Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Найдите базис пересечения двух подпространств $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^4$, где L_1 есть линейная оболочка векторов $(3,2,3,-2)$, $(2,2,3,1)$, $(3,1,4,-3)$, а L_2 состоит из всех решений уравнения $2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

2. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, $f \mapsto f' - f(1) \cdot x^2$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

3. Пусть β — билинейная форма на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, имеющая в базисе $(x + 2x^2,\ x^2,\ 1 - x^2)$ матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Рассмотрим линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на V, такие что $\alpha_1(f) = \beta(f,1)$, $\alpha_2(f) = \beta(f,x)$, $\alpha_3(f) = \beta(f,x^2)$ для всех $f \in V$. Найдите базис пространства V, для которого $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

4. Билинейная форма β на пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x) := \beta(x,x)$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найдите расстояние от вектора $v = (2,3,1,4)$ до подпространства

$$U = \langle (2,-1,-1,2), (1,-2,2,4), (5,-1,-5,2) \rangle.$$

6. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(-1,1,7)$, $B(5,-2,1)$, $C(4,2,-2)$, $D(9,2,3)$. Пусть AH — высота грани ACD, а BL — биссектриса грани ABD. Найдите угол и расстояние между прямыми AH и BL.

1	2	3	4	5	6	Σ

Контрольная работа 2

Вариант 2

1. Найдите базис пересечения двух подпространств $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^4$, где L_1 есть линейная оболочка векторов $(3, 2, 1, -5)$, $(2, 3, 1, -1)$, $(2, 5, 2, 3)$, а L_2 состоит из всех решений уравнения $2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$.

2. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, $f \mapsto f' + f(-1) \cdot x$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

3. Пусть β — билинейная форма на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, имеющая в базисе $(1 + x^2,\ x^2, x - 2x^2)$ матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на V, такие что $\alpha_1(f) = \beta(f, 1)$, $\alpha_2(f) = \beta(f, x)$, $\alpha_3(f) = \beta(f, x^2)$ для всех $f \in V$. Найдите базис пространства V, для которого $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

4. Билинейная форма β на пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x) := \beta(x, x)$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найдите расстояние от вектора $v = (3, 1, 3, 4)$ до подпространства

$$U = \langle (2, 1, -1, -2), (1, 3, -5, 0), (4, -3, 7, -6) \rangle.$$

6. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(7, 5, -2)$, $B(3, 1, -4)$, $C(6, 4, -7)$, $D(-3, 4, 2)$. Пусть AH — высота грани ACD, а BL — биссектриса грани ABD. Найдите угол и расстояние между прямыми AH и BL.

1	2	3	4	5	6	Σ

Контрольная работа 2

Вариант 3

1. Найдите базис пересечения двух подпространств $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^4$, где L_1 есть линейная оболочка векторов $(3,-5,1,2)$, $(2,3,2,-1)$, $(2,2,1,-3)$, а L_2 состоит из всех решений уравнения $3x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0$.

2. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, $f \mapsto f' + f(-1)\cdot x^2$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

3. Пусть β — билинейная форма на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, имеющая в базисе $(x - x^2,\ x^2,\ 1 + 2x^2)$ матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на V, такие что $\alpha_1(f) = \beta(f,1)$, $\alpha_2(f) = \beta(f,x)$, $\alpha_3(f) = \beta(f,x^2)$ для всех $f \in V$. Найдите базис пространства V, для которого $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

4. Билинейная форма β на пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x) := \beta(x,x)$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найдите расстояние от вектора $v = (3,1,2,3)$ до подпространства

$$U = \langle (2,-1,2,-1), (1,-2,4,2), (5,-1,2,-5) \rangle.$$

6. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(7,2,3)$, $B(1,5,-3)$, $C(1,1,-5)$, $D(-3,1,-1)$. Пусть AH — высота грани ACD, а BL — биссектриса грани ABD. Найдите угол и расстояние между прямыми AH и BL.

1	2	3	4	5	6	Σ

Контрольная работа 2

Вариант 4

1. Найдите базис пересечения двух подпространств $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^4$, где L_1 есть линейная оболочка векторов $(3,-1,1,-2)$, $(3,2,2,1)$, $(2,2,1,3)$, а L_2 состоит из всех решений уравнения $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$.

2. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, $f \mapsto f' - f(1)\cdot x$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

3. Пусть β — билинейная форма на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, имеющая в базисе $(1-x^2,\ x^2,\ x+2x^2)$ матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Рассмотрим линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на V, такие что $\alpha_1(f) = \beta(f,1)$, $\alpha_2(f) = \beta(f,x)$, $\alpha_3(f) = \beta(f,x^2)$ для всех $f \in V$. Найдите базис пространства V, для которого $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

4. Билинейная форма β на пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x) := \beta(x,x)$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

5. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найдите расстояние от вектора $v = (2,1,3,1)$ до подпространства

$$U = \langle (2,-2,-1,1), (1,0,-5,3), (4,-6,7,-3) \rangle.$$

6. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(-5,-2,3)$, $B(-1,2,1)$, $C(-3,-1,-1)$, $D(5,-1,7)$. Пусть AH — высота грани ACD, а BL — биссектриса грани ABD. Найдите угол и расстояние между прямыми AH и BL.

1	2	3	4	5	6	Σ