Линейная алгебра и геометрия

КР-2. 2022/2023 учебный год. Вариант 1

Морфей

Группа БЭАД242

Вообще говоря, разбор этого варианта есть в продолжении Ларсика вот здесь, но я все равно его прорешаю, потому что почему бы и нет. Тем более, мне показалось, что решение шестой задачи у меня проще (и ответ досчитан, хах)

Задание 1

Рассмотрим линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}^3, f \mapsto (f'(-1), f''(-1), f(1))$.
Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}^3$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

Решение:

Запишем матрицу линейного отображения в паре стандартных базисов. Пусть

$$f(x) = d + cx + bx^2 + ax^3 = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

Тогда

$$f'(x) = c + 2bx + 3ax^2 \Rightarrow f'(-1) = c - 2b + 3a$$

$$f''(x) = 2b + 6ax \Rightarrow f''(-1) = 2b - 6a$$

$$f(1) = d + c + b + a$$

Таким образом,

$$\varphi(f) = \begin{pmatrix} c - 2b + 3a \\ 2b - 6a \\ d + c + b + a \end{pmatrix}$$

Имеем

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x^2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x^3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее по алгоритму. Найдём базис $\ker\varphi$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}\times 2,(3)\leftrightarrow(1),(3)\leftrightarrow(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{(1)-(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{(1)-3\times(3),(2)+2\times(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{базис} \ker\varphi$$

Дополним его до базиса $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$. Проверим, что можно взять просто три первых вектора из стандартного базиса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, эти четыре вектора линейно независимы и составляют искомый базис $\mathbb{e}$. Перепишем их в виде многочленов:

$$e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = -7 + 3x + 3x^2 + x^3$$

Положим

$$f_1 = \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Проверим, что эти векторы составляют базис $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, это искомый базис $\mathbb{f}$.
Из УСВ матрицы A видно, что $\operatorname{rk}\varphi = 3$. Значит, в A' три единицы на диагонали:

$$A' = A'(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверка по формуле $A' = D^{-1}AC$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\mathbb{e} = \{1, x, x^2, -7 + 3x + 3x^2 + x^3\}$$

$$\mathbb{f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Пусть V — пространство всех верхнетреугольных матриц размера 2×2 с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $v = (1, -1)$. Рассмотрим на V линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(X) = \mathrm{tr}(X), \alpha_2(X) = \mathrm{tr}(XS), \alpha_3(X) = vXv^T$$

Найдите базис пространства V, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

Решение:

Очень забавно, что эта задача почти идентична второй задаче из варианта 2023-2024 года. Поэтому щас произойдёт копипаст:

Введём на V вот такой базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \text{координаты в введённом базисе}$$

Запишем результаты действия $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в координатах этого базиса:

$$\alpha_1(X) = \mathrm{tr}(X) = a + c = (1, 0, 1)$$

$$XS = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 3b & 2a \\ -3c & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_2(X) = a - 3b = (1, -3, 0)$$

$$vXv^T = (1, -1) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} (1, -1)^T = (a \quad b - c) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a - b + c \Rightarrow \alpha_3(X) = a - b + c = (1, -1, 1)$$

Имеем вот такую матрицу линейных функций:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Осталось найти такую матрицу $\mathbb{e}$, что $\alpha \cdot \mathbb{e} = E$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2),(3)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\times(3),(2)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+3\times(2)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+(3),(-1)\times(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Справа искомая матрица:

$$\mathbb{e} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Координаты искомого базиса в исходном:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

В виде матриц:

$$\mathbb{e} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Ответ:

$$\mathbb{e} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Задание 3

Билинейная форма β на пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x) = \beta(x, x)$ к нормальному виду и выпишите этот вид.

Решение:

Имеем

$$\beta(x, y) = 4x_1y_3 + x_2y_1 + 3x_2y_3 - 4x_3y_1 + x_3y_2$$

$$Q(x) = \beta(x, x) = 4x_1x_3 + x_2x_1 + 3x_2x_3 - 4x_3x_1 + x_3x_2 = x_1x_2 + 4x_2x_3$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся симметричным Гауссом:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{2\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-2\times(1)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+2\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{2}}\times(1),(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Нормальный вид формы:

$$x_1^2 - x_2^2$$

Справа от черты в столбцах — координаты нового базиса.
Замена координат:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' - 4x_3' \\ x_2 = \sqrt{2}x_1' + \sqrt{2}x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

Ответ:

Нормальный вид формы:

$$x_1^2 - x_2^2$$

Замена координат:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' - 4x_3' \\ x_2 = \sqrt{2}x_1' + \sqrt{2}x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

Задание 4

Определите нормальный вид квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$$

в зависимости от значений параметра a.

Решение:

Запишем матрицу:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Поменяем вторую строчку с третьей местами (соответственно, потом нужно сделать то же со столбцами), чтобы параметр оказался в позиции (3, 3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Воспользуемся методом Якоби:

$$\delta_1 = 1$$

$$\delta_2 = 2 - 1 = 1$$

$$\delta_3 = (2a + 0 + 0) - (8 + 0 + a) = a - 8$$

Имеем нормальный вид формы

$$Q \sim x_1^2 + x_2^2 + (a-8)x_3^2$$

Запишем ответ в зависимости от значений параметра.

