# Контрольная работа 2

Вариант 1

**1.** Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, $f \mapsto f' + f(-1)\cdot x^2$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, в которых $\varphi$ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

**2.** Пусть $V$ — пространство всех верхнетреугольных матриц размера $2\times 2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $v = (1,-1)$. Рассмотрим на $V$ линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(X) = \operatorname{tr}(X),\ \alpha_2(X) = \operatorname{tr}(XS),\ \alpha_3(X) = vXv^T \text{ для всех } X \in V.$$

Найдите базис пространства $V$, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2 - 2\alpha_1, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства $V^*$.

**3.** Пусть $\beta$ — билинейная форма на пространстве $\mathbb{R}^3$, заданная формулой

$$\beta(x,y) = 3x_1y_1 + (a+2)x_2y_2 + 3x_3y_3 - 4x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2ax_2y_3 + 2x_3y_2$$

для всех $x = (x_1,x_2,x_3)^T$, $y = (y_1,y_2,y_3)^T$. Определите нормальный вид квадратичной формы $Q(x) = \beta(x,x)$ в зависимости от значений параметра $a$.

**4.** В четырёхмерном евклидовом пространстве даны векторы $v_1, v_2, v_3$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Для каждого $i = 1,2,3$ обозначим через $w_i$ ортогональную составляющую вектора $v_i$ относительно подпространства, порождаемого двумя другими векторами. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $w_1, w_2, w_3$.

**5.** Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, заданное формулой $\varphi(x) = [Ax, u]$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$, $u = (1,-1,1)^T$ и квадратные скобки означают векторное произведение. Найдите расстояние от вектора $v = (3,1,4)^T$ до подпространства $\operatorname{Im}\varphi$.

**6.** В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(1,3,2)$, $B(4,3,-1)$, $C(7,9,2)$, $D(-2,-1,3)$. Пусть $BH$ — высота тетраэдра, опущенная на грань $ACD$, и $AF$ — биссектриса грани $ABC$. Найдите угол и расстояние между прямыми $BH$ и $AF$.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

# Контрольная работа 2

Вариант 2

**1.** Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, $f \mapsto f' - f(1)\cdot x$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, в которых $\varphi$ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

**2.** Пусть $V$ — пространство всех нижнетреугольных матриц размера $2\times 2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $v = (-1, 1)$. Рассмотрим на $V$ линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(X) = \operatorname{tr}(X),\ \alpha_2(X) = \operatorname{tr}(SX),\ \alpha_3(X) = vXv^T \text{ для всех } X \in V.$$

Найдите базис пространства $V$, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2 + 2\alpha_1, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства $V^*$.

**3.** Пусть $\beta$ — билинейная форма на пространстве $\mathbb{R}^3$, заданная формулой

$$\beta(x, y) = 2x_1y_1 + (a+4)x_2y_2 + 3x_3y_3 - 6x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2ax_2y_3 + 4x_3y_2$$

для всех $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T$. Определите нормальный вид квадратичной формы $Q(x) = \beta(x, x)$ в зависимости от значений параметра $a$.

**4.** В четырёхмерном евклидовом пространстве даны векторы $v_1, v_2, v_3$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Для каждого $i = 1, 2, 3$ обозначим через $w_i$ ортогональную составляющую вектора $v_i$ относительно подпространства, порождаемого двумя другими векторами. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $w_1, w_2, w_3$.

**5.** Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, заданное формулой $\varphi(x) = [Ax, u]$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, $u = (1, 1, -1)^T$ и квадратные скобки означают векторное произведение. Найдите расстояние от вектора $v = (4, 3, 1)^T$ до подпространства $\operatorname{Im}\varphi$.

