(15.5) **У15.5.** Постройте биекцию между множеством $[0;1] \cup [2;3] \cup [4;5] \cup \ldots$ и множеством $[0;1]$.

$a \in A = [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]$

любое a можно представить как:

$$a = 2n + b, \quad n \in \mathbb{N}, \quad b \in [0,1]$$

представим a в виде последовательностей из 01

$$\underbrace{1\ 1\ 1}_{n \text{ раз } „1"}\ \underset{\substack{0 \\ \text{разделитель}}}{0}\ \underbrace{0101\ldots01}_{b}$$

биекция $\checkmark$

$[0,1]$ тоже можно представить как $\{0,1\}^N$

Это инъекция, т.к. разные последовательности 1110101.... переходя в разные элементы $a \in A$

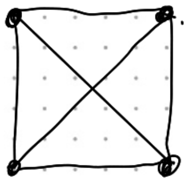
Это сюръекция, так как каждому элементу A можно подобрать прообраз

Следовательно, это биекция

17.1

У17.1. Из полного графа K_n выбросили одно ребро. Найдите количество остовных деревьев в таком графе. (В ответе не должно быть сумм от переменного числа слагаемых.)

По теореме Кэли число остовных деревьев в полном графе n^{n-2}



$\forall$ ребра число остовных деревьев, которые его содержат равно ε

Тогда верно равенство: $\underbrace{\frac{n(n-1)}{n}}_{\text{ребер в } K_n} \varepsilon = \underbrace{n^{n-2}}_{\text{число остовных деревьев в } K_n} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\text{число ребер в остовном дереве}}$

выражаем ε:

$$\varepsilon = \frac{n^{n-2} \cdot 2}{n} = 2n^{n-3}$$

Итого: все остовные деревья — деревья через удаленное ребро

Ответ: $n^{n-2} - 2n^{n-3}$

Пиздецовое решение, лучше загуглить нормальное

20.2

2 игрока M ячц

1 ... M ячц

M - выбросое ячцо: $(s_1, \dots s_{m-1})$ - путь яйца

эл. событий $|\Omega| = M!$

A_n - победа в раунде n

A_{n+1} - победа в раунде n+1

$P(A_{n+1} | A_n)$ - ?

$A_n : (m, s_1, \dots s_k)$

$$P(A_{n+1}|A_n) = \frac{P(A_{n+1} \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} =$$

$$P(A_n) = \sum_{m=1}^{M} \underbrace{p(m)}_{=\frac{1}{M}} P(A_n|m) = \frac{1}{M} \sum_{m=n+1}^{M} P(A_n|m)$$

$m \le n \Rightarrow P(A_n) = 0$

$m \geq n+1$

$$(m_1, \underbrace{s_1, \ldots s_n}_{m > s_j}, \underbrace{s_{n+1}, s_{M-1}}_{(M-n-1)!})$$

$(m-1)\cdot(m-2) \ldots (m-n)$

$$P(A_m|m) = \frac{C_{m-1}^{n} \cdot n!\,(M-m-1)!}{(M-1)!} = \frac{C_{m+1}^{n}}{C_{M-1}^{n}}$$

$$P(A_n) = \frac{1}{M} \sum_{m=n+1}^{M} \frac{C_{m-1}^{n}}{C_{M-1}^{n}} = \frac{1}{M \cdot C_{M-1}^{n}} \sum_{m=n+1}^{M} C_{m-1}^{n} =$$

$$= \frac{1}{M\, C_{M-1}^{n}} \cdot C_{M}^{n+1}$$

$$P(A_{n+1}) = \frac{C_M^{n+2}}{M \cdot C_{M-1}^{n+1}}$$

$$\frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} = \frac{C_M^{n+2} \cdot M \cdot C_{M-1}^{n}}{M \cdot C_{M-1}^{n+1} \cdot C_M^{n+1}} = \frac{M!}{(n+2)!\,(M-n-2)!} \cdot \frac{(M-1)!}{n!\,(M-n-1)!}$$

$\circ \circ \circ$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

21.4

У21.4. (Половина теоремы Турана) Пусть граф имеет n вершин и $nd/2$ рёбер, где $d \geqslant 1$. Докажите, что $\alpha(G) \geqslant n/2d$.

(Лучше просто нагуглить теорему Турана)

n вершин

$\frac{n}{2} \cdot d$ ребер, $d \geqslant 1$

Подмножество $S \subseteq V$ (всех вершин)

$$P(u \in S) = \frac{1}{d}$$

X - число вершин в подграфе $|S|$, Y - число ребер

$$G = (V, E)$$

хар. функция

$$Y = \sum_{l \in E} J_{l_Y}$$

$$E[J_{l_Y}] = P(e \in S) = \frac{1}{d^2}$$

$$E[Y] = \sum_{l \in E} E[J_{l_Y}] = \frac{n \cdot d}{2} \cdot \frac{1}{d^2} = \frac{n}{2d}$$

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{d} + 1 \cdot \frac{1}{d} + \ldots + 1 \cdot \frac{1}{d} = \frac{n}{d}$$

$$E[X - Y] = \frac{n}{2d}$$

$$\exists \text{ граф}: X - Y \geqslant \frac{n}{2d}$$

$\forall$ ребра в S берем любую вершину и его удаляем.

Удаляя его вершину $\geqslant \frac{n}{2d}$ вершин осталось

У 23.2

У23.2. Докажите, что предпоследняя цифра степени тройки всегда четна.

Индукция:

База: $3^0 = \underline{0}1$ — верно

Шаг: Пусть верно для всех $k < n$

$3^k = 10 \cdot a + b$, $a \vdots 2$, b может принимать только такие значения

запишем в такой форме

нужно доказать

$b = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{array} \right.$

Значит для $k = n$

$3^n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3 \cdot (10a + b) = 30a + 3b$

$b = 1 \quad 3b = 3 \quad \underline{0}3$ — верно

$b = 3 \quad 3b = 9 \quad \underline{0}9$ — верно

$b = 9 \quad 3b = 27 \quad \underline{2}7$ — верно

$b = 7 \quad 3b = 21 \quad \underline{2}1$ — верно

Доказано.