Дискретная математика 1

Дополнительные задачи

Contributors:
Артёмов Михаил
Бакалова Екатерина
Бикмухаметов Тагир
Загонов Дмитрий
Коркодинов Павел
Коротчин Андрей
Морфей
Темерханов Руслан
Цинман Семён

Группы БЭАД241, БЭАД242, БЭАД231, БПМИ2310

Задание 1 (У1.1)

Сколько раз встречается **И** в таблице истинности высказывания

$$\bigwedge_{1\leqslant i<j\leqslant 1000} (\neg x_i \vee x_j)$$

Решение:

Большая конъюнкция будет ложной тогда и только тогда, когда $\exists i < j : \neg x_i \vee x_j = 0 \Leftrightarrow x_i = 1 \wedge x_j = 0$. Значит, если большая конъюнкция истинна, то $\forall i < j \;\; x_i = 0 \vee x_j = 1$. Это равносильно тому, что если в строке есть 1, то после неё все x_i тоже равны 1. Если это не так, то результат дизъюнкции этой единички и нолика, стоящего после неё, будет ложной, а значит и всё высказывание тоже будет ложной.
Значит, все наборы x_n, для которых высказывание будет истинным, выглядят так: сначала идёт n нулей, а потом $1000 - n$ единиц, где $0 \leqslant n \leqslant 1000$. Всего таких наборов ровно 1001.

Ответ:

1001

Задание 2 (У1.2)

$A_1, A_2, ..., A_7$ - высказывания. Является ли тавтологией дизъюнкция всех высказываний вида

$$\left(A_i \vee A_j \vee A_k \vee A_m\right) \to \left(A_i \wedge A_j \wedge A_k \wedge A_m\right) \quad 1 \leqslant i < j < k < m \leqslant 7?$$

Решение:

Пусть это высказывание (большая дизъюнкция) бывает ложной для какого-то набора высказываний A_i. Это значит, что каждое такое высказывание (импликация) является ложным, то есть

$$\forall 1 \leqslant i < j < k < m \leqslant 7 \left(A_i \vee A_j \vee A_k \vee A_m\right) \to \left(A_i \wedge A_j \wedge A_k \wedge A_m\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_i \vee A_j \vee A_k \vee A_m = 1 \\ A_i \wedge A_j \wedge A_k \wedge A_m = 0 \end{cases}$$

Заметим, что такое бывает ровно в одном случае: когда среди A_i, A_j, A_k, A_m есть и 0, и 1 (иначе или все 0, или все 1, и тогда система неверна).
То есть, если перевести на человеческий язык, если среди высказываний $A_1, A_2, ..., A_7$ взять любые четыре, в них найдутся два различных высказывания. Но что же тогда получается? Это означает, что среди A_i не больше трёх 1 и не больше трёх 0. Тогда всего высказываний должно быть не больше 6, а их аж семь! Ой-ой-ой! Противоречие.
Значит, дизъюнкция есмь тавтология.

Ответ:

Да.

Задание 3 (У1.3)

Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq$ — невозрастающая последовательность множеств, а $B_1 \subseteq B_2 \subseteq ... \subseteq B_n \subseteq ...$ — неубывающая последовательность множеств. Известно, что $A_1 \setminus B_1 = A_9 \setminus B_9$. Докажите, что $A_2 \setminus B_8 = A_5 \setminus B_5$.

Решение:

Заметим, что $A_9 \subseteq A_1$ и $B_1 \subseteq B_9$ из транзитивности свойства «быть подмножеством».
Докажем, что $A_1 = A_9$, для этого достаточно доказать, что $A_1 \subseteq A_9 \Leftrightarrow (x \in A_1 \Rightarrow x \in A_9)$. Рассмотрим два случая:

Случай 1.1.

$$\begin{cases} x \in A_1 \\ x \in B_1 \end{cases} \Rightarrow x \notin A_1 \setminus B_1 \Rightarrow x \notin A_9 \setminus B_9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin A_9 \\ x \in A_9 \land x \in B_9 \end{array}\right.$$

Т.к. $A_9 \subseteq A_1$, то если $x \notin A_9$, то $x \notin A_1$. Значит, первое высказывание совокупности не может быть верным. Тогда верно второе, то есть $(x \in A_1 \land x \in B_1) \Rightarrow (x \in A_9 \land x \in B_9)$.

Случай 1.2.

$$\begin{cases} x \in A_1 \\ x \notin B_1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in A_1 \setminus B_1 \Leftrightarrow x \in A_9 \setminus B_9 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A_9 \\ x \notin B_9 \end{cases}$$

Таким образом, $\forall x$ если $x \in A_1$, то $x \in A_9$. Значит, $A_1 \subseteq A_9$. Так как $A_9 \subseteq A_1$, то $A_1 = A_9$. Доказано.
Так как $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_9$, а $A_1 = A_9$, то $A_1 = A_2 = ... = A_9 =: A$ (надеюсь, это достаточно очевидно).

Докажем от противного, что $\forall 2 \leqslant i \leqslant 9 \;\; A \cap (B_i \setminus B_1) = \varnothing$ от противного.
Пусть $\exists x \in B_i : x \in A \land x \in (B_i \setminus B_1) \Leftrightarrow x \in A \land x \in B_i \land x \notin B_1 \Rightarrow x \in A \land x \in B_9 \land x \notin B_1$ (т.к. $B_i \subseteq B_9$).
Посмотрим на равенство $A \setminus B_1 = A \setminus B_9$. Ясно, что $x \in \text{LHS}$, но $x \notin \text{RHS}$. Значит, это неравенство не может быть верным! Противоречие.
Тогда $\forall 2 \leqslant i \leqslant 9 \;\; A \cap (B_i \setminus B_1) = \varnothing$. Значит, $A \setminus B_1 = A \setminus B_2 = ... = A \setminus B_9$. В частности, $A \setminus B_8 = A_2 \setminus B_8 = A_5 \setminus B_5 = A \setminus B_5$.
Q.E.D.

Задание 4 (У1.4)

а) Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cup, \cap, \setminus$ неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором каждое множество или пусто, или состоит из одного элемента.
б) Допустим, что у нас есть неверное равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cup$, $\cap, \setminus$, и по нему построена соответствующая формула, содержащая $\wedge, \vee, \neg, \equiv$. Как, опираясь на контрпример для множеств из пункта а), показать, что такая формула не является тавтологией?

Решение:

а) Пусть в левой части содержатся множества $A_1, A_2, ...$, а в правой части множества $B_1, B_2, ...$ (некоторые из них могут совпадать).
Раз в нашем равенстве $\mathrm{LHS} \neq \mathrm{RHS}$, то $\exists A_1, A_2, ...$ и $B_1, B_2, ...$ такие, что $\mathrm{LHS}(A_1, A_2, ...) \neq \mathrm{RHS}(B_1, B_2, ...) \Leftrightarrow \exists x : (x \in \mathrm{LHS} \wedge x \notin \mathrm{RHS}) \vee (x \notin \mathrm{LHS} \wedge x \in \mathrm{RHS})$. Пусть, не умаляя общности, $x \in \mathrm{LHS} \wedge x \notin \mathrm{RHS}$. Рассмотрим следующие множества:

$$A_1' = A_1 \cap \{x\}, A_2' = A_2 \cap \{x\}, ...$$

$$B_1' = B_1 \cap \{x\}, B_2' = B_2 \cap \{x\}, ...$$

Ясно, что $x \in \mathrm{LHS}(A_1', A_2', ...) \wedge x \notin \mathrm{RHS}(B_1', B_2', ...)$. Действительно, факт принадлежности x к левой или правой части не зависит от того, содержатся ли при этом в множествах A_i и B_i другие элементы. При этом множества $A_1', A_2', ...$ и $B_1', B_2', ...$ пусты или содержат только элемент x. Значит, эти наборы множеств являются контрпримером.
Q.E.D.
P.S. запись $A_1, A_2, ...$ предполагает, что число множеств в любой из частей равенства может быть бесконечным

б) Введём обозначения:

$$a_1 := x \in A_1, a_2 :=\in A_2, ...$$

$$b_1 := x \in B_1, b_2 :=\in B_2, ...$$

Именно на них строится логическая формула для нашего равенства. Воспользуемся контрпримером для пункта а) и рассмотрим следующие наборы высказываний:
Если $A_i' = \varnothing$, то $a_i := 0$. Иначе $a_i := 1$.
Если $B_i' = \varnothing$, то $b_i := 0$. Иначе $b_i := 1$.
Ясно, что для таких наборов высказываний $a_1, a_2, ...$ и $b_1, b_2 ...$ формула не будет истинной (иначе x, рассмотренный в пункте а), не существовал бы), а значит, не будет тавтологией.

Ответ:

Как? Вот так! (см. выше)

Задание 5 (У2.1)

В классе 33 ученика. 28 из них знают, что такое простое число, 22 знают, что такое факториал, и 17 знают, что такое полином. Докажите, что в классе найдётся ученик, который знает все три этих понятия.

Решение:

Пусть $U-$ множество всех детей, $A-$ множество детей, знающих, что такое простое число, $B-$ множество детей, знающих, что такое факториал, $C-$ множество детей, знающих, что такое полином. Предположим, что нет ученика, что знает все три понятия, т.е. что $A \cap B \cap C = \varnothing$.
1. Так как $33 \geqslant |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 28 + 22 - |A \cap B|$, то $|A \cap B| \geqslant 50 - 33 = 17$.
2. Раз $A \cap B \cap C = \varnothing$, то $33 \geqslant |(A \cap B) \cup C| = |A \cap B| + |C| \geqslant 17 + 17 = 34 \Rightarrow 33 \geqslant 34$. Противоречие. Значит, $|A \cap B \cap C| \geqslant 1$.
Q.E.D.

Задание 6 (У2.2)

Круг разбили на 25 секторов, пронумерованных в произвольном порядке числами от 1 до 25. В одном из секторов сидит Кузнечик. Он прыгает по кругу, каждым своим прыжком перемещаясь по часовой стрелке на количество секторов, равное номеру текущего сектора. Докажите, что в некотором секторе Кузнечик не побывает никогда.

Решение:

Запишем в бесконечную строку номера секторов, в которых побывает Кузнечик за счётное число прыжков. Заметим, что если в строке встречается число 25, то, т.к. всего секторов 25, дальше тоже будет только число 25 (т.е. с определённого момента строка выглядит как $(..., 25, 25, 25, 25, ...,))$. Очевидно, что тогда изначальный сектор Кузнечика не равен 25.
Значит, перед попаданием в сектор 25 Кузнечик должен посетить все остальные сектора.
Предположим, что сектор k Кузнечик посетил хотя бы два раза. Ясно, что тогда фрагмент строки между двумя числами k будет повторяться по циклу, и в сектор 25 Кузнечик никогда не попадёт.
Значит, все сектора от 1 до 24 Кузнечик посетил ровно 1 раз, и только потом прыгнул в сектор 25. Значит, всего он сделал $1 + 2 + ... + 24 = \frac{24 \cdot 25}{2} = 12 \cdot 25$ шагов. Но это число делится на 25, значит, после этой цепочки прыжков он попадёт в изначальный сектор, а не в сектор 25, и сектор 25 он никогда не посетит.
Q.E.D

Задание 7 (УЗ.1)

Дан набор из 12 носков: 4 красных, 4 жёлтых, 4 зелёных. Сколькими способами можно разделить эти носки на 6 пар? Носки одного цвета не отличаются. Порядок носков внутри каждой пары неважен. Порядок пар неважен.

Решение:

Полный перебор!

Рассмотрим красные носки. Есть три случая:

1. Нет пар КК. Тогда есть либо пары КЖ, КЖ, КЖ, КЖ (для остальных носков 1 варинат - ЗЗ, ЗЗ), либо есть пары КЖ, КЖ, КЖ, КЗ (для остальных носков 1 вариант - ЖЗ, ЗЗ), либо есть пары КЖ, КЖ, КЗ, КЗ (для остальных носков 2 варианта - ЖЗ, ЖЗ или ЖЖ, ЗЗ), либо есть пары КЖ, КЗ, КЗ, КЗ (для остальных 1 вариант - ЖЗ, ЖЖ), либо есть пары КЗ, КЗ, КЗ, КЗ (для остальных 1 вариант - ЖЖ, ЖЖ). Итого 6 вариантов.
2. Есть ровно одна пара КК. Тогда есть либо пары КЖ, КЖ (для остальных носков 2 варианта - ЖЖ, ЗЗ, ЗЗ или ЖЗ, ЖЗ, ЗЗ), либо есть пары КЖ, КЗ (для остальных носков есть 2 варианта - ЖЖ, ЖЗ, ЗЗ или ЖЗ, ЖЗ, ЖЗ), либо есть пары КЗ, КЗ (для остальных носков 2 варианта - ЗЗ, ЖЖ, ЖЖ или ЗЖ, ЗЖ, ЖЖ). Итого 6 вариантов.
3. Есть две пары КК. Тогда либо есть пара ЖЖ (для остальных 2 варианта - ЖЖ, ЗЗ, ЗЗ или ЖЗ, ЖЗ, ЗЗ), либо есть только пары ЖЗ, ЖЗ (для остальных 1 варинат - ЗЗ). Итого 3 варианта.

Всего вариантов $6 + 6 + 3 = 15$.

Ответ:

15

Задание 8 (У3.2)

Для каких множеств A и B выполнено $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$?

Решение:

Пусть $a \coloneqq x \in A$, $b \coloneqq x \in B$, $c \coloneqq y \in C$, $d \coloneqq y \in D$.

1. $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D) \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C \cup D = (a \vee b) \wedge (c \vee d)$
2. $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times D \Leftrightarrow (a \wedge c) \vee (b \wedge d)$

Таким образом, $\forall c, d \;\; (a \vee b) \wedge (c \vee d) \equiv (a \wedge c) \vee (b \wedge d)$ (1).
Предположим, что существует такой $x \in A \setminus B$, т.е. что $a = 1, b = 0$. Подставим в (1):

$$\begin{cases} (a \vee b) \wedge (c \vee d) = (1 \vee 0) \wedge (c \vee d) = c \vee d \\ (a \wedge c) \vee (b \wedge d) = (1 \wedge c) \vee (0 \wedge d) = c \end{cases} \Rightarrow c \equiv c \vee d$$

Но это неверно для $c = 0$ и $d = 1$. Противоречие!
Значит, $\nexists x \in A \setminus B$. Аналогично $\nexists x \in B \setminus A$. Значит, неравенство верно только для $A = B$.

