Линейная алгебра и геометрия

Экзамен-2. 2020/2021 учебный год. Вариант 1

Морфей

Группа БЭАД242

Задание 1

Определите все значения, которые может принимать размерность пересечения ядра и образа линейного оператора $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в ядре содержится вектор $v = (1, 0, -1, 2)$.

Решение:

Вспомним важный факт про линейные операторы и подпространства:
- $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi = 4$

Так как $v \neq \vec{0} \in \ker \varphi$, то $\dim \ker \varphi \geqslant 1$. Тогда есть только такие возможные комбинации для значений $\dim \ker \varphi$ и $\dim \operatorname{im} \varphi$: $1 + 3, 2 + 2, 3 + 1, 4 + 0$.
Ясно, что $\min\{\dim U, \dim W\} \leqslant \dim(U \cap W) \leqslant \max\{\dim U, \dim W\}$. Отсюда есть три возможных варианта для $\dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) : 0, 1$ или 2. Приведём примеры:

Пример 1.
$\dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) = 0$. Рассмотрим

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ясно, что $\ker \varphi = \mathbb{R}^4, \operatorname{im} \varphi = \left\{\vec{0}\right\} \Rightarrow \ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi = \left\{\vec{0}\right\}$, что и нужно.

Пример 2.
$\dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) = 1$. Рассмотрим

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, что $v \in \ker \varphi$, так что условие выполняется. Видим, что $\ker \varphi = \langle e_1, e_3, e_4 \rangle$, а $\operatorname{im} \varphi = \langle (1, 0, -1, 2)^T \rangle = \langle v \rangle$. Тогда $\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi = \langle v \rangle \Rightarrow \dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) = 1$.

Пример 3.
$\dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) = 2$. Рассмотрим матрицу линейного отображения в следующем базисе:

$$e_1 = v = (1, 0, -1, 2)^T,$$
$$e_2 = (0, 1, 0, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1, 0)^T, e_4 = (0, 0, 0, 1)^T$$

По условию $f_1 = \varphi(v) = (0, 0, 0, 0)^T$. Пусть $\varphi(e_2) = v$. Уже имеем $\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi = \langle v \rangle$.
Теперь пусть $\varphi(e_3) = 0$, $\varphi(e_4) = e_3$. Тогда $\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi = \langle v, e_3 \rangle$. Ясно, что v и e_3 линейно независимы, значит, $\dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) = 2$. Тогда матрица в этом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$0, 1, 2.$

Задание 2

Определите нормальный вид квадратичной формы

$$Q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$$

в зависимости от значения параметра a.

Решение:

Сделаем замену $x' = x, y' = z, z' = y$. Получаем:

$$Q(x', y', z') = x'^2 + y'^2 + az'^2 + 4x'z' - 4x'y' - 8y'z'$$

Получаем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & a \end{pmatrix}$$

Воспользуемся методом Якоби:

$$\delta_1 = 1$$

$$\delta_2 = 1 + 4 = 5$$

$$\delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & a \end{pmatrix} = [a + 16 + 16] - [4 + 16 + 4a] = -3a + 12$$

Случай 1.
$a < 4$. Тогда $\delta_3 > 0$, значит, нормальный вид $x^2 + y^2 + z^2$.

Случай 2.
$a = 4 \Rightarrow \delta_3 = 0 \Rightarrow$ нормальный вид $x^2 + y^2$.

Случай 3.
$a > 4 \Rightarrow \delta_3 < 0 \Rightarrow$ нормальный вид $x^2 + y^2 - z^2$.

Ответ:

$a < 4 : x^2 + y^2 + z^2$,
$a = 4 : x^2 + y^2$,
$a > 4 : x^2 + y^2 - z^2$.

Задание 3

В четырёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ даны векторы v_1, v_2, v_3. Известно, что матрица Грама веткоров v_1, v_2 равна $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, вектор v_3 имеет длину 10 и его ортогональная проекция на $\langle v_1, v_2 \rangle$ равна $2v_1 - v_2$. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

Решение:

Найдём матрицу Грама системы векторов v_1, v_2, v_3. Мы знаем левый верхний 2×2 блок и знаем, что $\|v_1\| = 10 \Rightarrow (v_1, v_1) = 100$. Осталось найти (v_1, v_3) и (v_2, v_3).
Пусть $u = \mathrm{pr}_{\langle v_1,\, v_2 \rangle} v, w = \mathrm{ort}_{\langle v_1,\, v_2 \rangle} v$. Тогда $v = u + w$, причём $(w, v_1) = (w, v_2) = 0$.
Отсюда и из матрицы Грама:

$$(v_3, v_1) = (u, v_1) = (2v_1 - v_2, v_1) = 2(v_1, v_1) - (v_2, v_1) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$$

$$(v_3, v_2) = (u, v_2) = (2v_1 - v_2, v_2) = 2(v_1, v_2) - (v_2, v_2) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

Имеем матрицу Грама

$$G = G(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\det G = \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 100 \end{pmatrix} = [2000 + 15 + 15] - [125 + 4 + 900] = 1001$$

$$\mathrm{Vol}\ P(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{\det G} = \sqrt{1001}$$

Ответ:

$\sqrt{1001}$

Задание 4

Приведите пример недиагонализуемого оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2 - 3\varphi$ диагонализуем.

