У15.1

Заметим, что ни один интервал не может лежать внутри другого. Проделаем следующую операцию: каждый интервал заменим на этот же интервал, но уменьшенный в 4 раза относительно его середины. Покажем, что теперь интервалы не пересекаются. Предположим противное: есть два пересекающихся интервала (a,b) и (c,d) (без ограничения общности $a < c$ и $b - a > d - c$), то есть $b > c$. Тогда если мы обратно растянем интервалы в 4 раза, то получим интервалы $(\frac{a+b}{2} + 2a - 2b, \frac{a+b}{2} + 2b - 2a) = (\frac{5a-3b}{2}, \frac{5b-3a}{2})$ и $(\frac{5c-3d}{2}, \frac{5d-3c}{2})$, при этом $\frac{5a-3b}{2} < \frac{5c-3d}{2}$, так как $3a - 3b < 3c - 3d$ и $a < c$, а также $\frac{5b-3a}{2} > \frac{c+d}{2}$, так как $d < b + c - a \implies c + d < b - a + 2c < 3b - a < 5b - 3a$. Таким образом, левый интервал целиком содержит левую половину правого интервала - противоречие.

У15.2

Заметим, что каждую точку прямой покрывает не более двух отрезков (в частности каждую рациональную точку покрывает не более двух отрезков). Значит, можно построить сюръекцию из подмножества $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ (второе множество означает копию рациональных чисел, это нужно чтобы они не пересекались) по такому правилу: если рациональное число q покрывает ровно один отрезок, то сопоставим числу $q \in \mathbb{Q}$ этот отрезок, если же рациональное число r покрывает ровно два отрезка, то сопоставим числу $r \in \mathbb{Q}$ первый отрезок, а числу $r' \in \mathbb{Q}'$ другой отрезок. Это сюръекция, так как каждый отрезок содержит хотя бы одну рациональную точку. Таким образом, множество отрезков не более чем счетно.

У16.1

Ответ: да

Для любого $a_i \in A$ существует счетное множество X_i такое, что $\forall x_i \in X_i\ x_i + a_i \in A$ (т.к. A - счетное). Положим $X = \cup_{i=0}^{\infty} X_i$ - оно счетное (как счетное объединение счетных).

Тогда если $k \in X$, то $\{k + a \mid a \in A\} \cap A \neq \varnothing$, а если $k \notin X$, то $\{k + a \mid a \in A\} \cap A = \varnothing$ (так как для всех a_i выполняется $k + a_i \notin A$). При этом найдется $k \notin X$, так как X - счетное, а $\mathbb{R}$ - континуально.

У16.2

Непрерывную функцию достаточно задать на рациональных числах. Это следует из определения непрерывности по Гейне (для произвольного иррационального числа a возьмем последовательность рациональных чисел a_n, сходящуюся к a, тогда $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$) При этом заметим, что функций $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ континуум - $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

У16.3

Покажем, что $2^{\mathbb{R}} \times 2^{\mathbb{R}}$ равномощно $2^{\mathbb{R}\cup\mathbb{R}'}$ ($\mathbb{R}'$ обозначает копию $\mathbb{R}$, это нужно, чтобы множества не пересекались)

$2^{\mathbb{R}\cup\mathbb{R}'}$ - это множество тотальных функций из $\mathbb{R}\cup\mathbb{R}'$ в $\{0,1\}$. Разобъем область определения функции на две части: сужение на $\mathbb{R}$ и сужение на $\mathbb{R}'$ (т.е. в одной части рассматриваем только стрелки, идущие из $\mathbb{R}$ в $\{0,1\}$, а в другой части - стрелки, идущие из $\mathbb{R}'$ в $\{0,1\}$). Тогда каждой функции из $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}'$ в $\{0,1\}$ однозначно соответствуют пара функций из $\mathbb{R}'$ в $\{0,1\}$ и из $\mathbb{R}'$ в $\{0,1\}$. Таким образом, $|2^{\mathbb{R}} \times 2^{\mathbb{R}}| = |2^{\mathbb{R}\cup\mathbb{R}'}|$. Но $|\mathbb{R}\cup\mathbb{R}'| = |\mathbb{R}| \implies |2^{\mathbb{R}\cup\mathbb{R}'}| = |2^{\mathbb{R}}|$ и мы доказали требуемое.

