Микроэкономика 1

Лекция 15
28-29.04.2025

Морфий

Группа БЭАД242

Равновесие и оптимальность (продолжение)

Напоминание:

Утверждение. Первая теорема благосостояния

Пусть предпочтения потребителей монотонны, и $(\tilde{x}, \tilde{p})$ — равновесие по Вальрасу. Тогда $\tilde{x}$ — ПО.

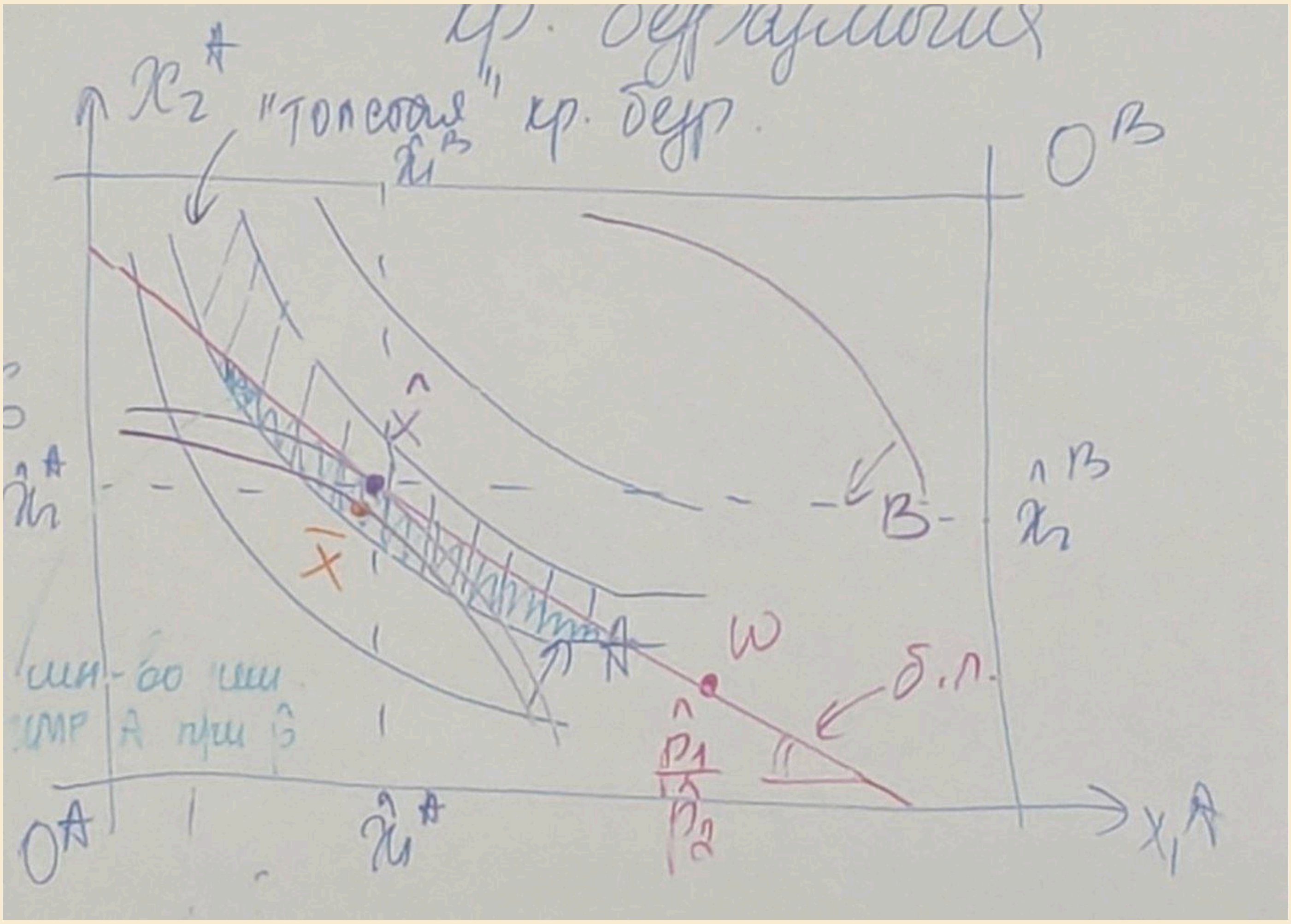
1)

Пример. Предпочтения с "толстой" кривой безразличия

Пусть:

$$u^A = \begin{cases} x_1^A x_2^A, x_1^A x_2^A < 3 \\ 3, 3 \leqslant x_1^A x_2^A \leqslant 6 \\ x_1^A x_2^A - 3, x_1^A x_2^A > 6 \end{cases}$$

Тогда у A не монотонные предпочтения. Пусть у B строго монотонные строго выпуклые предпочтения. Пусть например получится вот такая картина:



- $\hat{x}$ — равновесие по Вальрасу, но не ПО, так как есть $\overline{x}$ — пример ПУ для $\hat{x}$.

