Линейная алгебра и геометрия

КР 1. 2021/2022 учебный год. Вариант 1

Морфей

Группа БЭАД242

Задание 1

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. Найдите все матрицы $X \in M_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию $AX = XA + B$.

Решение:

Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{pmatrix}$$

$$XA + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 2a+3b & 4a+6b \\ 2c+3d & 4c+6d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3b+9 & 4a+6b+8 \\ 2c+3d+3 & 4c+6d-9 \end{pmatrix}$$

Имеем следующее:

$$\begin{pmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3b+9 & 4a+6b+8 \\ 2c+3d+3 & 4c+6d-9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4c = 2a+3b+9 \\ 2b+4d = 4a+6b+8 \\ 3a+6c = 2c+3d+3 \\ 3b+6d = 4c+6d-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b+4c = 9 \\ 4a+4b-4d = -8 \\ 3a+4c-3d = 3 \\ 3b-4c = -9 \end{cases}$$

Запишем эту СЛУ в виде расширенной матрицы и сразу поделим вторую строчку на 4:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 4 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-3\times(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 4 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

Вторая, третья и четвёртая строчка одинаковые. Значит, можно отбросить все, кроме второй. Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{(-\frac{1}{3})\times(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Значит, решение следующее:

$$\begin{cases} a = 1 - \frac{4}{3}c + d \\ b = -3 + \frac{4}{3}c \\ c \in \mathbb{R} \\ d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Значит,

$$X = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{3}c + d & -3 + \frac{4}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R}$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{3}c + d & -3 + \frac{4}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R}$$

Задание 2

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & c & 7 \\ 3 & -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ d \end{pmatrix}$$

Определите все значения параметров c и d, при которых система $Ax = b_1$ несовместна, а система $Ax = b_2$ совместна. Для всех найденных наборов значений параметров выпишете общее решение системы $Ax = b_2$

Решение:

Приведём к СВ следующую расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 7 & 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & c & 7 & 0 & -8 \\ 3 & -1 & 8 & -5 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2),(2)-(3)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & -2 & 6-c & -6 & 1 & 10 \\ 2 & 7 & c-8 & 12 & 0 & -8-d \\ 3 & -1 & 8 & -5 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2),(3)-(2)}$$

$$\xrightarrow{(1)-(2),(3)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & -9 & 14-2c & -18 & 1 & 18+d \\ 2 & 7 & c-8 & 12 & 0 & -8-d \\ 1 & -8 & 16-c & -17 & 0 & 8+2d \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-2\times(3)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & -9 & 14-2c & -18 & 1 & 18+d \\ 0 & 23 & 3c-40 & 46 & 0 & -24-5d \\ 1 & -8 & 16-c & -17 & 0 & 8+2d \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)}$$

$$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -8 & 16-c & -17 & 0 & 8+2d \\ 0 & 23 & 3c-40 & 46 & 0 & -24-5d \\ 0 & -9 & 14-2c & -18 & 1 & 18+d \end{array}\right) \xrightarrow{(2)+2\times(3)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -8 & 16-c & -17 & 0 & 8+2d \\ 0 & 5 & -c-12 & 10 & 2 & 12-3d \\ 0 & -9 & 14-2c & -18 & 1 & 18+d \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+2\times(2)}$$

$$\xrightarrow{(3)+2\times(2)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -8 & 16-c & -17 & 0 & 8+2d \\ 0 & 5 & -c-12 & 10 & 2 & 12-3d \\ 0 & 1 & -10-4c & 2 & 5 & 42-5d \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-5\times(3)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -8 & 16-c & -17 & 0 & 8+2d \\ 0 & 0 & 19c+38 & 0 & -23 & -198+22d \\ 0 & 1 & -10-4c & 2 & 5 & 42-5d \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}$$

$$\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -8 & 16-c & -17 & 0 & 8+2d \\ 0 & 1 & -10-4c & 2 & 5 & 42-5d \\ 0 & 0 & 19c+38 & 0 & -23 & -198+22d \end{array}\right)$$

Система $Ax = b_1$ будет несовместной тогда и только тогда, когда последняя строчка матрицы будет приводить к противоречию вида $0 \neq 0$. Значит, тогда $19c + 38 = 0 \Leftrightarrow c = -2$. Подставим $c = -2$ и забудем про пятый столбец матрицы, раз СЛУ $Ax = b_1$ и так не имеет решений.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 18 & -17 & 8+2d \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 42-5d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -198+22d \end{array}\right)$$

СЛУ $Ax = b_2$ будет совместной, только если последняя строчка имеет вид $0 = 0$. Значит, $22d = 198 \Leftrightarrow d = 9$. Подставим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 18 & -17 & 26 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+8\times(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Первые две переменные главные, остальные — свободные. Значит, общее решение СЛУ $Ax = b_2$ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + x_4 \\ x_2 = -3 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ответ:

$c = -2, d = 9$,

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + x_4 \\ x_2 = -3 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Задание 3

Существует ли нечётная перестановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & * & 5 & 7 & * & * & 6 & 2 \end{pmatrix}$, для которой $\sigma^{106} = \sigma$?

Решение:

Раз $\sigma^{106} = \sigma^{105}\sigma = \sigma\sigma^{105} = \sigma$, то $\sigma^{105} = \mathrm{id}$.
Рассмотрим разложение σ в произведение независимых циклов.
$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, значит, σ состоит только из независимых циклов, длины которых равны $3, 5$ или 7. Действительно, если в разложении σ есть цикл τ чётной длины, то $\tau^{105} \neq \mathrm{id} \Rightarrow \sigma^{105} \neq \mathrm{id}$.
Таким образом, декремент σ равен сумме чётных чисел $(2, 4$ или $6)$, а значит, σ обязана быть чётной перестановкой. Значит, такой нечётной σ не существует.

