Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 1

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) наборы $(2,1,4)$ и $(1,1,3)$ являются решениями системы $Ax = 0$;
(2) система $Ay = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ является совместной?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(2-\sqrt{3}i)z^3 = -\sqrt{2} - 3\sqrt{6}i$ и выберите среди них те, у которых мнимая часть максимальна.

3. Выясните, принадлежит ли функция $\sin^2 x$ линейной оболочке функций $\sin x$, $2\cos x$, $\cos 2x$ в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

4. Известно, что векторы v_1, v_2, v_3, v_4 некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. Определите все значения параметра a, при которых векторы

$$av_1 - v_2 - 2v_4,\ 3v_1 + 3v_2 + 2v_3,\ -2v_1 + 5v_2 + v_3 + 7v_4$$

также линейно независимы.

5. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\mathrm{tr}(YX^T) = 0$, где $Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

6. Существует ли фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 & = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 & = 0, \end{cases}$$

включающая в себя вектор $(0,1,2,0,2)$? Ответ обоснуйте.

7. Найдите все возможные значения величины $\mathrm{rk}(A-B)$, где A, B — матрицы размера 5×5, $\mathrm{rk}(A) = 3$ и все элементы матрицы B равны 1. Ответ обоснуйте.

8. Квадратная матрица A порядка 62 имеет блочный вид $\begin{pmatrix} P & Q & R \\ S & 0 & 0 \\ T & 0 & U \end{pmatrix}$, в котором блоки Q, S, U квадратны порядков $13, 31, 18$ соответственно. Известно, что определители блоков Q, S, U равны q, s, u соответственно. Чему равен определитель матрицы A? Ответ обоснуйте.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 2

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) наборы $(2,1,1)$ и $(1,2,5)$ являются решениями системы $Ax = 0$;
(2) система $Ay = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ является совместной?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(\sqrt{3} - 2i)z^3 = -\sqrt{2} + 3\sqrt{6}i$ и выберите среди них те, у которых мнимая часть минимальна.

3. Выясните, принадлежит ли функция $\cos^2 x$ линейной оболочке функций $2\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$ в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

4. Известно, что векторы v_1, v_2, v_3, v_4 некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. Определите все значения параметра a, при которых векторы

$$av_1 + v_2 + 2v_4,\ 2v_1 - v_2 - v_3 + v_4,\ -3v_1 + 3v_2 + 2v_3$$

также линейно независимы.

5. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\mathrm{tr}(X^T Y) = 0$, где $Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

6. Существует ли фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_5 &= 0, \end{cases}$$

включающая в себя вектор $(0,1,0,2,1)$? Ответ обоснуйте.

7. Найдите все возможные значения величины $\mathrm{rk}(A+B)$, где A, B — матрицы размера 5×5, $\mathrm{rk}(A) = 3$ и все элементы матрицы B равны 1. Ответ обоснуйте.

8. Квадратная матрица A порядка 64 имеет блочный вид $\begin{pmatrix} P & 0 & Q \\ 0 & 0 & R \\ S & T & U \end{pmatrix}$, в котором блоки P, R, T квадратны порядков $26, 21, 17$ соответственно. Известно, что определители блоков P, R, T равны p, r, t соответственно. Чему равен определитель матрицы A? Ответ обоснуйте.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 3

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) наборы $(2,1,5)$ и $(1,1,3)$ являются решениями системы $Ax = 0$;
(2) система $Ay = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ является совместной?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(2+\sqrt{3}i)z^3 = 3\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ и выберите среди них те, у которых мнимая часть максимальна.

3. Выясните, принадлежит ли функция $\sin^2 x$ линейной оболочке функций $\sin x$, $2\cos x$, $\sin 2x$ в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

4. Известно, что векторы v_1, v_2, v_3, v_4 некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. Определите все значения параметра a, при которых векторы

$$av_1 - v_2 + 2v_4,\ -2v_1 + 5v_2 + v_3 - 7v_4,\ 3v_1 + 3v_2 + 2v_3$$

также линейно независимы.

5. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\mathrm{tr}(YX^T) = 0$, где $Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

6. Существует ли фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 &= 0, \end{cases}$$

включающая в себя вектор $(0,1,0,2,2)$? Ответ обоснуйте.

7. Найдите все возможные значения величины $\mathrm{rk}(A-B)$, где A, B — матрицы размера 5×5, $\mathrm{rk}(A) = 4$ и все элементы матрицы B равны 1. Ответ обоснуйте.

8. Квадратная матрица A порядка 66 имеет блочный вид $\begin{pmatrix} P & Q & R \\ S & 0 & 0 \\ T & 0 & U \end{pmatrix}$, в котором блоки Q, S, U квадратны порядков $11, 23, 32$ соответственно. Известно, что определители блоков Q, S, U равны q, s, u соответственно. Чему равен определитель матрицы A? Ответ обоснуйте.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 4

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) наборы $(2,7,1)$ и $(1,4,1)$ являются решениями системы $Ax = 0$;
(2) система $Ay = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ является совместной?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(\sqrt{3}+2i)z^3 = -3\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ и выберите среди них те, у которых мнимая часть минимальна.

3. Выясните, принадлежит ли функция $\cos^2 x$ линейной оболочке функций $2\sin x$, $\cos x$, $\cos 2x$ в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

4. Известно, что векторы v_1, v_2, v_3, v_4 некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. Определите все значения параметра a, при которых векторы

$$av_1 + v_2 + 2v_4,\ 3v_1 - 3v_2 + 2v_3,\ 2v_1 - v_2 + v_3 + v_4$$

также линейно независимы.

5. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\mathrm{tr}(X^T Y) = 0$, где $Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

6. Существует ли фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 0, \end{cases}$$

включающая в себя вектор $(0,1,2,1,0)$? Ответ обоснуйте.

7. Найдите все возможные значения величины $\mathrm{rk}(A+B)$, где A, B — матрицы размера 5×5, $\mathrm{rk}(A) = 4$ и все элементы матрицы B равны 1. Ответ обоснуйте.

8. Квадратная матрица A порядка 68 имеет блочный вид $\begin{pmatrix} P & 0 & Q \\ 0 & 0 & R \\ S & T & U \end{pmatrix}$, в котором блоки P, R, T квадратны порядков $22, 15, 31$ соответственно. Известно, что определители блоков P, R, T равны p, r, t соответственно. Чему равен определитель матрицы A? Ответ обоснуйте.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