2) Если выполнены условия первой теоремы благосостояния, то равновесным распределением может быть только ПО.

3) Важны институциональные предпосылки:

- конкурентность (цены заданные)
- отсутствие экстерналий
- отсутствие асимметрии информации

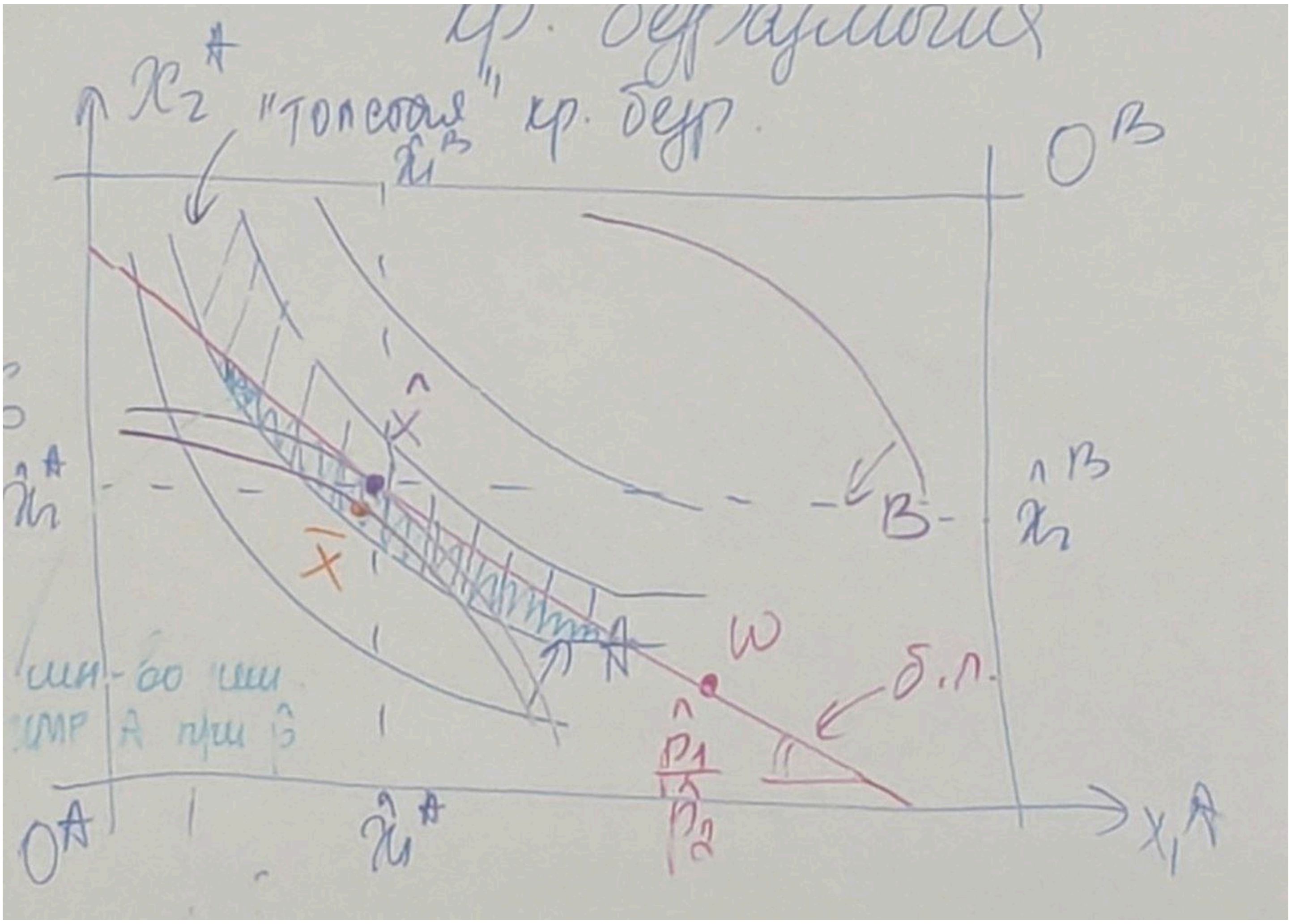
Вторая теорема благосостояния.

