Внимание! Дополнительные задачи играют чисто учебную роль и служат для подготовки к коллоквиуму и экзамену по дискретной математике. Часть дополнительных задач пойдёт в коллоквиум, так что полезно решать и сдавать решения этих задач. Они будут проверяться и за них будут выставляться оценки. **Но в формуле оценивания решения дополнительных задач учитываются с весом 0, то есть они непосредственно не влияют на оценку за курс.**

В отличие от обязательных домашних заданий, решения дополнительных можно сдавать и позже, чем через неделю. Но в таком случае скорость проверки не гарантирована и может быть сколь угодно близка к нулю.

У1.1. Сколько раз встречается И в таблице истинности высказывания

$$\bigwedge_{1\leqslant i<j\leqslant 1000} (\neg x_i \vee x_j)?$$

У1.2. $A_1, \dots, A_7$ — высказывания (каждое истинно или ложно). Является ли тавтологией дизъюнкция всех высказываний вида

$$(A_i \vee A_j \vee A_k \vee A_m) \to (A_i \wedge A_j \wedge A_k \wedge A_m), \quad 1 \leqslant i < j < k < m \leqslant 7?$$

У1.3. Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ — невозрастающая последовательность множеств, а $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots \subseteq B_n \subseteq \dots$ — неубывающая последовательность множеств. Известно, что $A_1 \setminus B_1 = A_9 \setminus B_9$. Докажите, что $A_2 \setminus B_8 = A_5 \setminus B_5$.

У1.4. а) Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cup, \cap, \setminus$ неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором каждое множество или пусто, или состоит из одного элемента.

б) Допустим, что у нас есть неверное равенство, содержащее переменные для множеств, и по нему построена соответствующая формула, содержащая $\wedge, \vee, \neg, \equiv$. Как, опираясь на контрпример для множеств из пункта а), показать, что такая формула не является тавтологией?

У2.1. В классе 33 ученика. 28 из них знают, что такое простое число, 22 знают, что такое факториал, и 17 знают, что такое полином. Докажите, что в классе найдётся ученик, который знает все три этих понятия.

У2.2. Круг разбили на 25 секторов, пронумерованных в произвольном порядке числами от 1 до 25. В одном из секторов сидит кузнечик. Он прыгает по кругу, каждым своим прыжком перемещаясь по часовой стрелке на количество секторов, равное номеру текущего сектора. Докажите, что в некотором секторе кузнечик не побывает никогда.

У3.1. Дан набор из 12 носков: 4 красных, 4 жёлтых, 4 зелёных. Сколькими способами можно разделить эти носки на 6 пар? Носки одного цвета не отличаются. Порядок носков внутри каждой пары неважен. Порядок пар неважен.

У3.2. Для каких множеств A и B выполнено $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$?

У3.3. В выпуклом многоугольнике проведены некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Докажите, что найдутся две не соседние вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

У3.4. На окружности отмечено 300 точек: по 100 точек синего, красного и зелёного цветов. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в этих точках, чтобы никакие два отрезка не пересекались (даже в концах) и концы каждого отрезка были разного цвета.

У4.1. Докажите, что существует биекция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что $f(f(n))$ переводит чётные числа в нечётные, а нечётные в чётные.

У4.2. Через $\mathbb{N}$ обозначаем множество натуральных (то есть целых неотрицательных) чисел. Докажите, что не существует такой функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $f(f(n)) = n + 1$ для всякого $n \in \mathbb{N}$.

У4.3. Докажите, что количество способов представить число n в виде суммы k слагаемых равно количеству способов представить число n в виде суммы нескольких слагаемых, наибольшее из которых равно k. (В обоих случаях представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Во втором случае в сумме может быть несколько наибольших слагаемых. Числа n, k и все слагаемые предполагаются натуральными, не равными нулю.)

У5.1. Приведите пример сюръекции множества натуральных чисел на себя, для которой полный прообраз любого 1-элементного множества бесконечен.

У5.2. Докажите аккуратно, что подмножество конечного множества конечно. (Вам понадобится определение конечного множества и индукция.)

У5.3. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки, причём каждый послал пять открыток разным друзьям. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу.

У5.4. Каждое из множеств A_1, A_2, …, A_{100} содержит ровно 11 элементов. В объединении

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{100}$$

ровно 13 элементов. Докажите, что среди этих множеств есть одинаковые: для некоторых $i \neq j$ выполняется $A_i = A_j$.