Ответ:

$A = B$

Задание 9 (У3.3)

В выпуклом многоугольнике проведены некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Докажите, что найдутся две не соседние вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

Решение:

Докажем утверждение при помощи метода математической диагонали по n, где $n -$ число вершин многоугольника.

База. $n = 3$. В треугольнике диагоналей вообще нет, поэтому можно выбрать любые две вершины.

$n = 4$. В выпуклом четырёхугольнике может быть проведено не больше 1 диагонали без пересечений (т.к. две его диагонали всегда пересекаются), значит, в качестве искомой пары вершин можно выбрать те, что не являются концами этой диагонали.

Предположение. Пусть для любого выпуклого k-угольника, где $k < n$, выполняется утверждение.

Шаг. Докажем, что утверждение верно для n-угольника.

Если в нём не проведено ни одной диагонали, то можем взять любые две несоседние его вершины.

Иначе рассмотрим произвольную его диагональ, назовём её *базированной.* Она делит n-угольник на два многоугольника, в каждом из которых вершин меньше, чем n. Все оставшиеся диагонали n-угольника проведены внутри этих многоугольников, иначе какая-то диагональ будет пересекаться с *базированной.*

Значит, для каждого из этих многоугольников верно изначальное утверждение, то есть в каждом из них найдётся пара несоседних вершин, из которых не проведено ни одной диагонали. Эта пара не может совпадать с концами *базированной* диагонали, так как в маленьких многоугольниках они являются соседними.

Значит, в каждом многоугольнике существует хотя бы одна вершина, не являющаяся концом *базированной* диагонали, из которой не проведено ни одной диагонали. Взяв в каждом из многоугольников эту вершину, получим пару несоседних вершин n-угольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

Таким образом, исходя из принципов метода математической индукции, утверждение верно.

Q.E.D.

Задание 10 (У3.4)

На окружности отмечено 300 точек: по 100 точек синего, красного и зелёного цветов. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в этих точках, чтобы никакие два отрезка не пересекались (даже в концах) и концы каждого отрезка были разного цвета.

Решение:

Будем делать следующий алгоритм:

1. Пусть на i-ом шаге у нас оказалось a синих, b красных и c зелёных точек. Выберем тот цвет, точек которого максимальное количество.
2. Выбираем произвольную точку этого цвета и направление обхода окружности.
3. Если следующая точка по направлению другого цвета, соединим две точки и удалим их с окружности. Иначе перейдём к следующей точке.

Продолжаем алгоритм, пока можем. Остановиться мы можем в двух случаях: или точек не осталось совсем, или остались точки только одного цвета. Покажем, что второе невозможно.
Действительно, пусть алгоритм закончился на i-ом шаге, когда осталось n синих, 0 красных и 0 зелёных точек. Заметим, что чётность общего количества точек на окружности всегда сохраняется (т.к. каждый шаг убирает две точки), значит, $n \geqslant 2$. Тогда на $i-1$-ом шаге мы соединяли синюю точку с точкой какого-то другого цвета, т.е. на предыдущем шаге был набор $n+1, 1, 0$. Значит, и на $i-2$-ом шаге мы соединяли синюю точку с какой-то другой, и так далее, т.к. всегда синих точек будет больше, чем число точек любого другого цвета $+1$. Но значит и на первом шаге точек синего цвета должно было быть больше, чем точек красного цвета, а это не так.
Противоречие.

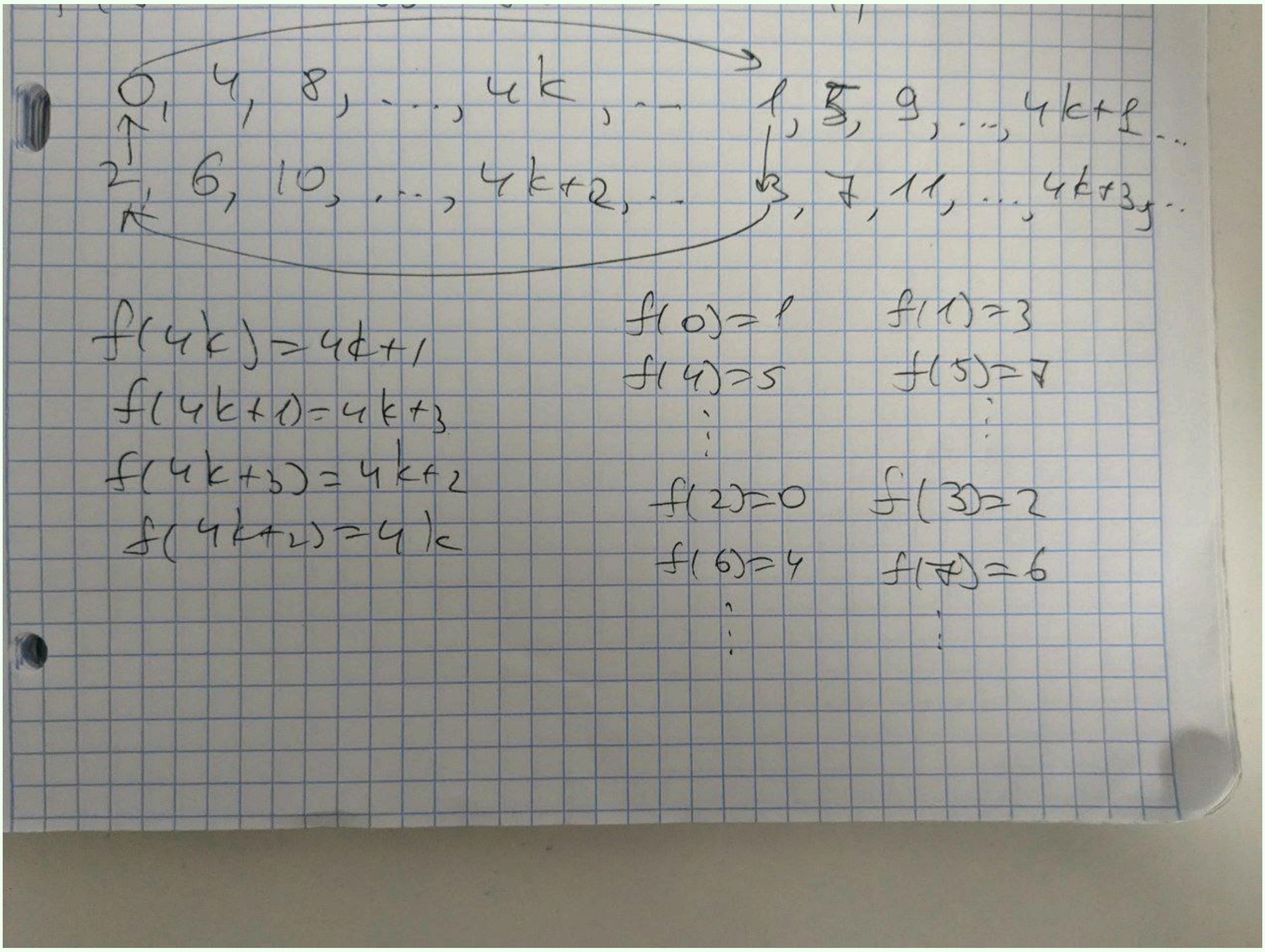
Значит, алгоритм завершится, когда точек не останется совсем. Это и будет искомым построением.
Q.E.D.

Задание 11 (У4.1)

Докажите, что существует биекция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая, что $f(f(n))$ переводит чётные числа в нечётные, а нечётные — в чётные.

Решение:

Вот так выглядит эта функция:



Задание 12 (У4.2)

Докажите, что не существует такой функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \ f(f(n)) = n + 1$.

Решение:

Пусть $f(n) = k$. Тогда

$$f(f(n)) = n+1 \Rightarrow f(n+1) = f(f(f(n))) = f(f(k)) = k+1 = f(n)+1 \Rightarrow f(n+1) = f(n)+1$$

$$\forall n\ \ f(n+1) = f(n)+1 \Rightarrow \forall n > 0\ \ f(n) = f(0)+n$$

Раз $f(0) \in \mathbb{N}$, подставим в качестве n $f(0)$. Получим, что

$$f(f(0)) = f(0) + f(0)$$

С другой стороны, по условию $f(f(0)) = f(0) + 1$. Значит,

$$2f(0) = f(0) + 1 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

Противоречие. Значит, такой функции не существует.
Q.E.D.

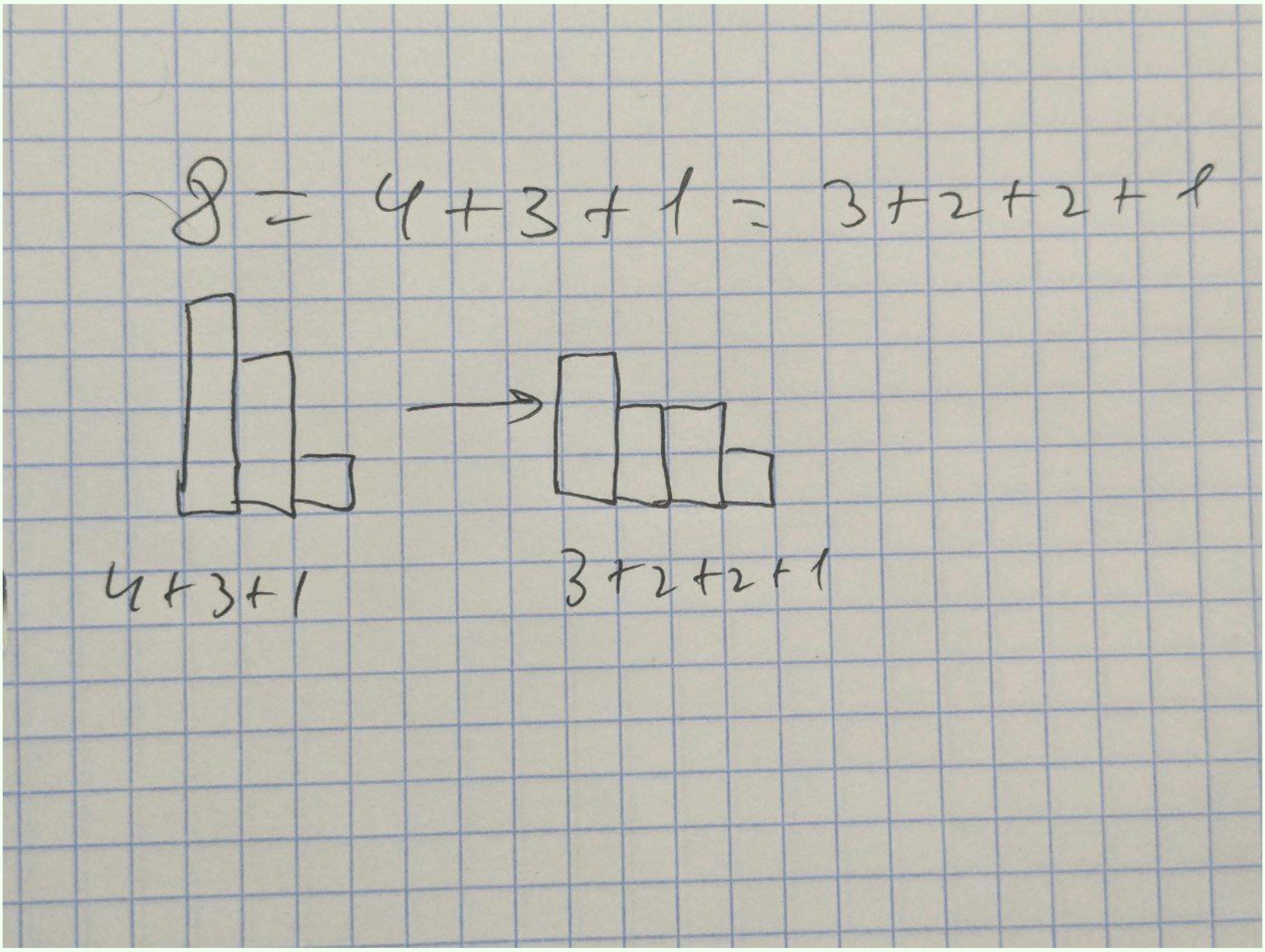
Задание 13 (У4.3)

Докажите, что количество способов представить число n в виде суммы k слагаемых равно количеству способов представить число n в виде суммы нескольких слагаемых, наибольшее из которых равно k. (В обоих случаях представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Во втором случае в сумме может быть несколько наибольших слагаемых. Числа n, k и все слагаемые предполагаются натуральными, не равными нулю.)

Решение:

Представим разбиение n на k слагаемых в виде диаграммы Юнга. Получим диаграмму из k «столбиков», суммарное число клеточек в которой равно n. Пусть максимальный столбик имеет высоту m.
Теперь давайте транспонируем эту диаграмму. Получим диаграмму из m столбиков, максимальный в котором равен k, а суммарное число клеточек равно n.
Но ведь это и есть разбиение n на слагаемые, наибольшее из которых равно k. Аналогично можно транспонировать все диаграммы такого рода (где наибольший столбик имеет высоту k), и получить разбиение на k слагаемых.
Таким образом, мы построили биекцию между двумя множествами, значит, они равны.
Q.E.D.

Пример.



