Микроэкономика 1

Лекция 8

Морфий

Группа БЭАД242

Лекция 8. Минимизация расходов.

UMP — задача максимизации полезности при бюджетном ограничении — при заданных ценах и доходе выбрать набор(ы), где достигается наибольшая полезность.

EMP — задача минимизации расходов — при заданных ценах выбирается набор(ы), которые позволяют достичь желаемого заданного уровня полезности с наименьшими расходами:

$$\begin{cases} p \cdot x \to \min\limits_{x \geqslant 0} \\ u(x) \geqslant \tilde{u} \end{cases}$$

<u>Предпосылки:</u> будем считать, что предпочтения монотонны и представимы непрерывной функцией полезности $u(x)$ на $\mathbb{X}$, $p \gg 0$; заданный уровень полезности в EMP $u > u\big(\vec{0}\big)$.

<u>Замечание.</u> Полученные далее результаты справедливы при замене требования монотонности на более слабое требование локальной ненасыщаемости предпочтений (LNS) — в любой открытой окрестности любого набора из $\mathbb{X}$ найдётся лучший набор.

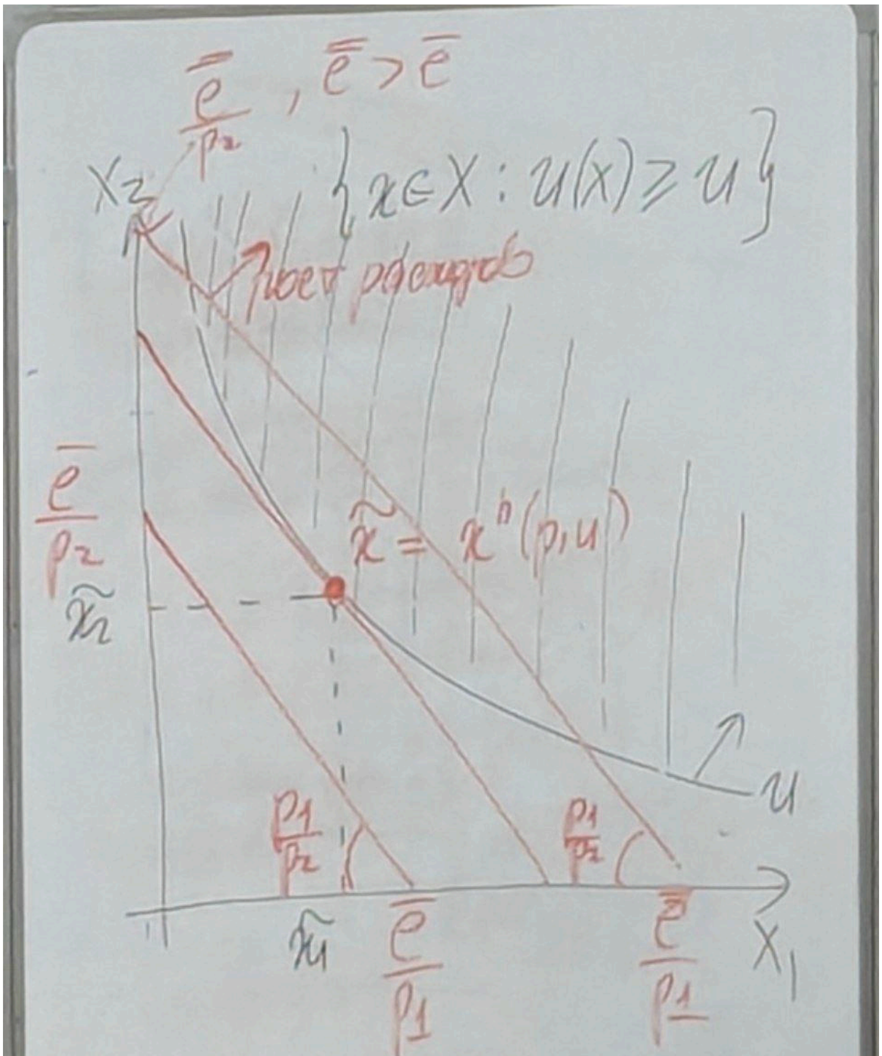
Решением задачи EMP является $x^h(p, u)$ — хиксианский или компенсированный спрос.

Если решение единственно, то $\tilde{x} = x^h(p, u)$ — функция хиксианского спроса.

