Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 1

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) система $Ax = (2\ {-1}\ 0)^T$ несовместна;
(2) пространство решений системы $A^T y = 0$ порождается вектором $(0, 1, 3)^T$?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(2 - \sqrt{3}i)z^4 = -2 - 6\sqrt{3}i$ и выберите среди них те, у которых действительная часть минимальна.

3. Выясните, принадлежит ли функция $\cos^2 x$ линейной оболочке функций $\sin x$, $2\cos x$, $\sin 2x$ в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

4. Известно, что векторы v_1, v_2, v_3, v_4 некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. Определите все значения параметра a, при которых векторы

$$av_1 - 2v_2 + v_3 - v_4,\ v_1 + v_3 + v_4,\ 2v_1 - v_2 + v_3$$

также линейно независимы.

5. Пусть V — векторное пространство всех многочленов степени не выше 4 с действительными коэффициентами, и пусть $U \subseteq V$ — подмножество, состоящее из всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условиям $2f(1) = f'(-1)$, $f''(-\frac{1}{2}) = 0$. Докажите, что U является подпространством в V; найдите базис и размерность этого подпространства.

6. В пространстве $\mathbb{R}^5$ заданы векторы

$$v_1 = (1, 0, 0, 1, 1), \quad v_2 = (0, 1, 0, 2, 2), \quad v_3 = (2, -1, 0, 0, 0), \quad v_4 = (1, 0, 1, -1, 0), \quad v_5 = (0, 1, -2, 2, 0).$$

Выясните, можно ли среди этих векторов выбрать подмножество, являющееся фундаментальной системой решений для однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

7. Найдите все значения параметра a, при которых матрица $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ представима в виде суммы двух матриц ранга 1, и для каждого найденного значения укажите такое представление.

8. Найдите все матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, для которых присоединённая матрица $\widehat{A}$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 2

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) система $A^T x = (2\ {-3}\ 0)^T$ несовместна;
(2) пространство решений системы $Ay = 0$ порождается вектором $(1,0,2)^T$?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(\sqrt{3} - 2i)z^4 = -2 + 6\sqrt{3}i$ и выберите среди них те, у которых действительная часть максимальна.

3. Выясните, принадлежит ли функция $\sin^2 x$ линейной оболочке функций $2\sin x$, $\cos x$, $\cos 2x$ в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

4. Известно, что векторы v_1, v_2, v_3, v_4 некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. Определите все значения параметра a, при которых векторы

$$av_1 + v_2 + v_3 + 2v_4,\ 3v_1 + v_2 - v_3,\ v_1 - v_3 - v_4$$

также линейно независимы.

5. Пусть V — векторное пространство всех многочленов степени не выше 4 с действительными коэффициентами, и пусть $U \subseteq V$ — подмножество, состоящее из всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условиям $2f(-1) = 3f'(1)$, $f''(-\frac{1}{2}) = 0$. Докажите, что U является подпространством в V; найдите базис и размерность этого подпространства.

6. В пространстве $\mathbb{R}^5$ заданы векторы

$$v_1 = (1,1,0,0,0), \quad v_2 = (0,1,0,1,2), \quad v_3 = (1,0,2,1,0), \quad v_4 = (-1,0,0,1,2), \quad v_5 = (0,1,2,1,0).$$

Выясните, можно ли среди этих векторов выбрать подмножество, являющееся фундаментальной системой решений для однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

7. Найдите все значения параметра a, при которых матрица $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ представима в виде суммы двух матриц ранга 1, и для каждого найденного значения укажите такое представление.

8. Найдите все матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, для которых присоединённая матрица $\widehat{A}$ равна $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 3

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) система $Ax = (1\ -2\ 0)^T$ несовместна;
(2) пространство решений системы $A^T y = 0$ порождается вектором $(1, 0, 3)^T$?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(2+\sqrt{3}i)z^4 = 6\sqrt{3} + 2i$ и выберите среди них те, у которых действительная часть минимальна.

3. Выясните, принадлежит ли функция $\sin 2x$ линейной оболочке функций $2\sin x$, $\cos x$, $\cos^2 x$ в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

4. Известно, что векторы v_1, v_2, v_3, v_4 некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. Определите все значения параметра a, при которых векторы

$$av_1 - 2v_2 - v_3 + v_4,\ v_1 + v_3 + v_4,\ -v_1 + v_2 + v_3$$

также линейно независимы.

5. Пусть V — векторное пространство всех многочленов степени не выше 4 с действительными коэффициентами, и пусть $U \subseteq V$ — подмножество, состоящее из всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условиям $2f(1) = f'(-1)$, $f''(\frac{1}{2}) = 0$. Докажите, что U является подпространством в V; найдите базис и размерность этого подпространства.

6. В пространстве $\mathbb{R}^5$ заданы векторы

$$v_1 = (1, 0, 0, -1, -1), \quad v_2 = (0, 1, 0, 2, 2), \quad v_3 = (2, 1, 0, 0, 0), \quad v_4 = (1, 0, 1, 0, 1), \quad v_5 = (0, 1, 2, 0, 2).$$

Выясните, можно ли среди этих векторов выбрать подмножество, являющееся фундаментальной системой решений для однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 &= 0. \end{cases}$$

7. Найдите все значения параметра a, при которых матрица $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ представима в виде суммы двух матриц ранга 1, и для каждого найденного значения укажите такое представление.

8. Найдите все матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, для которых присоединённая матрица $\widehat{A}$ равна $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 4

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) система $A^T x = (3\ -2\ 0)^T$ несовместна;
(2) пространство решений системы $Ay = 0$ порождается вектором $(0, 1, 2)^T$?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(\sqrt{3} + 2i)z^4 = -6\sqrt{3} + 2i$ и выберите среди них те, у которых действительная часть максимальна.

3. Выясните, принадлежит ли функция $\cos 2x$ линейной оболочке функций $\sin x$, $2\cos x$, $\sin^2 x$ в пространстве всех действительнозначных функций на $\mathbb{R}$.

4. Известно, что векторы v_1, v_2, v_3, v_4 некоторого векторного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы. Определите все значения параметра a, при которых векторы

$$av_1 + v_2 + 2v_3 + v_4,\ 3v_1 + v_2 - v_4,\ v_1 - v_3 - v_4$$

также линейно независимы.

5. Пусть V — векторное пространство всех многочленов степени не выше 4 с действительными коэффициентами, и пусть $U \subseteq V$ — подмножество, состоящее из всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условиям $2f(-1) = 3f'(1)$, $f''(\frac{1}{2}) = 0$. Докажите, что U является подпространством в V; найдите базис и размерность этого подпространства.

6. В пространстве $\mathbb{R}^5$ заданы векторы

$$v_1 = (1, -1, 0, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0, 2, 1), \quad v_3 = (2, 0, -2, 0, 1), \quad v_4 = (1, 0, 0, 2, 1), \quad v_5 = (0, -1, 2, 0, -1).$$

Выясните, можно ли среди этих векторов выбрать подмножество, являющееся фундаментальной системой решений для однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_5 &= 0. \end{cases}$$

7. Найдите все значения параметра a, при которых матрица $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ представима в виде суммы двух матриц ранга 1, и для каждого найденного значения укажите такое представление.

8. Найдите все матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, для которых присоединённая матрица $\widehat{A}$ равна $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 5 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