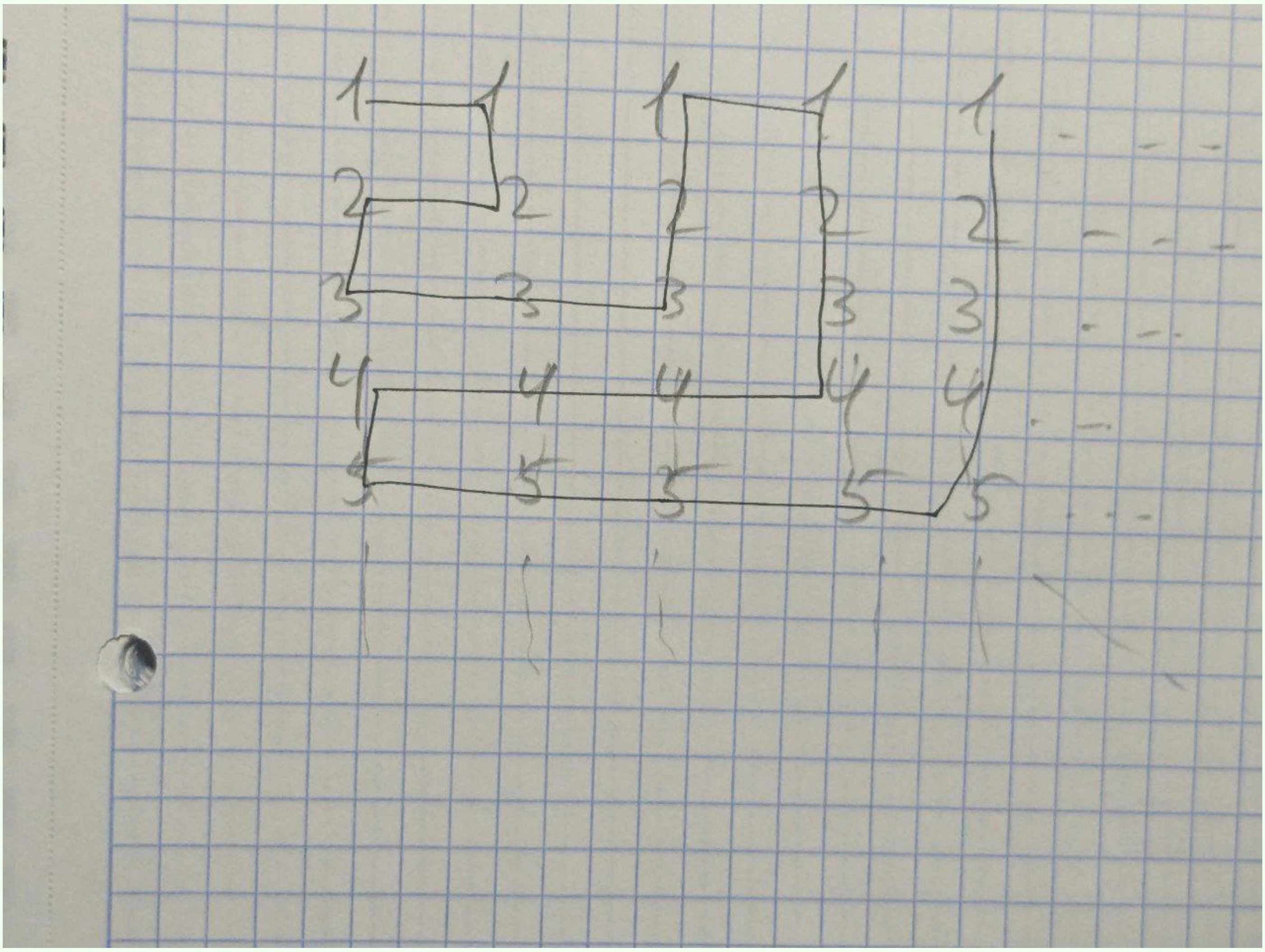
Было разбиение числа $8 = 4 + 3 + 1$ при $k = 3$ и $m = 4$. Записав все строки, как столбцы, получили разбиение $8 = 3 + 3 + 2 + 1$, максимальное число равно $k = 3$.

Задание 14 (У5.1)

Приведите пример сюръекции множества натуральных чисел на себя, для которой полный прообраз любого 1-элементного множества бесконечен.

Решение:

Приведём следующую запись:
$1, 1, 1, 1, 1, ...$
$2, 2, 2, 2, 2, ...$
$3, 3, 3, 3, 3, ...$
....
Таким образом мы запишем бесконечное количество натуральных чисел для каждого натурального числа (по сути, так мы записали множество мощностью $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).
Теперь будем идти по этой табличке «змейкой», и если на i-ом шаге мы пришли в число j, скажем, что тогда $f(i) = f(j)$.
Во-первых, по построению $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, более того, тотальна.
Во-вторых, это сюръекция, т.к. в табличку мы записали все натуральные числа.
В-третьих, прообраз каждого натурального числа бесконечен, т.к. в строчку их записано бесконечное количество.
Значит, это и есть искомая сюръекция.
Q.E.D.
P.S. По сути, это доказательство аналогично доказательству факта, что $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.



Задание 15 (У5.2)

Докажите аккуратно, что подмножество конечного множества конечно. (Вам понадобится определение конечного множества и индукция.)

Решение:

Рассмотрим подмножества конечного множества A. Пусть $|A| = n$, то есть существует биекция $f_n : A \to [n]$. Проведём индукцию по n.

База. $n = 0 \Rightarrow A = \varnothing$. Ясно, что любое подмножество $\varnothing$ — это $\varnothing$, и оно является конечным.

Шаг. Пусть любое подмножество любого множества A_n мощности n конечно. Рассмотрим множество A_{n+1} мощности $n+1$ и все его подмножества:

1. Если $\exists a \in A_{n+1} : a \notin B$, то $B \subseteq (A_{n+1} \setminus a)$, где $a \in A_{n+1}$.
   Так как $A_{n+1} \setminus a$ — множество мощности n, тогда по предположению индукции B — конечное множество.
2. Иначе $\forall a \in A_{n+1}\ \ a \in B$, то $B = A$. Тогда B конечно.

Q.E.D.

Задание 16 (У5.3)

10 друзей послали друг другу праздничные открытки, причём каждый послал пять открыток разным друзьям. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу.

Решение:

Представим условие задачи в виде ориентированного графа на 10 вершинах, где каждую вершину обозначает друга, а стрелки — факт, что друг i послал другу j открытку. Тогда из каждой вершины исходит 5 стрелочек, а всего стрелочек 50.
Предположим, что нету двух вершин, которые соединены двумя стрелочками. Тогда в каждую вершину приходит не больше четырёх стрелочек. Действительно, если есть вершина n, в которую приходит хотя бы пять стрелочек, то $\{\text{множество вершин, в которые исходят стрелочки из n}\}$ и $\{\text{множество вершин, из которых исходят стрелочки из n}\}$ должны пересекаться (т.к. иначе число элементов в их объединении не меньше $5 + 5 = 10$, но всего остальных друзей $9 < 10$).
Значит, в каждую вершину приходит не больше 4 стрелок. Тогда всего их не больше $4 \cdot 10 = 40 < 50$. Значит, есть вершина, в которую приходит хотя бы пять стрелочек, и тогда найдётся пара друзей, отправивших открытки друг другу.
Q.E.D.

Задание 17 (У5.4)

Каждое из множеств $A_1, A_2, ..., A_{100}$ содержит ровно 11 элементов. В объединении

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{100}$$

ровно 13 элементов. Докажите, что среди множеств есть одинаковые, то есть $\exists i \neq j : A_i = A_j$.

Решение:

Очевидно, что $\forall i \;\; A_i \subseteq (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{100})$. Значит, всего вариантов для таких различных множеств A_i ровно $C_{13}^{11} = C_{13}^{2} = \frac{13 \cdot 12}{4} = 13 \cdot 6 = 78 < 100 \Rightarrow$ найдутся два одинаковых множества.
Q.E.D.

Задание 18 (У5.5)

Найдите количество неубывающих инъективных функций из [8] в [11].
Функция f называется неубывающей, если $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$

Решение:

Проведём биекцию между такими функциями и строками из шаров и перегородок:
Расставим в ряд 11 шаров и пронумеруем их от 0 до 10. Это — значения нашей функции.
Теперь справа от каких-то восьми шаров поставим 8 перегородок и пронумеруем их слева направо от 0 до 8. Это — аргументы нашей функции.
Теперь, если i-ая перегородка стоит справа от шара с номером j, то скажем, что $f(i) = j$. Эта функция, очевидно, не убывает.
Раз f инъективна, то никакие две перегородки не могут стоять справа от одного и того же шара. Значит, всего таких функций $C_{11}^8 = C_{11}^3 = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6} = 11 \cdot 15 = 165$.

Ответ:

165

Задание 19 (У6.1)

Найдите количество нулей, на которое оканчивается число $11^{100} - 1$. Найдите последнюю ненулевую цифру этого числа.

Решение:

Представим 11 как $10 + 1$ (insane). Тогда исходное выражение равно

$$11^{100} - 1 = (10+1)^{100} - 1 = 10^{100} + \binom{100}{1}10^{99} + \binom{100}{2}10^{98} + ... + \binom{100}{96}10^{4} + \binom{100}{97}10^{3} + \binom{100}{98}10^{2} +$$

$$+\binom{100}{99}10 + 1 - 1 = 10^{100} + \binom{100}{1}10^{99} + \binom{100}{2}10^{98} + ... + \binom{100}{96}10^{4} + \binom{100}{97}10^{3} + \binom{100}{98}10^{2} + \binom{100}{99}10$$

Все числа, начиная с 10^{100} и заканчивая $\binom{100}{96}10^4$ делятся на 10^4. Посчитаем сумму оставшихся слагаемых:

$$\binom{100}{97}10^{3} + \binom{100}{98}10^{2} + \binom{100}{99}10 = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1000 + \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} \cdot 100 + 100 \cdot 10 = 162196000$$

Видим, что это число делится на 10^3, но не делится на 10^4. Значит, исходное число тоже делится на 10^3, но не на 10^4.
Причём остаток этого числа при делении на 10^4 равен $162196000\%(10^4) = 6$, это и есть последняя ненулевая цифра.

Ответ:

$3, 6$

Задание 20 (У6.2)

Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Решение:

Lemma (Д6.4).

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{r}{j} \binom{s}{k-j} = \binom{r+s}{k}$$

Рассмотрим двоичные слова длины $r + s$, в которых ровно k единиц, где числа r и s фиксированы. Очевидно, что их количество равно $\binom{r+s}{k}$.
Теперь давайте каждое такое число разделим на два: в первом будет r символов, а во втором $-s$ символов. Тогда ясно, что если в первом j единиц, то во втором их ровно $k - j$. Значит, всего число способов составить первое слово равно $\binom{r}{j}$, а второе – $\binom{s}{k-j}$. А значит, число способов составить большое слово из двух маленьких равно их произведению, то есть $\binom{r}{j} \cdot \binom{s}{k-j}$. А раз $j = 0, 1, 2, ..., k$, то всего число способов составить большое слово как раз равно левой части равенства.
Заметим, что наше отображение (деление большого слова на два маленьких) является биективным.
Во-первых, оно, очевидно, тотально (любое большое слово можно разделить на два маленьких).
Во-вторых, если после разделения большого слова x_1 и большого слова x_2 мы получили два одинаковых набора маленьких слов, то и большие слова тоже должны быть равны. Значит, отображение инъективно.
В-третьих, для каждого набора двух маленьких слов существует большое слово, которое является прообразом этого набора (действительно, мы же можем просто склеить два маленьких слова и получить искомое большое). Значит, отображение сюръективно.
Раз отображение инъективно и сюръективно, то оно биективно. Значит, искомые множества действительно равны.
Q.E.D.

Пусть $r = s = k = n$. Тогда

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + ... + \binom{n}{n}^2$$

Q.E.D.

Задание 21 (У6.3)

Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + ... = F_{n+1}$$

Пользуясь этим равенством, найдите числа Фибоначчи в треугольнике Паскаля.

Решение:

Представим, что Марио нужно взобраться на n-ую ступеньку лестницы, причём он может просто шагнуть на следующую ступеньку, а может сделать шаг, пропустив одну ступеньку. Очевидно, что в таком случае число способов добраться до n-ой ступеньки равно F_n (просто по определению чисел Фибоначчи).
Теперь рассмотрим произвольный путь Марио на $(n+1)$-ую ступеньку. Для этого он должен был преодолеть n ступенек.
Если он i раз пропускал ступеньку, то таким образом преодолел $2i$ ступенек. Значит, $2i + k = n \Rightarrow k = n - 2i$, где k — число обычных шагов Марио. Значит, всего он сделал $n - i$ шагов, из которых i раз пропустил ступеньку. Тогда всего способов составить такой путь C_{n-i}^i, а общее число способов добраться таким образом до $(n+1)$-ой ступеньки равно $C_n^0 + C_{n-1}^1 + ...$, и это число равно F_{n+1}.
Q.E.D.

Запишем числа треугольника Паскаля, сделав выравнивание по левому краю:
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
...
Тогда, чтобы получить $(n+1)$-ое число Фибоначчи (для $n \in \mathbb{N}$), нужно взять последнюю единичку из n-ой строки, а после идти по треугольнику «конём», делая два шага влево и один шаг вверх. Таким образом мы будем получать числа, стоящие в левой части исходного равенства, и получим искомое число Фибоначчи.

Задание 22 (У6.4)

Докажите, что существует бесконечно много чисел, которые встречаются в треугольнике Паскаля хотя бы 4 раза.

Решение:

Запишем треугольника Паскаля следующим образом (повернув его на 45 градусов):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... \\ 1 & 2 & 3 & ... \\ 1 & 3 & 6 & ... \end{pmatrix}$$

Во втором столбце все числа идут подряд (то есть $1, 2, 3, ...$), ведь это числа вида $C_n^1 = n$. В силу симметрии треугольника, аналогично происходит и для второй строки.
Теперь давайте рассмотрим какое-то число a_{ij}, где $2 < i < j$, в этом треугольнике. Так как числа в треугольнике бесконечно возрастают, то чисел таких бесконечно много. Поймем, что в силу симметрии треугольника $a_{ij} = a_{ji}$. Причем по доказанному ранее такое число также есть во втором столбце и во второй строке, значит, оно встречается хотя бы четыре раза. Поскольку таких a_{ij} бесконечно много, то утверждение задачи верно.
Q.E.D.

Задание 23 (У6.5)

Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечётных чисел?

Решение:

Назовём строку треугольника Паскаля хорошей, если в ней все числа, кроме крайних, чётны. Заметим, что 2-ая строка хорошая.
Пусть n-я строка хорошая. Это значит, что $(x+1)^n = x^n + 1 + 2 \cdot f(x)$, где $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Возведя это равенство в квадрат, убедимся, что $(x+1)^{2n}$ имеет тот же вид, то есть $2n$-я строка тоже хорошая. Отсюда следует, что хороши все строки с номерами вида 2^k.
Пусть $n = 2^k$, то есть n-я строка хорошая. Тогда из построения треугольника Паскаля следует, что в предыдущей строке (с номером $2^k - 1$) все числа одной чётности, то есть все они нечётны. Кроме того, в n-й строке стоит группа из $n-1$ чётных чисел подряд. Поэтому в $(n+1)$-й строке под ней образуется группа из $n-2$ чётных чисел, в $(n+2)$-й – группа из $n-3$ чётных чисел, ..., в $(2n-2)$-й – одно чётное число (в середине). Таким образом, во всех строках с номерами от $2^k + 1$ до $2^{\{k+1\}} - 2$ чётные числа есть, значит, они точно не могут состоять только из нечетных чисел.
В итоге из нечетных чисел состоят только строки с номерами вида $2^k - 1$.

