Микроэкономика 1

Лекция 10

Морфий

Группа БЭАД242

Лекция 10. Снова про уравнение Слуцкого.

Анализ уравнения Слуцкого.

Утверждение.

Пусть предпочтения монотонны, строго выпуклы и представимы непрерывной функцией полезности $u(x)$. Пусть $x^h(p,u)$ и $x(p,m)$ — дифференцируемые функции хиксианского и маршаллианского спроса соответственно. Тогда $\forall p, m > 0$ выполнено уравнение Слуцкого в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h(p,u)}{\partial p_j} - x_j(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m}$$

При $i = j$ получаем уравнение Слуцкого по «своей» цене,
при $i \neq j$ получаем уравнение Слуцкого по «чужой» цене

Доказательство.
Рассмотрим цены $\overline{p}$ и $\overline{m}$. Пусть $\overline{u}$ — максимальный уровень полезности, достижимый при $\overline{p}, \overline{m}$, то есть $\overline{u} = \mathcal{V}(\overline{p}, \overline{m})$.
По соотношению двойственности $x_i^h(p,u) = x(p, e(p,u))$. Продифференцируем его по p_j:

$$\frac{\partial x_i^h(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p,e(p,u))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,e(p,u))}{\partial e} \cdot \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j}$$

Подставим $\overline{p}, \overline{u}$. Тогда получим по двойственности

$$e(\overline{p}, \overline{u}) = e(\overline{p}, \mathcal{V}(\overline{p}, \overline{m})) = \overline{m}$$

И из леммы Шепарда

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j} = x_j^h(\overline{p}, \overline{u}) = x_j(\overline{p}, \overline{m})$$

Подставим:

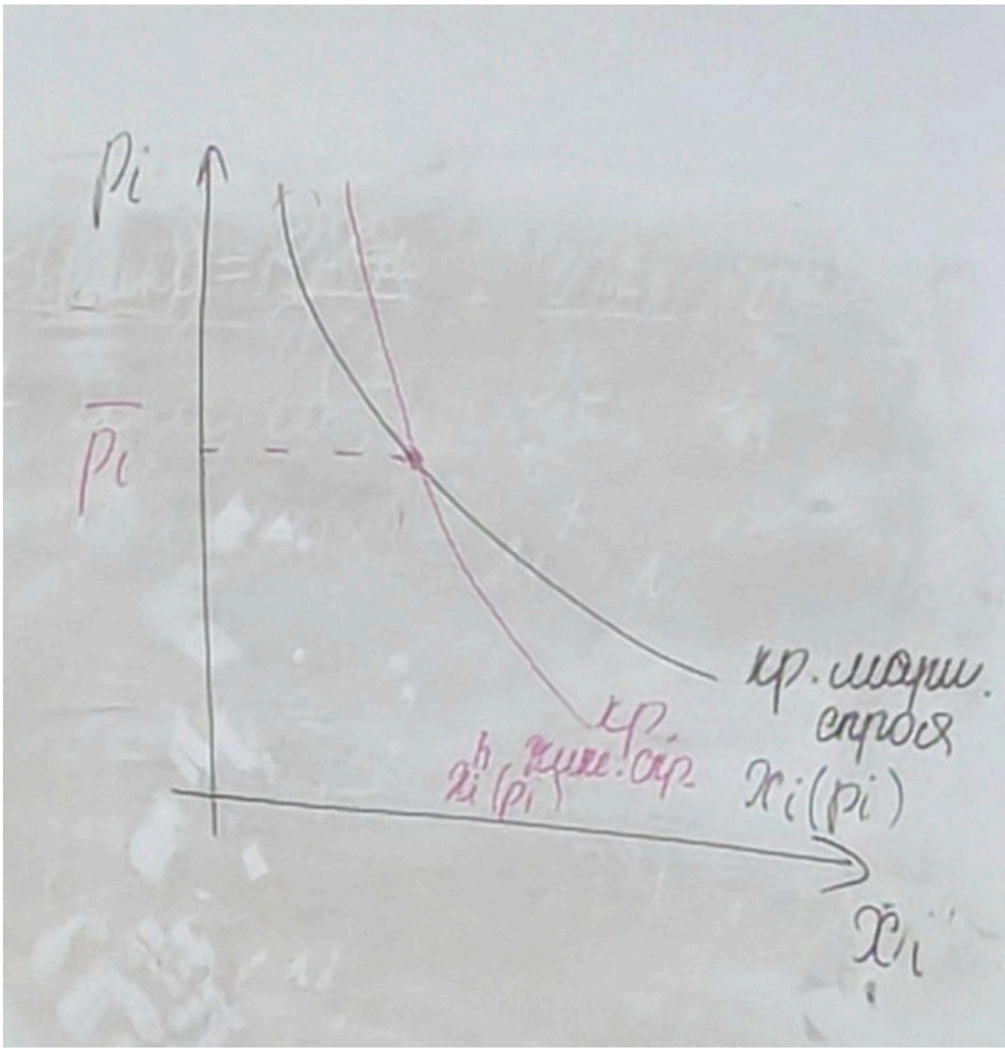
$$\frac{\partial x_i^h(\overline{p},\overline{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\overline{p},\overline{m})}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\overline{p},\overline{m})}{\partial m} \cdot x_j(\overline{p}, \overline{m})$$

