лионс, В.Г. Мазья, В.П. Маслов, Луи Ниренберг, А.Я. Повзнер, Я.А. Ройтберг, П.Е. Соболевский, З.Г. Шефтель, В.И. Юдович...

Как правило, доклады на семинарах МИ касались самых актуальных проблем. Нередко докладывались свежайшие, только что полученные результаты, и даже не доведённые до конца исследования. Например, помню очень яркий доклад Ю.С. Ильяшенко в 1980 г., который вместе с А.Н. Четаевым впервые получил оценку ν^{-4} для хаусдорфовой размерности аттрактора галёркинских приближений уравнений Навье–Стокса. Более того, эта оценка была равномерной относительно размерности приближений. Эти результаты стали откровением для всех участников семинара и большим событием в науке.[2] Этот метод основан, грубо говоря, на обобщении формулы Лиувилля для изменения объёма на бесконечномерные системы: в экспоненте стоит след линеаризованной динамики, который становится отрицательным при больших размерностях, поскольку собственные числа стремятся к минус бесконечности. Оставалось доработать эти результаты до оценок аттрактора бесконечномерной системы Навье–Стокса. Впервые это осуществили независимо и практически одновременно О.А. Ладыженская, Ю.С. Ильяшенко с А.Н. Четаевым, а также МИ с А.В. Бабиным. Метод Ю.С. Ильяшенко–А.Н. Четаева с тех пор получил широчайшее распространение и применяется в огромном числе работ ко всё новым и новым уравнениям с диссипацией (уравнение Шредингера с диссипацией, Гинзбурга–Ландау и др.).

Мне выпало счастье учиться у МИ со второго курса в студенческие годы и в аспирантуре, затем сотрудничать с ним 9 лет и вместе работать на одной кафедре более 20 лет; наша дружба длилась до его последних дней. Как научный руководитель МИ был очень требователен и одновременно очень внимателен, корректен и снисходителен. Плановые встречи были на кафедре каждую неделю в точно фиксированный день и час.

МИ всегда говорил, что нужно очень много читать разных статей – и требовал этого от своих студентов. Мне тогда казалось это требование чрезмерным, почти невыполнимым! Но гораздо позже я понял, что иначе просто нельзя, и это оказалось чрезвычайно важным для моей научной работы.

На втором курсе, для начала, мне поручалось прочесть замечательную статью Гохберга и Крейна 1958 г. в “Успехах”, и затем статью Кона и Ниренберга по псевдодифференциальным операторам. Это я ещё превозмог, но затем уровень задаваемых статей резко повысился, и тут мне пришлось туго... Сказалось расслабление выпускника матшколы, которому на первых двух курсах всё было по колено. Курсовую работу на четвёртом курсе я фактически провалил, и Олейник мне на защите выговаривала своё негодование за плохую работу. МИ казался более спокойным.

После четвёртого курса МИ летом пригласил своих студентов к себе на дачу в Кратово и там предложил нам на выбор несколько серьёзных проблем. Я выбрал краевые задачи в

[2]Об этом также вспоминает А.В. Бабин; см. Главу 12. (*Прим. ред.*)

областях с рёбрами, как МИ прокомментировал, в связи с моими увлечениями памятниками архитектуры.

Потом был пятый курс с дипломной работой по задачам в областях с коническими точками, сделанной на основе метода Кондратьева. Кошмар с задачей с ребрами начался в аспирантуре, когда МИ почти ежедневно меня спрашивал "как дела?", и я отвечал три года подряд: "ничего не получается..." МИ говорил, что эту тему надо оставить, поскольку ей занимаются "большие дяди", и неоднократно предлагал другие темы, но из них тоже ничего не выходило. Идея про характеристическую риманову поверхность возникла довольно быстро, но на этом всё кончалось. Однажды Саша Шнирельман, посмотрев на мои попытки, сказал что он видел нечто похожее в книге В.А. Малышева по случайным блужданиям, которую он только что рецензировал. Я стал внимательно просматривать эту гениальную книгу (понимать в ней, конечно, я тогда ничего не мог), и постепенно нашёл методом исключения страницу, где, как я чувствовал, должна была быть разгадка моих трудностей. Но в чём она – было неясно. Книга, раскрытая на этой странице, лежала у меня на столе примерно месяц или два, после чего вдруг всё прояснилось, и работа была закончена за 3 месяца с применением метода автоморфных функций Малышева на римановой поверхности. МИ сразу назначил мой доклад на своём семинаре и пригласил на него будущего моего оппонента М.В. Федорюка. Другой оппонент был В.А. Малышев, а внешняя организация была Ленинградский университет, и я ездил туда делать доклад на семинаре замечательных математиков С.Г. Михлина и В.Г. Мазьи. Через много лет выяснилась связь этой проблематики с работами Зоммерфельда, Соболева, Келлера и многих других по дифракции на клине, и эта область до сих пор интенсивно развивается. Только терпение и доверие МИ позволило мне четыре года работать без помех и получить новый результат. Предложенная им проблема оказалась исключительно плодотворной.

Подобным же образом МИ вырастил множество учеников, много десятков, если не сотен. Он очень охотно общался со всеми, делился идеями и задачами и помогал всем, чем только мог. Множество специалистов считают себя его учениками. Со всей страны приезжали люди на его семинар делать доклады. Как говорил Петровский, этот семинар сделал для развития теории уравнений в частных производных в СССР больше, чем целые академические институты.

Когда МИ переехал на новую квартиру у метро "Ленинский проспект", он стал ходить на семинар к 19 часам пешком. Ходил очень быстро – я за ним с трудом поспевал. Приходил он заранее и со всеми общался до семинара. Общался очень деликатно и уважительно со всеми, включая зелёных студентов. Охотно обсуждал нематематические темы и новости, в том числе спортивные. Рассказывал, что в юности был увлечённым футболистом.

Часто МИ вспоминал свою молодость и историю бегства из Львова от гитлеровцев [Дем08]. Всех студентов собрали в зале университета и сказали, что немецкие войска входят в город, и все комсомольцы должны немедленно уходить. Так и пошёл со всеми, не заходя домой, и никогда больше не увидел ни свою мать, ни других родных.

Первые дни они бежали почти круглые сутки. Люди падали в изнеможении. Друг МИ предложил ему остаться у его тёти в селе и переждать несколько месяцев, пока обстановка не нормализуется, но МИ не согласился. Друг погиб, как только немцы добрались туда. МИ говорил, что ему спас жизнь сержант Иванов, который был в их группе: как только кто-то останавливался или падал, он подбегал и наставлял пистолет: "Вставай – буду стрелять!" Потом начался голод. Продовольствия нигде не было, и приходилось просить подаяния у крестьян. Однажды пришлось простоять несколько часов у калитки, пока дали кусок хлеба. Несколько раз он терял сознание от голода.

Голод преследовал МИ и позднее во время войны. Он говорил, что в Тбилиси утром съедал полученный по карточкам хлеб и до 12 часов занимался математикой, "а потом начинался голод..." Ему помогали друзья как могли: Векуа и Мусхелишвили относились к нему как к сыну, одна сотрудница отдала ему свой пропуск в столовую. Часто его подкармливали в доме его друга-студента Карена Тер-Мартиросяна, будущего замечательного физика. Ко всем этим людям МИ сохранил самые нежные чувства, и дружба с ними продолжалась всю жизнь.

Дом МИ был очень хлебосольный, и Ася Моисеевна всю свою жизнь посвятила созданию условий для работы МИ с его сотрудниками. Она к тому же редактировала все тексты МИ и сурово всем выговаривала за грамматические неточности... Преданность и любовь этих людей друг к другу была необыкновенной.

Известность МИ и его вклада в науку со временем возрастали. Большую известность в 50-х годах приобрёл метод “Лакса–Мильграма”, который впервые был введён в работах МИ, как говорил Жан Лерэ (и как отмечалось также в совместной работе Лерэ и Лионса [LL65]). Работы МИ с Люстерником по малому параметру вызвали необыкновенный бум во многих областях математики и её приложениях. Количество цитирований этих работ было беспрецедентным, так же как его работ с Эскиным по краевым задачам для псевдодифференциальных операторов.

После лекций МИ в Коллеж де Франс он стал широко известен во всём мире, был избран в Американскую Академию Искусств и Наук (в 1992), а также в Академию Сорокá (Национальная академия наук Италии) в 1996. На церемонию приёма МИ в Академию Сорокá в марте 1996 я приезжал в Рим из Милана, где был тогда с визитом. Представление делал член академии Луиджи Америо, председательствовал Гаэтано Фикера.

Кроме того, МИ вёл очень большую и бескорыстную работу по рецензированию статей для математических журналов. Мне тоже по его поручению пришлось поработать над улучшением некоторых публикаций.

Тем не менее, в России признание научных заслуг МИ пришло сравнительно поздно и совершенно несоразмерно, несмотря на его ранние блестящие работы по расширениям оператора Лапласа, по малому параметру и по сильно эллиптическим нелинейным уравнениям. В первую очередь это следствие заскорузлого государственного антисемитизма, на пик которого и пришлось начало научной деятельности МИ (он защищал докторскую диссертацию в 1951 г...). Впрочем, последействие этой “государственной” политики Россия расхлебывает до сих пор.

Весь математический “бомонд” СССР хорошо знал выдающуюся ценность работ МИ. Однако вхождения в академию это, как известно, не гарантирует. Гораздо важнее принадлежность к разным научным корпорациям. Однажды МИ на воскресной прогулке вблизи Ясенева повстречался с академиком Никольским, который очень приветливо помахал рукой и радостно прокричал издали: “да-да, я знаю – мы вам недодаём!”

Для МИ важным требованием к научному исследованию была эффективность: например, какой-либо критерий должен быть легко проверяемым. Непременным условием было наличие примеров: если есть только абстрактные условия и нет простых конкретных примеров – это не годится.

Оглядываясь на научное наследие МИ, я удивляюсь, как много и каких замечательных открытий в математике ему удалось сделать! Он обладал обширной эрудицией и большой научной чуткостью к новым проблемам. Для меня МИ навсегда остался образцом научной отваги и благородства, деликатности и человеческого обаяния.

[LL65] J. Leray, J.-L. Lions, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 97–107.

[Бар96] Г. Баренблатт, *Из воспоминаний*, *“Он между нами жил...” Воспоминания о Сахарове*, “Практика”, Физический ин-т им. П.Н. Лебедева РАН, Москва (1996).

[Дем08] В. Демидович, *Интервью с М.И. Вишиком*, *Мехматяне вспоминают*, 103–135, МГУ, Москва (2008).

Глава 12

М.И. Вишик

Анатолий Бабин

Калифорнийский Университет (Ирвайн)

В этих заметках я делюсь воспоминаниями о М.И. Вишике, которые сохранились в моей памяти. Я старался быть точным, но прошло много времени. В отношении нашей работы с М.И. Вишиком по теории аттракторов я упоминаю самые яркие моменты, которые врезались мне в память. Я почти совсем не упоминаю работ других авторов, которые работали в области аттракторов УрЧП; много ссылок и замечаний по истории вопроса и точные математические формулировки можно найти в нашей книге с Марком Иосифовичем [БВ89] и в моих двух обзорных статьях [Bab03, Bab06].

Я услышал о Вишике от моего друга Бори Штильмана в 1970 г. на втором (или начале третьего) курсе, когда нужно было думать о специализации. Я знал только, что мне нравятся вещи, близкие к физике, и выбирал между дифурами и тервером. Боря разбирался гораздо лучше, и благодаря ему я пошёл к Вишику. В то время был семинар для студентов и аспирантов, которым руководил Вишик; он проводился в аудитории 13-06 перед большим семинаром. На этом семинаре мы занимались, как я помню, теорией обобщённых функций; занятия вели в основном Миша Шубин и Саша Комеч, а Марк Иосифович делал замечания. Я помню, он как-то раз сказал: “Если идёте на кафедру дифференциальных уравнений, нужно уметь дифференцировать”. Припоминаю ещё один семинар, где присутствовала Ольга Арсеньевна Олейник; я решил какую-то задачу, но допустил погрешность, и Ольга Арсеньевна довольно сурово на это указала, а Марк Иосифович за меня вступился. Иногда я оставался на большой семинар, но почти ничего не понимал. На 3 курсе я слушал обязательный курс по УрЧП, который совершенно замечательно читал Вишик.

Мне помнится, что в то время главным направлением работы семинара была теория псевдодифференциальных операторов и связанные вопросы, и вначале Марк Иосифович предложил несколько статей для изучения. Но потом он сказал мне, Боре и Фиме Шифрину: “Сделайте что-нибудь нелинейное”, и доверил Саше Шнирельману помогать нам в этом. С тех пор я и занимаюсь нелинейными уравнениями. К теме своей кандидатской диссертации я пришёл в результате двух влияний: идей Саши Шнирельмана о важности квазилинейной структуры и многочисленных докладов на семинаре Вишика, в которых доказывалась конечная размерность ядра и коядра различных линейных эллиптических задач и обсуждалась теорема об индексе. Примерно в 1972 г., на пятом курсе или в начале аспирантуры, я смог протащить методологию линейной эллиптической теории через квазилинейные трудности и получил “теорему о конечномерности ядра и коядра квазилинейных эллиптических уравнений”. Тогда впервые Марк Иосифович пригласил меня к себе домой, и несколько часов, сидя рядом с ним за письменным столом, я излагал детали. Когда я закончил, он спросил: “А вы абсолютно уверены, что всё правильно?” Я вроде сказал что абсолютно быть в чём-то уверенным вообще трудно. Марк Иосифович засмеялся: “Ну понятно, значит, математика – наука вероятностная”. После этого я два или три заседания маленького семинара подряд рассказывал свою работу.

После защиты диссертации в 1976 г. я увлёкся линеаризацией нелинейных операторов с целью конструктивно их обращать, а потом итерациями линейных дифференциальных операторов с аналитическими коэффициентами и связью с теорией весовых приближений многочленами. Примерно в 1981 г. Марк Иосифович пригласил меня поговорить о моей научной деятельности. Он особенно оживился, когда я сказал, что не только занимаюсь линейными вещами, но по-прежнему очень интересуюсь уравнениями Навье–Стокса и вообще нелинейными задачами. Он предложил вместе изучать поведение решений нелинейных параболических уравнений при больших временах и начать с простейшего полулинейного уравнения. Марк Иосифович предположил, что может помочь специальная градиентная структура пространственной части. И действительно, уже в первый же день мы заметили, что из монотонного убывания энергии следует асимптотическое стремление каждого решения к стационарным. Марк Иосифович спросил, можно ли уточнить характер этого стремления. И здесь помог мой опыт с линеаризациями, так что я нарисовал у каждой неподвижной стационарной точки входящее устойчивое и выходящее неустойчивое многообразие и движение типичного решения по гиперболе, приближающейся к неустойчивому многообразию. Стало ясно, что выходящие неустойчивые многообразия играют важную роль. Стали думать, что же они описывают, ведь каждое решение идет к стационарной точке. И в процессе обсуждения поняли, что если взять ограниченное множество начальных данных, то образ этого множества при сдвиге по траекториям притягивается к объединению неустойчивых многообразий (такой объект впоследствии мы стали называть регулярным аттрактором).

Вскоре я заметил, что конструкция регулярного аттрактора, основанная на притяжении образа ограниченного множества, совпадает с конструкцией инвариантного омега-предельного множества уравнения Навье–Стокса из работы Фояша и Темама 1979 года, которую они прислали М.И. и которую он дал мне когда-то на ознакомление. Я сказал М.И., что мы должны дать общее определение, которое охватывало бы обе ситуации, и предложил определение, которое включало инвариантность, ограниченность и притяжение ограниченных множеств; такое определение гарантировало единственность объекта. Он задумался, а затем спросил: "А вы уверены, что нам нужно в это влезать?" Я ответил, что это естественный подход. М.И. помедлил, потом с энтузиазмом хлопнул рукой по столу и сказал, что тогда нужно браться за дело. М.И. после консультаций с Арнольдом и Ильяшенко предложил название "максимальный аттрактор", чтобы подчеркнуть разницу с минимальным аттрактором, который в регулярном случае состоит из устойчивых стационарных точек. Кроме того, максимальный аттрактор является максимальным ограниченным инвариантным множеством. В отличие от определения омега-предельного множества, которое зависит от начального множества и не включает понятия притяжения, наше определение включает притяжение как главное свойство, что дало основание использовать термин "аттрактор". Так мы пришли к понятию максимального (глобального) аттрактора уравнения с частными производными. В упомянутой выше статье Фояш и Темам доказывали конечность размерности омега-предельного множества. М.И. предложил найти явные оценки хаусдорфовой размерности аттрактора в терминах физических параметров. В этой работе очень помогли контакты М.И. с Ю.С. Ильяшенко, который указал нам на геометрические подходы, применяемые в теории динамических систем. Раздумывая о структуре аттракторов, я сообразил, что неустойчивое многообразие стационарной точки лежит в аттракторе, даже если аттрактор имеет очень сложную структуру. Поскольку неустойчивое многообразие имеет ту же размерность, что и линейное неустойчивое подпространство линеаризации уравнения на стационарном решении, то появляется возможность оценить размерность аттрактора снизу. Я спросил М.И., не помнит ли он работ по гидродинамической неустойчивости; они могли бы нам помочь оценить снизу размерность аттрактора Навье–Стокса. М.И. сказал, что припоминает доклад В.И. Юдовича, и что оттиск должен быть у него на работе в Институте проблем механики, где он работал по совместительству. М.И. принес оттиск и ссылки на работу Л.Д. Мешалкина и Я.Г. Синая. Теперь мы могли оценивать размерности и сверху, и снизу. Ещё одно направление исследований открылось, когда М.И. предложил посмотреть на гиперболические уравнения с трением. У них тоже есть глобальный функционал Ляпунова, и аттрактор имеет регулярную структуру. Улучшить результаты по гиперболическим уравнениям помогла техника оценок Алена Аро, с которым М.И. познакомился во время поездки во Францию и о котором очень тепло отзывался. Потом нам сказали (к сожалению, не помню, кто), что эта техника есть в работах Н.Ф. Морозова.

Вот так началась наша многолетняя деятельность. Я приезжал на Ленинский проспект раз или два в неделю, привозил тексты, написанные на основе предыдущей встречи. Мы обсуждали написанное, и я отдавал тексты М.И. При следующей встрече он доставал написанный им на основе моих заметок текст и рассказывал мне, а потом отдавал на следующую итерацию. После нескольких итераций мы уже использовали в основном ножницы и клей. Когда статья была завершена, М.И. отдавал её машинистке, а формулы вписывала Ася Моисеевна; она очень сетовала на мой ужасный почерк. Иногда во время обсуждений придумывали что-нибудь новенькое, тогда М.И. говорил: “Ну вот, кажется, что-то наговорили. Пиши, Толя!” Все эти годы я чувствовал себя у М.И. как член семьи. Была атмосфера взаимного уважения и взаимопонимания. Я с теплотой вспоминаю наши обеды с Марком Иосифовичем и Асей Моисеевной, когда мы обсуждали последние новости. М.И. во время наших занятий, чтобы немножко передохнуть, иногда делился со мной воспоминаниями, и, что характерно для него, он никогда не говорил ни о ком плохо. Он иногда сетовал на то, как трудно работать с О.А. Олейник, но при этом всегда добавлял: “Имейте в виду, Толя, она к вам хорошо относится”. М.И. всегда очень высоко отзывался о Л.А. Люстернике. Но в памяти у меня осталось, как он однажды сказал: “Когда задача была решена, Л.А. почему-то совсем было неинтересно довести ее до завершённой статьи”. М.И. не признавал мелочей и всегда стремился к совершенству. Как-то раз мы рассматривали задачу, в которой было много частных случаев. М.И. предложил рассмотреть ещё один специальный подслучай. На это я, с молодой самонадеянностью, сказал: “Ну, это уже крохоборство!” М.И. в ответ только сказал: “Крохоборство!”, и ещё раз повторил: “Крохоборство!”, и со свойственной ему деликатностью ничего не добавил, но интонация его была очень красноречива.

Работая над теорией аттракторов, я не бросил свои занятия конструктивным представлением решений УрЧП и обнаружил очень красивые связи между гладкостью решений вырождающихся уравнений и теорией весовых приближений С.Н. Бернштейна. В 1985 г. я написал докторскую диссертацию на основе этих работ. М.И. сразу принял в судьбе диссертации самое живое участие. Он сказал, что мне не следует подавать в Ученый совет на мехмате, поскольку Андрей Фурсиков туда подаёт, а некоторым членам Совета может не понравиться, что сразу два ученика Вишика защищают докторские, и это может навредить нам обоим. Он сказал, что нужно подавать в Ленинград в ЛОМИ, и он будет просить О.А. Ладыженскую меня курировать. И М.И. тут же пошёл к телефону и стал ей звонить. Они долго разговаривали; чувствовалось, что отношения между ними очень дружеские, и в конце концов Ольга Александровна согласилась послушать меня. Так начались мои регулярные поездки в Ленинград. Должен сказать, что хотя Ольга Александровна была его “старый товарищ”, не всё было безоблачным. Их дружба тянулась многие десятилетия; иногда случались конфликты. М.И. вспоминал, как они часто беседовали, и он делился с О.А. своими соображениями; он также вспоминал, как во время прогулки он спросил О.А., почему она не сослалась на него в работе по гиперболическим уравнениям. Она ответила: “Я на тебя тогда сердилась”. Может, из-за этих старых счётов М.И. возражал, когда я предлагал слишком комплиментарные ссылки на её работу 1972 года. Дело в том, что когда наши первые результаты по аттракторам были опубликованы в 1982 г., наше внимание обратили на статью Ладыженской 1972 года в Записках научных семинаров ЛОМИ, где изучалось омега-предельное множество двумерной системы Навье–Стокса; к сожалению, не помню, кто нам указал на статью, может быть сама О.А.; она нас пригласила на конференцию в ЛОМИ в 1982 г. и предложила поместить статью в Записках. Статья 1972 года замечательная, там было построено инвариантное множество, которое совпадает с аттрактором, и исследованы решения на нём. Потом О.А. очень резко критиковала нас в статье в УМН, по-видимому, за недостаточное внимание к её работе. Но тем не менее приоритетные споры никак не отразились на отношении к моей диссертации, и защита успешно прошла в 1985 г. М.И. очень переживал, что О.А. была обижена; он говорил, что ему больно читать её критику не из-за критики, а потому, что он чувствует её душевную боль.

Времена стали меняться. Горбачёв открывал страну. Я видел его в Ленинграде в 1985 г. на площади Московского вокзала: он впервые пошёл общаться с согражданами, чем явно испугал свою охрану, бросившуюся за ним, когда он уже пересёк половину площади. Я впервые поехал за границу в 1989 г. в США, в Миннеаполис, где Джордж Селл организовал школу по динамическим системам; М.И. присоединился чуть позже. Мы с М.И. жили в течение месяца в одной квартире. К сожалению, М.И. тогда не очень хорошо себя чувствовал, у него были проблемы с печенью, но он активно участвовал в работе школы и с интересом и присущим ему энтузиазмом впитывал впечатления незнакомой ему американской жизни. Годы нашей совместной работы подходили к концу. Новые возможности, с одной стороны, и ощущение тектонических сдвигов – с другой гнали меня через границы и океаны, а М.И. продолжал упорно трудиться в Москве. Последний раз мы провели вместе заметное время, когда он приехал в Ирвайн на месяц. Ася Моисеевна уже была очень слаба. Помню, когда мы гуляли по берегу Тихого океана, она сказала: “Никогда не понимала, зачем нужно много денег. А теперь знаю: чтобы купить дом на берегу и смотреть на океан”. А М.И. по-прежнему неустанно работал. Он однажды сказал: “Математика не подведёт”.

М.И. для меня образец ученого, это высокий образец, которому нелегко следовать. Многому я у него научился; приведу лишь один пример. Когда я только начинал вместе с ним работать, для меня уравнения матфизики были частными примерами концепций функционального анализа. Но постепенно картина перевернулась, и уравнение стало для меня фундаментом, на котором можно строить функциональные построения.

Марк Иосифович Вишик был не только моим учителем: он был одним из самых близких для меня людей, и он навсегда в моей памяти.

[Bab03] A. Babin, *Attractors of Navier–Stokes equations*, Handbook of mathematical fluid dynamics **2** (2003), 169–222.

[Bab06] A. Babin, *Global attractors in PDE*, Handbook of dynamical systems **1** (2006), 983–1085.

[БВ89] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, Москва (1989).

Глава 13

Памяти Марка Иосифовича Вишика

Василий Демидович и Владимир Тихомиров

Мехмат, Кафедра общих проблем управления, Московский Государственный Университет

Марк Иосифович Вишик родился 19 октября 1921 года в принадлежавшем тогда Польше Львове в семье (как он говорил, "техника") Иосифа Марковича Вишика и его жены, работавшей, по его словам, библиотекарем, Регины Вениаминовны (урождённой Барах). Отца Марк потерял в возрасте 8 или 9 лет, и его мать одна воспитывала четверых детей – у Марка были старший брат, младшая сестра и младший брат. Тем не менее, несмотря на сложившееся тяжёлое материальное положение семьи, Марк сумел окончить львовскую гимназию, а затем ещё проучиться два года во львовском физико-математическом лицее. К тому времени он свободно владел польским, украинским и немецким языками, а русским языком овладел лишь в зрелом возрасте.

В сентябре 1939 года в восточные районы Польши, населённые в основном украинцами, вступили войска Красной Армии, и Львов стал городом Украинской ССР. А в декабре 1939 года, на основании успешного окончания гимназии и специализированного лицея, Марк Вишик был зачислен без экзаменов на физико-математический факультет Львовского государственного университета. Там ему довелось слушать лекции, в частности, Юлиуша Шаудера и Гуго Штейнгауза, а также участвовать в работе семинара Стефана Банаха. Но проучился он в университете лишь до начала Великой Отечественной войны.

Скажем несколько слов об этих двух упомянутых польских математиках, принадлежавших к знаменитой львовской математической школе, лидером которой был Стефан Банах.

Сначала о Шаудере. В "досоветские годы", как говорил Марк Иосифович, Польша была "слегка коричневой", и в стране существовали национальные ограничения на занятие определённых государственных должностей. Поэтому, в частности, Шаудер, несмотря на уже приобретённую научную известность, не мог тогда преподавать в университете, – он был всего лишь учителем гимназии. Но после того, как Львов стал советским, Шаудер получил такую возможность и перешёл на работу во Львовский государственный университет, где быстро сдружился с Банахом.

Что касается Штейнгауза, то это именно он "открыл Банаха": ведь Банах учился в Кракове, в Ягеллонском университете, а Штейнгауз, случайным образом познакомившись с ним в краковском парке "Планты", разглядел его талант, стал его наставником и затем "перетащил" его во Львовский университет.

При активном участии самого Банаха и его коллег во Львовском университете был создан студенческий математический кружок, подобный спецсеминарам и кружкам Мехмата МГУ, на который львовские математики уже стали весьма регулярно приезжать: знаменитый "банаховский кружок". Работа кружка была организована в традиционной форме: студентам раздавали статьи для изучения и последующего доклада на заседании кружка. Марк Вишик тоже делал доклады на этом кружке и запомнился Банаху. А Банах вскоре, возвратившись после очередного посещения Москвы, поведал “кружковцам”, что встретился там с грузинскими математиками и договорился с ними заключить социалистическое соревнование между Тбилисским и Львовским университетами. И молодой, амбициозный Марк Вишик воодушевился раскрывающимися перед ним интересными творческими перспективами.

С началом Великой Отечественной войны Марк Иосифович, буквально за несколько часов до немецкой оккупации Львова, *отправился пешком* на восток прямо из университета, не успев даже попрощаться со своей семьёй. Где-то за пару недель, прячась от немцев, полуголодный, полуодетый, по лесам и болотам, он добрался до Винницы.

И это спасло ему жизнь – ведь, как он узнал в конце 1945 года, во львовском гетто погибла вся его семья: мать, старший брат (профессионально обучавшийся играть на скрипке), сестра и младший брат (ещё школьники). Погибли во львовском гетто и многие математики банаховского кружка: Герман Ауэрбах, написавший в гетто свою последнюю работу “О геометрии треугольника”, опубликованную только в 1992 году в журнале “Wiadomości Matematyczne”; Юлиуш Шаудер...

В Виннице Марк при попытке вступить в Красную Армию получил отказ, как ему шепнули неофициально, “в связи с недоверием к лицам, проживавшим в областях Западной Украины”. Тогда он решил продолжить учёбу в Краснодарском педагогическом институте. И на товарном поезде, через Киев, он добрался до Краснодара.

Но в Краснодарский пединститут Марка не взяли. И чтобы выжить в Краснодаре, он брался там за любую подработку – одно время даже попытался стать грузчиком, однако когда на него взвалили большой мешок лука, он с этим мешком просто упал. Как он потом рассказывал, “карьера грузчика на этом для меня закончилась”. Тем не менее по возможности он там самостоятельно занимался математикой.

Затем, с приближением немецких войск к Краснодару, Марк, практически случайно “достав” билет на поезд до Еревана, отправился на этом поезде, шедшем по запретной зоне вдоль Каспийского моря. Но, опасаясь при малейшей проверке крупных неприятностей, Марк сошёл с поезда в Махачкале. Там его наконец-таки приняли учиться в Махачкалинский пединститут, который он закончил за один год.

В Махачкале Марк, “изучив книгу Хаусдорфа и выполнив даже некоторую работу по упорядоченным множествам”, послал Илье Несторовичу Векуа в Тбилиси письмо об этом. Векуа в ответе любезно предложил прислать в Тбилиси статью, “и если работа будет того стоить, то её напечатают”. Окрылённый таким отношением к нему, Марк устремился в Тбилиси.

Добравшись, “неизменно с трудностями”, осенью 1942 года до Тбилиси, Марк пришёл там в Тбилисский университет прямо к ректору и, предъявив ему свою зачётку с подписью Банаха, попросил зачислить его на 4-й курс физико-математического факультета. Ведь он проучился два года во Львовском университете и ещё год в Махачкалинском пединституте. При этом он добавил, что “президент Грузинской академии наук Николай Иванович Мусхелишвили и декан физико-математического факультета Львовского университета Стефан Банах ещё до войны официально заключили во Львове социалистическое соревнование между Тбилисским и Львовским университетами в области математики, и он, как представитель Львовского университета, готов продолжить это социалистическое соревнование с ними в Тбилисском университете”. “Можете себе представить, как это восприняли грузины!” – вспоминал Марк Иосифович.

Деканом Физмата Тбилисского университета в то время был как раз Илья Несторович Векуа, и нужно было его согласие на зачисление Вишика на этот факультет. Несмотря на то, что Векуа тогда болел, он принял у себя дома Марка, побеседовал с ним и написал о нём, как Марк Иосифович выразился, “невероятно хорошие слова, чтобы меня зачислили в Тбилисский университет”. Так Марк Вишик стал четверокурсником физико-математического факультета. И за один год он с отличием закончил Физмат.

В 1943 году, сразу же после окончания Физмата, Марк поступил в аспирантуру Тбилисского математического института имени А.М. Размадзе Грузинской академии наук, где его научным руководителем стал Илья Несторович Векуа. Успешно занимаясь в аспирантуре, и одновременно работая ассистентом в Тбилисском университете, Вишик тем не менее задумал завершить своё обучение в Москве. Векуа, по словам Марка Иосифовича, воспринял эту идею "без особого восторга, Мусхелишвили же меня понял, и убедил Векуа отпустить меня в Москву". А в начале 1945 года Мусхелишвили поехал в Москву и договорился с Лазарем Ароновичем Люстерником, чтобы он взял "под своё крыло" Марка Вишика при переводе его в аспирантуру Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук. Так весной 1945 года Марк Вишик, приехав в Москву, стал аспирантом знаменитой "Стекловки". В Москве он вскоре женился на Асе Моисеевне Гутерман – выпускнице Мехмата МГУ, участнице Великой отечественной войны, преподававшей во ВТУЗе и некоторое время занимавшейся редакционной работой.

Как неоднократно говорил Марк Иосифович, в его нелёгкой жизни наибольшую поддержку ему оказали Николай Иванович Мусхелишвили, Илья Несторович Векуа, Лазарь Аронович Люстерник, Иван Георгиевич Петровский и жена – Ася Моисеевна Гутерман. Повторял об этом он всегда со словами глубокой благодарности к ним. О том, как ему содействовали Николай Иванович Мусхелишвили и Илья Несторович Векуа, можно прочесть в книге [Дем08].

О значимости Лазаря Ароновича Люстерника для Марка Иосифовича рассказывает В.М. Тихомиров:

Лазаря Ароновича Вишик боготворил. Эта любовь даже помешала мне осуществить полностью один мой замысел. Для предшествующего сборника "О друзьях, которых нет с нами" я подготовил текст, посвящённый Люстернику. В нём, под заголовком "Светлая личность высвечивается лучами юмора", я привёл такой фрагмент из жизни Лазаря Ароновича.

Однажды Евгений Михайлович Ландис, будучи студентом, недавно пришедшим с войны, в военной гимнастёрке пришёл сдавать спецкурс Люстернику. Они встретились в назначенное время, Люстерник задал вопрос и куда-то вышел. Вскоре он вернулся, но не начал экзамена, а стал разговаривать с Ландисом о математике. Это длилось около часа. Наконец, Люстерник нетерпеливо посмотрел на часы и сказал: "Ну куда же он пропал?" "Кто-то должен подойти?" – спросил Ландис. И Лазарь Аронович ответил: "Ну конечно, где же тот студент, которого мы с Вами должны экзаменовать?"

Второй фрагмент из жизни Лазаря Ароновича я назвал "Люстерник идёт с женой в театр". Это очень смешной рассказ, возможно, апокриф, который после войны передавался из уст в уста о том, как Лазарь Аронович пошёл с женой в Большой театр, и в антракте жена попросила его пойти в раздевалку, чтобы из кармана её манто взять носовой платок. А Люстерник, размышлявший о своих проблемах, действительно, зашёл в гардероб, но подал гардеробщику свой *номерок, получил* своё *пальто, взял такси, приехал домой и лёг спать. И далее описывались переживания жены, оставшейся без номерка, носового платка и без мужа.*

Наконец, третий фрагмент о Лазаре Ароновиче. В 1975 году Люстерник вышел на пенсию. На вопрос, почему он это сделал, Лазарь Аронович шутливо ответил, что он недавно определил тот момент, когда профессор МГУ должен выходить на пенсию. Именно, поскольку, как известно, для того, чтобы открыть парадную дверь главного входа в МГУ, требуются немалые усилия, профессор МГУ может работать в Университете лишь до того момента, когда он сам, без посторонней помощи, может открывать эту дверь.

Так вот, я имел неосторожность подготовленную свою статью показать Марку Иосифовичу, чтобы обсудить её перед тем, как её отправить в печать. Марк Иосифович пришёл в необычайное волнение. Он уверял меня, что такого не могло быть, что "его" Лазарь Аронович был всегда точным и адекватным человеком, выполнявшим сложнейшие работы и *задания, никогда не допускавшим подобных поступков и т.д., и т.п. И я не посмел оставить для печати в своём тексте фрагменты, по-моему, замечательно характеризующие Лазаря Ароновича, но вызвавшие неожиданное "негодование" Марка Иосифовича.*

А цикл работ Люстерника и Вишика по "малому параметру" остаётся классическим вплоть до наших дней.

Впоследствии М.И. посвятил памяти Лазаря Ароновича одну из своих монографий [Vis92].

Теперь расскажем кратко о влиянии Ивана Георгиевича Петровского на судьбу Марка Иосифовича. Приехав в Москву, Вишик, работая в математике с необычайным упорством и занимаясь преподаванием, которое требовало большого напряжения, посещал многие мехматские семинары, прежде всего семинар Петровского–Соболева–Тихонова. Так вышло, что когда семинар срывался по причине болезни докладчика или его внезапной командировки, не было нужды отменять семинар: всегда можно было попросить Вишика рассказать что-либо новое из того, что он придумал за последние дни. Иван Георгиевич очень быстро осознал математический и педагогический талант Марка Иосифовича. И в середине 1960-х годов он решил выделить для Вишика профессорскую ставку на возглавляемой им кафедре дифференциальных уравнений Мехмата МГУ. Он сказал о своём замысле Вишику и попросил никому об этом не говорить вплоть до того момента, когда Вишик действительно получит свою профессорскую должность.

После того, как всё стало известно, многие люди выдвигали различные гипотезы по поводу того, кого именно опасался Иван Георгиевич. Не буду обсуждать эти гипотезы. Иван Георгиевич был воистину "один в поле воин". Ему не на кого было опереться в своём служении Московскому университету, но многие по разным причинам были готовы оказывать ему противодействие. И потому пусть никто о его замыслах не знает до поры до времени.

А Марк Иосифович в 1965 году благополучно стал профессором кафедры дифференциальных уравнений Мехмата МГУ.

Наконец, немного о незабвенной жене Марка Иосифовича – Асе Моисеевне Гутерман.

Почти шестьдесят четыре года провели они в супружеском союзе. Ася Моисеевна была человеком высокой культуры. Марк Иосифович всегда говорил о влиянии *Асеньки* на его человеческое формирование. Жена учила его русской речи, устной и письменной. Безусловно, она оказала большое влияние на его восприятие литературы, поэзии, музыки, да и вообще культуры в самом широком значении этого слова.

Марк Иосифович и Ася Моисеевна вырастили двух сыновей: Семёна (р. 1946) и Михаила (р. 1954). Оба они стали математиками и теперь живут в США.

Марк Иосифович очень сдружился с Иосифом Абрамовичем Овсеевичем, мужем сестры Аси Моисеевны. Это были совершенно разные люди. Марк Иосифович никогда не занимал никакого общественного поста. А Иосиф Абрамович прошёл всю войну, был награждён орденами Красного Знамени, Красной Звезды, тремя орденами Отечественной войны, медалями и окончил войну полковником. Его роль в создании в 1961 году Института проблем передачи информации Академии Наук (ИППИ), как написано в одном из очерков, посвящённых Овсеевичу, неоценима. Формально он был заместителем директора, но реально являлся основной движущей силой Института. И дружба этих людей, пусть была не "лёд и пламень", но всё-таки её можно было бы охарактеризовать как "тихий лесной ручеёк и бурный горный поток".

Иосиф Абрамович был на пять лет старше Марка Иосифовича, а умер на два года раньше его, на 95-м году своей жизни. На протяжении почти полувека друзья проводили один день в неделе вместе – либо в пешем походе, либо на лыжах. Эта дружба способствовала тому, что в 1993 году Вишик перешёл на работу в ИППИ РАН.

Вернёмся к подробностям "профессионального роста" Марка Иосифовича.

По окончании аспирантуры Стекловки, Марк Иосифович под руководством Люстерника завершил написание своей кандидатской диссертации и успешно её защитил в МИАН в 1947 году. Оппонентами были Иван Георгиевич Петровский и Сергей Львович Соболев.

После защиты кандидатской диссертации встал вопрос об устройстве в Москве на работу. Времена для Марка Иосифовича тогда были не простые: в стране уже разворачивалась “борьба с космополитизмом”. По совету Наума Ильича Ахиезера, Марк Иосифович подал заявление на работу на кафедру математики Московского энергетического института (МЭИ). Блестящую рекомендацию в поддержку его кандидатуры дал Сергей Львович Соболев. И Марка Иосифовича взяли на работу в МЭИ.

Преподавал там Марк Иосифович ярко и вдохновенно. Например, закончив доказательство *формулы Ньютона–Лейбница* о связи дифференцирования и интегрирования – одной из основных формул всей математики – Вишик предложил слушателям “встать и воздать дань уважения этим великим учёным”. И он, одним из первых в истории математического преподавания в нашей стране, организовал математический семинар *в техническом вузе*, откуда пошли его первые московские ученики.

Проработал он в МЭИ до 1965 года.

К январю 1951 года Марк Иосифович подготовил уже свою докторскую диссертацию и завёз её в Стекловку. Учёный секретарь Института сказал ему “оставить у него один экземпляр диссертации и через месяц-другой ему сообщат по телефону, что делать дальше”. Марк Иосифович терпеливо ждал, но никакого звонка в течение полугода из Стекловки не было. А в июне 1951 года Иван Георгиевич Петровский поинтересовался у Марка Иосифовича, как идут дела с его докторской диссертацией. Услышав в ответ, что вот уже шесть месяцев диссертация находится у учёного секретаря, и никакой реакции на неё нет, Петровский, ничего не сказав, сел в машину и поехал к директору Стекловки Ивану Матвеевичу Виноградову. В результате в тот же день учёный секретарь позвонил Марку Иосифовичу и сказал ему срочно готовить бумаги для защиты: анкету, характеристику, автобиографию и прочее.

Так, в 1951 году, при единогласном голосовании “за”, Марк Иосифович успешно защитил свою докторскую диссертацию на Совете Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, оппонентами были Сергей Львович Соболев, Израиль Моисеевич Гельфанд и Андрей Николаевич Тихонов. А в 1952 году пришло сообщение из ВАК об утверждении Марка Иосифовича доктором физико-математических наук.

В 1953 году, когда кафедру математики в МЭИ возглавлял Алексей Фёдорович Леонтьев, Марк Иосифович стал профессором этой кафедры. А в 1965 году, как уже говорилось, по приглашению Ивана Георгиевича Петровского он перешёл уже в Московский государственный университет в качестве профессора кафедры дифференциальных уравнений Мехмата МГУ. Кроме того, в 1966-1991 годах он работал ещё в Институте проблем механики Академии наук (впоследствии – Институт имени А.Ю. Ишлинского).

В 1961 году на Мехмате МГУ начал функционировать один из самых выдающихся семинаров в истории факультета – семинар Вишика, проходивший более полувека в аудитории 13-06 практически до последних дней его жизни. О роли этого семинара в истории математики прошлого века подробно написано в книге, опубликованной в 2002 году Американским математическим обществом (AMS) [Agr02, Shu02].[1]

Но к 1990-м годам на кафедре дифференциальных уравнений Марк Иосифович перестал чувствовать себя достаточно комфортно. В результате в 1993 году он решил перейти в ИППИ, оставшись на Мехмате МГУ на полставки на другой кафедре. И В.М. Тихомиров, в то время заведующий кафедрой, считает одной из удач своей жизни то, что Марк Иосифович попросил принять его на кафедру общих проблем управления. Там уже работали его преданные ученики – Андрей Владимирович Фурсиков и Александр Сергеевич Демидов.

Так с 1993 года до конца своих дней Марк Иосифович был профессором нашей кафедры

[1] См. также Главу 23. (*Прим. ред.*)

ОПУ и главным научным сотрудником ИППИ.

Работая на кафедре ОПУ Мехмата МГУ, Марк Иосифович с увлечением занимался педагогической деятельностью. Для студентов и аспирантов он читал различные спецкурсы, отражающие его широчайшие научные интересы. А для научных сотрудников и преподавателей он вёл, как уже мы говорили, общемосковский научно-исследовательский семинар по дифференциальным уравнениям и их приложениям. Выступить с докладом на этом семинаре считали за честь не только российские, но и многие зарубежные специалисты.

[Agr02] M. S. Agranovich, *Mark Vishik's Seminar at Moscow State University*, *Partial differential equations*, vol. 206 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 239–253, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2002).

[Shu02] M. Shubin, *List of selected talks at M. I. Vishik's Seminar in Moscow*, *Partial differential equations*, vol. 206 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 255–278, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2002).

[Vis92] M. Vishik, *Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations*, Cambridge University Press (1992).

[Дем08] В. Демидович, *Интервью с М.И. Вишиком*, *Мехматяне вспоминают*, 103–135, МГУ, Москва (2008).

Глава 14

Марк Иосифович рассказывает...