Ответ:

Те и только те строки, номер которых имеет вид $2^k - 1$.

Задание 24 (У7.1)

Пусть $k \leqslant \frac{n}{2}$. Функция f из двоичных слов длины n, в которых $k-1$ единица, в двоичные слова длины n, в которых k единиц, задана правилом. В слове $x = x_1x_2...x_n$ найдем такое максимальное j, что в префиксе слова x длины j единиц и нулей поровну. Если следующая после этого префикса цифра 0, заменим её на 1 и получим слово $f(x)$. Докажите, что эта функция тотальная и, более того, является инъекцией.

Решение:

УТВЕРЖДЕНИЕ НЕВЕРНО!!!

Задание 25 (У7.2)

Найдите количество таких слов длины 15 в алфавите $\{0, 1, 2\}$, в которых есть ровно 6 пар соседних одинаковых символов.

Решение:

Разобьем последовательность длины 15 из $\{0, 1, 2\}$ на группы подряд идущих одинаковых символов. Пусть в первой группе - a_1 одинаковых символов, во второй группе - a_2 одинаковых символов (они отличаются от символов в a_1), ..., в последней группе - a_k символов, причем все $a_i \geqslant 1$. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 15$. Заметим, что i-ой группой образуется $a_i - 1$ пар одинаковых символов, а пар одинаковых символов между разными группами не образуется (потому что мы так разбили на группы). Тогда у нас есть $(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \ldots + (a_k - 1) = a_1 + a_2 + \ldots + a_k - k = 15 - k$ пар одинаковы символов. Отсюда $15 - k = 6 \Rightarrow k = 9$, то есть у нас есть 9 групп.

Теперь нужно разбить 15 символов на 9 (непустых) групп одинаковых символов. Сделаем это с помощью шаров и перегородок: $\binom{14}{8}$. Далее есть 3 способа выбрать символ первой группы, 2 способа для второй группы (нельзя брать такой же символ) и аналогично по 2 способа для всех оставшихся групп

Итого $\binom{14}{8} \cdot 3 \cdot 2^8 = 2306304$ способа.

Ответ:

2306304

Задание 26 (У7.3)

Чего больше: инъективных отображений 10-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 10-элементное?

Решение:

Посчитаем количество инъекций 10-элементного множества в 20-элементное: $\mathscr{A}_{20}^{10} = \frac{20!}{10!}$.
Теперь посчитаем количество сюръекций таких, что $A \to B : \forall b_i \in B$ пробраз содержит ровно 2 элемента из A.
Количество таких сюръекций эквивалентно количеству слов длины 20 в 10-ти элементном алфавите, то есть $\mathscr{B} = \frac{20!}{2^{10}}$
Сравним: $\frac{20!}{2^{10}} > \frac{20!}{10!}$ (т.к. $10! > 2^{10}$).
Значит, количество части (не всех!) сюръекций уже больше количества всех инъекций.
Победа!!!!111!!

Ответ:

Инъективных отображений 10-элементного множества в 20-элементное меньше, чем сюръективных отображений 20-элементного множества в 10-элементное.

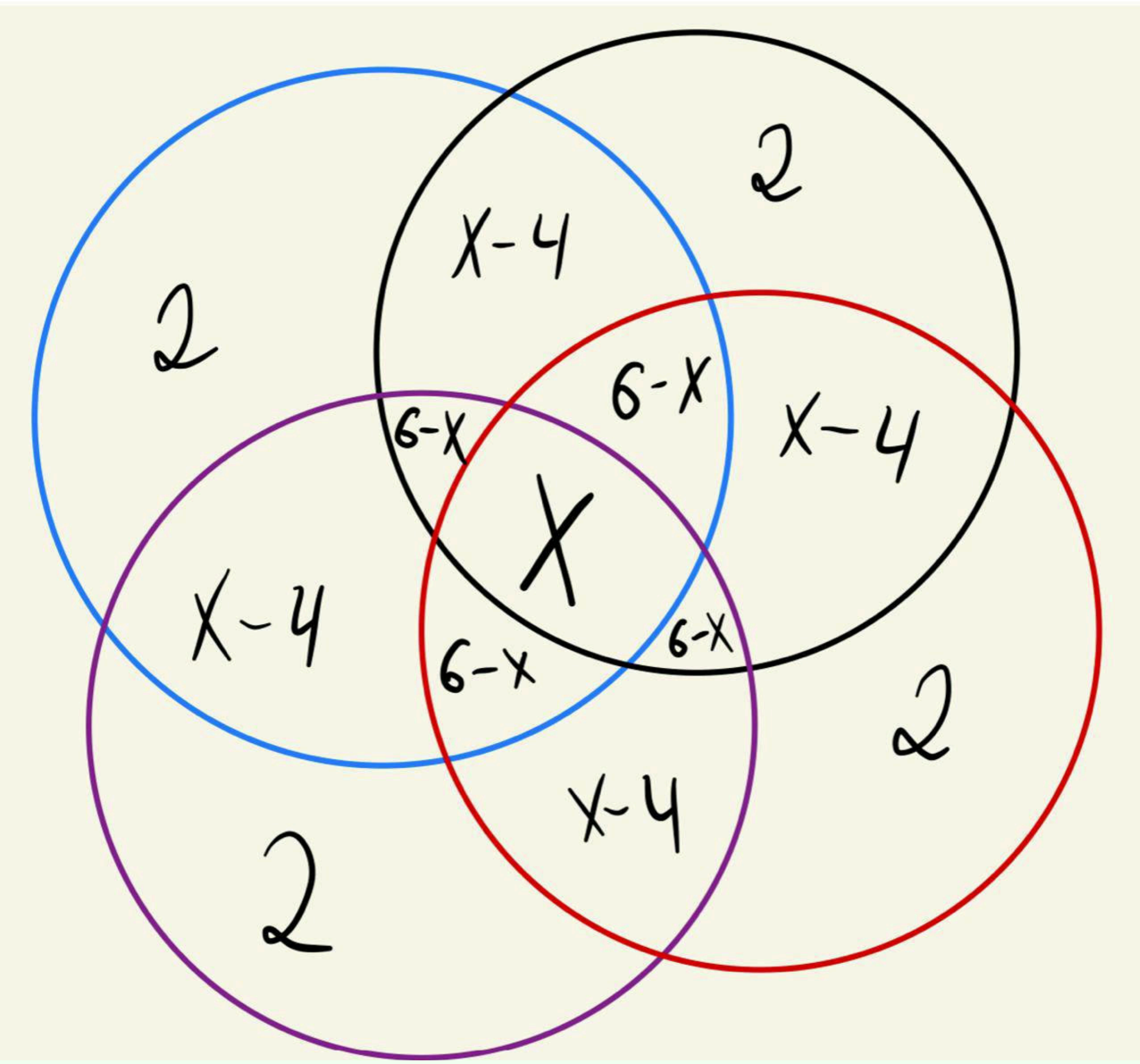
Задание 27 (У8.1)

В таблице $4 \times n$ записаны нули и единицы. В каждой строке записано 12 единиц, для каждой пары различных строк есть ровно 8 столбцов, в которых записаны единицы в этой паре строк, для каждой тройки попарно различных строк есть ровно 6 столбцов, в которых записаны единицы в этой тройке строк. Найдите количество столбцов матрицы, содержащих только единицы. Укажите все возможные ответы.

Решение:

Пусть A_1 — множество столбцов, для которых в 1 строке стоит 1, A_2 — множество столбцов, для которых во 2 строке стоит 1 и так далее. Тогда мы знаем, что $|A_i| = 12$, т.к. в каждой строке 12 единиц, $\forall i \neq j \ \left|A_i \cap A_j\right| = 8$, $\forall i, j, k \ \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| = 6$.

Пусть столбцов, где все единицы, x штук. Тогда $x = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$. Нарисуем круги Эйлера-Венна для этих множеств и расставим мощности, исходя из приведённых выше фактов:



картинка от Семёна!!!!!!

Ясно, что тогда $6 - x \geqslant 0$ и $x - 4 \geqslant 0$, то есть $4 \leqslant x \leqslant 6$.
Несложно привести примеры (мне лень их рисовать и вставлять в типст, прастити)

Ответ:

$4, 5, 6$.

Задание 28 (У8.2)

Докажите равенство:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+k-1-2i}{k-2i}$$

Решение:

Заметим, что $\binom{n+k-1-2i}{k-2}= \left(\binom{n}{,k-2i}\right)$ - сочетания с повторениями из n по k - 2i.
Будем решать такую задачу: найдем количество способов разделить k монет между n людьми так, чтобы каждый получил не более одной монеты. С одной стороны, ответом является $\binom{n}{k}$ (выбираем k людей и даем им по одной монете, остальным по 0).\ Обозначим за A_i все способы, при которых i-ый человек получает $\geqslant 2$ монеты. Тогда по формуле включений-исключений

$$|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| = \sum_{J \neq \varnothing} (-1)^{|J|+1} A_J,$$

$$A_J = \bigcap_{j \in J} A_j$$

Заметим, что

$$\sum_{|J|=i>0} |A_J| = \binom{n}{i} \left(\left(\binom{n}{k-2i}\right)\right)$$

так как мы сначала раздаем по 2 монеты выбранным i людям, а остальные $k-2i$ монеты распределяем как-то ($i \leqslant \frac{k}{2}$, так как получить по две монеты могут не более чем $\frac{k}{2}$ человек). Тогда,

$$\sum_{J \neq \varnothing} (-1)^{|J|+1} A_J = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \left(\binom{n}{k-2i}\right) = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \binom{n+k-1-2i}{k-2i}$$

Значит, вычитая из общего числа сочетаний те, в которых кто-то получил хотя бы 2 монеты, получим искомое:

$$\binom{n}{k} - \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \binom{n+k-1-2i}{k-2i} =$$

$$= \binom{n}{0} \binom{n+k-1}{k} + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+k-1-2i}{k-2i} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+k-1-2i}{k-2i}$$

Таким образом,

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+k-1-2i}{k-2i}$$

Q.E.D.

Задание 29 (У8.3)

Докажите, что

$$|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n| = \sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i \cup A_j| + 4 \sum_{i<j<k} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \ldots$$

Решение:

Заметим, что

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Rightarrow \chi_{A \triangle B} = \chi_{A \setminus B} + \chi_{B \setminus A} = \chi_A(1-\chi_B) + \chi_B(1-\chi_A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2\chi_A)(1-2\chi_B)$$

Значит,

$$\chi_{A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1-2\chi_{A_1}\right)\left(1-2\chi_{A_2}\right)\ldots\left(1-2\chi_{A_n}\right)$$

При раскрытии скобок $\frac{1}{2}$ сократится. Значит, в итоге получится сумма произведений каких-то характеристических функций с коэффициентами.

Более строго. Пусть $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, J \neq \varnothing$ — множество индексов тех функций, что мы взяли в произведение, а $A_J = \bigcap_{j \in J} A_j$. Тогда, аналогично доказательству формулы включений и исключений, получим в итоге

$$-\frac{1}{2}\left((-1)^{|J|} \cdot 2^{|J|} \cdot A_J\right) = (-1)^{|J|+1} \cdot 2^{|J|} A_J$$

Значит,

$$|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n| = \sum_{J \neq \varnothing} (-1)^{|J|+1} 2^{|J|} A_J$$

А это и есть искомая формула.

Q.E.D.

Задание 30 (У8.4)

Обозначим через $S_{n,k}$ долю сюръекций из [n] в [k] среди всех тотальных функций из [n] в [k]. Докажите, что если $k = \left[\frac{n}{\ln n}\right]$, то $S_{n,k} > 0,999$ при всех достаточно больших n.

Решение:

$$S_{n,k} = \frac{\text{число тотальных функций - число не сюръекций}}{\text{число тотальных функций}} = \frac{k^n - \sum\limits_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} \binom{k}{p} (k-p)^n}{k^n} =$$

$$1 - \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} \binom{k}{p} \left(\frac{k-p}{k}\right)^n = 1 - \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} \binom{k}{p} \left(1 - \frac{p}{k}\right)^n$$

1) Оценим $\left(1 - \frac{p}{k}\right)^n$

При $k = \left[\frac{n}{\ln n}\right]$ получим, что $\left(1 - \frac{p}{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\right)^n \leqslant \left(1 - \frac{p}{\frac{n}{\ln n}}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{\frac{pn}{\ln n}}\right)^n$

(так как знаменатель уменьшился, то $\frac{p}{\frac{n}{\ln n}}$ увеличилось, поэтому $-\frac{p}{\frac{n}{\ln n}}$ уменьшилось)

Так как по условию, нам надо проверить для достаточно больших n, то по теореме о переходе неравенства в предел, получим что:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{p}{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\right)^n \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{pn}{\ln n}}\right)^n = e^{-p\cdot\ln(n)} = \frac{1}{n^p}$$

2) Очевидно, что $0 \leqslant \sum\limits_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} \binom{k}{p} \left(\frac{k-p}{k}\right)^n$ (ведь число не сюръекций не может быть отрицательным)

3) Очевидно, что $\sum\limits_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} \binom{k}{p} \left(1 - \frac{p}{k}\right)^n \leqslant \sum\limits_{p=1}^{k} \binom{k}{p} \left(1 - \frac{p}{k}\right)^n$ (отбросили отрицательные слагаемые)

Т.к. $\sum\limits_{p=1}^{k} \binom{k}{p} \left(1 - \frac{p}{k}\right)^n = \sum\limits_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \left(1 - \frac{p}{k}\right)^n - 1$ то:

$$\sum_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} \binom{k}{p} \left(1 - \frac{p}{k}\right)^n \leqslant \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \left(1 - \frac{p}{k}\right)^n - 1$$

По теореме о переходе неравенства в предел, получим что:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p+1}\binom{k}{p}\left(1-\frac{p}{k}\right)^{n}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\left(1-\frac{p}{k}\right)^{n}-1\right)$$

При $k=\left[\frac{n}{\ln n}\right]$ получим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}(-1)^{p+1}\binom{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}{p}\left(1-\frac{p}{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\right)^{n}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\binom{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}{p}\left(1-\frac{p}{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\right)^{n}-1\right)$$

Из первого пункта, знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{p}{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\right)^{n}\leqslant\frac{1}{n^p}$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}(-1)^{p+1}\binom{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}{p}\left(1-\frac{p}{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\right)^{n}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\binom{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}{p}\cdot\frac{1}{n^p}-1\right)$$

Мы видим Бином Ньютона, поэтому :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\binom{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}{p}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{p}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\binom{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}{p}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{p}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left((e)^{\frac{1}{\ln n}}-1\right)=1-1=0$$

4) По теоеме о зажатой последовательности:

$$0\leqslant\sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}(-1)^{p+1}\binom{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}{p}\left(1-\frac{p}{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\right)^{n}\leqslant\sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\binom{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}{p}\left(1-\frac{p}{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\right)^{n}$$

Получили, что $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}(-1)^{p+1}\binom{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}{p}\left(1-\frac{p}{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\right)^{n}\leqslant 0$

Значит, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}(-1)^{p+1}\binom{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}{p}\left(1-\frac{p}{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\right)^{n}=0$

5) Получается, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\sum\limits_{p=1}^{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}(-1)^{p+1}\binom{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}{p}\left(1-\frac{p}{\left[\frac{n}{\ln n}\right]}\right)^{n}\right)=1$, т.е. при

очень больших n (при $n\to\infty$), будет выполнено, что $S_{n,k}>0,999$.

