Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 1

1. Определите все значения, которые может принимать размерность образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в пересечении ядра и образа содержится вектор $v = (0, 1, -1, 2)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей на векторах e_1, e_2, e_3 стандартного базиса значения $3, 2, 7$ соответственно. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, элементами которого являются все многочлены от переменной x степени не выше 3 с действительными коэффициентами, а скалярное произведение задаётся формулой

$$(f, g) = \int_{-1}^{2} f(x)g(x)\,dx.$$

Найдите в подпространстве $\langle 1, x\rangle \subseteq \mathbb{E}$ вектор v, ближайший к вектору $x^2 + 1$, и расстояние между v и $x^2 + 1$.

4. Приведите пример двух диагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $3\varphi + 4\psi$ недиагонализуем.

5. Вставьте вместо звёздочки, ромбика и кружочка подходящие числа таким образом, чтобы линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & * & \diamond \\ \circ & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

был ортогональным. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Приведите пример матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2, для которой ближайшей по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет матрица $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3x^2 + 2y^2 - 4xz - 8y + a = 0$ определяет двухполостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 2

1. Определите все значения, которые может принимать размерность образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в пересечении ядра и образа содержится вектор $v = (0, 1, 2, -1)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей на векторах e_1, e_2, e_3 стандартного базиса значения $5, 3, 4$ соответственно. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, элементами которого являются все многочлены от переменной x степени не выше 3 с действительными коэффициентами, а скалярное произведение задаётся формулой

$$(f, g) = \int_{-3}^{0} f(x)g(x)\,dx.$$

Найдите в подпространстве $\langle 1, x\rangle \subseteq \mathbb{E}$ вектор v, ближайший к вектору $x^2 + 1$, и расстояние между v и $x^2 + 1$.

4. Приведите пример двух диагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $5\varphi - 2\psi$ недиагонализуем.

5. Вставьте вместо звёздочки, ромбика и кружочка подходящие числа таким образом, чтобы линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & * \\ \diamond & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & \circ \end{pmatrix},$$

был ортогональным. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Приведите пример матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2, для которой ближайшей по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет матрица $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2y^2 - 3z^2 + 4xz - 12y + a = 0$ определяет однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 3

1. Определите все значения, которые может принимать размерность образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в пересечении ядра и образа содержится вектор $v = (0, 1, 2, -2)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей на векторах e_1, e_2, e_3 стандартного базиса значения $7, 2, 4$ соответственно. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, элементами которого являются все многочлены от переменной x степени не выше 3 с действительными коэффициентами, а скалярное произведение задаётся формулой

$$(f, g) = \int_{-2}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Найдите в подпространстве $\langle 1, x\rangle \subseteq \mathbb{E}$ вектор v, ближайший к вектору x^2+1, и расстояние между v и x^2+1.

4. Приведите пример двух диагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $4\varphi - 3\psi$ недиагонализуем.

5. Вставьте вместо звёздочки, ромбика и кружочка подходящие числа таким образом, чтобы линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} * & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & \diamond & \circ \end{pmatrix},$$

был ортогональным. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Приведите пример матрицы $A \in \operatorname{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2, для которой ближайшей по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет матрица $\begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3x^2 - 2y^2 + 4xz + 8y + a = 0$ определяет двухполостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 4

1. Определите все значения, которые может принимать размерность образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в пересечении ядра и образа содержится вектор $v = (0, 1, 1, -2)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей на векторах e_1, e_2, e_3 стандартного базиса значения $6, 3, 5$ соответственно. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, элементами которого являются все многочлены от переменной x степени не выше 3 с действительными коэффициентами, а скалярное произведение задаётся формулой

$$(f, g) = \int\limits_0^3 f(x)g(x)\,dx.$$

Найдите в подпространстве $\langle 1, x\rangle \subseteq \mathbb{E}$ вектор v, ближайший к вектору x^2+1, и расстояние между v и x^2+1.

4. Приведите пример двух диагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $2\varphi + 5\psi$ недиагонализуем.

5. Вставьте вместо звёздочки, ромбика и кружочка подходящие числа таким образом, чтобы линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 2/3 & * & 1/3 \\ -1/3 & \diamond & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & \circ \end{pmatrix},$$

был ортогональным. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

6. Приведите пример матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2, для которой ближайшей по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $-2y^2+3z^2-4xz+4y+a=0$ определяет однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