Подставив $x^h(p, u)$ в целевую функцию EMP, получим функцию расходов: $e(p, u) = p \cdot x^h(p, u)$.

Графическое прочтение EMP при $N = 2$

- ограничение: $u(x) \geqslant 0$
- целевая функция: $p_1x_1 + p_2x_2 = \overline{e}$. Линии уровня этой функции — прямые с наклоном $-\frac{p_1}{p_2}$, чем дальше от начала координат, тем расход больше.



На рисунке:

- $\tilde{x} > 0$
- $u(\tilde{x}) = u$ на кривой безразличия
- $\text{MRS}_{12}(\tilde{x}) = \frac{p_1}{p_2}$ — касание кривой безразличия и линии постоянных расходов.

Замечание: маршаллианский спрос — наблюдаемый выбор, хиксианский спрос — абстракция.

Формальное решение EMP

$$L = px + \lambda(u - u(x))$$

FOC (необходимым, причём будет и достаточным, если предпочтения выпуклы) для внутреннего решения по x_i:

$$\forall i \;\; p_i - \lambda \frac{\partial u(\tilde{x})}{\partial x_i} = 0$$

Получаем, что

$$p_i = \lambda \frac{\partial u(\tilde{x})}{\partial x_i} \Rightarrow \forall i \neq j \;\; \frac{p_i}{p_j} = \frac{\partial u(\tilde{x})/\partial x_i}{\partial u(\tilde{x})/\partial x_j}$$

$p \to$ линии уровня $px = \overline{e}$,
$2p \to$ линии уровня $2px = \overline{\overline{e}} \Rightarrow px = \frac{\overline{\overline{e}}}{2}$.

Свойства хиксианского спроса.

Пусть $p \gg 0$, $u(x)$ — непрерывна, предпочтения монотонны, $u > u(0)$. Тогда хиксианский спрос $x^h(p, u)$ обладает следующими свойствами:

1. Однородность степени 0 по ценам, то есть

$$x^h(tp, u) = x^h(p, u) \;\; \forall t > 0$$

Изменение всех цен в $t > 0$ раз не меняет ограничение задачи, только приводит к пропорциональному изменению расходов $\Rightarrow$ такое изменение не повлияет на решение задачи.

2. В решении задачи ограничение выполняется как равенство, то есть $u\big(x^h(p, u)\big) = u$ (решения лежат на кривой безразличия u).

Действительно, пусть существует решение EMP x' такое, что $u(x') > u$. Рассмотрим $x'' = \alpha x', \alpha \in (0, 1)$. Тогда

- $px'' < px'$
- В силу непрерывности функции полезности $\exists \alpha \in (0, 1) : u(x'') > u$.

Это противоречит тому, что x' — решение.

3. Если предпочтения выпуклы, то $x^h(p, u)$ — выпуклое множество; если предпочтения строго выпуклы, то решение EMP единственно, т.е. $x^h(p, u)$ — функция хиксианского спроса.

4. Если предпочтения строго выпуклы (тогда $x^h(p, u)$ — функция), выполнен закон компенсированного спроса:

$$(p'' - p')\big(x^h(p'', u) - x^h(p', u)\big) \leqslant 0$$

Замечаение:

- закон спроса как противонаправленность изменения цены и объёма оптребления для хиксианского спроса, а для маршаллианского спроса — нет.
- закон компенсированного спроса— обоснование неположительности эффекта замещения по Хиксу:

$$\frac{\Delta x_i^{\text{HSE}}}{\Delta p_i} \leqslant 0$$

Доказательство.

Пусть $x' = x^h(p', u)$, $x'' = x^h(p'', u)$ — решения EMP. Нужно доказать, что

$$(p'' - p')(x'' - x') \leqslant 0$$

Тогда
1. $p'x' \leqslant p'x \;\; \forall x \in \mathbb{X} : u(x) \geqslant u$. Так как $u(x'') = u$, то $p'x' \leqslant p'x''$ (1)
2. Аналогично $p''x'' \leqslant p''x'$ (1).
3. Сложим (1) и (2):

$$p'x' + p''x'' \leqslant p'x'' + p''x'$$

$$p'x' - p''x' + p''x'' - p'x'' \leqslant 0$$

$$x'(p' - p'') + x''(p'' - p') \leqslant 0$$

$$(p'' - p')(x'' - x') \leqslant 0$$

■

Пример.

