

Микроэкономика 1

Лекция 8

Морфий

Группа БЭАД242

Лекция 8.

Минимизация расходов.

УМР — задача максимизации полезности при бюджетном ограничении — при заданных ценах и доходе выбрать набор(ы), где достигается наибольшая полезность.

ЕМР — задача минимизации расходов — при заданных ценах выбирается набор(ы), которые позволяют достичь желаемого заданного уровня полезности с наименьшими расходами:

$$\begin{cases} p \cdot x \rightarrow \min_{x \geq 0} \\ u(x) \geq \bar{u} \end{cases}$$

Предпосылки: будем считать, что предпочтения монотонны и представимы непрерывной функцией полезности $u(x)$ на \mathbb{X} , $p \gg 0$; заданный уровень полезности в ЕМР $\bar{u} > u(\vec{0})$.

Замечание. Полученные далее результаты справедливы при замене требования монотонности на более слабое требование локальной ненасыщаемости предпочтений (LNS) — в любой открытой окрестности любого набора из \mathbb{X} найдётся лучший набор.

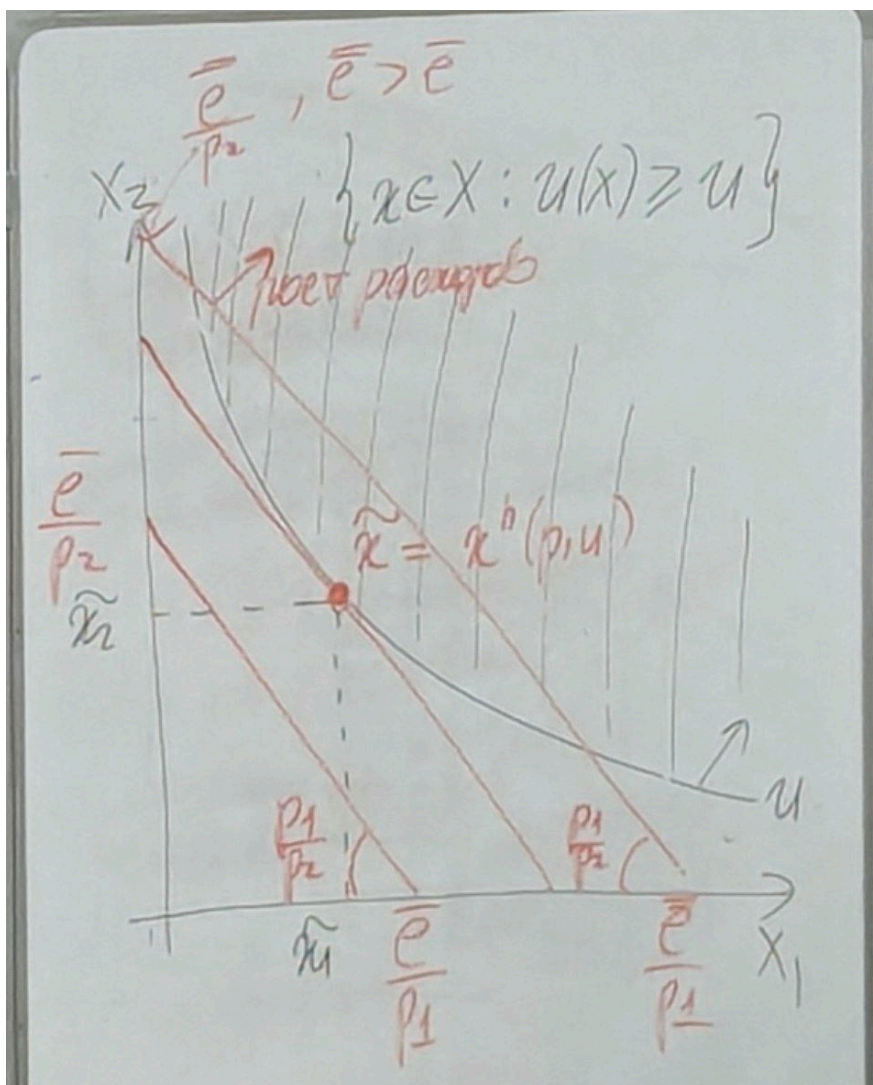
Решением задачи ЕМР является $x^h(p, u)$ — хиксианский или компенсированный спрос.

