Линейная алгебра и геометрия

Экзамен-1. 2022/2023 учебный год. Вариант 1

Морфей

Группа БЭАД242

Задание 1

Существует ли матрица $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) система $Ax = (2, -3, 0)^T$ несовместна;
(2) пространство решений системы $A^T y = 0$ имеет размерность 1?
Если существует, то предъявите её.

Решение:

Вспомним, что размерность ФСР $Ax = 0$ равна $n - \operatorname{rk} A$, где n — число строк в матрице A. В данном случае $n = 3$.
Так как $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$, то $1 = 3 - \operatorname{rk} A \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = 2$.
Раз $\operatorname{rk} A = 2$, то при приведении её к УСВ одна из строк будет нулевой. Осталось сделать так, чтобы эта строка приводила к противоречию в системе $Ax = (2, -3, 0)^T$, тогда система будет несовместна.

Пример. Рассмотрим $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Её ранг равен двум, так как вторая строка является полусуммой первой и третьей. Тогда рассмотрим систему $Ax = (2, -3, 0)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -3 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Легко видеть, что если из второй строки мы вычтем полусумму первой и третьей, то получим слева нулевую строку, а справа число -4. Значит, в этом случае система несовместна.
Проверим (для собственного душевного спокойствия), что ФСР $A^T y = 0$ состоит из одного вектора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ — и есть ФСР системы $A^T y = 0$, значит, пространство её решений действительно имеет размерность, равную единице.

Ответ:

Да, например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Задание 2

Найдите все комплексные решения уравнения $\left(\sqrt{3}-4i\right)z^3 = 2+10\sqrt{3}i$, у которых один из аргументов принадлежит интервалу $\left(\frac{7\pi}{3}, 3\pi\right)$.

Решение:

$$z^3 = \frac{2+10\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-4i} = \frac{\left(2+10\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}+4i\right)}{\left(\sqrt{3}-4i\right)\left(\sqrt{3}+4i\right)} = \frac{2\sqrt{3}+8i+30i-40\sqrt{3}}{3+16} = \frac{-38\sqrt{3}+38i}{19} = -2\sqrt{3}+2i =$$

$$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$z = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Найдём те корни, у которых один из аргументов принадлежит нужному интервалу. Для этого решим неравенство:

$$\frac{7\pi}{3} < \frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3} < 3\pi \mid \times \frac{18}{\pi}$$

$$42 < 5+12k < 54$$

$$37 < 12k < 49$$

Подходит только $k=4$. Тогда аргумент искомого корня равен $\frac{5\pi}{18}+\frac{8\pi}{3} = \frac{53\pi}{18} = \frac{17\pi}{18}+2\pi$, а сам корень это

$$\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{17\pi}{18}+i\sin\frac{17\pi}{18}\right)$$

Ответ:

$$\left\{\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{17\pi}{18}+i\sin\frac{17\pi}{18}\right)\right\}$$

Задание 3

Выясните, являются ли функции $2\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \sin 2x$ линейно независимыми в пространстве всех действительнозначных функций на множестве $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Решение:

Запишем линейную комбинацию, равную нулю:

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\ 2a\sin x + b\cos x + c\operatorname{tg} x + d\sin 2x = 0$$

Подставим $x = 0$:

$$0 + b + 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

Подставим $x = \frac{\pi}{6}$:

$$a + 0 + \frac{c}{\sqrt{3}} + d\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow a + \frac{c}{\sqrt{3}} + d\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Подставим $x = \frac{\pi}{4}$:

$$a\sqrt{2} + 0 + c + d = 0 \Leftrightarrow a + \frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{d}{\sqrt{2}} = 0$$

Подставим $x = \frac{\pi}{3}$:

$$a\sqrt{3} + 0 + c\sqrt{3} + d\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow a + c + \frac{d}{2} = 0$$

Получили некоторую систему линейных уравнений для a, c и d. Найдём определитель матрицы, задающей эту систему:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{(1)-(3),(2)-(3)}{=\!=\!=\!=\!=} \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{\text{разложение по первому столбцу}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$$

Раз определитель матрицы не равен нулю, то у системы решение единственно, и оно, очевидно, есть нулевое решение. Значит, исходная система функций линейно независима.

Ответ:

Да, являются.