Опять Кобб-Дугласс: $u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta, \;\; \alpha, \beta > 0$
- найти хиксианский спрос
- найти функцию расходов

Задача минимизации расходов:

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \min\limits_{x_1, x_2 \geqslant 0} \\ x_1^\alpha x_2^\beta = u \end{cases}$$

$$L = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda\Big(u - x_1^\alpha x_2^\beta\Big)$$

FOC для внутреннего решения (необходимо и достаточно):
по $x_1 : p_1 - \lambda \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta = 0$,
по $x_2 : p_2 - \lambda \beta x_1^\alpha x_2^{b-1} = 0$

$$\begin{cases} p_1 = \lambda \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta \\ p_2 = \lambda \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} \end{cases}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{p_1}{p_2}\frac{\beta}{\alpha} x_1$$

$$u = x_1^\alpha x_2^\beta = x_1^\alpha \left(\frac{p_1 \beta}{p_2 \alpha}\right)^\beta x_1^\beta = u$$

$$x_1^{\alpha+\beta} = u \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^\beta$$

$$x_1 = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = x_1^h(p, u) - \text{хиксианский спрос на первое благо}$$

$$x_2^h(p, u) = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Функция расходов.

$$p_1 x_1^h(p, u) = p_1 u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$p_2 x_2^h(p, u) = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$e(p,u) = p_1 x_1^h(p,u) + p_2 x_2^h(p,u) = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right]$$

1. Как $e(p,u)$з авиcит от u? Чем больше u, тем выше расходы.
2. Как $e(p,u)$ зависит от p_1, p_2? Возрастает по p_1 и по p_2.
3. $e(p,u)$ строго вогнута по p.

Свойства функции расходов.

Пусть $u(x)$— непрерывна, предпочтения монотонны, $p \gg 0, u > u(0)$, тогда функция расходов $e(p,u)$ обладает следующими свойствами:
1. Однородность первой степени по ценам, т. е. $e(tp,u) = te(p,u) \quad \forall t > 0$,
2. Возрастает по уровеню полезности, то есть $u'' > u' \to e(p,u'') > e(p,u')$.
3. $e(p,u)$ не убывает по p_i, то есть $e(p'',u) \geqslant e(p',u)$, где $p_i'' > p_i', p_j'' = p_j', i \neq j$. То есть, если возрастает цена хотя бы одного блага, то расходы не могут уменьшиться.

Утверждение.

4. $e(p,u)$ вогнута по p.

Доказательство:
Пусть $x' = x^h(p',u), x'' = x^h(p'',u) \Rightarrow e(p',u) = p'x', e(p'',u) = p''x''$. Тогда нужно доказать, что

$$e(\alpha p' + (1-\alpha)p'', u) \geqslant \alpha e(p',u) + (1-\alpha)e(p'',u), \quad \alpha \in [0,1]$$

Рассмотрим $\overline{p} = \alpha p' + (1-\alpha)p'', \overline{x} = x^h(\overline{p},u)$. Тогда $e(\overline{p},u) = \overline{p}\cdot\overline{x}$. Тогда
- $p'x' \leqslant p'\overline{x}$
- $p''x'' \leqslant p''\overline{x}$

Рассмотрим сумму $\alpha(1) + (1-\alpha)(2)$:

$$\alpha p'x' + (1-\alpha)p''x'' \leqslant \alpha p'\overline{x} + (1-\alpha)p''\overline{x} = \overline{x}(\alpha p' + (1-\alpha)p'') = \overline{p}\cdot\overline{x} = e(\overline{p},u)$$

Откуда следует требуемое. ■

Утверждение.

5. (Лемма Шепарда) Пусть $e(p,u)$ дифференцируема, пусть предпочтения строго выпуклы; решение EMP внутреннее, то есть $x^h(p,u) \gg 0$. Тогда:

$$\boxed{x_i^h(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}}$$

Идеи доказательства:
1) через FOC: Надо рассмотреть

$$\frac{\partial e}{\partial p_i} = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = \frac{\partial\big(p\cdot x^h(p,u)\big)}{\partial p_i} = \ldots$$

и продифференцировать как производную произведения, помня о дифференциальной характеристике внутреннего решения.

2) через теорему об огибающей