Ч.Т.Д.

Задание 31 (У9.1)

Рассмотрим все такие бинарные отношения R, S на множестве A из 10 элементов, что $R \circ S = \varnothing$. Какое максимальное возможное количество пар может быть в $S \circ R$?

Решение:

Оценка.
Заметим, что $\operatorname{range}(S) \cap \operatorname{dom}(R) = \varnothing$, так как иначе $S \circ R \neq \varnothing$. Значит, $|\operatorname{range}(S)| + |\operatorname{dom}(R)| \leqslant 10$, т.к. иначе они пересекаются.
Также заметим, что $|S \circ R| \leqslant |\operatorname{range}(S)| \cdot |\operatorname{dom}(R)|$ (так как в композиции $S \circ R$ будут пары вида (x, y), где $x \in \operatorname{dom}(R), y \in \operatorname{range}(S)$).
Получаем, что $|S \circ R| \leqslant 5 \cdot 5 = 25$ (максимум достигается при $|\operatorname{range}(S)| = |\operatorname{dom}(R)| = 5$).

Пример.
Пусть $A = \left\{a_1, ..., a_{\{10\}}\right\}$,
$R = \{(a_1, a_i), (a_2, a_i), (a_3, a_i), (a_4, a_i), (a_5, a_i) : 1 \leqslant i \leqslant 10\}$,
$S = \{(a_i, a_6), (a_i, a_7), (a_i, a_8), (a_i, a_9), (a_i, a_{10}) : 1 \leqslant i \leqslant 10\}$.
Тогда $R \circ S = \varnothing$, $S \circ R = \left\{\left(a_i, a_j\right) : 1 \leqslant i \leqslant 5, 6 \leqslant j \leqslant 10\right\} \Rightarrow |S \circ R| = 25$.

Ответ:

25

Задание 32 (У9.2)

Сколько существует антисимметричных не транзитивных бинарных отношений на множестве $\{1, 2, 3\}$?

Решение:

1. Заметим, что добавление петли к бинарному отношению не изменяет его транзитивности. Если в изначальном отношении была пара $(a, b), (b, c)$, такая, что $(a, c) \notin R$, то при добавлении любой пары вида (x, x) это не изменится. Значит, далее мы будем рассматривать отношения без петель, а после умножим их число на $2^3 = 8$, ведь именно столько способ добавить в отношение петли.
2. Раз мы рассматриваем не транзитивные антисимметричные отношения без петель, то в них или 2, или 3 ребра: если меньше, то отношение будет транзитивным, а если больше — симметричным. Подходящих графов на 3 рёбрах 2: это треугольники-циклы с двумя разными ориентациями рёбер. Подходящих графов на 2 рёбрах 6. Ибо если два ребра приходят в одну вершину, отношение станет транзитивным, значит, они должны идти последовательно. Вариантов так сделать 6, т.к. от каждой из трёх вершин мы можем идти в двух противоположных направлениях.

Значит, всего вариантов $8 \cdot (2 + 6) = 64$.

Ответ:

64

Задание 33 (У9.3)

В отношении 3 элемента. Сколько элементов может быть в его транзитивном замыкании?

Решение:

Оценка.
Пусть $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$
Очевидно, что раз $R \subseteq R^*$, то $|R^*| \geqslant 3$. С другой стороны, для 3 элементов есть 6 упорядоченных пар, и каждая эта пара добавляет в R^* не больше одного элемента. Значит, $|R^*| \leqslant 9$.
Покажем, что не может быть такого, что $|R^*| = 8$:
Докажем для 8: пусть в замыкании отсутствует (a, b). Тогда есть (a, c) и (c, b). Противоречие по транзитивности. Для 7 чуть посложней, но тоже правда (там несложно доказывается, что 2 элемента либо в одной строке, либо в одном столбце и что минимально 4 элемента в R для построения данной матрицы).

Пример.
3 элемента: $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\} = R^*$
4 элемента: $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}; R^* = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
5 элементов: $R = \{(1, 1), (3, 2), (2, 3)\}; R^* = \{(1, 1), (3, 2), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$
6 элементов: $R = \{(1, 2), (3, 2), (2, 3)\}; R^* = \{(1, 2), (3, 2), (2, 3), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$
9 элементов: $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}; |R^*| = 9$

Ответ:

$3, 4, 5, 6, 9$

Задание 34 (У9.4)

В множестве A содержится n элементов. Какое минимальное число элементов может содержать бинарное отношение R на множестве A, чтобы его транзитивное замыкание было полным бинарным отношением $A \times A$?

Решение:

Пример.

$|R| = n$: пусть $A = \{1, 2, ..., n\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), ..., (k, k+1), ..., (n-1, n), (n, 1)\}$. Тогда транзитивное замыкание R^* будет являться полным отношением, т.к. $R^* = R \cap R^2 \cap R^3 \cap ...$ и каждое R^k будет содержать элементы вида $(x, (x+k) \bmod n)$.

Оценка.

Докажем, что это минимум, то есть что $|R| \geqslant n$.

Предположим, что $|R| < n$. Значит, $\exists x : x \notin \mathrm{dom}(R)$. Тогда $x \notin \mathrm{dom}(R^2)$, т.к. $R^2 = \{(a, c) \mid a \in R, b \in R, \exists b : (a, b) \in R, (b, c) \in R\}$. Аналогично $x \notin \mathrm{dom}(R^3), \mathrm{dom}(R^4), ...$ (для большей строгости здесь можно применить индукцию, $R^{\{n+1\}} = R^n \circ R$). Значит, $x \notin \mathrm{dom}(R^*)$, то есть отношение R^* не полное.

Ответ:

n

Задание 35 (У10.1)

Докажите, что при любых $0 \leqslant k < n$, где kn — чётное, существует граф на n вершинах, степени которых равны k.

Решение:

Расположим точки в вершинах правильного n-угольника:

1. k — четное. Каждую точку соединим с k соседними ($\frac{k}{2}$ соседей справа и $\frac{k}{2}$ соседей слева). Это можно сделать, так как $k < n$. Тогда степень каждой вершины будет равна k.
2. k — нечетное $\Rightarrow n$ — четное. Соединим каждую вершину с $\frac{k-1}{2}$ соседями справа, $\frac{k-1}{2}$ соседями слева и симметричной относительно центра многоугольника вершиной (она существует, так как n четное, и отличается от других вершин, так как $\frac{k-1}{2} < \frac{n-1}{2}$). Тогда степень каждой вершины тоже будет равна k.

Q.E.D.

Задание 36 (У10.2)

Найдите наименьшее количество вершин в графе, в котором есть простой в рёбрах путь длины 2023.

Решение:

Оценка.

Пусть в графе не больше 64 вершин. Тогда рёбер в нем не больше $\frac{64 \cdot 63}{2} = 32 \cdot 63 = 2016 < 2023$. Значит, в графе хотя бы 65 вершин.

Пример.

Рассмотрим полный граф на 65 вершинах. В нём $\frac{65 \cdot 64}{2} = 2080 > 2023$ рёбер, при этом он эйлеров, т.к. степень каждой вершины равна 64 — чётная. Значит, в нём есть простой в рёбрах путь длины 2080, значит и длины 2023 найдётся.

Ответ:

65

Задание 37 (У10.3)

В графе $2n+1$ вершина, степень каждой равна n. Докажите, что после удаления любого подмножества из менее чем n рёбер получается связный граф.

Решение:

Предположим противное: пусть мы удалили не больше чем n рёбер, но получили не связный граф. Значит, в нём найдётся компонента связности A, в которой не больше, чем n вершин.
Пусть там $a \leqslant n$ вершин. Степень каждой из этих вершин не больше, чем $a-1$, значит, для этих вершин было удалено хотя бы $n-(a-1)=n-a+1$ рёбер, которые исходят в вершины не из компоненты A (т.к. иначе компоненты оказались бы связаны).
Значит, всего было удалено по меньшей мере $a(n-a+1)$ рёбер, но менее n. Имеем неравенство:

$$a(n-a+1)<n$$

$$an-a^2+a-n<0$$

$$n(a-1)-a(a-1)<0$$

$$(n-a)(a-1)<0$$

Но $n \geqslant a$ и $a \geqslant 1$. Значит, $(n-a)(a-1) \geqslant 0$. Противоречие!
Q.E.D.

Задание 38 (У10.4)

Докажите, что при любом натуральном $n \geqslant 1$ существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, ..., n, n$.

Решение:

Докажем по индукции.
База. Для $n = 1$ есть 2 вершины. Соеденияем их ребром. Получили две вершины со степенями $(1, 1)$.
Шаг. Допустим, для $n = k$ доказали. Докажем для $n = k + 1$:
Построим граф на основе графа с $1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., k, k$ степенями вершин:

1. Припишем к уже существующему графу вершины x, y.
2. Соединим x с половиной из тех вершин, которые там есть, то есть с вершинами со степенями $1, 2, ..., k$.
3. Соединим ребром x и y.

Посчитаем теперь степени всех вершин в графе: Степень y равна 1.
Степени той половины вершин, которые не трогали: $1, 2, ..., k$. Степени тех вершин, которые соединили с $x : 2, 3, ..., k + 1$.
Степень x равна $k + 1$.
Итого, для $k + 1$ построили граф с $1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., k + 1, k + 1$ степенями вершин.
Q.E.D.

Задание 39 (У11.1)

Докажите, что в ориентированном графе G нет пути из вершины s в вершину t тогда и только тогда, когда вершины графа можно разбить на два непересекающихся множества S и T, таких что $s \in S$, $t \in T$ и в графе нет рёбер из вершин множества S в вершины множества T.

Решение:

1. Если разбиение на S и T существует, то очевидно, что пути нет.
2. Если такого пути нет, то возьмем в качестве S область достижимости вершины s. В T поместим все не попавшие в S вершины. Т не пустое, потому что в $t \in T$.
   Если между вершинами $u \in S$ и $v \in T$ есть ребро, то v принадлежит области достижимости вершины s, т.к есть пусть $v, ..., u, v \Rightarrow v \notin T$. Значит, таких рёбер нет, и мы получили искомое разделение на множества S и T.

Q.E.D.

Задание 40 (У11.2)

Найдите максимальное количество простых путей между двумя вершинами ориентированного ациклического графа на n вершинах. (Максимум берётся по всем графам на n вершинах и всем парам вершин в графах.)

Решение:

Оценка.
Рассмотрим путь произвольный $u \to v$ в графе G:
Любой простой путь выглядит так $\{u, x_1, x_2, x_3, ..., x_k, v\}$.
В этом пути помимо u, v может быть не больше $n - 2$ вершины. Такие вершины мы можем либо включать в наш путь, либо нет. Итого всего не больше 2^{n-2} возможных путей.

Пример.
Рассмотрим граф с вершинами на натуральных числах от 1 до n, в котором ребра ведут от вершины k в все вершины больше k.
Посчитаем в нем пути между $u = 1$ и $v = n$. Эта задача равносильна поиску числа монотонных путей от 1 до n, а их число равно количеству подмножеств множества $\{2, 3, ..., n - 1\}$ (это и есть вершины, которые мы или включаем, или не включаем в путь uv), а таких 2^{n-2}.

Ответ:

2^{n-2}

Задание 41 (У11.3)

а) Докажите, что есть такое двоичное слово, в котором любая комбинация из 10 нулей и единиц встречается ровно один раз.
б) Пусть двоичное слово удовлетворяет условию предыдущего пункта и начинается на 0100011101. Найдите последние 8 цифр этого слова.

Решение:

а) Построим орграф G, где вершины - всевозможные двоичные слова длины $n-1$, а ребро проведено из a в b, если существует двоичное слово длины n, у которого начало совпадает с a и конец совпадает с b (заметим, что это имеет место тогда и только тогда, когда конец длины $n-2$ комбинации a совпадает с началом длины $n-2$ комбинации b).
Заметим, что только в вершинах 00…00 и 11…11 есть петли, но далее будем считать, что петель нет, так как орграф без петель эйлеров если и только если тот же ограф, но с некоторыми петлями, эйлеров.
Докажем, что этот граф эйлеров:

1. Исходящая степень каждой вершины, очевидно, равна 2, поскольку конец длины $n-2$ комбинации a можно ровно двумя способами продолжить до комбинации длины $n-1$ с таким началом. Аналогично, и входящая степень любой вершины равна 2.
2. Установим, что орграф G сильно связный. Достаточно показать, для любых двух его вершины $a = a_1a_2...a_{n-1}$ и $b = b_1b_2...b_{n-1}$ существует путь из a в b. Имеем
$a_1a_2...a_{n-1} \to a_2a_3...a_{n-1}b_1 \to a_3...a_{n-1}b_1b_2 \to ... \to a_{n-1}b_1b_2...b_{\{n-2\}} \to b_1b_2...b_{n-2}b_{n-1}$
Значит, орграф G эйлеров (по критерию эйлерового орграфа).