У16.4

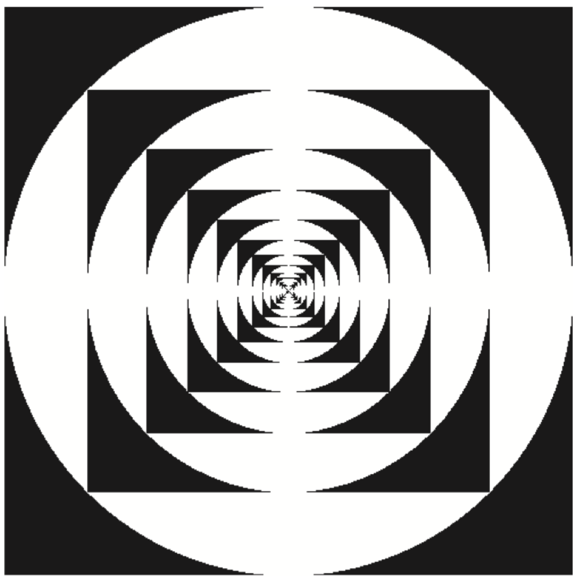


Рис. 1. Раскраска

Пояснения: Зафиксируем произвольныи квадрат, впишем в него круг и раскрасим в черныи цвет все точки квадрата, лежащие вне круга. Затем впишем в полученныи круг квадрат со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата, и раскрасим в белыи цвет все точки круга, лежащие вне вписанного квадрата. Точки вписанного квадрата раскрасим по тому же правилу, что и точки исходного квадрата и т. д. При этом мы каждыи раз будем считать, что граница квадрата покрашена черным, за исключением четырех точек касания вписанного в квадрат круга, а граница круга — белым, за исключением четырех вершин квадрата, вписанного в этот круг. Центр квадрата раскрасим в черныи цвет. Очевидно, что мы раскрасили все точки исходного квадрата

У16.5

$A \cup B$ имеет мощность континуум, поэтому оно равномощно плоскости. То есть теперь нужно доказать, что если плоскость разбита две части A и B, то хотя бы одна из этих частей имеет мощность континуум (можно считать, что части непересаюющиеся, иначе выбросим из A их пересечение).

Теорема. Если множество $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ разбито на непересекающиеся части $B_1, \ldots, B_n$, то наидется такое i, при котором мощность B_i не меньше мощности A_i.

Доказательство: рассмотрим проекцию множества $B_i \subset A_1 \times \cdots \times A_n$ на A_i. Если хотя бы при одном i она покрывает A_i полностью, то все доказано. Если нет, выберем для каждого i непокрытую точку x_i. Набор $(x_1,...,x_n)$ не входит ни в одно из множеств B_i, что противоречит предположению.

Из этой теоремы следует наша задача: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ разбито на два множества A и B, поэтому хотя бы одно из них имеет мощность не меньше мощности $\mathbb{R}$, то есть континуума. При этом мощность объединения не может быть меньше мощности одного из множеств, поэтому выполняется равенство.

У17.3

Лемма 1. $R(r,\ s) \leqslant R(r-1,\ s) + R(r,\ s-1)$.

Доказательство. Докажем с помощью метода математической индукции по $r+s$.

База индукции. $R(n,\ 1) = R(1,\ n) = 1$, так как 1-вершинный граф можно считать полным графом любого цвета.

Индукционный переход. Пусть $r > 1$ и $s > 1$. Рассмотрим полный чёрно-белый граф из $R(r-1,\ s) + R(r,\ s-1)$ вершин. Возьмём произвольную вершину v и обозначим через M и N множества инцидентные v в чёрном и белом подграфе соответственно. Так как в графе $R(r-1,\ s) + R(r,\ s-1) = |M| + |N| + 1$ вершин, согласно принципу Дирихле (комбинаторика), либо $|M| \geqslant R(r-1,\ s)$, либо $|N| \geqslant R(r,\ s-1)$.

Пусть $|M| \geqslant R(r-1,\ s)$. Тогда либо в M (и следовательно во всём графе) есть белый K_s, что завершает доказательство, либо в M есть чёрный K_{r-1}, который вместе с v образует чёрный K_r. Случай $|N| \geqslant R(r,\ s-1)$ рассматривается аналогично.

