Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 1

1. Определите все значения, которые может принимать размерность ядра линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в пересечении ядра и образа содержится вектор $v = (1, 0, -1, 2)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей отрицательные значения на всех ненулевых векторах подпространства $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением даны векторы

$$u_1 = (1, -1, 2), u_2 = (1, 1, -1), u_3 = (1, 0, -1).$$

Обозначим через v_1, v_2, v_3 ортогональные проекции вектора $v = (5, 3, -1)$ на подпространства $u_1^\perp, u_2^\perp, u_3^\perp$ соответственно. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

4. Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2+3\varphi$ диагонализуем.

5. Вставьте вместо звёздочки, ромбика и кружочка подходящие числа таким образом, чтобы линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} * & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & \diamond \\ 2/3 & 2/3 & \circ \end{pmatrix},$$

был ортогональным. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Существует ли матрица $A \in \operatorname{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:

1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{10}$;

2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$?

Если существует, то предъявите такую матрицу.

7. Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой уравнение поверхности

$$3x^2 + 2y^2 - 4xz - 4y + 7 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 2

1. Определите все значения, которые может принимать размерность ядра линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в пересечении ядра и образа вектор $v = (1, 2, 0, -1)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей отрицательные значения на всех ненулевых векторах подпространства $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением даны векторы

$$u_1 = (-1, 1, 2), u_2 = (1, 1, -1), u_3 = (1, -1, 0).$$

Обозначим через v_1, v_2, v_3 ортогональные проекции вектора $v = (3, -5, 1)$ на подпространства $u_1^\perp, u_2^\perp, u_3^\perp$ соответственно. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

4. Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2 - 5\varphi$ диагонализуем.

5. Вставьте вместо звёздочки, ромбика и кружочка подходящие числа таким образом, чтобы линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 2/3 & * & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ \diamond & 2/3 & \circ \end{pmatrix},$$

был ортогональным. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:

1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{20}$;

2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

Если существует, то предъявите такую матрицу.

7. Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой уравнение поверхности

$$2y^2 - 3z^2 + 4xz - 8y + 5 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 3

1. Определите все значения, которые может принимать размерность ядра линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в пересечении ядра и образа содержится вектор $v = (1, 0, 2, -2)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей отрицательные значения на всех ненулевых векторах подпространства $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением даны векторы

$$u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (-1, 1, 1), u_3 = (0, -1, 1).$$

Обозначим через v_1, v_2, v_3 ортогональные проекции вектора $v = (5, 3, -1)$ на подпространства $u_1^\perp, u_2^\perp, u_3^\perp$ соответственно. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

4. Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2 - 3\varphi$ диагонализуем.

5. Вставьте вместо звёздочки, ромбика и кружочка подходящие числа таким образом, чтобы линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & * \\ -2/3 & \diamond & 2/3 \\ -2/3 & \circ & -1/3 \end{pmatrix},$$

был ортогональным. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:

1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{40}$;

2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$?

Если существует, то предъявите такую матрицу.

7. Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой уравнение поверхности

$$3x^2 - 2y^2 - 4xz + 8y - 11 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 4

1. Определите все значения, которые может принимать размерность ядра линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в пересечении ядра и образа содержится вектор $v = (1, 2, 0, -2)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей отрицательные значения на всех ненулевых векторах подпространства $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением даны векторы

$$u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (1, 1, -1), u_3 = (1, -1, 0).$$

Обозначим через v_1, v_2, v_3 ортогональные проекции вектора $v = (5, 3, -1)$ на подпространства $u_1^\perp, u_2^\perp, u_3^\perp$ соответственно. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

4. Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2+5\varphi$ диагонализуем.

5. Вставьте вместо звёздочки, ромбика и кружочка подходящие числа таким образом, чтобы линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ * & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & \diamond & \circ \end{pmatrix},$$

был ортогональным. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:

1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{50}$;

2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$?

Если существует, то предъявите такую матрицу.

7. Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой уравнение поверхности

$$-2y^2 + 3z^2 - 4xz + 12y - 9 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