Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 1

1. Определите все значения, которые может принимать размерность суммы ядра и образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в образе не содержится вектор $v = (1, 0, -1, 2)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей положительные значения на всех ненулевых векторах подпространства $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, элементами которого являются все многочлены от переменной x степени не выше 3 с действительными коэффициентами, а скалярное произведение задаётся формулой

$$(f, g) = \int\limits_{-2}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Найдите в подпространстве $\langle 1, x\rangle \subseteq \mathbb{E}$ вектор v, ближайший к вектору x^2, и расстояние между v и x^2.

4. Приведите пример двух недиагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $5\varphi - 2\psi$ диагонализуем и отличен от нулевого.

5. Про ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((0, -1, 1)) = (0, 1, -1)$, $\varphi((1, 0, 2)) = (-1, 2, 0)$ и φ не самосопряжён. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу.

6. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ найдите её усечённое сингулярное разложение и матрицу B ранга 1 (того же размера), для которой величина $||A - B||$ минимальна, где $||\cdot||$ — фробениусова норма матрицы.

7. Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой уравнение поверхности

$$-2y^2 + 3z^2 - 4xz + 4y + 9 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 2

1. Определите все значения, которые может принимать размерность суммы ядра и образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в образе не содержится вектор $v = (1, 2, 0, -1)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей положительные значения на всех ненулевых векторах подпространства $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, элементами которого являются все многочлены от переменной x степени не выше 3 с действительными коэффициентами, а скалярное произведение задаётся формулой

$$(f, g) = \int\limits_0^3 f(x)g(x)\,dx.$$

Найдите в подпространстве $\langle 1, x\rangle \subseteq \mathbb{E}$ вектор v, ближайший к вектору x^2, и расстояние между v и x^2.

4. Приведите пример двух недиагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $4\varphi - 3\psi$ диагонализуем и отличен от нулевого.

5. Про ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((-1, -1, 0)) = (1, 1, 0)$, $\varphi((0, -2, 1)) = (2, 0, -1)$ и φ не самосопряжён. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу.

6. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ найдите её усечённое сингулярное разложение и матрицу B ранга 1 (того же размера), для которой величина $||A - B||$ минимальна, где $||\cdot||$ — фробениусова норма матрицы.

7. Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой уравнение поверхности

$$3x^2 + 2y^2 - 4xz - 8y + 15 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 3

1. Определите все значения, которые может принимать размерность суммы ядра и образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в образе не содержится вектор $v = (1, 0, 2, -2)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей положительные значения на всех ненулевых векторах подпространства $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, элементами которого являются все многочлены от переменной x степени не выше 3 с действительными коэффициентами, а скалярное произведение задаётся формулой

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{2} f(x)g(x)\,dx.$$

Найдите в подпространстве $\langle 1, x\rangle \subseteq \mathbb{E}$ вектор v, ближайший к вектору x^2, и расстояние между v и x^2.

4. Приведите пример двух недиагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $5\varphi + 2\psi$ диагонализуем и отличен от нулевого.

5. Про ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((-1, 1, -1)) = (1, -1, 1)$, $\varphi((-2, 1, 0)) = (2, 0, 1)$ и φ не самосопряжён. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу.

6. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ найдите её усечённое сингулярное разложение и матрицу B ранга 1 (того же размера), для которой величина $||A - B||$ минимальна, где $||\cdot||$ — фробениусова норма матрицы.

7. Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой уравнение поверхности

$$2y^2 - 3z^2 + 4xz - 12y + 15 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 4

1. Определите все значения, которые может принимать размерность суммы ядра и образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в образе не содержится вектор $v = (1, 2, 0, -2)$.

2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей положительные значения на всех ненулевых векторах подпространства $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z.

3. Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, элементами которого являются все многочлены от переменной x степени не выше 3 с действительными коэффициентами, а скалярное произведение задаётся формулой

$$(f, g) = \int\limits_{-3}^{0} f(x)g(x)\,dx.$$

Найдите в подпространстве $\langle 1, x\rangle \subseteq \mathbb{E}$ вектор v, ближайший к вектору x^2, и расстояние между v и x^2.

4. Приведите пример двух недиагонализуемых линейных операторов φ и ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $4\varphi + 3\psi$ диагонализуем и отличен от нулевого.

5. Про ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((-1, -1, 1)) = (1, 1, -1)$, $\varphi((0, -2, 1)) = (2, 1, 0)$ и φ не самосопряжён. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу.

6. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ найдите её усечённое сингулярное разложение и матрицу B ранга 1 (того же размера), для которой величина $||A - B||$ минимальна, где $||\cdot||$ — фробениусова норма матрицы.

7. Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой уравнение поверхности

$$3x^2 - 2y^2 + 4xz + 8y - 12 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