Идея:

Пусть предпочтения потребителей «хорошие», то есть строго выпуклые и строго монотонные. Тогда точка пересечения бюджетной линии с множеством ПО будет равновесным распределением по Вальрасу при соответствующих ценах.

Наоборот, если $\overline{x}$ — ПО, то $\overline{x}$ будет равновесным распределением при отношении цен, равному $\mathrm{MRS}_{12}^{A} = \mathrm{MRS}_{12}^{B}$.

Чтобы сдвинуть бюджетную линию в необходимую точку $\overline{x}$, если изначальная бюджетная линия не проходит через точку первоначального запаса, нужно произвести паушальную трансферту: на одного налог, на другого — субсидия в том же объёме.



Определение.

Набор $\left(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{T}\right)$ называется <u>равновесием по Вальрасу в экономике с трансфертами</u>, если:

1) $\forall k$ набор $\tilde{x}^k$ является решением UMP потребителя k :

$$\begin{cases} u^k(x^k) \to \max\limits_{x^k \geqslant 0} \\ px^k \leqslant p\omega^k + T^k \end{cases}$$

при $\overline{p}$ и $\overline{T}^K$.

2) Рынки уравновешены, то есть

$$\forall i \ \sum_k \tilde{x}_i^k = \sum_k \omega_i^k$$

3) Финансовый баланс:

$$\sum_k \tilde{T}^k = 0$$

Утверждение. Вторая теорема благосостояния

Пусть предпочтения потребителей строго монотонные, выпуклы и представимы дифференцируемыми функциями полезности.
Пусть $\overline{x}$ — внутренний ПО. Тогда найдутся такие положительные цены $\overline{p}$, при которых $\overline{x}$ реализуемо как равновесное в экономике с трансфертами, где трансфер потребителю $k : \overline{T}^k = \overline{p} \cdot \overline{x}^k - \overline{p} \cdot \omega^K$

Доказательство:
$\overline{x}$ — внутренний ПО, предпочтения строго монотонны, выпуклые, функция полезности дифференцируема.
Тогда $\text{MRS}^A_{12}(\overline{x}^A) = \text{MRS}^B_{12}(\overline{x}^B)$ и $\overline{x}^A_i + \overline{x}^B_i = \overline{\omega}_i$.
Возьмём $\dfrac{\overline{p}_1}{\overline{p}_2} = \text{MRS}^A_{12}(\overline{x}^A) = \text{MRS}^B_{12}(\overline{x}^B)$, $\overline{T}^k = \overline{p} \cdot \overline{x}^k - \overline{p} \cdot \omega^k$.
1) Рациональность потребителя $k:\ \overline{x}^k > 0$, предпочтения строго монотонны, выпуклы, значит, $\dfrac{\overline{p}_1}{\overline{p}_2} = \text{MRS}^k_{12}(\overline{x}^k)$ — необходимое и достаточное условие внутреннего решения UMP.
Бюджетное ограничение выполняется как равенство: $\overline{p} \cdot \overline{x}^k = \overline{p} \cdot \omega^k + \overline{p} \cdot \overline{x}^k - \overline{p} \cdot \omega^k = \overline{p} \cdot \omega^k - \overline{T}^k$. Выполняется.
2) Рынки уравновешены в силу допустимости ПО: $\overline{x}^A + \overline{x}^B = \overline{\omega}$
3) Финансовый баланс:

$$\overline{T}^A + \overline{T}^B = \overline{p} \cdot \left(\overline{x}^A + \overline{x}^B - \omega^A - \omega^B\right) = 0$$

■

Идея решения подобных задач приведена в доказательстве.

Теория поведения фирмы.

