Линейная алгебра и геометрия

Экзамен-2. 2020/2021 учебный год. Вариант 1

Морфей

Группа БЭАД242

Задание 1

Определите все значения, которые может принимать размерность суммы ядра и образа линейного оператора $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в образе не содержится вектор $v = (1, 0, -1, 2)$.

Решение:

В образе **не содержится** один из векторов, значит, $\dim \operatorname{im} \varphi \leqslant 3$. Так как $\dim \operatorname{im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, то есть следующие варианты для $\dim \operatorname{im} \varphi$ и $\dim \ker \varphi$: $3+1, 2+2, 1+3, 0+4$.
Знаем, что $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$. Если $U = \operatorname{im} \varphi, W = \ker \varphi$, получаем $\dim(\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi) = 4 - \dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi)$. Из представленных выше комбинаций получаем, что $\dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow \dim(\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi) \in \{2, 3, 4\}$. Приведём примеры таких линейных отображений φ, представив их матрицы.

Пример 1.
$\dim(\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi) = 4 \Leftrightarrow \dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) = 0$. Рассмотрим такое φ, что для любого $x \in \mathbb{R}^4$ $\varphi(x) = \vec{0}$, то есть отображение с нулевой матрицей. Ясно, что $v \notin \operatorname{im} \varphi$. При этом $\ker \varphi = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \ker \varphi + \operatorname{im} \varphi = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim(\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi) = 4$.

Пример 2.
$\dim(\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi) = 3 \Leftrightarrow \dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) = 1$. Рассмотрим φ с такой матрицей в стандартном базисе:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видим, что $\ker \varphi = \langle e_1, e_3, e_4 \rangle, \operatorname{im} \varphi = \langle e_1 \rangle \Rightarrow v \notin \operatorname{im} \varphi$.
Тогда $\operatorname{im} \varphi + \ker \varphi = \langle e_1, e_3, e_4 \rangle \Rightarrow \dim(\operatorname{im} \varphi + \ker \varphi) = 3$.

Пример 3.
$\dim(\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi) = 2 \Leftrightarrow \dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) = 2$.
Рассмотрим φ с такой матрицей в стандартном базисе:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker \varphi = \langle e_1, e_2 \rangle, \operatorname{im} \varphi = \langle e_1, e_2 \rangle \Rightarrow \operatorname{im} \varphi + \ker \varphi = \langle e_1, e_2 \rangle \Rightarrow \dim(\operatorname{im} \varphi + \ker \varphi) = 2$.
При этом $v \notin \operatorname{im} \varphi$.

Ответ:

$2, 3, 4$.

Задание 2

Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей положительные значения на всех ненулевых векторах подпространства $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\right\}$. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

Решение:

Пусть $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\right\}$. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - 2y \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z - 2y \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z \neq 2y \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{array}\right.$$

Придумаем такую Q, что $\forall u = (x, y, z)^T \in U \ \ Q(u) = y^2 + z^2$. Тогда если $Q(u) = 0 \Leftrightarrow y = z = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$. Рассмотрим $Q(x, y, z) = 2(x + 2y)^2 - z^2 + y^2$. Подставим $x = z - 2y$:

$$Q(x, y, z)\Bigg|_{\mathrm{U}} = Q(z - 2y, y, z) = 2(z - 2y + 2y)^2 - z^2 + y^2 = 2z^2 - z^2 + y^2 = y^2 + z^2$$

Эта квадратичная форма положительна определена на U. Но при этом существует такой вектор v, что $Q(v) < 0$. Например, $v = (0, 0, 1)$:

$$Q(0, 0, 1) = 2(0 + 0)^2 - 1^2 - 0^2 = -1 < 0$$

Значит, Q неопределённая. Раскроем скобки:

$$Q(x, y, z) = 2(x + 2y)^2 - z^2 + y^2 = 2x^2 + 8xy + 8y^2 - z^2 + y^2 = 2x^2 + 9y^2 - z^2 + 8xy$$

Ответ:

$$x^2 + 9y^2 - z^2 + 8xy$$

Задание 3

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, элементами которого являются все многочлены от переменной x степени не выше 3 с действительными коэффициентами, а скалярное произведение задаётся формулой

$$(f, g) = \int_{-2}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Найдите в подпространстве $\langle 1, x\rangle \subseteq \mathbb{E}$ вектор v, ближайший к вектору x^2, и расстояние между v и x^2.

