Линейная алгебра и геометрия

Экзамен-1. 2023/2024 учебный год. Вариант 1

Морфей

Группа БЭАД242

Задание 1

Существует ли матрица $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая следующими свойствами:
(1) система $Ax = (2, -1, 0)^T$ несовместна,
(2) пространство решений $A^T y = 0$ порождается вектором $(0, 1, 3)^T$?
Если существует, предъявите её.

Решение:

Воспользуемся свойством (2) и найдём матрицу A^T. Это равносильно поиску ОСЛУ, пространство решений которой совпадает с $\langle (0,1,3)^T \rangle$. Для этого сначала найдём ФСР системы $(0,1,3)^T x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Значит, её ФСР это вектора

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Записав их в строки, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Это почти искомая матрица A^T, только в ней две строки, а не три. Чтобы дополнить её до нужного размера, припишем нулевую строку. От этого ни одно из условий не нарушится. Значит,

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим, что $Ax = (2, -1, 0)^T$ несовместна:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Из последней строчки $x_2 = 0$. Из второй строчки $x_2 = \frac{1}{3}$. Противоречие. Значит, эта система несовместна.

Ответ:

Да, например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Найдите все комплексные решения $\left(2-\sqrt{3}i\right)z^4 = -2-6\sqrt{3}i$ и выберите среди них те, у которых действительная часть минимальна.

Решение:

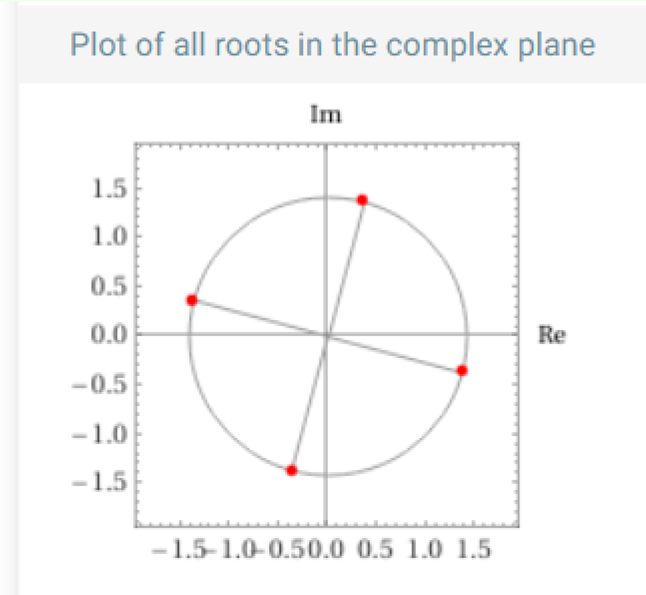
$$\left(2-\sqrt{3}i\right)z^4 = -2-6\sqrt{3}i \Leftrightarrow z^4 = \frac{-2-6\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i} = \frac{\left(-2-6\sqrt{3}i\right)\left(2+\sqrt{3}i\right)}{\left(2-\sqrt{3}i\right)\left(2+\sqrt{3}i\right)} =$$

$$= \frac{-4-2\sqrt{3}i-12\sqrt{3}i+18}{7} = \frac{14-14\sqrt{3}i}{7} = 2-2\sqrt{3}i = 4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Значит,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)\right), k = 0,1,2,3.$$

Найдём среди них тот, у которого действительная часть минимальна. Изобразим эти корни на окружности, пользуясь фактом, что они расположены в вершинах квадрата:



Видим, что минимальная действительная часть у корня с аргументом $-\frac{\pi}{12}+\pi = \frac{11\pi}{12}$.

Ответ:

$$\left\{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)\right) \mid k = 0,1,2,3.\right\},$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

Задание 3

Выясните, принадлежит ли функция $\cos^2 x$ линейной оболочке функций $\sin x, 2\cos x, \sin 2x$ в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

Решение:

Пусть $\cos^2 x \in \langle \sin x,\, 2\cos x,\, \sin 2x\rangle$. Это значит, что

$$\exists a, b, c : \forall x \;\; \cos^2 x = a \sin x + b(2\cos x) + c \sin 2x$$

Подставим $x = 0$:

$$1 = 0 + 2b + 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Подставим $x = \pi$:

$$1 = 0 - 2b + 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$$

Противоречие. Значит, $\cos^2 x \notin \langle \sin x,\, 2\cos x,\, \sin 2x\rangle$.