Замечание. Если $R(r-1,\ s)$ и $R(r,\ s-1)$ оба чётны, неравенство можно усилить:
$R(r,\ s) \leqslant R(r-1,\ s) + R(r,\ s-1) - 1$.

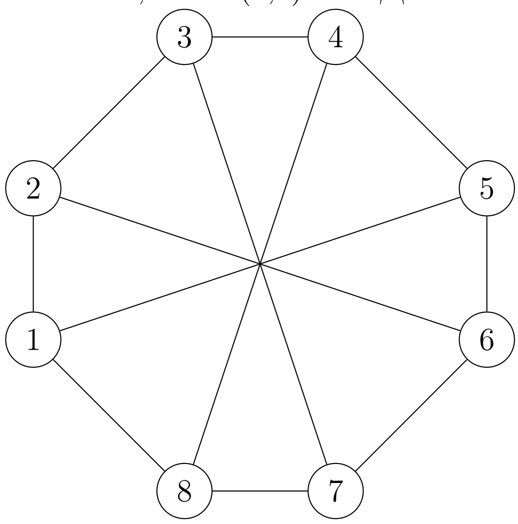
Доказательство. Предположим, $p = R(r-1,\ s)$ и $q = R(r,\ s-1)$ оба чётны. Положим $t = p + q - 1$ и рассмотрим чёрно-белый граф из t вершин. Если d_i степень i-й вершины в чёрном подграфе, то, согласно лемме о рукопожатиях, $\sum_{i=1}^{t} d_i$ — чётно. Поскольку t нечётно, должно существовать чётное d_i. Для определённости положим, что d_1 чётно. Обозначим через M и N вершины инцидентные вершине 1 в чёрном и белом подграфах соответственно. Тогда $|M| = d_1$ и $|N| = t - 1 - d_1$ оба чётны. Согласно принципу Дирихле (комбинаторика), либо $|M| \geqslant p - 1$, либо $N \geqslant q$. Так как $|M|$ чётно, а $p - 1$ нечётно, первое неравенство можно усилить, так что либо $|M| \geqslant p$, либо $|N| \geqslant q$.

Предположим $|M| \geqslant p = R(r-1,\ s)$. Тогда либо подграф, порождённый множеством M, содержит белый K_s и доказательство завершено, либо он содержит чёрный K_{r-1}, который вместе с вершиной 1 образует чёрный K_r. Случай $|N| \geqslant q = R(r,\ s-1)$ рассматривается аналогично.

У17.4

$R(3{,}3) = 6$ (такая задача была на семинаре, доказывается очень легко), $R(2{,}4) = 4$ (в графе есть клика размера 2, если есть хотя бы одно ребро). Тогда по доказанному в предыдущей задаче $R(3{,}4) \leqslant 6 + 4 - 1 = 9$

Покажем, что $R(3{,}4) > 8$. Для этого рассмотрим такой граф на 8 вершинах:



Нетрудно убедиться, что в этом графе нет клик размера 3 (треугольников) и независимых множеств размера 4 (проверяется несложным перебором).

У18.1

Рассмотрим произвольную вершину v. От этой вершины исходит 16 ребер, поэтому по принципу Дирихле найдутся хотя бы 6 ребер одного цвета (назовем этот цвет 1). Рассмотрим 6 вершин, в которые ведут ребра 1 цвета из v, и обозначим из за a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.
1) Если между какими-то из этих вершин есть ребро 1 цвета, то мы нашли одноцветный треугольник va_ia_j - победа.
2) Иначе между этими вершинами ребра только 2 и 3 цветов. По принципу Дирихле из вершины a_1 идет хотя бы 3 ребра одного цвета (без ограничения общности можно считать, что ребра a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4 цвета 2). Тогда если среди ребер a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4 есть ребра второго цвета, то нашелся одноцветный треугольник. Иначе эти ребра цвета 3 и тоже образуют одноцветный треугольник.

У18.2

Предположим, что граф можно правильно покрасить в 3 цвета. Тогда вершины можно разбить на три доли, внутри каждой доли ребер нет. Пусть в этих долях по a, b, c вершин соответственно ($a + b + c = 30$). Тогда всего ребер не больше, чем $ab + bc + ac$, то есть $ab+bc+ac \geqslant 301$. Задача свелась к алгебраической: нужно показать, что $ab+bc+ac \leqslant 300$ при $a + b + c = 30$, a, b, $c \in \mathbb{N}$, чтобы получить противоречие.
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \implies ab + bc + ac = \frac{30^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}$
$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$ (по неравенству о средних) $\implies a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{30^2}{3} = 300$. Значит, $ab + bc + ac \leqslant \frac{900-300}{2} = 300$ - противоречие.