Решение:

Пусть $U = \langle 1, x\rangle$. Найдём ортогональный базис U, если $e_1 = 1, e_2 = x$:

$$f_1 = e_1 = 1$$

$$f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1$$

$$(e_2, f_1) = \int_{-2}^{1} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{1} = -\frac{3}{2}$$

$$(f_1, f_1) = \int_{-2}^{1} \mathrm{d}x = 3$$

Отсюда

$$f_2 = x + \frac{1}{2}$$

Значит, $(f_1, f_2) = \left(1, x + \frac{1}{2}\right)$ — ортогональный базис U. Тогда можно найти $\mathrm{pr}_U\, x^2$ по известной формуле. Это и будет ближайшим вектором:

$$\mathrm{pr}_U\, x^2 = \frac{(x^2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 + \frac{(x^2, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2$$

$$(x^2, f_1) = \int_{-2}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$$

$$(f_1, f_1) = 3$$

$$(x^2, f_2) = \int_{-2}^{1}\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{6}\right) = -\frac{15}{4} + \frac{3}{2} = -\frac{9}{4}$$

$$(f_2, f_2) = \int_{-2}^{1}\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - \frac{2}{4}\right) = \frac{9}{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

Получаем, что

$$\mathrm{pr}_U\, x^2 = \frac{3}{3} f_1 + \frac{-\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}} f_2 = f_1 - f_2 = 1 - x$$

Тогда $\operatorname{ort}_U x^2 = x^2 - 1 + x = x^2 + x - 1$. Отсюда $\rho(x^2, \operatorname{pr}_U x^2) = \|\operatorname{ort}_U x^2\| = \|x^2 + x - 1\| = \sqrt{(x^2 + x - 1, x^2 + x - 1)}$. Найдём эту норму:

$$(x^2 + x - 1, x^2 + x - 1) = \int_{-2}^{1} (x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 - 2x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^{1} (x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 1 + 1\right) - \left(-\frac{32}{5} + \frac{16}{2} + \frac{8}{3} - 4 - 2\right) = \frac{21}{10} = 2.1$$

Отсюда $\|\operatorname{ort}_U x^2\| = \sqrt{2.1}$.

Ответ:

$1 - x, \sqrt{2.1}$

Задание 4

Приведите пример двух недиагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $5\varphi - 2\psi$ диагонализуем и отличен от нулевого.

Решение:

Пусть

$$A = A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$$

$$B = B(\psi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}, d \neq 0, c, d \in \mathbb{R}$$

Если не очевидно, почему они недиагонализуемы, см. разбор 2020-2021 года.
Тогда

$$C = C(5\varphi - 2\psi) = 5A - 2B = \begin{pmatrix} 5a - 2c & 5b - 2d \\ 0 & 5a - 2c \end{pmatrix}$$

Он будет диагонализуем, если $5a - 2c \neq 0, 5b - 2d = 0$. Пусть $a = c = 1, b = 2, d = 5$. Получаем, что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда φ и ψ не диагонализуемы (у них СЗ $\lambda = 1$ кратности 2, но в $A - E$ и $B - E$ ровно одна свободная переменная, значит, геометрические кратности равны 1 и не совпадают с алгебраической). При этом

$$5A = 2B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

и это уже оператор в диагональном виде.

Ответ:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(\psi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 5

Про ортогональный линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((0,-1,1)) = (0,1,-1)$, $\varphi((1,0,2)) = (-1,2,0)$ и φ не самосопряжён. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу.

Решение:

Заметим, что если $v = (0,-1,1)$, то $\varphi(v) = -v \Rightarrow v$ — собственный вектор. Тогда канонический вид φ выглядит вот так:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Пусть это вид в базисе e_1, e_2, e_3. Ясно, что $e_3 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^T$.
Пусть $w = (1,0,2)^T$. Ортогонализуем w относительно $\langle v \rangle$:

$$\operatorname{ort}_{\langle v \rangle} w = w - \frac{(w,v)}{(v,v)}v = w - \frac{2}{2}v = w - v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Положим $e_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$. Найдём $\varphi(e_1)$:

$$\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi(w-v) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varphi(w) - \varphi(v)) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e_1, e_3) — ортонормированная система векторов.
Дополним её до ортонормированного базиса вектором $e_2 = [e_1, e_3]$:

$$\left[\sqrt{3}e_1, \sqrt{2}e_3\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i(1+1) - j(1-0) + k(-1-0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Положим $e_2 := \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)^T$. Тогда (e_1, e_2, e_3) — ортонормированная система векторов.
Выразим $\sqrt{3}\varphi(e_1)$ в базисе $\left(\sqrt{3}e_1, \sqrt{6}e_2, \sqrt{2}e_3\right)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2),(3)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-\frac{1}{3})\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)-2\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем, что

$$\sqrt{3}\varphi(e_1) = \frac{1}{3}\sqrt{3}e_1 - \frac{2}{3}\sqrt{6}e_2$$

$$\varphi(e_1) = \frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}e_2$$

Отсюда первый столбец матрицы φ в базисе (e_1, e_2, e_3) равен $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right)^T$. Тогда второй столбец равен $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^T$. Значит, можно записать канонический вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

в базисе

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T,$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1)^T,$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)^T$$

Задание 6

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ найдите её усечённое сингулярное разложение и матрицу B ранга 1 того же размера, для которой величина $\|A - B\|$ минимальна, где $\|\cdot\|$ — фробениусова норма матрицы.

Решение:

Найдём разложение для матрицы $C = A^T$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^T C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 2 \\ 2 & 41 \end{pmatrix}$$

$$\det(C^T C - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 44 - \lambda & 2 \\ 2 & 41 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 85\lambda + 1800 = (\lambda - 45)(\lambda - 40)$$

Имеем $\sigma_1 = 3\sqrt{5}, \sigma_2 = 2\sqrt{10}$. Найдём собственные векторы:

$$C^T C - 45E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \sim (1 \quad -2) \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T$$

$$C^T C - 40E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)^T$$

Найдём u_1, u_2:

$$u_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}} C v_1 = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{2\sqrt{10}} C v_2 = \frac{1}{10\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Получаем следующее разложение:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^T$$

Отсюда

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$$

Тогда

$$B = 3\sqrt{5} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Это искомая матрица ранга 1.

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Задание 7

Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$, в которой уравнение поверхности

$$-2y^2 + 3z^2 - 4xz + 4y + 9 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

Решение:

Приведём к главным осям квадратичную часть:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+2)(3-\lambda) - 4(-2-\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda + 8 + 4\lambda =$$

$$= -(\lambda^3 - \lambda^2 - 10\lambda - 8) = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = -(\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+2)$$

Имеем $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$. Найдём собственные векторы:

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, 2)^T$$

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)^T$$

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = (0, 1, 0)^T$$

Имеем матрицу перехода:

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = z' \\ z = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

В этих координатах квадратичная форма имеет вид $4x'^2 - y'^2 - 2z'^2$. Подставим в уравнение:

$$4x'^2 - y'^2 - 2z'^2 + 4z' + 9 = 0$$

Выделим полный квадрат:

$$4x'^2 - y'^2 - 2(z'^2 - 2z') + 9 = 0$$

$$4x'^2 - y^{2'} - 2(z' - 1)^2 = -11$$

Сделаем замену $x'' = x', y'' = y', z'' = z' - 1$ и поделим обе части на 11. Получим

$$\frac{x''^2}{\frac{11}{4}} - \frac{y''^2}{11} - \frac{z''^2}{\frac{11}{2}} = -1$$

Умножим на -1:

$$-\frac{x''^2}{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} + \frac{y''^2}{\sqrt{11}^2} + \frac{z''^2}{\sqrt{\frac{11}{2}}^2} = 1$$

Это однополостной гиперболоид с осью, совпадающей с осью Ox.
Найдём искомую замену координат, подставив $z'' = z' - 1$ в первую замену:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' \\ y = z'' + 1 \\ z = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'' \end{cases}$$

Ответ:

$$-\frac{x''^2}{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} + \frac{y''^2}{\sqrt{11}^2} + \frac{z''^2}{\sqrt{\frac{11}{2}}^2} = 1$$

Это однополостной гиперболоид с осью, совпадающей с осью Ox.

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' \\ y = z'' + 1 \\ z = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'' \end{cases}$$