Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 1

1. Найдите базис пересечения двух подпространств $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^4$, где L_1 состоит из всех решений уравнения $2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$, а L_2 есть линейная оболочка векторов $(3, 2, 3, -2)$, $(2, 2, 3, 1)$, $(3, 1, 4, -3)$.

2. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x, y, z) = 16x^2 + 9y^2 + z^2 - 24xy + 8xz$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

3. Найдите псевдорешение для следующей системы линейных уравнений: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1; \\ -x_1 + 3x_2 = -2; \\ x_1 + x_2 = 1; \\ -2x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$.

4. Приведите пример двух диагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $4\varphi + 7\psi$ недиагонализуем.

5. Ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Приведите пример матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2, для которой ближайшей по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет матрица

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$3y^2 + 2z^2 - 4axz + 8x - 6y - 9 = 0$$

определяет эллиптический параболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 2

1. Найдите базис пересечения двух подпространств $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^4$, где L_1 состоит из всех решений уравнения $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$, а L_2 есть линейная оболочка векторов $(3, -1, 1, -2)$, $(3, 2, 2, 1)$, $(2, 2, 1, 3)$.

2. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x, y, z) = 16x^2 + y^2 + 4z^2 - 8xy + 16xz$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

3. Найдите псевдорешение для следующей системы линейных уравнений: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 = 1; \\ -x_1 - 3x_2 = -2; \\ 2x_1 + x_2 = -1. \end{cases}$.

4. Приведите пример двух диагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $7\varphi - 2\psi$ недиагонализуем.

5. Ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Приведите пример матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2, для которой ближайшей по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2y^2 + 3z^2 - 6axz - 4x - 12z + 5 = 0$$

определяет эллиптический параболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 3

1. Найдите базис пересечения двух подпространств $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^4$, где L_1 состоит из всех решений уравнения $2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$, а L_2 есть линейная оболочка векторов $(3, 2, 1, -5)$, $(2, 3, 1, -1)$, $(2, 5, 2, 3)$.

2. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x, y, z) = 9x^2 + y^2 + 9z^2 + 6xy - 18xz$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

3. Найдите псевдорешение для следующей системы линейных уравнений: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -2; \\ x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 - 3x_2 = 2; \\ -2x_1 + x_2 = -1. \end{cases}$.

4. Приведите пример двух диагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $5\varphi - 3\psi$ недиагонализуем.

5. Ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Приведите пример матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2, для которой ближайшей по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$3y^2 - 2z^2 + 4axz + 4x + 6y - 7 = 0$$

определяет гиперболический параболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 4

1. Найдите базис пересечения двух подпространств $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^4$, где L_1 состоит из всех решений уравнения $3x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0$, а L_2 есть линейная оболочка векторов $(3, -5, 1, 2)$, $(2, 3, 2, -1)$, $(2, 2, 1, -3)$.

2. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x, y, z) = 9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

3. Найдите псевдорешение для следующей системы линейных уравнений: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1; \\ -x_1 - 3x_2 = 2; \\ 2x_1 + x_2 = 1; \\ -x_1 + x_2 = -2. \end{cases}$.

4. Приведите пример двух диагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $2\varphi + 5\psi$ недиагонализуем.

5. Ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Приведите пример матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2, для которой ближайшей по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2y^2 - 3z^2 + 6axz - 2x + 12z + 11 = 0$$

определяет гиперболический параболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.