У18.3

Оценка

Заметим, что если убрать одно ребро из нечетного цикла, то получится двудольный граф G', $\tau(G') = \mu(G')$. При этом граф G получается из G' добавлением одного ребра, поэтому $\mu(G') \leqslant \mu(G) \leqslant \mu(G') + 1$, а $\tau(G') \leqslant \tau(G) \leqslant \tau(G') + 1$ Таким образом,

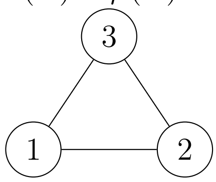
$$-1 \leqslant \tau(G) - \mu(G) \leqslant 1$$

Также заметим, что $\tau(G) \geqslant \mu(G)$ для любого графа G (доказывали на лекции). Значит,

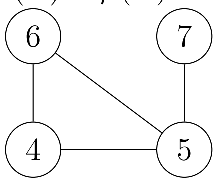
$$\tau(G) - \mu(G) = 1 \text{ или } \tau(G) - \mu(G) = 0$$

Примеры

$\tau(G) - \mu(G) = 1$:



$\tau(G) - \mu(G) = 0$:



У19.2

Ответ: $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

У19.3

$A =$ "в графе есть клика на 3 вершинах"

Разобъем все вершины графа на n вершинах на группы по три вершины (всего $[\frac{n}{3}]$ групп).

Пусть событие $B_i =$ "в i-ой группе нет хотя бы одного ребра"

$P(B_i) = \frac{7}{8}$ (так как всего 8 исходов, один неблагоприятный)

Вероятность того, что ни в одной из этих групп нет клики, равна $\left(\frac{7}{8}\right)^{[\frac{n}{3}]}$ (так как ребра в каждой группе проводятся независимо). Значит, $P(A) \geqslant P($"в одной из групп есть клика размера 3"$) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{[\frac{n}{3}]} \to 1$ при $n \to \infty$. Поэтому $P(A) \to 1$ при $n \to \infty$

У19.4

Мы знаем, что $P(\bigcup X_i) \leqslant \sum P(X_i)$

Рассмотрим события $A =$ "граф несвязный" и $A_k =$ "в графе есть компонента связности размера k", $1 \leqslant k \leqslant n-1 \implies A = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$

Тогда $P(A_k) \leqslant C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k(n-k)}$ (рассматриваем всевозможные k-элементные подмножества, между этим подмножеством и остальными вершинами не должно быть ребер)

Заметим, что $C_n^k \leqslant \frac{2^{2n}}{n+1}$

Если $k = 1$ или $k = n-1$, то $C_n^k \cdot 2^{-k(n-k)} = \frac{n}{2^{n-1}}$

Если $k = 2$ или $k = n-2$, то $C_n^k \cdot 2^{-k(n-k)} = \frac{n(n-1)}{2^n}$

Если $3 \leqslant k \leqslant n-3$, то $C_n^k \cdot 2^{-k(n-k)} \leqslant \frac{2^{2n}}{n+1} \cdot 2^{-3(n-3)} = \frac{2^{2n}}{(n+1)2^{3n-9}} = \frac{1}{(n+1)2^{n-9}}$

При достаточно больших n $C_n^k \leqslant \frac{n^2}{2^n}$. Тогда $P(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) \leqslant \frac{n^3}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty \implies \lim_{n\to\infty} P(A) = 0$

У19.5

Разобъем последовательность из n бросков на непересекающиеся последовательные куски по три броска (всего будет $[\frac{n}{3}]$ кусков). Вероятность того, что в i-ом куске не будет трех орлов, равна $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. При этом $P(D_n) \leqslant$ вероятности того, что ни в одном куске нет трех орлов (так как три орла могут быть также на границах кусков), что в свою очередь равно произведению вероятностей того, что нет трех орлов в i-ом куске по всем $i = 1, 2, \ldots, [\frac{n}{3}]$ (так как броски независимые). Значит, $P(D_n) \leqslant \left(\frac{7}{8}\right)^{[\frac{n}{3}]} \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $P(D_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

