Линейная алгебра и геометрия

КР 1. 2023/2024 учебный год. Вариант 1

Морфей

Группа БЭАД242

Задание 1

Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} ax_3 + bx_4 = 6 \\ 3x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$$

Найдите все значения параметра a и b, при которых эта система имеет хотя бы три решения, и выпишите общее решение системы для найденных значений параметров.

Решение:

Запишем соответствующую этой СЛУ расширенную матрицу, идя от последнего уравнения системы к первому, и приведём её к СВ методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 2 & 6 & -1 \\ -2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 7 & -3 \\ -2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)+2\times(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & 7 & -11 & 15 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-2\times(3)}$$

$$\xrightarrow{(2)-2\times(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & 17 & -16 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-3\times(2),(1)-2\times(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 15 & -27 & 29 \\ 0 & 1 & -9 & 17 & -16 \\ 0 & 0 & 26 & -52 & 52 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{26}\times(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 15 & -27 & 29 \\ 0 & 1 & -9 & 17 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a & b & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-a\times(3)}$$

$$\xrightarrow{(4)-a\times(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 15 & -27 & 29 \\ 0 & 1 & -9 & 17 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+2a & 6-2a \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-15\times(3),(2)+9\times(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+2a & 6-2a \end{array}\right)$$

Случай 1.

$b + 2a = 0 \Rightarrow b = -2a$.

Подслучай 1.1.

$6 - 2a = 0 \Rightarrow a = 3, b = -6$. Тогда матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

У этой системы бесконечное число решений. Выпишем её общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_4 \\ x_2 = 2 + x_4 \\ x_3 = 2 + 2x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Подслучай 1.2.
$6 - 2a \neq 0 \Rightarrow a \neq 3$. Тогда последняя строчка матрицы приводит к противоречию $0 \neq 0$. В этом случае решений нет.

Случай 2.
$b + 2a \neq 0 \Rightarrow b \neq -2a$.

Подслучай 2.1.
$6 - 2a = 0 \Rightarrow a = 3$. Тогда матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+6 & 0 \end{array}\right)$$

Тогда $x_4 = 0 \Rightarrow$ у системы единственное решение.

Подслучай 2.2.
$6 - 2a \neq 0 \Rightarrow$ все переменные главные и решение единственное.

Ответ:

$a = 3, b = -6$. Общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_4 \\ x_2 = 2 + x_4 \\ x_3 = 2 + 2x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Задание 2

Решите уравнение $AX - 2X^TA^T - B + 2B^T = 0$ относительно неизвестной матрицы X, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

Пусть $AX = Y$. Тогда $Y^T = X^TA^T$ и уравнение равносильно $Y - 2Y^T = B - 2B^T$.
Заметим, что $Y \in M_3$. Действительно, если это не так, то операция $Y - Y^T$ не будет возможной. Преобразуем уравнение:

$$Y - 2Y^T = B - 2B^T \Leftrightarrow Y - B = 2(Y^T - B^T)$$

Пусть $Z = Y - B$. Тогда $Z^T = Y^T - B^T$. Значит, имеем уравнение $Z = 2Z^T$.
$Y \in M_3, B \in M_3 \Rightarrow Z \in M_3$. Тогда Z представляется в виде

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow 2Z^T = \begin{pmatrix} 2z_{11} & 2z_{21} & 2z_{31} \\ 2z_{12} & 2z_{22} & 2z_{32} \\ 2z_{13} & 2z_{23} & 2z_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_{11} & 2z_{21} & 2z_{31} \\ 2z_{12} & 2z_{22} & 2z_{32} \\ 2z_{13} & 2z_{23} & 2z_{33} \end{pmatrix}$$

Отсюда сразу видно, что $z_{11} = z_{22} = z_{33} = 0$. Рассмотрим z_{ij}, где $i \neq j$. Тогда

$$\begin{cases} z_{ij} = 2z_{ji} \\ z_{ji} = 2z_{ij} \end{cases} \Rightarrow z_{ji} = 4z_{ji} \Rightarrow z_{ji} = z_{ij} = 0.$$