Если решение единственно, то $\tilde{x} = x^h(p, u)$ — функция хиксианского спроса.

Подставив $x^h(p, u)$ в целевую функцию ЕМР, получим функцию расходов: $e(p, u) = p \cdot x^h(p, u)$.

Графическое прочтение ЕМР при $N = 2$

- ограничение: $u(x) \geq \bar{u}$
- целевая функция: $p_1 x_1 + p_2 x_2 = \bar{e}$. Линии уровня этой функции — прямые с наклоном $-\frac{p_1}{p_2}$, чем дальше от начала координат, тем расход больше.



На рисунке:

- $\tilde{x} > 0$
- $u(\tilde{x}) = u$ на кривой безразличия
- $MRS_{12}(\tilde{x}) = \frac{p_1}{p_2}$ — касание кривой безразличия и линии постоянных расходов.

Замечание: маршаллианский спрос — наблюдаемый выбор, хиксианский спрос — абстракция.

Формальное решение ЕМР

$$L = px + \lambda(u - u(x))$$

FOC (необходимым, причём будет и достаточным, если предпочтения выпуклы) для внутреннего решения по x_i :

$$\forall i \quad p_i - \lambda \frac{\partial u(\tilde{x})}{\partial x_i} = 0$$

Получаем, что

$$p_i = \lambda \frac{\partial u(\tilde{x})}{\partial x_i} \Rightarrow \forall i \neq j \quad \frac{p_i}{p_j} = \frac{\partial u(\tilde{x}) / \partial x_i}{\partial u(\tilde{x}) / \partial x_j}$$

$p \rightarrow$ линии уровня $px = \bar{e}$,

$2p \rightarrow$ линии уровня $2px = \bar{e} \Rightarrow px = \frac{\bar{e}}{2}$.

Свойства хиксианского спроса.

Пусть $p \gg 0$, $u(x)$ — непрерывна, предпочтения монотонны, $u > u(0)$. Тогда хиксианский спрос $x^h(p, u)$ обладает следующими свойствами:

1. Однородность степени 0 по ценам, то есть

$$x^h(tp, u) = x^h(p, u) \quad \forall t > 0$$

Изменение всех цен в $t > 0$ раз не меняет ограничение задачи, только приводит к пропорциональному изменению расходов \Rightarrow такое изменение не повлияет на решение задачи.

2. В решении задачи ограничение выполняется как равенство, то есть $u(x^h(p, u)) = u$ (решения лежат на кривой безразличия u).

Действительно, пусть существует решение ЕМР x' такое, что $u(x') > u$. Рассмотрим $x'' = \alpha x'$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда

- $px'' < px'$
- В силу непрерывности функции полезности $\exists \alpha \in (0, 1) : u(x'') > u$.

Это противоречит тому, что x' — решение.

3. Если предпочтения выпуклы, то $x^h(p, u)$ — выпуклое множество; если предпочтения строго выпуклы, то решение ЕМР единственно, т.е. $x^h(p, u)$ — функция хиксианского спроса.

4. Если предпочтения строго выпуклы (тогда $x^h(p, u)$ — функция), выполнен закон компенсированного спроса:

$$(p'' - p')(x^h(p'', u) - x^h(p', u)) \leq 0$$

Замечание:

- закон спроса как противонаправленность изменения цены и объёма потребления для хиксианского спроса, а для маршаллианского спроса — нет.
- закон компенсированного спроса — обоснование неположительности эффекта замещения по Хиксу:

$$\frac{\Delta x_i^{\text{HSE}}}{\Delta p_i} \leq 0$$

Доказательство.

Пусть $x' = x^h(p', u)$, $x'' = x^h(p'', u)$ — решения ЕМР. Нужно доказать, что

$$(p'' - p')(x'' - x') \leq 0$$

Тогда

1. $p'x' \leq p'x \quad \forall x \in \mathbb{X} : u(x) \geq u$. Так как $u(x'') = u$, то $p'x' \leq p'x''$ (1)

2. Аналогично $p''x'' \leq p''x'$ (1).

3. Сложим (1) и (2):

$$p'x' + p''x'' \leq p'x'' + p''x'$$

$$p'x' - p''x' + p''x'' - p'x'' \leq 0$$

$$x'(p' - p'') + x''(p'' - p') \leq 0$$

$$(p'' - p')(x'' - x') \leq 0$$

■

Пример.

