Линейная алгебра и геометрия

КР-2. 2023/2024 учебный год. Вариант 1

Морфей

Группа БЭАД242

Задание 1

Рассмотрим линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}, f \mapsto f' + f(-1) \cdot x^2$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, в которых φ имеет диагольный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

Решение:

Вот тут на 27 странице описание алгоритма. Проделаем его.
Найдём матрицу отображения φ в базисах $\{1, x, x^2, x^3\}$ и $\{1, x, x^2\}$.
Пусть $f(x) = d + cx + bx^2 + ax^3$. Тогда $f'(x) = c + 2bx + 3ax^2$, $f(-1) \cdot x^2 = (d - c + b - a)x^2$. Тогда

$$\varphi(f) = c + 2bx + 3ax^2 + (d - c + b - a)x^2 = c + 2bx + (d - c + b + 2a)x^2$$

Подставим базисы:

$$\varphi(1) = x^2$$

$$\varphi(x) = 1 - x^2$$

$$\varphi(x^2) = 2x + x^2$$

$$\varphi(x^3) = 2x^2$$

Запишем матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Теперь найдём базис $\ker \varphi$. Для этого приведём A к УСВ и найдём ФСР:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Этот вектор и есть базис $\ker \varphi$. Вполне понятно, как дополнить его до базиса $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{базис } \mathbb{R}^4, \text{искомый базис } \mathbb{e}$$

Теперь надо найти образы первых трёх векторов базиса $\mathbb{e}$. Мы это уже делали. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{образы}$$

Осталось дополнить их до базиса $\mathbb{R}^3$. Вполне видно, что это уже базис:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, эти три вектора — искомый базис $\mathbb{f}$. Итого:

$$\mathbb{e} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Это координаты в стандартных базисах, но нужно записать многочлены:

$$\mathbb{e} = \mathsf{vec}\{1, x, x^2, -2 + x^3\}$$

$$\mathbb{f} = \{x^2, 1 - x^2, 2x + x^2\}$$

Диагональный вид матрицы можно найти по формуле $A' = D^{-1}AC$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

По сути, проверка того, что мы всё сделали правильно.
Можно поступить иначе. Так как $\operatorname{rk} A = 3$ (это можно понять из УСВ матрицы A, который мы нашли раньше), то $\operatorname{rk} \varphi = 3$, значит, в A' будет три единицы на диагонали.

Ответ:

$$\mathbb{e} = \mathsf{vec}\{1, x, x^2, -2 + x^3\}$$

$$\mathbb{f} = \{x^2, 1 - x^2, 2x + x^2\}$$

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Пусть V — пространство всех верхнетреугольных матриц размера 2×2 с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $v = (1, -1)$. Рассмотрим на V линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(X) = \operatorname{tr}(X), \alpha_2(X) = \operatorname{tr}(XS), \alpha_3(X) = vXv^T$$

Найдите базис пространства V, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2 - 2\alpha_1, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

Решение:

Введём на V вот такой базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{— координаты в введённом базисе}$$

Запишем результаты действия $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в координатах этого базиса:

$$\alpha_1(X) = \operatorname{tr}(X) = a + c = (1, 0, 1)$$

$$XS = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 3b & 2a \\ -3c & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_2(X) = a - 3b = (1, -3, 0)$$

$$vXv^T = (1, -1) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} (1, -1)^T = (a \quad b - c) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a - b + c \Rightarrow \alpha_3(X) = a - b + c = (1, -1, 1)$$

$$\alpha_2 - 2\alpha_1 = a - 3b - 2(a + c) = -a - 3b - 2c = (-1, -3, -2)$$

Итого, набор $(\alpha_1, \alpha_2 - 2\alpha_1, \alpha_3)$ задаётсся такой матрицей:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

в том смысле, что для любой матрицы $X \in V$ $\varepsilon \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ — вектор, равный $\begin{pmatrix} \alpha_1(X) \\ (\alpha_2 - 2\alpha_1)(X) \\ \alpha_3(X) \end{pmatrix}$.

Тогда, чтобы найти искомый базис, надо найти ε^{-1}. Сделаем это!

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)+(1),(3)-(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(-1)\times(3),(3)\leftrightarrow(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{(3)+3\times(2)}{\sim}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{(1)+(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{(-1)\times(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right)
$$

Итого,

$$
\mathbb{e} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}
$$

Это координаты искомого базиса в нашем исконном базисе матричных единиц. Осталось записать его в виде матриц:

$$
e_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

Ответ:

$$
e_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

Задание 3

Пусть β — билинейная форма на пространстве $\mathbb{R}^3$, заданная формулой

$$\beta(x,y) = 3x_1y_1 + (a+2)x_2y_2 + 3x_3y_3 - 4x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2ax_2y_3 + 2x_3y_2$$

для всех $x, y, \in \mathbb{R}^3$. Определите нормальный вид квадратичной формы $Q(x) = \beta(x,x)$ в зависимости от значений параметра a.