Ответ:

Нет, не существует.

Задание 4

Найдите коэффициент при x^1 в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} x & 2x & -x & 1 & 3x \\ 2x & 4x & 1 & 3x & -x \\ 1 & -3x & x & 1 & 2x \\ 3x & -3x & 2x & 1 & 1 \\ -x & 1 & x & 5x & -2x \end{vmatrix}$$

Решение:

Классная задача! Обычно в матрице немного x-ов и надо найти коэффициент при большой степени x, а тут совсем наоборот: много x-ов и нужно найти коэффициент при маленькой степени x. Воспользуемся схожей логикой при решении подобных задач, но вместо x-ов будем выбирать единички.

Пусть исходная матрица равна A. Заметим, что раз A размера 5×5, то чтобы получить в выражении определителя x^1, мы должны из каких-то четырёх строчек выбрать 1, а из оставшейся ax. В четвёртом столбце больше всего единичек. Устроим перебор по нему.

1. Пускай мы НЕ выбрали 1 из четвёртого столбца. Тогда в каждом другом стобце мы должны выбрать 1. Но тогда из первой строчки остаётся выбрать только один элемент $a_{14} = 1$, тогда мы выберем из всех строчек 1, что нам не подходит.

Значит, из третьего столбца мы не можем не выбрать 1.

2. Предположим, что из четвёртого столбца мы выбрали $a_{14} = 1$. Тогда все оставшиеся 1, не стоящие в столбца столбце, являются единственными в своей строке и в своём столбце. Значит, выбрав какие-то 3 из них, нам неизбежно придётся взять и 4-ую, что нам не подходит.

3. Предположим, что из четвёртого столбца мы выбрали $a_{34} = 1$. Тогда остаётся всего три 1, не попавших в третью строку или четвёртый столбец. Значит, нам нужно взять все их, а из первой строчки выбрать $a_{11} = x$.Посчитаем знак соответствующей перестановки:

$$\operatorname{sign}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{sign}((2342)) = (-1)^{4-1} = -1 - \text{нечётная перестановка}$$

Получим $-x$.

4. Предположим, что из четвёртого столбца мы выбрали $a_{44} = 1$. Тогда остаётся всего три 1, не попавших в четвёртую строку или четвёртый столбец. Значит, нам нужно взять все их, а из первой строчки выбрать $a_{15} = 3x$. Посчитаем знак соответствующей перестановки:

$$\operatorname{sign}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{sign}((1523)) = (-1)^{4-1} = -1 - \text{нечётная перестановка}$$

Получим $-3x$.

Таким образом, искомый коэффициент равен $-1 - 3 = -4$

Ответ:

-4

Задание 5

Некоторое число $a \in \mathbb{R}$ таково, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & a & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не изменяется, если прибавить ко всем элементам её второй строки одно и то же число. Найдите это число a.

Решение:

Проделав операцию, указанную в условии, получим следующую матрицу для некого числа $b \in \mathbb{R}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & a & 3 \\ 3+b & b & 2+b & b \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\det A' = \det A + \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & a & 3 \\ b & b & b & b \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & a & 3 \\ b & b & b & b \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит, раз $\det A' = \det A$, то $\det B = 0$. Разложим $\det B$ по четвёртой строке:

$$0 = \det B = 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & a & 3 \\ b & b & b \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a & 3 \\ b & b & b \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & a & 3 \\ b & b & b \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & 3 \\ b & b & b \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

В первом определителе вычтем из второго и третьего стобца первый и разложим по второй строке. Получим, что

$$\begin{vmatrix} -2 & a & 3 \\ b & b & b \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & a+2 & 5 \\ b & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = b \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a+2 & 5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -b(-a-2+20) = b(a-18)$$

Второй определитель разложим по первому столбцу. Получим, что

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 3 \\ b & b & b \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = b \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -b(2a+3) = b(-2a-3)$$

Таким образом, $\forall b \;\; b(a-18) = b(-2a-3) \Leftrightarrow a-18 = -2a-3 \Leftrightarrow 3a = 15 \Leftrightarrow a = 5$.

Ответ:

5

Задание 6

Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ a & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Определите все значения параметра $a \in \mathbb{Z}$, при которых матрица A^{-1} существует и имеет целый положительный определитель. Для каждого найденного значения a укажите также саму матрицу A^{-1}.

Решение:

Найдём $\det A$. Разложим по третьей строке:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ a & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{по второму столбцу}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} -1 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ a & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3a$$

Раз $\exists A^{-1}$, то $-2 + 3a \neq 0$. Имеем:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1 \Leftrightarrow (-2 + 3a) \cdot \det A^{-1} = 1 \Leftrightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{-2 + 3a}$$

$\det A^{-1} \in \mathbb{Z}_+$, значит, $-2 + 3a \mid 1$ и $-2 + 3a > 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $3a - 2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$. Подставим:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём обратную матрицу методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)+2\times(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2\times(2)}$$

$$\xrightarrow{(1)-2\times(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2),(2)\leftrightarrow(3),(3)\leftrightarrow(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+2\times(2),(4)-4\times(2)}$$

$$\xrightarrow{(1)+2\times(2),(4)-4\times(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(4),(3)-4\times(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 8 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times(4)}$$

$$\xrightarrow{(-1)\times(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 8 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Значит,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 16 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$a = 1, A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 16 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$


но иногда
я всё же
думаю
как
был бы
счастлив,
дотянувшись до
тепла...