У5.5. Найдите количество неубывающих инъективных функций из $[8] = \{0, 1, \dots, 6, 7\}$ в $[11] = \{0, 1, \dots, 9, 10\}$. Ответом должно быть число в десятичной записи. Функция f называется неубывающей, если из $x \leqslant y$ следует $f(x) \leqslant f(y)$.

У6.1. Найдите количество нулей, на которое оканчивается число $11^{100} - 1$. Найдите последнюю ненулевую цифру этого числа.

У6.2. Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

У6.3. Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = F_{n+1}.$$

Пользуясь этим равенством, найдите числа Фибоначчи в треугольнике Паскаля: что нужно суммировать в треугольнике Паскаля, чтобы получались числа Фибоначчи?

(Комбинаторное доказательство состоит в том, что количество элементов в некотором множестве подсчитывается двумя способами. Один способ даёт левую часть равенства, другой — правую.)

У6.4. Докажите, что существует бесконечно много чисел, которые встречаются в треугольнике Паскаля хотя бы 4 раза.

У6.5. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечётных чисел?

У7.1. Пусть $k \leqslant n/2$. Функция f из двоичных слов длины n, в которых $k-1$ единица, в двоичные слова длины n, в которых k единиц, задана правилом. В слове $x = x_1 x_2 \dots x_n$ найдем такое максимальное j, что в префиксе слова x длины j единиц и нулей поровну. Если следующая после этого префикса цифра 0, заменим её на 1 и получим слово $f(x)$. Докажите, что эта функция тотальная и, более того, является инъекцией.

У7.2. Найдите количество таких слов длины 15 в алфавите $\{0, 1, 2\}$, в которых есть ровно 6 пар соседних одинаковых символов.

У7.3. Чего больше: инъективных отображений 10-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 10-элементное?

У8.1. В таблице $4 \times n$ записаны нули и единицы. В каждой строке записано 12 единиц, для каждой пары различных строк есть ровно 8 столбцов, в которых записаны единицы в этой паре строк, для каждой тройки попарно различных строк есть ровно 6 столбцов, в которых записаны единицы в этой тройке строк. Найдите количество столбцов матрицы, содержащих только единицы. Укажите все возможные ответы.

У8.2. Докажите равенство

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k/2} (-1)^i \binom{n}{i} \cdot \binom{n+k-1-2i}{k-2i}.$$

У8.3. В симметрическую разность $A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n$ входят те элементы, которые принадлежат нечётному числу множеств из семейства $\{A_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Докажите, что

$$|A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n| = \sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + 4\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

У8.4. Обозначим через $S_{n,k}$ долю сюръекций из $[n]$ в $[k]$ среди всех тотальных функций из $[n]$ в $[k]$. Докажите, что если $k = \lfloor n/\ln n \rfloor$, то $S_{n,k} > 0.999$ при всех достаточно больших n.

У9.1. Рассматриваем все такие бинарные отношения R, S на множестве A из 10 элементов, что $R \circ S = \varnothing$. Каково максимальное возможное количество пар может быть в композиции $S \circ R$?

У9.2. Сколько существует антисимметричных не транзитивных бинарных отношений на множестве $\{1, 2, 3\}$?

У9.3. В отношении 3 элемента. Сколько может быть элементов в его транзитивном замыкании?

У9.4. В множестве A содержится n элементов. Какое минимальное число элементов может содержать бинарное отношение R на множестве A, чтобы его транзитивное замыкание было полным бинарным отношением $A \times A$?

У10.1. Докажите, что при любых $0 \leqslant k < n$ таких, что kn — чётное, существует граф на n вершинах, степени которого равны k.

У10.2. Путь называется *простым в рёбрах*, если не проходит дважды по одному и тому же ребру. Найдите наименьшее количество вершин в графе, в котором есть простой в рёбрах путь длины 2023 (длина пути — количество рёбер в нём).

У10.3. В графе $2n + 1$ вершина, степень каждой равна n. Докажите, что после удаления любого подмножества из менее чем n рёбер получается связный граф.

У10.4. Докажите, что при любом натуральном $n \geqslant 1$ существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$.

У11.1. Докажите, что в ориентированном графе G нет пути из вершины s в вершину t тогда и только тогда, когда вершины графа можно разбить на два непересекающихся множества S и T, таких что $s \in S$, $t \in T$ и в графе нет рёбер из вершин множества S в вершины множества T.

У11.2. Найдите максимальное количество простых путей между двумя вершинами ориентированного ациклического графа на n вершинах. (Максимум берётся по всем графам на n вершинах и всем парам вершин в графах.)