Ответ:

Если $a < 8$, то $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$,
если $a = 8$, то $x_1^2 + x_2^2$,
если $a > 8$, то $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Задание 5

Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^4$ — подпространство, задаваемое уравнением $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$. Дополните вектор $v = \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1)$ до ортонормированного базиса в L.

Решение:

Видно, что вектор v уже нормирован. Проверим, что $v \in L$:

$$\frac{1}{2}(1 + 2 - 2 - 1) = 0 - \text{верно}$$

Найдём какой-нибудь базис в L:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Тогда

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} - \text{базис } L$$

Дополним $2v$ до базиса L (ясно, что неважно, что дополнять — v или $2v$, так как от этого линейные зависимости не меняются). Приведём к СВ вот такую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2),(3)-(1),(4)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2),(3)+(4)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)+2\times(2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Видно, что четвёртая строчка равна удвоенной третьей. Значит, главные переменные — первые три. Тогда базисом L являются векторы

$$\mathbb{e} = \left\{ \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1)^T, (-2, 1, 0, 0)^T, (2, 0, 1, 0)^T \right\}$$

Теперь нужно провести ортогонализацию Грама-Шмидта:

$$f_1 = e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1$$

$$(e_2, f_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$(f_1, f_1) = 1$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Далее

$$f_3 = e_3 - \frac{(e_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(e_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2$$

$$(e_3, f_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(e_3, f_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{13}{4}$$

$$(f_2, f_2) = \frac{49 + 25 + 1 + 1}{16} = \frac{19}{4}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{13}{19} \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{2}{19} \\ \frac{8}{19} \\ \frac{11}{19} \end{pmatrix}$$

$$(f_3, f_3) = \frac{1 + 4 + 64 + 121}{361} = \frac{190}{361} \Rightarrow \|f_3\| = \frac{\sqrt{190}}{19}$$

Нормируем векторы:

$$f_2' = \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot f_2 = \frac{1}{2\sqrt{19}} \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f_3' = \frac{19}{\sqrt{190}} \cdot f_3 = \frac{1}{\sqrt{190}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{19}}\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{190}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

Задание 6

Прямая $l \in \mathbb{R}^3$ проходит через точку $(4, -3, 3)$, пересекает прямую $(2x - 3z = 6, x + y = 4)$ и параллельна плоскости $2x - 3y + z = 5$. Найдите расстояние от точки $P = (3, -4, 6)$ до прямой l.

Решение:

Пусть у прямой l направляющий вектор равен $\vec{e} = (a, b, c)$, по условию опорная точка $A(4, -3, 3)$. Запишем параметрическое уравнение прямой из условия:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2), -\frac{1}{2}\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Имеем

$$\begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}z \\ y = 1 - \frac{3}{2}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 - 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

Тогда у этой прямой $B(3, 1, 0)$ — опорная точка, $\vec{d} = (3, -3, 2)$ — направляющий вектор. Назовём эту прямую l'.
l и l' пересекаются. Это значит, что они не параллельны, то есть

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{2} \text{ неверно}$$

и лежат в одной плоскости. Это равносильно тому, что в одной плоскости лежат вектора $\vec{e}, \vec{d}$ и $\overrightarrow{AB} = (-1, 4, -3)$. Запишем это условие компланарности:

$$0 = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = (9a - 2b + 12c) - (3c + 8a - 9b) = a + 7b + 9c$$

$$a + 7b + 9c = 0$$

По условию $l \parallel 2x - 3y + z = 5$. Ясно, что A не содержится в этой плоскости. Значит, это условие эквивалентно тому, что нормаль к плоскости $\vec{n} = (2, -3, 1) \perp \vec{e}$, то есть

$$(\vec{n}, \vec{e}) = 2a - 3b + c = 0$$

Имеем два условия:

$$\begin{cases} a + 7b + 9c = 0 \\ 2a - 3b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2\times(1)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 0 & -17 & -17 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Имеем

$$\begin{cases} a = -2c \\ b = -c \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

То есть $\vec{e} = (-2c, -c, c)$. Если его поделить на $-c$, получим $\vec{e} = (2, 1, -1)$. Этот вектор не коллинеарен вектору $\vec{d}$, значит, l и l' пересекаются.
Таким образом, прямая l задаётся так:
Опорная точка $A(4, -3, 3)$, направляющий вектор $\vec{e} = (2, 1, -1)$.
Осталось найти $\rho(P, l)$. Для этого можно найти площадь паралеллограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AP}$ и $\vec{e}$, после чего поделить её на длину вектора e, получив искомое расстояние.
Найдём площадь как векторное произведение. $\overrightarrow{AP} = (-1, -1, 3)$. Тогда векторное произведение равно

$$\left[\vec{e}, \overrightarrow{AP}\right] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = e_1(3-1) - e_2(6-1) + e_3(-2+1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \sqrt{2^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

$$\|e\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Тогда

$$\rho(P, l) = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

Ответ:

$\sqrt{5}$