Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}^3$, $f \mapsto (f'(-1), f''(-1), f(1))$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}^3$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Пусть V — пространство всех верхнетреугольных матриц размера 2×2 с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $v = (1, -1)$. Рассмотрим на V линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(X) = \operatorname{tr}(X),\ \alpha_2(X) = \operatorname{tr}(XS),\ \alpha_3(X) = vXv^T \text{ для всех } X \in V.$$

Найдите базис пространства V, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Билинейная форма β на пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x) := \beta(x, x)$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

4. Определите нормальный вид квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$$

в зависимости от значений параметра a.

5. Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^4$ — подпространство, задаваемое уравнением $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$. Дополните вектор $v = \dfrac{1}{2}(1, 1, 1, -1)$ до ортонормированного базиса в L.

6. Прямая $l \subseteq \mathbb{R}^3$ проходит через точку $(4, -3, 3)$, пересекает прямую $\{2x - 3z = 6,\ x + y = 4\}$ и параллельна плоскости $2x - 3y + z = 5$. Найдите расстояние от точки $P = (3, -4, 6)$ до прямой l.

1	2	3	4	5	6	Σ

Контрольная работа 2

Вариант 2

1. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}^3$, $f \mapsto (f''(1), f(-1), f'(1))$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}^3$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Пусть V — пространство всех нижнетреугольных матриц размера 2×2 с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $v = (-1, 1)$. Рассмотрим на V линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(X) = \mathrm{tr}(X),\ \alpha_2(X) = \mathrm{tr}(SX),\ \alpha_3(X) = vXv^T \text{ для всех } X \in V.$$

Найдите базис пространства V, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Билинейная форма β на пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x) := \beta(x, x)$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

4. Определите нормальный вид квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$$

в зависимости от значений параметра a.

5. Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^4$ — подпространство, задаваемое уравнением $x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$. Дополните вектор $v = \frac{1}{2}(1, 1, -1, 1)$ до ортонормированного базиса в L.

6. Прямая $l \subseteq \mathbb{R}^3$ проходит через точку $(5, -2, -1)$, пересекает прямую $\{3x + 4z = 7,\ x - y = 5\}$ и параллельна плоскости $3x - 5y + z = 2$. Найдите расстояние от точки $P = (7, 2, 1)$ до прямой l.

1	2	3	4	5	6	Σ

Контрольная работа 2

Вариант 3

1. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}^3$, $f \mapsto (f''(1), f'(-1), f(1))$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}^3$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Пусть V — пространство всех верхнетреугольных матриц размера 2×2 с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $v = (1, -1)$. Рассмотрим на V линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(X) = \operatorname{tr}(X),\ \alpha_2(X) = \operatorname{tr}(XS),\ \alpha_3(X) = vXv^T \text{ для всех } X \in V.$$

Найдите базис пространства V, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Билинейная форма β на пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x) := \beta(x, x)$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

4. Определите нормальный вид квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$$

в зависимости от значений параметра a.

5. Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^4$ — подпространство, задаваемое уравнением $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$. Дополните вектор $v = \dfrac{1}{2}(1, -1, 1, 1)$ до ортонормированного базиса в L.

6. Прямая $l \subseteq \mathbb{R}^3$ проходит через точку $(3, 3, 2)$, пересекает прямую $\{3x + z = 1,\ x - y = -2\}$ и параллельна плоскости $x + 2y + 4z = 5$. Найдите расстояние от точки $P = (6, 4, 3)$ до прямой l.

1	2	3	4	5	6	Σ

Контрольная работа 2

Вариант 4

1. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}^3$, $f \mapsto (f'(1), f''(-1), f(-1))$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}^3$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Пусть V — пространство всех нижнетреугольных матриц размера 2×2 с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $v = (-1, 1)$. Рассмотрим на V линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(X) = \operatorname{tr}(X),\ \alpha_2(X) = \operatorname{tr}(SX),\ \alpha_3(X) = vXv^T \text{ для всех } X \in V.$$

Найдите базис пространства V, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Билинейная форма β на пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые), приводящую квадратичную форму $Q(x) := \beta(x, x)$ к нормальному виду, и выпишите этот вид.

4. Определите нормальный вид квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$$

в зависимости от значений параметра a.

5. Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^4$ — подпространство, задаваемое уравнением $2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Дополните вектор $v = \dfrac{1}{2}(1, 1, -1, 1)$ до ортонормированного базиса в L.

6. Прямая $l \subseteq \mathbb{R}^3$ проходит через точку $(3, 2, 0)$, пересекает прямую $\{2x+3z = 3,\ x+y = -4\}$ и параллельна плоскости $2x+y+5z = 3$. Найдите расстояние от точки $P = (5, 6, 2)$ до прямой l.

1	2	3	4	5	6	Σ