У11.3. а) Докажите, что есть такое двоичное слово, в котором любая комбинация из 10 нулей и единиц встречается ровно один раз.

б) Пусть двоичное слово удовлетворяет условию предыдущего пункта и начинается на 0100011101. Найдите последние 8 цифр этого слова.

У12.1. а) В дереве 100 вершин. Докажите, что существует путь из не более чем 196 рёбер, содержащий все вершины этого дерева. **б)** Приведите пример дерева на 100 вершинах, в котором любой путь из менее чем 196 рёбер не содержит хотя бы одну вершину. (Пример должен быть обоснован, разумеется.)

У12.2. Правильный n-угольник разбит диагоналями на треугольники (диагонали пересекаются разве что в вершинах многоугольника). Вершинами графа T^* являются треугольники разбиения. Два треугольника связаны ребром в графе T^*, если у них есть общая сторона. Докажите, что T^* — дерево.

У12.3. В дереве на 315 вершинах нет простого пути длины 6. Докажите, что в этом дереве есть вершина степени не меньше 14.

У12.4. В графе 15 вершин, а каждое ребро покрашено в один из трёх цветов. Известно, что если удалить рёбра любого одного цвета, то граф останется связным. Какое минимальное число рёбер может быть в таком графе?

У13.1. Слой с номером i в корневом дереве образуют те вершины, простой путь из которых в корень имеет длину i.

Докажите, что в любом связном графе найдётся такое остовное корневое дерево, что любое ребро графа соединяет вершины на слоях, номера которых различаются не больше, чем на 1.

У13.2. Найдите все такие n, что существует неориентированный граф $G = (V, E)$ на n вершинах, каждая имеет степень 3, а в множестве рёбер E этого графа можно выделить такие два непересекающихся подмножества E_1, E_2, что графы $T_1 = (V, E_1)$ и $T_2 = (V, E_2)$ являются деревьями.

У13.3. Частичные порядки на множестве X — это бинарные отношения, то есть подмножества $X \times X$. Пусть $a \neq b$ несравнимы в частичном порядке P на множестве X. Докажите, что существуют такой частичный порядок $P_a \supset P$, в котором $a <_{P_a} b$, и такой частичный порядок $P_b \supset P$, в котором $b <_{P_b} a$.

У13.4. Лексикографический порядок на словах в алфавите $\{0, \ldots, \ell\}$: если слово u является началом слова w, то $u \leqslant w$. Если ни одно из слов u, v не является началом другого, то найдётся позиция, в которой эти слова различаются. Тогда меньше то слово, в котором на этой позиции меньшее число.

а) Найдите в лексикографическом порядке на двоичных словах все соседние пары (u, v).

б) Существует ли бесконечная убывающая цепь $u_0 > u_1 > \ldots$ в лексикографическом порядке на двоичных словах?

У14.1. Изоморфны ли порядки $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}$ (упорядочение $\mathbb{Q}$ по обычному сравнению чисел)?

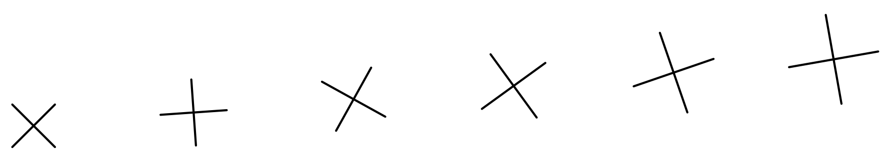
У14.2. Изоморфны ли порядки $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} + \mathbb{R}$ (упорядочение $\mathbb{R}$ по обычному сравнению чисел)?

У15.1. На прямой задано такое семейство интервалов, что для любых двух интервалов семейства a и b верно, что длина интервала $a \cap b$ меньше половины длины каждого из интервалов a и b. Докажите, что это семейство интервалов конечно или счётно.

У15.2. На прямой расположено семейство отрезков ненулевой длины, причем известно, что среди любых трех отрезков хотя бы два не пересекаются. Докажите, что это семейство конечно или счётно.

У15.3. Докажите, что множество непересекающихся восьмёрок на плоскости конечно или счётно. (Восьмёрка — это объединение двух касающихся внешним образом окружностей, точка окружностью не считается.)

У15.4. Крестом называется фигура, состоящая из двух диагоналей квадрата (см. рисунок). Докажите, что любое множество непересекающихся крестов на плоскости конечно или счётно.



У15.5. Постройте биекцию между множеством $[0; 1] \cup [2; 3] \cup [4; 5] \cup \ldots$ и множеством $[0; 1]$.