Андрей Комеч

Институт Проблем Передачи Информации РАН (Москва) и Техасский A&M Университет (Колледж Стейшн)

Вишик – слово, знакомое с самого рождения: у обоих родителей "Маркиосич" – научный руководитель. Довольно нескоро, уже школьником или даже студентом, познакомился с Марком Иосифовичем лично.

– Андрей, а какими задачами Вы сейчас занимаетесь?

– В абстрактной гамильтоновой системе... – внимательно дослушав, но, видимо, сразу потеряв энтузиазм:

– Понятно. Понятно. А ещё – какими задачами Вы ещё занимаетесь?

– В одномерной модели, вот такое уравнение, вот с такими и такими предположениями и условиями на нелинейность...

(Кажется, даже не дослушав:) – Андрей, мне кажется, что вот эта задача – очень, очень интересная и важная задача! Очень хорошая задача. Я думаю, что Вы занимаетесь очень интересной задачей!

* * *

– Андрей, а с кем Вы познакомились в этом году? Это важно, это очень важно!

* * *

После одного очень абстрактного семинара, на котором было понятно, что докладчик изголодался по преподаванию: определение 1, определение 2, определение 3, теорема 1, следствие 1, следствие 4...

– Мы сейчас прослушали очень интересный доклад. Очень интересно! Очень интересная теория. Мне очень понравилось! Замечательный доклад! Давайте пожелаем докладчику, чтобы он применил свою теорию к каким-нибудь интересным задачам!

* * *

– Марк Иосифович, а кем был Ваш отец?

– Точно не знаю, но он всё умел делать. Мы в детстве делали всё, Вы этого себе сейчас даже не представляете. Чтобы зарабатывать. У меня мама очень любила масло: не сыр, а именно масло, и я, когда зарабатывал деньги, покупал ей масло.

* * *

– Марк Иосифович, а на каком языке Вы говорили в детстве?

– По-польски. Мы говорили по-польски, и ещё я выучил украинский: вокруг Львова жили украинцы, и на рынке дешевле было покупать, если говорить с ними по-украински. Русский я не учил: Россия была очень далеко. Это уже потом, когда вы нас освободили...

– Марк Иосифович, а от кого мы вас освободили?

– От Польши!

– Но ведь получается, что Вы – поляк?

– Ну, Андрей, это было давно...

Вот что рассказывал сам Марк Иосифович про свою жизнь своим друзьям и коллегам. Эти и другие истории можно прочесть в сборнике [Дем08].

Львов

Марк Вишик рассказывает: “Когда я был ещё совсем мальчиком, у меня было что-то “не ладно” с головою: что-то у меня “летало в мозгу”. Мама пошла со мной к врачу. А он сказал, что это с возрастом пройдёт – просто мой мозг развивается быстрее, чем череп. Ну и, действительно, всё прошло. И в школе я уже учился хорошо, и даже отличался как-то. Это была обычная польская районная школа. Я могу такую мелочь ещё рассказать. Но это было уже в лицее, в последнем классе. Мы проходили интерполяцию логарифмов, когда нет какого-то значения логарифма в логарифмической таблице и надо найти значение этого логарифма в промежутке. И учитель сказал, что надо разбить промежуток на десять равных частей и так далее. А я поднял руку и спросил: “Откуда известно, что логарифм – линейная функция?”. Это произвело большое впечатление на лицейский педсовет. А директор тогда произнёс замечательную хвалебную фразу про меня. Но не буду долго про это рассказывать... У меня были и другие такие успехи, хотя дома никто со мной математикой не занимался.

Я учился в 9-й гимназии, а затем в 5-м лицее.[1] Лицеи были по специальностям. Я был в физико-математическом лицее, но были ещё биологические лицеи, гуманитарные лицеи, и так далее. В то время не было никаких вступительных экзаменов. Мы просто писали заявление, и по нашим данным об окончании лицея – в лицее, конечно, выдавался документ о том, что мы его окончили, – так вот, на основе данных, что мы окончили лицей и претендуем на дальнейшее обучение во Львовском университете, нас туда приняли. И дальше я учился на математическом факультете университета до начала войны, до первых дней войны.

Насколько я помню, зачисление наше во Львовский университет произошло в декабре. В начале января мы уже стали слушать лекции. Я ходил каждый день в университет, причём, в первой половине дня, как правило, слушал лекции, а во второй половине дня бежал домой, где мама кормила меня обедом. А потом я шёл в библиотеку и просиживал там почти всё время. Даже в выходные я ходил туда, если библиотека была открыта.

Юлиуш Шаудер читал нам на втором курсе механику по книге Банаха. У него была замечательная методика преподавания: в начале каждой лекции он просил, чтобы кто-нибудь из аудитории повторил основные теоремы предыдущей лекции. Это занимало минут десять. Обычно отвечали наиболее способные молодые люди.

[1] Видимо, Марк Вишик учился в IX мужской гимназии имени Яна Кочановского, в доме, расположенном на ул. Хотинская, в домах 4 и 6; и Марк Вишик, и его друг Владек Лянце числятся в списке выпускников на странице гимназии (с 1959 года – школа №59 по тому же адресу). Потом, видимо, Марк Вишик поступил в лицей с физико-математической и гуманитарной специализацией при V мужской гимназии имени гетмана Станислава Жолкевского, расположенной тогда по адресу ул. Самуэла Кушевича, 5. (*Прим. ред.*)

Ещё мы с Шаудером встречались в библиотеке. Он часто приходил туда, занимался своими делами, читал журналы. Это была прекрасная старинная библиотека Львовского университета. Кроме того, видя, что в библиотеке есть такие вот молодые люди, которые рьяно занимаются, читают разные книги, даже на немецком языке, он однажды подошёл ко мне и пригласил как-нибудь побеседовать с ним. С тех пор он стал моим первым консультантом, скажем так, математическим консультантом. Он был очень хорошим человеком, рассказывал мне о том, что есть математика аналитическая, геометрическая и так далее. Это был великий учёный, его сравнивали с самим Банахом. Хотя до освобождения Польши он был всего лишь профессором 2-ой львовской гимназии (учителей гимназии тогда называли профессорами). Конечно, он выступал на семинарах Банаха. Известны его работы и собственные, и совместные с французским математиком Жаном Лере. Так что, Юлиуш Шаудер сыграл важную роль в моей жизни. Он, можно сказать, направил меня, был моим консультантом. Мы часто с ним встречались, беседовали уж раз в неделю точно.

Немного о Станиславе Саксе. Он был профессором Варшавского университета. Но потом он просто сбежал из Варшавы во Львов: видимо, он был хорошо знаком с Банахом, что и привело его во Львовский университет. Сакс участвовал в семинаре Банаха. Я тоже ходил туда. И хотя был ещё очень молод и многое из того, что там обсуждалось, не понимал, не пропускал практически ни одного семинара, потому что всё было интересно. Я с восторгом воспринимал всё, что там происходило. Больше всего они, конечно, там занимались теоретико-множественной математикой. Важную роль там также играло понятие категории множеств, которое и сейчас изучается. Так вот, Станислав Сакс принимал участие в этом семинаре. Банах был очень весёлым человеком и любил подшутить над Саксом, зная его небольшую рассеянность. Он мог, например, спрятать перед семинаром его портфель. Сакс начинал волноваться: "Где мой портфель? Где мой портфель?" И когда находил его где-нибудь рядом с собой, то очень радовался этому. А Банах весело смеялся.

Вообще Стефан Банах был гениальным математиком. И совершенно непонятно, как в таком городе, как Львов, возникла столь крупная школа функционального анализа. "Школа Банаха" даже организовала во Львове выпуск своего журнала "Studia Mathematica". Вышло выпусков десять этого журнала. Кроме того, Стефан Банах был деканом факультета. И у меня есть подписанная им зачётка, я до сих пор храню её, как реликвию. Я посещал все его семинары. Но лекции он нам не читал. А заместителем декана был Мирон Онуфриевич Зарицкий. Он читал нам курс математического анализа. И это был единственный курс, который читался по-украински, все остальные предметы нам читали по-польски. Помню, Банах и Шаудер поехали в Киев за новыми наставлениями. Это было в 1940 году, по-моему, или же в 1941. Там им сказали, что у вас есть один большой недостаток – нет студенческих научных конференций. И когда они вернулись во Львов, то сразу же предложили студентам сделать свой вклад в науку и выступить со своими докладами на конференции.

Эдвард Шпильрайн занялся подготовкой наших выступлений на срочно организуемой студенческой научной конференции. Это был изумительный человек; во Львов он тоже приехал из Варшавы. Так вот, Шпильрайн собрал нас (тех, что всё время сидят в библиотеке и занимаются), рассказал нам про теоретико-множественную математику, про книжку Хаусдорфа, про его пространства и поставил нам некоторые задачки, которые можно было быстро решить. Связаны они были, в основном, с различными хаусдорфовыми пространствами. И вот всю субботу и воскресенье мы сидели с утра до вечера в библиотеке и продумывали эти наши "открытия" по теоретико-множественной топологии.[2] И затем выступали на вскоре организованной студенческой научной конференции. Банах присутствовал на ней, с удовольствием слушал наши доклады, иногда – я бы сказал, с каким-то юмором – делал свои замечания, очень благоже-

[2] Один из таких результатов Марка Вишика и Владислава Лянце упоминается в "Шотландской Книге" в задаче №192; см. Главу 16. (*Прим. ред.*)

лательные, и потому было приятно, что такой великий учёный, как Банах, сказал что-то по поводу твоей работы. Мне тоже довелось делать доклад на этой конференции.

Вскоре во Львов к Банаху приехал Николай Иванович Мусхелишвили, чтобы заключить социалистическое соревнование между Тбилисским и Львовским университетами в области математики. Я, как член профсоюза, тоже участвовал при заключении этого соревнования и был очень горд этим. Потом я вступил в комсомол и тоже этим очень гордился.

В дальнейшем мы с Банахом встретились в Москве в 1945 году. Это была последняя наша с ним встреча. Его позвал в Москву Андрей Николаевич Колмогоров: он хотел его пригласить на работу в Москву и сделать его академиком АН СССР. В Москве Банах жил в гостинице Академии наук на улице Горького (ныне Тверская улица). Я позвонил ему и сказал, что хочу с ним посоветоваться насчет того, чем дальше заниматься. Приехал к нему в гостиницу. Но когда Банах ко мне спустился, я ахнул: раньше он был полным человеком, а ко мне спустился, так сказать, "одномерный человек", очень, очень похудевший. Но по-прежнему благожелательный. Прежде всего Банах попросил меня рассказать, как я выбрался из Львова. Я рассказал о том, как в первые же дни войны пешком ушёл из Львова, потому что на подступах к Львову были немцы, и тем, кто хотел воевать с фашизмом, сказали, что надо уходить из города. Я рассказал ему всю свою одиссею. Потом Банах спросил, о чём мне хотелось с ним поговорить. Я ответил, что не знаю, чем мне заняться дальше. Он спросил меня, что я читал. Я сказал, что, конечно, читал его книгу по функциональному анализу. И, очутившись в Тбилиси, очень многое прочёл по дифференциальным уравнениям, потому что Тбилисская математическая школа, возглавляемая Мусхелишвили, Векуа и Купрадзе, занималась именно дифференциальными уравнениями. Я рассказал, что в Тбилиси участвовал в работе научного семинара. В частности, там я делал доклад по статье Келдыша в "Успехах математических наук" о регулярных точках границы области. Изучил я также работу Винера – по ней я тоже делал доклад. Я там сделал и несколько обзорных докладов... Ещё я читал книгу Александрова и Хопфа на немецком языке, очень хорошая книга, толстая, я штудировал её целыми днями. Читал я в Тбилиси и другие книги, например, книгу Привалова по комплексным переменным. Выслушав меня, Банах сказал, что очень хорошо, что я изучил все эти области, и что я в конце концов попал в Москву. В Москве есть замечательные специалисты и по функциональному анализу – он назвал Гельфанда, – и по дифференциальным уравнениям: Иван Георгиевич Петровский, Сергей Львович Соболев, Сергей Натанович Бернштейн. Он сказал, что у меня хорошие способности, и потому, посоветовал он, мне следует, "наподобие Шаудера", заняться проблемами, связанными с обеими этими областями. На этом мы расстались. Потом я узнал, что у Банаха уже был рак лёгких: он ведь очень много курил. После нашей последней встречи он прожил совсем недолго, умер во Львове в том же 1945 году.

Теперь о Штейнгаузе. Ещё будучи гимназистом, я ходил иногда во Львовский университет на его лекции, где он рассказывал интересные математические задачи, затем вошедшие в его книжку "Сто задач". Потом я встречался с ним несколько раз на конференциях. Мне также известно, что именно он "открыл" Банаха.[3] Банах учился во Львовском политехническом институте, был там замечательным и очень способным студентом. Это разглядел Штейнгауз и перетащил его из Политехнического института во Львовский университет. Там и стал Банах размышлять над "своим" функциональным анализом, теорией линейных операций. Была книга по этой теме, она, кажется, вышла в 1923 году...[4] По крайней мере, она в то время активно писалась. Итак, Банах собрал вокруг себя и Шаудера, и Мазура, и Орлича, и других замечательных математиков. Кстати, Мазур нам читал во Львовском университете курс

[3]В 1916 году, в краковском парке "Планты", Гуго Штейнгауз услышал разговор двух молодых людей об интеграле Лебега. Заинтересовавшись, он вступил в разговор; молодых людей звали Стефан Банах и Отто Никодим. (*Прим. ред.*)

[4]"Теория линейный операций". Первое издание вышло в Варшаве в 1931–1932 годах. (*Прим. ред.*)

дифференциальной геометрии, прекрасно читал. Экзамен он тоже принимал по-особому. Он задавал вам какую-то задачку, а сам сидел рядом и что-то своё чертил, рисовал, решал. В общем, вы занимаетесь своим делом, а он своим. Потом он смотрел, что было вами сделано, и, если его это удовлетворяло, то просто говорил: “Вы решаете правильно” и ставил вам пятёрку. Мне очень нравилось трудолюбие Мазура. Потом он стал польским академиком. А Орлич нам читал лекции по алгебре.

Кнастер читал нам во Львове аналитическую геометрию. Это был товарищ Павла Сергеевича Александрова. После войны он переписывался с Павлом Сергеевичем по-русски. А когда я сдавал в Москве кандидатский экзамен Павлу Сергеевичу, то он мне сообщил, что Кнастер меня запомнил и тепло обо мне отзывался.

А дело было так. Как-то Кнастер устроил лекционную контрольную работу. Там были, помимо обычных задачек, задачи с одной и двумя звёздочками. Какую-то трудную задачу я решил, причём попутно передоказал теорему одного известного испанского математика. И всю свою работу писал сначала по-украински, а потом, чтобы уложиться в срок, стал писать по-польски. И Кнастер это запомнил. Но мы с ним после войны не встречались. Я встречался после войны с Орличем, когда меня приглашали в Варшаву. Это было несколько раз в Центре Банаха. И там я как-то встретил Орлича. А однажды он даже приехал из Познани в Варшаву, специально, чтобы со мной встретиться. Помню, директор этого института, ученик Ильи Несторовича Векуа, устроил замечательный приём с чаем и пирожными. Мы сидели, вспоминали прошлое. Кстати, Орлич, несколько стесняясь, задал вопрос, есть ли у меня аспиранты. Я ответил, что у меня шесть аспирантов. У него тоже оказалось шесть. Орлич сказал, что в Польше сложилась такая ситуация: руководитель отвечает за то, чтобы аспирант защитил диссертацию вовремя. В общем, стало точно так же, как у нас. Он спросил, как я справляюсь с этим. “Я помогаю!” – говорю. “Вы знаете, Марко Иосифович, я тоже помогаю!” Видите, и ему приходилось помогать. Так что с Орличем я встречался лишь в Варшаве. Очень был хороший человек. После войны однажды я встречался и с Зарицким. Я попытался с ним затем встретиться и в другой раз, приехав с Асей, моей супругой, во Львов, но ничего не вышло: когда мы с моим другом, математиком Владеком Лянце, пришли к Зарицкому домой, чтобы навестить его, то он был уже не в состоянии нас принять. Это было в районе 1961 года, когда он уже был очень болен.”

Уход из Львова

Марк Вишик рассказывает: “С первых же дней войны мы, как комсомольцы, должны были дежурить в университете: на случай, если была бомбежка, снимать зажигательные бомбы. Но, кроме того, нам строго-настрого было приказано носить с собой и паспорт, и военный билет; в общем, все документы. И вот 28 июня, когда я как раз был в университете, кто-то быстро разыскал нас и сказал, что те, кто хочет воевать с фашистами, должны срочно выйти из города и идти на восток, потому что немцы приближаются.[5] И я, с одним моим другом математиком (фамилия его Тепер, а его имя я запамятовал), решили идти воевать. Пошли, даже не зайдя домой, вместе с другими, которые знали дорогу: нам надо было выйти на шоссе, ведущее на восток.

Первый день мы шли пешком вместе с отступающими с техникой нашими войсками. Правда иногда нам разрешали садиться на лафеты пушек, но это, вообще говоря, было запрещено, и потому, в основном, нам пришлось идти пешком. Мы прошли много километров, то ли 50, то ли 60. Вечером, а это был июнь, когда дни самые длинные в году, мы, как шли, так и свалились спать. Прямо в какой-то канаве. И сразу уснули. Когда мы пришли в Тернополь, то мой друг вдруг сказал, что где-то здесь живет его тетя. И он пойдёт и спрячется у неё. А потом вернётся

[5] Немецкие войска вошли во Львов в ночь с 30 июня на 1 июля. (*Прим. ред.*)

во Львов: ведь всё это, полагал он, должно быстро окончиться. Я же возражал, что эта война быстро не закончится. А потому нужно с другими двигаться дальше и идти воевать. Мы расстались, и я пошёл с другими дальше уже без него. О дальнейшей судьбе Тепера я ничего не знаю. Нам посчастливилось, по дороге попалась грузовая машина с хлебом. Видимо, его некуда было девать. И нам просто предложили взять по буханке хлеба. Взял и я. Потом я примкнул уже к группе тернопольских студентов, которые тоже шли на восток. Мы дошли до Жмеринки, там сели на товарный поезд и две недели добирались до Киева. Есть было нечего, я два раза терял сознание от голода, меня чем-то подкармливали. Но, наконец, мы попали в Киевский горком комсомола. Киев не был взят в то время. Вот мы туда и пришли. Там я познакомился со студентами литературных факультетов Львовского университета. Нам сказали, что в армию нас зачислять не будут, но нужны люди для сбора хлеба на Кубани. Нам дали командировку и какие-то средства. И мы поплыли по Днепру до Днепродзержинска, а затем до Тимашёвской станицы. Там, около Тимашёвской станицы, я два месяца убирал хлеб. Когда уборка хлеба окончилась, я сказал этим литераторам, что сидеть с ними я больше не могу, и что мне нужно идти дальше, чтобы наконец-таки попасть в армию. Распрощавшись с ними, я поехал на вокзал один и отправился в Краснодар. В Краснодаре начались очередные мои мучения. Учиться в пединститут меня не взяли. И я, чтобы выжить, брался за любую подработку, но продолжал по возможности заниматься математикой: читал книжку Александрова по теории функций, повторял теоремы, которые выучил раньше. Однажды я даже попытался стать грузчиком, но грузчик из меня не получился: когда на меня взвалили большой мешок лука, я вместе с этим мешком просто упал прямо вперёд. В тот день я заработал, помнится, всего рубль шестьдесят.

И так получилось, что как раз начался набор молодых людей в лётное училище. Я тогда решил примкнуть к ним. В училище, находящемся вне Кубани, в течение трёх недель мы ходили ночью. А днём нас принимали кубанские совхозы. Прекрасно принимали, вкусно кормили, мы даже немножко отдохнули. До сих пор вспоминаю это кубанское гостеприимство. В конце концов, пришло распоряжение: нам всем следует вернуться в Краснодар. А когда я вернулся в Краснодар, то меня там, наконец-таки, взяли в пединститут. Но фашисты приближались к Краснодару. И я понял, что оставаться в Краснодаре нельзя и что надо идти дальше. Нашёлся такой Кратко (это был общественник из Львовского университета), который, узнав, что я ещё здесь, сказал, что мне надо немедленно уезжать, потому что дальше оставаться в Краснодаре нельзя. Он даже предложил мне билет до Еревана, и я у него этот билет купил. Не знаю, как он достал этот билет, но, видимо, он его покупал.

Я сел на поезд, который шёл по железной дороге вдоль Каспийского моря. Это была запретная зона, потому что по той дороге шли нефть и бензин для нашей армии. Там очень строго всех проверяли, смотрели документы. Мне чудом удалось обойти эту проверку. Один адвокат-попутчик сказал мне, что такое дальше вряд ли удастся, и тогда у меня будут крупные неприятности. И когда мы проезжали Махачкалу, он посоветовал мне сойти с поезда. Я вышел и остался в Махачкале. Там меня приняли в Махачкалинский пединститут, который я закончил за один год.

В Махачкале я, кстати, побывал даже командиром женского взвода, помогая военкомату. Я там всё время писал заявление, что хочу в армию. Но меня туда не брали, а лишь давали какую-нибудь работу, в частности, поручали мне разносить повестки в армию местному населению. Иногда я часами искал какие-то хибарки за городом, но поручения выполнял. Мне не говорили, но я стал догадываться, что не берут меня в армию из-за того, что я 18 лет прожил в Польше.

А летом нас послали на сельскохозяйственные работы. Это был фруктовый совхоз; к сожалению, очень малярийный. Заболеваемость была стопроцентная. Я тоже очень сильно заболел малярией. И когда я вернулся в Махачкалу, то был очень болен и сильно отощавший. Меня поместили в больницу, где я какое-то время лежал. Меня навещали доценты пединститута

Прокофьевы – Елена Васильевна с мужем.[6] Я был как живой скелет – так похудел от малярии и недоедания.

А когда я выписался из больницы, то как раз пошёл слух, что немцы уже находятся где-то в районе Моздока. Это было совсем недалеко, и надо было из Махачкалы срочно уходить. Я взял в попутчики своего друга, который тоже решил оттуда срочно уезжать. Мы понимали, что поездом ехать нельзя. Но мы увидели какой-то воинский эшелон с бойцами, ехавшими на юг отдыхать. Там была и боевая техника, а на специальной платформе стоял маленький самолет. Туда, под самолет, мы и решили спрятаться. Сам я подняться не мог, но мой друг поднял и донёс меня. С этим эшелоном мы доехали до станции Баладжары в окрестностях Баку. Дальше был поворот на Тбилиси, и мы вышли из поезда. В Баладжарах нам попался другой эшелон, тоже воинский, тоже ехавший на отдых. Я разговорился с одним лейтенантом из этого эшелона, или старшим лейтенантом, сейчас уж не помню, по счастью, оказавшимся тоже математиком. Рассказал ему, что в Махачкале, изучив книгу Хаусдорфа, я выполнил даже некоторую работу по упорядоченным множествам и послал Илье Несторовичу Векуа в Тбилиси письмо об этом. А Векуа ответил мне, что Сообщения Грузинской Академии Наук выходят регулярно, и что мне стоит написать по своей работе статью и прислать её в редакцию этого журнала. И если статья будет того стоить, то её напечатают. Потому я и стремлюсь в Тбилиси, тем более, что ещё до войны было заключено социалистическое соревнование между Львовским и Тбилисским университетами. Лейтенант сжалился над нами, подвёл нас к вагону с воинскими припасами, амуницией и прочее, посадил нас туда, закрыл вагон и сказал, что за сто километров до Тбилиси выпустит нас из него. И пояснил, что дальше до города мы сами сможем добраться на электричке. Так я попал в Тбилиси."

Тбилиси

Марк Вишик рассказывает: "В Тбилиси я пришёл в университет прямо к ректору. Предъявил ему свою зачётку с подписью Банаха. Я сказал, что Николай Иванович Мусхелишвили, президент Грузинской Академии Наук, и декан нашего факультета Стефан Банах ещё до войны заключили во Львове социалистическое соревнование между Тбилисским и Львовским университетами в области математики. При этом присутствовали многие, я в том числе, и все мы этим были очень горды. Я сказал также, что пришёл как представитель Львовского университета и что готов продолжать это социалистическое соревнование у них в Тбилисском университете. Можете себе представить, как это восприняли грузины!

Деканом факультета в то время был Илья Несторович Векуа, и нужно было его решение о зачислении меня в университет. Но он был болен. Меня отвели к нему домой, когда я сказал, что был с Векуа в переписке и что он даже предложил мне напечатать мою статью в Сообщениях Грузинской Академии Наук. Векуа лежал больной. Его жена как раз приготовила ему сациви, очень вкусное блюдо из курицы с ореховым соусом. Она угостила меня им, я тогда немножко поел как следует. И вот больной Векуа, побеседовав со мной, написал обо мне какие-то невероятно хорошие строки по-грузински, чтобы меня приняли в Тбилисский университет. Но беда была ещё и в том, что в университете уже не было общежития: все помещения общежития были взяты под госпитали. А кровати из общежитий были снесены в бараки во дворе университета. Тогда был найден такой выход: убрали из одного маленького барака кровати, оставив только одну, и поселили меня там, во дворе университета. Климат тёплый, поэтому жить так было можно. Правда, когда был дождик, приходилось двигать кровать, потому что капало с потолка: бараки же не были предназначены для жилья. Так я стал учиться на четвёртом курсе Тбилисского университета. Векуа, как я уже говорил, был деканом факультета.

[6] В истории Дагестанского Государственного Университета, бывшего Педагогического института (см. http://dgu.ru/sveden/2329), упоминается В.Н. Прокофьев, занимавшийся в институте математикой ещё в предвоенные годы. (*Прим. ред.*)

Лекции мне читали Купрадзе и другие хорошие преподаватели. Там я познакомился и очень сблизился с теперь уже покойным Кареном Тер-Мартиросяном, который стал моим ближайшим другом на всю жизнь. Он был на том же курсе. Так я и стал жить-поживать в этом бараке.

Мне приходилось чинить свою одежду самому. Когда у меня совсем прохудились брюки, то, выпросив себе нитку с иголкой, я сделал с ними очень сложную комбинацию, чтобы не было видно дыр. Но закрепление ниток оказалось моей слабой стороной. И однажды, когда я разговаривал с Николаем Ивановичем Мусхелишвили, они разошлись. Тогда Николай Иванович очень тактично предложил мне помочь найти нормальное обмундирование. И он организовал об этом письмо в республиканское министерство лёгкой промышленности от имени президента Академии Наук Грузии, а Векуа пошёл туда с ним сам. И меня немного приодели.

Была у меня проблема и с едой. Но одна студентка с моего курса была женой доцента Тбилисского университета. А у того был пропуск на обед в столовую, которая находилась внизу, на улице Плеханова. Так вот, эта студентка сжалилась надо мной, что я такой неустроенный, и отдала мне этот пропуск. С тех пор я стал есть хотя бы один раз в день что-то вроде похлебки, какое-то второе блюдо... Хлеба было очень мало. Я получал 400 грамм хлеба утром в 7 часов, а в 7:15 его уже у меня не было. Потому что аппетит у меня был хороший, а есть больше было нечего.

В общем, я окончил Тбилисский университет, причём во время учёбы я получал повышенную государственную стипендию (тогда она называлась "сталинской"). После его окончания меня взяли в аспирантуру Математического института Грузинской Академии Наук, и я стал аспирантом Векуа. А кроме того, я стал работать ассистентом Тбилисского университета.

Я начал преподавать, и моим учеником был даже сын Мусхелишвили. Я вёл у него в группе занятия по дифференциальным уравнениям. Как только я закончил университет, Николай Иванович Мусхелишвили постарался, чтобы у меня было хоть какое-то жилье, договорившись об этом с вице-президентом, который курировал абхазских аспирантов. А наверху, у Тбилисского фуникулёра, было их общежитие из нескольких комнат. В одну из этих комнат меня и поселили вместе с ещё одним человеком. Так я и жил в общежитии абхазских студентов. Света там не было. Среди моих абхазских знакомых был Баграт Шинкуба, ставший впоследствии председателем Верховного Совета Абхазии. Он потом написал диссертацию на тему грамматики абхазского языка. Ещё там же был Шалва Инал-Ипа, который написал книгу про историю абхазов. Они стали моими лучшими друзьями. Я вечерами сидел у них в комнате, слушал их интересные рассказы. А утром я уходил на целый день в Академию Наук. Занимался там математикой, читал книги. Там я нашёл книгу по топологии Александрова и Хопфа на немецком языке и всю её прочитал. Больше в своей жизни я топологией не занимался. Этой книги мне хватило, память у меня была хорошая. Кроме того, я прочитал книгу по функциональному анализу Стефана Банаха и несколько книг по комплексному переменному Привалова. Это были такие специальные книги. Ещё я участвовал в семинарах, которые там устраивались и в Академии наук, и в Университете, их вёл Илья Несторович Векуа. Сам я на них довольно часто выступал... Так проходила моя жизнь в Тбилиси. Честно говоря, там мне было не плохо, и я приобрёл там много друзей.

У меня было своё место в комнате на четыре стола. Эта комната находилась напротив комнаты Арнольда Вальфиша. У Вальфиша был свой кабинет: он был заведующим отделом теории чисел. Он обучил нескольких грузин теории чисел, там до него не было такой специальности. А попал он туда следующим образом. Он учился в Варшаве ещё до революции и благодаря этому он имел право на репатриацию в Советский Союз. Некоторое время Вальфиш жил в Германии, где был учеником Эдмунда Ландау. Там он стал специалистом по теории чисел. Там же он женился на немке и с ней приехал обратно в Варшаву. В Варшаве Вальфиш где-то работал. Но ему было тяжело работать: он серьёзно заболел астмой. Врачи посоветовали ему уехать куда-нибудь в тёплые края. И тут Вальфиш вспомнил, что имеет право на репатриацию в Советский Союз. А в СССР есть южные города, например, Тбилиси, за кавказским хребтом, где тёплый климат, мягкий, подходящий. Он как-то договорился с Николаем Ивановичем Мусхелишвили о своём переезде в Тбилиси, предложив создать в Математическом институте Грузинской Академии наук отдел теории чисел и работать в нём. Так Вальфиш и попал в Тбилиси. Вальфиш был очень спокойный, очень выдержанный, чрезвычайно добросовестный человек. И он запретил с ним говорить на какие бы то ни было политические темы. Все это знали. И все понимали, что он, скажем, "не знал многого". Я бывал у него дома. Там они говорили по-немецки. Я понимал по-немецки: немецкий язык я учил ещё во Львове. И выучил его. В частности ещё и потому, что "увёл" у своего одноклассника некоторые книги на немецком языке: у нас в лицее были французские и немецкие классы. Все эти книги я проштудировал за 2–3 месяца, выучил наизусть много стихов. Когда я впоследствии приезжал в Германию, оказывалось, что я знал наизусть, скажем, "Лореляй", а они не знали, сколько я ни спрашивал разных профессоров. Я выучил наизусть много из Гёте. И оду Шиллера "An die Freude" – ту, что Бетховен использовал в своей Девятой симфонии. Так что немецкий язык мне очень пригодился. Я, как уже говорил, выучил написанную по-немецки книгу Александрова и Хопфа.

У Вальфишей были две дочери. У старшей судьба сложилась не очень хорошо, она неудачно вышла замуж. А младшая дочь родилась уже в Тбилиси. Там же училась и там же стала сотрудницей Математического института Грузинской Академии Наук, когда я уехал оттуда, в 1945 году. Я её встретил потом на Всемирном Математическом конгрессе в Берлине. Оказалось, что она репатриировалась в ГДР, нашла там свою судьбу. Я несколько раз виделся с ней в Германии. Дело в том, что я часто приезжал в Кемниц, потому что у меня, уже во время работы в Московском университете, была одна аспирантка из Кемница – он тогда назывался Карл-Маркс-Штадтом – и эта аспирантка приглашала меня к себе. Потом я ездил в Берлин, где меня приглашали в Математический институт Академии Наук.

Вообще Вальфиш сыграл огромную роль в моей судьбе, в частности, в том, что я оказался в Москве. Был конец сорок четвёртого года, и наступал год сорок пятый. В Тбилиси стали приезжать из Москвы известные математики – Андрей Николаевич Тихонов и другие. И у меня стал зарождаться вопрос, что мне делать дальше? Оставаться в Тбилиси я всё-таки не собирался. И я начал думать, что мне пора вернуться во Львов, в замечательную банаховскую школу, в которую я был просто влюблён – к Банаху, Мазуру, Орличу и другим. А Вальфиш постепенно, очень аккуратно, стал убеждать меня, что никакой школы уже, возможно, там и нет. Что только в Москве есть все интересующие меня математические специальности, есть крупнейшие математики. Да и вообще масштаб Москвы нельзя сравнить с масштабом Львова, несмотря на то, что там был Банах. Потом из Москвы приехал Феликс Рувимович Гантмахер, и он тоже начал уговаривать меня не возвращаться во Львов, а ехать в Москву, в которой находится ведущий во всём мире университет. Гантмахер говорил, что там мне будет гораздо лучше, тем более что грузинские и московские математики имеют тесную связь через Николая Ивановича Мусхелишвили. И в конце концов я переменил своё желание возвращаться во Львов, а настроился уехать в Москву."

Москва

Марк Вишик рассказывает: "В 1945 году мой лучший друг Карен Тер-Мартиросян встретил меня на улице и сказал, что начали давать командировки в Москву. Это было в начале года, в январе... Я сразу пошёл домой к моему руководителю – Илье Несторовичу Векуа – и попросил устроить мне командировку в Москву для завершения там своей аспирантуры. Векуа воспринял это без особого восторга: мы во время разговора играли в нарды, и я думал, что он разобьёт эту доску, бросая кости. А Мусхелишвили меня понял: он видел, как я работаю, и осознавал, что мне не место в Тбилиси. И он убедил Векуа отпустить меня в Москву. Вскоре Мусхелишвили поехал в Москву и нашёл мне в Стекловском математическом институте замечательного руководителя – Лазаря Ароновича Люстерника. Николай Иванович знал, что Лазарь Аронович чрезвычайно талантливый человек. Кроме того, Лазарь Аронович никому не отказывал и брал под своё руководство людей из разных республик. Очень добрым был человеком в этом отношении. Узнав, что я из Львова, знаком с Банахом, учился в Тбилиси, он сразу согласился взять меня в аспирантуру.

Лазарь Аронович Люстерник и Анисим Фёдорович Бермант, замредактора журнала "Математический сборник", приезжали в 1939 году во Львовский университет вдвоём, чтобы уговорить Львовских математиков подавать свои статьи в этот журнал. У нас даже тогда произошла одна неприятность с доской: Лазарь Аронович, что-то рассказывая, очень энергично писал на доске, она упала, подбила ему ногу, но не очень сильно. Я помню, что тогда доску поставили на 2 стула, и Лазарь Аронович дальше продолжал свой доклад, который я, к сожалению, тогда не мог понять. Там сидели все – и Банах, и Шаудер, и мы, студенты. Бермант заведомо говорил по-русски, но большинство его как-то понимало. А Люстерник мог говорить и по-польски. Но на каком языке он общался, я не помню. Помню лишь, что доклад его я понять не мог – он рассказывал про свои работы с Шнирельманом. А вот когда к нам приезжал Павел Сергеевич Александров, то я немножко понимал его, потому что он читал лекцию на немецком языке. Он отлично знал немецкий язык. И мы все знали немецкий язык. Потому что Австрия недалеко, и все были с ней как-то связаны. А когда я потом приезжал в Германию, то немецкие профессора говорили, что Павел Сергеевич их учит, как правильно говорить по-немецки.

Итак, я получил командировку в Москву. А я был знаком с министром просвещения Грузии Купрадзе: ведь я слушал его лекции, он был профессором Тбилисского университета. Так вот я к нему обратился, чтобы ускорить эту поездку – время было военное и командировки надо было визировать в правительстве. Он помог мне. И я купил билет в Москву. Одна моя знакомая студентка ещё по Львовскому университету, её звали Бэла, дала мне адрес своих московских родственников на Ново-Басманной улице. Поэтому, приехав в Москву на Курский вокзал, я пешком направился прямо к ним. И прожил у них некоторое время. Потом снимал угол у какой-то женщины: там спал прямо на полу, на матраце. Так я и жил, пока не встретил мою дорогую Асю. (Ася Моисеевна добавляет: Встретились мы в Московском университете как раз в день Победы; нас познакомил Юлик Шрейдер.) Короче, Ася Моисеевна согласилась стать моей женой. Мы стали жить в её комнате на Арбате, на Сивцевом Вражке. И у меня появился там свой маленький столик, где я мог наконец-таки спокойно работать."

Диссертации

Марк Вишик рассказывает: "В 1947 году я защитил кандидатскую диссертацию в Стекловском математическом институте. Моими оппонентами были Иван Георгиевич Петровский и Сергей Львович Соболев – два академика, которые меня уже знали, потому что я очень активно занимался. К тому моменту, как уже говорилось, я был женат на Асе Моисеевне Гутерман. Я написал диссертацию по теме, которая пришла мне в голову, когда я посещал семинары Абрама Иезекииловича Плеснера. Он попросил меня сделать доклад по работе Германа Вейля по методу ортогональных проекций для решения задачи Дирихле. Статья Вейля была опубликована в английском журнале "Duke Mathematical Journal", в 7-м номере за 1940 год. Я не знал тогда английского языка, и смог понять в статье только формулы. Но по формулам я немного разобрал, что сделал Вейль. А заодно догадался, что это можно сделать для общих эллиптических, самосопряжённых, положительно определённых уравнений. В общем, я рассказал о работе Германа Вейля на семинаре, а сам дома начал разрабатывать метод ортогональных проекций для общих самосопряжённых уравнений эллиптического типа. Это и стало моей кандидатской диссертацией. В то время меня уже хорошо знали и Сергей Львович Соболев, и Иван Георгиевич Петровский: я ходил к ним на семинары и без конца делал там свои доклады на темы, которыми занимался. С Сергеем Львовичем я познакомился ещё в 1946 году, слушая его спецкурс по теоремам вложения. И для моей диссертации всё это пригодилось. Он подарил мне свою знаменитую книгу "Некоторые применения функционального анализа в математической физике", я её проштудировал и использовал его методы в своей кандидатской диссертации.

Докторская диссертация у меня состояла из двух половин. Первая её половина была связана с решением задачи Дирихле для сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений, которыми до сих пор занимаются: по ним, например, пишет работы Михаил Семёнович Агранович. Эти системы уравнений имеют дивергентную форму порядка $2n$, симметрическую положительно определенную часть и кососимметрическую часть. Такие системы уравнений я и назвал сильно эллиптическими. Слово придумал Лазарь Аронович, и это был его важный вклад в мою докторскую диссертацию. Я советовался с ним, как назвать такие системы, а он мне и посоветовал их так назвать. Вторая половина моей диссертации была задумана на семинаре Израиля Моисеевича Гельфанда, который он вёл для трёх человек в 1946 году. Участниками семинара были Ольга Арсеньевна Олейник, Ольга Александровна Ладыженская и я. Ладыженская оканчивала тогда механико-математический факультет МГУ и была ученицей Ивана Георгиевича Петровского. Потом она переехала в Ленинград, где вышла замуж. Мы с ней сразу сдружились. Она была очень хорошо воспитанная, приветливая. И была очень хорошим математиком. Часто приезжала к нам домой, в нашу комнату, гостила у нас летом, спрашивала, что я нового напридумывал. Мы это обсуждали, иногда она пользовалась моими идеями (это было мне приятно), иногда делилась своими. Мы стали хорошими друзьями на всю жизнь. С Ольгой Арсеньевной у нас сначала тоже были хорошие отношения. Но потом она стала, скажем так, немножко ревновать, что французская школа пошла за мной, а не за ней. Лионс и его школа широко использовали введенные мною монотонные дифференциальные уравнения, а также наши с Люстерником работы в "Успехах математических наук" по малому параметру – по этой тематике Лионс написал книгу примерно на 700 страниц... Так вот, на докторской диссертации оппонентами у меня были Сергей Львович Соболев, Израиль Моисеевич Гельфанд и Андрей Николаевич Тихонов. В 1950 году я на даче написал от руки свою диссертацию. Потом её оформлял, и к концу года она была готова. В начале января следующего года я, с сумкой с четырьмя экземплярами докторской диссертации, поехал, естественно, в Стекловский математический институт, куда ещё я мог поехать в 1951 году? Я пришёл к Учёному секретарю... Он сказал, что Учёный Совет очень загружен, и что я могу оставить один экземпляр диссертации у него. А когда освободится время у Совета, он мне позвонит. Я оставил ему свой телефон и вернулся домой ни с чем. Никому ничего не сказав, я продолжал активно заниматься в семинаре Ивана Георгиевича и в других семинарах. Но как-то раз, в июне 1951 года, Иван Георгиевич меня спросил, как, собственно, идут дела с моей докторской диссертацией. Я ответил, что она уже шесть месяцев, с января, лежит в Стекловском математическом институте. Он мне ничего не сказал, сел в машину и поехал к Ивану Матвеевичу Виноградову. В результате в тот же день мне позвонил тот самый Ученый секретарь и сказал, чтобы я срочно готовил все бумаги для защиты – характеристику, автобиографию и прочее. С характеристикой у меня были проблемы ещё с того времени, когда я получал доцентуру в МЭИ, где после защиты кандидатской диссертации стал преподавать. И я сам пошёл к секретарю партийной организации МЭИ Кириллину за помощью. И он мне помог. Он ко мне очень хорошо отнёсся: ведь он видел, какую я развил бурную деятельность в институте. То, что делал Гельфанд в университете, я пытался делать в МЭИ: семинары, диссертации и прочее. Я с энтузиазмом читал лекции. А однажды на одной лекции, читая формулу Ньютона–Лейбница, я, в порыве энтузиазма, обратился к аудитории: "Попрошу всех встать!". И вся аудитория встала. Потом студенты нередко напоминали мне про этот случай... Андрей Николаевич Тихонов очень переживал из-за моей диссертации, так как она была сильно начинена функциональным анализом и дифференциальными уравнениями высшего порядка. Он даже приезжал ко мне домой, чтобы я немножко помог ему разобраться в ней. Но выступил он очень положительно. Потом мне рассказали, как его назначили в оппоненты по моей диссертации: Иван Матвеевич сказал "для придирки". Но Андрей Николаевич совсем не придирался. Наоборот, он очень благожелательно ко мне отнёсся. Ведь он меня неплохо знал, потому что я сделал целый ряд докладов на семинарах Соболева–Петровского–Тихонова. Так в 1951 году я и защитил свою докторскую диссертацию. А в 1952 году, когда мы с Асей поехали отдыхать, пришло письмо из ВАК о том, что меня утвердили. Я даже не знал, что моя работа туда попадёт. Вскоре моей диссертацией заинтересовался Мстислав Всеволодович Келдыш. Дело в том, что Келдыш создал теорию спектрального разложения обыкновенных несамосопряжённых дифференциальных операторов. А у меня вторая часть диссертации была об общем виде граничных задач для эллиптических дифференциальных операторов. И ему хотелось построить спектральное разложение общих граничных задач для эллиптических дифференциальных операторов. В связи с этим я даже бывал у него несколько раз дома, где подробно рассказывал ему про свою диссертацию и вообще про общие краевые задачи. Мстислав Всеволодович ещё до защиты моей докторской диссертации приглашал меня в институт к нему. Он сказал, что у них как-то обсуждался вопрос, сколько времени нужно давать на докторантуру, чтобы люди успевали сделать докторскую диссертацию. "Марко Иосифович, скажите, сколько времени вам дали на докторскую диссертацию?" спросил он меня. А я ответил: "Сколько времени мне дали? Практически нисколько! Я продолжал преподавать. И лишь в день защиты попросил заменить меня на одной паре, чтобы успеть на Ученый Совет в Стекловский математический институт. Только на 2 часа меня и освободили!" Мстислав Всеволодович ко мне всегда хорошо относился. Потом, как известно, он стал Главным теоретиком космонавтики при подготовке полёта Гагарина..."

