# Микроэкономика 1

Лекция 13 17.04.2025

Морфий

Группа БЭАД242

# Экономика обмена.

Вопросы эоконмики:

- 1. Эффективное распределение ресурсов в экономике в целом? Парето-оптимальность; централизованное принятие решений
- 2. Результат поведения индивидуальных экономических агентов: распределение и цены? Равновесие по Вальрасу
- 3. Как соотносится равновесие и оптимальность?

#### Описание экономики.

Пусть N=2 благ, M=2 потребителей: A и B. Предпочтения потребителей пресдтавимы непрерывными функциями полезности.

 $x_i^k$  — объём потребления блага i потребителем k.

Полезность потребителя  $u^{k}(x^{k})$ , где  $x^{k} = (x_{1}^{k}, x_{2}^{k})$ .

Нет фиксированного дохода, но есть первоначальный запас благ  $\omega^k = (\omega_1^k, \omega_2^k) \geqslant 0$ .

Пусть  $\overline{\omega}_i = \omega_i^A + \omega_i^B$  — совокупный запас блага i в экономике.

## Допустимые распределеения.

#### Определение.

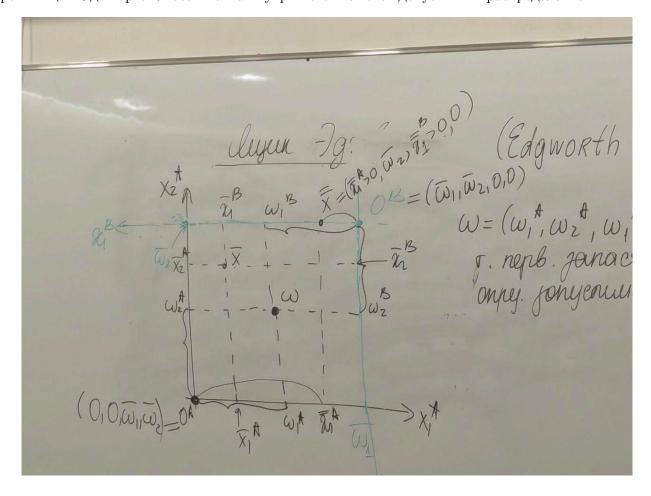
Распределение — набор, специфицирующий объём потребления каждого блага каждым потребителем:  $x = (x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$ .

### Определение.

Допустимым распределением назоывается такое распределение, что  $x_i^A + x_i^B = \overline{\omega}_i$ 

# Ящик Эджворта.

Построим ящик Эджворта. Любая точка внутри него является допустимым распределением.



### Определение.

Внутреннее распределение — такое распределение, в котором у каждого потребителя положительное количество каждого блага, лежит внутри ящика Эджворта.

### Определение.

Граничное распределение — такое распределение, в котором хотя бы у одного потребителя отсутствует хотя бы одно благо; лежит на стенке ящика Эджворта.

# Парето-оптимальность (ПО) распределения

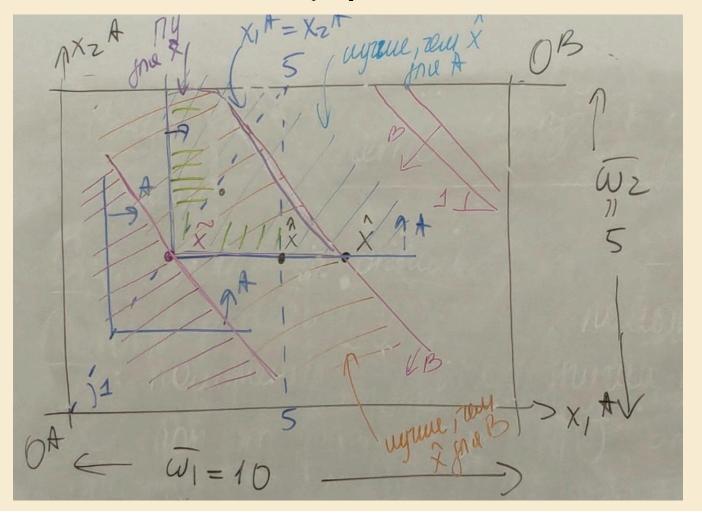
#### Определение.

Парето-оптимальное распределение — это такое допустимое распределение, что нельзя улучшить положение одного потребителя, не ухудшая положение другого (других), то есть допустимое распределение  $\overline{x}$  парето-оптимально, если не существует другого допустимого распределения  $\hat{x}$  такого, что,  $\forall k \ u^k(\hat{x}^k) \geqslant u^k(\overline{x}^k)$  и  $\exists m: u^m(\hat{x}^m) > u^m(\overline{x}^m)$ .

Если такое  $\hat{x}$  находится, то его называют парето-улучшением для распределения  $\bar{x}$ .