Решение:

Определим $Q(x)$:

$$Q(x) = \beta(x,x) = 3x_1x_1 + (a+2)x_2x_2 + 3x_3x_3 - 4x_1x_2 - 2x_2x_1 - 2ax_2x_3 + 2x_3x_2 =$$
$$= 3x_1^2 + (a+2)x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 + (2-2a)x_2x_3$$

Матрица $Q(x)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & a+2 & 1-a \\ 0 & 1-a & 3 \end{pmatrix}$$

Поменяем вторую и третью строчки местами (и столбцы тоже), чтобы отправить параметр подальше:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & a+2 & 1-a \\ 0 & 1-a & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1-a \\ -3 & 1-a & a+2 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся методом Якоби.

$$\delta_1 = 3$$

$$\delta_2 = 9$$

$$\delta_3 = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1-a \\ -3 & 1-a & a+2 \end{pmatrix} = (9(a+2) + 0 + 0) - \left(27 + 0 + 3(1-a)^2\right) =$$
$$= 9a + 18 - 27 - 3a^2 + 6a - 3 = -3a^2 + 15a - 12 = -3\left(a^2 - 5a + 4\right) =$$
$$= -3(a-1)(a-4)$$

Первые два минора не равны нулю, значит,

$$Q \sim \delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \frac{\delta_3}{\delta_2} x_3^2$$

Осталось разобрать несколько случаев.

Случай 1.
Если $a = 1$ или $a = 4$, то $\delta_3 = 0$, и

$$Q \sim x_1^2 + x_2^2$$

Случай 2.
Если $a < 1$ или $a > 4$, то $\delta_3 < 0$. Тогда

$$Q \sim x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

Случай 3.
Если $1 < a < 4$, то $\delta_3 > 0$ и

$$Q \sim x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Можно записывать ответ.

Ответ:

Если $a = 1$ или $a = 4$, то $x_1^2 + x_2^2$,
Если $a < 1$ или $a > 4$, то $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$,
Если $1 < a < 4$, то $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Задание 4

В четырёхмерном евклидовом пространстве даны векторы v_1, v_2, v_3 с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Для каждого $i = 1, 2, 3$ обозначим через w_i ортогональную составляющую вектора v_i относительно подпространства, порождамого двумя другими векторами. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы w_1, w_2, w_3.

Решение:

Вспомним, что если в подпространстве S задан ортогональный базис $f_1, f_2, ..., f_n$, то

$$\mathrm{pr}_S(v) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(v, f_k)}{(f_k, f_k)} f_k$$

Найдём w_1. Это v_1 минус проекция v_1 на $S_1 = \langle v_2, v_3 \rangle$. Из матрицы Грама мы видим, что $((v_2, v_3)) = 0$, значит, это ортогональный базис линейной оболочки. Пользуясь матрицей Грама, получаем

$$\mathrm{pr}_{S_1}(v_1) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 + \frac{(v_1, v_3)}{(v_3, v_3)} v_3 = \frac{0}{3} v_2 + \frac{2}{2} v_3 = v_3 \Rightarrow w_1 = v_1 - v_3$$

w_2 — v_2 минус проекция v_2 на $S_2 = \langle v_1, v_3 \rangle$. Незадача, из матрицы Грама $(v_1, v_3) = 2 \neq 0$. Тогда надо ортогонализировать этот базис. Пусть $f_1 = v_1$, тогда

$$f_2 = v_3 - \frac{(v_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = v_3 - \frac{2}{3} v_1$$

f_1, f_2 — ортогональный базис S_2. Найдём w_2:

$$\mathrm{pr}_{S_2}(v_2) = \frac{(v_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 + \frac{(v_2, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2$$

$$(v_2, f_1) = (v_2, v_1) = 0$$

$$(v_2, f_2) = \left(v_2, v_3 - \frac{2}{3} v_1\right) = (v_2, v_3) - \frac{2}{3}(v_2, v_1) = 0 - 0 = 0$$

Таким образом,

$$\mathrm{pr}_{S_2}(v_2) = 0 \Rightarrow w_2 = v_2$$

w_3 — v_3 минус проекция v_3 на $S_3 = \langle v_1, v_2 \rangle$. $(v_1, v_2) = 0$, значит, это ортогональный базис:

$$\mathrm{pr}_{S_3}(v_3) = \frac{(v_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 + \frac{(v_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = \frac{2}{3} v_1 + 0 = \frac{2}{3} v_1 \Rightarrow w_3 = v_3 - \frac{2}{3} v_1$$

Итого имеем:

$$w_1 = v_1 - v_3$$

$$w_2 = v_2$$

$$w_3 = v_3 - \frac{2}{3} v_1$$

Тогда

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$G(w_1, w_2, w_3) = C^T G(v_1, v_2, v_3) C \Rightarrow \mathrm{Vol}(w_1, w_2, w_3) = \sqrt{\det G(w_1, w_2, w_3)} = |\det C| \sqrt{\det G(v_1, v_2, v_3)}$$

Найдём чиселки:

$$|\det C| = \left| (1 + 0 + 0) - \left(\frac{2}{3} + 0 + 0 \right) \right| = \frac{1}{3}$$

$$\det G(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (18 + 0 + 0) - (12 + 0 + 0) = 6$$

Тогда искомый объём равен

$$\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ответ:

$$\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Задание 5

Рассмотрим линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, заданное формулой $\varphi(x) = [Ax, u]$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T, u = (1, -1, 1)^T$$

и квадратные скобки обозначают векторное произведение. Найдите расстояние от вектора $v = (3, 1, 4)^T$ до подпространства Im φ.