У20.1

У20.2

Ответ: $\frac{n+1}{n+2}$

У20.3

Ответ: один белый шар в первую коробку, остальные шары в черную коробку, $P(\text{выжить}) = \frac{1}{2} + \frac{9}{10} = \frac{19}{20}$

Покажем, что вероятность умереть не может быть меньше $\frac{1}{20}$, из этого будет следовать оптимальность нашей стратегии. Всего шаров 20, поэтому в одной из коробок будет не более 10 шаров. Если в этой коробке есть черный шар, то $P(\text{умереть}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$. Если же в этой коробке нет черных, то все черные в другой коробке, поэтому $P(\text{умереть}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{19} > \frac{1}{20}$

У20.4

Ответ: нет.

Заметим, что A и $B \cap C$ независимы тогда и только тогда, когда $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ (последнее равенство в силу независимости B и C), т.е. когда A, B, C независимы в совокупности. Значит, для контрпримера достаточно привести три события, попарно независимые, но зависимые в совокупности.

Рассмотрим два подбрасывания монеты.

Пусть $A =$ "при первом подбрасывании выпал орел"

$B =$ "при втором броске выпал орел"

$C =$ "ровно в одном из бросков выпла орел".

Тогда $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4} \implies A, B, C$ попарно независимы. При этом $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} \implies A, B, C$ заисимы в совокупности.

У21.1

Пусть случайная величина A равна количеству девочек, стоящих левее всех мальчиков, случайная величина A_k равна 1, если на позиции k стоит девочка, которая левее всех мальчиков, и 0 иначе. Тогда $E(A) = \sum_{k=1}^{15} E(A_k)$

$E(A_k) = \frac{\binom{30-k}{15-k}}{\binom{30}{15}}$ (если на k-ом месте девочка, то на первых k местах стоят девочки и расставить остальных девочек есть $\binom{30-k}{15-k}$ вариантов, после этого расположение мальчиков определяется однозначно).

$$E(A) = \sum_{k=1}^{15} \frac{\binom{30-k}{15-k}}{\binom{30}{15}} = \frac{\binom{15}{0} + \binom{16}{1} + \binom{17}{2} + \cdots + \binom{29}{14}}{\binom{30}{15}}$$

Используя формулу $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ и заменяя $\binom{15}{0} = 1$ на $\binom{16}{0} = 1$, схлопывем сумму:

$$E(A) = \frac{\binom{30}{14}}{\binom{30}{15}} = \frac{15}{16}$$

Ответ: $\frac{15}{16}$

У21.2

У21.3

Рассмотрим всевозможные тройки вершин (их $\binom{n}{3}$).

Пусть случайная величина $A_i = 1$, если $i-$ая тройка образует треугольник, и 0 иначе.

$E(A_i) = p^3$ (так как три ребра проводятся независимо с вероятностью p каждое)

Тогда $E[T_n(G)] = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} A_i = \binom{n}{3} p^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} p^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} o(\frac{1}{n^3}) = o(1)$ при $n \to \infty$

По неравенству Маркова:

$$\Pr[T_n(G) \geqslant 1] \leqslant \frac{E[T_n(G)]}{1} = o(1)$$

Значит,

$$\Pr[T_n(G) = 0] = 1 - \Pr[T_n(G) \geqslant 1] \geqslant 1 - o(1) \to 1$$

У22.3

Заметим, что $D(f+g) = E((f+g)^2) - (E(f+g))^2 = E(f^2) + E(g^2) + 2E(fg) - E(f)^2 - E(g)^2 - 2E(f)E(g) = D(f) + D(g) + 2(E(fg) - E(f)E(g)) = D(f) + D(g) \iff E(fg) = E(f)E(g)$. Пусть случайная величина α принимает значения 0, $\frac{\pi}{2}$, π с вероятностями $\frac{1}{3}$. Пусть $f = \sin\alpha$, $g = \cos\alpha$. $E(f) = E(g) = \frac{1}{3} \cdot (0 + 1 - 1) = 0$, $E(fg) = E\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2}\right) = 0 \implies E(fg) = E(f)E(g)$. Но f и g очевидно зависимы: $X^2 + Y^2 = 1$

У22.3