### Пример.

$$\omega^A=(1,2), \omega^B=(9,3)$$
  $\overline{\omega}_1=10, \overline{\omega}_2=5.$   $u^A=\min\{x_1^A,x_2^A\}, u^B=x_1^B+x_2^B.$  Кривые безразличия у  $B\colon x_2^B=u-x_1^B$  Кривые безразличия у  $A\colon$  уголки с точкой в  $x_1^A=x_2^A$ 



 $\hat{x}$  — не оптимальное распределение, в сиреневой трапеции — все парето-улучшения  $\hat{x}.$ 

 $\tilde{x}$ — ПО распределение. Более того, любая точка на луче  $x_2^A=x_1^A$ — ПО распределение.

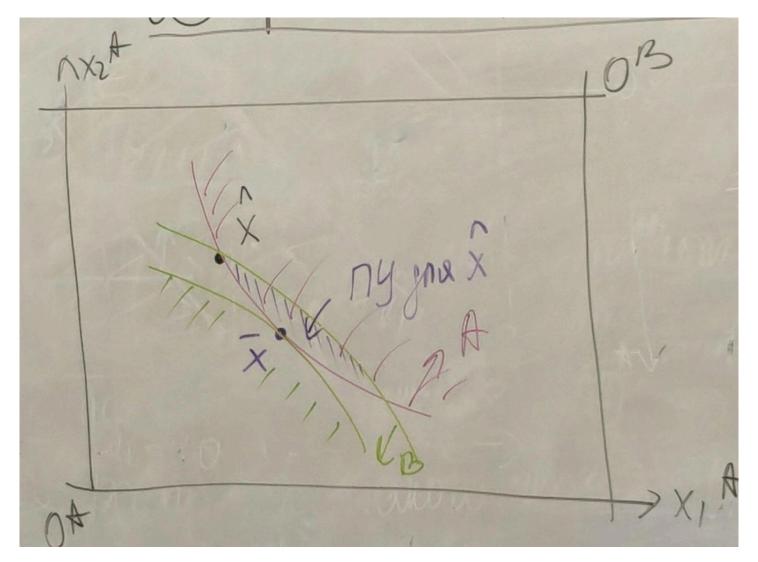
### Утверждение.

Если предпочтения обоих потребителей сторго монотонны, то точки  $O_A$  и  $O_B$  —  $\Pi O$ .

# Дифференциальная характеристика внутренних ПО.

Видим:  $\overline{x}$  — внутреннее допустимое распределение, точка касания кривых безразличия:

$$MRS_{12}^A(\overline{x}^A) = MRS_{12}^B(\overline{x}^B)$$



## 1. Необходимое условие внутреннего ПО.

### Утверждение.

Пусть предпочтения потребителей строго монотонны и представимы дифференцируемой функцией полезности. Пусть  $\overline{x}$  — внутреннее ПО. Тогда это точка касания кривых безразличия:

$$\mathrm{MRS}_{12}^A\big(\overline{x}^A\big) = \mathrm{MRS}_{12}^B\big(\overline{x}^B\big)$$

#### Доказательство:

Пусть  $\overline{x}$  — внутреннее ПО, но  $MRS_{12}^A(\overline{x}^A) \neq MRS_{12}^B(\overline{x}^B)$ .

Не умаляя общности,  $MRS_{12}^A(\overline{x}^A) > MRS_{12}^B(\overline{x}^B)$ .

Идея: увеличить у A первое благо и уменьшить второго.

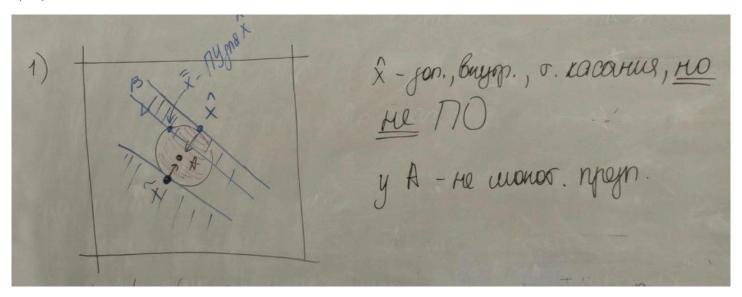
Рассмотрим допустимое перераспределение благ такое, что потребитель A получает 1 малую единицу первого блага, в обмен готов отдать  $\mathrm{MRS}_{12}^A(\overline{x}^A)$  малых единиц второго блага, а если отдаст меньше, например,  $\frac{1}{2}(\mathrm{MRS}_{12}^A + \mathrm{MRS}_{12}^B) < \mathrm{MRS}_{12}^A$ , тогда положение A в силу строгой монотонности предпочтений улучшится.