Таким образом,

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$Y - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = B + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пришли к задаче $AX = B$. Решим её, приведя методом Гаусса следующую расширенную матрицу к УСВ:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-2\times(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(\frac{1}{5})\times(2),(3)-(2)}$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{5})\times(2),(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1+3\times(2)}$$

$$\xrightarrow{1+3\times(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Значит,

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+x_1 & -3+x_2 & x_3 \\ 1-3x_1 & 1-3x_2 & -3x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}, \text{где } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_1 & -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x_2 & \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x_1 & \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x_2 & -\frac{3}{2}x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \text{где } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Задание 3

Существует ли такая нечётная перестановка $\sigma \in S_7$, что перестановка σ^{72} является решением уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (14)(25736) = (14)(25)(57)(73)(36)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (14632)(57) = (14)(46)(63)(32)(57)$$

Имеем

$$(14)(25736)X = (14632)(57) \Rightarrow X \neq \mathrm{id}$$

Разложим σ в произведение независимых циклов. Пусть максимальная длина в этом разложении равна k.
Если $k \leqslant 4$, то 72 делится на длину всех циклов в разложении σ. Значит, $\sigma^{72} = \mathrm{id}$ и не является решением.
Если $k = 5$, то имеем в разложении один цикл длины $\tau = 5$ и не более одной транспозиции τ'. Тогда $\sigma^{72} = \tau^{72} \cdot (\tau')^{72} = \tau^{70} \cdot \tau^2 \cdot \mathrm{id} = \tau^2$ — тоже цикл длины 5, т.к. 5 — нечётное число.
Если $k = 6$, то имеем в разложении только один цикл длины 6. Но $6 \mid 72 \Rightarrow \sigma^{72} = \mathrm{id}$, не подходит.
Если $k = 7$, то имеем в разложении ровно один цикл $\tau = \sigma$ длины 7. Т.к. 7 — нечётное число, то $\sigma^{72} = \tau^{72} = \tau^{70} \cdot \tau^2 = \tau^2$ — тоже цикл длины 7.

Случай 1.

Если $\sigma^{72} = \tau^2 = \varphi$ — цикл длины 7. Тогда пусть $\varphi = (1, a_1, a_2, a_3, ...a_6)$. Имеем уравнение

$$(14)(25736)(1, a_1, a_2, a_3, ...a_6) = (14632)(57)$$

Заметим, что $\mathrm{LHS}(1) = \alpha(\varphi(1)) = \alpha(a_1) \neq 4$, т.к. $\alpha(1) = 4$, а $a_1 \neq 1$, но $\beta(1) = 4$. Значит, этот случай не реализуется.

Случай 2.

Если $\sigma^{72} = \tau^2 = \varphi$ — цикл длины 5. Как мы выяснили в случае 1, в цилке φ не может содержаться 1.

Подслучай 2.1.

Пусть в цикле φ есть 2, то есть $\varphi = (2, a_1, a_2, ..., a_4)$. Имеем уравнение

$$(14)(25736)(2, a_1, a_2, a_3, a_4) = (14632)(57)$$

1. $1 = \beta(2) = \mathrm{LHS}(2) = \alpha(\varphi(2)) = \alpha(a_1)$. Но $1 = \alpha(4) \Rightarrow a_1 = 4$. Тогда $\varphi = (2, 4, a_2, a_3, a_4)$.
2. $6 = \beta(4) = \mathrm{LHS}(4) = \alpha(\varphi(4)) = \alpha(a_2)$. Но $6 = \alpha(2) \Rightarrow a_2 = 3$. Тогда $\varphi = (2, 4, 3, a_3, a_4)$
3. $2 = \beta(3) = \mathrm{LHS}(3) = \alpha(\varphi(3)) = \alpha(a_3)$, но $2 = \alpha(6) \Rightarrow a_3 = 6 \Rightarrow \varphi = (2, 4, 3, 6, a_4)$.
4. $3 = \beta(6) = \mathrm{LHS}(6) = \alpha(\varphi(6)) = \alpha(a_4)$, но $3 = \alpha(7) \Rightarrow a_4 = 7 \Rightarrow \varphi = (24367)$.
Таким образом, $\varphi = (24367)$

Проверка.