Заметим, что каждое ребро ab соответствует единственной комбинации длины n, разным комбинация соответствуют разные ребра. Всего ребер 2^n, так как вершин (комбинаций длины $n-1$) 2^{n-1} и из каждой вершины исходит по 2 ребра. В орграфе G существует эйлеров цикл, то есть цикл, проходящий по всем ребрам ровно по одному разу. Такой цикл при $n = 10$ и будет давать необходимую нам последовательность.

б) Покажем, что любое подходящее слово соответствует некоторому эйлерову циклу в построенном нами орграфе. Пусть $x_1x_2x_3...x_m$ - некоторое такое слово. Заметим, что его длина $m = 2^n + n - 1$, так как в нем 2^n слов длины n (первое слово начинается с 1 позиции и заканчивается на n позиции, второе слово начинается с 2 позиции и заканчивается на $n+1$ позиции, …, 2^n слово начинается с 2^n позиции и заканчивается на $2^n + n - 1$ позиции).
Любая комбинация $x_i...x_{i+n-1}$ длины n имеет начало $a_i = x_i...x_{i+n-2}$ и конец $a_{i+1} = x_{i+1}...x_{i+n-1}$, соединенные стрелкой в нашем орграфе G.
Таким образом, слово соответствует пути $a_1a_2...a_{2^n+1}$ в оргафе G, причем в этом пути содержатся все 2^n ребер орграфа G без повторений. Докажем, что это цикл, т.е. что $a_{2^n+1} = a_1$. Предположим противное. Тогда в вершину a_1 входят ровно два ребра, а, значит, среди вершин $a_2, ..., a_{2^n}$ она встречается ровно дважды (т.к. путь проходит по всем ребрам). Но тогда в нашем пути содержится ровно три ребра с началом a_1, притом что в G различных таких ребер два, т. е. некоторое ребро повторяется. Противоречие с тем, что путь проходит по каждому ребру ровно один раз.

Вернемся к условию: при $n = 10$ наш путь начинается с 0100011101, т.е. $a_1 = 010001110$, тогда $a_{2^n} = a_1$ (по доказанному выше), значит, последние 9 символов последовательности - 010001110, а последние 8 символов - 10001110

Ответ:

10001110

Задание 42 (У12.1)

а) В дереве 100 вершин. Докажите, что существует путь из не более чем 196 рёбер, содержащий все вершины этого дерева.
б) Приведите пример дерева на 100 вершинах, в котором любой путь из менее чем 196 рёбер не содержит хотя бы одну вершину. (Пример должен быть обоснован, разумеется.)

Решение:

а) Докажем по индукции, что в дереве на $n \geqslant 3$ вершинах есть путь длины $2n-4$, содержащий все вершины этого дерева.
База. Дерево для $n = 3$ это три последовательно соединённые вершины. Очевидно, для них есть путь длины 2, содержащий все их.
Шаг. Пусть любое дерево на k вершинах содержит путь длины $2k-4$, содержаший все k вершин.
Рассмотрим произвольное дерево на $k+1$ вершине. Удалим из него висячую вершину u. Останется дерево на k вершинах.
Построим для этого дерева путь длины $2k-4$, который содержит все вершины. В этом пути встретится вершина v, которая в изначальном графе была соединена с вершиной u (она такая единственная). Добавим в наш путь длины $2k-4$ два ребра: v, u и u, v («зашли за молоком и помидорами», как сказал Семён). Получили путь длины $2k-2$, который содержит все $k+1$ вершину.
Q.E.D.
б) Рассмотрим «солнышко»: пусть у одной вершины степень 99, а все другие — висячиие. Тогда, если мы начинаем из центра солнышка, за $\leqslant 195$ рёбер сможем пройти не больше чем $\dfrac{194}{2} + 1 = 98$ вершин. Если мы начинаем из луча солнышка, то первым ходом приходим в центр солнышка, а оттуда идём дальше по лучам. За $\leqslant 195$ рёбер сможем пройти не больше чем $\dfrac{194}{2} + 2 = 99 < 100$ вершин. Значит, любой путь из менее чем 196 рёбер не содержит хотя бы одну вершину.

Задание 43 (У12.2)

Правильный n-угольник разбит диагоналями на треугольники (диагонали пересекаются разве что в вершинах многоугольника). Вершинами графа T^* являются треугольники разбиения. Два треугольника связаны ребром в графе T^* , если у них есть общая сторона. Докажите, что T^* — дерево

Решение:

Основная идея: доказываем по индукции. Говорим, что в графе T^* найдется треугольник, две стороны которого совпадают со сторонами n-угольника (лемма). Тогда в графе этот треугольник образует висячую вершину. Выбросим её, по предположению будет дерево, вернем вершину обратно, также будет дерево.

Более строго:
Лемма: в разбиении n-угольника ($n \geqslant 3$) на треугольники найдутся две несоседние вершины, из которых не ведут диагонали. Докажем индукцией по n:
База для $n = 3$ верна.
Шаг. Пусть утверждение верно для всех $k \leqslant n$ ($n \geqslant 3$), докажем для $k = n + 1$. Рассмотрим произвольную диагональ (она найдется, так как $n + 1 \geqslant 4$), она разбивает $(n + 1)$-угольник на два многоульника, у которых не больше n вершин. По предположению индукции в каждом из них найдутся две несоседние вершины, из которых не ведут диагонали. При этом в каждом из двух многоугольников к диагонали может примыкать не более одной вершины (так как вершины несоседние). Значит, в $(n + 1)$-угольнике есть хотя бы $4 - 2 = 2$ несоседние вершины, из которых не ведут диагонали.

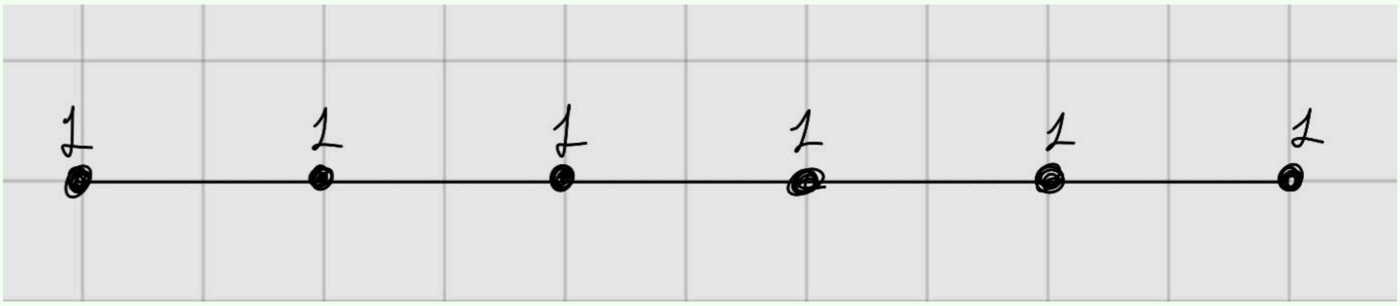
Докажем индукцией по $n \geqslant 3$, что граф из исходной задачи является деревом. База для $n = 3$ верна: в графе одна вершина - дерево.
Пусть утверждение верно для $n \geqslant 3$, докажем для $n + 1$. По доказанной лемме, в $(n + 1)$-угольнике найдется вершина A, из которой не выходит диагоналей. Это значит, что соседние с ней вершины соединены диагональю (иначе не получится разбиения на треугольники). Тогда треугольник A, образованный вершиной X, граничит ровно с одним из остальных треугольников (так как две стороны треугольника A являются сторонами $(n + 1)$-угольника и не могут ни с кем граничить). То есть в графе T^* вершина X является висячей. Выбросим эту вершину, по предположению индукции получившийся граф является деревом. Вернем висячую вершину, граф останется связным и не появится циклов, поэтому он тоже будет деревом.
Q.E.D.

Задание 44 (У12.3)

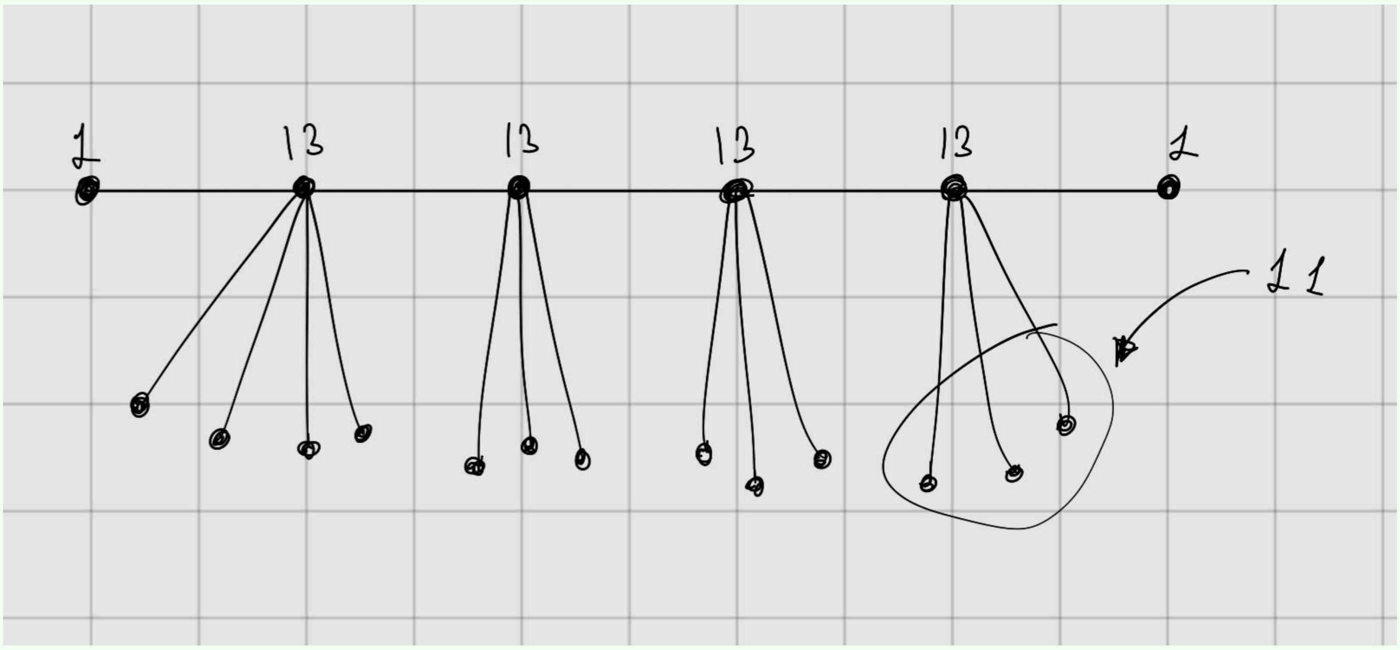
В дереве на 315 вершинах нет простого пути длины 6. Докажите, что в этом дереве есть вершина степени не меньше 14.

Решение:

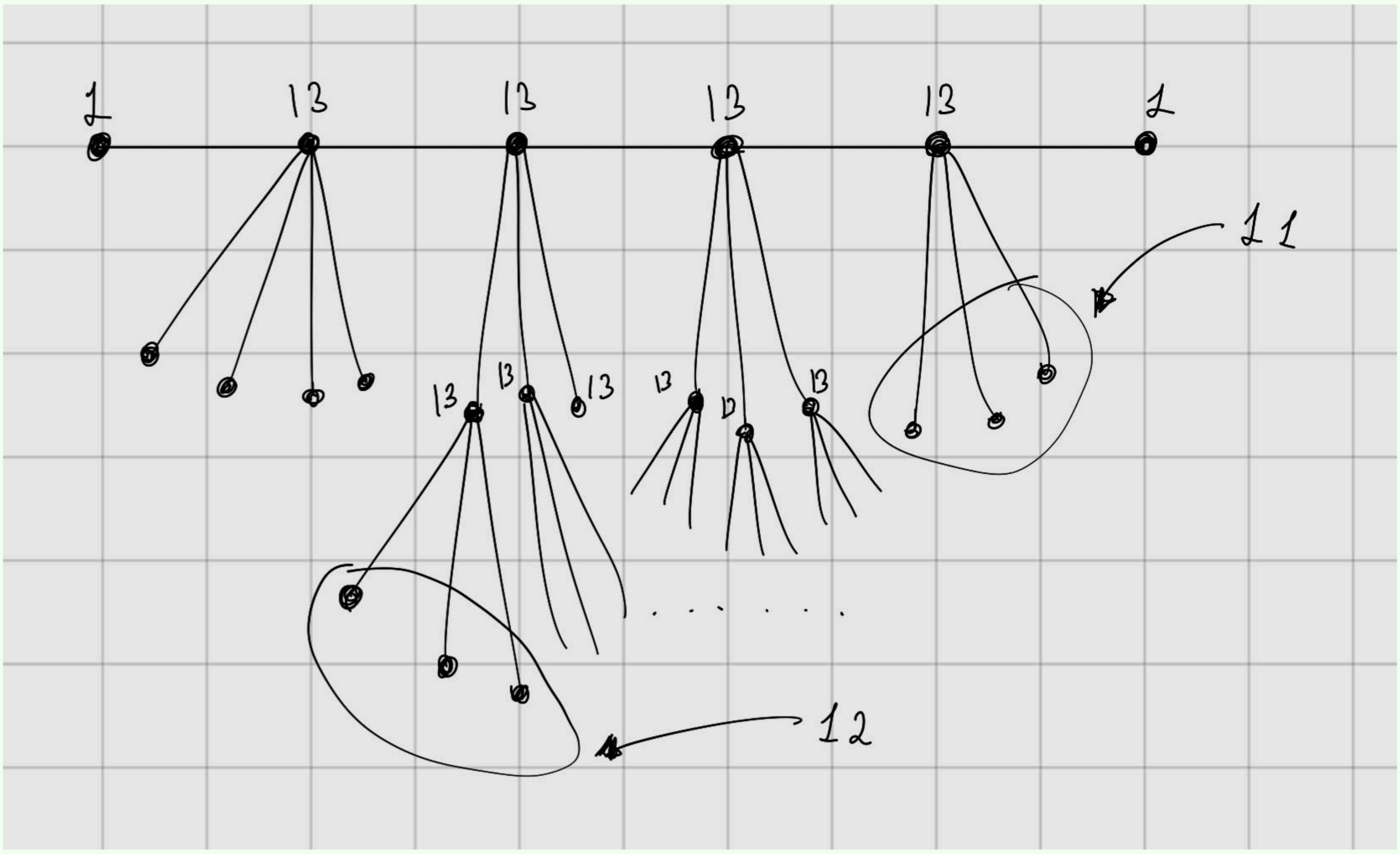
Построим граф, в котором максимальная длина пути - 5, а максимальная степень вершины 13, и посмотрим, какая там получиться сумма степеней вершин.
Построим путь длины 5.