Откуда следует требумое соотношение. ■

<u>Замечание</u>.
Рассмотрим уравнение Слуцкого при $i = j$.
- Для нормального блага эффект дохода отрицательный, значит,

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i} > \frac{\partial x_i}{\partial p_i}$$

то есть кривая хиксианского спроса идёт «круче»



Уравнение Слуцкого по своей цене

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_i} - x_i \frac{\partial x_i}{\partial m}\right| \cdot \frac{p_i}{x_i}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i^h} - \frac{\partial x_i}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_i} \cdot \frac{x_i \cdot p_i}{m}$$

$$\varepsilon_{p_i}^{x_i} = \varepsilon_{p_i}^{x_i^h} - \delta_i \varepsilon_m^{x_i}$$

Где $\delta_i = \frac{p_i x_i}{m}$ — доля расходов на i-ое благо в доходе.

- Инфериорное благо будет товаром Гиффена, если доминирует IE, тогда товар ГИффена можно искать среди тех благ, расходы которых составляют существенную долю в доходе, например, питание в малообеспеченной семье.
- Если $\varepsilon_{p_i}^{x_i} \approx \varepsilon_{p_i}^{x_i^h}$, тогда IE невелик, то есть либо невелика доля расходов на благо в доходе потребителя, либо маршаллианский спрос малочувствителен к изменениям дохода.

Уравнение Слуцкого по «чужой» цене

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial m}$$

(1) $N=2$, $\frac{\partial x_1^h}{\partial p_2}=?$
По закону хиксианского спроса $\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i} \leqslant 0$.

$x_1^h(p,u)$ однороден степени 0 по ценам, значит, по правилу Эйлера:

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_1} \cdot p_1 + \frac{\partial x_1^h}{\partial p_2} \cdot p_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial x_1^h}{\partial p_2} \geqslant 0$$

то есть перекрёстный эффект замещения неотрицателен. СЛедовательно, для нормального блага перекрёстные SE и IE разнонаправленные $\Rightarrow$ могут быть как валовые субституты, так и валовые комплементы.

Про валовые и чистые субституты/комплементы

- валовые субституты — по маршаллианскому спросу:
- $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0 \Rightarrow$ субституты
- $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < 0 \Rightarrow$ комплементы

Когда мы смотрим на реакцию маршаллианского спроса на чужую цену то, вообще говоря, влияет и SE, и IE, но тогда получаем несимметричную характеристику. Например, может быть такое, что $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} > 0$, но $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} \leqslant 0$.

Пример.

$u(x) = \ln x_1 + x_2$ Во внутреннем решении UMP:

$$\frac{1}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_1 = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow \frac{\partial x_1}{\partial p_2} > 0$$

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = \frac{m}{p_2} - 1 \Rightarrow \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0$$

Определение.

Чистые субституты/комплементы — смотрим по хиксианскому спросу (только SE):

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} > 0 - \text{чистые субституты}$$

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} < 0 - \text{чистые комплементы}$$

Это симметричное соотношение:

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^h}{\partial p_i}$$

Ведь по лемме Шепарда:

$$(x_i^h) = \frac{\partial e}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 e}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 e}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}$$

Тогда в случае $N=2$ два блага точно будут чистыми субститутами, а в случае $N>2$ для каждого блага найдётся хотя бы один чистый субститут.

Уравнение Слуцкого по чужой цене в эластичностях.

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial m} \Bigg| \cdot \frac{p_j}{x_i}$$

$$\varepsilon_{p_j}^{x_i} = \varepsilon_{p_j}^{x^h} - \delta_j \varepsilon_m^{x_i}$$

Матрица Слуцкого.

Пусть S' — матрица, элементами которого являются эффекты замещения, то есть

$$s'_{i,j} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial m}$$

Тогда S' — матрица, зависящая от p и m

Определение.

$S = S(p, m)$ называется матрицей Слуцкого.

Утверждение.

Пусть предпочтения монотонны, строго выпуклы и представимы непрерывной функцией полезности. Рассматриваемые функции дифференцируемы и $e(p, u)$ дифференцируема дважды и её вторая производная непрерывна.. Тогда матрица Слуцкого обладает следующими свойствами:
1) $S = S^T$
2)

$$s_{ij} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 e}{\partial p_i \partial p_j}$$

Тогда $S(p, m)$ — матрица вторых производных функции расходов.
Так как функция расходов вогнута по ценам, то $S(p, m)$ неположительно определённая.
3) $S(p, m) \cdot p = 0$