$\alpha \circ \varphi = (14)(25736)(24367) = (14632)(57) = \beta$. Значит, φ является корнем уравнения. Найдём $\sigma : \sigma^2 = \varphi$. Она равна $\sigma = (26473)$ (вспомните, как возводить в квадрат цикл).

Ответ:

Существует $\sigma = (26473)$.

Задание 4

Найдите коэффициент при x^4 в выражении определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x & -2 & x \\ x & 2 & 0 & 4 & 5 \\ x & 1 & x & 5 & 2 \\ 3 & x & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 & x & -2 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x & -2 & x \\ x & 2 & 0 & 4 & 5 \\ x & 1 & x & 5 & 2 \\ 3 & x & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 & x & -2 \end{vmatrix} \overset{(3)-(2)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & x & -2 & x \\ x & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & x & 1 & -3 \\ 3 & x & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 & x & -2 \end{vmatrix} \overset{(1)-(3)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 & x+3 \\ x & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & x & 1 & -3 \\ 3 & x & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 & x & -2 \end{vmatrix}$$

В оставшейся матрице ровно 5 элементов содержат x в первой степени. Заметим, что все эти элементы стоят в разных столбцах. Значит, мы не можем выбрать из них ровно 4 (т.к. выбор каких-то четырёх вынуждает взять и пятый). Если мы возьмём из них не больше трёх, то получим максимум x^3. Значит, мы должны выбрать их все. Получим $(x+3)\cdot x^4 = x^5 + 3x^4$. Посчитаем знак этой перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1542) = (15)(54)(42) - \text{нечётная перестановка}$$

Значит, искомый коэффициент равен -3.

Ответ:

-3

Задание 5

Число $a \in \mathbb{R}$ таково, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & a & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Увеличивается на 3, если прибвать единицу ко всем элементам её четвёртого столбца. Найдите это число a.

Решение:

1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & a & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & a & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Имеем следующее:

$$3 + \det(A) = 3 + \begin{vmatrix} 0 & -2 & a & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \det(A') = \begin{vmatrix} 0 & -2 & a & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & a & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 & a & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Значит,

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & a & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

3. Найдём определитель из левой части. Разложим его по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & a & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\det(A_1) - 2\det(A_2)$$

3.1. Найдём $\det(A_1)$. Разложим его по последней строке:

$$\det(A_1) = 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & a \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(a+1) + (2-3a) = 4 - a.$$

3.2. Найдём $\det(A_2)$. Ращложим его по первому столбцу:

$$\det(A_2) = (-2)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -2(2+1)+3(a-2) = 3a-12.$$

4. Таким образом,

$$3 = -3(4-a)-2(3a-12) = -12+3a-6a+24 = 12-3a \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

Ответ:

-5

Задание 6

Про матрицу $A \in M_4(\mathbb{R})$ известно, что она обратима и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Можно ли в третьем столбце матрицы A изменить один элемент таким образом, чтобы полученная матрица стала необратимой?

Решение:

Имеем $A^{-1}A = E$. Решим это матричное уравнение методом Гаусса. Имеем следующую расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)+(1),(1)-2\times(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -4 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}$$

$$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2\times(3),(2)+4\times(3)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3),(3)\leftrightarrow(4)}$$

$$\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3),(3)\leftrightarrow(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\times(4),(1)+3\times(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Слева имеем единичную матрицу, значит

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица необратима тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю. Значит, нам нужно поменять какой-то элемент в третьем столбце так, чтобы определитель был равен нулю. Заметим, что во второй строчке единственный ненулевой элемент стоит как раз в третьем столбце. Рассмотрим следующую:

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Она отличается от матрицы A ровно одним элементом в третьем столбце, при этом её определитель равен нулю, значит, она необратима.

Ответ:

Да, можно.