У16.1. Пусть A — счётное множество точек на действительной прямой. Всегда ли можно выбрать действительное число k так, чтобы $\{k + a \mid a \in A\} \cap A = \varnothing$?

У16.2. Докажите, что множество непрерывных тотальных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, если для любого $a \in \mathbb{R}$ выполняется $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

У16.3. $\mathcal{P}(X)$ — это множество, состоящее из всех подмножеств множества X. Докажите, что $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$ равномощно $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

У16.4. Докажите, что квадрат можно разбить на две части так, что из подобных (т.е. гомотетичных) им частей можно сложить круг.

У16.5. Докажите, что если $A \cup B$ имеет мощность континуум, то A или B имеет мощность континуум. (**Замечание.** Никому неизвестно, существуют ли множества промежуточной мощности между счетными и континуальными.)

У17.1. Из полного графа K_n выбросили одно ребро. Найдите количество остовных деревьев в таком графе. (В ответе не должно быть сумм от переменного числа слагаемых.)

У17.2. Докажите, что рёбра полного графа на $2n$ вершинах, $n \geqslant 1$, можно раскрасить в n цветов так, что рёбра каждого цвета образуют дерево на $2n$ вершинах.

У17.3. Пусть $R(k, n)$ — число Рамсея, причём оба числа $R(k-1, n)$ и $R(k, n-1)$ чётные. Докажите, что $R(k, n) \leqslant R(k-1, n) + R(k, n-1) - 1$.

У17.4. Пусть $R(k, n)$ — число Рамсея. Докажите, что $R(3, 4) = 9$.

У18.1. Рёбра полного графа на 17 вершинах раскрашены в три цвета. Докажите, что найдутся три таких вершины этого графа, которые соединены рёбрами одного цвета.

У18.2. В простом неориентированном графе 30 вершин и 301 ребро. Докажите, что такой граф невозможно правильно покрасить в 3 цвета.

У18.3. Пусть граф G содержит ровно один простой цикл нечетной длины (длина цикла не менее 3). Обозначим через $\mu(G)$ максимальный размер паросочетания в G, а через $\tau(G)$ — минимальную мощность вершинного покрытия в G. Чему может равняться разность $\tau(G) - \mu(G)$? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

У18.4. Пусть G — двудольный граф, в котором по n вершин в каждой доле, и степень каждой вершины равна 3 или 4. Докажите, что в V есть паросочетание размера не меньше $6n/7$.
Указание. Попробуйте сначала доказать, что в V есть паросочетание размера не меньше $3n/4$.

У19.1. На множестве $[2025] \times [2025]$ рассмотрим порядок мажоризации: $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$, если $x_1 \leqslant x_2$ и $x_1 + y_1 \leqslant x_2 + y_2$. Найдите максимальный размер антицепи в этом порядке.

У19.2. Рассмотрим покоординатный порядок на двоичных словах длины n. Этот порядок также называется булевым кубом размерности n. Найдите максимальный размер антицепи в булевом кубе размерности n.

У19.3. Докажите, что случайный граф на n вершинах содержит клику на 3 вершинах.

Точная формулировка: исходы — все (простые неориентированные) графы с одним и тем же множеством вершин, в котором n элементов. Все исходы равновозможны. Нужно доказать, что вероятность события «граф не содержит клики на 3 вершинах» стремится к нулю при $n \to \infty$.

У19.4. Докажите, что случайный граф на n вершинах связен.

Точная формулировка: исходы — все (простые неориентированные) графы с одним и тем же множеством вершин, в котором n элементов. Все исходы равновозможны. Нужно доказать, что вероятность события «граф несвязный» стремится к нулю при $n \to \infty$.

У19.5. Обозначим D_n вероятность того, что в n подбрасываниях монет выпало три орла подряд. Докажите, что $D_n \to 1$ при $n \to \infty$.

У20.1. Двое играют в бой яиц. Перед ними стоит корзина с M яйцами, два из них выкрашены в красный цвет. Они наугад берут по яйцу и ударяют их носами. Разбитое яйцо выбрасывается и побеждённый берёт новое, а победитель раунда сохраняет своё яйцо для следующего раунда. Предполагается, что все яйца одинаково прочные и победившее яйцо сохраняет свою прочность, поэтому вероятность выигрыша в каждом раунде у каждого игрока равна $1/2$. Какова вероятность того, что в каком-то раунде будут ударяться носами два красных яйца?