В готов отдать 1 малую единицу первого блага в обмен на  $MRS_{12}^B$  малых единиц второго. Если в обмен за одну малую единицу первого блага B получает  $\frac{1}{2}(MRS_{12}^A + MRS_{12}^B)$ , его положение в силу строгой монотонности предпочтений улучшится.

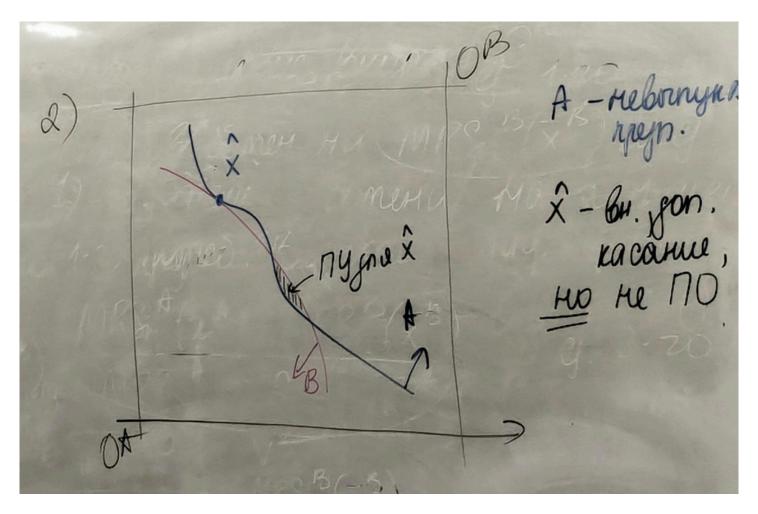
Этот набор — ПУ  $\overline{x} \Rightarrow \overline{x}$  — не ПО. Противоречие.

# 2. Достаточное условие внутреннего ПО.

### 1) Нужна монотонность:



2) Нужна выпуклость:



### Утверждение.

Пусть предпочтения потребителей строго монотонны, выпуклы и представимы непрерывной функцией полезности. Тогда условие равенства  ${
m MRS}_{12}$  является не только необходимым, но и достаточным условием внутреннего  $\Pi O$ .

## 3. Задача на поиск ПО.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u^A \left( x_1^A, x_2^A \right) \rightarrow \max_{\substack{x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B \geqslant 0 \\ u^B \left( x_1^B, x_2^B \right) \geqslant \overline{u}^B} \\ x_1^A + x_1^B = \overline{\omega}_1 \\ x_2^A + x_2^B = \overline{\omega}_2 \end{cases} \tag{*}$$

### Утверждение.

Пусть предпочтения потребителя строго монотонны и представимы непрерывной функцией полезности. Пусть  $u^k(0)=0$ . Тогда любое решение задачи (\*) является ПО и наоборот, любое ПО распределение является решение м задачи (\*) при некотором значении  $\overline{u}^B$ .

Пусть функции полезности дифференцируемы. Тогда можем получить дифференциальную характеристику решений задачи. Лагранжиан:

$$L = u^A \big( x_1^A + x_2^A \big) + \lambda \big( \overline{u}^B - u^B \big( x_1^B, X_2^B \big) \big) + \mu_1 \big( \overline{\omega}_1 - x_1^A - x_1^B \big) + \mu_2 \big( \overline{\omega}_2 - x_2^A - x_2^B \big)$$

FOC для внутреннего решения: по  $x_1^A$ 

$$\frac{\partial u^A}{\partial x_1^A} - \mu_1 = 0$$

по  $x_2^A$ :

$$\frac{\partial u^A}{\partial x_2^A} - \mu_2 = 0$$

по  $x_1^B$ :

$$-\lambda \frac{\partial u^B}{\partial x_1^B} - \mu_1 = 0$$

по  $x_2^B$ :

$$-\lambda \frac{\partial u^B}{\partial x_2^B} - \mu_2 = 0$$

Итого:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\partial u^A/\partial x_1^A}{\partial u^A/\partial x_2^A} = \frac{\partial u^B/\partial x_1^B}{\partial u^B/\partial x_2^B}$$

Получаем

$$\operatorname{MRS}_{12}^A\!\left(x_1^A,x_2^A\right) = \operatorname{MRS}_{12}^B\!\left(x_1^B,x_2^B\right)$$

Это условие будет необходимым и достаточным, если целевая функция вогнута (квазивогнута), то есть предпочтения выпуклы.

# 4. Граничные ПО

### Пример.

 $u^A=2x_1^A+x_2^A, u^B=x_1^B+x_2^B$ . Тогда  $\mathrm{MRS}_{12}^A=2\neq\mathrm{MRS}_{12}^B=1$ . Значит, тут не может быть внутреннего парето-оптимума.

Так как кривая безразличия A идёт круче, ожидаем  $\Pi {\rm O}$  на нижней и на правой стенке ящика.