К вершинам по краям мы не можем ничего добавить, т.к. иначе увеличится длина максимального пути. Добавим ко всем вершинам кроме них ещё по 11 рёбер.



После этого к вершинам которые исходят из двух крайних мы не можем ничего добавить, не увеличив максимальный путь. Тогда к рёбрам, исходящим из двух центральных вершинан, добавим по 12 рёбер.



Посчитаем, сколько всего получилось вершин: $6 + 11 \cdot 4 + 2 \cdot 11 \cdot 12 = 314 < 315$.
Значит, вершина степени $\geqslant 13$ найдётся.
Q.E.D.

Задание 45 (У12.4)

В графе 15 вершин, а каждое ребро покрашено в один из трёх цветов. Известно, что если удалить рёбра любого одного цвета, то граф останется связным. Какое минимальное число рёбер может быть в таком графе?

Решение:

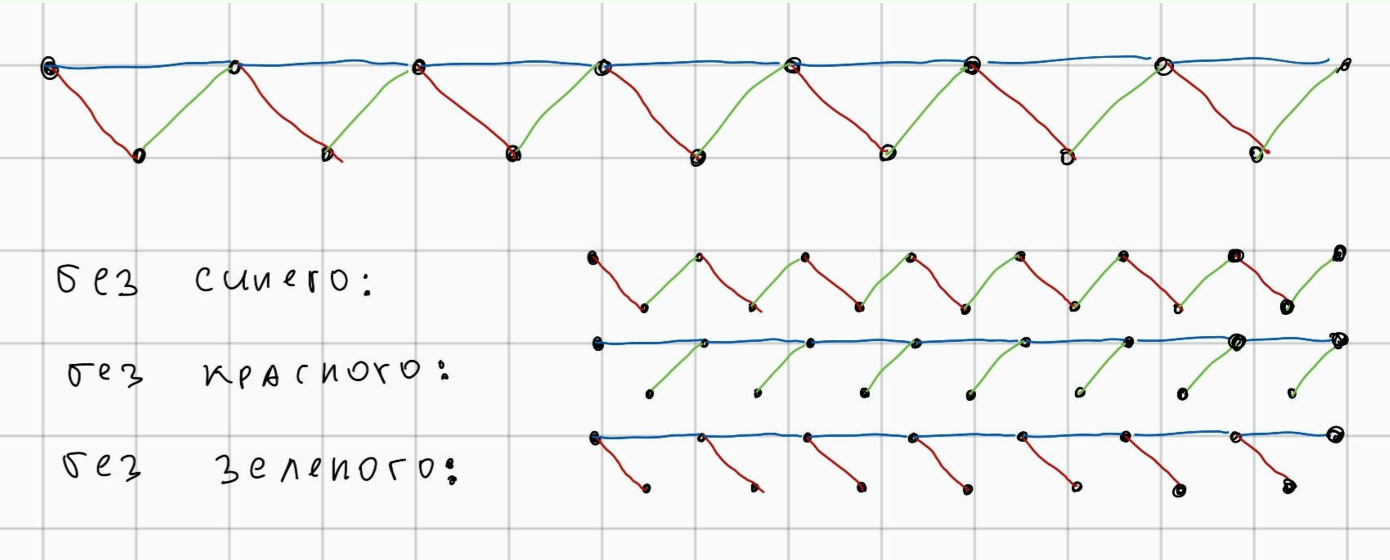
Оценка.

Обозначим за x, y, z количество рёбер трех разных цветов. В связном графе на n вершинах должно быть минимум $n-1$ ребер. Получается, ребер каждых двух цветов должно быть минимум 14. Запишем это в систему:

$$\begin{cases} x + y \geqslant 14 \\ x + z \geqslant 14 \\ y + z \geqslant 14 \end{cases}$$

Сложим все неравенства, получим, что $x + y + z \geqslant \dfrac{14 \cdot 3}{2} = 21$.

Пример.



Задание 46 (У13.1)

Докажите, что в любом связном графе найдётся такое остовное корневое дерево, что любое ребро графа соединяет вершины на слоях, номера которых различаются не больше, чем на 1.
13.3 добавим (a, b), посмотрим, если что-то поломалось, то a и b были сравнимы изначально
13.4 а) или в конец 0 добавить, или поменять бит на конце
б) либо длина уменьшается, либо уменьшается количество единичек

Решение:

Запустим обход в ширину (BFS) из произвольной вершины. Получим некоторое корневое дерево. Предположим, что в ней есть ребро, соединяющее вершины, между которыми хотя бы один слой. Тогда при нашем обходе в ширину мы должны были добавить вершину, которая находится ниже, раньше. Значит, мы получили искомое остовное корневое дерево.
Q.E.D.

Задание 47 (У13.2)

Найдите все такие n, что существует неориентированный граф $G = (V, E)$ на n вершинах, каждая имеет степерь 3, а в множестве рёбер E этого графа можно выделить два непересекающихся множества E_1, E_2, что графы $T_1 = (V, E_1)$ и $T_2 = (V, E_2)$ являются деревьями.

Решение:

Оценка.

С одной стороны, в графе $\frac{3n}{2}$ рёбер, причем $n \geqslant 4$. С другой стороны, в T_1 и в T_2 ровно по $n-1$ рёбер. Имеем

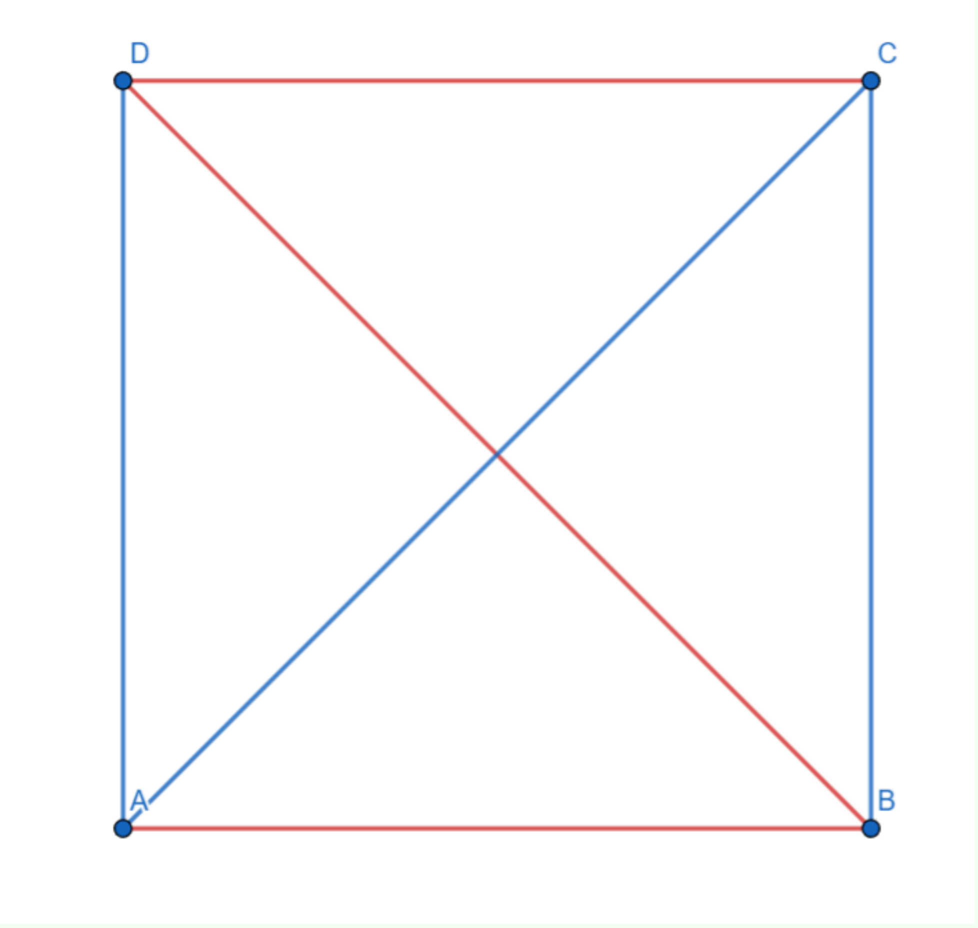
$$\frac{3n}{2} \geqslant 2n - 2$$

$$3n \geqslant 4n - 4$$

$$n \leqslant 4$$

Значит, $n = 4$.

Пример.



Искомые разбиения показаны красным и синим цветом.

Ответ:

$n = 4$.

Задание 48 (У13.3)

Пусть $a \neq b$ несравнимы в частичном порядке P на X. Докажите, что существует такой частичный порядок $P_a \supset P$, в котором $a \underset{P_a}{<} b$, и такой частичный порядок $P_b \supset P$, в котором $b \underset{P_b}{<} a$.

Решение:

Рассмотрим $P_a = (P \cup \{(a, b)\})^*$, то есть транзитивное замыкание отношения $P \cup \{(a, b)\}$ и докажем, что он подходит, то есть, что от добавления этой пары никаких условий порядка не «сломалось». Далее будем использовать представление порядка в виде орграфа.

1. Покажем, что $(b, a) \notin P_a$. Действительно, пусть $(b, a) \in P_a$. Это значит, что $\exists c \in X : b \underset{P}{<} c \underset{P}{<} a$, т.к. пара (b, a) появилась в результате транзитивного замыкания. Но тогда $b \underset{P}{<} a$, что противоречит тому, что a и b несравнимы в P.

2. Покажем, что $(a, a) \notin P_a$. Действительно, пусть $a < P_a a$. Тогда $\exists c \in X : b \underset{P}{<} c \underset{P}{<} a$ или $b \underset{P}{<} a$. Но из обоих условий следует сравнимость a и b в P.

3. Покажем, что $(b, b) \notin P_a$. Действительно, пусть $a < P_a a$. Тогда $\exists c \in X : b \underset{P}{<} c \underset{P}{<} a$ или $b \underset{P}{<} a$. Но из обоих условий следует сравнимость a и b в P.

4. Пусть $(x, y) \in P$. Покажем, что $(y, x) \notin P_a$. Дейстительно, пусть $(y, x) \in P_a$. Тогда $y \underset{P}{<} a \underset{P_a}{<} b \underset{P}{<} x$. Но тогда имеем $a < P_a b \underset{P}{<} x \underset{P}{<} y \underset{P}{<} a$, то есть $a \underset{P_a}{<} a$, а мы доказали, что это не так.

Таким образом, P_a — искомый частичный порядок. P_b строится аналогично, как транзитивное замыкание $P \cup (b, a)$. ■

Задание 49 (У13.4)

а) Найдите в лексикографическом порядке на двоичных словах все соседние пары (u, v).
б) Существует ли бесконечная убывающая цепь $u_0 > u_1 > ...$ в лексикографическом порядке на двоичных словах?

Решение:

а) Рассмотрим произвольное двоичное слово $u = u_n u_{n-1} ... u_1$ и найдём для него все соседние ему слова. Утверждается, что они могут быть трёх видов:
1. $v_1 = u_n u_{n-1} ... u_1 0$,
2. $v_2 = u_n u_{n-1} ... u_1 (1 - u_1)$,
3. $v_3 = u_n u_{n-1} ... u_2$, если $u_1 = 0$.

Очень лень это расписывать, так что закончу доказательство словами Волчёнкова Сергея Геннадьевича: как может быть иначе?
б) Как мы поняли в предыдущем пункте, если $u_0 > u_1$, то или слово u_1 короче u_0, или единиц в u_1 меньше, чем u_0. То есть, в этой цепочке величина, равная сумме количества единиц и длины слова, монотонно уменьшается. Значит, бесконечной такая цепь быть не может.

Ответ:

б) Нет.

Задание 50 (У14.1)

Изоморфны ли порядки $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}$ (упорядочение $\mathbb{Q}$ по обычному сравнению чисел)?

Решение:

На самом деле эта задача — частный случай теоремы об изоморфизме любых двух счётных плотных линейно упорядоченных множеств без наибольшего и наименьшего элементов. Докажем эту теорему.
Пусть A и B — данные множества. Будем строить соответствие пошагово.
Пусть на некотором шаге мы получили соответствие множеств $A_n \subset A$ и $B_n \subset B$ из n элементов. Возьмём любой элемент одного из множеств (не умаляя общности, из A), который не вошёл в A_n. Посмотрим, в каком отношении он находится со всеми элементами из A_n. Он оказался либо наибольшим, либо наименьшим элементом, либо стоящим между некоторыми элементами a_i и a_{i+1}. Так как B — плотное множество без наибольших и наименьших элементов, мы можем выбрать элемент из B, находящийся в соответственном отношении со всеми элементами из B_n. Проведём соответствие между этими элементами.
Так мы научились получать из соответствия для n элементов соответствие для $n+1$ элемента. Воспользуемся счётностью множеств: пронумеруем все элементы множеств A и B. На каждом чётном шаге будем брать ещё не взятый элемент из A с наименьшим номером, а на нечётном — из B.
Такой изоморфизм можно изобразить попеременным «шаганием» между двумя множествами A и B, где на каждом шаге мы выбираем какой-то элемент из множества, куда пришли на предыдущем шаге, и выбираем для него соответствующий в другом множестве. ■

Ответ:

Да.

Задание 51 (У14.2)

Изоморфизмы ли порядки $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}+\mathbb{R}$ (упорядочение $\mathbb{R}$ по обычному сравнению чисел)?

Решение:

В обычном $\mathbb{R}$ по принципу полноты Вейерштрасса у каждого ограниченного подмножества есть точная верхняя грань.
Рассмотрим подмножество $\mathbb{R}+\mathbb{R}$, состоящее только из чисел левого $\mathbb{R}$. Оно ограничено: действительно, любое число из правого $\mathbb{R}$ является его верхней гранью. С другой стороны, точной верхней грани у этого подмножества не существует, так как в $\mathbb{R}$ не существует минимального элемента.
Значит, эти порядки не изоморфны.