Описание технологии.

$$\underbrace{x}_{\text{ресурсы или факторы производства}} \xrightarrow{\text{технология фирмы}} \underbrace{y}_{\text{выпуск или объём готовой продукции}}$$

x: либо скаляр — однофакторная фирма,
либо вектор, где $x_i \geqslant 0$ — объём использования i-го фактора производства.
$y \geqslant 0$ — уровень выпуска некоторой продукции *однопродуктовой* фирмы.

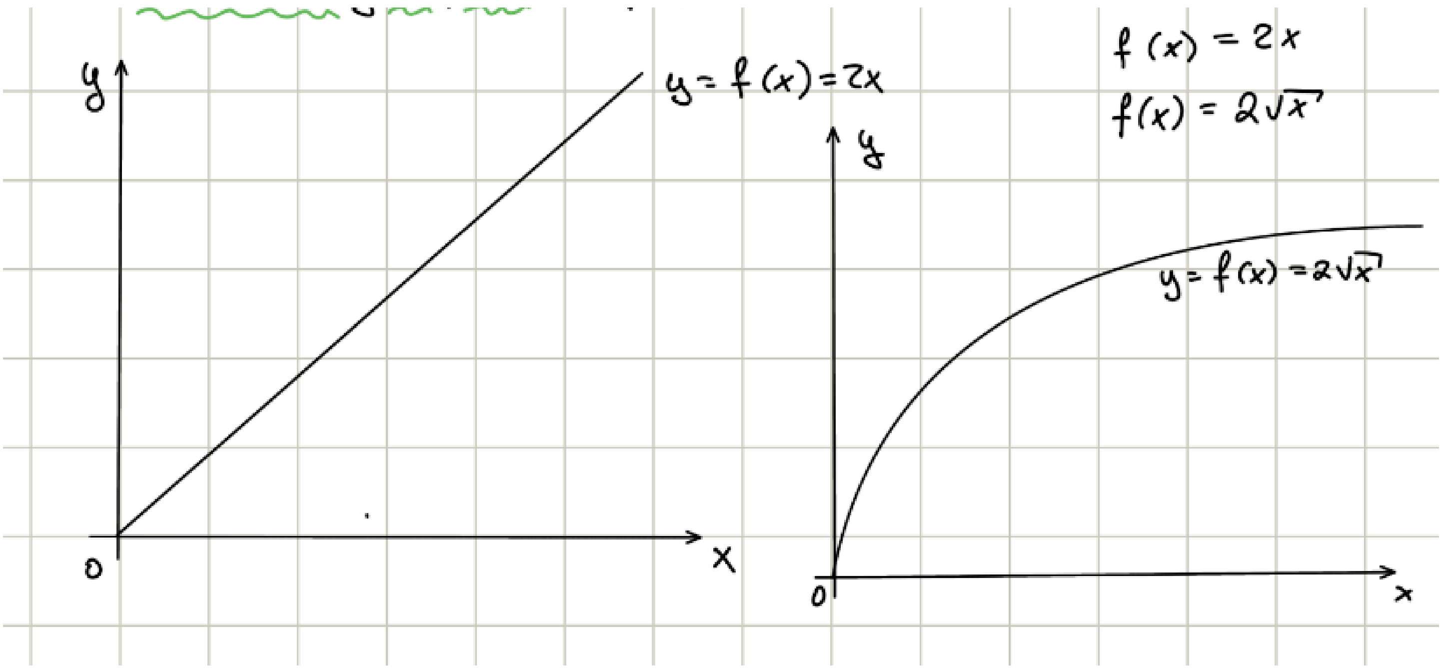
Определение.

Производственная функция $f(x)$ показывает, какой *максимальный* уровень выпуска можно произвести, используя x факторов производства, то есть $y \leqslant f(x)$.

Предпосылки односительно $f(x)$:

- возрастает (для однофакторной) по x, не убывает по x (если факторов больше 1),
- непрерывна
- $f(0) = 0$