Ответ:

Нет, не принадлежит.

Задание 4

Известно, что векторы v_1, v_2, v_3, v_4 некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. Определите все значения параметра a, при которых векторы

$$av_1 - 2v_2 + v_3 - v_4, v_1 + v_3 + v_4, 2v_1 - v_2 + v_3$$

также линейно независимы.

Решение:

По условию имеем

$$bv_1 + cv_2 + dv_3 + ev_4 = 0 \Leftrightarrow b = c = d = e = 0$$

Запишем линейную комбинацию векторов :

$$b(av_1 - 2v_2 + v_3 - v_4) + c(v_1 + v_3 + v_4) + d(2v_1 - v_2 + v_3) =$$
$$= v_1(ab + c + 2d) + v_2(-2b - d) + v_3(b + c + d) + v_4(-b + c) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ab + c + 2d = -2b - d = b + c + d = -b + c = 0$$

Пусть векторы $av_1 - 2v_2 + v_3 - v_4, v_1 + v_3 + v_4, 2v_1 - v_2 + v_3$ линейно независимы. Тогда

$$ab + c + 2d = -2b - d = b + c + d = -b + c = 0 \Leftrightarrow b = c = d = 0$$

Или

$$\begin{cases} ab + c + 2d = 0 \\ 2b + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = d = 0$$

Справа налево следствие верно для любого a. Найдём, при каких a выполнено следствие слева направо. Из четвёртого уравнения $b = c$. Тогда из второго и из третьего $d = -2b$. Подставим в первое:

$$ab + b - 4b = 0 \Leftrightarrow ab - 3b = 0 \Leftrightarrow b(a - 3) = 0$$

Если $a = 3$, то у системы слева будет бесконечно много решений для всевозможных $b \in \mathbb{R}$. Значит, следствие слева направо верно только при $a \neq 3$. Это и есть ответ.

Ответ:

$\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Задание 5

Пусть V — векторное пространство всех многочленов степени не выше 4 с действительными коэффициентами, и пусть $U \subseteq V$ — подмножество, состоящее из всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условиям $2f(1) = f'(-1)$, $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Докажите, что U — подпространство V; найдите его базис и размерность.

Решение:

1. Если $f(x) \equiv 0$, то $2f(1) = 0 = f'(-1)$, $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Значит, $0 \in U$.
2. Пусть $f(x), g(x) \in U$, $h(x) = f(x) + g(x)$. Тогда

$$h'(-1) = f'(-1) + g'(-1) = 2f(-1) + 2g(-1) = 2h(-1)$$

$$h''\left(-\frac{1}{2}\right) = f''\left(-\frac{1}{2}\right) + g''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 + 0 = 0$$

Значит, $h(x) \in U$.
3. Пусть $f(x) \in U, k \in \mathbb{R}, h(x) = kf(x)$. Тогда

$$h'(-1) = kf'(-1) = k(2f(1)) = 2(kf(1)) = 2h(1)$$

$$h''\left(-\frac{1}{2}\right) = kf''\left(-\frac{1}{2}\right) = k \cdot 0 = 0$$

Значит, $h(x) \in U$.

Таким образом, U — подпространство. Найдём его базис.
Пусть $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Тогда

$$2f(1) = 2a + 2b + 2c + 2d + 2e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \Rightarrow f'(-1) = -4a + 3b - 2c + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 3a - 3b + 2c$$

Имеем систему

$$\begin{cases} 2a + 2b + 2c + 2d + 2e = -4a + 3b - 2c + d \\ 3a - 3a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - b + 4c + d + 2e = 0 \\ 3a - 3b + 2c = 0 \end{cases} \text{– ОСЛУ}$$

Найдём её ФСР:

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

То есть,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e$$

Так как соответствие между многочленом и его коэффициентами является биекцией, то $\dim U = 3$ и базисом U являются многочлены

$$-\frac{2}{3}x^4+x^2, -\frac{1}{5}x^4-\frac{1}{5}x^3+x, -\frac{2}{5}x^4-\frac{2}{5}x_3+1$$

Ответ:

$$-\frac{2}{3}x^4+x^2, -\frac{1}{5}x^4-\frac{1}{5}x^3+x, -\frac{2}{5}x^4-\frac{2}{5}x_3+1$$

$\dim U = 3$.