Решение:

Возьмём такой недиагонализуемый оператор для $a, b \in \mathbb{R}^2$:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Почему он не диагонализуем? Его характеристический многочлен, очевидно, равен $(\lambda - a)^2$. Значит, a — единственное собственное значение кратности 2. При этом

$$A - aE = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

И геометрическая кратность равна 1, значит, оператор не диагонализуем. Найдём матрицу $\varphi^2 - 3\varphi$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} a^2 - 3a & 2ab - 3b \\ 0 & a^2 - 3a \end{pmatrix} = B$$

Тогда если $2ab - 3b = 0$ и $a^2 \neq 3a$, то оператор будет диагонализуемым. Возьмём $b = 1$, тогда $a = \frac{3}{2}$. Отсюда матрица линейного оператора

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Ответ:

Оператор с такой матрицей:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Задание 5

Про ортогональный линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((1,-1,1)) = (-1,1,-1)$, $\varphi((2,0,1)) = (-2,1,0)$ и φ не самосопряжён. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу.

Решение:

φ не самосопряжён, значит, $A^T \neq A$.
Если $v = (1,-1,1)^T$, то $\varphi(v) = -v$. То есть v — собственный вектор. Тогда канонический вид φ это

$$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

в каком-то базисе e_1, e_2, e_3.
Уже можно найти e_3, это нормированный вектор $v : e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.
Пусть $w = (2,0,1)$. Ортогонализуем w относительно v:

$$\operatorname{pr}_v w = \frac{(w,v)}{(v,v)} v = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\operatorname{ort}_v w = w - v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Положим $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$. Тогда (e_1, e_3) — ортонормированная система векторов.
Найдём

$$\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(w-v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$$

Теперь найдём e_2 такой, что $e_2 \perp \langle e_1, e_3\rangle$. Например, векторным произведением:

$$[v, w-v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i + j + 2k = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Отнормируем и положим $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$. Тогда в базисе (e_1, e_2, e_3) матрица φ имеет канонический вид. Выразим $\sqrt{2}\varphi(e_1)$ через $\sqrt{2}e_1, \sqrt{6}e_2, \sqrt{3}e_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Получаем, что

$$\sqrt{2}\varphi(e_1) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}e_1 + \frac{1}{2}\sqrt{6}e_2$$

$$\varphi(e_1) = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}e_2$$

Тогда первый столбец имеет вид $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)^T$. Отсюда $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.
Значит, можно записать канонический вид оператора:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

в базисе

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T,$$
$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)^T,$$
$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

в базисе

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T,$$
$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)^T,$$
$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$$

Задание 6

Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:
1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{50}$,
2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$?
Если существует, то предъявите такую матрицу.

Решение:

Найдём усечённое сингулярное разложение матрицы B.
Пусть $C = B^T$. Найдём разложение матрицы C.

$$C^T C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 18 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\det(C^T C - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 54-\lambda & 18 \\ 18 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 60\lambda + 324 - 324 = \lambda(\lambda - 60)$$

Имеем сингулярное значение $\sigma_1 = \sqrt{60}$ и $\sigma_2 = 0$.
Собственные векторы:

$$C^T C - 60E = \begin{pmatrix} -6 & 18 \\ 18 & -54 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)^T - \text{собственный вектор}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} C v_1 = \frac{1}{\sqrt{60}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Имеем

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \left(\sqrt{60}\right) \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}^T$$

Отсюда

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \left(\sqrt{60}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T$$

Какой план: добавить сингулярное значение $\sigma_2 = \sqrt{50}$ и по одному вектору v_2, u_2, чтобы сохранить ортонормированность систем. Так как $\sqrt{60} > \sqrt{50}$, то B будет ближайшей к A по норме Фробениуса матрицей ранга 1.
Добавим $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T \perp u_1$ и $v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3)^T \perp v_1$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{60} & 0 \\ 0 & \sqrt{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 - \frac{1}{2}\sqrt{10} & -6 & \frac{1}{2}\sqrt{10} + 3 \\ 1 + \frac{3}{2}\sqrt{10} & -2 & 1 - \frac{3}{2}\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Это искомая матрица (красиво не получилось)

