# Линейная алгебра и геометрия

## КР-2. 2020/2021 учебный год. Вариант 1

**Морфей**

**Группа БЭАД242**

# Задание 1

Найдите базис пересечения двух подпространств $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^4$, где $L_1$ есть линейная оболочка векторов $(3, 2, 3, -2), (2, 2, 3, 1), (3, 1, 4, -3)$, а $L_2$ состоит из всех решений уравнения $2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

## Решение:

Пересечение удобно находить, если задать оба подпространства СЛУ. Приведём $L_1$ к СЛУ по известному алгоритму:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ФСР:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Тогда искомая СЛУ

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

или

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

Тогда пересечение задаётся СЛУ

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Найдём ФСР:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Эти два вектора и есть искомый базис.

**Ответ:**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

# Задание 2

Рассмотрим линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}, f \mapsto f' - f(1) \cdot x^2$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, в которых $\varphi$ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

## Решение:

Выпишем матрицу линейного отображения в базисах $\{1, x, x^2, x^3\}, \{1, x, x^2\}$.
Пусть $f(x) = d + cx + bx^2 + ax^3$. Тогда:

$$f' = c + 2bx + 3ax^2$$

$$f(1) \cdot x^2 = (d + c + b + a)x^2$$

$$\varphi(f) = c + 2bx + 3ax^2 - (d + c + b + a)x^2 = c + 2bx + (-d - c - b + 2a)x^2$$

$$\varphi(d + cx + bx^2 + ax^3) = c + 2bx + (-d - c - b + 2a)x^2$$

$$\varphi(1) = -x^2$$

$$\varphi(x) = 1 - x^2$$

$$\varphi(x^2) = 2x - x^2$$

$$\varphi(x^3) = 2x^2$$

Имеем матрицу линейного отображения в этой паре базисов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём $\ker \varphi$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Дополним его до базиса $\mathbb{R}^4$. Ясно, что можно взять

$$\mathbb{e} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{1, x, x^2, 2 + x^3\}$$

Это искомый базис $\mathbb{e}$. Положим

$$f_1 = \varphi(e_1) = \varphi(1) = -x^2$$

$$f_2 = \varphi(e_2) = \varphi(x) = 1 - x^2$$

$$f_3 = \varphi(e_3) = \varphi(x^2) = 2x - x^2$$

Это и есть искомый базис.
Из УСВ матрицы $\operatorname{rk}\varphi = 3$, значит, матрица в этих базисах имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Ответ:

$$\mathbb{e} = \left\{1, x, x^2, 2 + x^3\right\}$$

$$\mathbb{f} = \left\{-x^2, 1 - x^2, 2x - x^2\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Задание 3

Пусть $\beta$ — билинейная форма на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, имеющая в базисе $x+2x^2, x^2, 1-x^2$ матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Рассмотрим линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на $V$ такие, что $\alpha_1(f) = \beta(f, 1), \alpha_2(f) = \beta(f, x), \alpha_3(f) = \beta(f, x^2)$ для всех $f \in V$. Найдите базис пространства $V$, для которого $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства $V^*$.

## Решение:

Пусть $\mathbb{e} = (1, x, x^2), \mathbb{f} = (x+2x^2, x^2, 1-x^2)$. Найдём матрицу перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{f}$:

$$\mathbb{f} = \mathbb{e} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{e} \cdot C$$

Тогда

$$\mathbb{e} = \mathbb{f} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbb{f} \cdot C^{-1}$$

Найдём обратную:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ:} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Имеем

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

Тогда в базисе $\mathbb{f}$ матрица $\beta$ имеет вид

$$D^T A D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ для $f = c + bx + ax^2$.

$$\alpha_1(f) = \beta(f, 1) = \beta(c + bx + ax^2, 1) = c\beta(1, 1) + b\beta(x, 1) + a\beta(x^2, 1) = 3c + 2b + a = (3, 2, 1)$$

Аналогично

$$\alpha_2(f) = -c - b - 2a = (-1, -1, -2)$$

$$\alpha_3(f) = c + b + a = (1, 1, 1)$$

Матрица $\alpha$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Осталось найти обратную.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ: } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Матрица базисов

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{1 - x, -1 + 2x - x^2, -3 + 5x - x^2\} - \text{искомый базис}$$

**Ответ:**

$\{1 - x, -1 + 2x - x^2, -3 + 5x - x^2\}$

# Задание 4

Билинейная форма $\beta$ на пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x) := \beta(x, x)$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

## Решение:

Запишем матрицу $Q(x)$ в стандартном базисе (она равна $\frac{1}{2}(A + A^T)$):

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся симметричным Гауссом и найдём нормальный вид.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+2\times(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+2\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — матрица перехода к искомому базису}$$

Нормальный вид:

$$x_1^2 - x_2^2$$

Замена координат (соответствующие коэффициенты стоят в строчках):

$$x_1 = x_1' + x_2'$$

$$x_2 = -x_1' + x_2'$$

$$x_3 = 4x_2' + x_3'$$

## Задание 5

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найдите расстояние от вектора $v = (2, 3, 1, 4)$ до подпространства

$$U = \langle (2, -1, -1, 2),\ (1, -2, 2, 4),\ (5, -1, -5, 2) \rangle$$

## Решение:

Найдём базис подпространства:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \text{базис } U$$

Можно было бы провести ортогонализацию, но это уже было в следующих годах, так что воспользуемся другим способом:

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\mathrm{pr}_U(v) = A(A^TA)^{-1}A^Tv$$

Найдём.