Задание 6

В пространстве $\mathbb{R}^5$ заданы векторы

$$v_1 = (1,0,0,1,1), v_2 = (0,1,0,2,2), v_3 = (2,-1,0,0,0), v_4 = (1,0,1,-1,0), v_5 = (0,1,-2,2,0)$$

Выясните, можно ли среди этих векторов выбрать подмножество, являющееся фундаментальной системой решений для однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение:

Найдём ФСР для ОСЛУ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a} x_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} x_4 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c} x_5$$

Значит, $\{a, b, c\}$ — искомая ФСР.

Пусть V — какой-то набор векторов из v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, тоже образующий ФСР. Тогда $\forall v_i \in V \;\; v_i \in \langle a,\, b,\, c\rangle$. Проверим, какие векторы из $v_1, v_2, ..., v_5$ лежат в $\langle a,\, b,\, c\rangle$, то есть для каких $v_i \;\; \exists x_1, x_2, x_3 : x_1 a + x_2 b + x_3 c = v_i$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ:} \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Видим, что противоречие возникает только в четвёртой строчке, и только для вектора v_4. Значит, все векторы, кроме v_4, лежат в линейной оболочке ФСР, то есть являются решениями исходной ОСЛУ.

Осталось вбырать среди этих векторов линейно независимую подсистему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Главные переменные — первая, вторая и четвёртая, значит v_1, v_2, v_5 является линейно независимой подсистемой v_1, v_2, v_3, v_5. Значит, это и есть искомое множество, образующее ФСР.

Ответ:

Да, например, v_1, v_2, v_5.

Задание 7

Найдите все значения параметра a, при которых матрица $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ представима в виде суммы двух матриц ранга 1, и для каждого найденного значения укажите такое представление.

Решение:

Пусть $A = X + Y$, где $\operatorname{rk} X = \operatorname{rk} Y = A$. Тогда $\operatorname{rk} A \leqslant \operatorname{rk} X + \operatorname{rk} Y = 2 \Rightarrow \operatorname{rk} A \leqslant 2$. Найдём $\operatorname{rk} A$, приведя её к УСВ:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)+2\times(2)} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2\times(1),(3)-a\times(1)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -a+1 & 0 & -2a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{3})\times(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -a+1 & 0 & -2a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2),(3)+(a-1)\times(2)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(a-1) & -a+1 \end{pmatrix}$$

Так как ранг матрицы равен числу ненулевых строк в её ступенчатом виде, то $\operatorname{rk} A \leqslant 2 \Leftrightarrow a = 1$. Если $a = 1$, то $\operatorname{rk} A = 2$. Подставим $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем, что для системы из столбцов матрицы A первый и второй столбец — базис линейной оболочки этой линейной системы, причём

$$A^{(3)} = -\frac{1}{3}A^{(1)} + \frac{1}{3}A^{(2)}$$

$$A^{(4)} = A^{(1)} + A^{(2)}$$

Получаем, что для $a = 1$

$$A = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, -\frac{1}{3}A^{(1)} + \frac{1}{3}A^{(2)}, A^{(1)} + A^{(2)}\right) =$$

$$= \left(A^{(1)}, 0, -\frac{1}{3}A^{(1)}, A^{(1)}\right) + \left(0, A^{(2)}, \frac{1}{3}A^{(2)}, A^{(2)}\right)$$

Это и есть искомые матрицы X и Y, т.к. их ранг равен 1.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

$a = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 8

Найдите все матрицы $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, для которых присоединённая матрица $\hat{A}$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Решение:

Вспомним, что $A^{-1} = \dfrac{\hat{A}}{\det(A)}$. Тогда $\hat{A} = \det(A)A^{-1}$. Посчитаем $\det\left(\hat{A}\right)$. Так как $A \in M_3(\mathbb{R})$, то когда мы умножаем $\det A$ на A^{-1}, то мы $\det A^{-1}$ увеличиваем в $(\det A)^3$ раз (т.к. умножаем каждую строчку на $\det A$).

Раз $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, то $\det \hat{A} = (\det(A))^2$. Посчитаем определитель $\hat{A}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2(-10+8) = 4.$$

Значит, $\det A = \pm 2$. Имеем $A^{-1} = \pm\dfrac{1}{2}\hat{A} \Leftrightarrow A = \pm 2\left(\hat{A}\right)^{-1}$. Найдём обратную к $\hat{A}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ: } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Значит,

$$A = \pm 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$