МЭИ и МГУ

Марк Вишик рассказывает: "В Энергетическом институте работал Наум Ильич Ахиезер, известный математик, в нашей стране его считали вторым аналитиком после Сергея Натановича Бернштейна. Результаты Ахиезера использовал Сергей Петрович Новиков для своей теории солитонов. Наум Ильич был великим математиком. Итак, Ахиезер работал в МЭИ, как раз у Виктора Иосифовича Левина, и каким-то образом меня знал. Он-то и предложил мне поступить к ним на кафедру. Только сказал, что нужно, чтобы какой-то видный человек написал на меня рекомендацию. Я обратился к Сергею Львовичу Соболеву, который представлял мои статьи в "Доклады АН СССР". Он написал великолепный отзыв обо мне. И я пришёл с этой рекомендацией в ректорат к Чиликину. До этого Виктор Иосифович Левин, узнав мою историю во Львове и Тбилиси, также написал своё письмо в ректорат. (Левину обо мне рассказал Наум Ильич Ахиезер.) Чиликину я понравился. А главное, ему понравился отзыв Соболева: там были очень сильные слова обо мне. Ведь в своих работах я во многом применял идеи и результаты Сергея Львовича. И меня взяли в МЭИ. Во Львове считалось, что преподавание в техническом ВУЗе – это верх почёта. И я считал, что надо поддерживать этот уровень. Мне сразу дали лекции. Сначала мне поручили читать аналитическую геометрию. Но я не знал ещё методику преподавания. Однако в институте был такой человек – Юлий Исаевич Гросберг, доцент, участник войны. Так он по телефону каждый раз мне рассказывал, как надо читать очередную лекцию. Книги у меня были, я всё понимал, но не знал, как это преподнести студентам, чтобы было понятно. Однако постепенно я стал хорошим лектором. Потом я читал уже анализ и параллельно организовал семинар по дифференциальным уравнениям для молодых преподавателей. Об этом семинаре очень быстро стало многим известно, в том числе

Ивану Георгиевичу Петровскому. И он стал присылать в МЭИ на отзыв диссертации окончивших аспирантуру по его кафедре дифференциальных уравнений в МГУ. Я, например, писал отзыв на Станислава Николаевича Кружкова: у него были очень сильные и кандидатская, и докторская диссертации. Он был сильным математиком. Кроме того я ходил на все семинары Гельфанда и Петровского. От Сивцева Вражка я ходил в университет пешком. Так что через некоторое время в МЭИ все увидели, как активно я работаю.

Леднёв возглавил кафедру в 1948-1949 годах. А Левина уволили. Он был замечательным человеком и прекрасно руководил кафедрой. Но с его данными он уже не мог быть заведующим кафедрой: Левин ведь учился в Англии. В 1952 году Леднёв дал мне свою статью, чтобы я прочитал её и написал отзыв: он хотел послать её напечатать в Одессу. Я прочёл и понял, что это бред сивой кобылы. Я не стал писать отзыв, и он очень на меня рассердился. Он уже был немного не в себе: на защитах докторских диссертаций выступал против Соболева и Петровского, говорил, что они мешают науке. Так вот, когда Леднёв понял, что я не буду писать отзыв, то он стал говорить, что в нашем институте непорядок, потому что на разных факультетах, а их в МЭИ было девять, разные преподаватели читают спецкурсы. А надо чтобы один человек читал всё. И он велел мне читать все спецкурсы! В результате у меня было 17 часов лекций в неделю. Иногда я читал в день 6 часов лекций подряд, с девяти до трёх. В какой-то момент я даже потерял голос. Я посчитал, что в день проходил около сорока километров, потому что я очень энергично читал лекции, ходил туда-сюда. Так что Леднёв стал относиться ко мне негативно. В то же время он пытался принести неприятности и Чиликину, говорил, что у того завышенные требования. В итоге Леднёв пошёл к секретарю райкома партии и пожаловался на Чиликина. А тот хорошо знал Чиликина. Вот они и решили сместить Леднёва. И вскоре им это удалось, на его место пришёл Леонтьев. Очень хороший математик и прекрасный человек. Уже при нём меня сделали профессором. Мы с Асей ходили к нему на дни рождения, и он к нам приходил со своей женой. В общем, дружили семьями... На моих курсах тогда бывала разница в возрасте в 10 лет между слушателями. Мне поручили читать единый спецкурс по программе физфака МГУ – все предметы в одном спецкурсе. У меня было огромное количество лекционных часов. Я читал и теорию вероятностей, и вариационное исчисление – всё, что читается на физфаке. С первых лет работы в МЭИ я сразу стал брать аспирантов. А первыми моими аспирантами были Михаил Леонтьевич Краснов и Григорий Иванович Макаренко.

Я очень доволен тем, как сложилась моя судьба. Прежде всего, доволен тем, что попал в Москву, где оказались такие гиганты науки, как Андрей Николаевич Колмогоров, Иван Георгиевич Петровский, Лазарь Аронович Люстерник, Павел Сергеевич Александров, Израиль Моисеевич Гельфанд и другие. Я впитывал то, что было вокруг меня в университете, просто дышал этим. А активность на нашем факультете была необыкновенной: по вечерам нельзя было найти свободную аудиторию, чтобы вести семинар, так как все были заняты. В 1961 году Израиль Моисеевич Гельфанд сказал мне: "Марк Иосифович, пора бы Вам самому вести занятия по дифференциальным уравнениям в университете". И я, ещё будучи профессором МЭИ, стал с 1961 года вести на механико-математическом факультете МГУ свой спецсеминар. А ещё раньше, в 1956 году, я прочёл там свой спецкурс, слушателями которого были, в частности, и Алексеев, и Лаврентьев, и Бахвалов. Очень многие ходили, аудитория 16-24 была полной. Я же читал с энтузиазмом свой спецкурс. Потом все эти трое сдавали мне экзамен. А на мой спецсеминар, который, как уже говорилось, я начал вести на нашем факультете с 1961 года, стали ходить аспиранты Шилова. И Георгий Евгеньевич стал вовсю стараться, чтобы я просто перешёл работать в МГУ. Вообще этот мой спецсеминар вскоре стал очень большим. На него ходили многие математики. Даже Ольга Арсеньевна иногда его посещала. А жена Гельфанда приходила на все заседания спецсеминара... Приходили на его заседания и Татьяна Дмитриевна Вентцель, и Юрий Владимирович Егоров. А потом Иван Георгиевич Петровский решил, что пришло время укреплять штатный состав своей кафедры дифференциальных уравнений. Это было в 1965 году. Он стал советоваться с рядом лиц, как это сделать, кого пригласить. В частности, он спросил об этом Израиля Моисеевича Гельфанда. Тот указал на меня. Иван Георгиевич сказал, что это невозможно, ведь я друг Леднёва. "С чего Вы это взяли?"– спросил Израиль Моисеевич и услышал в ответ: "Мне так говорила Ольга Арсеньевна". На что Израиль Моисеевич сказал: "Иван Георгиевич, во-первых, о Марке Иосифовиче нельзя спрашивать Ольгу Арсеньевну. А во-вторых, более надежного человека, чем Вишик, я не знаю". В тот же вечер мне позвонил Иван Георгиевич Петровский и пригласил меня прийти к нему в ректорат по поводу моего перехода в МГУ. А незадолго до этого, весной 1965 года, состоялась конференция всех ректоров техвузов. На ней, в частности, говорилось, что при таком количестве в стране технических вузов идёт слабая от них научная отдача. Ректоры объясняли это недостатком научных сил. Тогда Иван Георгиевич сказал: "Как же слабая отдача? Вот, например, в МЭИ есть Марк Иосифович Вишик, который один делает больше, чем целый отдел в Стекловском математическом институте". После этого я стал просто именинником в МЭИ. И вот этого именинника Иван Георгиевич пригласил перейти в университет. Перейдя в МГУ, я некоторое время ещё продолжал читать спецкурсы в МЭИ. Но основную свою научно-педагогическую нагрузку я уже полностью вёл в МГУ. Первым моим курсовиком в МГУ был Миша Шубин, он перешёл ко мне от Виктора Павловича Паламодова ещё на третьем курсе. Потом уже ко мне пошли Андрей Фурсиков и Саша Демидов. Позже моими учениками стали Саша Комеч, Саша Шнирельман и другие."

* * *

Осень 2011 года. Перед понедельничным семинаром. Когда Марк Иосифович, медленно, с трудом, и как всегда со своей замечательной улыбкой, входит в аудиторию 13-06 – невольно вырвалось:

– Марк Иосифович, я так рад Вас видеть!

– Андрей, я тоже очень, очень рад Вас видеть!

Удивительно светлый человек...

[Дем08] В. Демидович, *Интервью с М.И. Вишиком*, *Мехматяне вспоминают*, 103–135, МГУ, Москва (2008).

Глава 15

Воспоминания о Владеке Лянце[1]

Марк Вишик (1921–2012)

Институт Проблем Передачи Информации РАН (Москва)

Я познакомился с Владеком Лянце в 9-й гимназии города Львова, где мы учились шесть лет. (Это соответствует промежутку с 5-го по 10-й класс российской школы.)

Владек был одним из самых интеллигентных учеников в нашем классе как в области физико-математических, так и в области гуманитарных дисциплин. В особенности запомнилась его дискуссия с учительницей польского языка Зосей. В то время во Львове происходили забастовки рабочих. Может быть, в связи с этим учительница Зося предложила нам написать домашнее сочинение о том, как бы мы выступили перед рабочими с призывом прекратить забастовку. Владек тут же сказал, что он не хотел бы выступать перед рабочими в таком духе. Это очень рассердило учительницу, которая была женой вице-воеводы г. Львова. С тех пор она стала относиться к Владеку скорее отрицательно, хотя он лучше всех владел польским языком.

Родители Владека покупали ему популярные книги из разных областей естествознания. Владек удивлял нас знанием общих проблем, связанных со строением Вселенной, современной физикой и др. Помнится, на уроке математики, которую вёл у нас проф. Фрейлих (бывший доцент Краковского университета),[2] Владек спросил его о том, что в книге, которую он читал, имеется сумма квадратов величин, равная нулю. Оказалось, что в книге было приведено уравнение Лапласа. Учитель объяснил Владеку, что это сумма вторых производных от функции $u(x)$.

С Владеком мы стали самыми близкими друзьями. В свободное время мы гуляли по Львову, обсуждали разные вопросы. От Владека я впервые услышал слово *наука*. Под влиянием прочитанных им книг он рассказывал мне о великих ученых. Я часто приходил к нему домой, где мы продолжали беседы, играли в шахматы, слушали музыку, передаваемую по радио. Иногда я оставался ужинать у него дома.

После окончания гимназии мы с Владеком поступили в физико-математические лицеи, которые находились, к сожалению, при двух разных гимназиях. По окончании лицея в 1939 году мы поступили во Львовский государственный университет на математический факультет. Мы с Владеком слушали лекции профессоров, принадлежащих к знаменитой школе Банаха.

В начале Отечественной войны Владек эвакуировался поездом из Львова на восток, я же пешком ушёл на восток с некоторыми студентами университета. Мы все хотели воевать против фашистов, но в армию нас не взяли. В годы войны мы потеряли связь друг с другом. Родители

---

[1] Мы благодарим Эдуарда Владиславовича Лянце за предоставленный нам текст воспоминаний М.И. Вишика о Владиславе Элиевиче Лянце (1920–2007). (*Прим. ред.*)

[2] Видимо, имеется в виду Арнольд Фрейлих, выпускник *Львовской Политехники* (доктор, 1909), одно время – директор Еврейской гимназии на ул. Зигмунтовская, 17; член “Leopolis Humanitarian Society” г. Львова. (*Прим. ред.*)

Владека и все его родные погибли от гитлеровского геноцида.

После войны я стал работать в Москве, а Владек во Львове. Кандидатскую диссертацию Владек выполнил под руководством профессора Я.Б. Лопатинского. Докторскую диссертацию Владек написал по спектральной теории дифференциальных операторов. При этом он консультировался с профессором М.А. Наймарком, к которому приезжал в Москву. В Москве он проживал у меня дома. Возобновились наши дружеские беседы, прогулки.

В восьмидесятые годы мы несколько раз проводили свой отпуск в Карпатах вместе с нашими женами, Ольгой Алексеевной и Асей Моисеевной. Благодаря Владеку я ознакомился с окрестностями Львова. Отмечу, что супруга Владека, Ольга Алексеевна, является человеком сильного и доброго характера. Мы с Асей всегда были её близкими друзьями.

К сожалению, научных контактов с Владеком у нас не было, так как мы занимались различными областями математики.

Чувствуя приближение своего конца, Владек позвонил мне, но ничего не сказал о своем недуге.

Я счастлив, что судьба свела меня с таким выдающимся математиком и человеком, как Владек Лянце.

Глава 16

“Шотландская книга”, задача 192

17–23 апреля 1941 г. состоялась Первая научная студенческая конференция Львовского государственного университета имени Ивана Франко. На секции физики и математики председательствовал С. Банах; его заместителем был Э. Шпильрайн. Доклад второкурсника М.И. Вишика “О декартовом произведении слабо сепарабельных пространств” (21 апреля 1941 г.) занял 4 место; докладчик получил денежный приз в 100 рублей [MP17].

Тема доклада М.И. Вишика связана с задачей №192, предпоследней задачей из знаменитой “Шотландской книги” [Mau91]. “Księga Szkocka” – толстая тетрадь, приобретённая Люцией, женой Стефана Банаха, в 1935 году. Книга хранилась в Шотландском кафе во Львове, и математики банаховского круга записывали в неё интересные задачи. В задаче №192, которую мы приводим ниже, Марк Вишик упоминается вместе со своим другом Владеком Лянце.

192. Определения: 1. Топологическое пространство T обладает свойством (S) (Суслина), если каждое семейство непересекающихся множеств, открытых в T, не более чем счётно. 2. Пространство T обладает свойство (K) (Кнастера), если каждое несчётное семейство множеств, открытых в T, содержит несчётное подсемейство попарно пересекающихся множеств.

Замечания: 1. Можно видеть, что условие (K) влечёт (S), и в случае метрических пространств каждое из условий равносильно сепарабельности. 2. Б. Кнастер доказал в апреле 1941, что в случае непрерывных, упорядоченных множеств свойство (K) равносильно сепарабельности. Задача Суслина, таким образом, эквивалентна вопросу, влечёт ли свойство (S) свойство (K) в случае упорядоченных непрерывных множеств.

Задача Б. Кнастера и Э. Шпильрайна. Существует ли топологическое пространство (в смысле Хаусдорфа или в более слабом смысле, например, в смысле Колмогорова) со свойством (S), не обладающее свойством (K)?

Замечание: 3. Согласно замечанию 2, отрицательный ответ дал бы решение задаче Суслина.

Задача Э. Шпильрайна. Сохраняется ли свойство (S) для декартова произведения двух множеств?

Замечания: 4. Можно показать, что если это так, то это свойство также сохраняется для декартова произведения любого (в том числе несчётного) количества множеств. 5. Э. Шпильрайн доказал в мае 1941 г., что свойство (K) сохраняется для декартова произведения любого количества множеств, а В. Лянце и М. Вишик доказали, что если одно пространство обладает свойством (S), а другое – свойством (K), то их декартово произведение также обладает свойством (S).

Львов, май 1941

[Mau91] R. D. Mauldin, *The Scottish Book*, Springer (1991).

[MP17] L. Maligranda, J. G. Prytuła, *Uniwersytet we Lwowie w latach 1939–1941. Matematyka, fizyka i astronomia*, Wiad. Mat. **53** (2017), 2, 303–329.

Глава 17

Берлинский Симпозиум 2001

В этой главе мы приводим материалы Берлинского Симпозиума, посвящённого юбилею М.И. Вишика и состоявшегося 17–20 декабря 2001 г. в Берлине.[1]

Mathematical Symposium in Honor of Professor Mark Vishik

Free University of Berlin, December 17–20, 2001

List of Speakers: Andrei Afendikov, Mikhail Agranovich, Vladimir Chepyzhov, Klaus Ecker, Messoud Efendiev, Harald Engel, Andrei Fursikov, Herbert Gajewski, Sergei B. Kuksin, Alexander S. Mikhailov, Alain Miranville, Louis Nirenberg, Giovanni Prouse, Carlos Rocha, Arnd Scheel, Eckehard Schöll, Alexander Shnirelman, Mikhail Shubin, Jürgen Sprekels, Mikhail M. Vishik, Leonid Volevich, Wolfgang L. Wendland

List of Contributors: Gerhard Braun, Bernold Fiedler, Konrad Gröger, Mikhail Shubin, Roger Temam, Mark Vishik, Eberhard Zeidler

17.1 Louis Nirenberg

Courant Institute of Mathematical Sciences (New York)

A letter

Mark Vishik is a truly original and superb mathematician. He has made many fundamental contributions in the theory of partial differential equations (PDE) together with deep applications in fluid dynamics. He has been a world leader in these subjects for over a half century. All of us in the field have been strongly influenced by his work. He has published 250 papers and several books, and I can comment on only a small part of his work.

Vishik's early papers were on elliptic PDE: he introduced the concept of strong ellipticity, for which he obtained fundamental results. He has important work on such equations involving a small parameter. He also has seminal work on initial value problems under various boundary conditions. With L.A. Lyusternik he wrote a series of papers on a variety of problems including nonlinear problems. His papers on nonlinear elliptic and parabolic problems have had great influence. His papers with G.I. Eskin and with M.S. Agranovich are excellent. His work truly covers all aspects of PDE, linear and nonlinear, and also pseudo-differential operators; and all that is just early work. I could go on and on but let me turn to more recent things.

[1] См. http://dynamics.mi.fu-berlin.de/vishik-symposium

In the 70s Vishik published a series of important papers on differential equations involving infinitely many independent variables. Since then most of his work has been devoted to nonlinear problems – especially elliptic and parabolic ones. He treated an enormous variety of deep problems- truly astonishing. Especially striking are his papers connected with fluid dynamics and I would like to call special attention to the many papers on asymptotic behavior of solutions, in particular, attractors for PDE. These, some with A.V. Babin, are absolutely fundamental in the study of attractors; they are world famous. Their 1992 book is a principal reference. They obtained very strong estimates for the dimensions of the set of attractors for Navier–Stokes equations in fluid dynamics and for reaction-diffusion equations. Especially remarkable for the former is the estimate, from below, of the dimension. Their work on how attractors depend on various physical parameters is basic. They also studied long time behavior of solutions for nonlinear hyperbolic equations which have a Lyapounov function.

Mark Vishik continues to do absolutely first class mathematics. He is truly a world leader in PDE as well as applications. Any university honors itself in awarding him an honorary doctorate.

A personal remark

It is an enormous pleasure for me to participate in the wonderful honorary-doctorate celebration for Mark Vishik's 80th birthday. As we all know, Mark is a world master in the theory of attractors. However, for us, the main attractor is Mark himself.

I first learnt of Mark's work from his theory of strong elliptic systems, which opened new doors in partial differential equations (PDE); he is a giant in the field of PDE, but I won't talk about his research.

I have lovely memories of our first meeting in 1963: it was at a conference in Novosibirsk. We became friends immediately. I felt completely at home with him. Afterwards, every time I visited Moscow, Mark and Asya have welcomed me into their home. I am always touched by their warmth and hospitality, and feel as though I am part of their family.

Many years ago, at a party, a young woman claimed to be able to read palms. She read mine and told me that when I became old I would be rich. I laughed, of course, but now I think she was right: I am rich, not in money, but in friends. The same is true of Mark and Asya.

Mark, may you continue to thrive, do beautiful mathematics, and listen to music.

17.2 Roger Temam[2]

Indiana University (Bloomington)

The name of Mark Vishik is one of the very first names that I heard when I started research in mathematics in 1964. One year before, in 1963, Mark published an article that had a very deep influence on the theory of nonlinear partial differential equations all along the 1960s, although this paper is nearly forgotten by now, and probably very few know about it. Later on I will describe in detail this part of his career that I witnessed during the preparation of my thesis.

Mark Vishik has had a very interesting and rewarding life, but also a very difficult one. He went through many difficult periods but his talent and his kindness attracted respect and sympathy for him, and, for each of the trial times in his life a good fairy came who saved his career and sometimes his life.

Mark Vishik was born on October 19, 1921 in Lvov. A first stroke of destiny hit him at the age of eight when his father passed away. His mother raised him with three other children with loving

[2] This article appeared in *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **10** (2004), no. 1&2, i–vi. Reprinted with author's permission. (*Прим. ред.*)

care and self-denying commitment. Mark retains warm reminiscences of his childhood despite the material difficulties.

From the gymnasium Mark remembers one of his mathematics teachers, Professor Freilich, who followed unconventional teaching patterns requiring the students to find the proofs of theorems and lemmas by themselves. This teaching method may not be appropriate for everyone, but it certainly provides a very stimulating education for a future researcher.

After gymnasium, Mark entered the physics and mathematics faculty of the Lvov University which was then home to the great pre-war mathematics Polish School: Banach, Schauder, Mazur, Orlicz, Steinhaus and others were teaching there. However we are in 1939 and Mark will not stay long at this University. Nevertheless he spends much time in lectures, seminars and in the library, and he stays long enough to decide that he will devote his life to mathematics.

Mark is the only one of his family who survived the Holocaust. During the first days of the German invasion of Poland in World War II, Mark with some students left Lvov. He undertook an impressive trip, alone and hungry, escaping bombing many times. By foot he went to Vinnitsa, 300 kilometers away, then hidden in freight trains he traveled to Kiev, then Krasnodar, then Makhatchkala some fifteen hundred kilometers away. In Makhatchkala he entered the Makhatchkala Pedagogical Institute from which he soon graduated. Several times he volunteered for the army but was turned down. Instead, after graduation, he was sent with a group of students to the Valley of Sun for harvesting and there he contracted malaria, reoccurences of which still plague him to this day. He was released from the hospital very weak, but the front line was approaching again and, once more, he had to fly for his life; he was carried on a train which took him to Tbilissi.

A positive turn in his fate occurs in Tbilissi where Professors I.N. Vekua and N.I. Muskhelishvili got to know him and became very supportive of him. He was immediately accepted to the University of Tbilissi, granted State Scholarship and given housing. Mark retains a feeling of deep gratitude to the Georgian mathematicians who in fact saved his life.

After graduating in 1943, Mark became graduate student with Professor Vekua at the Mathematics Institute of the Georgian Academy of Sciences. In 1945, Muskhelishvili sends Mark to the Steklov Mathematics Institute in Moscow to continue his graduate studies. In Moscow at the age of 24, he was immediately exposed to the Moscow mathematicians who would deeply influence his research, in particular Sobolev, Petrovskii, Gelfand, Kolmogorov and others. His thesis adviser in Moscow was Lazar Aronovich Lyusternik. Soon after his arrival in 1947, Mark defended his Kandidat thesis. Then in 1951, after a very short period of four years, he defended his Doctoral Thesis, equivalent of the French or German habilitations, this at the very young age of 30.

From 1947 to 1965, Mark was successively assistant, assistant professor and then full professor in the Department of Higher Mathematics of the Moscow Power Engineering Institute. Then in 1965, Petrovskii invited him to join the Department of Differential Equations at the Mathematics and Mechanics Faculty of the Moscow State University where he worked till 1993; during that period he also held a research position at the Institute for Problems in Mechanics of the USSR Academy of Sciences.

Since 1993 he holds a position of principal researcher at the Institute for Problems of Information Transmission of the Russian Academy of Sciences and he is holding the half time position as Professor of Moscow State University. Now that traveling has become easier, Mark travels more frequently. We see him much more often in the US, in France, and in Germany where he obtained a Humboldt Award Professorship from 1997 to 2001 which made him, since then, a regular visitor of the Free University of Berlin and of the University of Stuttgart.

The impact of Mark on mathematics has been diverse, prolonged and very extensive. He has written more than 250 articles and several books. There is no way one could properly describe his work in details in a short article; I will just highlight some aspects of his work, in particular those most familiar to me.

However a technical description of his work would not be sufficient to describe his devotion to science and his deep influence. Beside his own research, Mark had and still has many students, many of whom became themselves well established mathematicians, many still around him in Moscow. For many years Mark Vishik has conducted and he still conducts a research seminar during which he proposed to his students and collaborators many open problems. His students tell of the working days with him at his home, during which they worked on these problems. His students recall also that, during the working days, Mark's wife, Asya Moiseevna, entertained them for delicious and enlightening dinners. Asya has been another of the good fairies who have looked after Mark, a very supportive life-long companion, who sailed with him through quiet and through rough waters. Together they had two sons who became mathematicians, Simon from Temple University and Michael from the University of Texas at Austin who works in areas of PDEs at the same time close and very distinct from his father's.

On the occasion of Mark's eightieth birthday, we wish to Mark and Asya and their family many more years of happiness; and to Mark, beside good health, we wish him more students and many more years of fruitful work.

Some aspects of Mark's work

As indicated before, I will just highlight some aspects of Mark's very broad work. A more detailed description of the work of Professor Vishik can be found in the following references:

- Mathematics in the USSR during the forty years 1917–1957, Gostekhizdat, Moscow, 1959, vol. II, 138–139.
- Mathematics in the USSR, 1958-1967, Nauka, Moscow, 1969, vol. II, 247–249.
- M.S. Agranovich, I.M. Gelfand, Yu.A. Dubinskii, O.A. Oleinik, S.L. Sobolev and M.A. Shubin, Uspekhi Mat. Nauk, 37:4, 1982, 213–220; Russian Math. Surveys, 37:4, 1982, 174–184.
- Mark Iosifovich Vishik (on his seventy-fifth birthday), Uspekhi Mat. Nauk, 52:4, 1997, 225–232, Russian Math. Surveys, 52-4, 1977, 853–877.

1. Work in linear partial differential equations: the 1950s. S. Sobolev introduced the spaces which bear his name shortly before World War II, and L. Schwartz discovered the theory of distributions shortly after World War II. It was clear that the theory of partial differential equations previously based on the utilization of Hölder spaces and spaces of continuously differentiable functions would have to be fully revisited and further developed using these new powerful tools.

Very young and very early, Mark was very lucky to be exposed to these new developments at the highest level, around Sobolev, Petrovskii and Gelfand. He fully benefited from his teachers and he imbedded himself in the modern theory of PDEs. Parallel developments occurred in a number of places; in particular in France and in Italy around L. Schwartz, J.-L. Lions and the Italian school (E. Magenes and G. Stampacchia and others), in Sweden around L. Gårding and L. Hörmander, in the US around L. Nirenberg, P. Lax, and others.

Particularly noticeable, among the important contributions of Mark, are the following:

- His Kandidat dissertation in 1947, "On the method of orthogonal projections for linear self-adjoint equations";
- In 1950, a paper "On general boundary-value problems for elliptic equations", for which he obtained a Prize of the Moscow Mathematical Society;

- In 1951, his Doctoral Dissertation "On systems of elliptic differential equations and on general boundary-value problems".

During this period, he gave a general definition of strongly elliptic operators, described the general form of homogeneous boundary conditions – not necessarily local – for a second order elliptic differential operator for well-posedness (solving a problem set by Gelfand); he worked also on nonhomogeneous boundary value problems thus inspiring Lions and Magenes who started then the work which led to their three-volume book; he also started to work on linear time dependent problems.

Another work done during the period of 1957–1960 is the work with his thesis advisor Lazar Aronovich Lyusternik. Mark had many ideas and he did not need much help from his advisor for his theses. However, they eventually collaborated, and they became friends, a friendship which lasted until the end of Lyusternik's life.

2. Work on singular perturbations: the 1960s (1).

M.I. Vishik and L.A. Lyusternik, *Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **20** (1962), 239–364.

This long article [ВЛ57] was and still is a reference article on singular perturbations for elliptic and parabolic problems. The other general work on this subject in the context of the modern theory of PDEs is a subsequent volume by J.-L. Lions which appeared in the Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics Series.

Considering the solution of an elliptic boundary value problem with a small parameter

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = f,$$

$$L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1,$$

where $0 < \varepsilon \ll 1$ and where L_1 is of higher order than L_0, $L_1 \gg L_0$, the purpose is to study the behavior of u_ε as $\varepsilon \to 0$. A wealth of asymptotic expansion results were derived in this article. Typically

$$u_\varepsilon = w_0 + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i w_i + \sum_{r=0}^{m} \varepsilon^r v_r + \varepsilon^{m+1} y_m,$$

where the w_i are the "interior" limits, the v_r are the boundary layer correctors (singular in the Sobolev spaces), and $\varepsilon^{m+1} y_m$ is the remainder.

3. Nonlinear elliptic equations monotone in their highest arguments: the 1960s (2).

In the article [Виш63], M.I. Vishik started by himself the theory of monotone operators broadly studied during the 1960s and later on. The prototype problem is now known as the nonlinear Laplacian:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \qquad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{17.1}$$

More generally, in the article quoted above, I.M. Vishik considered equations of the for

$$\begin{cases} -\sum_{|k|=m} D^k a_k(a, u, \ldots, D^m u) + \text{l.o.t.} = 0 \qquad \text{in } \Omega, \\ \text{boundary conditions on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{17.2}$$

(l.o.t. : lower order terms).

In (17.1), the associated nonlinear abstract operator A satisfies the monotony property

$$\langle Au - Av,\ u - v\rangle \geq 0, \qquad \forall u,\, v.$$

More generally, in (17.2), Prof. Vishik considered operators A which are only monotone in their dominant part. This article of Mark is very technical, a tour de force. J.-L. Lions got aware of it, and detecting very early the potential novelty, he studied it and lectured about it in Italy and elsewhere in 1963 and 1964.

Parallel to this an elegant argument of monotony is proposed by G.I. Minty to study monotone integral equations [Min62]. Later on, it was found that such an argument was already used by R.I. Kachurovski in 1960 and 1966 [Kac68, Kac66] and by M.M. Vainberg and R.I. Kachurovski in 1959 [VK59].

F. Browder noticed that Minty's argument can be applied to equations like (3.1) and many others and he developed his results in [Bro63] (followed by many other articles in 1965, 1967, 1969 – the latest is a review article).

Finally J. Leray and J.-L. Lions in their only joint paper [LL65] fully recovered the results of M.I. Vishik, using the method of Minty and Browder.

Following these papers, a wealth of papers on monotone operators have appeared in the 1960s and subsequently. Let us also mention the related developments on

- the theory of nonlinear semigroups, and monotone and pseudo-monotone operators (H. Brezis, A. Pazy, and many others),

- the theory of variational inequalities (G. Fichera, J.-L. Lions and G. Stampacchia, and many others).

It is very likely that without the paper of Mark Vishik, and its dissemination by the lectures of J.-L. Lions in Italy and elsewhere, the development of this chapter of mathematics in the 1960s would have been very different.

4. Statistical theory of fluid mechanics: the 1970s. In the 1970s, Prof. Vishik continues to work on nonlinear partial differential equations and he begins to work on the Navier–Stokes equations, and on the statistical theory of turbulence. This new direction of research now reflects the influence of Andrey Nikolaevich Kolmogorov. It was undertaken in collaboration with A.V. Fursikov, and it led to the reference book [ВФ80]. The topics studied in this series of articles and in this book include statistical solutions of the stochastically forced Navier–Stokes equations; Reynolds number functional analytic expansion of the solutions, connections with the problem of moments.

Other work done by M. Vishik in the 1970s includes work on degenerate elliptic problems and on pseudo-differential operators (work with Blekher in particular).

Myself in the 1970s, I worked in related but different areas: on the stochastically forced monotone equations [BT72], Navier–Stokes equations [BT73], and on statistical solutions of the Navier–Stokes equations [FT80, FT83]. These common areas of interest generated close interactions between Mark and me in the 1970s, which would amplify in the 1980s and later.

5. Attractors – Dynamical Systems: the 1980s. In the 1980s, Mark undertook work on attractors and dynamical systems mostly in collaboration with Anatoli Babin. Ciprian Foias and myself worked on the same subject at the same time and this led to many fruitful and friendly interactions.

Prof. Vishik's work done in collaboration with Anatoli Babin, led to a series of articles and then to the reference book: [БВ89] (in Russian) and [BV92] (in English). A landmark in this work is his article with A.V. Babin giving a lower bound on the dimensions of an attractor, [БВ83] (in

Russian) and [BV83] (in English). In this article, studying the space periodic incompressible flow in an elongated rectangle of sides L and $L\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ small, they obtained a lower bound of the dimension of the global attractor $\mathcal{A}$, bounding it by the dimension of the unstable manifold of a natural and simple stationary solution. They obtained a lower bound of the form

$$\frac{C}{\varepsilon} \leq \dim \mathcal{A}. \tag{17.3}$$

This lower bound is to be compared to the following upper bounds successively established

$$\dim \mathcal{A} \leq \frac{C'}{\varepsilon^4} \qquad \text{(Babin and Vishik)},$$

$$\dim \mathcal{A} \leq \frac{C'}{\varepsilon^2} \qquad \text{(Foias and Temam)}.$$

Finally M. Ziane, using very involved arguments of flows in thin domains, obtained the following upper bound which matches (17.3) and shows that both bounds are relevant and optimal in some sense:

$$\dim \mathcal{A} \leq \frac{C'}{\varepsilon} \qquad \text{(Ziane)}. \tag{17.4}$$

6. Recent and current work: the 1990s and 2000s. Most recent work of Mark in the 1990s and in the 2000s includes an extensive work on nonautonomous dynamical systems with V.V. Chepyzhov, which led to a very recent book [CV02]. I would like also to mention a work on averaging in dynamical systems with Bernold Fiedler, Quantitative homogenization of analytic semigroups and reaction diffusion equations with Diophantine spatial frequencies [FV01].

Of course other articles are on the way!

[Bro63] F. E. Browder, *Nonlinear elliptic boundary value problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 862–874.

[BT72] A. Bensoussan, R. Temam, *Équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires. I*, Israel J. Math. **11** (1972), 95–129.

[BT73] A. Bensoussan, R. Temam, *Équations stochastiques du type Navier–Stokes*, J. Functional Analysis **13** (1973), 195–222.

[BV83] A. V. Babin, M. I. Vishik, *Attractors of partial differential evolution equations and estimates of their dimension*, Russian Mathematical Surveys **38** (1983), 4, 151–213.

[BV92] A. Babin, M. Vishik, *Attractors of evolutionary partial differential equations*, vol. 25 of *Studies in Mathematics and its Applications*, North-Holland, Amsterdam (1992).

[CV02] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, American Mathematical Society, Providence, RI (2002).

[FT80] C. Foiaş, R. Temam, *Homogeneous statistical solutions of Navier–Stokes equations*, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 6, 913–957.

[FT83] C. Foias, R. Temam, *Self-similar universal homogeneous statistical solutions of the Navier–Stokes equations*, Comm. Math. Phys. **90** (1983), 2, 187–206.

[FV01] B. Fiedler, M. Vishik, *Quantitative homogenization of analytic semigroups and reaction-diffusion equations with diophantine spatial frequencies*, Adv. Diff. Eq. **6** (2001), 11, 1377–1408.

[Kac66] R. I. Kachurovskii, *Nonlinear operators of bounded variation, monotone and convex operators in Banach spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **21** (1966), 5 (131), 256–257.

[Kac68] R. I. Kachurovskii, *Three theorems on nonlinear equations with monotonic operators*, Dokl. Akad. Nauk **183** (1968), 33–36.

[LL65] J. Leray, J.-L. Lions, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty–Browder*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 97–107.

[Min62] G. J. Minty, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space*, Duke Math. J. **29** (1962), 341–346.

[VK59] M. M. Vaĭnberg, R. I. Kachurovskii, *On the variational theory of non-linear operators and equations*, Dokl. Akad. Nauk **129** (1959), 1199–1202.

[БВ83] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности*, Усп. Матем. Наук **38** (1983), 4(232), 133–187.

[БВ89] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, Москва (1989).

[ВЛ57] М. Вишик, Л. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Усп. Матем. Наук **12** (1957), 5(77), 3–122.

[ВФ80] М. Вишик, А. Фурсиков, *Математические задачи статистической гидромеханики*, Наука, Москва (1980).

[Виш63] М. Вишик, *Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму*, Труды Моск. мат. общества **12** (1963), 125–184.

17.3 Mark Vishik

Institute for Information Transmission Problems (Moscow)

The sources of my work

I am profoundly grateful for being awarded an Honorary Doctorate of the Freie Universität Berlin. I would like to speak about the sources of my mathematical work.

In 1945 academicians Muskhelishvili and Vekua helped me come to Moscow and become a graduate student of the Steklov Mathematical Institute of the Academy of Sciences. Lazar Aronovich Lyusternik was my advisor in Moscow. I was a participant of his seminar. Under his supervision I was free to do what I wanted. At Plesner's seminar, I gave a talk about the famous paper of Herman Weyl about the method of orthogonal projections. Unfortunately, my knowledge of English at that time was almost zero. Therefore I understood only the mathematical formulas and a couple of words in this paper. But the preparation of this talk was very useful for me. I found a generalization of Weyl's method for a general self-adjoint elliptic differential equation of order $2m$. Then I wrote my Ph.D. (candidate) dissertation based on this work. Lyusternik helped me to write the introduction.

I.G. Petrovskii and S.L. Sobolev were the referees of my Ph.D. dissertation. I received my Ph.D. at the Steklov Institute.

For 33 years (from 1945 till 1978) I was a permanent participant of the well-known Gelfand seminar. Gelfand considered all areas of mathematics as connected with each other. All new ideas, new directions, new outstanding mathematical works were reported at this seminar. Gelfand invited the best specialists in the corresponding area and they gave talks at the seminar. But Gelfand often interrupted their presentations, asked questions, discussed, and posed some problems. He asked the lecturer to repeat some parts of the talk and to explain certain details once again. The same happened when one of the permanent participants of the seminar gave a talk on his own new work. A discussion between Gelfand and the speaker about the related problems was the main part of the talk. Gelfand always wanted to verify that everything was reasonable in the work; he posed problems connected with the talk. The seminar often became a creative discussion that was very useful for the participants. Gelfand often asked the participants about their opinion about the talk. Gelfand's seminar has set very high standards for the participants and the seminar extended their mathematical horizon very much. I.M. Gelfand taught the participants right and deep understanding of mathematics.

In 1946 Gelfand organized a small seminar for three participants: O.A. Ladyzhenskaya, O.A. Oleinik, and myself. As a result, Ladyzhenskaya started working on the problem of describing the domain of the Laplacian with homogeneous Dirichlet boundary conditions in $L_2(\Omega)$. She proved that the domain is $\mathcal{D}(A) = H^2 \cap H_0^1$. Oleinik worked together with I.G. Petrovskii at that time. I have started working on the problem of describing general boundary conditions for the second-order elliptic differential equation, i.e., when the corresponding operator with these boundary conditions is Fredholm or even an invertible operator.

From the functional analysis point of view, this problem is connected with the problem of the extension of operators in a Hilbert space. For example, you have the Laplacian operator defined on the minimal domain $\mathcal{D}_0(\Delta)$ of functions, which vanish with their first derivatives on the boundary. The maximal Laplacian is defined on all the functions from $H^2(\Omega)$ without boundary conditions. We look for all extensions of the minimal Laplacian operator which are invertible in $L_2(\Omega)$ or are Fredholm operators. I proved a general abstract theorem, where necessary and sufficient conditions for the existence of an invertible or a Fredholm extension were given. I found all such extensions for the minimal second-order elliptic differential operators and described their domains by homogeneous boundary conditions. This work was included in my habilitation doctoral thesis. For general differential operators of arbitrary order with constant coefficients, Lars Hörmander proved that the above-mentioned necessary and sufficient conditions for existence of an invertible extension of the corresponding minimal operator are fulfilled.

S.L. Sobolev had a great mathematical influence on me. In 1946 at Moscow State University he gave a course on the methods of functional analysis in partial differential equations. This course contained embedding theorems, their applications to the Cauchy problem for hyperbolic equations, their applications to boundary-value problems for polyharmonic equations and other problems. For the Cauchy problem for hyperbolic equations, he first constructed their solutions in H^s spaces. Then, by means of embedding theorems, he found conditions when the solution belongs to C^2. From here he obtained minimal conditions on the initial data when there exists a classical C^2-solution. I became an enthusiastic follower of Sobolev's ideas.

Some years later I studied the boundary-value problem for so-called strongly elliptic systems. The leading part of these systems has the form of a sum of a self-adjoint positive symmetric operator and a skew-symmetric operator. I have constructed a weak solution of the Dirichlet problem for strongly-elliptic systems. Louis Nirenberg proved that this weak solution is smooth up to the boundary of the domain provided that this boundary is sufficiently smooth.

In 1956 we wrote with S.L. Sobolev an article in Doklady of Academy of Sciences about the solutions of non-homogeneous boundary-value problems of elliptic equations belonging to some distributional class. So, for example, we considered the Neumann problem for the Laplace equation with a given measure on the boundary. The measure of a set on the boundary is equal to the integral of the normal derivative of the sought solution over this set on the boundary. The solution of this generalized Neumann problem was found by using the duality between this problem and the Dirichlet problem with corresponding smooth boundary value conditions. This paper has had far-going generalizations. Jaques Lions and Enrico Magenes wrote a book of three volumes entitled "Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications" [LM68a, LM68b, LM70], where, in particular, a theory of general non-homogeneous problems in various classes of distributions was developed in great detail.

In the forties I.G. Petrovskii organized a seminar on partial differential equations for graduate students and for students of the 4th and 5th years. He also had a larger seminar at the chair of differential equations. I often gave talks at these seminars. Usually after the talk Petrovskii asked the speakers to formulate the main result once more. He asked whether all the supposed conditions were really necessary. He very much enjoyed applied mathematical talks. Petrovskii had a deep influence on me as a great mathematician and a great personality. In 1965 he invited me to be a professor at his chair at Moscow State University.

In 1956 we began to work with Lazar Aronovich Lyusternik on the asymptotic behaviour of solutions of equations having a small parameter in the higher order terms. For example we studied the 4th order equations with left-hand side $\varepsilon\Delta^2 - \Delta$. As $\varepsilon \to 0+$ we have a plate equation degenerating into a membrane equation. The fourth order elliptic operator requires two boundary conditions, for example, the Dirichlet condition and the normal derivative on the boundary. The limiting membrane equation requires only the Dirichlet boundary condition. Therefore we lose one boundary condition for $\varepsilon = 0$. We proved that the solution of the 4th order equation can be asymptotically represented as a sum of a solution of the limiting Dirichlet membrane boundary-value problem and a boundary layer function. The boundary layer decreases exponentially along the normals to the boundary and has the form $\varepsilon e^{-\lambda n/\varepsilon}\psi(s)$, where n is the distance to the boundary along the normal vector. The boundary layer function satisfies a certain ordinary differential equation. The main idea of the construction was based on the hypothesis that the boundary layer function changes along the normal direction much faster than in any direction tangent to the boundary. To obtain an asymptotic decomposition of the solution for the equation with small parameter in the higher order terms we constructed two iteration processes. The first one corresponds to the behaviour of the solution inside the domain and the second one corresponds to its behaviour near the boundary. On each iteration step we tried to improve our approximation of the given boundary conditions.

We also studied asymptotic expansions of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic equations with small parameter in the highest derivatives.

For evolution equations with rapidly oscillating boundary values, we obtained a skin-effect first studied by Riemann. We also studied many other singularly perturbed problems.

The collaboration with such a great mathematician as Lyusternik has had a deep influence on me. For five years we have usually been working two days a week, from morning till night. We wrote 25 articles and 3 surveys in the journal Uspekhi (Surveys). During our collaboration I learnt the style of working of a great mathematician, the broadness of his interests. We worked with enthusiasm. Sometimes Lyusternik called me at 2 o'clock in the morning, when he found some useful remarks to our work. The methods developed with Lyusternik were used by many scientists in applied mathematics, mechanics, and physics.

