Линейная алгебра и геометрия

КР-2. 2021/2022 учебный год. Вариант 1

Морфей

Группа БЭАД242

Задание 1

Линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \to M_2(\mathbb{R})$ задано формулой $\varphi(a + bx + cx^2) = AE + bS + cS^2$, где $S = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $M_2(\mathbb{R})$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

Решение:

Найдём S^2:

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Введём на $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ базис $\{1, x, x^2\}$, а на $M_2(\mathbb{R})$ базис матричных единиц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдём координаты образов базисов и выпишем матрицу φ в этих базисах:

$$\varphi(1) = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = S = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x^2) = S^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица линейного отображения в этих базисах:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Далее по алгоритму.
Найдём базис $\ker \varphi$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix} - \text{базис} \ker\varphi$$

Дополним до базиса $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$. Добавим такие два вектора:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Проверим линейную независимость:

$$\begin{pmatrix}-4 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Они линейно независимы, значит, это дополнение до базиса $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$. Тогда это искомый базис $\mathbb{e}$. Положим

$$f_1 = \varphi(e_1) = \varphi(1) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$f_2 = \varphi(e_2) = \varphi(x) = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Теперь надо дополнить его до базиса $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix} - \text{уже ступенчатый вид}$$

Значит, надо добавить третий и четвёртый базисы из стандартного (матричных единиц). Получаем:

$$\mathbb{e} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix} \right\} = \{1, x, -4 - x + x^2\}$$

$$\mathbb{f} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\}$$

Ранг матрицы A равен двум, значит, диагональный вид

$$A' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Проверка:

$$D^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

Ответ:

$$\mathbb{e} = \{1, x, -4 - x + x^2\}$$

$$\mathbb{f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Рассмотрим на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(f) = f(0), \alpha_2(f) = f'(1), \alpha_3(f) = 3\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Найдите базис пространства V, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 4\alpha_2)$ является двойственным базисом пространства V^*.

Решение:

Пусть $f(x) = c + bx + ax^2$. Имеем:

$$\alpha_1(f) = c = (1, 0, 0)$$

$$\alpha_2(f) = (b + 2ax)(1) = b + 2a = (0, 1, 2)$$

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (c + bx + ax^2)\,\mathrm{d}x = \left(cx + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}ax^3\right)\Bigg|_0^2 = 2c + 2b + \frac{8}{3}a \Rightarrow \alpha_3(f) = 6c + 6b + 8a = (6, 6, 8)$$

$$\alpha_3 - 4\alpha_2 = (6, 6, 8) - (0, 4, 8) = (6, 2, 0)$$

Имеем матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём обратную:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ: } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Искомый базис написан справа в столбцах:

$$\left\{1 - 3x + \frac{3}{2}x^2, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2\right\}$$

Ответ:

$$\left\{1 - 3x + \frac{3}{2}x^2, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2\right\}$$

Задание 3

Пусть β – билинейная форма на пространстве $\mathbb{R}^4$, заданная формулой

$$\beta(x, y) = 2x_3y_1 + x_4y_4$$

и пусть $V \subseteq \mathbb{R}^4$ — подпространство решений уравнения $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$. Определим квадратичную форму Q на V, полагая $Q(v) = \beta(v, v)$. Найдите базис пространства V, в котором Q принимает нормальный вид, и выпишите этот вид.

Решение:

Найдём базис V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

$$\mathbb{f} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} - \text{базис } V$$

Тогда произвольный вектор $v \in V$ имеет вид

$$(-a + b + c, a, b, c)$$

Определим $Q(v)$:

$$Q(x) = 2x_1x_3 + x_4^2 \Rightarrow Q(v) = 2(-a + b + c)b + c^2 = -2ab + 2b^2 + 2bc + c^2$$

Запишем матрицу $Q(v)$:

$$Q(v) = (a, b, c) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Применим к ней симметричного Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Получаем нормальный вид формы

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2,$$

где y_1, y_2, y_3 — координаты вектора $v \in V$ в базисе

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Осталось выразить эти векторы в $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Итоговый базис:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ответ:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

Задание 4

В четырёхмерном евклидовом пространстве даны векторы v_1, v_2, v_3 с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Для каждого $i = 1, 2, 3$ обозначим через w_i ортогональную составляющую вектора v_i относительно подпространства, порождамого двумя другими векторами. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы w_1, w_2, w_3.

Решение:

Пусть $S_1 = \langle v_2, v_3 \rangle, S_2 = \langle v_1, v_3 \rangle, S_3 = \langle v_1, v_2 \rangle$.
Найдём $\mathrm{pr}_{S_1} v_1$. Из матрицы Грама $(v_2, v_3) = 0 \Rightarrow \{v_2, v_3\}$ — ортогональный базис S_1. Тогда

$$\mathrm{pr}_{S_1} v_1 = \frac{(v_1, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 + \frac{(v_1, v_3)}{(v_3, v_3)} v_3 = 0 + \frac{1}{3} v_3 \Rightarrow w_1 = v_1 - \frac{1}{3} v_3$$