Решение:

Найдём $\varphi(x)$. Пусть $x = (a, b)^T$. Тогда

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a - 2b \end{pmatrix}$$

Тогда

$$[Ax, u] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & a - 2b \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (b + a - 2b)e_1 - (a - a + 2b)e_2 + (-a - b)e_3 = \begin{pmatrix} a - b \\ -2b \\ -a - b \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$\varphi\big((a, b)^T\big) = (a - b, -2b, -a - b)^T$$

Можно написать матрицу отображения φ в паре стандартных базисов:

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы не пропорциональны, значит, базисом Im φ являются векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Проверим на ортогональность:

$$(v_1, v_2) = -1 + 1 = 0$$

Значит это ортогональный базис Im φ. Найдём проекицю v на Im φ:

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{Im}\ \varphi}(v) = \frac{(v, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 + \frac{(v, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2$$

$$(v, v_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$(v_1, v_1) = 2$$

$$(v, v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 - 2 - 4 = -9$$

$$(v_2, v_2) = 1 + 4 + 1 = 6$$

Можно записать:

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{Im}\ \varphi}(v) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{9}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\mathrm{ort}_{\mathrm{Im}\ \varphi}(v) = v - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(v, \mathrm{Im}\ \varphi) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

Ответ:

$2\sqrt{3}$

Задание 6

В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(1,3,2), B(4,3,-1), C(7,9,2), D(-2,-1,3)$. Пусть BH — высота тетраэдра, опущенная на грань ACD, и AF — биссектриса грани ABC. Найдите угол и расстояние между прямыми BH и AF.

Решение:

Во-первых, найдём нормаль к плоскости ACD. Найдём направляющие векторы этой плоскости:

$$\overrightarrow{AC} = (6,6,0), \overrightarrow{AD} = (-3,-4,1)$$

Опорная точка — $A(1,3,2)$. Тогда общее уравнение плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 6 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 6(x-1) - 6(y-3) + (-24+18)(z-2) = 6x - 6 - 6y + 18 - 6z + 12 = 0$$

$$6x - 6y - 6z = 24$$

$$x - y - z = 4$$

Нормаль к плоскости — $\vec{n} = (1,-1,-1)$.
Тогда у прямой BH направляющий вектор — $(1,-1,-1)$, опорная точка $B(4,3,-1)$.
Во-вторых, пусть у прямой AF направляющий вектор имеет координаты $\vec{e} = (a,b,c)$. Тогда углы между этим вектором и векторами $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ должны быть равны. Запишем это условие:
$\overrightarrow{AB} = (3,0,-3)$.

$$\left(\overrightarrow{AB}, \vec{e}\right) = 3a - 3c$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 3\sqrt{2}$$

$$\left(\overrightarrow{AC}, \vec{e}\right) = 6a + 6b$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 6\sqrt{2}$$

Отсюда имеем, что (если сократить в выражении косинуса угла $\|\vec{e}\|$):

$$\frac{3a-3c}{3\sqrt{2}} = \frac{6a+6b}{6\sqrt{2}}$$

$$a - c = a + b$$

$$c = -b$$

Тогда направляющий вектор имеет вид $(a,b,-b)$.
С другой стороны, этот вектор должен лежать в одной плоскости с векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Запишем это условие:

$$0 = \begin{vmatrix} a & b & -b \\ 3 & 0 & -3 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 18b - 18b) - (0 - 18a + 0) = 18a - 36b \Rightarrow a = 2b$$

Итого, направляющий вектор имеет вид $(2b, b, -b) \sim (2,1,-1) = \vec{e}$.
Найдём угол между $\vec{e}$ и $\vec{n}$:

$$\|\vec{e}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{3}$$

$$(\vec{e}, \vec{n}) = 2 - 1 + 1 = 2$$

Тогда

$$\angle(\vec{e}, \vec{n}) = \arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{2}}\right) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Это и есть искомый угол.
Запишем, что мы знаем о наших прямых:
BH: опорная точка $B(4, 3, -1)$, направляющий вектор $\vec{n} = (1, -1, -1)$.
AF: опорная точка $A(1, 3, 2)$, направляющий вектор $\vec{e} = (2, 1, -1)$.
Найдём расстояние между ними. Введём вектор $\vec{m} = \overrightarrow{AB} = (3, 0, -3)$.
Найдём объём параллелепипеда на этих трёх векторах:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = (-3 + 3 + 0) - (-3 + 0 + 6) = -3$$

Значит, искомый объём равен 3.
Синус угла между векторами $\vec{e}$ и $\vec{n}$ равен

$$\sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Тогда расстояние равно

$$\frac{3}{\frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \|\vec{e}\| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{9}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Ответ:

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3}, \rho = \frac{3}{\sqrt{14}}$$