The breaks in our working sessions were very interesting. Lyusternik was a cultured man. He knew many verses of Pushkin, Baratynskii, Tyutchev, Pasternak and other poets by heart. Lyusternik was also a poet himself. He wrote humoristic verses about some professors of mathematics.

He was a person with a great sense of humor. Five years of collaboration with such a person have had a deep influence on me. After our collaboration with Lyusternik we and our families became close friends for all future time.

In the beginning of the sixties he proposed to write a book with me on boundary layer problems. Unfortunately, I could not do that because at that time I worked entirely on monotone elliptic operators. In the fifties I had tried to construct a solution of the Dirichlet problem for the nonlinear analogue of the Laplacian: $\sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^p = h$ (where p is an odd number for simplicity). In the beginning of the sixties I noticed that Galerkin approximations for this equation had at least one solution in a sufficiently large ball. This fact follows from a simple topological argument. By a priori estimates for the Galerkin approximations and the compactness of the approximating solutions I obtained the solution for the nonlinear analogue of the Laplacian. Then I constructed solutions for the general nonlinear strongly elliptic systems. Later these systems were called monotone elliptic. I also constructed solutions for general parabolic systems of equations with strongly elliptic right hand side. Many mathematicians worked in this area: F. Browder, H. Brezis, H. Gajewski, J. Leray, J.-L. Lions, Yu.A. Dubinskii, I.V. Skrypnik and many other mathematicians.

In the beginning of the fifties I worked at the Moscow Energy University. I helped to organize the department of Mathematics and a scientific seminar on differential equations at this University. Twelve participants of this seminar received a Ph.D. degree and Dubinskii obtained a habilitation.

In the beginning of the sixties I.M. Gelfand proposed that I organize a seminar on differential equations and their applications at Moscow State University. Many young talented mathematicians were participants of this seminar. They worked on various problems in partial differential equations, on spectral theory, on the Fredholm index of elliptic operators and on many other problems. My students and graduate students, some students of Olga Oleinik and Georgi Shilov, and many other mathematicians from different Moscow institutes participated in this seminar; there were about 50 participants. The seminar was very useful for me and, I believe, also for the participants. We reviewed and discussed new interesting articles of such outstanding mathematicians as de Giorgi, L. Hörmander, L. Nirenberg, P. Lax, J. Moser, J.-L. Lions, R. Temam, H. Brezis, L. Amerio, E. Magenes, and many other mathematicians. The participants gave talks about their new results. The seminar is now working permanently for over 40 years. I wrote many joint papers with participants of the seminar.

In the sixties we wrote some papers with M.S. Agranovich about general boundary value problems for parabolic equations of arbitrary order. First it was necessary to study the corresponding general elliptic operator with a large parameter in a sector. This part was very close to the earlier papers of Agmon and Nirenberg. I worked together with Grigorii Eskin for some years. We studied problems for elliptic pseudodifferential equations in a bounded domain. Then G. Eskin wrote a book about these and other problems. The collaboration with Agranovich and Eskin was very useful for me. I learnt a lot from them.

In the beginning of the seventies we organized a small seminar to study statistical solutions of evolution equations. Eberhard Hopf was the first to give a statistical approach for the study of the Cauchy problem for the Navier–Stokes systems, in his famous paper. His approach was developed by C. Foias, A. Bensoussan, R. Temam, A.V. Fursikov, and myself and other mathematicians.

Let me briefly describe the statistical approach to the Cauchy problem for the 2D Navier–Stokes system.

Let a measure $\mu_0(du)$ be given at $t = 0$ on a function space, say, $L_2(\Omega)$. Here $\mu_0(du)$ is the probability of the event that the initial point $u(x)$ is in the domain du in $L_2(\Omega)$. The statistical solution corresponding to $\mu_0(du)$ is the family of measures $\mu(t, du)$, $t > 0$, which is equal to the evolution of $\mu_0(du)$ along the trajectories. The characteristic functional $\chi(t, v)$ of this measure $\mu(t, du)$ is equal to the Fourier transform of the measure $\mu(t, du)$. The characteristic functional $\chi(t, v)$ satisfies the famous Hopf evolution equation with variational derivatives in v. Andrei Fursikov and

I proved that if the initial measure $\mu_0(du)$ is supported in a sufficiently small ball, then the Cauchy problem for the Hopf equation possesses a solution $\chi(t,v)$, globally in time, which is functionally analytic with respect to v. From this theorem we deduced that the Friedman–Keller infinite chain of equations for the moments of the statistical solution $\mu(t,du)$ possesses a global solution with respect to t. In the general case, when the initial measure $\mu_0(du)$ has an arbitrary support, using another method we proved with Fursikov the existence theorem of the Cauchy problem for the Friedman–Keller infinite chain of equations corresponding to the 3D Navier–Stokes equations. Fursikov and I thus constructed a statistical solution for the Cauchy problem for the 3D Navier–Stokes system.

The ideas of Andrei Nikolaevich Kolmogorov on homogeneous turbulence had a deep influence on our later work on statistical solutions. Fursikov and I proved the existence of a homogeneous statistical solution for the Navier–Stokes system which corresponds to a given initial homogeneous measure $\mu_0(du)$. The homogeneity of the measure is understood with respect to the space variables x. Our work stimulated Kolmogorov to give his last talk at the Moscow Mathematical Society on the turbulence problems which are to be solved. Some of these problems were solved in our book with Fursikov "Mathematical Problems of Statistical Hydromechanics" [ВФ80]. In the Appendix to this book written by Alexander Komech and myself we considered stochastic problems for the Navier–Stokes system and solved some of Kolmogorov's problems. But many of them still remain open.

From the beginning of the eighties, Anatolii Babin and I began to study the global attractors of differential equations and systems of mathematical physics. The theory of attractors for ordinary differential equations and some functional equations had been developed to some extent. The attractors for partial differential equations were systematically studied from the eighties on. Important contributions to this area were made by R. Temam, C. Foias, P. Constantin, J. Hale, G. Sell, A. Haraux, and others. Naturally, our works with Anatolii Babin were influenced by the investigations of these and other mathematicians. We studied and constructed the global attractors for the 2D Navier–Stokes system, the dissipative wave equation, some classes of reaction-diffusion systems and some other equations. When the corresponding evolution equation possesses a global Lyapunov functional we investigated the structure of the attractor and introduced the notion of a regular attractor. Under some additional conditions we proved the exponential attraction property of the global attractor. We also studied the Hausdorff dimension of the attractors. For some examples of evolution equations we gave a lower bound on the dimension of the global attractor. Our work in this area was summarized in our book with Babin "Attractors of Evolution Equations" [БВ89].

Since 1993 I am working as a leading scientific researcher at the Institute of Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences. There I have nice conditions for scientific work. In particular, V. Chepyzhov and I have recently written the monograph "Attractors for Equations of Mathematical Physics" [CV02], where we exposed our works of the last ten years. I am still a professor at Moscow State University.

With Vladimir Chepyzhov we study the global attractors for nonautonomous evolution equations with some coefficients and forcing terms depending on t. We constructed and studied global and trajectory attractors for the 3D and 2D Navier–Stokes systems with forcing term depending on t, for some classes of nonautonomous reaction-diffusion systems, for the nonautonomous Ginzburg–Landau equation, and for the nonautonomous dissipative wave equation. The Hausdorff and fractal dimension of the global attractor for nonautonomous equations is often infinite. Chepyzhov and I studied the Kolmogorov ε-entropy of global attractors for these equations, which is always finite for any $\varepsilon > 0$. We found an upper estimate for the Kolmogorov ε-entropy of the global attractor for some classes of nonautonomous equations and systems.

Recently Chepyzhov and I constructed the global attractor for the 3D Navier–Stokes system which has properties analogous to the global attractor for the 2D Navier–Stokes system. We also studied perturbation problems for global attractors, including perturbations by terms which oscillate rapidly in x and t.

Summarizing, I can say the following. My great teachers from the Moscow State University are one of the main sources of my mathematical work. With some of them I collaborated and published joint articles. I can recall the words by Isaac Newton, “In our work we stand on the shoulders of giants”.

My seminar and its participants have a great influence on me. With many of the participants I collaborated personally. This seminar is an important source of my mathematical work. I am very satisfied that I had many talented graduate students. Many of them have grown into outstanding mathematicians. I learnt very much from them. They are also one of the sources of my work.

I interacted with many mathematicians of other countries. I interacted with many outstanding mathematician from France, USA, Germany, Italy, Sweden and other countries. The interaction with these mathematicians is an important source of my mathematical work.

Recently as Alexander von Humboldt Awardee I had a possibility to work in Germany. I collaborated with mathematicians of the Freie Universität Berlin, mostly with Bernold Fiedler and his colleagues. With Fiedler we wrote several joint papers. I also collaborated with mathematicians of the University of Stuttgart, mostly with Wolfgang Wendland and his mathematical group. I was in Leipzig many times, as a visiting professor of the University of Leipzig. Recently I visited the Max-Planck Institute für Naturwissenschaften in Leipzig, where I collaborated with many young talented mathematicians.

Many thanks to all these people who stimulated my scientific work.

All my conscious life I am fascinated with mathematics, I like to study it. Almost all the time I think about mathematical problems, about what would be useful to do for the development of mathematics. In my life nothing else attracts me as much as this area. Such attractiveness of mathematics for me is undoubtedly one of the important source of my mathematical works.

At home my wife Asya organizes nice conditions for my mathematical work. Many thanks to her.

I am grateful to the speakers and the participants of the Symposium on Partial Differential Equations in my honor. I am grateful to Bernold Fiedler who organized the symposium.

I am profoundly grateful for the Honorary Doctorate of the Freie Universität Berlin.

Many thanks to the participants of this meeting.

Thank you very much.

[CV02] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, American Mathematical Society, Providence, RI (2002).

[LM68a] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*, Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17, Dunod, Paris (1968).

[LM68b] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 2*, Travaux et Recherches Mathématiques, No. 18, Dunod, Paris (1968).

[LM70] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 3*, Dunod, Paris (1970), travaux et Recherches Mathématiques, No. 20.

[БВ89] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, Москва (1989).

[ВФ80] М. Вишик, А. Фурсиков, *Математические задачи статистической гидромеханики*, Наука, Москва (1980).

Глава 18

Краткий обзор научной деятельности М.И. Вишика

Анатолий Бабин, Александр Демидов, Марк Маламуд, Александр Комеч, Андрей Фурсиков, Виктор Чепыжов, Александр Шнирельман

Работы Марка Вишика и его школы составили целую эпоху в теории уравнений с частными производными и получили широкое признание и в нашей стране, и во всём мире. М.И. является автором около 250 статей и трёх монографий. Он подготовил 57 кандидатов наук, более 30 из которых защитили докторские диссертации. В 1951 году Московское Математическое Общество присудило ему премию за статью "Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений". М.И. был приглашённым докладчиком на международных математических конгрессах в 1966 г. в Москве и в 1974 г. в Ванкувере и участвовал в работе программных комитетов конгрессов 1970 и 1978 гг. В 1974 г. М.И. Вишик был награждён почётной медалью Коллеж де Франс. В 1990 г. М.И. Вишик был избран почётным членом Американской Академии искусств и наук, а в 1994 – членом Национальной Академии Наук Сорока́ (Италия). В 1992 г. Российская Академия Наук присудила Марку Иосифовичу премию имени И.Г. Петровского за цикл работ "Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения". В 1994 г. он был избран Соросовским профессором. В 2001 году Свободный Университет Берлина присвоил ему степень Почётного доктора естественных наук /Doktor der Naturwissenschaften ehrenhalber/. Марк Вишик был членом редколлегий международных математических журналов "Asymptotic Analysis" и "Rapporti Alpi-Appennino Accademia Nazionale delle Scieze detta dei XL".

Научные труды Марка Иосифовича принадлежат области дифференциальных уравнений в частных производных, функционального анализа и математической физики. МИ был одним из основателей современной статистической гидромеханики и теории глобальных аттракторов нелинейных волновых процессов. В целом можно сказать, что труды МИ превратили теорию уравнений с частными производными в один из разделов современного функционального анализа. Важную роль в этом сыграла, конечно, его связь со школой Банаха. Нам представляется, что труды МИ являются вершиной математических достижений этой школы и максимальной реализацией её потенциала.

1. Краевые задачи и самосопряжённые расширения эллиптических операторов (подробнее см. в Главе 19). В 1949–1952 годах Марк Иосифович описал все самосопряжённые расширения сильно эллиптических операторов второго порядка, что дало ему возможность найти все корректные краевые задачи для таких операторов.

Попытки применить теорию расширений к исследованию граничных задач для оператора Лапласа предпринимались рядом американских математиков сразу после появления работы Дж. Кэлкина (1939 г.). Однако это удалось только М.И. Вишику в работе [14][1], опередившей

[1] Ссылки по порядковым номерам относятся к списку публикаций М.И. Вишика в конце сборника. (*Прим. ред.*)

своё время, и ставшей особенно цитируемой в последние 25–30 лет.

Одно из основных достижений работы [14] – регуляризация формулы Грина для эллиптического дифференциального оператора второго порядка в ограниченной области, позволившая распространить формулу на всю область максимального оператора. Необходимость регуляризации обусловлена тем, что следы функций из области определения максимального оператора не принадлежат соболевским пространствам с неотрицательными показателями. При этом отображение взятия пары следов (Дирихле и Неймана) оказалось сюръективным.

В работе даётся описание *разрешимых* (т.е. ограниченно обратимых) и *вполне разрешимых* (т.е. имеющих компактный обратный) сужений максимального оператора в терминах регуляризованных граничных условий.

Построена теория дуальных пар эллиптических несимметрических операторов с ограниченными обратными. Для этого вместо формул Неймана получены другие формулы разложения областей определения максимальных операторов (ныне – формулы Вишика).

На современном языке, М.И. Вишик впервые построил граничную тройку для эллиптического оператора дивергентного вида. Конструкция Вишика тем более удивительна, что теория следов для эллиптических операторов (и соболевских пространств) была построена Лионсом и Мадженесом лишь 7–10 лет спустя. Не располагая явным описанием следов, Вишик доказывает (на современном языке) следующие вложения:

$$L^p(\partial\Omega) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega) \quad \text{при} \quad p \geq \frac{2(n-1)}{n}, \quad H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^q(\partial\Omega) \quad \text{при } q < \frac{2(n-1)}{n-2},$$

где $n = \dim \Omega$.

2. Метод Вишика–Люстерника (подробнее см. в Главе 20). В 1957–1961 годы Марк Иосифович, совместно с Л.А. Люстерником, построил теорию задач для уравнений с малым параметром при старших производных, ввёл понятия *регулярного вырождения* и *регулярного пограничного слоя*. Общее число ссылок всего лишь на три цитируемые здесь статьи Вишика–Люстерника [35, 45, 49] об асимптотиках и на знаменитую работу Вишика [10] о сильно эллиптических системах (позволившую, в частности, обосновать асимптотики) – около трехсот. Большинство этих публикаций в значительной степени основаны на базовых, гениально простых идеях метода Вишика–Люстерника, которые позволяют решать большой круг сложных проблем и поэтому получили такое обширное применение.

Впервые в задачах сингулярного возмущения малым параметром в уравнениях с частными производными был предложен ошеломляющий своей простотой метод построения асимптотики, равномерной вплоть до границы области, где решение исходной задачи существенно изменяется. "Изюминка" метода заключается в том, что к предельному решению исходной задачи прибавлялась поправка в виде решения модельной задачи на полупрямой для найденного в методе Вишика–Люстерника обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами относительно так называемой "быстрой" переменной. Именно в направлении этой быстрой переменной решение исходной задачи существенно изменяется.

3. Квазилинейные уравнения (подробнее см. в Главе 21). В 1961–1963 годах МИ исследовал эллиптические и параболические квазилинейные дифференциальные уравнения высокого порядка с монотонной главной частью и доказал разрешимость основных краевых задач для этих уравнений. Главной особенностью этих работ является оригинальное сочетание методов функционального анализа и топологии: теории степени отображения, гомотопии и теории Лерэ–Шаудера. Удивительная эффективность подхода, разработанного МИ, сказалась в том, что ему удалось доказать как существование решений, так и их единственность.

4. Эллиптические и параболические краевые задачи. В 1964 году МИ вместе с М.С. Аграновичем в работах [67,68] ввели новый класс эллиптических краевых задач с параметром и параболических краевых задач, что является далеко идущим обобщением классификации Петровского. Выдающимся достижением этой теории является доказательство однозначной разрешимости при больших значениях параметра.

В 1964–1969 МИ вместе с Г.И. Эскиным создали новую теорию эллиптических краевых задач для псевдодифференциальных операторов, положив в основу метод Винера–Хопфа, точнее – его развитие в работах И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна. Важнейшую роль при этом сыграли также пространства Соболева и теоремы вложения.

Замечательная черта этой теории состоит в том, что в ней дано явное описание алгебры, содержащей эллиптические и параболические краевые задачи, и найдено пространство максимальных идеалов этой алгебры по модулю компактных операторов. Это оказалось чрезвычайно удобным для применения K-теории к вычислению индекса краевых задач методом Атьи–Ботта–Зингера. Замечательным итогом теории Вишика–Эскина является критерий существования корректной фредгольмовой краевой задачи для заданного эллиптического оператора. Этот критерий формулируется в терминах K-функтора.

Особое значение имеет найденное в этих работах условие гладкости псевдодифференциальных операторов на многообразии с краем: такой оператор сохраняет пространство функций, гладких вплоть до границы. В частности, обратный символ к любому эллиптическому многочлену удовлетворяет этому условию. Это свойство является далеко идущим современным обобщением классических свойств потенциалов простого и двойного слоя. Полученные результаты являются новаторскими даже для краевых задач с дифференциальными операторами. Этот цикл работ по существу завершает построение теории линейных эллиптических краевых задач.

5. Статистическая гидромеханика. С 1973 года Марк Иосифович совместно с А.В. Фурсиковым начал заниматься статистической гидромеханикой. Они впервые построили строгую теорию статистических решений нелинейных эволюционных уравнений в частных производных. Ими была создана теория однородных, а также пространственно-временных статистических решений нелинейных параболических уравнений и системы Навье–Стокса со случайными начальными данными. Случай статистических решений системы Навье–Стокса с флуктуациями типа белого шума был изучен Марком Иосифовичем совместно с А.И. Комечем.

Эти задачи возникли в связи с проблемой обоснования законов Колмогорова развитой турбулентности и вызвали интерес А.Н. Колмогорова. В январе 1978 г. в докладе на Московском математическом обществе он поставил ряд проблем, касающихся свойств турбулентных потоков. Ответ на некоторые из них был получен в работах Марка Иосифовича и его сотрудников. В частности, для стационарных статистических решений двумерной системы Навье–Стокса с белым шумом было доказано, что скорость диссипации энергии не зависит от вязкости, в соответствии с гипотезой Колмогорова. Работы указанного цикла составили содержание монографии [186], которая посвящена памяти А.Н. Колмогорова.

6. Аттракторы автономных эволюционных уравнений. В 1980-х годах Марк Иосифович совместно с А.В. Бабиным построил *глобальные аттракторы* автономных уравнений с частными производными, возникающих в математической физике. Ими получена оптимальная оценка хаусдорфовой размерности аттракторов двумерной системы Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса.

Работы М.И. Вишика и А.В. Бабина 1982–1990 гг. оказали очень большое влияние на развитие теории аттракторов уравнений с частными производными. В их работах 1982 г. введено понятие максимального (глобального) аттрактора и показано, что это понятие описывает динамические свойства различных классов уравнений математической физики, в том числе параболических, гиперболических с трением и системы Навье–Стокса. Понятие глобального аттрактора оказалось очень полезным, а развитая техника оказалась применима к широким классам задач, что привело к заметной активизации деятельности по изучению динамических свойств УрЧП, стали появляться десятки работ в год по этой тематике. Книга [191] и ее перевод на английский язык постоянно цитируются в работах по теории аттракторов уравнений математической физики; количество ссылок на них превышает 800. В работах Бабина–Вишика впервые получены оценки сверху размерности аттракторов в терминах физических параметров задач, получены оценки размерности снизу, доказано существование глобального аттрактора гиперболических уравнений, доказано существование глобальных аттракторов и получены оценки размерности для уравнений в неограниченных областях.

7. Аттракторы нелинейных неавтономных эволюционных уравнений математической физики (подробнее см. в Главе 22). В 1990-е годы Марк Иосифович и В.В. Чепыжов построили общую теорию равномерных глобальных аттракторов неавтономных уравнений с частными производными. В основу этой теории были положены идеи и методы теории глобальных аттракторов автономных уравнений, а также опубликованных немного ранее работ французского математика Алена Аро (Alain Haraux). В этих работах было введено понятие равномерного глобального аттрактора неавтономного диссипативного уравнения, содержащего зависящие от времени коэффициенты и члены, которые являются периодическими, квазипериодическими или почти периодическим функциями со значениями в некоторых банаховых пространствах. Аро доказал ряд теорем о существовании и структуре равномерных аттракторов конкретных нелинейных параболических уравнений с почти периодическими членами. В работах Вишика и Чепыжова был предложен метод сведения задачи построения равномерного аттрактора неавтономного уравнения к исследованию глобального аттрактора автономной динамической системы, действующей в расширенном фазовом пространстве, основанный на конструкции косого произведения. При этом ими был введён новый класс транстляционно-компактных функций, существенно расширяющий класс почти периодических по времени функций, для которых стало возможно построение равномерного аттрактора соответствующей неавтономной динамической системы. При исследовании равномерных аттракторов общих неавтономных диссипативных уравнений с частными производными ими было обнаружено, что в условиях общего положения равномерный аттрактор, будучи компактным множеством, имеет бесконечную размерность, в чём состояло принципиальное отличие от свойств аттрактора соответствующего автономного уравнения, который в случае общего положения является конечномерным. М.И. Вишик и В.В. Чепыжов предложили исследовать колмогровскую эпсилон-энтропию для таких аттракторов. Они доказали ряд важных теорем об оценках сверху эпсилон-энтропии равномерных аттракторов, которые обобщали известные оценки для аттракторов соответствующих автономных уравнений. С помощью этих результатов были получены оптимальные оценки эпсилон-энтропии для ряда важных неавтономных уравнений математической физики, например, для 2D системы Навье–Стокса с зависящей от времени внешней силой, для неавтономных систем реакции-диффузии, для комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау, для диссипативных неавтономных волновых уравнений и для других уравнений и систем. Наиболее полно эти результаты изложены в книге [256].

8. Траекторные аттракторы уравнений математической физики (подробнее см. в Главе 22). В 2000-е годы М.И. Вишик совместно с В.В. Чепыжовым разработали метод траекторных аттракторов, позволивший строить динамические системы и аттракторы для уравнений математической физики, для которых не доказана или не имеет места теорема единственности решения соответствующей задачи Коши, например, для неоднородной 3D системы Навье–Стокса в ограниченной области. Для таких уравнений, обычно, удаётся построить глобальные слабые решения в соответствующих фазовых пространствах, например, с помощью метода галёркинских приближений, однако, доказать единственность для решений этих уравнений удаётся только для сильных решений, которые, как правило, можно построить лишь локально, на малом интервале времени. В этом случае для исследования асимптотического поведения решений нельзя напрямую использовать классическую схему построения динамической системы (например, полугруппы в автономном случае) в фазовом пространстве H начальных данных задачи Коши, чтобы затем исследовать её глобальный аттрактор, так как мешает неединственность решений. Однако, для таких уравнений можно построить траекторную динамическую систему, действующую в пространстве траекторий этих уравнений, то есть функций, определённых на полуоси времени со значениями в пространстве H. После чего можно строить и исследовать глобальный аттрактор полугруппы трансляций по времени, действующей в пространстве траекторий (т.е. слабых решений) изучаемого уравнения в слабой (а иногда и в сильной!) локальной топологии. Этот универсальный метод применялся для исследования различных типов диссипативных уравнений математической физики, как автономных, так и неавтономных: общих систем реакции-диффузии, 3D систем Навье–Стокса, диссипативных волновых уравнений, нелинейных эллиптических уравнений в цилиндрических областях (последним уравнениям посвящен цикл совместных работ М.И. Вишика и С.В. Зелика [234, 245, 246]) и других уравнений и систем. С помощью метода траекторных аттракторов также были исследованы различные задачи приближения и возмущения траекторных аттракторов уравнений, возникающих в сложных моделях математической физики, а также задачи усреднения аттракторов уравнений с частыми производными, которые содержат быстро осциллирующие члены по времени или по пространственным переменным. Эти и другие проблемы изложены в обзоре [287], а также в книге [256].

Глава 19

Общие граничные задачи для эллиптических операторов в ограниченных областях

Марк Маламуд

Российский Университет Дружбы Народов (Москва)

Работа М.И. Вишика [Виш52], ставшая ныне классической, состоит из двух частей. Её первая часть имеет абстрактный характер и посвящена расширениям дуальной пары операторов.

19.1 Расширения дуальных пар

Напомним необходимые понятия.

Определение 1. *(i) Пара замкнутых плотно определённых линейных операторов A и $A^\top$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ образуют* дуальную пару*, если*

$$(Af, g) = (f, A^\top g), \qquad f \in \operatorname{dom} A, \quad g \in \operatorname{dom}(A^\top); \tag{19.1}$$

(ii) Оператор $\widetilde{A}$ (не обязательно замкнутый) называют собственным расширением дуальной пары $\{A, A^\top\}$ *и пишут $\widetilde{A} \in \operatorname{Ext}\{A, A^\top\}$, если $A \subsetneqq \widetilde{A} \subsetneqq \left(A^\top\right)^*$.*

Определение 2 ([Виш52]). *Расширение $\widetilde{A} \in \operatorname{Ext}\{A, A^\top\}$ называют* разрешимым*, если $0 \in \rho(\widetilde{A})$, т.е $\widetilde{A}$ имеет ограниченный обратный в $\mathfrak{H}$, и* вполне разрешимым *– если оно разрешимо и $(\widetilde{A})^{-1}$ компактен в $\mathfrak{H}$.*

Теорема 3 ([Виш52]). *Пусть операторы A и $A^\top$ – ограниченно обратимы. Тогда:*

(i) Существует разрешимое расширение $A_0 \in \operatorname{Ext}\{A, A^\top\}$;

(ii) Если при этом операторы $A^{-1} : \operatorname{ran}(A) \to \mathfrak{H}$ и $(A^\top)^{-1} : \operatorname{ran}(A^\top) \to \mathfrak{H}$ компактны, то расширение A_0 можно выбрать вполне разрешимым.

М.И. Вишик также описывает все разрешимые, вполне разрешимые и регулярно разрешимые расширения $\widetilde{A} \in \operatorname{Ext}\{A, A^\top\}$, базируясь на следующей формуле прямого разложения области $\operatorname{dom}(A^\top)^*$:

$$\operatorname{dom}(A^\top)^* = \operatorname{dom} A \dotplus A_0^{-1}(\ker A^*) \dotplus \ker(A^\top)^* = \operatorname{dom} A_0 \dotplus \ker(A^\top)^*, \tag{19.2}$$

и аналогичной формуле для области $\operatorname{dom}(A^*)$. Формула (19.2) заменяла первую формулу Неймана и являлась новой даже в случае симметрического оператора $A = A^\top$.

Приведём результат М.И. Вишика, считая для простоты, что $\ker \widetilde{A} = \{0\}$.

Теорема 4 ([Виш52]). *(i) Пусть выполнены условия Теоремы 3 и предположим, что $A_0 \in \big(\mathrm{Ext}\{A, A^\top\}\big)$ – фиксированное разрешимое расширение дуальной пары $\{A, A^\top\}$. Каждое собственное расширение $\widetilde{A} \in \big(\mathrm{Ext}\{A, A^\top\}\big)$ является сужением $(A^\top)^*$ на линеал (подпространство, которое необязательно замкнуто)*

$$\mathrm{dom}(\widetilde{A}) = \mathrm{dom}\, A \dotplus (A_0^{-1} + C)\,\mathrm{dom}\, C \dotplus U^\perp, \qquad A_0 \in \Big(\mathrm{Ext}\{A, A^\top\}\Big), \tag{19.3}$$

где $V = \overline{\mathrm{dom}\, C}$ – подпространство ядра $\ker(A^\top)^*$ оператора $(A^\top)^*$, $U^\perp$ – подпространство ядра $\ker A$, а C –линейный оператор,

$$C: \ \mathrm{dom}\, C \subset V \to U.$$

(ii) При этом расширение $\widetilde{A}$ – разрешимо (вполне разрешимо) в точности тогда, когда $U^\perp = 0$, $V = (\ker A^\top)^*$, а C – ограничен (компактен). В последнем случае предполагается, что A^{-1}, $(A^\top)^{-1}$ и A_0^{-1} – компактны.

19.2 Эллиптические операторы

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, пусть $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$ – соболевское пространство с нормой $\|\cdot\|_s$, $s \in \mathbb{R}$, и пусть $\mathcal{A}$ – симметрический эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в $L^2(\Omega)$,

$$\mathcal{A} := -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + q(x), \quad a_{jk} = \overline{a}_{jk} = a_{kj} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad q = \overline{q} \in C(\overline{\Omega}). \tag{19.4}$$

Считаем матрицу $\big(a_{jk}(x)\big)$ положительно определённой при $x \in \overline{\Omega}$. Так как коэффициенты a_{jk} – вещественны, оператор $\mathcal{A}$ – правильно эллиптический.

Обозначим через $A_{\min}$ и $A_{\max}$ минимальный и максимальный операторы, ассоциированные с $\mathcal{A}$ в $L^2(\Omega)$. При этом $A := A_{\min}$ определяется как замыкание оператора $\mathcal{A} \upharpoonright C_0^\infty(\Omega)$, а $A_{\max}$ порождён оператором $\mathcal{A}$ на области

$$\mathrm{dom}\, A_{\max} = \{u \in L^2(\Omega): \ \mathcal{A}u \in L^2(\Omega)\}, \tag{19.5}$$

где $\mathcal{A}u$ понимается в смысле теории распределений. Определение (19.5) эквивалентно равенству $A_{\max} = (A_{\min})^*$. Известно также, что $H^2(\Omega)$ плотно в линеале $\mathrm{dom}\, A_{\max}$, снабжённом нормой графика, т.е. $A_{\max}$ – замыкание оператора $\mathcal{A} \upharpoonright C^\infty(\overline{\Omega})$.

Для минимального оператора $A_{\min}$ справедлива двусторонняя априорная оценка

$$C_1\|u\|_2 \le \|A_{\min}u\|_0 + \|u\|_0 \le C_2\|u\|_2, \quad u \in H_0^2(\Omega), \tag{19.6}$$

эквивалентная (алгебраически и топологически) соотношению $\mathrm{dom}(A_{\min}) = H_0^2(\Omega)$. Оценка (19.6) для максимального оператора $A_{\max}$ невозможна: для области $\mathrm{dom}(A_{\max})$ справедливы лишь более слабые включения

$$H^2(\Omega) \subset \mathrm{dom}(A_{\max}) \subset H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega), \tag{19.7}$$

правое из которых – проявление теоремы о внутренней регулярности (заметим, что $\mathrm{dom}(A_{\max}) \neq H^2(\Omega)$). Так, для фундаментального решения оператора Лапласа $f_{x_0}(x) := |x - x_0|^{-1} (\in L^2(\mathbb{R}^3))$, привязанного к точке $x_0 \in \partial\Omega$, имеем $f_{x_0}(\cdot) \in \operatorname{dom}\Delta_{\max} \setminus H^2(\Omega)$. Более того, $\Delta f_{x_0} = 0$ в Ω. Далее, пусть $\frac{\partial}{\partial\nu}$ – конормальная производная:

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\cos(n, x_j)\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{19.8}$$

В случае оператора Лапласа имеем $a_{jk}(x) = \delta_{jk}$ и $\frac{\partial}{\partial\nu} = \frac{\partial}{\partial n}$, где n – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$. В этих обозначениях классическая формула Грина принимает вид

$$(A_{\max}f, g) - (f, A_{\max}g) = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial f}{\partial\nu}\overline{g} - f\overline{\frac{\partial g}{\partial\nu}}\right)d\sigma, \quad f, g \in C^2(\overline{\Omega}). \tag{19.9}$$

Далее, положим

$$G_0u := \gamma_0 u := u \restriction \partial\Omega, \quad G_1u := \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) \restriction \partial\Omega, \qquad u \in \operatorname{dom}(A_{\max}) \tag{19.10}$$

и заметим, что, согласно результатам Лионса–Мадженеса, отображения следов

$$G_0, G_1\colon C^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\partial\Omega), \quad G_0u = u \restriction \partial\Omega, \quad G_1u = \gamma_0(\partial u/\partial\nu) = \partial u/\partial\nu \restriction \partial\Omega,$$

распространяются на $\operatorname{dom}(A_{\max})$:

$$G_0 : \operatorname{dom}(A_{\max}) \to H^{-1/2}(\partial\Omega), \qquad G_1 : \operatorname{dom}(A_{\max}) \to H^{-3/2}(\partial\Omega), \tag{19.11}$$

причём оба отображения сюръективны (см. [LM72]). Однако эти соотношения не позволяют распространить формулу Грина (19.9) на $\operatorname{dom}(A_{\max})$. Приведём конструкцию М. Вишика [Виш52], позволяющую это сделать.

Пусть ноль – точка регулярного типа для A, $A_0 \in \operatorname{Ext}\{A, A\} =: \operatorname{Ext}_A$, и пусть $0 \in \rho(A_0)$. Согласно (19.2) справедливо прямое разложение $\operatorname{dom} A^* = \operatorname{dom} A_0 \dotplus \ker A^*$.

Пусть $A_0 := A_{\gamma_0} := A^* \restriction \ker\gamma_0$ – реализация Дирихле. По теореме регулярности

$$\operatorname{dom} A_0 = H^{2,0}(\Omega) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \{f \in H^2(\Omega) : \gamma_0 f = 0\} \quad \text{и} \quad A_0 = A_0^*. \tag{19.12}$$

В этом случае при условии $0 \in \rho(A_0)$ разложение (2) принимает вид

$$\operatorname{dom} A_{\max} = \operatorname{dom} A^* = \operatorname{dom} A_0 \dotplus \ker A^* = H^{2,0}(\Omega) \dotplus \ker A^*. \tag{19.13}$$

Отметим, что условие $0 \in \rho(A_0)$ выполнено автоматически, если A – положительно определён: $(Af, f) \geq \varepsilon\|f\| \geq 0$, $f \in \operatorname{dom} A$, так как тогда $A_0 = A_{\gamma_0} = A_F (\in \operatorname{Ext}_A)$ – его фридрихсово расширение.

Так как $G_1\big(H^{2,0}(\Omega)\big) \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$, то, согласно разложению (19.13) с $A_0 = A_{\gamma_0}$, функции из $\operatorname{dom} A_{\max}$, обладая внутренней регулярностью (см. (19.7)), теряют граничную регулярность лишь одновременно с функциями из ядра $\ker A^* (\subset H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega))$.

Так как отображение γ_0 в (7) сюръективно и $0 \in \rho(A_0)$, то в силу (19.13) для каждого $\varphi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ существует единственное решение задачи

$$A^*u = 0, \quad \gamma_0 u = \varphi \in H^{-1/2}(\partial\Omega). \tag{19.14}$$

При помощи решения $u (\in \ker A^*)$ вводим отображение Дирихле–Неймана (Dirichlet-to-Neumann map), полагая:

$$\Lambda\varphi := G_1u = \gamma_0(\partial u/\partial\nu) \in H^{-3/2}(\partial\Omega). \tag{19.15}$$

Теперь, следуя [Gru68], основной результат М.И. Вишика о регуляризации формулы Грина можно сформулировать так.

Теорема 5. *Пусть* $\widetilde{\Gamma}_0 := G_0$ *и* $\widetilde{\Gamma}_1 := G_1 - \Lambda\gamma_0$. *Тогда:*

(i) отображения

$$\widetilde{\Gamma}_1\colon \operatorname{dom}(A_{\max}) \to H^{1/2}(\partial\Omega), \quad \widetilde{\Gamma}_0\colon \operatorname{dom}(A_{\max}) \to H^{-1/2}(\partial\Omega), \tag{19.16}$$

являются сюрьективными и справедлива регуляризованная формула Грина:

$$\big(A_{\max}u, v\big)_{L^2(\Omega)} - \big(u, A_{\max}v\big)_{L^2(\Omega)} = \big(\widetilde{\Gamma}_1 u, \widetilde{\Gamma}_0 v\big)_{1/2,-1/2} - \big(\widetilde{\Gamma}_0 u, \widetilde{\Gamma}_1 v\big)_{-1/2,1/2}. \tag{19.17}$$

(ii) Отображение $\binom{\widetilde{\Gamma}_1}{\widetilde{\Gamma}_0} : \operatorname{dom}(A_{\max}) \to H^{1/2}(\partial\Omega) \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$ *сюрьективно.*

Здесь $(\cdot,\cdot)_{s,-s}$ обозначает спаривание между $H^s(\partial\Omega)$ и $H^{-s}(\partial\Omega)$. В отличие от отображения $\binom{\widetilde{\Gamma}_1}{\widetilde{\Gamma}_0} : \operatorname{dom}(A_{\max}) \to H^{1/2}(\partial\Omega) \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$, отображение

$$G = \{G_0, G_1\}: \ \operatorname{dom}(A_{\max}) \to H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{-3/2}(\partial\Omega) \tag{19.18}$$

не сюръективно.

Каждый оператор $K : H^{-1/2}(\partial\Omega) \to H^{-3/2}(\partial\Omega)$ определяет реализацию

$$\widehat{A}_K := A_{\max} \upharpoonright \operatorname{dom}(\widehat{A}_K), \quad \operatorname{dom}(\widehat{A}_K) := \{f \in \operatorname{dom}(A_{\max}) : G_1 f = K G_0 f\}. \tag{19.19}$$

Эти расширения описываются следующей простой леммой.

Лемма 6. *Пусть* $\widetilde{A} \in Ext_A$. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) Расширения $\widetilde{A}$ *и* $A_0 = A_{\gamma_0}$ *дизъюнктны, т.е.* $\operatorname{dom}\widetilde{A} \cap \operatorname{dom} A_0 = \operatorname{dom} A$*;*

(ii) $\widetilde{A}$ *допускает представление вида* (19.19), *т.е.* $\widetilde{A} = \widehat{A}_K$*;*

(iii) $\widetilde{A}$ *допускает специальное представление* $\widetilde{A} = A_{K_{\text{reg}}}$ *вида* (19.19), *в котором график* $\operatorname{graph}(K_{\text{reg}})$ *оператора* K_{reg} *определяется равенством*

$$\operatorname{graph}(K_{\text{reg}}) = G\operatorname{dom}(\widetilde{A}). \tag{19.20}$$

Отметим, что отображение $K \to \widehat{A}_K$ не является биективным: равенство $\widehat{A}_{K_1} = \widehat{A}_{K_2}$ не влечёт равенства $K_1 = K_2$. Причина этого в том, что отображение (19.18) не сюръективно. Для $K \neq K_{\text{reg}}$ вместо равенства (19.20) имеет место лишь включение $G\operatorname{dom}(\widehat{A}_K) \subseteq \operatorname{graph}(K)$. При этом K_{reg} однозначно определяется по K:

$$K_{\text{reg}} := K \upharpoonright \operatorname{dom} K_{\text{reg}}, \quad \operatorname{dom} K_{\text{reg}} := \{h \in \operatorname{dom} K : (K - \Lambda)h \in H^{1/2}(\partial\Omega)\}. \tag{19.21}$$

Пусть, например, $\mathbb{O} : H^{-1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{-3/2}(\partial\Omega)$ – нулевой оператор. Тогда $\widehat{A}_{\mathbb{O}} = A_{G_1} := A^* \upharpoonright \ker G_1$ и

$$\operatorname{dom}(\mathbb{O}_{\text{reg}}) := \{f \in H^{-1/2}(\partial\Omega) : -\Lambda f \in H^{1/2}(\partial\Omega)\} = H^{3/2}(\partial\Omega).$$

Поэтому $A_{G_1} = \widehat{A}_{\mathbb{O}_{\text{reg}}}$ и $\operatorname{dom}(\widehat{A}_{G_1}) = \{f \in H^2(\Omega) : G_1 f = 0\}$.

Теорема 7. *Пусть* $\widetilde{A} = \widehat{A}_K$ *– расширение вида* (19.19) *и пусть* $K = K_{\text{reg}}$. *Верны следующие эквивалентности:*

(i) Оператор $\widehat{A}_K$ *замкнут* $\Leftrightarrow$ *оператор* $K - \Lambda$ *– замкнут;*

(ii) Образ $\operatorname{ran}\widehat{A}_K$ *замкнут* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{ran}(K-\Lambda)$ *– замкнут;*

(iii) $\dim\ker\widehat{A}_K = \dim\ker(K-\Lambda)$ $\Leftrightarrow$ $\dim\operatorname{coker}\widehat{A}_K = \dim\operatorname{coker}(K-\Lambda)$*;*

(iv) Оператор $\widehat{A}_K$ *– фредгольмов* $\Leftrightarrow$ $K-\Lambda$ *– фредгольмов;*

(v) Расширение $\widehat{A}_K$ *разрешимо* $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\ker(K-\Lambda)=\{0\},\\ (K-\Lambda)^{-1}\in\mathcal{B}\big(H^{1/2}(\partial\Omega),H^{-1/2}(\partial\Omega)\big);\end{cases}$

(vi) Расширение $\widehat{A}_K$ *вполне разрешимо* $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\ker(K-\Lambda)=\{0\},\\ (K-\Lambda)^{-1}\in\mathcal{S}_\infty\big(H^{1/2}(\partial\Omega),H^{-1/2}(\partial\Omega)\big).\end{cases}$

Теорема 7 наглядно демонстрирует одно из достижений М.И. Вишика: в терминах оператора $K-\Lambda$ (регуляризованного оператора K) можно охарактеризовать перечисленные свойства реализации $\widehat{A}_K$, а в терминах исходного K – ни одного из них, даже замкнутость.

Попытки применить теорию расширений к исследованию граничных задач для оператора Лапласа предпринимались рядом американских математиков сразу после появления работы Дж. Кэлкина (1939 г.). Однако это удалось только М.И. Вишику в работе [Виш52], опередившей своё время и ставшей особенно цитируемой в последние 25–30 лет.

На современном языке Теорема 5 означает, что М.И. Вишик впервые построил граничную тройку (см. терминологию в [Mal10]) для эллиптического оператора вида (19.4). Конструкция Вишика тем более удивительна, что теория следов для эллиптических операторов (и соболевских пространств) была построена Ж.-Л. Лионсом и Э. Мадженесом (см. [LM72]) лишь 7–10 лет спустя. Не располагая явным описанием следов (19.11), Вишик доказывает (на современном языке) следующие вложения:

$$L^p(\partial\Omega)\subset H^{-1/2}(\partial\Omega)\quad\text{при}\ \ p\geq\frac{2(n-1)}{n},\qquad H^{1/2}(\partial\Omega)\subset L^q(\partial\Omega)\quad\text{при}\ q<\frac{2(n-1)}{n-2},$$

где $n=\dim\Omega$.

Не имея возможности цитировать несколько сотен работ, так или иначе развивающих или использующих работу [Виш52], упомянём лишь две работы, [Gru68] и [Mal10], наиболее близкие по содержанию к [Виш52] (см. также цитируемую в них в литературу). После работы [AS80] результаты статьи Вишика 1952 г., а также результаты М.С. Бирмана и М.Г. Крейна, стали широко доступны международной аудитории и стали называться “теорией Бирмана–Крейна–Вишика” и восприниматься как классические.

