Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 1

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) система $Ax = (2\ {-3}\ 0)^T$ несовместна;
(2) пространство решений системы $A^T y = 0$ имеет размерность 1?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(\sqrt{3} - 4i)z^3 = 2 + 10\sqrt{3}i$, у которых один из аргументов принадлежит интервалу $(\frac{7\pi}{3}, 3\pi)$.

3. Выясните, являются ли функции $2\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \sin 2x$ линейно независимыми в пространстве всех действительнозначных функций на множестве $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $XA = AX$, где $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

5. В пространстве $\mathbb{R}^5$ даны векторы

$$v_1 = (1, 2, 3, 1, 3), \quad v_2 = (3, 7, 5, 1, 4), \quad v_3 = (-1, -3, 1, 1, 2), \quad v_4 = (2, 5, 2, 4, 8).$$

Существует ли базис пространства $\mathbb{R}^5$, в который входят не менее трёх из этих векторов? Если существует, то предъявите его.

6. Существует ли однородная система линейных уравнений, для которой векторы $v_1 = (0, 1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 0, 0, -2)$, $v_3 = (1, 2, -2, 0, 0)$ образуют фундаментальную систему решений? Если существует, то укажите её.

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите все возможные значения величины $\operatorname{rk}(A + B)$, где B — матрица того же размера и $\operatorname{rk} B = 1$. Ответ обоснуйте.

8. Найдите наименьшее положительное значение, которое может принимать определитель целочисленной матрицы 4×4, содержащей строку $(96, 84, 75, 40)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 2

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) система $A^T x = (1\ {-2}\ 0)^T$ несовместна;
(2) пространство решений системы $Ay = 0$ имеет размерность 1?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(\sqrt{3} + 4i)z^3 = 10\sqrt{3} + 2i$, у которых один из аргументов принадлежит интервалу $(3\pi, \frac{11\pi}{3})$.

3. Выясните, являются ли функции $\sin x$, $2\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sin 2x$ линейно независимыми в пространстве всех действительнозначных функций на множестве $(0, \pi)$.

4. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $XA = AX$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

5. В пространстве $\mathbb{R}^5$ даны векторы

$$v_1 = (1, 2, 3, 1, 3), \quad v_2 = (3, 7, 5, -2, 4), \quad v_3 = (1, 1, 7, 6, 8), \quad v_4 = (3, 6, 9, 2, 2).$$

Существует ли базис пространства $\mathbb{R}^5$, в который входят не менее трёх из этих векторов? Если существует, то предъявите его.

6. Существует ли однородная система линейных уравнений, для которой векторы $v_1 = (0, 1, 2, 0, -2)$, $v_2 = (1, -1, 0, 2, 0)$, $v_3 = (1, -1, 2, 0, 0)$ образуют фундаментальную систему решений? Если существует, то укажите её.

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите все возможные значения величины $\mathrm{rk}(A + B)$, где B — матрица того же размера и $\mathrm{rk}\, B = 1$. Ответ обоснуйте.

8. Найдите наименьшее положительное значение, которое может принимать определитель целочисленной матрицы 4×4, содержащей строку $(96, 80, 66, 45)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 3

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) система $Ax = (3\ {-2}\ 0)^T$ несовместна;
(2) пространство решений системы $A^T y = 0$ имеет размерность 1?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(2\sqrt{3} - i)z^3 = 10 - 6\sqrt{3}i$, у которых один из аргументов принадлежит интервалу $(\frac{7\pi}{3}, 3\pi)$.

3. Выясните, являются ли функции $\sin x$, $2\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\cos 2x$ линейно независимыми в пространстве всех действительнозначных функций на множестве $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $XA = AX$, где $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

5. В пространстве $\mathbb{R}^5$ даны векторы

$$v_1 = (1, 3, 2, 2, 3), \quad v_2 = (3, 8, 4, 5, 9), \quad v_3 = (1, 5, 6, 4, 3), \quad v_4 = (2, 5, 2, 2, -2).$$

Существует ли базис пространства $\mathbb{R}^5$, в который входят не менее трёх из этих векторов? Если существует, то предъявите его.

6. Существует ли однородная система линейных уравнений, для которой векторы $v_1 = (0, 1, 1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 2, 0, 2)$, $v_3 = (1, 2, 2, 0, 0)$ образуют фундаментальную систему решений? Если существует, то укажите её.

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите все возможные значения величины $\mathrm{rk}(A+B)$, где B — матрица того же размера и $\mathrm{rk}\, B = 1$. Ответ обоснуйте.

8. Найдите наименьшее положительное значение, которое может принимать определитель целочисленной матрицы 4×4, содержащей строку $(96, 75, 54, 40)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 1

Вариант 4

1. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, обладающая одновременно следующими свойствами:
(1) система $A^T x = (2\ {-1}\ 0)^T$ несовместна;
(2) пространство решений системы $Ay = 0$ имеет размерность 1?
Если существует, то предъявите её.

2. Найдите все комплексные решения уравнения $(2\sqrt{3} + i)z^3 = -6\sqrt{3} + 10i$, у которых один из аргументов принадлежит интервалу $(3\pi, \frac{11\pi}{3})$.

3. Выясните, являются ли функции $2\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\cos 2x$ линейно независимыми в пространстве всех действительнозначных функций на множестве $(0, \pi)$.

4. Докажите, что множество всех матриц $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $XA = AX$, где $A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$; найдите базис и размерность этого подпространства.

5. В пространстве $\mathbb{R}^5$ даны векторы

$$v_1 = (1, 2, 2, 1, 3), \quad v_2 = (3, 7, 4, 2, 5), \quad v_3 = (1, 1, 4, 2, 7), \quad v_4 = (3, 5, 8, 5, -8).$$

Существует ли базис пространства $\mathbb{R}^5$, в который входят не менее трёх из этих векторов? Если существует, то предъявите его.

6. Существует ли однородная система линейных уравнений, для которой векторы $v_1 = (0, -2, 1, 0, 2)$, $v_2 = (1, -2, 1, 0, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1, 2, 0)$ образуют фундаментальную систему решений? Если существует, то укажите её.

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите все возможные значения величины $\mathrm{rk}(A+B)$, где B — матрица того же размера и $\mathrm{rk}\, B = 1$. Ответ обоснуйте.

8. Найдите наименьшее положительное значение, которое может принимать определитель целочисленной матрицы 4×4, содержащей строку $(96, 70, 54, 45)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