Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ задано формулой $\varphi(a+bx+cx^2) = aE + bS + cS^2$, где $S = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Рассмотрим на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(f) = f(0),\ \alpha_2(f) = f'(1),\ \alpha_3(f) = 3\int_0^2 f(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad f \in V.$$

Найдите базис пространства V, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 4\alpha_2)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Пусть β — билинейная форма на пространстве $\mathbb{R}^4$, заданная формулой

$$\beta(x,y) = 2x_3y_1 + x_4y_4 \quad \text{для всех} \quad x = (x_1,x_2,x_3,x_4)^T, y = (y_1,y_2,y_3,y_4)^T \in \mathbb{R}^4,$$

и пусть $V \subseteq \mathbb{R}^4$ — подпространство решений уравнения $x_1+x_2-x_3-x_4 = 0$. Определим квадратичную форму Q на V, полагая $Q(v) = \beta(v,v)$ для всех $v \in V$. Найдите базис пространства V, в котором Q принимает нормальный вид, и выпишите этот вид.

4. В четырёхмерном евклидовом пространстве даны векторы v_1, v_2, v_3 с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Для каждого $i = 1,2,3$ обозначим через w_i ортогональную составляющую вектора v_i относительно подпространства, порождаемого двумя другими векторами. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы w_1, w_2, w_3.

5. Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^4$ — линейное многообразие, задаваемое системой

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Найдите расстояние от точки $(3,6,-4,5)$ до L.

6. Прямая $l \subseteq \mathbb{R}^3$ проходит через точку $P = (3,3,2)$, перпендикулярна прямой $l_1 = \{x+3y+2z = 11,\ y+z = 4\}$ и пересекает прямую $l_2 = \{3x+z = 1,\ x-y = -2\}$. Найдите расстояние между прямыми l и l_1.

1	2	3	4	5	6	Σ

Контрольная работа 2

Вариант 2

1. Линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ задано формулой $\varphi(a+bx+cx^2) = aE + bS + cS^2$, где $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Рассмотрим на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(f) = f(1),\ \alpha_2(f) = f'(0),\ \alpha_3(f) = 3\int_0^2 f(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad f \in V.$$

Найдите базис пространства V, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 6\alpha_1)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Пусть β — билинейная форма на пространстве $\mathbb{R}^4$, заданная формулой

$$\beta(x,y) = 2x_4y_1 + x_3y_3 \quad \text{для всех} \quad x = (x_1,x_2,x_3,x_4)^T, y = (y_1,y_2,y_3,y_4)^T \in \mathbb{R}^4,$$

и пусть $V \subseteq \mathbb{R}^4$ — подпространство решений уравнения $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Определим квадратичную форму Q на V, полагая $Q(v) = \beta(v,v)$ для всех $v \in V$. Найдите базис пространства V, в котором Q принимает нормальный вид, и выпишите этот вид.

4. В четырёхмерном евклидовом пространстве даны векторы v_1, v_2, v_3 с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Для каждого $i = 1,2,3$ обозначим через w_i ортогональную составляющую вектора v_i относительно подпространства, порождаемого двумя другими векторами. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы w_1, w_2, w_3.

5. Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^4$ — линейное многообразие, задаваемое системой

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Найдите расстояние от точки $(5,1,6,0)$ до L.

6. Прямая $l \subseteq \mathbb{R}^3$ проходит через точку $P = (3,2,0)$, перпендикулярна прямой $l_1 = \{x + 4y + 3z = 11,\ y + z = 3\}$ и пересекает прямую $l_2 = \{2x + 3z = 3,\ x + y = -4\}$. Найдите расстояние между прямыми l и l_1.

1	2	3	4	5	6	Σ

Контрольная работа 2

Вариант 3

1. Линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ задано формулой $\varphi(a+bx+cx^2) = aE + bS + cS^2$, где $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Рассмотрим на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(f) = f(0),\ \alpha_2(f) = f'(-1),\ \alpha_3(f) = 3\int_0^2 f(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad f \in V.$$

Найдите базис пространства V, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + 4\alpha_2)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Пусть β — билинейная форма на пространстве $\mathbb{R}^4$, заданная формулой

$$\beta(x,y) = 2x_1y_3 + x_4y_4 \quad \text{для всех} \quad x = (x_1,x_2,x_3,x_4)^T, y = (y_1,y_2,y_3,y_4)^T \in \mathbb{R}^4,$$

и пусть $V \subseteq \mathbb{R}^4$ — подпространство решений уравнения $x_1+x_2+x_3-x_4 = 0$. Определим квадратичную форму Q на V, полагая $Q(v) = \beta(v,v)$ для всех $v \in V$. Найдите базис пространства V, в котором Q принимает нормальный вид, и выпишите этот вид.

4. В четырёхмерном евклидовом пространстве даны векторы v_1, v_2, v_3 с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Для каждого $i = 1,2,3$ обозначим через w_i ортогональную составляющую вектора v_i относительно подпространства, порождаемого двумя другими векторами. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы w_1, w_2, w_3.

5. Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^4$ — линейное многообразие, задаваемое системой

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$

Найдите расстояние от точки $(1,6,6,-5)$ до L.

6. Прямая $l \subseteq \mathbb{R}^3$ проходит через точку $P = (4,-3,3)$, перпендикулярна прямой $l_1 = \{x+3y+2z = -7,\ y+z = -2\}$ и пересекает прямую $l_2 = \{2x-3z = 6,\ x+y = 4\}$. Найдите расстояние между прямыми l и l_1.

1	2	3	4	5	6	Σ

Контрольная работа 2

Вариант 4

1. Линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ задано формулой $\varphi(a+bx+cx^2) = aE + bS + cS^2$, где $S = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Рассмотрим на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(f) = f(-1),\ \alpha_2(f) = f'(0),\ \alpha_3(f) = 3\int_0^2 f(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad f \in V.$$

Найдите базис пространства V, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 6\alpha_1)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Пусть β — билинейная форма на пространстве $\mathbb{R}^4$, заданная формулой

$$\beta(x,y) = 2x_1y_4 + x_3y_3 \quad \text{для всех} \quad x = (x_1,x_2,x_3,x_4)^T, y = (y_1,y_2,y_3,y_4)^T \in \mathbb{R}^4,$$

и пусть $V \subseteq \mathbb{R}^4$ — подпространство решений уравнения $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Определим квадратичную форму Q на V, полагая $Q(v) = \beta(v,v)$ для всех $v \in V$. Найдите базис пространства V, в котором Q принимает нормальный вид, и выпишите этот вид.

4. В четырёхмерном евклидовом пространстве даны векторы v_1, v_2, v_3 с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Для каждого $i = 1,2,3$ обозначим через w_i ортогональную составляющую вектора v_i относительно подпространства, порождаемого двумя другими векторами. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы w_1, w_2, w_3.

5. Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^4$ — линейное многообразие, задаваемое системой

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Найдите расстояние от точки $(1,6,1,-2)$ до L.

6. Прямая $l \subseteq \mathbb{R}^3$ проходит через точку $P = (5,-2,-1)$, перпендикулярна прямой $l_1 = \{x + 5y + 4z = -6,\ y + z = -1\}$ и пересекает прямую $l_2 = \{3x + 4z = 7,\ x - y = 5\}$. Найдите расстояние между прямыми l и l_1.

1	2	3	4	5	6	Σ