[AS80] A. Alonso, B. Simon, *The Birman–Kreĭn–Vishik theory of self-adjoint extensions of semibounded operators*, Journal of Operator Theory **4** (1980), 251–270.

[Gru68] G. Grubb, *A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968), 3, 425–513.

[LM72] J. Lions, E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications, Vol I*, Springer, New York (1972).

[Mal10] M. Malamud, *Spectral theory of elliptic operators in exterior domains*, Russian Journal of Mathematical Physics **17** (2010), 1, 96–125.

[Виш52] М. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений*, Труды Моск. мат. общества **1** (1952), 187–246.

Глава 20

On the Vishik–Lusternik method

Александр Демидов *Мехмат, Кафедра общих проблем управления, Московский Государственный Университет*

Московский Физико-Технический Институт

Центральная Школа Лиона (Лион)

Технический Университет Чване (Претория)

Abstract. The total number of references to only three Vishik–Lyusternik's articles cited here [ВЛ57, ВЛ60b, ВЛ60a] on asymptotics and the famous work of Vishik [Виш51] on strongly elliptic systems (which allowed, in particular, to justify asymptotics) has about three hundred scientific publications. Most of these publications (including works [Dem75,BD11,Dem18]) are largely based on the basic, ingeniously simple ideas of the Vishik–Lyusternik method, which allows one to solve a wide range of complex problems and therefore have received such extensive application.

For the first time in the problems of singular perturbation with a small parameter $\varepsilon > 0$ in partial differential equations, a stunning simplicity method was proposed for constructing an asymptotics uniform up to the boundary of the region, where the solution u_ε of the original problem changes significantly. The "highlight" of the method lies in the fact that the solution u_0 for $\varepsilon = 0$ of the original problem (the construction of which in such problems is a relatively simple procedure), to this solution u_0 is added an amendment in the form of a solution of the simple problem on the half-line for a ordinary differential equation with constant coefficients regarding the so-called fast variable. It is in the direction of this fast variable that the u_ε solution of the original problem changes significantly. The Vishik–Lyusternik method made it easy to identify this feature. And therein lies the power of the method.

To represent two main ideas of the Vishik–Lyusternik method, we consider the following rather simple Dirichlet problem in a disc $D = \{\, r = |x| < R \,\}$ of radius $R > 0$:

$$\varepsilon^2 A v_\varepsilon = \varepsilon^2 \quad \text{in} \quad D\,, \qquad v_\varepsilon\big|_{\Gamma=\partial D} = 0. \tag{20.1}$$

Here, $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{a}}$ is a small positive parameter and $A = \big(\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r\big) - a$, i.e.,

$$\varepsilon^2 A = \varepsilon^2 \Delta - 1\,, \tag{20.2}$$

where Δ is the Laplace operator.

It is clear that a bounded solution $v = v_\varepsilon$ to a simpler problem of the same kind

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - v = 1 \qquad x > 0\,, \qquad v\big|_{x=0} = 0$$

differs from the limit solution $v_0 = -1$ (as $\varepsilon \to 0$) by some function $t \mapsto e^{-t}$ that exponentially rapidly decreases in the variable (called the fast variable) $t = \frac{x}{\varepsilon}$. This simple observation led M.I.

Vishik and L.A. Lyusternik to the *first idea* of their method for constructing asymptotic expansions of solutions to rather general linear singularly perturbed elliptic problems. In accordance with this idea, an asymptotic expansion should be looked for in the form of a sum of two polynomial decompositions with respect to the parameter ε:

$$v_\varepsilon(x) \simeq [f_0(x) + \ldots + \varepsilon^n f_n(x)] + [g_0(t) + \ldots + \varepsilon^m g_m(t)] ,$$

where $[g_0(t) + \ldots + \varepsilon^m g_m(t)]$ rapidly decreases near the boundary of the domain, i.e., it is the so-called boundary layer function. Here $t = \nu(x)/\varepsilon$, where $\nu(x)$ is the distance from a point x to the boundary of the domain. More exactly, the expression $\chi(x)\,[g_0(t) + \ldots + \varepsilon^m g_m(t)]$ should be considered (cf., for example, [Dem75]), where χ is a smooth cut-off function which is equal to 1 in a neighborhood of the boundary and to 0 outside of a larger neighborhood. However, we omit technical details for the sake of simplicity.

Returning to the problem (20.1) and following the first idea of the Vishik–Lyusternik method, we need to apply the operator A to $[f_0(x) + \ldots + \varepsilon^n f_n(x)]$ and $[g_0(t) + \ldots + \varepsilon^m g_m(t)]$. Therefore, it is necessary to represent the operator A in the corresponding variables (i.e., x and t) for obtaining two decompositions with respect to ε. In our particular case, these decompositions have the form

$$\varepsilon^2 A = -1 + \varepsilon^2\Delta \qquad \text{and} \qquad \varepsilon^2 A = (\partial_{tt} - 1) - \frac{\varepsilon}{R - \varepsilon t}\partial_t = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 \widetilde{B} , \tag{20.3}$$

where

$$B_0 = \partial_{tt} - 1 , \quad B_1 = -\frac{1}{R}\partial_t , \quad \widetilde{B} = -\frac{t}{R^2(1 - \frac{\varepsilon t}{R})}\partial_t . \tag{20.4}$$

The second idea of the Vishik–Lyusternik method concerns justification of asymptotics, i.e., estimating the remainder term

$$z = v_\varepsilon - [f_0 + \ldots + \varepsilon^n f_n] - [g_0 + \ldots + \varepsilon^m g_m] .$$

For this purpose, one should use a priori estimates for solutions to elliptic problems. Such estimates for rather general strongly elliptic problems were first obtained by Vishik [Виш51]. In the case of the problem (20.1), we have

$$\|z\|_\mu \le \frac{C}{\varepsilon^2}\,\|(-\varepsilon^2 A)z\|_{\mu-2},$$

where $\|\cdot\|_s$ denotes the norm in the Sobolev space H^s and

$$\begin{aligned}
(-\varepsilon^2 A)z &= \varepsilon^2 A\Big[-v^R + (f_0 + \ldots + \varepsilon^n f_n) + (g_0 + \ldots + \varepsilon^m g_m)\Big] \\
&\overset{(20.3)}{=} -\varepsilon^2 A\, v^R + (-1 + \varepsilon^2\Delta)(f_0 + \ldots + \varepsilon^n f_n) + (B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 \widetilde{B})(g_0 + \ldots + \varepsilon^m g_m) \\
&= -[[f_0]] - \varepsilon[[f_1]] - \varepsilon^2[[1 + f_2 - \Delta f_0]] - \varepsilon^3[[f_3 - \Delta f_1]] - \ldots - \varepsilon^n[[f_n - \Delta f_{n-2}]] \\
&\quad -\varepsilon^{n+1}\Delta f_{n-1} - \varepsilon^{n+2}\Delta f_n + [[B_0 g_0]] + \varepsilon[[B_0 g_1 + B_1 g_0]] + \varepsilon^2[[B_0 g_2 + B_1 g_1]] + \ldots
\end{aligned}$$

To make the norm $\|z\|_\mu$ of the remainder term small, one should require the coefficients of lower powers of ε to vanish. The fact that the coefficients closed in the brackets $[[\,\cdot\,]]$ vanish means that

$$f_0 = f_1 = 0 , \; f_2 = -1 , \; f_i = 0 , \quad i > 2 , \tag{20.5}$$

and the boundary layer functions are solutions to the ordinary differential equations

$$B_0 g_0 = 0 \quad \overset{(20.4)}{\Leftrightarrow} \quad (\partial_{tt} - 1)g_0 = 0 , \qquad B_0 g_j = -B_1 g_{j-1} \quad \overset{(20.4)}{\Leftrightarrow} \quad (\partial_{tt} - 1)g_j = -\partial_t g_{j-1} ,$$

with $j \geq 2$. The function g_j satisfies the boundary condition $g_j(0) = f_j(R)$ which follows from the equality

$$[f_0(r) + \ldots + \varepsilon^n f_n(r)]\,\big|_{r=R} + [g_0(t) + \ldots + \varepsilon^m g_m(t)]\,\big|_{t=0} = 0\,,$$

corresponding to the condition $v_\varepsilon(x)\big|_{|x|=R} \overset{(20.1)}{=} 0$. Thus, $g_0 = g_1 = 0$, $g_2 = e^{-t}$, $g_3 = -\frac{t}{2R}e^{-t}$.

As a result, we find:

$$v_\varepsilon(x) = \varphi(t) + z\,, \quad \varphi(t) = -\varepsilon^2 + \varepsilon^2\left(1 - \varepsilon\kappa\frac{t}{2}\right)e^{-t}\,, \tag{20.6}$$

where $t \overset{\text{def}}{=} |R - r|/\varepsilon$, $r = |x|$, $\kappa = R^{-1}$, and

$$\|z\|_\mu \leq C\|A\|_{\mu-2} \leq \frac{C}{\varepsilon^2}\|\varepsilon^4(B_1 g_3 + \widetilde{B}g_2) + \varepsilon^5\widetilde{B}g_3\|_{\mu-2} \leq C\varepsilon^{4+1/2-\mu}\,, \quad \varepsilon = a^{-1/2} \to 0\,.$$

We note that $H^\mu \subset C^{0,\lambda}(\bar{D})$ for every $\lambda < \delta$ if $\mu = 1 + \delta$, $\delta > 0$.

[BD11] S. Bezrodnykh, A. Demidov, *On the uniqueness of solution Cauchy's inverse problem for the equation $\Delta u = au + b$*, Asymptotic Analysis **74** (2011), 1-2, 95–121.

[Dem75] A. Demidov, *Asymptotic behavior of the solution of a boundary value problem for elliptic pseudodifferential equations with a small parameter multiplying the highest operator*, Труды Моск. мат. общества **32** (1975), 119–146.

[Dem18] A. Demidov, *Inverse problems in magneto-electroscanning (in encephalography, for magnetic microscopes, etc.)*, Journal of Applied Analysis and Computation **8** (2018), 3, 915–927.

[ВЛ57] М. Вишик, Л. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Усп. Матем. Наук **12** (1957), 5(77), 3–122.

[ВЛ60a] М. Вишик, Л. Люстерник, *Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями*, Усп. Матем. Наук **15** (1960), 4, 27–95.

[ВЛ60b] М. Вишик, Л. Люстерник, *Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I*, Усп. Матем. Наук **15** (1960), 3, 3–80.

[Виш51] М. Вишик, *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений*, Матем. Сборник **29(71)** (1951), 3, 615–676.

Глава 21

Работы М.И. Вишика по квазилинейным уравнениям

Александр Шнирельман *Университет Конкордия (Монреаль)*

В начале 1960-х Марк Иосифович Вишик выполнил цикл работ по квазилинейным эллиптическим и параболическом уравнениям и системам. Исследовались сильно эллиптические уравнения и системы произвольного порядка, имеющие вид

$$L(u)+V(u)=\sum_{|\alpha|\leq m,|\beta|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}A_{\alpha}(x,D^{\beta}u)+V(x,D^{\gamma}u)=h, \tag{21.1}$$

где $u=u(x)=(u_1,\,\ldots,\,u_k)$ – неизвестная вектор-функция, $A_\alpha(x,\zeta_\gamma)$ и $h(x)$ – данные вектор-функции, и $V(x,\zeta_\gamma)$ обозначает подчинённые, в некотором смысле, члены. Система решается в ограниченной области $M\subset\mathbb{R}^n$ с гладкой границей при граничных условиях первой краевой задачи $D^\omega u|_{\partial M}=0$ ($|\omega|\leq m-1$). На коэффициенты A_α налагается ряд условий, прежде всего условие эллиптичности вида

$$\sum_{|\alpha|=m,|\beta|\leq m}\frac{\partial A_\alpha(x,\xi_\beta)}{\partial\xi_\beta}(\zeta_\alpha,\zeta_\beta)\geq\varphi(\xi)|\zeta|^2, \tag{21.2}$$

где $\varphi(\xi)$ – положительная функция от всех ξ_β, $|\beta|\leq m$. Кроме того, налагаются условия на рост коэффициентов $A_\alpha(x,\xi_\beta)$ при $|\xi_\beta|\to\infty$. Отдельно рассмотрены случаи полиномиального и суперполиномиального роста. Решения ищутся в функциональном пространстве X, зависящем от поведения функций A_α: при полиномиальном росте функций A_α по ξ_β это пространство Соболева, а при суперэкспоненциальном росте – пространство Соболева–Орлича.

В этих работах получены исчерпывающие результаты о разрешимости и единственности решения исследуемых задач. Именно, для систем, имеющих чисто дивергентную форму (без подчиненных членов) доказано, что оператор L осуществляет гомеоморфизм пространства решений X на его сопряжённое пространство X', т.е. задача оказывается однозначно разрешимой; в общем случае оператор L отображает пространство X на всё сопряжённое пространство X', т.е. задача оказывается разрешимой при всех правых частях h, хотя решение может оказаться неединственным.

Доказательства этих результатов основано на некотором варианте метода Галёркина. Общепринятый метод Галёркина для решения уравнения вида $F(u)=h$ состоит в том, что выбирается некоторая полная система функций $v_j\in X$, и приближённое решение строится в виде $u_k=\sum_{j=1}^{k}C_{kj}v_j$. При этом коэффициенты C_{kj} определяются из системы нелинейных уравнений

$$[F(u_k),v_j]=[h,v_j]\qquad(j=1,\,\ldots,\,k). \tag{21.3}$$

В типичных случаях существование решения этой системы доказывается из топологических соображений. Следующий шаг состоит в доказательстве априорной оценки нормы решения u_k, независимой от k. После этого, из соображений слабой компактности, находится подпоследовательность приближённых решений u_{k_i}, слабо сходящаяся к некоторому пределу u. Наконец, доказывается, что в уравнении можно перейти к пределу для найденной слабо сходящейся последовательности, и тем самым доказать, что u является искомым решением.

Однако в задачах, рассматриваемых в работах М.И., стандартный метод Галёркина не обеспечивает необходимой равномерной регулярности приближённых решений u_k; грубо говоря, не хватает одной производной. Чтобы обойти эту трудность, М.И. использовал следующее усовершенствование метода Галёркина.

Пусть v_j – некоторая последовательность гладких функций в M, выбор которой уточняется ниже. Будем искать приближённое решение в виде $u_k = \sum_{j=1}^{k} C_{kj} v_j$. Коэффициенты C_{kj} определяются из следующей системы k нелинейных уравнений:

$$[B^+(L(u_k) + V(u_k)), v_j] = [B^+ h, v_j], \tag{21.4}$$

где оператор

$$B^+ w(x) = Mw(x) - \Delta\psi(x)w(x); \tag{21.5}$$

здесь M – достаточно большая положительная константа, $\psi(x)$ – положительная функция в M , такая, что $D^\omega \psi|_{\partial M} = 0$ при $|\omega| \leq 2m - 1$. Это эквивалентно уравнениям

$$[L(u_k) + V(u_k), Bv_j] = [h, Bv_j] \quad (j = 1, \ldots, k), \tag{21.6}$$

где

$$Bw(x) = Mw(x) - \psi(x)\Delta w(x). \tag{21.7}$$

Так вот, функции v_j выбираются так, чтобы функции Bv_j образовывали полную систему в пространстве X.

Такой метод построения приближённых решений обеспечивает нужную их регулярность, достаточную, чтобы перейти к пределу в нелинейном операторе $L(u) + V(u)$. Существование решения конечномерной системы следует из простых топологических соображений (степени отображения). Необходимые априорные оценки получаются за счёт виртуозной работы с теоремами вложения.

Используя аналогичный подход, М.И. исследовал начально-краевую задачу и для параболических систем вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L(u) = h(x,t), \tag{21.8}$$

где L – сильно эллиптический оператор порядка $2m$, такой же, как (21.1), при условии первой краевой задачи на границе области M, и при начальном условии $u|_{t=0} = u_0$. Решение ищется как предел (под)последовательности галёркинских приближений, т.е. $u_k(x,t) = \sum_{j=1}^{k} C_{kj}(t) v_j(x)$. Используя приём, аналогичный вышеописанному, а именно, умножая обе части уравнения (21.8) на оператор B^+, определяемый как

$$B^+ w(x,t) = Mu(x,t) - \Delta\left(\psi(x)w(x,t)\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left[(T-t)\frac{\partial w}{\partial t}\right], \tag{21.9}$$

мы получаем для коэффициентов $C_{kj}(t)$ следующую систему дифференциальных уравнений третьего (!) порядка:

$$\left[B^+\left(\frac{\partial u_k}{\partial t} - L(u_k)\right), v_j\right] = [B^+ h, v_j] \quad (j = 1, \ldots, k). \tag{21.10}$$

Для системы (21.10) удаётся получить достаточно сильную априорную оценку, что позволяет перейти к пределу в слабо сходящейся подпоследовательности u_{k_i} приближённых решений, и тем самым доказать существование решения (единственность доказывается отдельно).

Здесь приведен только один пример технической виртуозности, проявленной М.И. при работе над этими проблемами; можно привести немало других примеров, демонстрирующих его несравненный уровень аналитической техники.

Работы М.И. по квазилинейным уравнениям [50–58][1] были, в силу большой общности постановок задач и силы полученных результатов, огромным прорывом, оказавшим большое влияние на развитие этой тематики у нас и за рубежом.

[1] Ссылки по порядковым номерам относятся к списку публикаций М.И. Вишика в конце сборника. (*Прим. ред.*)

Глава 22

Attractors for nonlinear nonautonomous equations

Владимир Чепыжов

Институт Проблем Передачи Информации РАН (Москва) и Высшая Школа Экономики (Москва)

Abstract. This is a review of the results obtained by Mark Vishik in collaboration with his former student Vladimir Chepyzhov in 1990–2012 that were published in about 50 their joint papers and two monographs (see the list of publications by Mark Vishik).

M.I. Vishik and V.V. Chepyzhov mostly have studied problems related to the theory of nonautonomous infinite-dimensional dynamical systems. They have constructed the attractors and studied their properties for various nonautonomous equations of mathematical physics: the 2D and 3D Navier–Stokes systems, reaction-diffusion systems, dissipative wave equations, the complex Ginzburg–Landau equations, and others. Since, as it has been discovered, the attractors of nonautonomous dynamical systems, being compact sets, usually have infinite dimension, the research has been focused on the Kolmogorov ε-entropy of the attractors. Upper estimates for the ε-entropy of uniform attractors of nonautonomous equations in terms of ε-entropy of time-dependent coefficients of the equation have been proved.

Another subject of joint researches by M. Vishik and V. Chepyzhov has been related to the constructions of attractors for those equations of mathematical physics for which the solution of the corresponding Cauchy problem is not unique or the uniqueness is not known (for example, for the non-homogeneous 3D Navier–Stokes system in a bounded domain). The theory of the trajectory attractors for these equations has been developed, that was used to construct attractors for equations without uniqueness. The method of trajectory attractors was also applied to the study of finite-dimensional approximations of attractors. The perturbation theory for trajectory and global attractors has been developed and used in the study of the attractors of equations containing terms that oscillate rapidly with respect to spatial and time variables.

One of the major problems in the study of evolution equations of mathematical physics is the investigation of the behaviour of the solutions of these equations when time is large or tends to infinity. The related important questions concern the stability of solutions as $t \to +\infty$ or the character of the instability if a solution is unstable. In the last decades considerable progress in this area have been achieved in the study of autonomous evolution partial differential equations. For a number of basic evolution equations of mathematical physics it was shown that the long time behaviour of their solutions is characterized by attractors. Attractors were constructed for the following equations and systems: the two-dimensional Navier–Stokes system, various classes of reaction-diffusion systems, nonlinear dissipative wave equations, complex Ginzburg–Landau equations and many other autonomous equations and systems. Mainly the global attractors of these equations were studied.

22.1 Global attractors for autonomous and nonautonomous equations

An autonomous evolution equation can be written in the following abstract form:

$$\partial_t u = A(u), \qquad u|_{t=0} = u_0(x). \tag{22.1}$$

Here $u = u(x,t)$ is the solution of equation (22.1) and x, t denote the spatial and time variables, respectively. Corresponding to this equation is the *semigroup* of nonlinear operators $\{S(t)\} = \{S(t),\ t \geq 0\}$. The operator $S(t)$ maps the initial data $u_0(x)$ to the solution $u(x,t)$ of the Cauchy problem (22.1) at the time moment t:

$$S(t)u_0(x) = u(x,t), \qquad t \geq 0.$$

One assumes that the Cauchy problem (22.1) has a unique solution for each initial data $u_0(x)$ that belongs, for example, to a certain Banach (or metric) space E. The space E is chosen in such a way that $u(x,t)$ belongs to E for all $t \geq 0$. Thus, the operator $S(t)$ maps E into E for all $t \geq 0: \ S(t): E \to E$. The operators $\{S(t)\}$ satisfy the semigroup properties:

$$S(t_1)S(t_2) = S(t_1 + t_2) \quad \text{for all} \ \ t_1, t_2 \geq 0;$$
$$S(0) = \mathrm{Id} \quad \text{is the identity operator.}$$

A set $\mathcal{A}$ from E is said to be a *global attractor* of the equation under consideration or, equivalently, of the corresponding semigroup $\{S(t)\}$ if it has the following properties:

(i) the set $\mathcal{A}$ is compact in E;

(ii) $\mathcal{A}$ attracts each bounded set $B \subset E: \ \mathrm{dist}_E(S(t)B, \mathcal{A}) \to 0$ as $t \to +\infty$;

(iii) $\mathcal{A}$ is strictly invariant with respect to $\{S(t)\}: \ S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ for all $t \geq 0$.

Here $\mathrm{dist}_E(\cdot,\cdot)$ denotes the Hausdorff semidistance in E:

$$\mathrm{dist}_E(U,V) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in V} \|u - v\|_E.$$

It follows from the definition of the global attractor that the set $\mathcal{A}$ attracts solutions $u(x,t) = S(t)u_0(x)$ as $t \to +\infty$ uniformly with respect to bounded initial data $u_0(x)$. The global attractor $\mathcal{A}$ is unique if it exists. Thus the global attractor describes all the possible limits of solutions of equation (22.1).

It was shown that the Hausdorff and fractal dimension of the global attractors are finite for a number of equations and systems of mathematical physics. The estimates from above and from below for the Hausdorff and fractal dimension of attractors were found. For certain types of equations the structure of the global attractor $\mathcal{A}$ was completely described, for example, in the case where the equation has a global Lyapunov function. All these and other problems are treated in great detail in the books by R. Temam [Tem97], A.V. Babin and M.I. Vishik [BV92], J.K. Hale [Hal88], O.A. Ladyzhenskaya [Lad91] and in books of other authors (see [Chu02, SY02, Rob01, MZ08]).

The long-time behaviour of solutions of nonautonomous evolution equations of the form

$$\partial_t u = A(u,t), \qquad u|_{t=\tau} = u_\tau(x)$$

and their attractors were studied in details by many authors for ordinary differential equations ($u \in \mathbb{R}^N$) and for some classes of operator and partial differential equations. The construction of the *skew product flow* of the *process* (the analog of the semigroup in autonomous case) played the main role in this theory; this allowed one to reduce the problem to the study of an attractor of some semigroup acting in an extended function phase space (see, for instance, R.K. Miller [Mil65], G.R. Sell [Sel67], R.K. Miller and G.R. Sell [MS76], J.K. Hale [Hal88]).

Dealing with evolution partial differential equations and especially with systems arising from mathematical physics it is a good idea to extend the phase space by using only the hull of the time-dependent coefficients of the equation under consideration. From this point of view the research was focused in the last decade on attractors for nonautonomous evolution equations of mathematical physics. It was assumed that external forces, interaction functions, and other coefficients in the equations explicitly depend on time. The dependence on time of these parameters can be periodic, quasiperiodic, or almost periodic. The spaces of these functions were studied in great detail in L. Amerio and G. Prouse [AP71], B. Levitan and V. Zhikov [LZ82].

In the present review we also consider the equations whose time-depending terms are *translation compact* functions in appropriate function spaces. The latter means, that, say, in the case of the external force $g(x,t)$ depending on time $t\in\mathbb{R}$, that all the translations $\{g(x,t+h),\ h\in\mathbb{R}\}$ form a precompact set in the space $L_2([t_1,t_2];H)$ for every interval $[t_1,t_2]\subset\mathbb{R}$. Here H is a Hilbert (or more general) space corresponding to the physical nature of the function $g(x,t)$. Similarly, the translation compactness was defined for other terms of the equation, for example, for interaction functions of the form $f(u,t)$ and so on.

We denote by $\sigma(t)$ the collection of all time-dependent coefficients of a nonautonomous equation. The equation itself can be rewritten in the form

$$\partial_t u = A_{\sigma(t)}(u), \qquad u|_{t=\tau} = u_\tau(x). \tag{22.2}$$

The parameter $\sigma(t)$ is said to be the *time symbol* (or just the *symbol*) of the equation. The values of $\sigma(t)$ belong to a metric or Banach space. For example, $\sigma(t)=(f(u,t),g(x,t))$ if the time-dependent terms of the equation are the interaction function $f(u,t)$ and the external force $g(x,t)$. Dealing with nonautonomous equations it is fruitful to study the entire family of equations (22.2) with time symbols $\sigma(t)$ belonging to a set Σ called the *symbol space*. A typical symbol space is as follows. We are given a fixed initial time symbol $\sigma_0(t)$ of the equation we want to study. Then we consider the set of all time translations of $\sigma_0(t)$, i.e., the set $\{\sigma_0(t+h),\ h\in\mathbb{R}\}$. Moreover, we add to the symbol space Σ all the functions $\sigma(t)$ that are the limits of the sequences of the form $\{\sigma_0(t+h_n)\}$ as $n\to\infty$. The limits are taken in a suitable function space. The resulting family of functions $\{\sigma(t)\}$ is called the *hull* of $\sigma_0(t)$ and is denoted by $\mathcal{H}(\sigma_0)$. For example, if $\sigma_0(t)$ is an almost periodic function with values in a metric space $\mathcal{M}$, then $\mathcal{H}(\sigma_0)$ is the hull of σ_0 in the space $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$. We now set $\Sigma=\mathcal{H}(\sigma_0)$ and study the family of equations (22.2) with symbols $\sigma\in\mathcal{H}(\sigma_0)$.

We start from the fact that the properly defined attractor $\mathcal{A}$ of the initial equation with symbol $\sigma_0(t)$ must simultaneously be the attractor of each equation (22.2) with symbol $\sigma(t)\in\mathcal{H}(\sigma_0)$ and, moreover, it must be the attractor of the entire family of these equations. This observation leads to the concept of the *uniform (with respect to $\sigma\in\Sigma$) global attractor* $\mathcal{A}_\Sigma$ of the family of equations (22.2) with symbols $\sigma\in\Sigma$.

The initial data $u_\tau(x)$ for (22.2) is taken in the Banach space E. We assume that the Cauchy problem (22.2) is uniquely solvable for every $u_\tau\in E$ and for all $\tau\in\mathbb{R}$. Corresponding to equation (22.2) is the *process* $\{U_\sigma(t,\tau)\}=\{U_\sigma(t,\tau)\mid t,\tau\in\mathbb{R},t\geq\tau\}$ acting in the space E. Similarly to the autonomous equation (22.1) the operator $U_\sigma(t,\tau)$ maps the initial data $u_\tau(x)\in E$ to the solution $u(t,x)$ of the Cauchy problem (22.2) at the time moment t:

$$U_\sigma(t,\tau)u_\tau(x)=u(x,t), \qquad t\geq\tau, \quad \tau\in\mathbb{R}.$$

We assume that $u(x,t)$ belongs to E for all $t\geq\tau$. Thus, the operators $U_\sigma(t,\tau)$ map E into E for all $t\geq\tau,\tau\in\mathbb{R}:\ \ U_\sigma(t,\tau):E\to E$. The notion of process is a generalization of the notion of semigroup generated by an autonomous evolution equation. A process has the following characteristic properties

$$U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau) \quad \text{for all } t \geq s \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R};$$
$$U(\tau,\tau) = \mathrm{Id} \quad \text{for all } \tau \in \mathbb{R}.$$

We study the uniform attractor of the family of processes $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$ corresponding to the family of equations (22.2) with symbols $\sigma \in \Sigma$.

A set $\mathcal{A}_\Sigma$ from E is said to be a *uniform global attractor* of the family of processes $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$ if it has the following properties:

(i) the set $\mathcal{A}_\Sigma$ is compact in E;

(ii) $\mathcal{A}_\Sigma$ attracts any bounded set $B = \{u_\tau(x)\} \subset E$ uniformly w.r.t. $\sigma \in \Sigma$:

$$\sup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{dist}_E(U_\sigma(t,\tau)B, \mathcal{A}_\Sigma) \to 0 \text{ as } t \to +\infty \text{ for every } \tau \in \mathbb{R};$$

(iii) $\mathcal{A}_\Sigma$ is the *minimal* set satisfying (i) and (ii), that is, if a set $\mathcal{A}_1$ is compact in E and attracts any bounded set B uniformly w.r.t. $\sigma \in \Sigma$, then $\mathcal{A}_\Sigma \subseteq \mathcal{A}_1$.

Thus, the notion of uniform global attractor of a family of processes generalizes the notion of global attractor of a semigroup. The invariance property is replaced by the property of minimality.

We study uniform attractors of basic nonautonomous evolution equations of mathematical physics. The analysis of time symbols of these equations and systems is the key element in the theory of nonautonomous partial differential equations. The proposed method is quite simple and allows us to construct uniform attractors, to study their structure, and to estimate some important quantities related to attractors, such as the Hausdorff and fractal dimension and the Kolmogorov ε-entropy.

To describe the structure of uniform attractors we introduce the notion of a *kernel* of an equation. The kernel $\mathcal{K}_\sigma$ of equation (22.2) is the collection of all bounded (in E) solutions $u(t), t \in \mathbb{R}$ of the equation that are defined on the entire time axis $\mathbb{R}$. The set

$$\mathcal{K}(t) = \{u(t) \mid u \in \mathcal{K}\} \subseteq E$$

is called the *kernel section* at the time moment $t \in \mathbb{R}$. We prove the following identity for the uniform (w.r.t. $\sigma \in \Sigma$) attractor of the family of processes $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$ corresponding to problem (22.2):

$$\mathcal{A}_\Sigma = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{K}_\sigma(0). \tag{22.3}$$

Clearly, the right-hand side of (22.3) does not change if we replace 0 by an arbitrary time moment τ.

We construct uniform attractors for the nonautonomous two-dimensional Navier–Stokes system, nonautonomous reaction-diffusion systems, nonautonomous dissipative wave equations, nonautonomous Ginzburg–Landau equations and for other equations and systems. For each equation or system we describe in detail the function space to which the time symbol $\sigma_0(t)$ of this equation belongs. We present the conditions that provide the translation compactness of the symbol $\sigma_0(t)$ or, more precisely, the translation compactness of its components. We prove that the corresponding Cauchy problems have unique solutions in suitable function spaces. Using the property of dissipativity (specific to each problem) we establish the existence of uniformly (w.r.t. $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$) absorbing or attracting set for the corresponding family of processes $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$. We apply and develop various known methods for the investigation of various partial differential equations. We derive the corresponding a priori estimates for solutions $u(x,t)$ of these nonautonomous equations and systems. We also prove the necessary continuity properties of the processes. Then the general theorem implies the existence of a uniform attractor $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(\sigma_0)}$ of a nonautonomous equation. In particular, identity (22.3) holds, that is, the global attractor is the union of all values of all bounded (in E) global solutions of all equations (22.2) with time symbols $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$.

The notion of time symbol of a nonautonomous equation is also important in the study of the dimension of uniform attractors of the above equations and systems of mathematical physics. Using this approach we prove upper estimates for the Hausdorff and fractal dimension of uniform attractors of these systems. In a number of cases we are able to find lower estimates for the dimension of uniform attractors. For example, we prove such upper and lower estimates for the fractal dimension of the uniform attractor $\mathcal{A}_\Sigma$ of the 2D Navier–Stokes system with quasiperiodic (in time t) external force $g_0(x,t) = G(x, \alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_k t)$. Here $G(x, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ is a function that is 2π-periodic in each variable $\omega_i \in \mathbb{R}$. The symbol space $\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$ is diffeomorphic to the k-dimensional torus. We prove that the fractal dimension of the uniform attractor $\mathcal{A}_\Sigma$ of this system does not exceed the sum of two terms: the Grashof number Gr (the known parameter describing the number of "degrees of freedom" of a flow) and the number k of rationally independent frequencies of the external force $g(x,t)$. The number k is the dimension of the symbol space. Thus for $k = 0$ (autonomous case) we obtain the known estimate for the fractal dimension of the global attractor of the autonomous 2D Navier–Stokes system. Examples show that the fractal dimension of $\mathcal{A}_\Sigma$ can be greater than k. These facts reflect the importance of the number k in the estimates of the dimension of uniform attractors for the Navier–Stokes system. Moreover, if $g_0(x,t)$ is a general almost periodic function in time t, then examples show that the fractal dimension of the uniform attractor can be infinite. Similar facts are proved for other nonautonomous equations of mathematical physics having quasiperiodic or almost periodic time symbols.

In the cases where the fractal dimension of uniform attractors is equal to infinity it is natural to study other characteristics and quantities of uniform attractors of nonautonomous equations. The famous work A.N. Kolmogorov and V.M. Tikhomirov [KT59] is devoted to the systematic study of the ε-entropy of compact sets in various function spaces. Notice that the uniform attractor $\mathcal{A}_\Sigma$ is a compact set in E. Then it is reasonable to investigate the Kolmogorov ε-entropy $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)$ of the uniform attractor. It is well known that the number $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)$ is equal to $\log_2 N_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)$, where $N_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)$ is the minimal number of balls in E with radius ε covering the set $\mathcal{A}_\Sigma$. Since $\mathcal{A}_\Sigma$ is compact, $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)$ is finite for every $\varepsilon > 0$. The problem arises to study the rate of growth of the ε-entropy $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)$ as $\varepsilon \to 0+$. We have proved upper estimates for the Kolmogorov ε-entropy $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)$ of uniform attractors of nonautonomous evolution equations with translation compact symbols $\sigma_0(t)$ in the corresponding spaces. These estimates are optimal in some sense and generalize the well-known estimates for the fractal dimension of the corresponding autonomous equations and systems. In particular the ε-entropy of the uniform (w.r.t. $g \in \Sigma = \mathcal{H}(\sigma_0)$) attractor $\mathcal{A}_\Sigma$ of the 2D Navier–Stokes system does not exceed the sum of two terms: the first term is the Grashof number Gr multiplied by $\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ and the second is the ε-entropy $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{H}(g_0))$ of the hull of the external force $g_0(x,t)$ measured on the finite time interval $[0,l]$, where $l = O\left(\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ (in the quasiperiodic case this term has the form $k \cdot \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, where k is the number of rationally independent frequencies of $g_0(x,t)$). In particular, the functional dimension of the uniform attractor does not exceed the functional dimension of the hull $\mathcal{H}(g_0)$. We prove similar results for other nonautonomous equations of mathematical physics. In particular the estimates for the ε-entropy of the uniform attractors imply the estimates for the fractal dimension of the uniform attractors if the symbols of the equations are quasiperiodic functions.

Notice that the book [Har91] by A. Haraux contains chapters that are devoted to the study of attractors of processes generated by nonautonomous partial differential equations with almost periodic in time coefficients and terms. This book played a stimulated role for the authors in the study of nonautonomous evolution equations.

22.2 Trajectory attractors

We study attractors of equations of mathematical physics for which the solution of the corresponding Cauchy problem exists on any time interval but, maybe, is not unique or the uniqueness theorem is not proved yet. The classical example is the 3D Navier–Stokes system. It is known from the works of J. Leray and E. Hopf that the Cauchy problem for this system has a weak solution on an arbitrary time interval, but it is not known whether this weak solution is unique. Another important example is the wave equation with nonlinear interaction term of fast polynomial growth. This hyperbolic equation appears in many branches of modern physics, for example, in relativistic quantum mechanics. The existence of a weak solution (in the sense of distributions) of the Cauchy problem for this equation is known, whereas the uniqueness theorem is proved only for a moderate growth of the interaction function (see J.-L. Lions [Lio69]). Even though the complex Ginzburg–Landau equations play a central role in the theory of amplitude equations, the global existence and uniqueness of solutions are not established for all values of the dispersion parameters. For all these equations and systems the theory of global attractors of semigroups descried above is not applicable. To overcome this difficulty we have developed the theory of so-called *trajectory attractors* which enables us to study the limiting behaviour of solutions of equations of mathematical physics without uniqueness. Moreover, it is also possible to construct generalized global attractors for such equations using the trajectory attractors. In particular, this theory covers all the above problems of mathematical physics.

Let us briefly explain the idea of the construction of a trajectory attractor using as an example the 3D Navier–Stokes system

$$\partial_t u + \nu L u + P(u,\nabla)u = Pg(x),\ (\nabla, u) = 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ t \geq 0, \tag{22.4}$$

where $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \Subset \mathbb{R}^3$, $u = u(x,t) = (u^1, u^2, u^3)$. Here L is the Stokes operator, $g(x) = (g^1, g^2, g^3)$ is the external force, $\nu > 0$ is the viscosity coefficient, and P denotes the orthogonal projection onto the space H of divergence free vector fields with finite L_2-norm. We study weak solutions $u(x,t)$, $t \geq 0$ of system (22.4) that satisfy the known energy inequality (see J.-L. Lions [Lio69]). Notice that all the weak solutions resulting from the Galerkin approximation method always satisfy this energy inequality. Therefore the stock of such weak solution is reasonably large. The collection of all these solutions is denoted by $\mathcal{K}^+$.

The traditional theory of global attractors uses the set of initial data $\{u_0(x)\}$ of the Cauchy problem (22.1) as the phase space E on which the corresponding semigroup $\{S(t)\}$ acts. Now the phase space corresponding to system (22.4) is the set

$$\mathcal{K}^+ = \{u(x,t),\ t \geq 0\}$$

of weak solutions defined on the entire time semiaxis $\mathbb{R}_+$. The elements of the phase space are functions depending on time. The set $\mathcal{K}^+$ is called the *trajectory space* of the 3D Navier–Stokes system and the elements of $\mathcal{K}^+$ are called *trajectories*. We consider the translation operators $\{T(h),\ h \geq 0\}$ acting on $\mathcal{K}^+$ by the formula $T(h)u(x,t) = u(x,t+h)$. The translation $T(h),\ h \geq 0$ maps any function $u(x,t),\ t \geq 0$ onto the shifted function $u(x,t+h),\ t \geq 0$. It follows from the definition of $\mathcal{K}^+$ that $u(x,t+h) \in \mathcal{K}^+$ if $u(x,t) \in \mathcal{K}^+$. It is clear that the translations

$$\{T(h)\} = \{T(h),\ h \geq 0\}$$

form a semigroup acting on $\mathcal{K}^+$: $T(h) : \mathcal{K}^+ \to \mathcal{K}^+$ for $h \geq 0$. We study the global attractor of the translation semigroup $\{T(h)\}$ on $\mathcal{K}^+$.

In the trajectory space $\mathcal{K}^+$ we consider a weak convergence topology. It follows easily that the space $\mathcal{K}^+$ is closed in this topology and the translation semigroup $\{T(h)\}$ is continuous in $\mathcal{K}^+$. We define bounded sets in $\mathcal{K}^+$ and prove the existence of a bounded absorbing set B_0 of the semigroup $\{T(h)\}$ in $\mathcal{K}^+$, that is, for any bounded set $B \subset \mathcal{K}^+$ there exists $h_1 = h_1(B) > 0$ such that $T(h)B \subset B_0$ for all $h \geq h_1$. Since the set B_0 is bounded, it is compact in the weak topology of the space $\mathcal{K}^+$. From this facts it follows that the semigroup $\{T(h)\}$ has a global attractor $\mathfrak{A} \subset \mathcal{K}^+$, that is, $\mathfrak{A}$ is compact in the weak topology, strictly invariant with respect to $\{T(h)\} : T(h)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ for all $h \geq 0$, and for every bounded set B of trajectories from $\mathcal{K}^+$ the set $T(h)B$ tends to $\mathfrak{A}$ in the weak topology as $h \to +\infty$. The set $\mathfrak{A}$ is called the *trajectory attractor* of the 3D Navier–Stokes system (22.4).

Notice that the weak topology in $\mathcal{K}^+$ is stronger than the local strong convergence topology of the spaces $L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; H^{1-\delta})$ and $C^{loc}(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$, where $0 < \delta \leq 1$. Therefore for any bounded set B from $\mathcal{K}^+$ and for every $M > 0$

$$\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(T(h)B, \mathfrak{A}) \to 0,$$

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}(T(h)B, \mathfrak{A}) \to 0 \text{ as } h \to \infty. \tag{22.5}$$

From (22.5) we deduce that the set $\mathcal{A} = \mathfrak{A}|_{t=0} \subset H$ is the *global attractor* of the 3D Navier–Stokes system (22.4). More precisely, $\mathcal{A}$ is bounded and closed in H and satisfies the following attracting property: the restriction $B|_t$ at time t of any bounded set of solutions $B \subset \mathcal{K}^+$ tends to $\mathcal{A}$ as $t \to \infty$ in the space $H^{-\delta}$:

$$\operatorname{dist}_{H^{-\delta}}(B|_t, \mathcal{A}) \to 0 \ (t \to \infty), \ 0 < \delta \leq 1. \tag{22.6}$$

Moreover, $\mathcal{A}$ is the minimal closed (in H) set that satisfies (22.6). Thus, the set $\mathcal{A}$ has all the properties known for the global attractor of the semigroup corresponding to the Cauchy problem for which the uniqueness theorem holds (for example, the 2D Navier–Stokes system).

Using this scheme we construct trajectory attractors and global attractors for other autonomous equations and systems of mathematical physics of the form (22.1) for which the uniqueness theorem of the Cauchy problem is not proved or does not hold. For example, we construct trajectory attractors and global attractors and study their properties for the dissipative wave equation with arbitrary polynomial growth of the interaction function.

Notice that in a number of cases it is also reasonable to study trajectory attractors for the equations for which the uniqueness theorem holds. In this case the trajectory attractor $\mathfrak{A}$ consists of all trajectories $u(t)$, $t \geq 0$, that lie on the usual global attractor $\mathcal{A}$:

$$\mathfrak{A} = \{u(t) = S(t)u_0, \ t \geq 0 \mid u_0 \in \mathcal{A}\}$$

and $\mathfrak{A}$ attracts bounded sets of trajectories in a stronger topology.

The methods of trajectory attractors is also fruitful in the theory of perturbation of attractors and in the study of attractors of equations containing rapidly oscillating terms. For example, we prove that the trajectory attractor $\mathfrak{A}_\varepsilon$ of the wave equation

$$\varepsilon\partial_t^2 u + \gamma\partial_t u = \Delta u - f(u) + g(x)$$

depending on a positive small parameter ε converges as $\varepsilon \to 0+$ in the corresponding space to the trajectory attractor $\mathfrak{A}_0$ of the limiting parabolic equation

$$\gamma\partial_t u = \Delta u - f(u) + g(x).$$

Here $f(u)$ is a function with arbitrary polynomial growth with respect to u. Since for the limiting parabolic equation the uniqueness theorem holds, it has the usual global attractor $\mathcal{A}_0$ and the trajectory attractor $\mathfrak{A}_0$ consists of all solutions $u(t)$ of this equation lying on $\mathcal{A}_0$ for all $t \geq 0$. Besides this case of a singular perturbation we consider other problems of the theory of perturbation of partial differential equations. These results reflect the following general property of the trajectory attractors of equations of mathematical physics: the trajectory attractors of perturbed equations depend upper semicontinuously on the perturbation parameters.