Задание 4

Докажите, что множество всех матриц $X \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $XA = AX$, где $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $M_{2\times2}(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

Решение:

Пусть искомое множество матриц $U \subseteq M_{2\times2}(\mathbb{R})$. Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a-9b & 4a+7b \\ -5c-9d & 4c+7d \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a+4c & -5b+4d \\ -9a+7c & -9b+7d \end{pmatrix}$$

$$AX = XA \Leftrightarrow \begin{cases} -5a-9b = -5a+4c \\ 4a+7b = -5b+4d \\ -5c-9d = -9a+7c \\ 4c+7d = -9b+7d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9b+4c = 0 \\ 4a+12b-4d = 0 \\ 9a-12c-9d = 0 \\ 9b+4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9b+4c = 0 \\ a+3b-d = 0 \\ 3a-4c-3d = 0 \\ 9b+4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9b+4c = 0 \\ a+3b-d = 0 \\ 3a-4c-3d = 0 \end{cases}$$

Зададим эту систему матрицей и решим её:

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-3\times(2)} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -9 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)+(1),(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{9}\times(2),(1)-3\times(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Итого получаем, что

$$\begin{cases} a = \frac{4}{3}c + d \\ b = -\frac{4}{9}c \end{cases}, c, d \in \mathbb{R}.$$

Значит, **все** такие матрицы X имеют следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}c + d & -\frac{4}{9}c \\ c & d \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R}.$$

1. Если $c = d = 0$, то $X = \theta$ (нулевая матрица). Значит, $\theta \in U$.
2. Пусть $X, Y \in U$. Тогда

$$X + Y = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}c_1 + d_1 & -\frac{4}{9}c_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3}c_2 + d_2 & -\frac{4}{9}c_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(c_1+c_2) + (d_1+d_2) & -\frac{4}{9}(c_1+c_2) \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}c + d & -\frac{4}{9}c \\ c & d \end{pmatrix}, \text{где } \ c = c_1 + c_2, d = d_1 + d_2$$

Значит, $X + Y \in U$.

3. Пусть $X \in U, k \in \mathbb{R}$. Тогда

$$kX = k\begin{pmatrix} \frac{4}{3}c + d & -\frac{4}{9}c \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}kc + kd & -\frac{4}{9}kc \\ kc & kd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}c' + d' & -\frac{4}{9}c' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \text{где } c' = kc, d' = kd$$

Значит, $kX \in U$.
Таким образом, U — подпространство $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Очевидно, что базисом этого подпространства будут, например, матрицы

$$C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{4}{9} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

так как любая матрица $X \in U$ выражается как $c \cdot C + d \cdot D$, причём единственным образом. Значит, эта система матриц — базис, и $\dim U = 2$.

Ответ:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{4}{9} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{базис}$$

$$\dim U = 2$$

Задание 5

В пространстве $\mathbb{R}^5$ даны векторы

$$v_1 = (1,2,3,1,3), v_2 = (3,7,5,1,4), v_3 = (-1,-3,1,1,2), v_4 = (2,5,2,4,8)$$

Существует ли базис пространства $\mathbb{R}^5$, в который входят не менее трёх из этих векторов? Если существует, то предъявите его.

Решение:

Заметим, что эта задача равносильна поиску линейно независимой подсистемы из не менее трёх векторов из v_1, v_2, v_3, v_4. Действительно, если мы найдём такую подсистему, то легко сможем дополнить её до базиса. Найдём её, приведя к УСВ матрицу (v_1, v_2, v_3, v_4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видим, что первая, вторая и четвёртая переменные — главные, значит, подсистема v_1, v_2, v_4 является линейно независимой. Осталось дополнить эту подсистему до базиса. Для этого надо записать эти векторы в **строки** (см. алгоритм дополнения до базиса и его доказательство у Ларсика):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Видим, что главными переменными являются первая, вторая и четвёртая. Значит, дополнением до базиса будут векторы e_3 и e_5.

Ответ:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задание 6

Существует ли однородная система линейных уравнений, для которой векторы $v_1 = (0, 1, 1, 1, 0), v_2 = (1, 2, 0, 0, -2), v_3 = (1, 2, -2, 0, 0)$ образуют фундаментальную систему решений? Если существует, то укажите её.

Решение:

Воспользуемся алгоритм, который доказывал Рома на лекции:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

Искомая ОСЛУ задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2a - b + d = 0 \\ 4a - b + c + e = 0 \end{cases}$$

Это и есть ответ.

Ответ:

$$\begin{cases} 2a - b + d = 0 \\ 4a - b + c + e = 0 \end{cases}$$

Важно! Ответ — не матрица, а именно система уравнений!

Задание 7

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Найдите все возможные значения величины $\mathrm{rk}(A+B)$, где $B \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{rk}\, B = 1$. Ответ обоснуйте.