Ответ:

Нет.

Задание 52 (У15.1)

На прямой задано такое семейство интервалов, что для любых двух интервалов семейства a и b верно, что длина интервала $a \cap b$ меньше половины длины каждого из интервалов a и b. Докажите, что это семейство интервалов конечно или счётно.

Решение:

Задание 53

На прямой расположено семейство отрезков ненулевой длины, причем известно, что среди любых трех отрезков хотя бы два не пересекаются. Докажите, что это семейство конечно или счётно.

Решение:

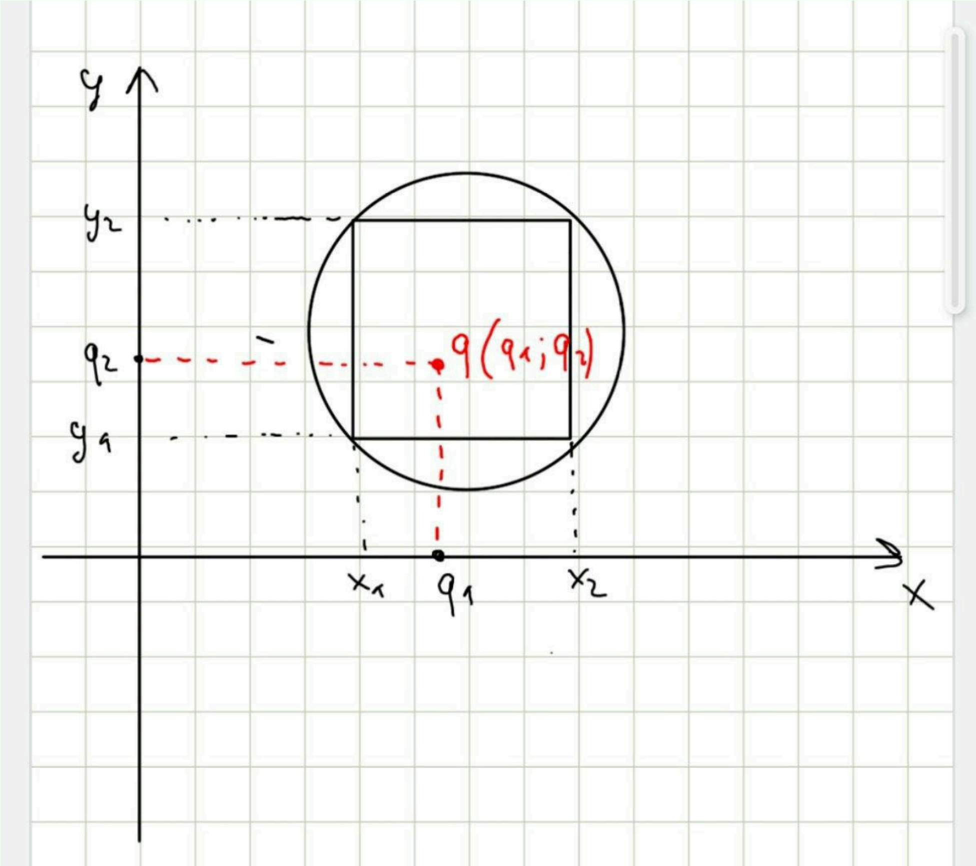
Задание 54 (У15.3)

Докажите, что множество непересекающихся восьмёрок на плоскости конечно или счётно. (Восьмёрка — это объединение двух касающихся внешним образом окружностей, точка окружностью не считается.)

Решение:

Введём на плоскости прямоугольную систему координат. Внутри любой окружности содержится точка с рациональными координатами.

Доказательство этого факта (рисунок в помощь):



В любую окружность можно вписать квадрат, который можем поворачивать под любым углом относительно начала координат. Впишем в окружность квадрат, стороны которого параллельны осям координат (две стороны параллельны оси Ох, две стороны параллельны оси Оу). Спроецировав стороны на оси Ох и Оу, получим отрезки, внутри которых точно содержится точка с рациональной координатой по соответсвующей оси. Пересечём прямые, проходящие через эти точки, получим рациональную точку, лежащую внутри окружности (т.к. по каждой из осей точка будет лежать на проекции стороны квадрата, следовательно внутри окружности).
Таким образом, получили, что каждая восьмёрка однозначно задаётся парой из 4 рациональных чисел (два числа - координаты точки внутри одной окружности, два числа - координаты точки внутри другой окружности). Однозначно, потому что если восьмёрки не пересекаются и не вложены в друг друга, то они не могут содержать общих внутренних точек на плоскости. Если одна восьмёрка вложена в другую (и эти восьмёрки не пересекаются), то она содержится в одной из её окружностей, а значит точно не содержит точку с рациональными координатами другой окружности.

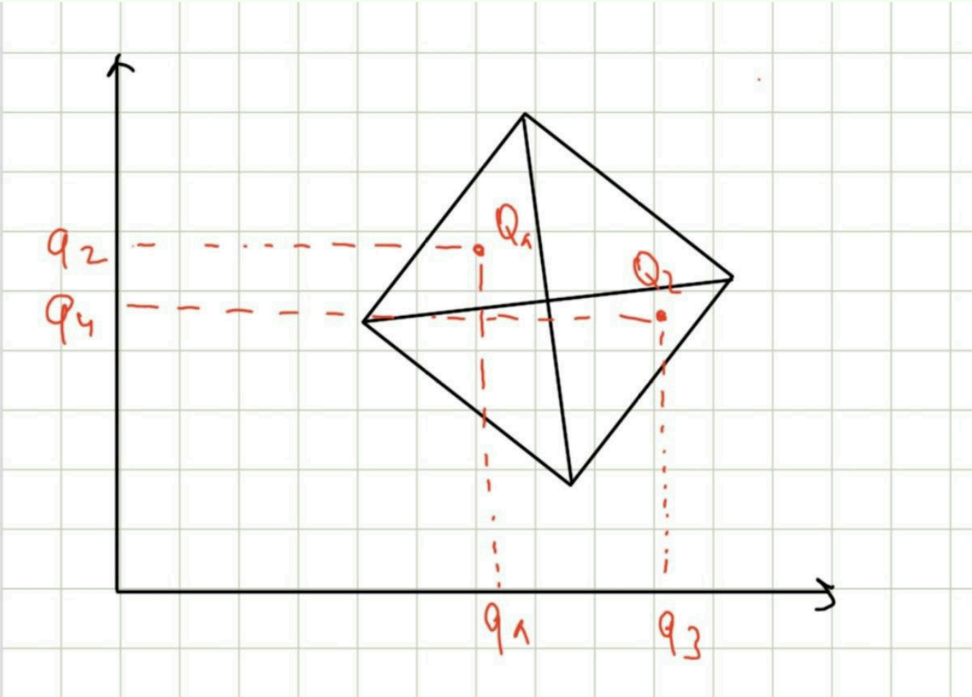
Получаем инъекцию из множества восьмёрок в $\mathbb{Q}^4$, т.к. $\mathbb{Q}$ счётно и декартово произведение счётных множеств счётно, то получаем, что множество таких восьмёрок конечно или счётно. ■

Задание 55 (У15.4)

Крестом называется фигура, состоящая из двух диагоналей квадрата (см. рисунок). Докажите,что любое множество непересекающихся крестов на плоскости конечно или счётно.

Решение:

Введём на плоскости прямоугольную систему координат.
Соедим вершины креста, чтобы получился квадрат, разбитый диагоналями на 4 треугольника. Рассмотрим два треугольника, не имеющие общих сторон.



В каждом из этих треугольников содержится точка с рациональными координатми, как минимум, потому что в любой треугольник можно вписать окружность, а в любой окружности содержится точка с рациональными координатами (доказали в задаче 15.3).
Каждый крест задётся набором из четырёх рациональных чисел (по две координаты точек двух треугольников), т.к. каждый крест не может содержать двух точек другого креста, потому что иначе будет пересекаться с ним.
Получаем инъекцию из множества крестов в $\mathbb{Q}^4$, т.к. $\mathbb{Q}$ счётно и декартово произведение счётных множеств счётно, то получаем, что множество таких крестов конечно или счётно. ∎

Задание 56 (У16.1)

Пусть А — счётное множество точек на действительной прямой. Всегда ли можно выбрать действительное число k так, чтобы $\{k + a \ |a \in A\} \cap A = \varnothing$?

Решение:

Для любого $a_i \in A$ существует счетное множество X_i такое, что $\forall x_i \in X_i\ x_i + a_i \in A$ (т.к. A - счетное). Положим $X = \cup_{\{i=0\}}^{\infty} X_i$ - оно счетное (как счетное объединение счетных). Тогда если $k \in X$, то $\{k + a \mid a \in A\} \cap A \neq \varnothing$, а если $k \notin X$, то $\{k + a \mid a \in A\} \cap A = \varnothing$ (так как для всех a_i выполняется $k + a_i \notin A$). При этом найдется $k \notin X$, так как X - счетное, а $\mathbb{R}$ - континуально.

Ответ:

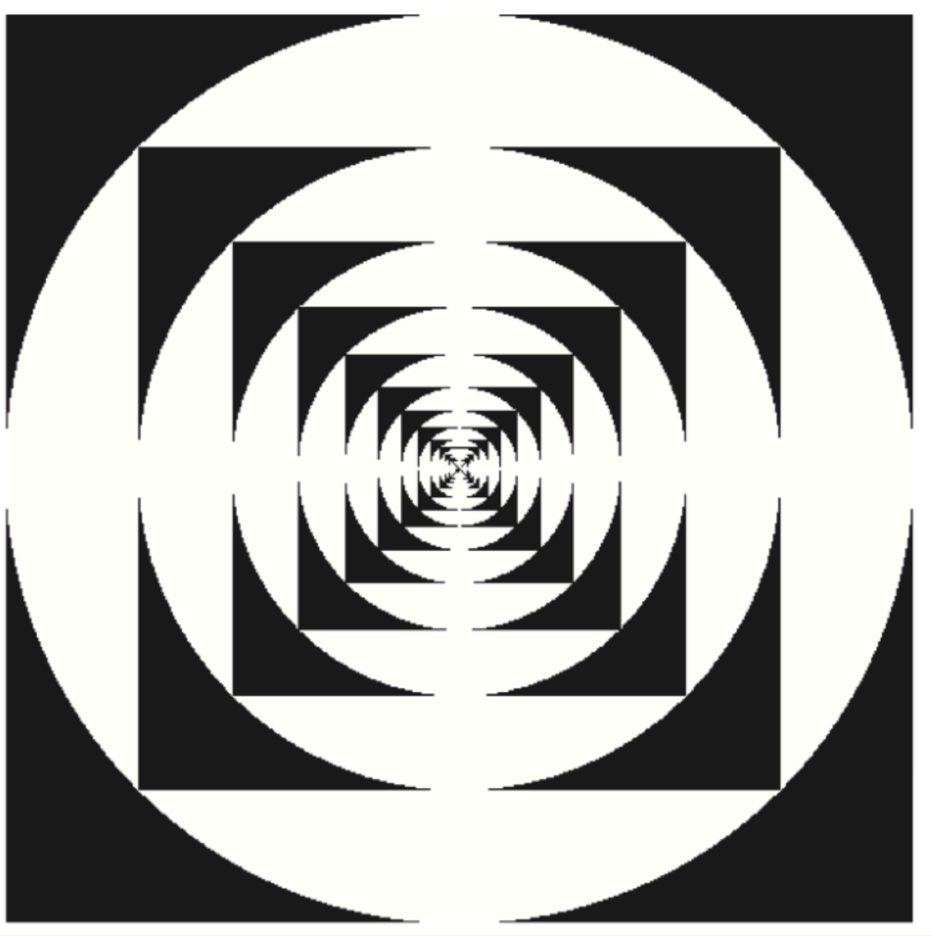
Да.

Задание 57 (У16.4)

Докажите, что квадрат можно разбить на две части так, что из подобных (т.е. гомотетичных) им частей можно сложить круг.

Решение:

Убивается одной картинкой



Пояснения: Зафиксируем произвольный квадрат, впишем в него круг и раскрасим в черный цвет все точки квадрата, лежащие вне круга. Затем впишем в полученный круг квадрат со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата, и раскрасим в белый цвет все точки круга, лежащие вне вписанного квадрата. Точки вписанного квадрата раскрасим по тому же правилу, что и точки исходного квадрата и т. д. При этом мы каждый раз будем считать, что граница квадрата покрашена черным, за исключением четырех точек касания вписанного в квадрат круга, а граница круга — белым, за исключением четырех вершин квадрата, вписанного в этот круг. Центр квадрата раскрасим в черный цвет. Очевидно, что мы раскрасили все точки исходного квадрата.

Теперь можно сделать такую гомотетию для чёрной области, при которой она перейдёт в саму себя, не включая четыре угла, полученные нами на первом шаге. Получится круг. (похожая идея была в теореме Кантора-Бернштейна)

Задание 58 (У16.5)

Докажите, что квадрат можно разбить на две части так, что из подобных (т.е. гомотетичных) им частей можно сложить круг.

Решение:

$A \cup B$ имеет мощность континуум, поэтому оно равномощно плоскости. То есть теперь нужно доказать, что если плоскость разбита две части A и B, то хотя бы одна из этих частей имеет мощность континуум (можно считать, что части непересающиеся, иначе выбросим из A их пересечение). Теорема. Если множество $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ разбито на непересекающиеся части $B_1, ..., B_n$, то найдётся такое i, при котором $|B_i| \geqslant |A_i|$. Доказательство: рассмотрим проекцию множества $B_i \subset A_1 \times ... \times A_n$ на A_i. Если хотя бы при одном i она покрывает A_i полностью, то всё доказано. Если нет, выберем для каждого i непокрытую точку x_i. Набор $(x_1, ..., x_n)$ не входит ни в одно из множеств B_i, что противоречит предположению. Из этой теоремы следует наша задача: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ разбито на два множества A и B, поэтому хотя бы одно из них имеет мощность не меньше мощности $\mathbb{R}$, то есть континуума. При этом мощность объединения не может быть меньше мощности одного из множеств, поэтому выполняется равенство.