Найдём $\mathrm{pr}_{S_2} v_2$. Из матрицы Грама $(v_2, v_3) = (v_2, v_1) = 0 \Rightarrow v_2 \perp v_1, v_2 \perp v_3 \Rightarrow v_2 \perp S_2 \Rightarrow w_2 = v_2$.
Найдём $\mathrm{pr}_{S_3} v_3$. $(v_1, v_2) = 0 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ — ортогональный базис S_3. Тогда

$$\mathrm{pr}_{S_3} v_3 = \frac{(v_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 + \frac{(v_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = \frac{1}{2} v_1 + 0 = \frac{1}{2} v_1 \Rightarrow w_3 = v_3 - \frac{1}{2} v_1$$

Итого имеем

$$w_1 = v_1 - \frac{1}{3} v_3, w_2 = v_2, w_3 = v_3 - \frac{1}{2} v_1$$

Матрица перехода

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = (1 + 0 + 0) - \left(\frac{1}{6} + 0 + 0\right) = \frac{5}{6}$$

Имеем

$$\det G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (18 + 0 + 0) - (3 + 0 + 0) = 15$$

$$\mathrm{Vol}\ (w_1, w_2, w_3) = |\det C| \cdot \sqrt{\det G} = \frac{5}{6} \sqrt{15}$$

Ответ:

$$\frac{5}{6} \sqrt{15}$$

Задание 5

Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^4$ — линейное многообразие, заданное системой

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Найдите расстояние от точки $(3, 6, -4, 5)$ до L.

Решение:

Найдём какое-нибудь частное решение СЛУ. Приведём её к УСВ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ: } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{11}{5} \end{array}\right)$$

Имеем

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 = \frac{23}{5} \\ x_2 - \frac{4}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = \frac{11}{5} \end{cases}$$

Подставим, например, $x_4 = 0, x_3 = 1$. Получаем

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{5} = \frac{23}{5} \\ x_2 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Пусть $v_0 = (4, 3, 1, 0)$. Тогда $L = v_0 + S$, где S — множество решений соответствующей ОСЛУ. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от $v - v_0$ до S. Имеем:

$$w := v - v_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Найдём расстояние от $v - v_0$ до S. Найдём базис S. Мы уже приводили матрицу к УСВ, так что можем выписать

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Тогда $S = \langle v_1, v_2 \rangle$. Найдём расстояние от w до S. Заметим, что $(v_1, v_2) = 12 - 12 = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$. Тогда можно найти по формуле:

$$\operatorname{pr}_S w = \frac{(w, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 + \frac{(w, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2$$

$$(w, v_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 + 12 - 25 = -10$$

$$(v_1, v_1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 + 16 + 25 = 50$$

$$(w, v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 - 9 + 25 = 20$$

$$(v_2, v_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 16 + 9 + 25 = 50$$

Подставим:

$$\operatorname{pr}_S w = -\frac{10}{50}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{20}{50}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{ort}_S w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \|\operatorname{ort}_S w\| = \sqrt{25 + 16 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Ответ:

$5\sqrt{2}$

Задание 6

Прямая $l \subseteq \mathbb{R}^3$ проходит через точку $P = (3, 3, 2)$, перпендикулярна прямой $l_1 = \{x + 3y + 2z = 11, y + z = 4\}$ и пересекает прямую $l_2 = (3x + z = 1, x - y = -2)$. Найдите расстояние между прямыми l и l_1.

Решение:

Пусть у прямой l направляющий вектор $\vec{e} = (a, b, c)$.
Найдём направляющий вектор l_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -1 + z \\ y = 4 - z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Направляющий вектор $\vec{f} = (1, -1, 1)$, опорная точка $(-1, 4, 0)$.
Прямые перпендикуляры, значит, $0 = \left(\vec{f}, \vec{e}\right) = a - b + c \Rightarrow a - b + c = 0$.
Найдём направляющий вектор l_2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}z \\ y = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} - t \\ y = \frac{7}{3} - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$$

Направляющий вектор $(-1, -1, 3)$. Можно найти частное решение, подставив $z = 1$, тогда опорной точкой будет $(0, 2, 1)$.
Прямые l и l_2 пересекаются. Найдём вектор, соединяющий их опорные точки: $(3, 3, 2) - (0, 2, 1) = (3, 1, 1)$.
Запишем условие компланарности этого вектора и двух направляющих:

$$0 = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} = (-3c + 3a - b) - (-a + 9b - c) = 4a - 10b - 2c \Leftrightarrow 2a - 5b - c = 0$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 2a - 5b - c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $c = 1$. Тогда $a = -2, b = -1$.
Значит, $(-2, -1, 1)$ — направляющий вектор. Итого имеем:
$l :$ опорная точка $(3, 3, 2)$, направляющий вектор $\vec{e} = (-2, -1, 1)$,
$l_1 :$ опорная точка $(-1, 4, 0)$, направляющий вектор $\vec{f} = (1, -1, 1)$.
Найдём расстояние между ними. Пусть $\vec{m} = (3, 3, 2) - (-1, 4, 0) = (4, -1, 2)$ — вектор, соединяющий

опорные точки.
Найдём объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах m, e, f:

$$V = \left|\det\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right| = |(-4-4+1)-(-4-2+2)| = |-7+4| = 3$$

Найдём площадь параллелограмма, построенного на e, f:

$$[e, f] = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = e_1(-1+1) - e_2(1+2) + e_3(-1-2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$S = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$$

Тогда расстояние равно

$$h = \frac{V}{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ответ:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$