Линейная алгебра и геометрия

КР 1. 2022/2023 учебный год. Вариант 1

Морфей

Группа БЭАД242

Задание 1

Решите уравнение $2AX = \mathrm{tr}(AX) \cdot B$ относительно неизвестной матрицы X, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 8 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

В правой части матрица $\mathrm{tr}(AX) \cdot B$ размера 2×2, т.к. $\mathrm{tr}(AX) \in \mathbb{R}$. Значит, раз матрица A имеет размер 2×3, то размер $X - 3 \times 2$.
Пусть $Y = AX$ – матрица размера 2×2. Имеем уравнение $2Y = \mathrm{tr}(Y) \cdot B$. Найдём B^{-1} по формуле:

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Домножим обе части уравнения $2Y = \mathrm{tr}(Y)B$ слева на B^{-1}:

$$2B^{-1}Y = B^{-1} \cdot \mathrm{tr}(Y) \cdot B = \mathrm{tr}(Y)B^{-1}B = \mathrm{tr}(Y) \cdot E$$

Имеем следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y = \mathrm{tr}(Y) \cdot E$$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Найдём левую часть:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = (a+d) \cdot E = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$$

Значит,

$$\begin{cases} a = a + d \\ b = 0 \\ a + 2c = 0b + 2d = a + d \end{cases}$$

Из первого уравнения $d = 0$. Тогда из четвёртого уравнения следует, что $a = b = 0$. Значит, из третьего $c = 0$. Такимо образом,

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}$$

Значит, имеем

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -11 & 8 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Применим метод Гаусса для следующей расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -11 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-5\times(2)}$$

$$\xrightarrow{(1)-5\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Значит,

$$X = \begin{pmatrix} 7x_1 & 7x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \text{где} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 7x_1 & 7x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \text{где} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Задание 2

Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = -1 \\ 3x_1 + bx_2 + 7x_3 + x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

Определите все значения параметра b, для которых эта система имеет ровно две свободных неизвестных, и для каждого найденного значения b выпишите соответствующее общее решение системы.

Решение:

1. Запишем соответствующую данной СЛУ расширенную матрицу и приведём её к СВ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & 7 & -1 \\ 3 & b & 7 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & -4 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-((2)+(3)),(2)-(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4-b & -2 & 1 & 2 \\ 1 & b+1 & 11 & -4 & -11 \\ 2 & -1 & -4 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-2\times(2)}$$

$$\xrightarrow{(3)-2\times(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4-b & -2 & 1 & 2 \\ 1 & b+1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & -3-2b & -26 & 13 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & b+1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 4-b & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3-2b & -26 & 13 & 26 \end{array}\right)$$

2. Если $b = 4$, то матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & -26 & 13 & 26 \end{array}\right) \overset{(2)\leftrightarrow(3)}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & -10 & -26 & 13 & 26 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

В этой матрице 3 главные неизвестные. Значит, этот случай не подходит.

3. Значит, $b \neq 4$. Тогда прибавим к третьей строчке вторую, умноженную на $\dfrac{2b+3}{4-b}$. Получим следующую матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & b+1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 4-b & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -26 - 2\left(\frac{2b+3}{4-b}\right) & 13 + \frac{2b+3}{4-b} & 26 + 2\frac{2b+3}{4-b} \end{array}\right)$$

Раз в этой матрице должно быть ровно две свободные неизвестные, то

$$-26 - 2\frac{2b+3}{4-b} = 0 \Leftrightarrow \frac{2b+3}{4-b} = -13 \Leftrightarrow 2b+3 = -52 + 13b \Leftrightarrow 15b = 55 \Leftrightarrow b = \frac{11}{3}.$$

Подставим $b = \frac{11}{3}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{14}{3} & 11 & -4 & -11 \\ 0 & \frac{1}{3} & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-14\times(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 39 & -18 & -39 \\ 0 & 1 & -6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Значит,

$$\begin{cases} x_1 = -39 - 39x_3 + 18x_4 \\ x_2 = 6 + 6x_3 - 3x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ответ:

$$b = \frac{11}{3}, \qquad \begin{cases} x_1 = -39 - 39x_3 + 18x_4 \\ x_2 = 6 + 6x_3 - 3x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Задание 3

Две перестановки $\sigma, \tau \in S_7$ заданы своими разложениями в произведение независимых циклов как $\sigma = (1275)(46)$ и $\tau = (137)(45)$. Найдите $(\sigma\tau)^{73}$ и $\rho = \left(\tau\sigma^{-1}\right)^{78}$.

Решение:

1. Найдём $\sigma\tau = (1275)(46) \circ (137)(45) = (13564)(27)$.