Опять Кобб-Дугласс: $u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta$, $\alpha, \beta > 0$

- найти хиксианский спрос
- найти функцию расходов

Задача минимизации расходов:

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 \rightarrow \min \\ x_1^\alpha x_2^\beta = u \end{cases}$$

$$L = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(u - x_1^\alpha x_2^\beta)$$

ФОС для внутреннего решения (необходимо и достаточно):

по x_1 : $p_1 - \lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta = 0$,

по x_2 : $p_2 - \lambda\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} = 0$

$$\begin{cases} p_1 = \lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta \\ p_2 = \lambda\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} \end{cases}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{p_1}{p_2} \frac{\beta}{\alpha} x_1$$

$$u = x_1^\alpha x_2^\beta = x_1^\alpha \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{\beta}{\alpha} x_1 \right)^\beta x_1^\beta = u$$

$$x_1^{\alpha+\beta} = u \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1} \right)^\beta$$

$$x_1 = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = x_1^h(p, u) - \text{хиксианский спрос на первое благо}$$

$$x_2^h(p, u) = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Функция расходов.

$$p_1 x_1^h(p, u) = p_1 u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$p_2 x_2^h(p, u) = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$e(p, u) = p_1 x_1^h(p, u) + p_2 x_2^h(p, u) = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right]$$

1. Как $e(p, u)$ зависит от u ? Чем больше u , тем выше расходы.
2. Как $e(p, u)$ зависит от p_1, p_2 ? Возрастает по p_1 и по p_2 .
3. $e(p, u)$ строго вогнута по p .

Свойства функции расходов.

Пусть $u(x)$ — непрерывна, предпочтения монотонны, $p \gg 0, u > u(0)$, тогда функция расходов $e(p, u)$ обладает следующими свойствами:

1. Однородность первой степени по ценам, т. е. $e(tp, u) = te(p, u) \quad \forall t > 0$,
2. Возрастает по уровню полезности, то есть $u'' > u' \rightarrow e(p, u'') > e(p, u')$.
3. $e(p, u)$ не убывает по p_i , то есть $e(p'', u) \geq e(p', u)$, где $p''_i > p'_i, p''_j = p'_j, i \neq j$. То есть, если возрастает цена хотя бы одного блага, то расходы не могут уменьшиться.

Утверждение.

4. $e(p, u)$ вогнута по p .

Доказательство:

Пусть $x' = x^h(p', u), x'' = x^h(p'', u) \Rightarrow e(p', u) = p'x', e(p'', u) = p''x''$. Тогда нужно доказать, что

$$e(\alpha p' + (1 - \alpha)p'', u) \geq \alpha e(p', u) + (1 - \alpha)e(p'', u), \quad \alpha \in [0, 1]$$

Рассмотрим $\bar{p} = \alpha p' + (1 - \alpha)p'', \bar{x} = x^h(\bar{p}, u)$. Тогда $e(\bar{p}, u) = \bar{p} \cdot \bar{x}$. Тогда

- $p'x' \leq p'\bar{x}$
- $p''x'' \leq p''\bar{x}$

Рассмотрим сумму $\alpha(1) + (1 - \alpha)(2)$:

$$\alpha p'x' + (1 - \alpha)p''x'' \leq \alpha p'\bar{x} + (1 - \alpha)p''\bar{x} = \bar{x}(\alpha p' + (1 - \alpha)p'') = \bar{p} \cdot \bar{x} = e(\bar{p}, u)$$

Откуда следует требуемое. ■

Утверждение.

5. (Лемма Шепарда) Пусть $e(p, u)$ дифференцируема, пусть предпочтения строго выпуклы; решение ЕМР внутреннее, то есть $x^h(p, u) \gg 0$. Тогда:

$$x_i^h(p, u) = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_i}$$

Идеи доказательства:

1) через ФОС: Надо рассмотреть

$$\frac{\partial e}{\partial p_i} = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_i} = \frac{\partial (p \cdot x^h(p, u))}{\partial p_i} = \dots$$

и продифференцировать как производную произведения, помня о дифференциальной характеристике внутреннего решения.

2) через теорему об огибающей