# Вариант 1

- **1.** Решите уравнение  $2AX = (\operatorname{tr}(AX)) \cdot B$  относительно неизвестной матрицы X, где  $A = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 8 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 2. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = -1, \\ 3x_1 + bx_2 + 7x_3 + x_4 = -7, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Определите все значения параметра b, для которых эта система имеет ровно две свободных неизвестных, и для каждого найденного значения b выпишите соответствующее общее решение системы.

- **3.** Две перестановки  $\sigma, \tau \in S_7$  заданы своими разложениями в произведение независимых циклов как  $\sigma = (1275)(46)$  и  $\tau = (137)(45)$ . Найдите  $(\sigma\tau)^{73}$  и  $\rho = (\tau\sigma^{-1})^{78}$ .
- **4.** Найдите коэффициент при  $x^5$  в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & x & 3 \\ x & -3 & 1 & -1 & x^2 \\ 2 & -4 & x & 3 & -1 \\ 3 & x & 2 & 1 & x \\ 0 & x & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

**5.** Про матрицу  $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$  известно, что она обратима и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выясните, обратима ли матрица 2A - E.

6. В матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 0 \\ -5 & 7 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

выбрали три строки  $A_{(i)}, A_{(j)}, A_{(k)}$  (не обязательно попарно различных) и вместо строки  $A_{(i)}$  записали сумму  $A_{(j)} + A_{(k)}$ . Определите все возможные значения, которые может принимать определитель результирующей матрицы.

1	2	3	4	5	6	$\sum$

# Вариант 2

- **1.** Решите уравнение  $3AX = (\operatorname{tr}(AX)) \cdot B$  относительно неизвестной матрицы X, где  $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 14 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .
- 2. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + bx_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 8. \end{cases}$$

Определите все значения параметра b, для которых эта система имеет ровно две свободных неизвестных, и для каждого найденного значения b выпишите соответствующее общее решение системы.

- 3. Две перестановки  $\sigma, \tau \in S_7$  заданы своими разложениями в произведение независимых циклов как  $\sigma = (13)(465)$  и  $\tau = (14762)$ . Найдите  $(\sigma\tau)^{82}$  и  $\rho = (\tau^{-1}\sigma)^{78}$ .
- **4.** Найдите коэффициент при  $x^5$  в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 3 & x^2 & -1 & -2 & x \\ 2 & -3 & -1 & x & 0 \\ x & -4 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & x & 2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & x & x & -2 \end{vmatrix}.$$

**5.** Про матрицу  $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$  известно, что она обратима и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выясните, обратима ли матрица 2A + E.

6. В матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & -6 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

выбрали три столбца  $A^{(i)}, A^{(j)}, A^{(k)}$  (не обязательно попарно различных) и вместо столбца  $A^{(i)}$  записали сумму  $A^{(j)} + A^{(k)}$ . Определите все возможные значения, которые может принимать определитель результирующей матрицы.

1	2	3	4	5	6	$\sum$

# Вариант 3

- **1.** Решите уравнение  $2AX = (\operatorname{tr}(AX)) \cdot B$  относительно неизвестной матрицы X, где  $A = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 7 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
- 2. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -3, \\ 3x_1 + bx_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Определите все значения параметра b, для которых эта система имеет ровно две свободных неизвестных, и для каждого найденного значения b выпишите соответствующее общее решение системы.

- **3.** Две перестановки  $\sigma, \tau \in S_7$  заданы своими разложениями в произведение независимых циклов как  $\sigma = (1257)(36)$  и  $\tau = (154)(26)$ . Найдите  $(\sigma\tau)^{63}$  и  $\rho = (\tau\sigma^{-1})^{66}$ .
- **4.** Найдите коэффициент при  $x^5$  в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & x & 4 & x \\ 3 & x & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & x & 1 \\ -3 & x^2 & -1 & 1 & x \\ x & -2 & 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

**5.** Про матрицу  $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$  известно, что она обратима и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выясните, обратима ли матрица 2A - E.

6. В матрице

$$B = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

выбрали три строки  $B_{(i)}, B_{(j)}, B_{(k)}$  (не обязательно попарно различных) и вместо строки  $B_{(i)}$  записали сумму  $B_{(j)} + B_{(k)}$ . Определите все возможные значения, которые может принимать определитель результирующей матрицы.

1	2	3	4	5	6	$\sum$

# Вариант 4

- **1.** Решите уравнение  $3AX = (\operatorname{tr}(AX)) \cdot B$  относительно неизвестной матрицы X, где  $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 17 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .
- 2. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + bx_2 + 2x_3 - 9x_4 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Определите все значения параметра b, для которых эта система имеет ровно две свободных неизвестных, и для каждого найденного значения b выпишите соответствующее общее решение системы.

- **3.** Две перестановки  $\sigma, \tau \in S_7$  заданы своими разложениями в произведение независимых циклов как  $\sigma = (263)(57)$  и  $\tau = (17643)$ . Найдите  $(\sigma\tau)^{70}$  и  $\rho = (\tau^{-1}\sigma)^{68}$ .
- **4.** Найдите коэффициент при  $x^5$  в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & -2 & 4 \\ -4 & 1 & 3 & 5 & x \\ x & 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & x & -1 & x^2 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & x & -2 \end{vmatrix}.$$

**5.** Про матрицу  $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$  известно, что она обратима и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выясните, обратима ли матрица 2A + E.

6. В матрице

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

выбрали три столбца  $B^{(i)}, B^{(j)}, B^{(k)}$  (не обязательно попарно различных) и вместо столбца  $B^{(i)}$  записали сумму  $B^{(j)} + B^{(k)}$ . Определите все возможные значения, которые может принимать определитель результирующей матрицы.

1	2	3	4	5	6	$\sum$