**6.** В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(2, -3, 1)$, $B(2, 3, 7)$, $C(-1, -3, 4)$, $D(1, 0, 8)$. Пусть $BH$ — высота тетраэдра, опущенная на грань $ACD$, и $AF$ — биссектриса грани $ABC$. Найдите угол и расстояние между прямыми $BH$ и $AF$.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

# Контрольная работа 2

## Вариант 3

**1.** Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, $f \mapsto f' - f(1)\cdot x^2$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, в которых $\varphi$ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

**2.** Пусть $V$ — пространство всех верхнетреугольных матриц размера $2\times 2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $v = (1,-1)$. Рассмотрим на $V$ линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(X) = \operatorname{tr}(X),\ \alpha_2(X) = \operatorname{tr}(XS),\ \alpha_3(X) = vXv^T \text{ для всех } X \in V.$$

Найдите базис пространства $V$, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + 2\alpha_1)$ является двойственным базисом пространства $V^*$.

**3.** Пусть $\beta$ — билинейная форма на пространстве $\mathbb{R}^3$, заданная формулой

$$\beta(x,y) = 3x_1y_1 + (a+4)x_2y_2 + 5x_3y_3 - 4x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2ax_2y_3 - 2x_3y_2$$

для всех $x = (x_1,x_2,x_3)^T,\ y = (y_1,y_2,y_3)^T$. Определите нормальный вид квадратичной формы $Q(x) = \beta(x,x)$ в зависимости от значений параметра $a$.

**4.** В четырёхмерном евклидовом пространстве даны векторы $v_1, v_2, v_3$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Для каждого $i = 1,2,3$ обозначим через $w_i$ ортогональную составляющую вектора $v_i$ относительно подпространства, порождаемого двумя другими векторами. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $w_1, w_2, w_3$.

**5.** Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, заданное формулой $\varphi(x) = [Ax, u]$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, $u = (1,-1,1)^T$ и квадратные скобки означают векторное произведение. Найдите расстояние от вектора $v = (3,-2,4)^T$ до подпространства $\operatorname{Im}\varphi$.

**6.** В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(2,1,2)$, $B(-1,4,2)$, $C(2,7,8)$, $D(3,-2,-2)$. Пусть $BH$ — высота тетраэдра, опущенная на грань $ACD$, и $AF$ — биссектриса грани $ABC$. Найдите угол и расстояние между прямыми $BH$ и $AF$.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

# Контрольная работа 2

Вариант 4

**1.** Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, $f \mapsto f' + f(-1) \cdot x$. Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, в которых $\varphi$ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

**2.** Пусть $V$ — пространство всех нижнетреугольных матриц размера $2 \times 2$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $v = (-1, 1)$. Рассмотрим на $V$ линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где

$$\alpha_1(X) = \operatorname{tr}(X),\ \alpha_2(X) = \operatorname{tr}(SX),\ \alpha_3(X) = vXv^T \text{ для всех } X \in V.$$

Найдите базис пространства $V$, для которого набор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 2\alpha_1)$ является двойственным базисом пространства $V^*$.

**3.** Пусть $\beta$ — билинейная форма на пространстве $\mathbb{R}^3$, заданная формулой

$$\beta(x, y) = 2x_1y_1 + (a+7)x_2y_2 + 4x_3y_3 - 6x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2ax_2y_3 - 2x_3y_2$$

для всех $x = (x_1, x_2, x_3)^T,\ y = (y_1, y_2, y_3)^T$. Определите нормальный вид квадратичной формы $Q(x) = \beta(x, x)$ в зависимости от значений параметра $a$.

**4.** В четырёхмерном евклидовом пространстве даны векторы $v_1, v_2, v_3$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Для каждого $i = 1, 2, 3$ обозначим через $w_i$ ортогональную составляющую вектора $v_i$ относительно подпространства, порождаемого двумя другими векторами. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $w_1, w_2, w_3$.

**5.** Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, заданное формулой $\varphi(x) = [Ax, u]$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$, $u = (1, 1, -1)^T$ и квадратные скобки означают векторное произведение. Найдите расстояние от вектора $v = (4, 2, -3)^T$ до подпространства $\operatorname{Im} \varphi$.

**6.** В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами $A(-1, 2, 2)$, $B(5, 8, 2)$, $C(-1, 5, -1)$, $D(2, 9, 1)$. Пусть $BH$ — высота тетраэдра, опущенная на грань $ACD$, и $AF$ — биссектриса грани $ABC$. Найдите угол и расстояние между прямыми $BH$ и $AF$.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |