Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto Av$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}^4$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}^3$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ — пространство многочленов с действительными коэффициентами от переменной x степени не выше 2. Пусть β — билинейная форма на V, имеющая в базисе $(1 - x^2,\ x^2,\ x + 2x^2)$ матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Рассмотрим линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на V, такие что $\alpha_1(f) = \beta(1, f)$, $\alpha_2(f) = \beta(x, f)$, $\alpha_3(f) = \beta(x^2, f)$ для всех $f \in V$. Найдите базис пространства V, для которого $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Даны две квадратичные формы

$$Q_1(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3,\ \ Q_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3)^2.$$

Определите нормальный вид квадратичной формы $Q_1 + aQ_2$ в зависимости от значения параметра a.

4. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ даны два подпространства $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ и $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, где $v_1 = (2, -1, 2, -1)$, $v_2 = (3, -3, 1, 1)$, $w_1 = (1, 2, -1, 2)$, $w_2 = (1, -3, 3, -1)$. Найдите вектор $v \in \mathbb{R}^4$, для которого $\mathrm{pr}_U v = (9, -12, -1, 8)$ и $\mathrm{ort}_W v = (1, -8, -7, 4)$.

5. В пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, снабжённом структурой евклидова пространства относительно некоторого скалярного произведения, объём параллелепипеда, натянутого на векторы $2 - x + 3x^2,\ 3 + x + x^2,\ 1 + 3x - 3x^2$, равен 4. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $1 + x + x^2,\ 3 - 2x + 3x^2,\ -1 + 2x - 2x^2$.

6. Прямая $l \subset \mathbb{R}^3$ проходит через точку $P = (2, 0, 1)$, пересекает прямую
$l_1 = \{4x - 3z = 1,\ x + y = -2\}$ и перпендикулярна прямой
$l_2 = \{x + 2y - 3z = 5,\ y - z = 2\}$. Найдите расстояние между прямыми l и l_2.

Контрольная работа 2

Вариант 2

1. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto Av$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}^4$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}^3$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ — пространство многочленов с действительными коэффициентами от переменной x степени не выше 2. Пусть β — билинейная форма на V, имеющая в базисе $(x - x^2,\ x^2,\ 1 + 2x^2)$ матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на V, такие что $\alpha_1(f) = \beta(1, f)$, $\alpha_2(f) = \beta(x, f)$, $\alpha_3(f) = \beta(x^2, f)$ для всех $f \in V$. Найдите базис пространства V, для которого $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Даны две квадратичные формы

$$Q_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3,\ Q_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3)^2.$$

Определите нормальный вид квадратичной формы $Q_1 + aQ_2$ в зависимости от значения параметра a.

4. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ даны два подпространства $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ и $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, где $v_1 = (2, -1, 2, -1)$, $v_2 = (3, -3, 1, 1)$, $w_1 = (2, -1, 1, -2)$, $w_2 = (-1, 3, 1, 3)$. Найдите вектор $v \in \mathbb{R}^4$, для которого $\mathrm{pr}_U v = (2, -7, -6, 9)$ и $\mathrm{ort}_W v = (12, -1, -9, 8)$.

5. В пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, снабжённом структурой евклидова пространства относительно некоторого скалярного произведения, объём параллелепипеда, натянутого на векторы $1 + x + x^2,\ 3 - x - 3x^2,\ -1 + 2x + 3x^2$, равен 6. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $1 + 2x + 2x^2,\ -1 - 3x + x^2,\ 2 + 3x + 3x^2$.

6. Прямая $l \subset \mathbb{R}^3$ проходит через точку $P = (2, 0, 1)$, пересекает прямую $l_1 = \{3x + 2z = 2,\ x + y = 8\}$ и перпендикулярна прямой $l_2 = \{x - 3y + 2z = 4,\ x - y = -1\}$. Найдите расстояние между прямыми l и l_2.

Контрольная работа 2

Вариант 3

1. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto Av$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}^4$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}^3$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ — пространство многочленов с действительными коэффициентами от переменной x степени не выше 2. Пусть β — билинейная форма на V, имеющая в базисе $(1 + x^2,\ x^2, x - 2x^2)$ матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на V, такие что $\alpha_1(f) = \beta(1, f)$, $\alpha_2(f) = \beta(x, f)$, $\alpha_3(f) = \beta(x^2, f)$ для всех $f \in V$. Найдите базис пространства V, для которого $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Даны две квадратичные формы

$$Q_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3,\ Q_2(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + x_3)^2.$$

Определите нормальный вид квадратичной формы $Q_1 + aQ_2$ в зависимости от значения параметра a.

4. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ даны два подпространства $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ и $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, где $v_1 = (1, 2, -1, 2)$, $v_2 = (1, -3, 3, -1)$, $W_1 = (2, -1, 1, -2)$, $w_2 = (-1, 3, 1, 3)$. Найдите вектор $v \in \mathbb{R}^4$, для которого $\mathrm{pr}_U v = (1, 12, -9, 8)$ и $\mathrm{ort}_W v = (7, 4, -8, 1)$.

5. В пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, снабжённом структурой евклидова пространства относительно некоторого скалярного произведения, объём параллелепипеда, натянутого на векторы $2+3x+3x^2,\ -2-x+x^2,\ 3+x-2x^2$, равен 6. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $2 - x - 3x^2,\ 1 + 2x + 3x^2,\ 3 + x + x^2$.

6. Прямая $l \subset \mathbb{R}^3$ проходит через точку $P = (1, 2, 0)$, пересекает прямую $l_1 = \{4x + 5z = -2,\ x + y = -3\}$ и перпендикулярна прямой $l_2 = \{x + 3y - 4z = 4,\ y - z = 1\}$. Найдите расстояние между прямыми l и l_2.

Контрольная работа 2

Вариант 4

1. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto Av$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис $\mathbb{e}$ пространства $\mathbb{R}^4$ и базис $\mathbb{f}$ пространства $\mathbb{R}^3$, в которых φ имеет диагональный вид с единицами и нулями на диагонали, и выпишите этот вид.

2. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ — пространство многочленов с действительными коэффициентами от переменной x степени не выше 2. Пусть β — билинейная форма на V, имеющая в базисе $(x + 2x^2,\ x^2,\ 1 - x^2)$ матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Рассмотрим линейные функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на V, такие что $\alpha_1(f) = \beta(1, f)$, $\alpha_2(f) = \beta(x, f)$, $\alpha_3(f) = \beta(x^2, f)$ для всех $f \in V$. Найдите базис пространства V, для которого $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является двойственным базисом пространства V^*.

3. Даны две квадратичные формы

$$Q_1(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3,\ Q_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2.$$

Определите нормальный вид квадратичной формы $Q_1 + aQ_2$ в зависимости от значения параметра a.

4. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ даны два подпространства $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ и $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, где $v_1 = (2, 1, 1, -2)$, $v_2 = (3, -1, 3, -1)$, $w_1 = (2, -1, 2, -1)$, $w_2 = (3, -3, 1, 1)$. Найдите вектор $v \in \mathbb{R}^4$, для которого $\mathrm{pr}_U v = (9, -8, 12, 1)$ и $\mathrm{ort}_W v = (-2, -1, 2, 1)$.

5. В пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, снабжённом структурой евклидова пространства относительно некоторого скалярного произведения, объём параллелепипеда, натянутого на векторы $3 + x + x^2,\ 1 + 3x - 3x^2,\ 2 - x + 3x^2$, равен 3. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $1 - x + x^2,\ 1 + x + x^2,\ -2 + 3x - 3x^2$.

6. Прямая $l \subset \mathbb{R}^3$ проходит через точку $P = (1, 2, 0)$, пересекает прямую $l_1 = \{4x + 3z = 1,\ x - y = 2\}$ и перпендикулярна прямой $l_2 = \{x + 2y - 3z = 3,\ y - z = 1\}$. Найдите расстояние между прямыми l и l_2.