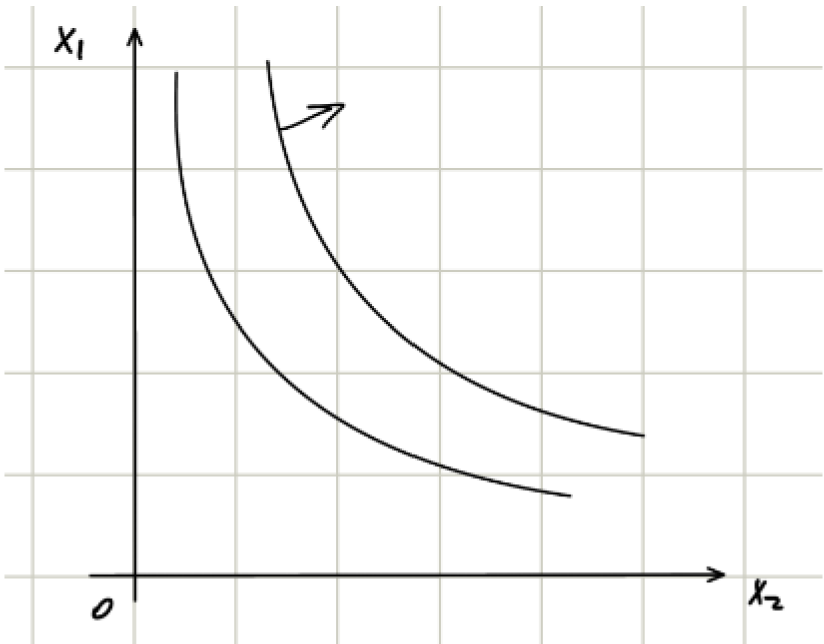
Графическая иллюстрация.
1) $N = 1$ — однофакторная фирма. Например, $f(x) = 2x, f(x) = 2\sqrt{x}$. В этом случае можно нарисовать график производственной функции в осях Oxy:



2) $N = 2$. В этом случае можно изобразить линии уровня производственной функции в осях Ox_1x_2 — изокванты.

Определение.

Изокванта — множество комбинаций факторов, которые позволяют производить один и тот же максимальный уровень выпуска.



Пример.

$f(x) = \min\{x_1, \frac{x_2}{4}\}$ (один стул — 1 сиденье и 4 ножки).
Но $f(x) = \min\{4x_1, x_2\}$ не подходит, т.к. $f(1,1) \neq \min\{4, 1\} = 1$ (одной ножки не хватит)

Можно сказать, что в запими $f(x)$ нет произвола в терминах положительного монотонного преобразования, в отличие от функции полезности.

Пример.

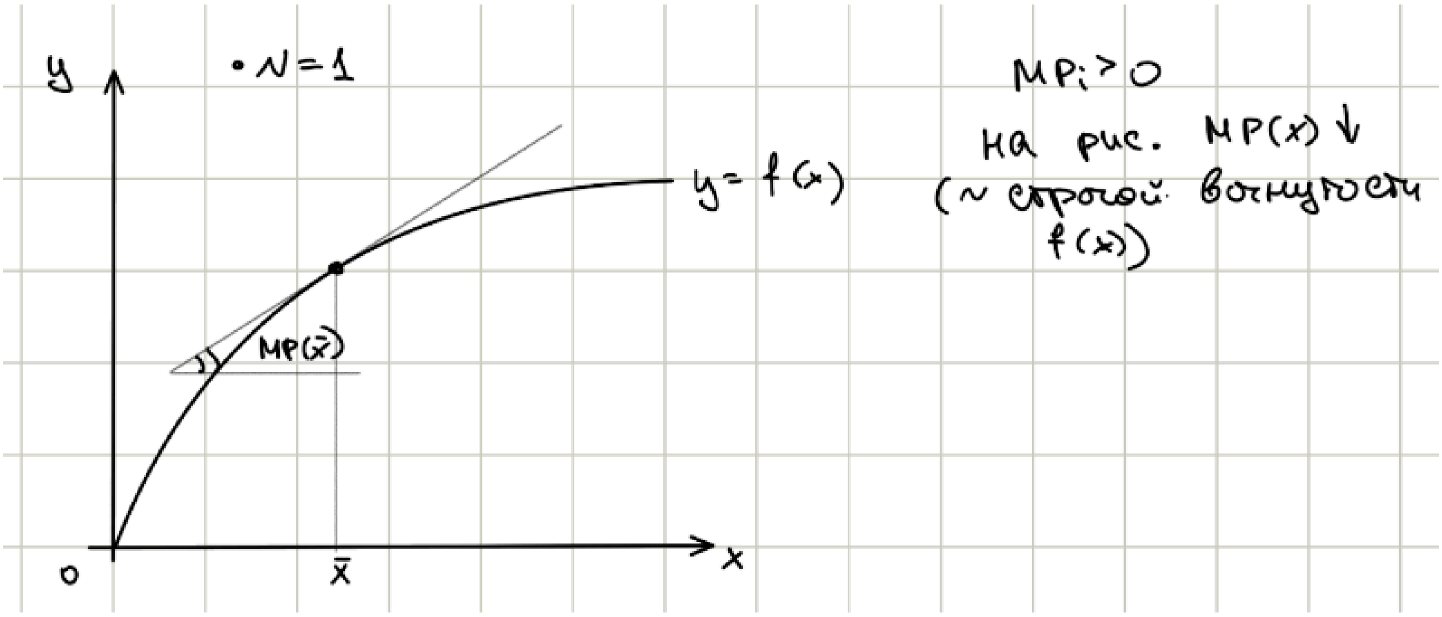
1) $f(x) = \min\left\{\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right\}$ — для производства 1 единицы готовой продукции требуется α единиц 1-го и β единиц 2-го фактора.
2) $f(x) = \alpha x_1 + \beta x_2$ — факторы взаимозаменяемы ($\frac{1}{\alpha}$ единиц 1-го фактора можно заменить на $\frac{1}{\beta}$ единиц второго)
3) $f(x) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}, \alpha, \beta > 0$ — функция Кобба-Дугласа, $A = f(1,1)$ (график на рис. выше)