Similarly to autonomous equations we study *uniform trajectory attractors* and *global attractors* for nonautonomous equations of mathematical physics of the form (22.2) with terms depending on time. We assume that the time symbols $\sigma(t)$ are translation compact in the corresponding spaces. To begin with we consider the equations for which the existence of the Cauchy problem is not proved or does not hold. We construct the uniform trajectory attractor for the nonautonomous 3D Navier–Stokes system with translation compact (in time t) external force $g = g(x,t)$. We also study the dissipative hyperbolic equation containing the interaction function $f(u,t)$ with arbitrary polynomial growth with respect to u. We also consider other nonautonomous equations of mathematical physics. Separately we study the trajectory attractors for nonautonomous equations with uniqueness. This leads to stronger attraction of trajectories to the uniform trajectory attractor.

The trajectory attractors also satisfy the following important property known in the theory of global attractors. For example, we study the 3D Navier–Stokes system (22.4). We consider the corresponding Galerkin approximation system of order m, that is, the system of ordinary differential equations in m-dimensional Euclidean space. Using the above scheme we construct the trajectory attractor $\mathfrak{A}^{(m)}$ of this system. Recall that $\mathfrak{A}^{(m)}$ consists of all solutions $u_m(x,t),\ t \geq 0$ of the Galerkin system that lie on the global attractor (in $\mathbb{R}^m$) $\mathcal{A}^{(m)}$ of this system. We prove that $\mathfrak{A}^{(m)}$ converges to $\mathfrak{A}$ in the weak topology as $m \to +\infty$. In particular, $\operatorname{dist}_{H^{-\delta}}\left(\mathcal{A}^{(m)}, \mathcal{A}\right) \to 0\ (m \to \infty),\ 0 < \delta \leq 1$. Here $\mathfrak{A}$ and $\mathcal{A}$ are the trajectory attractor and the global attractor of the Navier–Stokes system (22.4), respectively. This property of upper semicontinuity of attractors holds for all equation and systems considered in this review. No matter whether the corresponding uniqueness theorem holds or not.

We investigate the attractors of evolution equations with terms that oscillate rapidly with respect to the spatial or time variable. The parameter $\varepsilon^{-1}, \varepsilon > 0$ characterizes the oscillation frequency. We assume that rapidly oscillating terms and coefficients have averages in a weak sense as $\varepsilon \to 0+$ in the corresponding function spaces. The equation with averaged terms and coefficients is called the *averaged equation*. We prove that the trajectory attractor $\mathfrak{A}_\varepsilon$ of the equation with rapidly oscillating terms converges as $\varepsilon \to 0+$ to the trajectory attractor $\overline{\mathfrak{A}}$ of the averaged equation in a suitable weak sense. Moreover, the global attractors $\mathcal{A}_\varepsilon$ of the original equations with rapidly oscillating terms converge as $\varepsilon \to 0+$ to the global attractor $\overline{\mathcal{A}}$ of the averaged equation as $\varepsilon \to 0+$ in the corresponding function space. We apply these results to the 3D and 2D Navier–Stokes systems with external force of the form $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ (or $g\left(x, t, \frac{t}{\varepsilon}\right)$). We assume that the function $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ has the average $\bar{g}\,(x)$ as $\varepsilon \to 0+$, for example, in the space H_w. (The space H_w is the space H endowed with the weak topology.) Then the trajectory attractors $\mathfrak{A}_\varepsilon$ converge to $\overline{\mathfrak{A}}$ in the following sense: for every $M > 0$

$$\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}\left(\mathfrak{A}_\varepsilon, \overline{\mathfrak{A}}\right) \to 0, \tag{22.7}$$
$$\operatorname{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}(\mathfrak{A}_\varepsilon, \overline{\mathfrak{A}}) \to 0\ (\varepsilon \to 0+),\ 0 < \delta \leq 1.$$

For the corresponding global attractors $\mathcal{A}_\varepsilon$ and $\overline{\mathcal{A}}$ we have the following relation:

$$\operatorname{dist}_{H^{-\delta}}\left(\mathcal{A}_\varepsilon, \overline{\mathcal{A}}\right) \to 0\ (\varepsilon \to 0+). \tag{22.8}$$

We prove similar results for the reaction-diffusion systems and for the dissipative hyperbolic equations with rapidly oscillating terms. If the corresponding Cauchy problem is uniquely solvable, then we prove that relations (22.7)–(22.8) hold in more regular space with stronger topology. For example, for the 2D Navier–Stokes system we have that

$$\mathrm{dist}_{H^{1-\delta}}(\mathcal{A}_\varepsilon, \overline{\mathcal{A}}) \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0+ .$$

For perturbed potential reaction-diffusion systems with rapidly oscillating terms it has been shown that the distance between the global attractors $\mathcal{A}_\varepsilon$ and $\overline{\mathcal{A}}$ is at most $C\varepsilon^\gamma$, where $\gamma > 0$ (see B. Fiedler and M.I. Vishik [FV03]).

[AP71] L. Amerio, G. Prouse, *Abstract almost periodic functions and functional equations*, Springer-Verlag, New York (1971).

[BV92] A. Babin, M. Vishik, *Attractors of evolutionary partial differential equations*, vol. 25 of *Studies in Mathematics and its Applications*, North-Holland, Amsterdam (1992).

[Chu02] I. Chueshov, *Introduction to the Theory of Infinite-dimensional Dissipative Systems*, ACTA, Kharkov (2002).

[FV03] B. Fiedler, M. I. Vishik, *Quantitative homogenization of global attractors for reaction–diffusion systems with rapidly oscillating terms*, Asymptotic Analysis **34** (2003), 2, 159–185.

[Hal88] J. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, vol. 25 of *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI (1988).

[Har91] A. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, vol. 17, Masson, Paris, Milan, Barcelona, Rome (1991).

[KT59] A. N. Kolmogorov, V. M. Tikhomirov, *ε-entropy and ε-capacity of sets in function spaces*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk **14** (1959), 2(86), 3–86.

[Lad91] O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Lezioni Lincee, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[Lio69] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris (1969).

[LZ82] B. M. Levitan, V. V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).

[Mil65] R. Miller, *Almost periodic differential equations as dynamical systems with applications to the existence of ap solutions*, Journal of Differential Equations **1** (1965), 3, 337–345.

[MS76] R. K. Miller, G. R. Sell, *Topological dynamics and its relation to integral equations and nonautonomous systems*, *Dynamical systems. Proceedings of a University of Florida International Symposium*, 223–249, Academic Press, New York (1976).

[MZ08] A. Miranville, S. Zelik, *Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains*, vol. 4, North-Holland, Amsterdam (2008).

[Rob01] J. C. Robinson, *Infinite-dimensional dynamical systems: an introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, vol. 28 of *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge University Press (2001).

[Sel67] G. R. Sell, *Non-autonomous differential equations and topological dynamcis I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), 2, 241–262, 263–283.

[SY02] G. R. Sell, Y. You, *Dynamics of evolutionary equations*, Springer-Verlag, New York (2002).

[Tem97] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in Mechanics and Physics*, vol. 68 of *Applied Mathematics Series*, Springer-Verlag, New York, second edn. (1997).

Глава 23

Список докладов на семинаре М.И. Вишика

Семинар М.И. Вишика по дифференциальным уравнениям начал свою работу весной 1961 г. с доклада Л.Р. Волевича и продолжался без перерывов до мая 2012 г. Большая часть приведённого ниже списка докладов, представленных на семинаре, восстановлена по конспектам М.А. Шубина, активнейшего участника всех семинаров (до своего переезда в Бостон в 1991 году). Миша Шубин был основным и постоянным докладчиком семинара и знакомил участников со всеми новейшими событиями в области дифференциальных уравнений, топологии, алгебраической геометрии, квантовой теории, микролокального анализа. Его доклады (а часто и целые серии лекций) всегда были блестяще представлены и привлекали полную аудиторию благодарных слушателей. К сожалению, эти доклады в его конспектах отсутствуют, поэтому мы приводим их названия, но не можем указать дат. В течение 1964–1990 гг. М.А. Шубин делал доклады на следующие темы:

Статья Хёрмандера о замене переменных в псевдодифференциальном операторе;

Факторизация матричнозначных функций на окружности и связь их семейств с теоремой Гротендика о расщеплении для голоморфных векторных расслоений на римановой сфере;

Квазиклассический анализ псевдодифференциальных операторов и его приложение к существенной самосопряжённости;

Обзор докладов на конференциях в Восточной Германии (1981), Польше (1984) и Западной Германии (Обервольфах, 1987);

О методе приближённого спектрального проектора для получения спектральных асимптотик (совместно с В.Н. Туловским);

Гиперфункции и гиперболические уравнения (по статье Ж.-М. Бони и П. Шапира);

О функции распределения спектра фон Неймана для почти периодических операторов и её совпадение с плотностью состояний;

О зета-функции фон Неймана для почти периодических операторов;

О совпадении спектра почти периодического оператора в обычном L_2 и пространство Безиковича;

О новом доказательстве теоремы об индексе для почти периодических операторов;

Об оценке остаточного члена в асимптотике функции распределения спектра фон Неймана для спектра почти периодического оператора Шрёдингера;

О подобных вопросах для случайных операторов (совместно с С.М. Козловым и Б.В. Федосовым);

Нестационарная теория рассеяния (по В. Энссу и Д.Р. Яфаеву);

О трансверсальности эллиптических операторов (совместно с А.С. Смагиным);

О псевдодифференциальных операторах на унимодулярных группах Ли (совместно с Г.А. Меладзе);

О псевдоразностных операторах и распаде их функций Грина;

О полном асимптотическом разложении спектральной функции для эллиптических опера-

торов в $\mathbb{R}^n$ при условии неловушечности (совместно с Г.С. Поповым);
Полная спектральная асимптотика для оператора Хилла (совместно с Д. Шенком);
Нестандартный анализ и сингулярные возмущения (обзор; совместно с А.К. Звонкиным);
Неравенства Морса и алгебры фон Неймана (совместно с С.П. Новиковым);
Формула Атьи–Ботта–Лефшеца для эллиптических комплексов на многообразии с краем (совместно с А.В. Бреннером);
Уравнения типа Кортевега–де Фриза в классах растущих функций (совместно с И.Н. Бондаревой);
Тепловые ядра и инварианты фон Неймана неодносвязных многообразий (совместно с С.П. Новиковым и М.Л. Громовым).

Список докладов, сделанных после отъезда М.А. Шубина, восстанавливался по записям М.С. Аграновича и В.В. Чепыжова, двух постоянных участников семинара, а также по воспоминаниям других участников. К сожалению, названия целого ряда докладов самого М.С. Аграновича 1994–2002 годов не сохранились: это доклады о краевых задачах для эллиптических систем в областях с гладкой или липшицевой границей, со спектральным параметром в эллиптической системе или в краевых условиях и о спектральных свойствах интегральных операторов типа потенциала на гладких и липшицевых поверхностях (совместно с Г.А. Амосовым, М.Р. Левитиным и Р. Менникеном).

1961 – 1964

Л.Р. Волевич: *Статья Агмона, Дуглиса и Ниренберга об априорных оценках для эллиптических краевых задач.*

В.А. Боровиков: *Разложение δ-функции на плоские волны и конструирование фундаментальных решений для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.*

В.А. Боровиков: *Результаты Кальдерона и Зигмунда для многомерных сингулярных интегральных операторов.*

В.А. Боровиков: *Работа Михлина о многомерных сингулярных интегральных операторах.*

А.И. Вольперт: *Общие краевые задачи для эллиптических систем на плоскости с общей формулой для индекса для таких систем и для эллиптических сингулярных интегральных операторов.*

С.Г. Гиндикин: *Классификация однородных областей в $\mathbb{C}^n$ и ядра Сегё для таких областей.* *28.09.1964*

L. Schwartz: *Fundamental solutions of partial differential operators with constant coefficients.* *5.10.1964*

М.С. Агранович: *Многомерные сингулярные интегральные операторы.* *19.10.1964, 26.10.1964*

Другие доклады 1961–1964 годов были посвящены статье Лопатинского о редукции общих эллиптических краевых задач к сингулярным интегральным уравнениям на границе, статье Слободецкого о соболевских пространствах дробного порядка и статьям Ф. Браудера, Ж. Петре и М. Шехтера об эллиптических краевых задачах.

1965

В.П. Паламодов: *Переопределённые системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.* *15.02, 1.03, 8.03*

В.И. Мацаев: *Интерполяция банаховых пространств и её приложения в теории функций.* *22.02*

В.Р. Фридлендер: *Задача Коши в пространствах Жевре.* *15.03*

Ю.А. Дубинский: *Метод Минти–Браудера для нелинейных уравнений (по Ж. Лерэ и Ж.-Л. Лионсу).* *15.03*

В.А. Боровиков: *О нерешённой задаче для операторов главного типа.* *17.05*

Л.С. Франк: *Некоторые L^2 оценки с весом для гиперболических операторов (по Л. Хёрмандеру).* *17.05*

Л.Р. Волевич: *Гипоэллиптичность с общими весами.* *6.09, 13.09*

Б.Ю. Стернин: *Обобщение теоремы Лефшеца (по М. Атье).* *13.09*

М.С. Агранович: *Краевые задачи и сингулярные интегральные операторы (по Р. Сили).* *20.09*

Ю.В. Егоров: *Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи для эллиптических систем (по Л. Хёрмандеру).* *27.09, 4.10*

М.С. Агранович: *Элементарные формулы индекса.* *4.10, 11.10*

В.В. Грушин: *Псевдовыпуклость и L^2-оценки для переопределённых систем первого порядка (по Л. Хёрмандеру).* *11.10, 18.10*

Б.П. Панеях: *Краевые задачи для симметрических и симметризуемых систем (по К. Фридрихсу и П. Лаксу).* *25.10, 1.11*

М.С. Агранович: *Краевые задачи для гиперболических систем в цилиндрических областях.* *1.11, 15.11*

Ю.В. Егоров: *Субэллиптические оценки для псевдодифференциальных операторов.* *15.11, 22.11, 29.11, 6.12*

В.А. Боровиков: *Плоские волны и фундаментальные решения для гиперболических операторов.* *13.12*

1966

Ю.В. Егоров: *Задача с косой производной.* *7.02*

А.С. Дынин: *Бесконечномерная версия теоремы Сарда (по С. Смейлу).* *14.02*

С.И. Похожаев: *Методы двойственности в нелинейных задачах (совместно с Ю.А. Дубинским).* *14.02*

В.А. Кондратьев: *О задаче с косой производной (совместно с Ю.В. Егоровым).* *21.02*

В.И. Арнольд: *Динамика идеальной жидкости и геодезические на бесконечномерной группе Ли.* *14.03*

B. Malgrange: *Interpolation, singular integral operators and uniqueness of solutions for the Cauchy problem.* *28.03*

С.П. Новиков: *Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и K-теория (совместно с Б.Ю. Стерниным).* *4.04*

Ю.В. Егоров: *Субэллиптические оценки для псевдодифференциальных операторов главного типа.* *5.09, 12.09 19.09*

В.В. Грушин: *Нормальная разрешимость равномерно неэллиптических систем на многообразиях.* *19.09, 26.09, 3.10, 10.10*

L. Nirenberg: *Complex powers of elliptic operators (after R. Seeley).* *17.10*

А.И. Вольперт: *Разрешимость квазилинейных уравнений в BV пространствах.* *14.11*

М.С. Агранович: *Единственность решения симметризуемых систем с когранcичными членами.* *21.11*

Ю.А. Дубинский: *Струи сечений расслоений и квазилинейные уравнения.* *21.11*

Л.Р. Волевич: *Псевдодифференциальные операторы и неклассические оценки (по Л. Хёрмандеру).* *28.11, 12.12*

1967

Г.И. Эскин: *Задача Коши для гиперболических уравнений в свёртках.* *13.02, 6.03, 13.03*

В.П. Паламодов: *Когомологии Спенсера (по Б. Мальгранжу и Д. Квиллену).* *20.02*

М.С. Агранович: *Гиперболические системы первого порядка.* *27.02, 6.03*

М.И. Вишик: *Краевые задачи для систем уравнений в свёртках.* *20.03, 27.03, 3.04*

А.С. Дынин: *Индекс эллиптических краевых задач.* *3.04, 10.04*

Г.И. Эскин: *Точное неравенство Гординга (по П. Лаксу и Л. Ниренбергу).* *4.09*

П.А. Фролов: *Связные компоненты эллиптических систем на плоскости.* *11.09*

Л.Р. Волевич: *Задача Коши для операторов с квазиоднородными символами (совместно с С.Г. Гиндикиным).* *11.09, 18.09, 25.09*

В.В. Грушин: *Гипоэллиптичность общих систем, в частности систем переменного порядка (по Л. Хёрмандеру).* *25.09, 9.10, 16.10*

В.П. Паламодов: *Теорема типа Коши–Ковалевской для переопределённых систем.* *30.10*

В.В. Грушин: *Необходимое и достаточное условие гипоэллиптичности для уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами (по Л. Хёрмандеру).* *13.11, 20.11*

1968

М.И. Вишик: *Обзор докладов на недавних семинарах в Institut Henri Poincaré, College de France, Université Paris–Sud, Université de Nice: M.S. Baouendi; C. Bardos; H. Brezis; G. Da Prato; H. Garnir; G. Geymonat; P. Grisvard; Ch. Kiselman; J. Leray; J.-L. Lions; B. Malgrange; A. Martineau; N. Shimakura.* *12.02*

Б.Р. Вайнберг: *Условия излучения для операторов высших порядков во внешних областях и аналитическое продолжение резольвенты.* *19.02, 26.02*

Ю.А. Дубинский: *Некорректные задачи и эллиптико-параболические уравнения.* *4.03, 11.03*

С.П. Новиков: *Детерминанты эллиптических комплексов.* *18.03*

Г.И. Эскин: *Краевые задачи в областях с кусочно-гладкой границей на плоскости.* *18.03, 1.04*

L. Nirenberg: *On some results reported at the Conference in Rome, March 1968: M. Kuranishi (a new proof of the invariance of pseudodifferential operators under a change of variables), F. Browder (degrees of Fredholm maps), K. Friedrichs (a new proof of the refined Gårding inequality).* *25.03*

М.С. Агранович: *О некоторых псевдодифференциальных краевых задачах.* *8.04, 15.04*

И.Ц. Гохберг: *О спектрах одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными символами в L^p.* *15.04*

P. Lax: *On Hölder regularity of solutions of nonlinear second order equations (after E. De Giorgi).* *22.04*

Я.А. Ройтберг: *Эллиптические краевые задачи в пространствах распределений.* *22.04*

В.П. Паламодов: *Гиперфункции Сато (по А. Мартино).* *22.04*

С.Г. Гиндикин: *О новой статье Л. Хёрмандера по задаче Коши для уравнений с постоянными коэффициентами.* *2.09*

А.И. Комеч: *Уравнения в конусе с гладкой границей (по Б.А. Пламеневскому и др.).* *9.09*

В.П. Паламодов: *Дифференциальные операторы в когерентных аналитических пучках.* *9.09, 16.09*

С.И. Похожаев: *Обзор некоторых результатов для нелинейных уравнений.* *16.09, 23.09, 30.09*

Н.Д. Введенская: *Пример неединственности решения для нестационарного уравнения Навье–Стокса (по О.А. Ладыженской).* *30.09*

С.Н. Кружков: *О методе С.Н. Бернштейна для нелинейных уравнений и статья Морри.* *14.10, 21.10*

В.П. Глушко: *Оценки для решений общих краевых задач для вырожденных эллиптических уравнений второго порядка.* *28.10*

В.В. Грушин: *Простое доказательство оценки Хёрмандера.* *4.11*

М.С. Агранович: *О статье П. Лакса и К. Фридрихса про симметризуемые гиперболические системы.* *11.11, 18.11*

А.И. Вольперт: *О вырожденных квазилинейных уравнениях второго порядка и BV пространствах.* *18.11, 25.11, 2.12*

Г.И. Эскин: *Об обобщениях псевдодифференциальных операторов, появляющихся в теории гиперболических уравнений.* *2.12*

Б.Ю. Стернин: *О псевдокраевой задаче для уравнения Лапласа (совместно с В.П. Масловым).* *9.12*

Ю.В. Егоров: *О субэллиптических оценках.* *9.12*

1969

П.М. Блехер: *Асимптотики спектральной функции (по Л. Хёрмандеру).* *17.02, 24.02*

В.П. Паламодов: *Обзор систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.* *24.02, 3.03, 10.03*

В.В. Грушин: *О вырожденных уравнениях (совместно с М.И. Вишиком).* *24.03, 31.03*

А.С. Дынин: *Об эллиптических комплексах на многообразиях.* *31.03, 7.04*

И.М. Гельфанд: *Об описании топологических инвариантов многообразий аналитическими средствами (когомологии алгебр Ли и их приложения).* *14.04, 21.04, 5.05*

Б.П. Панеях: *О локальных свойствах псевдодифференциальных уравнений вырождающихся на гиперповерхности.* *28.04*

М.В. Федорюк: *Метод стационарной фазы и действие псевдодифференциальных операторов на экспоненты.* *28.04*

Ю.В. Егоров: *Новые результаты по локальной разрешимости.* *5.05*

Б.Р. Вайнберг: *Принцип Гюйгенса для некоторых дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.* *5.05*

Г.И. Эскин: *Псевдодифференциальные операторы главного типа.* *12.05*

С.Г. Гиндикин, Л.Р. Волевич: *О задаче Коши для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.* *12.05*

М.С. Агранович: *О книге К. Фридрихса по псевдодифференциальным операторам.* *12.05*

В.В. Грушин: *О фундаментальных решениях с минимальным сингулярным носителем для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по Л. Хёрмандеру).* *1.09*

С.В. Фомин: *Об операторе Лапласа–Леви в бесконечномерном пространстве.* *15.09*

А.С. Дынин: *Эллиптические операторы и K-теория (по М. Атье).* *22.09*

Л.Р. Волевич: *О корректности задачи Коши для дифференциальных операторов с двойными характеристиками (по С. Мизохате и Ю. Ойе).* *29.09, 6.10*

J.-L. Lions: *On mixed boundary conditions, nonlinear interpolation and variational inequalities.* *29.09*

П.Е. Соболевский: *О понятии угла между двумя операторами и его применениях.* *6.10*

Ю.А. Дубинский: *Нелинейные полугруппы и их приложения (по Й. Комуре, Т. Като и Ф. Браудеру).* *13.10, 20.10, 27.10*

Б.Р. Вайнберг: *Об асимптотике решений задачи Коши для гиперболических уравнений при $t \to \infty$.* *24.11, 1.12*

С.Г. Гиндикин, Л.Р. Волевич: *О задаче Коши для общих гиперболических уравнений в пространствах с весом.* *8.12, 15.12*

1970

Ю.В. Егоров: *О локальной разрешимости (по Ф. Треву, Л. Ниренбергу и Ю. Егорову).* *16.02, 23.02, 2.03*

М.С. Агранович: *Смешанные задачи для гиперболических уравнений (по Х.-О. Крайсу).* *2.03, 9.03, 16.03, 23.03*

Б.П. Панеях: *О локальной разрешимости для псевдодифференциальных операторов первого порядка (совместно с В.Г. Мазьёй).* *23.03, 30.03*

В.В. Грушин: *Пример локальной неразрешимости для уравнения* $u_{xx} + y^2 u_{yy} - iu_x = f(x, y)$. *30.03, 13.04*

А.И. Комеч: *Об алгебре псевдодифференциальных краевых задач (по Буте де Монвелю).* *20.04, 27.04, 4.05*

L. Nirenberg: *On local solvability.* *22.05*

М.И. Вишик: *О Международном математическом конгрессе в Ницце (обзор докладов: S. Agmon, F. Almgren, M. Atiyah, R. Bott, L. Boutet de Monvel, F. Browder, S.S. Chern. L. Gårding, L. Hörmander, V. Maslov, C. Morrey, R. Seeley, E. Stein, F. Trèves).* *14.09*

В.В. Грушин: *О гипоэллиптических уравнениях главного типа (по Ф. Треву).* *21.09*

Г.М. Хенкин: *Об интегральных представлениях для функций нескольких комплексных переменных.* *28.09*

А.Т. Фоменко: *О минимальных компактах и задаче Плато.* *12.10*

Е.В. Радкевич: *Аналитические гипоэллиптические операторы (по Ф. Треву).* *12.10, 19.10, 26.10*

М.И. Вишик: *О дифференциальных уравнениях в бесконечномерных пространствах.* *19.10*

М.В. Федорюк: *Интегральные операторы Фурье (по Л. Хёрмандеру).* *26.10, 2.11, 16.11*

Ф.А. Березин: *Модель квантовой теории поля, виковские символы и неравенства для собственных значений.* *30.11, 7.12*

1971

А.С. Дынин: *Алгебра блочных сингулярных интегральных операторов.* *15.12, 22.02*

Р.А. Минлос, Я.Г. Синай: *Динамические системы с бесконечным числом степеней свободы.* *1.03, 15.03*

В.В. Грушин: *Новое доказательство теоремы И. Гохберга и Н. Крупника о спектрах одномерных сингулярных интегральных операторов в* L^p. *22.03*

Б.Р. Вайнберг: *Об условиях излучения для операторов произвольного порядка.* *22.03*

М.С. Агранович: *Смешанная задача для гиперболических уравнений (по Р. Сакамото).* *22.03, 26.04*

А.В. Фурсиков: *О глобальной гладкости решений.* *29.03*

Б.С. Митягин: *О линейных проблемах комплексного анализа.* *29.03*

О.Г. Смолянов: *Меры в топологических линейных пространствах.* *5.04*

А.В. Марченко: *Индекс вырожденных операторов.* *12.04*

В.А. Боровиков: *Разрушение решений квазилинейных гиперболических систем.* *12.04*

А.И. Шнирельман: *О квазилинейной краевой задаче (по Л. Ниренбергу).* *26.04*

Б.А. Пламеневский: *Об асимптотике решений уравнений с операторными коэффициентами (совместно с В.Г. Мазьёй).* *10.05*

П.М. Блехер, М.И. Вишик: *Псевдодифференциальные операторы с бесконечным числом переменных.* *13.09, 20.09*

И.М. Сигал: *Теория рассеяния систем многих частиц.* *4.10*

Б.В. Федосов: *Аналитические формулы индекса для эллиптических операторов.* *11.10, 18.10*

А.С. Шварц: *Квантовая теория поля и представления* CCR. *25.10, 1.11*

М.С. Агранович: *О смешанных задачах для гиперболических систем.* *15.11*

Ю.А. Дубинский: *О классификации операторных пучков.* *15.11*

В.П. Паламодов: *О теории гиперфункций (по М. Сато).* *15.11*

С.Г. Гиндикин: *Задача Коши для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.* *29.11, 6.12*

1972

А.М. Габриэлов: *Об аналитическом продолжении* P^λ *(по И.Н. Бернштейну и С.И. Гельфанду).* *14.02, 6.03*

Ф.А. Березин: *Ковариантные и контравариантные символы операторов.* *21.02, 28.02*

М.С. Бирман: *О кусочно-полиномиальных приближениях функций в соболевских пространствах H_s и их применения в спектральной теории.* *13.03, 20.03*

М.В. Федорюк: *Канонический оператор Маслова и квазиклассические асимптотики.* *27.03, 3.04, 10.04*

А.Я. Повзнер: *Об алгебраических аспектах вторичного квантования формальных систем Ферми.* *17.04*

М.И. Вишик: *Обзор некоторых докладов парижского семинара Ч. Гулауика–Л. Шварца по дифференциальным уравнениям: M.S. Baouendi; M.S. Baouendi and C. Goulaouic; C. Bardos and H. Brezis; J.-M. Bony and P. Schapira; J Duistermaat; M. Sato; A. Unterberger.* *2.10*

П.М. Блехер: *Пространства функций на гильбертовом пространстве.* *9.10*

В.Н. Туловский: *Волновые фронты и Лагранжевы многообразия (по Х. Дюйстермату).* *13.11, 20.11, 27.11*

В.В. Грушин: *Об аналитичности решений вырожденных уравнений.* *11.12*

1973

М.В. Федорюк: *Асимптотика фундаментальных решений при $t \to \infty$ для параболических уравнений с постоянными коэффициентами (совместно с С.Г. Гиндикиным).* *19.02, 12.03*

А.И. Комеч: *Эллиптические краевые задачи на многообразии с углом.* *19.02, 26.02*

М.В. Федорюк: *Полуалгебраические множества.* *19.03*

С.Г. Крейн: *Краевые задачи для некоторых переопределённых систем (совместно с И.С. Гудович).* *19.03, 26.03*

А.В. Марченко: *Гиперсжимающие полугруппы (по Б. Саймону и Р. Хёг-Крону).* *26.03, 2.04*

В.В. Грушин: *Новый способ доказательства субэллиптических оценок (по Ф. Треву).* *2.04, 16.04*

С.Г. Крейн: *Об интерполяции банаховых пространств.* *9.04*

Л.Р. Волевич: *Микролокальная регулярность и распространение волновых фронтов (по Л. Хёрмандеру и Л. Ниренбергу).* *23.04, 7.05*

А.В. Фурсиков, М.И. Вишик: *Аналитические первые интегралы нелинейных нестационарных эволюционных уравнений.* *10.09, 17.09*

В.Я. Иврий: *О корректности задаче Коши для гиперболических псевдодифференциальных операторов второго порядка с произвольными младшими членами.* *24.09*

Ю.М. Сухов: *Об уравнении Боголюбова (совместно с Я.Г. Синаем).* *22.10*

Б.П. Панеях: *Новые классы псевдодифференциальных операторов и точное неравенство Гординга (по Р. Билзу и Ч. Фефферману).* *29.10*

Б.Р. Вайнберг: *Долговременные асимптотики решений задачи Коши для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами в главной части.* *29.10*

Б.Р. Вайнберг: *Рассеяние волн на препятствии.* *12.11, 19.11, 26.11*

Б.П. Панеях: *Об обзорном докладе Ф. Трева на семинаре Л. Шварца.* *26.11*

В.В. Грушин: *О локальной разрешимости (по Р. Билзу и Ч. Фефферману).* *3.12*

1974

М.И. Вишик: *Впечатления о некоторых докладах на семинарах во Франции (N. Aronszajn; C. Baiocchi; C. Bardos; A. Bensoussan and R. Temam; H. Brezis; L. Boutet de Monvel and F. Trèves; J. Chazarain; P. Krée; J. Leray; J.-L. Lions; L. Tartar; C. Zuily).* *11.03*

А.В. Фурсиков, М.И. Вишик: *Решение некоторых нелинейных уравнений с помощью аналитических функционалов; асимптотики решений.* *11.03*

В.В. Грушин: *Новые классы псевдодифференциальных операторов и локальная разрешимость (по Р. Билзу и Ч. Фефферману).* *25.03*

В.Н. Туловский: *Локализация и волновые фронту (по К.Г. Андерсону).* *1.04*

А.И. Шнирельман: *Особенности волнового ядра на римановых многообразиях (по Л. Хёрмандеру).* *8.04, 22.04*

В.В. Кучеренко: *Интегральные операторы Фурье с комплексной фазой (по Х. Дюйстермату, А. Мелину и Й. Шёстранду).* *15.04*

Я.А. Ройтберг: *Теоремы об изоморфизмах эллиптических краевых задач в соболевских пространствах отрицательного порядка.* *22.04*

В.В. Грушин: *Гипоэллиптические операторы с двойными характеристиками (по Л. Буте де Монвелю).* *29.04*

А.В. Фурсиков: *Нелинейное уравнение Шрёдингера.* *16.09*

В.Я. Иврий: *Задача Коши для нестрого гиперболических уравнений в классах Жевре.* *23.09*

В.Н. Туловский: *Новое доказательство теоремы о распространении особенностей.* *14.10*

Б.В. Федосов: *Кривизна и собственные значения лапласиана на многообразии с границей (по Х. Маккину и И.М. Зингеру).* *14.10*

И.Н. Бернштейн: *D-модули и аналитическое продолжение P^λ.* *21.10, 28.10*

В.В. Грушин: *Цепи для эволюционных уравнений (по Ф. Треву).* *11.11, 18.11*

В.Н. Туловский: *Распространение аналитических особенностей (по Ж.-М. Бони и П. Шапира).* *25.11, 2.12*

В.Е. Захаров: *Нелинейное уравнение Шрёдингера как интегрируемая система.* *25.11*

Б.Р. Вайнберг: *Теория рассеяния на гиперболической плоскости (по Л.Д. Фаддееву и Б.С. Павлову, П. Лаксу и Р. Филлипсу).* *2.12*

Б.Р. Вайнберг: *Связь между асимптотикой решений гиперболической задачи Коши и коротковолновой асимптотикой решений стационарных задач.* *9.12*

1975

М.И. Вишик: *Бесконечномерный лапласиан (по докладу Дж. Глимма на семинаре Ж. Лерэ).* *17.02*

В.П. Паламодов: *Аналитические и C^∞ уравнения (по Б. Мартину, Ж.-К. Тужрону, А.Н. Кузнецову).* *17.02, 24.02*

А.И. Шнирельман: *Факторизация символов степенного роста.* *24.02*

С.Г. Гиндикин, Л.Р. Волевич: *Уравнения Винера–Хопфа.* *24.02, 3.03, 10.03*

Ю.А. Дубинский: *Дифференциальные уравнения бесконечного порядка.* *17.03*

А.И. Шнирельман: *Эргодические свойства собственных функций лапласиана на римановых многообразиях.* *24.03, 31.03*

В.И. Фейгин: *Новые классы псевдодифференциальных операторов в $\mathbb{R}^n$.* *31.03*

С.М. Вишик: *R-кручение и лапласиан на римановых многообразиях (по Д. Рею и И.М. Зингеру).* *7.04, 14.04, 21.04*

В.Н. Туловский: *Распространение особенностей для псевдодифференциальных операторов с характеристиками постоянной кратности.* *15.09, 22.09*

А.И. Шнирельман: *Автоморфизмы градуированных алгебр псевдодифференциальных операторов (по Х. Дюйстермату и И.М. Зингеру).* *22.09, 6.10, 13.10*

В.И. Фейгин: *Новые классы псевдодифференциальных операторов в $\mathbb{R}^n$ и спектральные асимптотики.* *29.09, 6.10*

А.С. Дынин: *Псевдодифференциальные операторы на группе Гейзенберга.* *13.10, 20.10*

Б.Р. Вайнберг: *Рассеяние волн на потенциале с компактным носителем.* *1.12*

В.Н. Туловский: *Распространение особенностей для операторов с квазиоднородными символами (по Р. Ласкару) или с инволютивным характеристическим многообразием (по Л. Буте де Монвелю).* *8.12*

1976

А.И. Шнирельман: *Связь между поведением собственных функций псевдодифференциального оператора первого порядка и глобальной структурой гамильтонова потока, соответствующего главному символу.* *16.02*

А.В. Бабин: *Фредгольмовы свойства квазилинейных отображений в гильбертовых пространствах с приложениями к эллиптическим квазилинейным уравнениям.* *23.02*

С.Г. Гиндикин: *Особенности ядра Бергмана для строго псевдовыпуклых областей (по Л. Буте де Монвелю и Й. Шёстранду).* *1.03*

М.С. Агранович: *Спектры и разложения по обобщённым собственным функциям для операторов, близких к самосопряжённым.* *22.03, 29.03*

М.В. Федорюк: *Особенности ядер интегральных операторов Фурье.* *5.04*

В.В. Грушин: *Симплектическая геометрия и квантовые гармонические осцилляторы.* *12.04*

М.С. Агранович: *О курсах лекций и докладах на Летней школе в Новгороде: М.С. Бирман и М.З. Соломяк (Асимптотика собственных значений эллиптических операторов, 5 часов); Р.С. Исмагилов (Абстрактная теория приближений, 8 часов); С.Г. Крейн, В.И. Дмитриев и В.И. Овчинников (Интерполяция банаховых пространств, 8 часов); С.В. Кисляков (Абсолютно суммируемые операторы); А.А. Милютин (Внешние задачи в функциональных пространствах); М.С. Агранович; Ю.С. Барковский и В.И. Юдович; А.В. Бухвалов, Г.Я. Лозановский и А.И. Векслер; Г.М. Хенкин; П.П. Мосолов.* *20.09*

А.В. Бабин: *Явные формулы для решения эллиптических уравнений второго порядка через итерации.* *20.09*

В.Я. Иврий: *Распространение особенностей для нестрого гиперболических систем.* *27.09*

А.С. Дынин: *Об уравнении Монжа–Ампера в строго псевдовыпуклых областях (по Ч. Фефферману).* *27.09*

В.М. Петков: *Распространение особенностей для смешанных гиперболических задач (отражённые бихарактеристики).* *18.10*

В.Н. Туловский: *Интегральные операторы Фурье с комплексной фазовой функцией (по А. Мелину и Й. Шёстранду).* *25.10*

Л.Р. Волевич: *Абстрактная форма теоремы Коши–Ковалевской (по Л. Ниренбергу).* *22.11*

М.В. Федорюк: *Смешанные гиперболические задачи с быстро осциллирующими начальными данными.* *6.12*

1977

Б.Р. Вайнберг: *Теория рассеяния в неоднородной среде.* *14.02, 21.02*

Л.Р. Волевич: *Теорема о неявной функции (по Л. Ниренбергу).* *28.02*

С.М. Козлов: *Гомогенизация (некоторые результаты Е. Де Джорджи и С. Спаньоло).* *28.02, 14.03*

В.Я. Иврий: *Особенности решений симметрических гиперболических систем.* *14.03, 21.03*

А.М. Виноградов: *Симметрии нелинейных уравнений.* *11.04, 18.04*

Ю.А. Дубинский: *Соболевские пространства бесконечного порядка.* *25.04*

А.В. Бабин: *Выражение решений дифференциального уравнения $Au = h$ с аналитическими коэффициентами через итерации оператора A.* *25.04*

А.В. Фурсиков, М.И. Вишик: *Статистические решения уравнений Навье–Стокса.* *12.09*

С.М. Козлов: *Решения нелинейных уравнений первого порядка на торе (по Х. Брезису и Л. Ниренбергу).* *19.09*

А.В. Фурсиков: *Существование и единственность для стационарных уравнений Навье–Стокса (по Ч. Фояшу и Р. Темаму).* *26.09*

М.С. Агранович: *Несамосопряжённые операторы близкие к самосопряжённым.* *3.10*

Л.Ф. Фридлендер: *Полнота собственных функций и обобщённых собственных функций для возмущений эллиптических операторов с аналитическими коэффициентами.* *10.10*

В.В. Грушин: *Задача Коши для нестрого гиперболичных уравнений (по Л. Хёрмандеру).* *10.10*

С.Б. Куксин: *Аналитические решения уравнения Эйлера на торе (по М.С. Бауенди и Ч. Гулауику).* *17.10*

А.В. Бабин: *Бифуркации в нелинейных задачах на собственные значения (по М. Крандаллу и П. Рабиновицу).* *14.11*

Б.П. Панеях: *Задача с косой производной (совместно с В.Г. Мазьёй).* *21.11, 28.11*

А.А. Лаптев: *Спектральная асимптотика одного класса интегральных операторов Фурье.* *5.12*

1978

Л.Р. Волевич: *Смешанные задачи для общих гиперболических уравнений.* *27.02*

С.Б. Куксин: *Периодические решения нелинейных волновых уравнений (по П. Рабиновицу).* *6.03*

М.В. Федорюк: *О формальных асимптотических решениях для скользящих лучей.* *13.03*

С.М. Козлов: *Внедиагональные коротковолновые асимптотики для фундаментальных решений уравнений диффузии (по Й. Каннаю).* *20.03*

А.В. Бабин: *О линеаризации нелинейных аналитических отображений банаховых пространств.* *27.03*

В.П. Паламодов: *Каустики и лакуны для параметриксов гиперболических уравнений с переменными коэффициентами.* *10.04, 17.04*

В.Я. Иврий: *Распространение особенностей решений симметрических гиперболических систем вблизи границы.* *24.04*

С.Г. Гиндикин: *Преобразование Пенроуза на касательном комплексе Дольбо и система Максвелла (совместно с Г.М. Хенкиным).* *30.10*

М.А. Антонец: *Алгебра символов Вейля и задача Коши.* *13.11*

А.В. Бабин: *Описание эллиптических самосопряжённых операторов (по Г. Метивье).* *20.11*

С.М. Козлов: *Уравнение Кортевега–де Фриза и метод обратной задачи.* *27.11, 4.12, 11.12*

1979

А.И. Комеч: *Статистические решения уравнений Навье–Стокса (совместно с М.И. Вишиком).* *19.02*

М.С. Агранович: *Спектр псевдодифференциальных операторов на окружности.* *26.02, 5.03*

С.М. Козлов: *Обзор гомогенизации.* *26.03, 2.04*

Л.Ф. Фридлендер: *Волновые пакеты и интегральные операторы Фурье (по А. Кордобе и Ч. Фефферману).* *9.04, 16.04*

П.Е. Берхин: *Распространение особенностей и полуглобальные теоремы существования для операторов главного типа (по Л. Хёрмандеру).* *23.04*

С.Б. Куксин: *Уравнение Кортевега–де Фриза в классе периодических функций (по С.П. Новикову).* *10.09, 24.09, 1.10, 8.10*

В.Я. Иврий: *Второй член спектральной асимптотики для оператора Лапласа–Бельтрами на компактном многообразии с краем.* *15.10*

Б.В. Федосов: *Вейлевские символы (по Л. Хёрмандеру).* *22.10, 29.10*

С.М. Козлов: *Гиперболические системы первого порядка с малой вязкостью (по М. Тейлору).* *12.11*

А.В. Бабин: *Периодические решения нелинейных волновых уравнений (по Х. Брезису).* *19.11*

Б.Р. Вайнберг: *Теория рассеяния для лапласиана с некоторыми возмущениями второго порядка (по Ш. Агмону).* *26.11, 3.12*

1980

А.И. Шнирельман: *Уравнения Эйлера.* *21.01, 28.01*

С.Б. Куксин: *Элементы квантовой теории поля.* *4.02*

Л.Р. Волевич: *Смешанные задачи с общими граничными условиями.* *3.03, 10.03*

С.Г. Гиндикин: *Интегральная геометрия.* *10.03, 17.03, 24.03*

А.В. Фурсиков: *Теория экстремальных задач для трёхмерных уравнений Навье–Стокса: глобальное существование и единственность для плотного множества внешних сил.* *22.09, 29.09*

С.Б. Куксин: *Нелинейные параболические уравнения.* *3.11*

В.Я. Иврий: *Точная спектральная асимптотика для некоторых краевых задач.* *17.11, 1.12*

С.М. Козлов: *Малые деформации и основные состояния для некоторых операторов с квазипериодическими коэффициентами.* *8.12, 15.12*

1981

А.В. Бабин: *Распространение особенностей для нелинейных уравнений (по Ж.-М. Бони).* *16.02, 23.02*

А.И. Шнирельман: *Обобщение парадифференциальных операторов.* *23.02*

Б.А. Дубровин: *Конечнозонные потенциалы и иерархия Кортевега–де Фриза.* *2.03, 9.03*

Ю.С. Ильяшенко: *Слабо сжимающие системы и аттракторы уравнений Навье–Стокса на двумерном торе.* *23.03, 30.03*

Л.Ф. Фридлендер: *Асимптотика матрицы рассеяния.* *6.04, 13.04*

М.И. Вишик: *Аттракторы нелинейных параболических уравнений и оценки их размерности (совместно с А.В. Бабиным).* *14.09*

А.Т. Фоменко: *Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли.* *26.10, 2.11*

В.Я. Иврий: *Точные квазиклассические асимптотики собственных значений.* *30.11, 7.12*

1982

Н.В. Николенко: *Нелинейные эволюционные уравнения и их линеаризация (бесконечномерный аналог теории К.Л. Зигеля).* *22.02*