У20.2. Двое играют в бой яиц. Перед ними стоит корзина с M яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их носами. Разбитое яйцо выбрасывается и побеждённый берёт новое, а победитель раунда сохраняет своё яйцо для следующего раунда. Предполагается, что победившее яйцо сохранило свою прочность и что исход каждого раунда зависит только от относительного качества яиц; можно считать, что изначально все яйца имеют разную прочность, упорядочены по прочности и при ударе обязательно победит более прочное яйцо. Какова вероятность победы в $(n+1)$-м раунде после победы во всех предыдущих?

У20.3. Король предлагает узнику разложить десять белых и десять чёрных шаров по двум одинаковым коробкам (надо использовать все шары; в каждой коробке должен быть хотя бы один шар). После этого сначала король выбирает случайно одну из коробок, каждую с вероятностью $1/2$, а затем из выбранной коробки выбирает случайный шар, все с равными вероятностями. Если шар чёрный, то узника казнят, если белый — отпускают. Как нужно разложить шары, чтобы вероятность выжить была максимальной?

У20.4. Про события A, B, C известно, что A и B независимы, B и C независимы, C и A независимы. Следует ли из этого, что события A и $B \cap C$ независимы? (Считаем, что вероятности всех упомянутых событий положительны и меньше 1.)

У21.1. 15 мальчиков и 15 девочек стоят в шеренге в случайном порядке (все варианты равновозможны). Сколько в среднем девочек стоит левее всех мальчиков? Ответ должен быть записан в виде обыкновенной дроби.

У21.2. Из множества $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ выбирается случайно и равновозможно 10-элементное подмножество X. Упорядочим элементы этого подмножества по величине: $X_1 < X_2 < \ldots < X_{10}$. Найдите $\mathbf{E}[X_1]$ (математическое ожидание величины X_1). Ответ должен быть записан в виде обыкновенной дроби.

У21.3. Задан случайный граф $G(n, p)$ на n вершинах, любые две из которых соединяются ребром с вероятностью p, $p \in [0, 1]$. Случайная величина $T_n(G)$ равна числу треугольников, образованных рёбрами, в случайном графе $G(n, p)$ (иными словами, $T_n(G)$ равна числу клик размера 3). Докажите, что если $p = o(1/n)$, то почти наверное треугольников в случайном графе нет, т.е. $\Pr[T_n(G) = 0] \to 1$ при $n \to \infty$.

Указание. Вычислите $\mathbf{E}[T_n(G)]$ и воспользуйтесь неравенством Маркова.

У21.4. (Половина теоремы Турана) Пусть граф имеет n вершин и $nd/2$ рёбер, где $d \geqslant 1$. Докажите, что $\alpha(G) \geqslant n/2d$.

Указание. Рассмотрите случайное подмножество вершин графа, в которое с вероятностью $1/d$ независимо кладётся каждая вершина, после чего вычислите количество вершин и рёбер в этом подмножестве.

У22.1. Докажите, что если в графе $G = (V, E)$ число вершин $|V| = 2n + 1$ — нечётно, то в нём есть разрез размера не меньше $\frac{|E|}{2-1/(n+1)}$. Разрез — разбиение вершин графа на два подмножества, размером разреза называется количество рёбер, концы которых лежат в разных подмножествах.

У22.2. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств множества $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, в котором нет пар A, B, удовлетворяющих условию $A \subset B$. Пусть σ — случайная перестановка элементов множества $[n]$ (вероятностное пространство — множество перестановок, все исходы равновозможны). Рассмотрим случайную величину X, равную количеству таких i, что $\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(i)\} \in \mathcal{F}$. Вычислите математическое ожидание случайной величины X, и, используя это вычисление, докажите, что $|\mathcal{F}| \leqslant C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

У22.3. Пусть f и g — случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве. Верно ли, что если $\mathbf{D}(f + g) = \mathbf{D}(f) + \mathbf{D}(g)$, то f и g независимы?

У22.4. В ящике 30 шаров, из них 12 белых и 18 чёрных. Шары вынимают по одному в случайном порядке и обратно не кладут. Шары вынимают до тех пор, пока впервые не появится шар другого цвета (то есть цвета, отличного от цвета первого вынутого шара). Найдите математическое ожидание и дисперсию количества вынутых шаров.

У23.1. Дано сравнение $ax \equiv b \pmod{n}$. Докажите, что если НОД$(a, n) \nmid b$, то оно не имеет решений, а если НОД$(a, n) \mid b$, то оно имеет ровно НОД(a, n) решений в вычетах.

У23.2. Докажите, что предпоследняя цифра степени тройки всегда четна.

У23.3. Найдите все решения уравнения $31x + 75y = 2345$ в неотрицательных целых числах.