Решение:

Вспомним, что

$$\mathrm{rk}(A+B) \leqslant \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, B$$

$$\mathrm{rk}\, A \geqslant \mathrm{rk}(A+B) - \mathrm{rk}\, B.$$

$$\text{Пусть } A' = A+B, B' = -B, \text{ тогда}$$

$$\mathrm{rk}(A'+B') \geqslant \mathrm{rk}\, A' - \mathrm{rk}\, B'$$

Итого имеем

$$\mathrm{rk}\, A - \mathrm{rk}\, B \leqslant \mathrm{rk}(A+B) \leqslant \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, B$$

$$\mathrm{rk}\, A - 1 \leqslant \mathrm{rk}(A+B) \leqslant \mathrm{rk}\, A + 1$$

Найдём $\mathrm{rk}\, A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как ненулевых строчек две, то $\mathrm{rk}\, A = 2$. То есть, $1 \leqslant \mathrm{rk}(A+B) \leqslant 3$. То есть $\mathrm{rk}(A+B) = 1, 2$ или 3.

1. $\mathrm{rk}(A+B) = 2$: Рассмотрим матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $A+B$ отличается от матрицы A умножением первого столбца на 2, что, очевидно, не изменяет ранг матрицы A (так как это элементарное преобразование столбца).

2. $\mathrm{rk}(A+B) = 3$: Рассмотрим матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A+B=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&-1\\-1&1&0&-3\\1&1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&-1\\-1&1&0&-3\\1&1&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow \text{УСВ: }\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

У полученной матрицы только одна нулевая строка, значит, её ранг равен 3 (по сути, тем, что мы прибавили 1 к первой строке четвёртого столбца, мы «сломали» линейную зависимость четвёртого столбца от первого и второго).

3. $\mathrm{rk}(A+B)=1$: Из УСВ матрицы A мы видим, что $A^{(3)}=A^{(1)}+A^{(2)}$, $A^{(4)}=2A^{(1)}-A^{(2)}$. Попробуем «собрать» нужную матрицу B, чтобы все столбцы $A+B$ зависили от первого. Сначала сделаем так, чтобы второй столбец $A+B$ был равен первому столбцу $A^{(1)}$, то есть $B^{(2)}=A^{(1)}-A^{(2)}$. Тогда все остальные столбцы B имеют вид $k\cdot\left(A^{(1)}-A^{(2)}\right)$.

Чтобы сделать третий столбец линейно зависимым от первого, нужно «убрать» из его представления $A^{(2)}$. Для этого добавим к нему $A^{(1)}-A^{(2)}$, то есть $B^{(3)}=A^{(1)}-A^{(2)}$. Тогда $(A+B)^{(3)}=2A^{(1)}$.

Чтобы сделать четвёртый столбец линейно зависимым от первого, добавим к нему $A^{(2)}-A^{(1)}$, то есть $B^{(4)}=A^{(2)}-A^{(1)}$. Тогда $(A+B)^{(4)}=A^{(1)}$.

Итого, искомая матрица B равна

$$\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\0&-1&-1&1\\0&-2&-2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Проверка.

$$A+B=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&-1\\-1&1&0&-3\\1&1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\0&-1&-1&1\\0&-2&-2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&0&0&0\\-1&-1&-2&-1\\1&1&2&1\end{pmatrix}$$

Видно, что $\mathrm{rk}(A+B)=1$, как мы и хотели.

Ответ:

$\{1,2,3\}$

Задание 8

Найдите наименьшее положительное значение, которое может принимать определитель целочисленной матрицы 4×4, содержащей строку $(96, 84, 75, 40)$.

Решение:

Оценка очевидна. Раз матрица целочисленная, то и её определитель — целое число. Наименьшее положительное целое число — единица. Значит, $\det A \geqslant 1$.
Пример. Концептуально, мы хотим проделать какие-то элементарные преобразования столбцов второго типа (вычитая из столбцов другие столбцы) с исходной матрицей и получить матрицу, у которой определитель равен 1. Проделаем элементарные преобразования столбцов со строчкой $(96, 84, 75, 40)$:

$$(96, 84, 75, 40)$$
$$\downarrow_{(1),(2),(3)-2\times(4)}$$
$$(16, 4, -5, 40)$$
$$\downarrow_{(1)-4\times(2),(4)-10\times(2),(3)+(2)}$$
$$(0, 4, -1, 0)$$
$$\downarrow_{(2)+4\times(3)}$$
$$(0, 0, -1, 0)$$

Сконструируем матрицу, полученную в результате таких преобразований, у которой определитель равен 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проделаем все преобразования со **столбцами**, что были выше, в обратном порядке:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-4\times(3)} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+4\times(2),(4)+10\times(2),(3)-(2)} \begin{pmatrix} 16 & 4 & -5 & 40 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1),(2),(3)+2\times(4)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 96 & 84 & 75 & 40 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 21 & 19 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Это целочисленная матрица, содержащая строчку $(96, 84, 75, 40)$, и её определитель равен 1 (это несложно проверить).

Ответ:

1.