Предельный и средний продукт фактора.

1) Предельный продукт фактора (MP):

$$\mathrm{MP}_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

показывает, на сколько малых единиц увеличится (снизится) выпуск при увеличении (уменьшении) количества i-го фактора на малую единицу и незименном количестве других факторов.



Пример.

$f(x) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$

$$\mathrm{MP}_1(x) = Ax_2^{\beta} \cdot \alpha \cdot x_1^{\alpha-1} > 0$$

$$\mathrm{MP}_1'(x) = Ax_2^{\beta}(\alpha-1)\alpha x_1^{\alpha-2} \quad \begin{cases} > 0 \text{ при } \alpha > 1 \\ = 0 \text{ при } \alpha = 1 \\ < 0 \text{ при } \alpha < 1 \end{cases}$$

Определение.

Средний продукт (AP — average product)

$$\mathrm{AP}_i = \frac{f(x)}{x_i}$$

AP и MP

Утверждение.

Пусть функции дифференцируемы. Тогда:
- если $\mathrm{AP}(x) \downarrow$, то $\mathrm{AP}(x) > \mathrm{MP}(X)$,
- если $\mathrm{AP}(x) \uparrow$, то $\mathrm{AP}(x) < \mathrm{MP}(x)$
- если $\mathrm{AP}(x) = const$, то $\mathrm{AP}(x) = \mathrm{MP}(X)$

Доказательство.

$$\mathrm{AP}'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{x}}{x} = \frac{\mathrm{MP}(x) - \mathrm{AP}(x)}{x}$$

Отсюда следует требуемое.

Предельная норма технологического замещения.

Определение.

MRTS_{12} (marginal rate of technological substitution) — предельная норма технологического замещения 2-го фактора 1-ым.

$$\mathrm{MRTS}_{12}(x) = \frac{\mathrm{MP}_1(x)}{\mathrm{MP}_2(x)}$$

это наклон изокванты в пространстве факторов (x_1, x_2), взятый с обратным знаком:

$$-\mathrm{MRTS}_{12}(x) = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}$$

Показывает какое количество малых единиц 2-го фактора можно заменить малой единицей 1-го фактора так, чтобы остаться на той же изокванте.

Отдача от масштаба

Определение.

Производственная функция $f(x)$ характеризуется:
- CRTS (постоянная отдача от масштаба), если

$$f(tx) = tf(x), \forall t > 0$$

- DRTS (убывающая отдача от масштаба), если

$$\forall t > 1 \;\; f(tx) < tf(x)$$

- IRTS (возрастающая отдача от масштаба), если

$$\forall t > 1 \;\; f(tx) > tf(x)$$

Пример.

КД

$$f(x) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$f(tx) = At^{\alpha+\beta} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = f(x) \cdot t^{\alpha+\beta}$$

Если $\alpha + \beta > 1$, IRTS,
Если $\alpha + \beta = 1$, CRTS,
ЕСли $\alpha + \beta < 1$, DRTS