Линейная алгебра и геометрия

Экзамен-1. 2021/2022 учебный год. Вариант 1

Морфей

Группа БЭАД242

Задание 1

Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) наборы $(2,1,4)$ и $(1,1,3)$ являются решениями системы $Ax = 0$;
(2) система $Ay = \binom{3}{4}$ является совместной?
Если существует, то предъявите её.

Решение:

Заметим, что векторы $(2,1,4)$ и $(1,1,3)$ не пропорциональны, значит, система из этих двух векторов линейно независима. Тогда множество решений системы $Ax = 0$ имеет размерность $\geqslant 2$. С другой стороны, раз матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, и система $Ay = \binom{3}{4}$ является совместной, то $1 \leqslant \operatorname{rk} A \leqslant 2$ (т.к. в ней обе строки ненулевые).
Тогда размерность множества решений системы $Ax = 0$ равна $3 - \operatorname{rk} A \leqslant 2$. С другой стороны, $3 - \operatorname{rk} A \geqslant 2$, значит, $3 - \operatorname{rk} A = 2 \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = 1$, и множество решений системы $Ax = 0$ имеет размерность 2. Значит, исходная система из двух векторов — её ФСР. Составим ОСЛУ по этой ФСР:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2\times(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2),(-1)\times(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Матрицу A можно составить, записав в строку вектор из ФСР. Но так как матрица A имеет размер 2×3, и её ранг равен 1, то вторая строка должна быть пропорциональна первой, то есть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -a & -2a & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

Найдём значение a, при котором система $Ay = \binom{3}{4}$ совместна:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 \\ -a & -2a & a & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-a\times(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4-3a \end{array}\right)$$

Эта система совместна тогда и только тогда, когда $4 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{3}$. Тогда матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Это и есть ответ.

Ответ:

Да, например,

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Задание 2

Найдите все комплексные решения уравнения $\left(2-\sqrt{3}i\right)z^3 = -\sqrt{2}-3\sqrt{6}i$ и выберите среди них те, у которых мнимая часть максимальна.

Решение:

$$\left(2-\sqrt{3}i\right)z^3 = -\sqrt{2}-3\sqrt{6}i \Leftrightarrow z^3 = \frac{\left(-\sqrt{2}-3\sqrt{6}i\right)\left(2+\sqrt{3}i\right)}{\left(2-\sqrt{3}i\right)\left(2+\sqrt{3}i\right)} = \frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{6}i-6\sqrt{6}i+9\sqrt{2}}{7} = \sqrt{2}-\sqrt{6}i =$$

$$= \sqrt{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$$

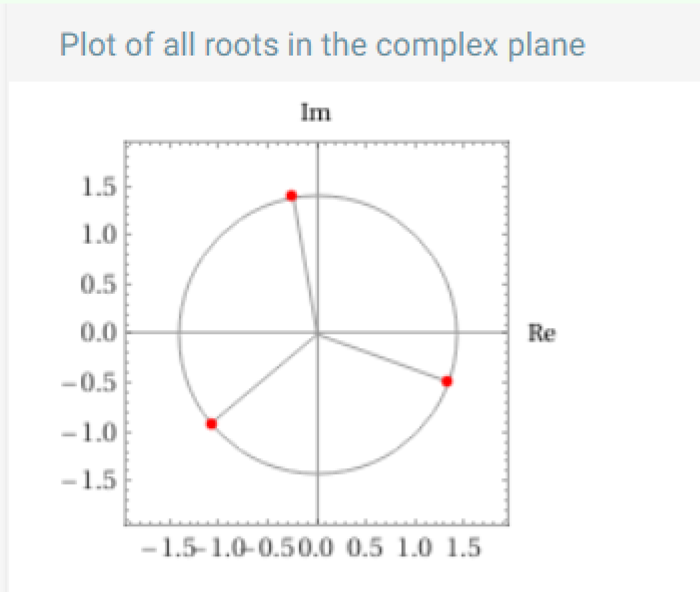
Посчитаем аргументы всех (трёх) корней:

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$$

$$-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{9} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$$

$$\frac{5\pi}{9}+\frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{9} \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}\right)$$

Изобразим эти корни на окружности радиуса $\sqrt{2}$:



Видим, что максимальная мнимая часть у корня z_1. Это и есть ответ.

Ответ:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$$

Задание 3

Выясните, принадлежит ли функция $\sin^2 x$ линейной оболочке функций $\sin x, 2\cos x, \cos 2x$ в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

Решение:

Предположим, что принадлежит, то есть

$$\exists a, b, c : \forall x \;\; a\sin x + 2b\cos x + c\cos 2x = \sin^2 x$$

1. $x = 0 \Rightarrow 0 + 2b + c = 0 \Leftrightarrow 2b + c = 0$ (1)
2. $x = \pi \Rightarrow 0 - 2b + c = 0 \Leftrightarrow 2b - c = 0$ (2)
Из (1) и (2), если их сначала сложить, а потом вычесть, получаем $b = c = 0$.
3. $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a + 0 + 0 = 1 \Leftrightarrow a = 1$
4. $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -a + 0 + 0 = 1 \Leftrightarrow a = -1 \neq 1$. Противоречие.
Значит, $\sin^2 x \notin \langle \sin x, 2\cos x, \cos 2x \rangle$.

Ответ:

Нет, не принадлежит.

Задание 4

Известно, что векторы v_1, v_2, v_3, v_4 некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. Определите все значения параметра a, при которых векторы

$$av_1 - v_2 - 2v_4, 3v_1 + 3v_2 + 2v_3, -2v_1 + 5v_2 + v_3 + 7v_4$$

также линейно независимы.

Решение:

Идея решения от Виктора Евгеньевича (спасибо ему!), отличающаяся от решения в варианте 2022-2023 года. Выбирайте то, что приятнее вам!
Пусть

$$u_1 = av_1 - v_2 - 2v_4,$$
$$u_2 = 3v_1 + 3v_2 + 2v_3,$$
$$u_3 = -2v_1 + 5v_2 + v_3 + 7v_4$$

Очевидно, что $u_1, u_2, u_3 \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. С другой стороны, раз v_1, v_2, v_3, v_4 линейно независимы, то являются базисом своей линейной оболочки. Значит, в этом базисе векторы u_1, u_2, u_3 представляются как

$$u_1 = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Проверим, когда они линейно независимы. Для этого приведём к УСВ следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} a & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\times(2),(1)\leftrightarrow(2),(3)\leftrightarrow(4)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ a & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-a\times(1),(3)+2\times(1)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 3+3a & -2+5a \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)+3\times(4),\frac{1}{2}\times(4),\text{ переставим строки}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3+3a & -2+5a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+3\times(2),(3)-(3+3a)\times(2)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} - \frac{7a}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Привели матрицу к ступенчатому виду. Из теоремы о ранге матрицы, имеющей ступенчатой вид, что ранг этой системы будет равен трём (а значит, и изначальная система векторов будет линейно независимой) тогда и только тогда, когда третья строчка будет не нулевой, то есть когда $-7 - 7a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$. Это и есть ответ.

Ответ:

$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Задание 5

Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\mathrm{tr}(YX^T) = 0$, где $Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

Решение:

Пусть множество таких матриц это U.
Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow X^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Тогда

$$YX^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+5b & 4c+5d \\ 3a+2b & 3c+2d \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{tr}(YX^T) = 4a+5b+3c+2d = 0$$

Имеем единственное условие на такую матрицу $X : 4a+5b+3c+2d = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}b - \frac{3}{4}c - \frac{1}{2}d$. То есть, все такие матрицы X имеют следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}b - \frac{3}{4}c - \frac{1}{2}d & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Доказательство того, что U — подпространство, предоставляется читателю (см. разбор соответствующей задачи в варианте 2022-2023 года, всё аналогично).
Из биекции между матрицами размера 2×2 и векторами из $\mathbb{R}^4$ очевидно, что базисом U тогда будет являться следующая система:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, $\dim U = 3$.

Ответ:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{базис } U,$$

$$\dim U = 3.$$

Задание 6

Существует ли фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 0 \end{cases},$$

включающая в себя вектор $(0, 1, 2, 0, 2)$? Ответ обоснуйте.

Решение:

Сначала найдём ФСР исходной ОСЛУ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ФСР}$$

Проверим, принадлежит ли вектор $v = (0, 1, 2, 0, 2)$ линейной оболочке ФСР, то есть множеству решений ОСЛУ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Из второй, четвёртой и пятой строчки видим, что $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2$ — единственное решение этой системы, это несложно проверить.

Таким образом, получили, что $v = u_1 - 2u_3$. Заметим, что если мы расссмотрим систему v, u_2, u_3, то её линейная оболочка будет совпадать с линейной оболочкой векторов u_1, u_2, u_3 (т.к. все линейные комбинации первой системы являются линейными комбинациями второй системы и наоборот). Тогда v, u_2, u_3 будет искомой ФСР.

Важно. *Так как в выражение v через вектора и не входит u_2, то u_1, v, u_3 не будет нужной ФСР, так как она будет линейно зависимой.*

Ответ:

Да, существует.

Задание 7

Найдите все возможные значения величины $\operatorname{rk}(A-B)$, где $A, B \in \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathbb{R}), \operatorname{rk} A = 3$ и все элементы матрицы B равны 1. Ответ обоснуйте.

Решение:

Оценка.
Вспомним, что $\operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B \leqslant \operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$ (см. задачу 7 в варианте 2022-2023). Пусть $C = -B$, тогда очевидно, что $\operatorname{rk} C = 1$. Значит,

$$2 \leqslant \operatorname{rk}(A-B) = \operatorname{rk}(A+C) \leqslant 4$$

Пример.
1. $\operatorname{rk}(A-B) = 2$. Рассмотрим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Видно, что $\operatorname{rk}(A-B) = 2$.

2. $\operatorname{rk}(A-B) = 3$. Рассмотрим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A = 3.$$

Тогда

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk}(A-B) = 3$$

Смысл в том, что в изначальной матрице третий и четвёртый столбцы равны $A^{(1)} - A^{(2)} + A^{(3)}$. Поэтому, если мы вычитаем столбец из единичек из каждого столбца, то линейная зависимость остаётся.

3. $\mathrm{rk}(A - B) = 4$. Рассмотрим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rk}(A - B) = 4$$

Ответ:

$\{2, 3, 4\}$

Задание 8

Квадратная матрица A порядка 62 имеет блочный вид $\begin{pmatrix} P & Q & R \\ S & 0 & 0 \\ T & 0 & U \end{pmatrix}$, в котором блоки Q, S, U — квадранты порядков 13, 31, 18 соответственно. Известно, что определители блоков Q, S, U равны q, s, u соответственно. Чему равен определитель матрицы A?

Решение:

Идея схожа с идеей доказательства леммы о том, что если в матрице есть строка с одним ненулевым элементом, то её определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение. Там мы «выталкивали» (почти как в сортировке пузырьком) эту строку наверх, а потом столбец влево. Тут сделаем так же.
Сделаем следующие перестановки столбцов:

$$32 \leftrightarrow 31, 31 \leftrightarrow 30, 30 \leftrightarrow 29, ..., 2 \leftrightarrow 1$$

Так мы «вытолкнем» первый столбец матрицы Q на первое место в матрице A, сделав 31 перестановку, получим блочную матрицу вида

$$A' = \begin{pmatrix} Q^{(1)} & P & Q' & R \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & U \end{pmatrix}$$

Продолжим перестановки столбцов:

$$33 \leftrightarrow 32, 32 \leftrightarrow 31, ..., 3 \leftrightarrow 2$$

Так мы «вытолкнем» второй столбец матрицы Q на второе место матрицы A, сделав 31 перестановку. Продолжим так до тех пор, пока все столбцы матрицы Q не окажутся в начале матрицы A. Так как каждый раз мы делаем 31 перестановку, то определитель исходной матрицы умножится на $(-1)^{13 \cdot 31} = -1$. Получим матрицу

$$A'' = \begin{pmatrix} Q & P & R \\ 0 & S & 0 \\ 0 & T & U \end{pmatrix}$$

Это матрица с углом нулей. Значит, её определитель равен

$$\det Q \cdot \det \begin{pmatrix} S & 0 \\ T & U \end{pmatrix}$$

Вторая матрица — тоже матрица с углом нулей. Значит, её определитель равен $\det S \cdot \det U$. Итого,

$$\det A'' = \det Q \cdot \det S \cdot \det U = qsu$$

Но $\det A = -\det A''$, значит, $\det A = -qsu$.

Ответ:

$-qsu$