Б.В. Федосов: *Квазиклассические асимптотики амплитуды рассеяния (по Ж. Шазарэну).* *1.03*

С.Б. Куксин: *Вариационные и топологические методы в нелинейных задачах (по Л. Ниренбергу).* *15.03*

С.М. Козлов: *Гомогенизация нелинейных уравнений.* *29.03, 5.04*

А.И. Комеч: *Метод ВКБ (по А. Воросу).* *26.04, 3.05*

A. Juhl: *New relations between the theory of coadjoint representations of Lie groups and the spectral properties of differential operators.* *3.05*

М.И. Вишик: *Обзор некоторых работ из трудов Парижского семинара Ч. Гулаучка–Л. Шварца по дифференциальным уравнениям: H. Brezis; Ch. Fefferman and D.H. Phong; B. Simon; L. Tartar.* *20.09*

С.Б. Куксин: *Квазилинейные эллиптические уравнения второго порядка в L^1 (по Х. Брезису и В. Штраусу).* *11.10*

С.М. Козлов: *Многопараметрические спектральные асимптотики.* *18.10*

А.А. Шкаликов: *Операторные пучки и их приближения.* *1.11, 15.11*

S. Rempel: *Pseudodifferential operators without transmission property (joint work with B.-W. Schulze).* *22.11*

М.А. Красносельский: *Бифуркации.* *29.11*

А.И. Вольперт: *Асимптотическое поведение решений нелинейных параболических уравнений из химической кинетики и горения.* *6.12*

В.В. Жиков: *Гомогенизация в различных задачах.* *13.12*

1983

М.И. Вишик: *Количество мод, достаточное для приближённого описания двумерных вязких несжимаемых потоков (по Ч. Фояшу, О. Манли, Р. Темаму и И. Треву).* *14.02*

А.В. Фурсиков: *Новые результаты для трёхмерных уравнений Навье–Стокса: глобальное существование и единственность для почти всех начальных данных.* *14.02, 21.02*

Б.Р. Вайнберг: *Асимптотика решений задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка при условии неловушечности.* *28.02*

А.И. Комеч: *Энтропия и ударные волны для гиперболических законов сохранения (по Р. Ди-Перна и Л. Тартару).* *21.03*

С.Б. Куксин: *Результаты о центральных многообразиях (по Дж. Марсдену и М. МакКракену).* *28.03*

Б.В. Федосов: *Обобщение теоремы Атьи–Ботта–Лефшеца о неподвижной точке.* *28.03, 4.04*

В.С. Козякин: *Бифуркации периодических решений.* *11.04*

С.Б. Куксин: *Периодические решения гамильтоновых систем (по П. Рабиновицу, И. Экланду, Ж.-М. Ласри).* *18.04*

Д.В. Аносов: *Новые результаты о динамических системах.* *25.04*

Ю.С. Ильяшенко: *Аттракторы уравнения Курамото–Сивашинского.* *26.09*

Д.Г. Васильев: *Двучленная асимптотика спектра эллиптических краевых задач высшего порядка.* *31.10, 14.11*

Н.В. Крылов: *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.* *21.11, 28.11*

Ю.А. Дубинский: *Аналитические псевдодифференциальные операторы и их приложения.* *5.12*

А.С. Демидов: *Теоремы существования и несуществования для уравнения равновесия плазмы.*

1984

В.Ф. Лазуткин: *Комплексный бильярд.* *13.02*

В.Я. Иврий: *Оценка числа отрицательных собственных значений оператора Шрёдингера.* *20.02*

Б.П. Панеях: *Вырожденные краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.* *27.02, 5.03*

Б.В. Федосов: *Принцип неопределённости (по Ч. Фефферману).* *12.03, 19.03*

М.И. Вишик: *О некоторых работах французских математиков (H. Brezis; R. Glowinski; B. Helffer and J. Sjöstrand; P. Lions; D. Robert; R. Temam).* *26.03*

Л.Р. Волевич: *Обзор результатов о приложениях многоугольника Ньютона.* *2.04*

С.И. Похожаев: L^∞ *оценки для некоторых квазилинейных уравнений.* *16.04*

А.В. Фурсиков: *Оптимальное управление системами с распределёнными параметрами.* *23.04, 7.05*

М.В. Федорюк: *Метод ВКБ для сингулярных возмущений нелинейных дифференциальных уравнений.* *1.10*

В.П. Маслов: *Математические аспекты синтеза вычислительных сред.* *8.10*

Б.Р. Вайнберг: *Асимптотика фазы рассеяния (по Д. Роберту и Х. Тамуре).* *3.12*

В.В. Грушин: *Новые результаты по гипоэллиптичности для операторов порождённых векторными полями (по Ж. Нуррига).* *3.12*

1985

А.О. Радул: *Новые методы для интегрируемых нелинейных уравнений типа уравнения Кортевега–де Фриза.* *18.02, 4.03*

А.И. Комеч: *О солитонах релятивистских нелинейных волновых уравнений (по А. Берестики и П.-Л. Лионсу).* *18.03*

Т.Д. Вентцель: *Метод компенсированной компактности (по Ф. Мюра, Р. ДиПерна, Л. Тартару).* *25.03, 1.04*

Д.Г. Васильев: *Асимптотика спектра на многообразиях с кусочно-гладкой границей.* *1.04, 8.04*

В.Я. Иврий: *Дилатации и асимптотики собственных значений спектральных задач с сингулярностями.* *22.04*

М.В. Карасёв: *Квантование нелинейных фазовых пространств.* *29.04*

Б.В. Федосов: *Деформационное квантование и индекс.* *7.10, 14.10, 21.10*

Г.М. Хенкин: *Трёхмерная обратная задача рассеяния для операторов Шрёдингера.* *28.10, 4.11*

С.М. Козлов: *Поведение при больших временах решений уравнения Фоккера–Планка.* *11.11*

Ю.А. Дубинский: *Задача Коши для аналитических псевдодифференциальных уравнений в комплексной области.* *18.11*

А.В. Бабин: *Гладкость решений вырожденных уравнений.* *25.11*

Л.Ф. Фридлендер: *Операторы Буте де Монвеля на многообразиях с границей (по Г. Грубб).* *2.12, 9.12*

А.И. Комеч: *Стоячие волны и солитоны нелинейного уравнения Клейна–Гордона.*

1986

С.Б. Куксин: *Нелинейные возмущения линейных уравнений.* *17.02, 24.02*

В.И. Оселедец: *Показатели Ляпунова.* *17.03, 24.03*

Б.А. Дубровин: *λ-представление и интегрируемость для дифференциальных и разностных уравнений.* *31.03, 7.04*

С.З. Левендорский: *Формула Вейля для спектральной асимптотики и её обобщения.* *14.04*

В.Я. Иврий: *Спектральные асимптотики для оператора Шредингера с магнитным полем.* *5.05*

М.С. Агранович: *Оценки и спектральные асимптотики для несамосопряжённых эллиптических псевдодифференциальных операторов.* *22.09, 29.09*

С.М. Козлов: *Эффективная теплопроводность.* *13.10, 20.10*

А.В. Воловой: *Оценка остатка в двучленной асимптотике распределения собственных значений.* *20.10, 27.10*

С.Б. Куксин: *Вариационные задачи в теории жидких кристаллов и гармонические отображения с дефектами (по Х. Брезису, Ж.-М. Корону и Э. Либу).* *10.11*

Я.Б. Песин: *Системы с ненулевыми показателями Ляпунова.* *17.11*

П.И. Плотников: *Нелинейные задачи на собственные значения.* *24.11*

А.В. Фурсиков: *О некорректных задачах.* *1.12, 8.12*

1987

М.В. Карасёв: *Симплектическая геометрия и псевдодифференциальные операторы.* *2.03, 9.03*

Н.С. Надирашвили: *Единственность и оценки решений задачи Неймана в областях с C^1-границей. Оценки меры узловых линий собственных функций.* *23.03, 30.03*

В.М. Тихомиров: *Энтропия и её применения.* *6.04*

А.И. Шнирельман: *Группа диффеоморфизмов и турбулентность. Устойчивость потока идеальной жидкости (по В.И. Арнольду).* *13.04*

В.В. Чепыжов: *О неравенствах Либа–Тирринга.* *20.04*

Ю.А. Дубинский: *Задача Коши для линейных систем в комплексных областях.* *27.04*

В.М. Петков: *Теория рассеяния для периодически движущихся препятствий.* *12.10*

С.М. Козлов: *Эффективная диффузия.* *19.10*

Б.В. Федосов: *Индекс и квантование. Асимптотические операторные представления.* *16.11, 23.11*

Я.И. Коган: *Теория струн.* *30.11, 7.12*

1988

А.И. Шнирельман: *Течение жидкости в сильно неоднородной пористой среде.* *14.03*

А.Б. Гивенталь: *Устойчивость стационарных состояний и солитонов в задачах химической кинетики.* *21.03, 28.03*

С.А. Молчанов: *Поведение при больших временах решений уравнения Бюргерса со случайными начальными данными.* *18.04*

М.И. Вишик: *О докладах на парижской конференции к 60-летию Ж.-Л. Лионса: E. De Giorgi (Variational problems in classes of functions of bounded variation); M. Feigenbaum (Chaos); C. Foias (Interaction of large and small modes for solutions of the Navier–Stokes equations); I.M. Gelfand (General hypergeometric functions and Newton polyhedra); L. Hörmander (Blow-up of solutions for nonlinear wave equations); J. Leray (A fundamental solution of the elasticity system in the half-plane); E. Magenes (Numerical solution of parabolic equations); A. Majda (Computer simulation of the motion of vortices); G.I. Marchuk (Some applications of mathematics in biology); S. Mizohata (Small t singularities of solutions of first order hyperbolic systems); L. Nirenberg ($\Delta u + f(x,u,u_x) = 0$); P. Rabinowitz (Periodic solutions of Hamiltonian systems); L. Schwartz (Infinitesimal stochastic calculus).* *26.09*

А.В. Бабин: *Асимптотика решений нелинейных эволюционных уравнений при $t \to \infty$ (совместно с М.И. Вишиком).* *26.09*

А.В. Фурсиков: *О докладах на конференции “Navier–Stokes equations: theory and numerical methods”, Обервольфах, 18–24 сентября 1988: T. Fischer, Y. Giga, K. Masuda, T. Miyakawa, G. Prouse, S. Sritharan, H. Sohr, E. Titi.* *3.10*

Б.З. Шапиро: *Гиперболические полиномы и матрицы, зависящие от параметров.* *10.10*

Г.А. Дерфель: *Вероятностные и спектральные методы в теории дифференциально-функциональных уравнений (совместно с С.А. Молчановым).* *10.10*

Р.А. Минлос: *Решёточные модели и спектр матрицы переноса.* *17.10, 24.10*

Б.П. Панеях: *Некоэрцитивные (вырожденные) краевые задачи.* *31.10*

С.Н. Самборский: *Идемпотентный анализ.* *21.11, 28.11*

С.Ю. Яковенко: *Применение идемпотентного анализа в задаче оптимизации.* *28.11*

1989

Б.Р. Вайнберг: *Асимптотика при $t \to \infty$ решений гиперболических уравнений с коэффициентами, периодическими по t.* *6.03, 13.03*

А.В. Фурсиков: *Необходимое условие экстремума в задачах оптимального управления распределёнными системами.* *20.03, 27.03*

А.И. Комеч: *Нелинейные волновые уравнения (по А. Берестики и П.-Л. Лионсу).* *3.04, 10.04*

В.Я. Иврий: *Двухчленная локальная спектральная асимптотика (совместно с А.В. Качалкиной).* *17.04*

В.А. Козлов: *Новые итеративные методы для некоторых задач механики (совместно с В.Г. Мазъёй).* *17.04*

В.В. Жиков: *Эффективная проводимость композитных материалов.* *17.04*

М.С. Бирман, М.З. Соломяк: *Оценки для числа отрицательных собственных значений оператора Шрёдингера.* *24.04*

С.Б. Куксин: *Квазипериодические решения бесконечномерных гамильтоновых систем.* *2.10*

В.Я. Иврий: *Осциллирующие фронты и локальные квазиклассические асимптотики.* *9.10*

А.Н. Кожевников: *Спектральные асимптотики для систем, эллиптических по Дуглису–Ниренбергу. Линеаризованные стационарные системы теории упругости и гидродинамики.* *23.10, 30.10*

А.Ю. Горицкий: *Неограниченный аттрактор гиперболического уравнения.*

В.Г. Звягин: *О собственных значениях эллиптических краевых задач.*

В.Я. Иврий: *Точные спектральные асимптотики: двадцать лет спустя.*

1990

В.Я. Иврий: *Спектральные асимптотики в областях с остриём (совместно с Е.Г. Филипповым).* *5.02*

А.С. Братусь: *К соотношению между первой и второй собственными частотами колебаний мембраны (совместно с А.Д. Мышкисом).* *5.02*

М.С. Бирман: *Дискретный спектр в лакунах непрерывного спектра.* *5.02*

С.А. Молчанов: *Локализационная теорема для операторов Шрёдингера с неограниченными потенциалами (совместно с Л.А. Пастуром).* *12.02*

А.В. Бабин: *Аттракторы эволюционных уравнений в неограниченных областях.*

А.В. Бабин: *Динамика эллиптических уравнений в цилиндрических областях.*

М.Д. Бронштейн: *Гиперболические уравнения с характеристиками переменной кратности.*

М.Д. Бронштейн: *Подготовительная теорема Мальгранжа в различных функциональных пространствах.*

А.М. Ильин: *Согласование асимптотических разложений.*

Е.В. Радкевич: *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой.*

А.И. Шнирельман: *Устойчивость стационарных решений уравнений Эйлера.*

1991

Ю.А. Дубинский: *Псевдодифференциальные операторы с комплексными аргументами и задача Коши.*

А.И. Комеч: *Аттрактор для струны, взаимодействующей с нелинейным осциллятором.*

А.Л. Пятницкий: *Микролокальные меры дефекта и их приложение в гомогенизации.*

Е.В. Радкевич: *Асимптотика решений системы Кана–Хилларда.*

М.Р. Левитин: *Колебания вязкой сжимаемой жидкости.*

1992

А.Ю. Горицкий: *Неограниченные аттракторы эволюционных уравнений (совместно с В.В. Чепыжовым).*

1993

А.Ю. Горицкий: *Инерциальные многообразия.*

Ю.А. Дубинский: *О нелинейных аналитических и коаналитических краевых задачах вариационного типа.*

А.В. Фурсиков: *Некоторые результаты по теории управления. Аппроксимативная управляемость системой Стокса.*

А.А. Ильин: *Оценка размерности аттрактора системы Навье–Стокса на сфере.*

А.Л. Пятницкий: *Усреднение на фоне исчезающей вязкости.*

М.А. Шубин: *Теорема Римана–Роха для эллиптических операторов (совместно с М. Громовым).*

J. Bruning (Germany): *Spectral asymptotics for the Laplace operator on a complex manifold with singularities.*

А.А. Шкаликов: *Операторные матрицы и спектральные задачи, связанные с ними.*

1994

А.В. Бабин: *Свойства симметрии аттракторов квазилинейных параболических уравнений.*

А.А. Ильин: *Глобальное усреднение диссипативных динамических систем.*

А.Л. Пятницкий: *Вырождение эффективной диффузии в потенциальном поле.*

А.Л. Скубачевский: *Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения.*

А.Р. Ширикян: *Гиперболические уравнения с почти-периодической правой частью.*

1995

А.Ю. Горицкий: *Интегральные многообразия неавтономных уравнений для уравнений математической физики (совместно с В.В. Чепыжовым).*

С.Ю. Доброхотов: *Фигуры Лиссажу, комплексный метод ВКБ и спектральный ряд трёхмерного ангармонического осциллятора.*

С.Ю. Доброхотов: *Некоторые асимптотические решения линеаризованных уравнений Навье–Стокса (совместно с А.И. Шафаревичем).*

Ю.А. Дубинский: *О задаче продолжения с наименьшим коаналитическим уклонением.*

С.В. Зелик: *Бесконечномерное уравнение Матье–Хилла с диссипацией и оценки его индекса неустойчивости.*

А.И. Комеч: *Устойчивость стационарных решений нелинейных гиперболических уравнений.*

А.Л. Пятницкий: *Основные состояния сингулярно возмущённых эллиптических операторов.*

А.Л. Скубачевский: *Разрешимость нелокальных эллиптических краевых задач.*

А.В. Фурсиков: *Точная локальная управляемость двумерной системы Навье–Стокса.*

1996

Ю.А. Дубинский: *Ортогональное разложение соболевских пространств в сумму аналитических и коаналитических подпространств.*

С.В. Зелик: *Траекторный аттрактор для нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области.*

А.И. Комеч: *Переходы к квантовым стационарным состояниям и глобальные аттракторы нелинейных гиперболических уравнений.*

С.Б. Куксин: *Об осцилляции решений нелинейного уравнения Шрёдингера.*

1997

А.Ю. Горицкий: *Локальные интегральные многообразия параболического уравнения (совместно с М.И. Вишиком).*

С.В. Зелик: *Необходимые и достаточные условия сохранения положительного конуса для уравнений реакции-диффузии.* *22.09*

С.В. Зелик: *Аттрактор нелинейной эллиптической системы в неограниченной области.*

А.А. Ильин: *Глобальное усреднение диссипативных динамических систем.*

А.А. Ильин: *Точные константы для некоторого класса неравенств для производных.*

А.И. Комеч: *О законе излучения чёрного тела Кирхгофа–Планка и сходимость к равновесному распределению для случайных решений волнового уравнения и уравнения Клейна–Гордона.*

С.Б. Куксин: *Нелинейное уравнение Шредингера со случайными коэффициентами.* *29.09*

А.Л. Пятницкий: *Граничная гомогенизация в областях с быстро осциллирующей границей.*

А.А. Шкаликов: *О факторизации эллиптических операторных пучков.*

1998

А.Ю. Горицкий: *Построение энтропийного решения задачи Коши с бесконечным числом ударных волн.*

А.И. Комеч: *О глобальной сходимости к стационарным состояниям для трёхмерного волнового уравнения, взаимодействующего с частицей.*

А.Л. Пятницкий: *Гомогенизация случайных параболических операторов с большими потенциалами.*

А.Л. Скубачевский: *О бифуркации Хопфа для квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений.*

A. Mielke: *Attractors and diffusive mixing for parabolic equations on* $\mathbb{R}^n$. *14.09*

А.Л. Афендиков: *О течении Пуазейля между параллельными пластинами.* *21.09*

С.В. Зелик: *Эпсилон-энтропия аттракторов систем реакции-диффузии во всем пространстве.* *26.10*

А.В. Фурсиков: *Управляемость системы Навье–Стокса во внешней области.* *2.11, 16.11*

А.С. Демидов: *О неединственности решения одной обратной задачи удержания плазмы в токамаке.* *23.11*

Г.А. Чечкин: *О задачах усреднения решений УрЧП.* *30.11*

В.В. Чепыжов: *О траекторных аттракторах эволюционных уравнений.* *7.12*

А.Р. Ширикян: *Теорема Гробмана–Хартмана для гиперболических уравнений (совместно с Л.Р. Волевичем).*

1999

С.В. Зелик: *Об аттракторах систем реакции-диффузии в неограниченных областях.* *17.02*

А.С. Шамаев: *О двухмасштабной сходимости.* *1.03*

Л.И. Левкович-Маслюк: *Многомасштабный анализ и ортогональные вейвлеты.* *29.03*

А.Л. Пятницкий: *Теория усреднения.* *12.04, 19.04*

А.В. Фурсиков: *Точная управляемость уравнений Навье–Стокса и Буссинеска.* *27.09, 4.10*

М.С. Агранович: *Краевые задачи для сильно эллиптических систем в областях с гладкой или липшицевой границей.* *11.10, 18.10*

А.Л. Пятницкий: *Усреднение эллиптических уравнений.* *25.10, 15.11*

А.С. Демидов: *Асимптотика решения эллиптической задачи с быстро осциллирующими краевыми условиями.*

Ю.А. Дубинский: *Нелинейные аналитические краевые задачи на плоскости,* L_p*-теория.*

А.В. Фурсиков: *Минимизация силы сопротивления тела, движущегося в вязкой несжимаемой жидкости.*

А.А. Ильин: *Точные константы для класса неравенств для производных.*

А.А. Ильин: *Оценка снизу размерности аттрактора системы Навье–Стокса на торе (по V.X. Liu).*

А.И. Комеч: *О солитонных асимптотиках для трёхмерного волнового уравнения, взаимодействующего с частицей.*

А.Л. Пятницкий: *Основное состояние сингулярно возмущённых эллиптических операторов с быстро осциллирующими коэффициентами.*

М.А. Шубин: *Эллиптические задачи с ослабленными условиями.*

Л.Р. Волевич: *Доклады о совместной работе с Денком и Менникеном по эллиптическим уравнениям и краевым задачам с параметром.*

А.Л. Скубачевский: *Полугруппы Феллера.*

2000

А.А. Ильин: *О фрактальной размерности аттракторов диссипативных полугрупп.* *6.03*

А.А. Ильин: *О фрактальной размерности аттрактора двумерной системы Навье–Стокса.* *13.03*

J. Rougemont: *Epsilon-entropy estimates for attractors of parabolic equations in unbounded domains.* *18.09*

С.Б. Куксин: *Об инвариантных мерах системы Навье–Стокса на двумерном торе.* *25.09*

А.И. Комеч: *Асимптотика на бесконечности решений конечной энергии для нелинейного уравнения струны.* *2.10*

Л.Р. Волевич: *Эллиптические системы.* *9.10*

А.В. Фурсиков: *Стабилизация для уравнений Навье–Стокса.* *16.10*

А.В. Фурсиков: *Стабилизация для уравнений Навье–Стокса. Линейный случай.* *23.10*

В.В. Чепыжов: *Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами.* *30.10*

Ю.А. Дубинский: *Обобщение теоремы Вейля о разложении пространств Соболева.* *13.11*

А.С. Демидов: *Конечномерная модель задачи Стокса–Лейбензона для течения Хеле–Шоу.* *20.11*

Л.Ф. Фридлендер: *О спектре некоторых периодических задач. Фотонные кристаллы.* *25.12*

С.Б. Куксин: *О “турбулентности” в нелинейном уравнении Шрёдингера.*

А.Л. Пятницкий: *Усреднение в областях с быстро вибрирующей перфорацией.*

Е.В. Радкевич: *Асимптотика решения расширенной системы Кана–Хилларда и модифицированное правило Максвелла.*

А.Р. Ширикян: *О единственности инвариантной меры для системы Навье–Стокса (совместно с С.Б. Куксиным).*

А.А. Шкаликов: *Спектральные задачи для эллиптических операторов в областях с коническими точками: теоремы о полноте собственных функций.*

2001

А.В. Фурсиков: *О стабилизации с управлением. Применение к системе Озеена.* *24.09*

С.В. Зелик: *О траекторных аттракторах диссипативных волновых уравнений.* *8.10, 15.10*

А.А. Ильин: *Об усреднении аттракторов диссипативных уравнений.* *22.10*

А.Л. Скубачевский: *Нелокальный анализ.* *29.10*

П.Г. Гриневич: *Обзор по методу усреднения.* *5.11*

П.Г. Гриневич: *КАМ теория.* *12.11*

В.В. Чепыжов: *Оценки эпсилон-энтропии аттракторов уравнений математической физики.* *19.11*

М.С. Агранович: *Краевая задача для системы Дирака со спектральным параметром в краевом условии, в которой собственные значения имеют две предельные точки:* 0 *и* ∞.

Л.Р. Волевич: *Дихотомия в гиперболических линейных и нелинейных уравнениях и системах (совместно с А.Р. Шириканом).*

А.С. Демидов: *Обратная задача для уравнения равновесия в плазме.*

Ю.А. Дубинский: *Ортогональное разложение соболевского пространства* $W_2^{1,0}$ *и геометрический смысл системы Стокса.*

С.В. Зелик: *Пространственно-временной хаос в уравнениях реакции-диффузии в неограниченных областях.*

С.В. Зелик: *Асимптотическая гладкость решений нелинейных волновых уравнений с быстро осциллирующей растущей нелинейностью.*

А.И. Комеч: *О нелинейном рассеянии свободных волновых пакетов солитонами для трёхмерного волнового уравнения, взаимодействующего с частицей.*

А.А. Шкаликов: *Предельные спектральные кривые и квазиклассические асимптотики для уравнений Орра–Зоммерфельда.*

2002

А.А. Шкаликов: *Задача Орра–Зоммерфельда.* *18.02*

П.Л. Гуревич: *Нелокальные эллиптические задачи в пространствах Соболева.* *30.09*

Л.Р. Волевич: *Рассказ о математическом конгрессе 2002 г.* *7.10*

С.Ю. Доброхотов: *О решении системы Навье–Стокса.* *21.10*

В.Ю. Протасов: *Всплески с компактным носителем.* *28.10*

М.А. Шубин: *Дискретность спектра оператора Шредингера.* *24.11, 2.12*

А.Л. Афендиков: *Течения Колмогорова.*

А.Ю. Горицкий: *Об одномерных законах сохранения в классе локально ограниченных функций.*

С.В. Зелик: *Экспоненциальные аттракторы для уравнений математической физики.*

А.А. Ильин: *Об устойчивости и неустойчивости течений Колмогорова на сфере.*

А.И. Комеч: *О глобальной сходимости к стационарным орбитам и эффективная динамика для релятивистских* $\mathbf{U}(1)$*-инвариантных уравнений.*

Е.В. Радкевич: *О корректности краевых задач для систем моментов неравновесной термодинамики.*

А.М. Савчук, А.А. Шкаликов: *Операторы Штурма–Лиувилля с распределёнными потенциалами.*

2004

С.А. Стёпин: *Рассеяние, резонансы и спектральные особенности для оператора Шредингера.* *29.03*

С.В. Зелик: *Хаос в диссипативных динамических системах, порожденных системами реакции-диффузии.* *5.04*

А.В. Бабин: *О сложности аттракторов диссипативных динамических систем.* *19.04*

А.А. Ильин: *Об альфа-моделях в гидродинамике. Оценка размерности аттракторов.* *25.04*

С.Б. Куксин: *О задачах статистической гидродинамики.* *20.09*

А.И. Шафаревич: *О стационарном уравнении Эйлера. Вариационный принцип.* *27.09*

С.В. Зелик: *Экспоненциальные аттракторы уравнений математической физики.* *18.10*

М.С. Агранович: *Об операторах Неймана-Дирихле.* *25.10*

А.И. Комеч: *Аттракторы гиперболических уравнений.* *1.11*

В.Е. Подольский: *Суммирование по Абелю.* *29.11*

С.Ю. Доброхотов: *Псевдодифференциальные операторы, адиабатическое приближение и приложения к теории квантовых волноводов (совместно с В.В. Беловым и Т.Я. Тудоровским).*

В.Г. Звягин: *О существовании слабых решений начально-краевых задач для модели Джеффриса движения вязкоупругой среды (совместно с Д.А. Воротниковым).*

2005

Л.Р. Волевич: *Задача Стефана с коррекцией Гиббса–Томпсона (свободная граница).* *21.02, 14.03*

В.В. Веденяпин: *Некоторые спектральные вопросы дифференциально-разностных уравнений.* *21.03*

Т.А. Суслина: *Периодические дифференциальные операторы. Пороговые свойства и усреднение.* *28.03*

А.И. Комеч: *О рассеянии на солитонах для некоторых систем дифференциальных уравнений.* *12.09*

В.Г. Звягин: *О траекторных и глобальных аттракторах в задачах с упругими средами (совместно с Д.А. Воротниковым).* *19.09*

А.Б. Шаповал: *О прогнозах землетрясений.* *26.09*

А.В. Фурсиков: *Об одной модельной задаче стабилизации.* *3.10*

А.А. Шкаликов, А.М. Савчук: *О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева.* *10.10*

А.С. Демидов: *О граничном управлении в задаче о движении тела в идеальной жидкости с минимальным сопротивлением.* *24.10*

С.Ю. Доброхотов: *Модифицированный канонический оператор Маслова и волны цунами (совместно с С.Я. Секерж-Зеньковичем, Б. Тироцци и Т.Я. Тудоровским).* *5.12*

2006

С.В. Зелик: *Ограниченные решения двумерной системы Навье–Стокса в полосе.* *1.02*

А.И. Комеч: *Обзор теории рассеяния по работам Агмона.* *13.02*

С.В. Зелик: *Взаимодействие солитонов в диссипативных системах и порождение хаоса.* *20.02*

А.А. Ильин: *О степенях свободы для уравнения Навье–Стокса с трением в больших областях.* *13.03*

А.Л. Афендиков: *О задачах двумерной гидродинамики.* *27.03*

М.С. Агранович: *Регулярность решений вариационных задач.* *10.04*

А.С. Демидов: *Идентификация нелинейной зависимости в обратных задачах математической физики.* *18.09*

Е.А. Копылова: *Дисперсионное убывание для разностных уравнений.* *2.10*

А.С. Демидов: *Задача Стокса–Лейбензона для течения Хеле-Шоу.*

В.Г. Звягин: *Равномерные аттракторы для неавтономных уравнений движения вязкоупругой среды (совместно с Д.А. Воротниковым).*

2007

П.Г. Гриневич: *Интегрирование уравнений Кортевега–де Фриза.* *5.03*

С.В. Конягин: *Сходимость и расходимость рядов Фурье.* *12.03*

А.С. Демидов: *Метод Гельмгольца–Кирхгофа.* *19.03, 26.03*

А.Л. Скубачевский: *О существовании периодических решений одной нелинейной задачи термоконтроля.* *9.04*

А.А. Ильин: *Система Навье–Стокса с трением.* *16.04, 23.04*

А.А. Ильин: *О решениях уравнения Кортевега–де Фриза.* *17.09*

А.А. Ильин: *Система Навье–Стокса с трением в ограниченной области с условием проскальзывания на границе.* *24.09*

М.С. Агранович: *Задачи Дирихле и Неймана для сильно эллиптических систем.* *1.10, 8.10*

А.В. Фурсиков: *Управление системой Навье–Стокса через границу. Численное решение.* *15.10*

В.А. Клепцин: *Уравнение Шрама–Левнера. Фазовые переходы.* *12.11*

В.Ю. Протасов: *Масштабирующие уравнения.* *19.11, 26.11*

2008

М.С. Агранович: *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем в липшицевых областях.* *24.03, 14.04*

А.И. Комеч: *Дифференциальные сечения рассеяния для уравнений Шредингера.* *31.03*

А.В. Фурсиков: *Общая задача управления.* *21.04, 28.04*

А.А. Ильин: *Оценки снизу для спектра операторов Стокса и Лапласа.* *15.09*

А.С. Братусь: *Теория гиперциклов.* *20.10*

В.В. Жиков: *Модельные системы для электро-реологических жидкостей. Стационарные задачи.* *27.10*

А.И. Комеч: *Классические оценки резольвенты и их приложения.* *10.11*

М.А. Прибыль: *Спектральный анализ линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости.* *24.11*

А.С. Демидов: *Равновесные конфигурации плазмы в заданном топологическом классе.*

А.И. Комеч: *О проблеме обоснования равновесной статистической физики для гиперболических уравнений.* *3.11*

А.И. Комеч: *О спектральных методах в теории рассеяния (Агмон–Като–Мюрата–Вайнберг).* *10.11*

А.А. Комеч: *Глобальная сходимость к уединённым волнам (совместно с А.И. Комечем).* *26.11*

В.Г. Звягин: *Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта (совместно с М.В. Трубиным).*

2009

А.В. Фурсиков: *Неограниченность устойчивых многообразий для трёхмерной системы Навье–Стокса.* *16.02*

А.В. Бабин: *Модель точечного заряда.* *23.03*

S. Dostoglu: *Statistical Hydrodynamiscs.* *6.04*

А.А. Ильин: *Об эффектах осреднения, обеспечивающих регулярность решений уравнения Кортевега–де Фриза.* *21.09, 28.09*

П.Г. Гриневич: *Сингулярные конечнозонные операторы и обобщение метода Фурье.* *5.10*

А.А. Васильева: *Колмогоровские поперечники в соболевских пространствах с весом.* *26.10*

Ю.А. Дубинский: *Обобщение неравенства Харди и его приложение в теории эллиптических уравнений.* *9.11*

В.Ю. Протасов: *О разностных уравнениях со случайным аргументом.* *16.11*

М.М. Маламуд: *Об операторах Штурма–Лиувилля с точечным локальным взаимодействием.* *23.11*

2010

А.Л. Скубачевский: *Априорные оценки для уравнений 2-го порядка с нелокальными условиями.* *1.03*

М.С. Агранович: *Комплексная интерполяция.* *22.03*

П.Л. Гуревич: *О периодических решениях параболических задач с гистерезисом.* *5.04*

Е.В. Радкевич: *О разделении переменных на существенные и несущественные.* *12.04*

А.А. Злотник: *Уравнения вязкого сжимаемого газа.* *11.10*

А.А. Шкаликов: *Теория возмущений самосопряжённых операторов.* *25.10*

А.С. Демидов: *О существенно различных решениях обратной задачи для уравнения Грэда–Шафранова.* *1.11*

Е.А. Копылова: *Асимптотическая устойчивость кинка в релятивистском уравнении Гинзбурга–Ландау.* *8.11*

А.В. Горшков: *Стабилизация решений двумерной системы Навье–Стокса во внешности ограниченной области.* *15.11*

2011

I. Gallagher: *Global solutions for 3D Navier–Stokes equations.* *21.03*

Ю.А. Дубинский: *О корректности некоторых эллиптических задач. Приложения к уравнению Колмогорова–Фоккера–Планка и к системе Стокса.* *28.03*

А.И. Назаров: *Параболические уравнения с коэффициентами, разрывными по t.* *4.04*

Д.С. Гребеньков: *Лаплас-перенос через сложные поверхности.* *11.04*

А.А. Ильин: *Неравенства Либа–Тирринга на многообразиях.* *18.04*

C. Bardos: *About incompressible Euler limit of solutions of Navier–Stokes and Boltzmann equation in the presence of boundary effects.* *19.09*

А.Л. Делицын: *Краевые и спектральные задачи для системы уравнений Максвелла в цилиндре.* *3.10, 10.10*

А.А. Ильин: *О неравенствах Либа–Тирринга на многообразиях.* *10.10*

А.Б. Муравник: *Интегральные представления и качественные свойства решений функционально-дифференциальных параболических уравнений.* *17.10*

В.В. Чепыжов: *О минимальном подходе в теории глобальных аттракторов.* *24.10, 31.10*

А.И. Комеч: *О законах Эйнштейна для фотоэффекта: результаты и проблемы.* *7.11*

В.Ж. Сакбаев: *О динамике квантовой системы с вырожденным гамильтонианом.* *14.11*

А.Л. Скубачевский: *Уравнения Власова в полупространстве.* *21.11*

В.И. Власов: *О некоторых краевых задачах в сложных областях.* *28.11*

2012

В.В. Чепыжов: *Траекторный аттрактор в сильной топологии у диссипативной двумерной системы Эйлера.* *27.02*

В.Ж. Сакбаев: *Об усреднении множества предельных точек расходящейся последовательности полугрупп.* *5.03*

П.Л. Гуревич: *Уравнения реакции-диффузии с гистерезисом.* *12.03*

Н.А. Чалкина: *Инерциальные многообразия и условие спектральной щели для гиперболических уравнений с диссипацией.* *19.03*

А.В. Фурсиков: *Параболическая система нормального типа, соответствующая системе Навье–Стокса.* *26.03*

М.С. Агранович: *Замечания о сильно эллиптических системах в липшицевых областях.* *9.04*

I. Gallagher (Paris): *Some recent mathematical results on equatorial waves.* *16.04*

С.Ю. Доброхотов: *Асимптотика решений задачи Коши для двумерного волнового уравнения, описывающих волны, порожденные локализованными источниками и захваченные подводными хребтами (совместно с Д.А. Ложниковым).* *23.04*

Глава 24

Список печатных работ М.И. Вишика

[1] М. Вишик, *Метод ортогональных проекций для дифференциальных уравнений эллиптического типа*, Усп. Матем. Наук **2** (1947), 5(21), 194–196.

[2] М. Вишик, *Метод ортогональных проекций для самосопряженных уравнений*, Докл. Акад. Наук **56** (1947), 115–118.

[3] М. Вишик, *Метод ортогональных проекций для общих самосопряженных уравнений*, Докл. Акад. Наук **58** (1947), 957–960.

[4] М. Вишик, *Линейные расширения операторов и краевые условия*, Докл. Акад. Наук **65** (1949), 433–436.

[5] М. Вишик, *Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений*, Матем. Сборник **25(67)** (1949), 189–234.

[6] М. Вишик, *О линейных краевых задачах для дифференциальных уравнений*, Докл. Акад. Наук **65** (1949), 785–788.

[7] М. Вишик, *Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений*, Усп. Матем. Наук **4** (1949), 3(31), 125–127.

[8] М. Вишик, *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений*, Докл. Акад. Наук **74** (1950), 881–884.

[9] М. Вишик, *Об одном неравенстве для граничных значений гармонических функций в шаре*, Усп. Матем. Наук **6** (1951), 2(42), 165–166.

[10] М. Вишик, *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений*, Матем. Сборник **29(71)** (1951), 3, 615–676.

[11] М. Вишик, *Об общем виде линейных краевых задач для эллиптического дифференциального уравнения*, Докл. Акад. Наук **77** (1951), 373–375.

[12] М. Вишик, *О некоторых краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений*, Докл. Акад. Наук **77** (1951), 553–555.

[13] М. Вишик, *Об устойчивости решений краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений (относительно изменения коэффициентов и правых частей)*, Докл. Акад. Наук **81** (1951), 717–720.

[14] М. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений*, Труды Моск. мат. общества **1** (1952), 187–246.

[15] М. Вишик, *О первой краевой задаче для эллиптических дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами*, Сообщ. АН Грузинской ССР **13** (1952), 129–136.

[16] М. Вишик, *Об общем виде разрешимых краевых задач для однородного и неоднородного эллиптического дифференциального уравнения*, Докл. Акад. Наук **82** (1952), 181–184.

[17] М. Вишик, *О краевых задачах для систем эллиптических дифференциальных уравнений и об устойчивости их решений*, Докл. Акад. Наук **86** (1952), 645–648.

[18] М. Вишик, *О краевых задачах для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области*, Докл. Акад. Наук **93** (1953), 225–228.

[19] М. Вишик, *О первой краевой задаче для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области*, Докл. Акад. Наук **93** (1953), 9–12.

[20] М. Вишик, *О системах эллиптических дифференциальных уравнений и об общих краевых задачах*, Усп. Матем. Наук **8** (1953), 1(53), 181–187.

[21] М. Вишик, *Эллиптические уравнения, вырождающиеся на границе области*, Усп. Матем. Наук **9** (1954), 1(59), 138–143.

[22] М. Вишик, *Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области*, Матем. Сборник **35(77)** (1954), 513–568.

[23] М. Вишик, *Смешанные краевые задачи и приближенный метод их решения*, Докл. Акад. Наук **97** (1954), 193–196.

[24] М. Вишик, *Смешанные краевые задачи для уравнений, содержащих первую производную по времени, и приближенный метод их решения*, Докл. Акад. Наук **99** (1954), 189–192.

[25] М. Вишик, *Смешанные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, содержащих вторую производную по времени, и приближенный метод их решения*, Докл. Акад. Наук **100** (1955), 409–412.

[26] Г. Баренблатт, М. Вишик, *О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа*, Прикладная математика и механика **20** (1956), 411–417.

[27] М. Вишик, *О первой краевой задаче для эллиптических уравнений в новой функциональной постановке*, Докл. Акад. Наук **107** (1956), 781–784.

[28] М. Вишик, *Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения*, Матем. Сборник **39(81)** (1956), 1, 51–148.

[29] М. Вишик, О. Ладыженская, *Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений*, Усп. Матем. Наук **11** (1956), 6(72), 41–97.

[30] М. Вишик, Л. Люстерник, *Стабилизация решений некоторых дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве*, Докл. Акад. Наук **111** (1956), 12–15.

[31] М. Вишик, Л. Люстерник, *Стабилизация решений параболических уравнений*, Докл. Акад. Наук **111** (1956), 273–275.

[32] М. Вишик, С. Соболев, *Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных*, Докл. Акад. Наук **111** (1956), 521–523.

[33] М. Вишик, Л. Люстерник, *Об эллиптических уравнениях, содержащих малые параметры при старших производных*, Докл. Акад. Наук **113** (1957), 734–737.

[34] М. Вишик, Л. Люстерник, *О некоторых эллиптических уравнениях четного порядка, содержащих малые параметры при старших производных и вырождающихся в уравнения первого (и вообще нечетного) порядка*, Докл. Акад. Наук **113** (1957), 962–965.

[35] М. Вишик, Л. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Усп. Матем. Наук **12** (1957), 5(77), 3–122.

[36] М. Вишик, Л. Люстерник, *Асимптотика решений некоторых краевых задач с осциллирующими граничными условиями*, Докл. Акад. Наук **120** (1958), 1, 13–16.

[37] М. Вишик, С. Соболев, *Некоторые функциональные методы в теории уравнений с частными производными*, Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда **3** (1958), 152–162.

[38] М. Вишик, Л. Люстерник, *Об асимптотике решений задач с быстро осциллирующими граничными условиями для уравнений с частными производными*, Докл. Акад. Наук **119** (1958), 4, 636–639.

[39] М. Вишик, Л. Люстерник, *Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений*, Докл. Акад. Наук **121** (1958), 5, 778–781.

[40] М. Вишик, Л. Люстерник, *Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с большими и быстро изменяющимися коэффициентами*, Докл. Акад. Наук **125** (1959), 2, 247–250.

[41] М. Вишик, А. Мышкис, О. Олейник, *Дифференциальные уравнения с частными производными*, Математика в СССР за 40 лет **1** (1959), 563–637.

[42] М. Вишик, Л. Люстерник, *Некоторые вопросы возмущений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных*, Докл. Акад. Наук **129** (1959), 6, 1203–1206.

[43] М. Вишик, *Решение краевых задач для эллиптических уравнений в некоторых функциональных пространствах*, Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда **4** (1959), 14–15.

[44] М. Вишик, Л. Люстерник, *Асимптотические методы решения некоторых задач математической физики*, Труды Всесоюзн. совещ. по дифференц. уравнениям (1960), 45–46.

[45] М. Вишик, Л. Люстерник, *Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями*, Усп. Матем. Наук **15** (1960), 4, 27–95.

[46] М. Вишик, Л. Люстерник, *Возмущение собственных значений и собственных элементов для некоторых несамосопряженных операторов*, Докл. Акад. Наук **130** (1960), 2, 251–253.

[47] М. Вишик, Л. Люстерник, *О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр*, Докл. Акад. Наук **132** (1960), 6, 1242–1245.

[48] М. Вишик, *О разрешимости первой краевой задачи для нелинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений*, Докл. Акад. Наук **134** (1960), 4, 749–752.

[49] М. Вишик, Л. Люстерник, *Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I*, Усп. Матем. Наук **15** (1960), 3, 3–80.

[50] М. Вишик, *Краевые задачи для квазилинейных сильно эллиптических систем уравнений, имеющих дивергентную форму*, Докл. Акад. Наук **138** (1961), 3, 518–521.

[51] М. Вишик, *О краевых задачах для квазилинейных параболических систем уравнений и о задаче Коши для гиперболических уравнений*, Докл. Акад. Наук **140** (1961), 5, 998–1001.

[52] М. Вишик, *Решение системы квазилинейных уравнений, имеющих дивергентную форму, при периодических граничных условиях*, Докл. Акад. Наук **137** (1961), 3, 502–505.

[53] М. Вишик, *Квазилинейные эллиптические системы уравнений, содержащие подчиненные члены*, Докл. Акад. Наук **144** (1962), 1, 13–16.

[54] М. Вишик, *О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков*, Матем. Сборник **59** (1962), 289–325.

[55] М. Вишик, *О разрешимости первой краевой задачи для некоторых нелинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений*, Труды Энергет. института **42** (1962), 3–17.

[56] М. Вишик, *Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму*, Труды Моск. мат. общества **12** (1963), 125–184.

[57] М. Вишик, *О первой краевой задаче квазилинейных эллиптических уравнений и систем высших порядков*, Материалы к совмести, советско-амер. симпозиуму по уравн. с частн, произв. (1963), 3–11.

[58] М. Вишик, *О разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных уравнений с быстро растущими коэффициентами в классах Орлича*, Докл. Акад. Наук **151** (1963), 4, 758–761.

[59] М. Вишик, Г. Шилов, *Общая теория уравнений с частными производными и некоторые проблемы теории краевых задач*, Труды 4-го Всесоюзного матем. съезда **1** (1963), 55–85.

[60] М. Агранович, М. Вишик, *Параболические граничные задачи*, Усп. Матем. Наук **18** (1963), 1, 206–207.

[61] М. Агранович, М. Вишик, *Эллиптические граничные задачи, зависящие от параметра*, Докл. Акад. Наук **149** (1963), 2, 223–226.

[62] M. I. Vishik, *Sur les problèmes aux limites pour des équations quasi-linéaires elliptiques et paraboliques d'ordre supérieur*, *Les Équations aux Dérivées Partielles (Paris, 1962)*, 213–218, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris (1963).

[63] М. Вишик, Г. Эскин, *Краевые задачи для общих сингулярных уравнений в ограниченной области*, Докл. Акад. Наук **155** (1964), 1, 24–27.

[64] М. Вишик, Г. Эскин, *Общие краевые задачи с разрывными граничными условиями*, Докл. Акад. Наук **158** (1964), 1, 25–28.

[65] М. Вишик, Г. Эскин, *Общие параболические интегро-дифференциальные уравнения*, Усп. Матем. Наук **19** (1964), 6, 224–226.

[66] М. Вишик, Г. Эскин, *Сингулярные эллиптические уравнения и системы переменного порядка*, Докл. Акад. Наук **156** (1964), 2, 243–246.

[67] М. Агранович, М. Вишик, *Эллиптические граничные задачи, зависящие от параметра*, Первая летняя матем. школа (1964), 249–331.

[68] М. Агранович, М. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, Усп. Матем. Наук **19** (1964), 3, 53–161.

[69] М. Вишик, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и уравнений в свертках*, Докл. науч.-техн. конф. Энергет. института, Секция матем. (1965), 4–41.

[70] М. Вишик, Г. Эскин, *Уравнения в свертках в ограниченной области*, Усп. Матем. Наук **20** (1965), 3, 89–152.

[71] М. Вишик, Г. Эскин, *Параболические уравнения в свертках в ограниченной области*, Матем. Сборник **71** (1966), 2, 162–190.

[72] М. Вишик, Г. Эскин, *Уравнения в свертках в ограниченной области в пространствах, с весовыми нормами*, Матем. Сборник **69** (1966), 1, 65–110.

[73] М. Вишик, *Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения*, Тезисы докладов по приглашению Междунар. конгресса математиков (1966), 137–140.

[74] М. Вишик, Г. Эскин, *Нормально разрешимые задачи для эллиптических систем уравнений в свертках*, Матем. Сборник **74** (1967), 3, 326–356.

[75] М. Вишик, Е. Ландис, *Теория уравнений с частными производными в Московском университете за 50 лет*, Вестник МГУ, сер. матем., мех. **5** (1967), 48–70.

[76] М. Вишик, Г. Эскин, *Уравнения в свертках переменного порядка*, Труды Моск. мат. общества **16** (1967), 25–50.

[77] М. Вишик, Г. Эскин, *Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения*, Усп. Матем. Наук **22** (1967), 1, 15–76.

[78] М. Агранович, М. Вишик, *Псевдодифференциальные операторы*, МГУ, Москва (1968).

[79] М. Вишик, *Эллиптические уравнения в свертках и их приложения*, *Труды Международного конгресса математиков*, 409–419, Мир, Москва (1968).

[80] М. Вишик, Г. Эскин, *Пространства Соболева–Слободецкого переменного порядка с весовыми нормами и их приложения к смешанным краевым задачам*, Сиб. мат. журн. **9** (1968), 5, 973–997.

[81] М. Вишик, Г. Эскин, *Смешанные краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений*, Труды института прикладной математики ТГУ **2** (1969), 31–48.

[82] М. Вишик, В. Грушин, *Об одном классе вырождающихся эллиптических уравнений высших порядков*, Матем. Сборник **79(121)** (1969), 1, 3–36.

[83] М. Вишик, В. Грушин, *Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области*, Матем. Сборник **80(122)** (1969), 4, 455–491.

[84] М. Вишик, В. Грушин, *Эллиптические псевдодифференциальные операторы на замкнутом многообразии, вырождающиеся на подмногообразии*, Докл. Акад. Наук **189** (1969), 1, 16–19.

[85] М. Вишик, В. Грушин, *Эллиптические краевые задачи, вырождающиеся на подмногообразии границы*, Докл. Акад. Наук **190** (1970), 2, 255–258.

[86] П. Александров, М. Вишик, О. Олейник, И. Петровский, С. Соболев, *Лазарь Аронович Люстерник*, Усп. Матем. Наук **25** (1970), 4(154), 3–10.

[87] М. Вишик, *Пространства Соболева–Слободецкого переменного порядка с весовыми нормами и их приложения к эллиптическим смешанным краевым задачам*, *Дифференциальные уравнения с частными производными*, 71–76, Институт математики АН СССР, Сибирское отд.: Наука, Москва (1970).

[88] М. Вишик, В. Грушин, *Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы*, Усп. Матем. Наук **25** (1970), 4(154), 29–56.

[89] М. Вишик, *Параметрикс эллиптических операторов с бесконечным числом независимых переменных*, Усп. Матем. Наук **26** (1971), 2, 155–174.

[90] М. Вишик, П. Блехер, *Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях*, Матем. Сборник **86(128)** (1971), 3, 446–494.

[91] М. Вишик, П. Блехер, *Дифференциальные и псевдодифференциальные операторы с бесконечным числом независимых переменных и их приложения*, *Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа*, 53–61, Наука, Москва (1972).

[92] М. Вишик, А. Марченко, *Краевые задачи для эллиптических и параболических операторов второго порядка на бесконечномерных многообразиях с краем*, Матем. Сборник **90(132)** (1973), 3, 331–371.

[93] М. Вишик, *Фундаментальные решения бесконечномерных эллиптических операторов любого порядка с постоянными коэффициентами*, Докл. Акад. Наук **208** (1973), 4, 764–768.

[94] M. I. Vishik, *Les opérateurs différentiels et pseudo-différentiels à une infinité de variables, les problèmes elliptiques et paraboliques*, *Colloque International CNRS sur les Équations aux Dérivées Partielles Linéaires (Univ. Paris-Sud, Orsay, 1972)*, 342–362. Astérisque, 2 et 3, Soc. Math. France, Paris (1973).

[95] М. Вишик, А. Фурсиков, *Аналитические первые интегралы нелинейных параболических уравнений и их приложения*, Матем. Сборник **92(134)** (1973), 3(11), 347–377.

[96] М. Вишик, А. Фурсиков, *Аналитические первые интегралы квазилинейных параболических уравнений*, Вестник МГУ, сер. матем., мех. **29** (1974), 1, 45–54.

[97] М. Вишик, А. Марченко, *Краевые задачи для эллиптических и параболических операторов второго порядка на бесконечномерных многообразиях с краем*, *Материалы всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы*, 50–61, Ереван (1974).

[98] М. Вишик, А. Фурсиков, *Аналитические первые интегралы нелинейных параболических уравнений и их приложения*, *Материалы всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям*, 257–266, Ереван (1974).

[99] М. Вишик, А. Фурсиков, *Аналитические первые интегралы нелинейных параболических в смысле И.Г. Петровского систем дифференциальных уравнений и их приложения*, Усп. Матем. Наук **29** (1974), 2(176), 123–153.

[100] М. Вишик, А. Фурсиков, *Асимптотическое разложение моментных функций решений нелинейных параболических уравнений*, Матем. Сборник **95(137)** (1974), 14(12), 588–605, 632.

[101] М. Вишик, А. Фурсиков, *Некоторые вопросы теории нелинейных эллиптических и параболических уравнений*, Матем. Сборник **94(136)** (1974), 2(6), 300–334.

[102] М. Вишик, А. Фурсиков, *Аналитические первые интегралы уравнения Бюргерса, системы Навье–Стокса и их приложения*, Институт проблем механики АН СССР **35** (1974), 3–62.

[103] M. Vishik, *Analytic solutions of equations with variational derivatives, and their applications*, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, BC, 1974), Vol. 2*, 281–290, Canad. Math. Congress, Montreal, Que. (1975).

[104] M. Vishik, *Intégrales premières analytiques des équations différentielles paraboliques non linéaires et du système des équations de Navier–Stokes. Applications à la théorie des solutions statistiques et à d'autres problèmes*, Séminaire Jean Leray (1974-1975), 1, 1–33.

[105] М. Вишик, А. Фурсиков, *Задача Коши для нелинейных уравнений типа уравнения Шрёдингера*, Матем. Сборник **96(138)** (1975), 3, 458–470.

[106] М. Вишик, А. Фурсиков, *Аналитические первые интегралы нелинейных параболических уравнений и их приложения*, Усп. Матем. Наук **30** (1975), 2(182), 261–262.

[107] М. Вишик, *Задача Коши для уравнения Хопфа, соответствующего квазилинейному параболическому уравнению*, Докл. Акад. Наук **224** (1975), 1, 23–26.

[108] М. Вишик, А. Фурсиков, *Задача Коши для уравнения Хопфа, соответствующего параболическим уравнениям. Статистические решения и моментные функции*, Докл. Акад. Наук **227** (1976), 5, 1041–1044.

[109] М. Вишик, А. Фурсиков, *Уравнение Хопфа, статистические решения, моментные функции, соответствующие системе уравнений Навье–Стокса и уравнению Бюргерса*, Институт проблем механики АН СССР **66** (1976), 3–68.

[110] М. Вишик, *Аналитические решения уравнения Хопфа, соответствующего квазилинейным параболическим уравнениям или системе Навье–Стокса*, *Задачи механики и математической физики*, 69–97, Наука, Москва (1976).

[111] М. Вишик, А. Фурсиков, *Однородные статистические решения системы Навье–Стокса*, Усп. Матем. Наук **32** (1977), 5(197), 179–180.

[112] M. Vishik, A. Fursikov, *L'équation de Hopf, les solutions statistiques, les moments correspondants aux systèmes des équations paraboliques quasilinéaires*, J. Math. Pures Appl. **56** (1977), 1, 85–122.

[113] М. Вишик, А. Комеч, *Бесконечномерные параболические уравнения, связанные со стохастическими уравнениями в частных производных*, Докл. Акад. Наук **233** (1977), 5, 769–772.

[114] M. I. Vishik, A. V. Fursikov, *Solutions statistiques homogènes des systèmes differentiels paraboliques et du système de Navier–Stokes*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **4** (1977), 3, 531–576.

[115] М. Вишик, А. Комеч, *О прямом уравнении Колмогорова, соответствующем стохастическим параболическим уравнениям и системе Навье–Стокса*, Вторая Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике (1977), 80–81.

[116] М. Вишик, А. Фурсиков, *Однородные статистические решения системы Навье–Стокса*, Вторая Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике (1977), 82–83.

[117] М. Вишик, А. Фурсиков, *Однородные статистические решения параболических систем дифференциальных уравнений и системы уравнений Навье–Стокса*, Институт проблем механики АН СССР **88** (1977), 3–57.

[118] П. Александров, А. Бицадзе, М. Вишик, О. Олейник, *Илья Нестерович Векуа*, Усп. Матем. Наук **32** (1977), 2(194), 3–19.

[119] М. Вишик, *Аналитические решения уравнения Хопфа, статистические решения, моментные функции, соответствующие квазилинейным параболическим уравнениям*, *Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвящённой 75-летию со дня рождения академика И.Г. Петровского*, 71–74, МГУ, Москва (1978).

[120] М. Вишик, А. Комеч, *О разрешимости задачи Коши для уравнения Хопфа, соответствующего нелинейному гиперболическому уравнению*, Труды семинара им. И.Г. Петровского **3** (1978), 19–42.

[121] М. Вишик, А. Комеч, *О задаче Коши для бесконечномерных параболических дифференциальных уравнений второго порядка*, Труды семинара им. И.Г. Петровского **4** (1978), 3–31.

[122] М. Вишик, А. Комеч, *О разрешимости задачи Коши для прямого уравнения Колмогорова, соответствующего стохастическому уравнению типа Навье–Стокса*, *Комплексный анализ и его приложения*, 126–136, Наука, Москва (1978).

[123] М. Вишик, А. Фурсиков, *Однородные по x пространственно-временные статистические решения системы Навье–Стокса и индивидуальные решения с бесконечной энергией*, Докл. Акад. Наук **239** (1978), 5, 1025–1028.

[124] М. Вишик, А. Фурсиков, *Трансляционно однородные статистические решения и индивидуальные решения с бесконечной энергией системы уравнений Навье–Стокса*, Сиб. мат. журн. **19** (1978), 5, 1005–1031.

[125] М. Вишик, А. Комеч, А. Фурсиков, *Homogeneous stochastic solutions of the Navier–Stokes equations*, *International Symposium on Stochastic Differential Equations (Vilnius, August 28 – September 2, 1978)*, 114–117, Inst. Math. and Cybernet. Acad. Sci. Lithuanian SSR, Vilnius (1978).

[126] М. Вишик, А. Комеч, А. Фурсиков, *Однородные по x пространственно-временные статистические решения и индивидуальные решения с неограниченной энергией системы Навье–Стокса*, Усп. Матем. Наук **33** (1978), 3(201), 133–134.

[127] М. Вишик, А. Комеч, А. Фурсиков, *Некоторые математические задачи статистической гидромеханики*, Усп. Матем. Наук **34** (1979), 5(209), 135–210.

[128] М. Вишик, А. Комеч, *Трансляционно однородные решения стохастической системы Навье–Стокса*, Докл. Акад. Наук **246** (1979), 5, 1037–1041.

[129] П. Александров, М. Вишик, В. Диткин, А. Колмогоров, М. Лаврентьев, О. А. Олейник, *Лазарь Аронович Люстерник*, Усп. Матем. Наук **35** (1980), 6, 3–10.

[130] М. Вишик, А. Фурсиков, *Однородные по x статистические решения системы уравнений Навье–Стокса*, *Дифференциальные уравнения с частными производными*, 162–166, Наука, Новосибирск (1980).

[131] М. Вишик, А. Комеч, *Об однозначной разрешимости задачи Коши для прямого уравнения Колмогорова, соответствующего двумерной стохастической системе Навье–Стокса*, Усп. Матем. Наук **35** (1980), 4(214), 163–164.

[132] М. Вишик, А. Фурсиков, *Математические задачи статистической гидромеханики*, Наука, Москва (1980).

[133] М. Вишик, А. Комеч, *Однородные по x решения стохастической системы Навье–Стокса с белым шумом*, *Математические задачи статистической гидромеханики, Дополнение II*, 350–429, Наука, Москва (1980).

[134] М. Вишик, А. Комеч, *Stationary solutions of the stochastic Navier–Stokes equations*, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 103–113, Springer (1980).

[135] М. Вишик, *Прямое и обратное уравнения Колмогорова, соответствующие стохастической системе Навье–Стокса*, *Третья международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике*, 97–98, Вильнюс (1981).

[136] М. Вишик, А. Комеч, *Прямое и обратное уравнения Колмогорова, соответствующие стохастической системе Навье–Стокса*, Усп. Матем. Наук **36** (1981), 4(220), 236.

[137] М. Вишик, А. Комеч, *Слабые решения обратного уравнения Колмогорова, соответствующего статистической системе Навье–Стокса*, Усп. Матем. Наук **36** (1981), 3(219), 205–206.

[138] М. Вишик, А. Комеч, *О стохастической системе Навье–Стокса и соответствующих уравнениях Колмогорова*, Докл. Акад. Наук **257** (1981), 6, 1298–1301.

[139] М. Вишик, А. Комеч, *Индивидуальные и статистические решения двумерной системы Эйлера*, Докл. Акад. Наук **261** (1981), 4, 780–785.

[140] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы квазилинейных параболических уравнений*, Докл. Акад. Наук **264** (1982), 4, 780–784.

[141] М. Вишик, А. Комеч, *Обобщённые решения обратного уравнения Колмогорова, соответствующего стохастической системе Навье–Стокса*, Труды семинара им. И.Г. Петровского **8** (1982), 86–110.

[142] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы системы Навье–Стокса и параболических уравнений и оценка их размерности*, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*, vol. 14, 3–15, Наука, Ленинград (1982).

[143] А. Бабин, М. Вишик, *Существование и оценка размерности аттракторов квазилинейных параболических уравнений и системы Навье–Стокса*, Усп. Матем. Наук **37** (1982), 3(225), 173–174.

[144] М. Вишик, И. Данилюк, О. Олейник, И. Скрыпник, С. Собачев, *Ярослав Борисович Лопатинский*, Усп. Матем. Наук **37** (1982), 3(225), 167–169.

[145] А. Бабин, М. Вишик, *Регулярный аттрактор гиперболического уравнения*, Усп. Матем. Наук **37** (1982), 4(226), 89–90.

[146] М. Вишик, А. Комеч, *Статистические решения системы Навье–Стокса и системы Эйлера*, Успехи механики **5** (1982), 1(2), 65–120.

[147] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы градиентоподобных квазилинейных параболических уравнений*, Труды советско-чехословацкого семинара (1982), 38–43.

[148] М. Вишик, А. Комеч, *Сильные решения двумерной стохастической системы Навье–Стокса и со ответствующие уравнения Колмогорова*, Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen **1** (1982), 3, 23–52.

[149] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности*, Усп. Матем. Наук **38** (1983), 4(232), 133–187.

[150] А. Бабин, М. Вишик, *Оценки сверху и снизу размерности аттракторов эволюционных уравнений с частными производными*, Сиб. мат. журн. **24** (1983), 5, 15–30.

[151] А. Бабин, М. Вишик, *О размерности аттракторов системы Навье–Стокса и других эволюционных уравнений*, Докл. Акад. Наук **271** (1983), 6, 1289–1293.

[152] А. Бабин, М. Вишик, *Оценки сверху и снизу размерности максимального аттрактора двумерной системы Навье—Стокса*, Усп. Матем. Наук **38** (1983), 5(233), 162–163.

[153] А. Бабин, М. Вишик, *Regular attractors of semigroups and evolution equations*, J. Math. Pures Appl. **62** (1983), 4, 441–491.

[154] М. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Республиканская конференция по нелинейным задачам математической физики (1983), 26.

[155] М. Вишик, А. Комеч, *Об уравнениях Колмогорова, соответствующих двумерной стохастической системе Навье—Стокса*, Труды Моск. мат. общества **46** (1983), 3–43.

[156] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы параболических уравнений и системы Навье–Стокса и оценка их размерности*, *Общая теория граничных задач*, 14–25, Наукова думка, Киев (1983).

[157] М. Вишик, А. Комеч, *Задача Коши для уравнения Хопфа, Лиувилля и прямого и обратного уравнений Колмогорова*, *Н.Е. Кочин и развитие механики*, 202–218, Наука, Москва (1984).

[158] А. Бабин, М. Вишик, *Существование и структура* (E_1, E)*-аттракторов эволюционных уравнений*, Усп. Матем. Наук **39** (1984), 4(238), 118–119.

[159] A. Babin, M. Vishik, *Attracteurs maximaux dans les équations aux dérivées partielles*, *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France seminar, Vol. VII (Paris, 1983–1984)*, vol. 122 of *Res. Notes in Math.*, 1, 11–34, Pitman, Boston, MA (1985).

[160] А. Бабин, М. Вишик, *О стационарных кривых и неустойчивых инвариантных многообразиях в окрестности критических точек эволюционных уравнений, зависящих от параметра*, Докл. Акад. Наук **280** (1985), 1, 19–23.

[161] А. Бабин, М. Вишик, *Максимальные аттракторы полугрупп, соответствующих эволюционным дифференциальным уравнениям*, Матем. Сборник **126(168)** (1985), 3, 397–419.

[162] М. Вишик, А. Комеч, *Об оценке среднего квадрата разности скоростей для однородных статистических решений трехмерной системы Навье–Стокса*, Труды сем. им. И.Г. Петровского **11** (1985), 3–11.

[163] А. Бабин, М. Вишик, *О локальных неустойчивых множествах параболических и гиперболических уравнений*, Усп. Матем. Наук **40** (1985), 5(245), 200.

[164] М. Вишик, С. Куксин, *Фредгольмовы многообразия и эллиптические квазилинейные уравнения*, Усп. Матем. Наук **40** (1985), 5(245), 306–307.

[165] В. Арнольд, М. Вишик, И. Гельфанд, Ю. Егоров, А. Калашников, А. Колмогоров, С. Новиков, С. Соболев, *Ольга Арсеньевна Олейник*, Усп. Матем. Наук **40** (1985), 5(245), 279–283.

[166] М. Вишик, С. Куксин, *Квазилинейные эллиптические уравнения и фредгольмовы многообразия*, Вестник МГУ, сер. матем., мех. (1985), 6, 23–30.

[167] А. Бабин, М. Вишик, *Максимальные аттракторы полугрупп, обладающих функцией Ляпунова*, *Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды Международной конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными)*, 39–46, Наука, Новосибирск (1986).

[168] М. Вишик, С. Куксин, *Возмущения квазилинейных эллиптических уравнений и фредгольмовы многообразия*, Матем. Сборник **130(172)** (1986), 2(6), 222–242.

[169] А. Бабин, М. Вишик, *Неустойчивые инвариантные множества полугрупп нелинейных операторов и их возмущения*, Усп. Матем. Наук **41** (1986), 4(250), 3–34.

[170] М. Вишик, С. Куксин, *О невырожденных решениях квазилинейных эллиптических уравнений*, Усп. Матем. Наук **41** (1986), 4(250), 188.

[171] А. Бабин, М. Вишик, *Функция Ляпунова возмущённых эволюционных уравнений*, Усп. Матем. Наук **41** (1986), 5(251), 210–211.

[172] М. Вишик, *Об аттракторах и неустойчивых инвариантных множествах эволюционных уравнений, зависящих от параметра*, IX Советско-чехословацкое совещание: Применение функциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики (1986), 27.

[173] M. Vishik, A. Fursikov, *Mathematische Probleme der statistischen Hydromechanik*, vol. 41 of *Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig (1986).

[174] А. Бабин, М. Вишик, *Регулярные аттракторы квазилинейных параболических и гиперболических уравнений*, *Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения. Труды Всесоюзного симпозиума в Тбилиси*, 19–26, Тбилисский университет, Тбилиси (1986).

[175] А. Бабин, М. Вишик, *О неустойчивых множествах эволюционных уравнений в окрестности критических точек стационарной кривой*, Изв. АН СССР, сер. мат. **51** (1987), 1, 44–78.

[176] А. Бабин, М. Вишик, *Об изменении индекса неустойчивости на стационарных кривых эллиптических уравнений, зависящих от параметра*, Труды семинара им. И.Г. Петровского **12** (1987), 47–58.

[177] А. Бабин, М. Вишик, *Устойчивость по Ляпунову по модулю аттрактора*, Усп. Матем. Наук **42** (1987), 3(255), 222–223.

[178] А. Бабин, М. Вишик, *О поведении при $t \to +\infty$ решений нелинейных уравнений, зависящих от параметра*, Докл. Акад. Наук **295** (1987), 4, 786–790.

[179] А. Бабин, М. Вишик, *Равномерные асимптотики при всех $t > 0$ решений возмущённых эволюционных уравнений*, Усп. Матем. Наук **42** (1987), 4(256), 153–154.

[180] А. Бабин, М. Вишик, *Асимптотическое поведение при всех $t > 0$ решений нелинейных уравнений*, Тезисы докладов VI Республиканской конференции “Нелинейные задачи математической физики” (1987), 9.

[181] А. Бабин, М. Вишик, *Равномерная асимптотика решений сингулярно возмущённых эволюционных уравнений*, Усп. Матем. Наук **42** (1987), 5(257), 231–232.

[182] А. Бабин, М. Вишик, *Равномерная спектральная асимптотика решений квазилинейных эволюционных уравнений, содержащих малый параметр*, *Труды Всесоюзного симпозиума по современным проблемам математической физики*, vol. 1, 143–150, Тбилисский университет, Тбилиси (1987).

[183] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы параболических и гиперболических уравнений. Характер их компактности и притяжения к ним*, Вестник МГУ, сер. матем., мех. (1988), 3, 70–72.

[184] А. Бабин, М. Вишик, *Равномерная спектральная асимптотика решений эволюционных уравнений*, Усп. Матем. Наук **43** (1988), 4(262), 176–177.

[185] А. Бабин, М. Вишик, *Спектральное и стабилизированное асимптотическое поведение решений нелинейных эволюционных уравнений*, Усп. Матем. Наук **43** (1988), 5(263), 99–132.

[186] M. Vishik, A. Fursikov, *Mathematical problems of statistical hydromechanics*, vol. 9 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1988).

[187] A. Komech, M. Vishik, *Periodic approximations of homogeneous measures*, *Mathematical problems of statistical hydromechanics*, 534–562, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1988).

[188] А. Бабин, М. Вишик, *Полугруппы, зависящие от параметра, их аттракторы и асимптотическое поведение*, *Глобальный анализ и нелинейные уравнения*, 3–21, Воронежский университет, Воронеж (1988).

[189] А. Бабин, М. Вишик, *Uniform finite-parameter asymptotics of solutions of nonlinear evolution equations*, *Contribution of the Conference in the honour of J.-L. Lions*, 1–10, Paris (1988).

[190] M. Vishik, *Attractors and global behaviour of solutions of a dissipative hyperbolic equation depending on a parameter*, *Proceedings of the Conference in the honour of J.-L. Lions*, Paris (1988).

[191] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, Москва (1989).

[192] А. Бабин, М. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений в неограниченных областях*, Усп. Матем. Наук **44** (1989), 4(268), 228.

[193] A. Babin, M. Vishik, *Uniform finite-parameter asymptotics of solutions f nonlinear evolutionary equations*, J. Math. Pures Appl. **68** (1989), 4, 399–455.

[194] М. Вишик, *Некоторые нерешенные задачи дифференциальных уравнений и математической физики – Задачи М.И. Вишика*, Усп. Матем. Наук **44** (1989), 4(268), 192–193.

[195] М. Вишик, В. Скворцов, *Стабилизированная асимптотика решений параболических систем, содержащих малый параметр*, Усп. Матем. Наук **44** (1990), 4(274), 134–135.

[196] М. Вишик, *Асимптотическое поведение при всех $t > 0$ решений сингулярно-возмущённых параболических систем уравнений*, *Тезисы докладов семинара-совещания по дифференциальным уравнениям и математической физике*, 11–12, Институт математики и механики АН Азербайджанской ССР, Баку (1990).

[197] A. Babin, M. Vishik, *Semigroups dependent on a parameter, their attractors and asymptotic behaviour [in global analysis and nonlinear equations (Russian), 3–21, Voronezh. Gos. Univ., Voronezh, 1988]*, *Global analysis—studies and applications, IV*, vol. 1453 of *Lecture Notes in Math.*, 1–19, Springer, Berlin (1990).

[198] A. Babin, M. Vishik, *Attractors of partial differential evolution equations in an unbounded domain*, *New directions in differential equations and dynamical systems. Volume dedicated to J.K. Hale of the occasion of his 60th Birthday*, vol. 116a, 39–61, Royal Society of Edinburgh (1991).

[199] М. Вишик, М. Скворцов, *Асимптотика траекторий, лежащих на аттракторе сингулярно возмущённого параболического уравнения*, Вестник МГУ, сер. матем., мех. (1991), 6, 11–16.

[200] M. Vishik, *Uniform finite-parameter asymptotics of solutions of nonlinear evolution equations*, *Frontiers in pure and applied mathematics. A collection of papers dedicated to Jaques-Louis Lions on the occasion of his sixtieth birthday*, 21–30, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1991).

[201] М. Вишик, М. Скворцов, *Асимптотика элементов аттракторов, соответствующих сингулярно возмущённых параболическим уравнениям*, Матем. Сборник **182** (1991), 12, 1769–1785.

[202] М. Вишик, М. Скворцов, *Асимптотика траекторий, лежащих на аттракторе сингулярно-возмущённого эволюционного уравнения*, Усп. Матем. Наук **46** (1991), 6(282), 164–165.

[203] V. Chepyshov, M. Vishik, *Non-autonomous Infinite-dimensional Dynamical Systems and Their Attractors*, vol. LiTH-MAT-R-92-16 of *LiTH MAT R.: Matematiska Institutionen*, Linköping University, Department of Mathematics, Linköping (1992).

[204] M. Skvortsov, M. Vishik, *The asymptotic behaviour of trajectories of singularly perturbed dynamical systems*, *Differential equations and its applications (Budapest, 1991)*, vol. 62 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 289–306, North-Holland, Amsterdam (1991).

[205] A. Babin, M. Vishik, *Attractors of evolutionary partial differential equations*, vol. 25 of *Studies in Mathematics and its Applications*, North-Holland, Amsterdam (1992).

[206] M. Skvortsov, M. Vishik, *Attractors of singularly perturbed parabolic equations and asymptotic behaviour of their elements*, Advances in Soviet mathematics **10** (1992), 129–148.

[207] M. Skvortsov, M. Vishik, *The asymptotics of solutions of reaction-diffusion equations with small parameter*, Advances in Soviet mathematics **10** (1992), 149–172.

[208] M. Vishik, *Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations*, Cambridge University Press (1992).

[209] M. Vishik, V. Skvortzov, *Stabilized asymptotics of solutions to reaction-diffusion type system equations with small parameter*, *Partial differential equations and related subjects (Trento, 1990)*, vol. 269 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, 244–256, Longman Sci. Tech., Harlow (1992).

[210] М. Вишик, В. Чепыжов, *Аттракторы неавтономных динамических систем и оценка их размерности*, Матем. зам. **51** (1992), 6, 141–143.

[211] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Non-autonomous evolution equations with almost periodic symbols*, *Proceedings of the Second International Conference on Partial Differential Equations (Italian) (Milan, 1992)*, vol. 62, 185–213 (1992).

[212] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Nonautonomous evolution equations and their attractors*, Russ. J. Math. Phys. **1** (1993), 2, 165–190.

[213] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Attractors for nonautonomous evolution equations with almost periodic symbols*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **316** (1993), 4, 357–361.

[214] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Families of semiprocesses and their attractors*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **316** (1993), 5, 441–445.

[215] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Dimension estimates for attractors and for kernel sections of nonautonomous evolution equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317** (1993), 4, 365–370.

[216] М. Вишик, В. Скворцов, *Стабилизированная асимптотика решений систем уравнений типа "реакция-диффузия содержащих малый параметр*, Труды семинара им. И.Г. Петровского **17** (1993), 1–26.

[217] V. Chepyzhov, M. Vishik, *A hausdorff dimension estimate for kernel sections of non-autonomous evolution equations*, Indiana Univ. Math. Jour. **42** (1993), 3, 1057–1076.

[218] М. Вишик, В. Чепыжов, *Оценка хаусдорфовой размерности сечений ядер неавтономных уравнений математической физики*, Усп. Матем. Наук **48** (1993), 4(292), 178–179.

[219] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension*, J. Math. Pures Appl. **73** (1994), 3, 279–333.

[220] М. Вишик, В. Чепыжов, *О размерности равномерного аттрактора неавтономной системы Навье–Стокса*, Усп. Матем. Наук **49** (1994), 4(298), 116.

[221] М. Вишик, А. Горицкий, *Интегральные многообразия неавтономной системы уравнений реакции-диффузии*, Усп. Матем. Наук **49** (1994), 4(298), 116.

[222] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Periodic processes and non-autonomous evolution equations with time-periodic terms*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Center **4** (1994), 1–17.

[223] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Attractors of non-autonomous partial differential equations and their dimension*, Tatra Mountains Mathematical Publications **4** (1994), 221–234.

[224] М. Вишик, В. Чепыжов, *Аттракторы периодических процессов и оценки их размерности*, Матем. зам. **57** (1995), 2, 181–202.

[225] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Attractors of non-autonomous evolution equations with translation-compact symbols*, Operator Theory: Advances and Applications **78** (1995), 49–60.

[226] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Non-autonomous evolutionary equations with translation-compact symbols and their attractors*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 2, 153–158.

[227] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Trajectory attractors for evolution equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 10, 1309–1314.

[228] М. Вишик, В. Чепыжов, *Аттракторы неавтономных эволюционных уравнений математической физики с трансляционно-компактными символами*, Усп. Матем. Наук **50** (1995), 4(304), 146–147.

[229] М. Вишик, В. Чепыжов, *Аттрактор неавтономной системы Навье–Стокса в трехмерном пространстве*, Усп. Матем. Наук **50** (1995), 4(304), 151.

[230] М. Вишик, *Поля направлений и соответствующие им траектории*, Соросовский образовательный журнал **2** (1996), 111–117.

[231] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Trajectory attractors for reaction-diffusion systems*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Center **7** (1996), 1, 1–28.

[232] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Trajectory attractors for 2D Navier–Stokes system and some generalizations*, Max-Plank-Institut für Mathematik **MPI 96-134** (1996), 1–27.

[233] М. Вишик, В. Чепыжов, *Траекторные аттракторы эволюционных уравнений без однозначной разрешимости задачи Коши*, Вестник МГУ, сер. матем., мех. (1996), 6, 27–29.

[234] М. Вишик, С. Зелик, *Траекторный аттрактор нелинейной эллиптической системы в неограниченной области*, Матем. Сборник **187** (1996), 12, 21–56.

[235] М. Вишик, *Траекторные аттракторы эволюционных уравнений математической физики*, Усп. Матем. Наук **51** (1996), 4(311), 158.

[236] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Trajectory attractors for 2D Navier–Stokes systems and some generalizations*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Center **8** (1996), 217–243.

[237] A. Goritsky, M. Vishik, *Integral manifolds for nonautonomous equations*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5) **21** (1997), 109–146.

[238] M. Vishik, *Non-autonomous evolution equations and their trajectory attractors*, *Differential equations, asymptotic analysis, and mathematical physics (Potsdam, 1996)*, vol. 100 of *Math. Res.*, 392–400, Akademie Verlag, Berlin (1997).

[239] М. Вишик, А. Горицкий, *Локальные интегральные многообразия неавтономного параболического уравнения*, Труды семинара им. И.Г. Петровского **19** (1996), 304–322.

[240] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Evolution equations and their trajectory attractors*, J. Math. Pures Appl. **76** (1997), 10, 913–964.

[241] М. Вишик, В. Чепыжов, *Колмогоровская эпсилон-энтропия аттракторов систем реакции-диффузии*, Матем. Сборник **189** (1998), 2, 81–110.

[242] V. Pata, G. Prouse, M. Vishik, *Traveling waves of dissipative nonautonomous hyperbolic equations in a strip*, Advances in Differential Equations **3** (1998), 2, 249–270.

[243] B. Fiedler, A. Scheel, M. Vishik, *Large patterns of elliptic systems in infinite cylinders*, J. Math. Pures Appl. **77** (1998), 879–907.

[244] М. Вишик, *Аттракторы и их колмогоровская эпсилон-энтропия*, Усп. Матем. Наук **53** (1998), 4(322), 171.

[245] B.-W. Schulze, M. Vishik, I. Witt, S. Zelik, *The trajectory attractor for a nonlinear elliptic system in a cylindrical domain with piecewise smooth boundary*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5) **23** (1999), 125–166.

[246] М. Вишик, С. Зелик, *Регулярный аттрактор нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области*, Матем. Сборник **190** (1999), 6, 23–58.

[247] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Perturbation of trajectory attractors for dissipative hyperbolic equations*, Operator Theory: Advances and Applications **110** (1999), 33–54.

[248] M. Vishik, *Non-autonomous evolution equations and their attractors*, *International Conference on Differential Equations, Vol. 1, 2 (Berlin, 1999)*, 690–703, World Sci. Publ., River Edge, NJ (2000).

[249] M. Vishik, *Attractors for differential equations with rapidly oscillating coefficients*, Colloque. Actes des journées “Jeunes numériciens” en l’honneur du 60ème anniversaire du professeur Roger Temam. 9 et 10 Mars 2000 (2000), 119–130.

[250] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Averaging of trajectory attractors of evolution equations with rapidly oscillating terms*, Max-Plank-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften **49** (2000), 1–38.

[251] B. Fiedler, M. Vishik, *Quantitative homogenization of global attractors for reaction-diffusion systems with rapidly oscillating terms*, Freie Universitat **32/00** (2000), 1–36.

[252] М. Вишик, В. Чепыжов, *Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами*, Матем. Сборник **192** (2001), 1, 13–50.

[253] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Global attractor and its perturbations for a dissipative hyperbolic equation*, Russ. J. Math. Phys. **8** (2001), 3, 311–330.

[254] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Averaging of trajectory attractors of evolution equations with rapidly oscillating coefficients*, Funct. Diff. Equations **8** (2001), 1–2, 123–140.

[255] B. Fiedler, M. Vishik, *Quantitative homogenization of analytic semigroups and reaction-diffusion equations with diophantine spatial frequencies*, Adv. Diff. Eq. **6** (2001), 11, 1377–1408.

[256] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, American Mathematical Society, Providence, RI (2002).

[257] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Non-autonomous 2D Navier–Stokes system with a simple global attractor and some averaging problems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **8** (2002), 467–487.

[258] М. Вишик, В. Чепыжов, *Траекторный и глобальный аттракторы 3D системы Навье–Стокса*, Матем. зам. **71** (2002), 2, 194–213.

[259] М. Вишик, Б. Фидлер, *Количественное усреднение глобальных аттракторов гиперболических волновых уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами*, Усп. Матем. Наук **57** (2002), 4, 75–94.

[260] М. Вишик, В. Чепыжов, *Колмогоровская эпсилон-энтропия в задачах о глобальных аттракторах эволюционных уравнений математической физики*, Проблемы передачи информации **39** (2003), 1, 4–23.

[261] М. Вишик, В. Чепыжов, *Аппроксимация траекторий, лежащих на глобальном аттракторе гиперболического уравнения с быстро осциллирующей по времени внешней силой*, Матем. Сборник **194** (2003), 9, 3–30.

[262] V. Chepyzhov, M. Vishik, W. Wendland, *On non-autonomous sine-Gordon type equations with a simple global attractor and some averaging*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **12** (2005), 1, 27–38.

[263] V. Chepyzhov, A. Goritsky, M. Vishik, *Integral manifolds and attractors with exponential rate for nonautonomous hyperbolic equations with dissipation*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), 1, 17–79.

[264] М. Вишик, Э. Тити, В. Чепыжов, *Аппроксимация траекторного аттрактора 3D системы Навье–Стокса альфа-моделью Лерэ*, Докл. Акад. Наук **400** (2005), 5, 583–586.

[265] М. Вишик, В. Чепыжов, *Траекторный аттрактор неавтономного уравнения Гинзбурга–Ландау*, Докл. Акад. Наук **402** (2005), 2, 159–162.

[266] М. Вишик, В. Чепыжов, *Неавтономное уравнение Гинзбурга–Ландау и его аттракторы*, Матем. Сборник **196** (2005), 6, 17–42.

[267] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Global attractors for non-autonomous Ginzburg–Landau equation with singularly oscillating terms*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5) **29** (2005), 123–148.

[268] М. Вишик, В. Чепыжов, *Аттракторы диссипативных гиперболических уравнений с сингулярно осциллирующими внешними силами*, Матем. зам. **79** (2006), 4, 522–545.

[269] V. Chepyzhov, E. Titi, M. Vishik, *On the convergence of solutions of the leray-alpha model to the trajectory attractor of the 3D Navier–Stokes system*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **17** (2007), 3, 481–500.

[270] М. Вишик, В. Чепыжов, *Глобальный аттрактор неавтономной двумерной системы Навье–Стокса с сингулярно осциллирующей внешней силой*, Докл. Акад. Наук **413** (2007), 1, 301–304.

[271] М. Вишик, В. Чепыжов, *Траекторный аттрактор 2D уравнений Эйлера с диссипацией и его связь с системой Навье–Стокса при исчезании вязкости*, Докл. Акад. Наук **417** (2007), 3, 303–307.

[272] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Non-autonomous 2D Navier–Stokes system with singularly oscillating external force and its global attractor*, Journal of Dynamics and Differential Equations **19** (2007), 3, 655–684.

[273] М. Вишик, Э. Тити, В. Чепыжов, *О сходимости траекторных аттракторов трехмерной α-модели Навье–Стокса при $\alpha \to 0$*, Матем. Сборник **198** (2007), 12, 3–36.

[274] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Trajectory attractors for dissipative 2D Euler and Navier–Stokes equations*, Russ. J. Math. Phys. **15** (2008), 2, 156–170.

[275] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Attractors for nonautonomous Navier-Stokes system and other partial differential equations*, *Instability in models connected with fluid flows. I*, vol. 6 of *Int. Math. Ser.*, 135–265, Springer, New York (2008).

[276] М. Вишик, В. Пата, В. Чепыжов, *Усреднение по времени глобальных аттракторов неавтономных волновых уравнений с сингулярно осциллирующими внешними силами*, Докл. Акад. Наук **422** (2008), 2, 164–168.

[277] V. Chepyzhov, V. Pata, M. Vishik, *Averaging of nonautonomous damped wave equations with singularly oscillating external forces*, J. Math. Pures Appl. **90** (2008), 469–491.

[278] М. Вишик, В. Чепыжов, *Траекторный аттрактор системы реакции диффузии, содержащей малый параметр диффузии*, Докл. Акад. Наук **425** (2009), 4, 443–446.

[279] М. Вишик, В. Чепыжов, *О траекторных аттракторах систем реакции-диффузии с малой диффузией*, Матем. Сборник **200** (2009), 4, 3–30.

[280] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Trajectory attractor for reaction-diffusion system with a series of zero diffusion coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **16** (2009), 2, 208–227.

[281] V. Chepyzhov, V. Pata, M. Vishik, *Averaging of 2D Navier–Stokes equations with singularly oscillating forces*, Nonlinearity **22** (2009), 2, 351–370.

[282] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Trajectory attractor for reaction-diffusion system with diffusion coefficient vanishing in time*, Discrete and Continuous Dynamical Systems A **27** (2010), 4, 1493–1509.

[283] М. Вишик, В. Чепыжов, *Траекторный аттрактор системы двух уравнений реакции-диффузии с коэффициентом диффузии $\delta(t) \to 0+$ при $t \to +\infty$*, Докл. Акад. Наук **431** (2010), 2, 157–161.

[284] М. Вишик, С. Зелик, В. Чепыжов, *Сильный траекторный аттрактор диссипативной системы реакции-диффузии*, Докл. Акад. Наук **435** (2010), 2, 155–159.

[285] V. Chepyzhov, M. Vishik, *Strong trajectory attractors for dissipative Euler equations*, J. Math. Pures Appl. **96** (2011), 395–407.

[286] М. Вишик, В. Чепыжов, *Траекторные аттракторы уравнений математической физики*, Усп. Матем. Наук **66** (2011), 4, 3–102.

[287] М. Вишик, С. Зелик, В. Чепыжов, *Регулярные аттракторы и их неавтономные возмущения*, Матем. Сборник **204** (2013), 1, 3–46.