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^TA)^{-1} = \frac{1}{250 - 100} \begin{pmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{150} \begin{pmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

$$A(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{30} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

$$A^Tv = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{pr}_U\, v = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{30} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\mathrm{ort}_U\, v = v - \mathrm{pr}_U\, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{21}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

$$\rho(v, U) = \frac{1}{5}\sqrt{4^2 + 21^2 + 3^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{530}}{5}$$

## Ответ:

$$\frac{\sqrt{530}}{5}$$

## Задание 6

В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(-1,1,7), B(5,-2,1), C(4,2,-2), D(9,2,3)$. Пусть $AH$ — высота грани $ACD$, а $BL$ — биссектриса грани $ABD$. Найдите угол и расстояние между прямыми $AH$ и $BL$.

## Решение:

Пусть у $AH$ направляющий вектор $(a,b,c)$.

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

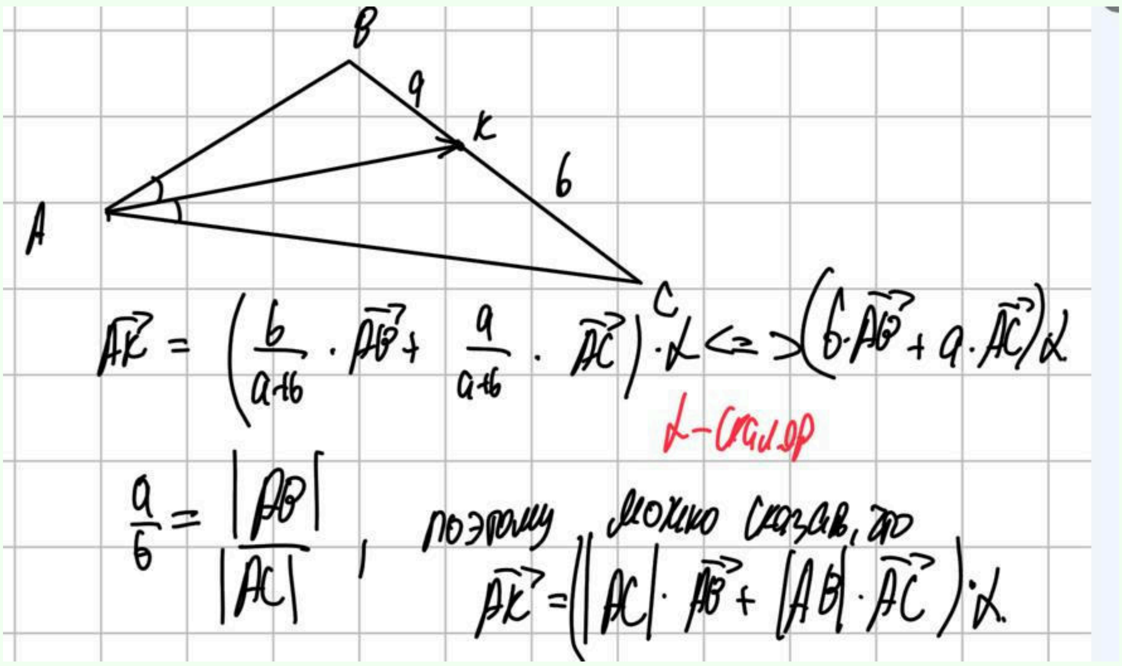
$$AH \perp CD \Rightarrow a + c = 0$$

Далее, $AH, AC$ и $AD$ лежат в одной плоскости. Значит,

$$0 = \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & -9 \\ 10 & 1 & -4 \\ a & b & c \end{pmatrix} = (5c - 4a - 90b) - (-9a - 20b + 10c) = 5a - 70b - 5c \Leftrightarrow a - 14b - c = 0$$

Имеем $c = -a \Rightarrow a - 14b + a = 0 \Rightarrow a = 7b$, Имеем вектор $(7b, b, -7b) \sim (7, 1, -7) = \vec{n}$.

Опишем биссектрису. Рисуночек от Тагира:




Тогда направляющий вектор $BL$ равен $\vec{l} = |BD| \cdot \overrightarrow{BA} + |BA| \cdot \overrightarrow{BD}$. Имеем:

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, |BA| = \sqrt{36+9+36} = 9$$

$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |BD| = \sqrt{16+16+4} = 6$$

$$\vec{l} = 6\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 54 \\ 54 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Имеем
$BL$ : опорная точка $B(5,-2,1)$, направляющий вектор $\vec{l} = (0,1,1)$.
$AH$ : опорная точка $A(-1,1,7)$, направляющий вектор $\vec{n} = (7,1,-7)$.
Найдём угол между ними:

$$|l| = \sqrt{2}, |n| = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

$$(l,n) = 1 - 7 = -6$$

$$\cos\angle(l,n) = \frac{-6}{3\sqrt{22}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{22}}\right)$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{22} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

Найдём расстояние между ними по известной формуле.

$$\operatorname{Vol}\left(\overrightarrow{AB}, \vec{l}, \vec{n}\right) = \left|\det\begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -7 \end{pmatrix}\right| = |6(-7-1) + 7(-3+6)| = 27$$

$$\rho = \frac{27}{\frac{3}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

## Ответ:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{22}}\right), \rho = \frac{3}{\sqrt{2}}$$