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 3 - \frac{1}{2}\sqrt{10} & -6 & \frac{1}{2}\sqrt{10} + 3 \\ 1 + \frac{3}{2}\sqrt{10} & -2 & 1 - \frac{3}{2}\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Задание 7

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2y^2 - 3z^2 + 4xz - 12y + a = 0$$

определяет однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

Решение:

Приведём к главным осям матрицу квадратичной части уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(-\lambda^2 - \lambda + 6) - 8 + 4\lambda = -\lambda^3 - \lambda^2 + 10\lambda - 8 =$$

$$= -(\lambda^3 + \lambda^2 - 10\lambda + 8) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 4)$$

Собственные значения $2, 1, -4 \Rightarrow$ в главных осях квадратичная часть имеето вид $2x'^2 + y'^2 - 4z'^2$. Найдём собственные векторы:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = (0, 1, 0)^T$$

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$$

$$A + 4E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, 2)^T$$

Матрица перехода:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}y' - \frac{1}{\sqrt{5}}z' \\ y = x' \\ z = \frac{1}{\sqrt{5}}y' + \frac{2}{\sqrt{5}}z' \end{cases}$$

Подставим. Получим уравнение

$$2x'^2 + y'^2 - 4z'^2 - 12x' + a = 0$$

Выделим полный квадрат:

$$2\left(x'-3\right)^2+y'^2-4z'^2+a-18=0$$

Сделаем замену $x''=x'-3, y''=y', z''=z'$. Получаем уравнение

$$2x''^2+y''^2-4z''^2=18-a$$

Вид фигуры зависит от знака $18-a$. Однополостной гиперболоид мы получим, если $18-a>0 \Leftrightarrow a>18$. Поделим на $18-a$ обе части:

$$\frac{2}{18-a}x''^2+\frac{1}{18-a}y''^2-\frac{4}{18-a}z''^2=1$$

Это канонический вид. Итоговая замена координат (нужно подставить $x''=x'-3$ в первую систему):

$$\begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{5}}y''-\frac{1}{\sqrt{5}}z'' \\ y=x''+3 \\ z=\frac{1}{\sqrt{5}}y''+\frac{2}{\sqrt{5}}z'' \end{cases}$$

Ответ:

$a>18$. Замена координат:

$$\begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{5}}y''-\frac{1}{\sqrt{5}}z'' \\ y=x''+3 \\ z=\frac{1}{\sqrt{5}}y''+\frac{2}{\sqrt{5}}z'' \end{cases}$$

Задание 8

Линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

Решение:

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём собственные значения этого оператора:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 3-\lambda & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Мммм, вкусно. Разложим по четвёртой строке:

$$0 = -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3-\lambda & 2 & 6 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -5 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2(3-\lambda)^2 + (1-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda)^2 = (\lambda-3)^2(\lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2) = (\lambda-3)^3(\lambda-2)$$

Получили $\lambda_1 = 3, a_1 = 3, \lambda_2 = 2, a_2 = 1$. Ясно, что клетка с СЗ $\lambda_2 = 2$ будет размера 1×1. Найдём собственный вектор для λ_2:

$$\text{rref}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (0, 1, 2) \right)$$

$$B = A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_4 = (1, 7, -4, 1)^T$$

Найдём g_1:

$$C = A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = 1$$

Значит, клетка с СЗ $\lambda_1 = 3$ будет одна и её размер 3×3. Тогда ЖНФ:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём f_1, f_2, f_3, ведь f_4 мы уже нашли. Будем рассматривать степени матрицы C.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 7 & 0 & 0 & -14 \\ -4 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 7 & 0 & 0 & -14 \\ -4 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \\ 4 & 0 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Видим, что $\ker C^3 = \ker C^4 = \ker C^5 = \dots$
Значит, нужно выбрать $v \in \ker C^3$ и рассмотреть v, Cv, C^2v. Найдём $\ker C^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 7 & 0 & 0 & -14 \\ -4 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Брать e_2 или e_3 в качестве v бесполезно, ибо $C^2e_2 = C^2e_3 = 0$. Возьмём $v = (2, 0, 0, 1)$. Тогда

$$v \to Cv \to C^2v$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда искомый базис:

$$f_1 = (0, 12, 0, 0)^T, f_2 = (0, -4, 6, 0)^T, f_3 = (2, 0, 0, 1)^T, f_4 = (1, 7, -4, 1)^T$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 12 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

ЖНФ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Базис:

$$f_1 = (0, 12, 0, 0)^T, f_2 = (0, -4, 6, 0)^T, f_3 = (2, 0, 0, 1)^T, f_4 = (1, 7, -4, 1)^T$$