Тогда $(\sigma\tau)^{73} = (13564)^{73}(27)^{73} = (13564)^3(27) = (16345)(27) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.

$$\sigma = (1275)(46) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1572)(46)$$

Тогда

$$\tau \circ \sigma^{-1} = (137)(45)(1572)(46) = (1465)(237) \Rightarrow \rho = \left(\tau\sigma^{-1}\right)^{78} = (1465)^{78}(237)^{78} = (1465)^2 \circ \mathrm{id} = (16)(45) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$(16345)(27) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $\rho = (16)(45) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Задание 4

Найдите коэффициент при x^5 в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & x & 3 \\ x & -3 & 1 & -1 & x^2 \\ 2 & -4 & x & 3 & -1 \\ 3 & x & 2 & 1 & x \\ 0 & x & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

Решение:

1. Предположим, что мы НЕ берём x^2 из последнего столбца. Тогда, т.к. матрица размера 5×5, то из каждого столбца мы должны взять x. Вариантов так сделать ровно 1, ему соответствует перестановка $4, 1, 3, 5, 2$. Посчитаем её знак:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1452) = (14)(45)(52) - \text{нечётная перестановка}$$

Значит, получим $-x^5$.

2. Теперь предположим, что мы взяли x^2 из последнего столбца. Заметим, что тогда мы не можем взять x_{21} и x_{45}. Значит, всего в матрице осталось только три столбца, из которых мы должны взять x. Сделать это два варианта, им соответствуют перестановки $(4, 5, 3, 2, 1)$ и $(4, 5, 3, 1, 2)$. В первом случае мы полчуаем $0 \cdot x^5$, а во втором $3x^5$. Посчитаем знак второй перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (14)(25) - \text{чётная перестановка}$$

Получаем $3x^5$.

Итого, коэффициент при x^5 равен $3 - 1 = 2$.

Ответ:

2

Задание 5

Про матрицу $A \in M_4(\mathbb{R})$ известно, что она обратима и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Выясните, обратима ли матрица $2A - E$.

Решение:

Имеем $A^{-1} \cdot A = E$. Решим это уравнение методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-2(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}$$

$$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2),(3)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)+(4)}$$

$$\xrightarrow{(2)+(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-3\times(2),(-1)\times(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 4 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times(3)}$$

$$\xrightarrow{(-1)\times(3)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 4 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+(3),(2)+(3),(4)+3\times(3)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & -3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\times 4}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\times(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(4),(2)+(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right)$$

Слева получили единичную матрицу. Значит,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A - E = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Выясним, обратима ли матрица $2A - E$. Для этого надо найти её определитель.

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} \overset{(3)+2\times(1)}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} -1 & 6 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -13 & -16 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Разложим по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -13 & -16 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 12 & -13 & -16 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 12 & -13 & -16 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Разложим по первой строке:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 12 & -13 & -16 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -13 & -16 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 12 & -16 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -(-65 + 48) - (60 - 64) =$$

$$= 17 + 4 = 21$$

Значит, искомый определитель равен $-21 \neq 0 \Rightarrow 2A - E$ — обратимая матрица.

Ответ:

Обратима.

Задание 6

В матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 0 \\ -5 & 7 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

выбраны три строки $A_{(i)}, A_{(j)}, A_{(k)}$ (не обязательно попарно различных) и вместо строки $A_{(i)}$ записали сумму $A_{(j)} + A_{(k)}$. Определите все возможные значения, которые может принимать определитель результирующей.

Решение:

Переберём все возможные наборы i, j и k:

1. Предположим, что i, j, k — попарно различные числа. Тогда мы из строки i можем вычесть строки j и k и получим нулевую строку. В этом случае определитель результирующей матрицы будет равен 0.

2. Если $j = k$, то мы можем из строки i вычесть строку j, умноженную на 2, и вновь получим нулевую строку. Значит, в этом случае опредеолитель результирующей матрицы тоже будет равен 0.

3. Предположим, что $i = j \neq k$. Тогда по свойству определителя, если мы представим $A'_{(i)} = A_{(i)} + A_{(k)}$, то можем представить $\det A = \det A + \det A''$, где A'' — матрица, где вместо строки i стоит строка j. Тогда в матрице A'' две одинаковые строки, и её определитель равен нулю. Значит, $\det A' = \det A$.
Если $i = k$, то рассуждения аналогичны и $\det A' = \det A$.

4. Предположим, что $i = j = k$. Тогда получим матрицу A', равную матрицу A, в которой i-ая строка умножена на 2, значит $\det(A') = 2\det(A)$.

Таким образом, $\det A' = \det A$, $\det A' = 2\det A$ или $\det A' = 0$. Посчитаем $\det A$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 0 \\ -5 & 7 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{(4)+(3),(1)+2\times(3)} \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 & 2 \\ -5 & 7 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{(2)-5\times(3)} \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 & 2 \\ 0 & -18 & -30 & -3 \\ -1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{(1)\leftrightarrow(3)}$$

$$\xlongequal{(1)\leftrightarrow(3)} - \begin{vmatrix} -1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & -18 & -30 & -3 \\ 0 & 13 & 22 & 2 \\ 0 & 10 & 5 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{(-1)\times(1)} \begin{vmatrix} 1 & -5 & -7 & -1 \\ 0 & -18 & -30 & -3 \\ 0 & 13 & 22 & 2 \\ 0 & 10 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -18 & -30 & -3 \\ 13 & 22 & 2 \\ 10 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 13 & 22 & 2 \\ 10 & 5 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{(2)-2\times(1),(3)-2\times(1)} -3 \begin{vmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -15 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -15 \end{vmatrix} = -3(-15+4) = 33.$$

Ответ:

66, 33 или 0.