Содержание.

1. Лекция 1. Теория поведения потребителя.

1.1. Выбор потребителя.

1.1.1. Определение. Рациональность потребителя

Рациональность потребителя заключается в том, что потребитель выбирает **наилучшую альтернативу** из **доступных**.

Предположим, что потребитель потребляет N различных благ.

1.1.2. Определение. Альтернатива

Альтернативой называется набор (вектор) $x = (x_1, ..., x_N)$, где x_i — объём блага с номером $i = \overline{1,N}$

Ограничения, обусловленные природой благ:

1. физические:
- неотрицательность
- неделимость
- время

2. местоположение

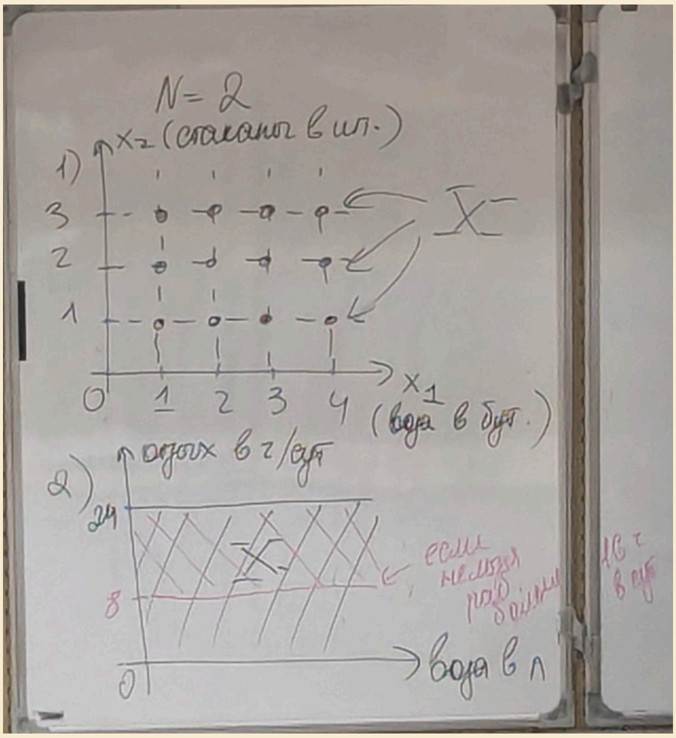
3. состояние природы

1.1.3. Определение. Потребительское множество

Потребительское множество $\mathbb{X}$ — множество всех возможных или допустимых наборов благ. В общем случае — некоторое множество в $\mathbb{R}^N$.

1.1.4. Пример.

Предположим, что у нас два блага: стаканы и бутылки (в штуках). Тогда наже множество $\mathbb{X}$ это $\mathbb{N}^2$, так как стаканы и бутылки неделимы по своей природе.



1.1.5. Утверждение.

Если не оговорено иного, далее будем считать, что $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+^N = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid \forall i = \overline{1,N} x_i \geqslant 0\right\}$. То есть, все блага бесконечно делимы и могут потребляться в любом неотрицательном количестве.

1.2. Бюджетное ограничение и бюджетное множество.

1.2.1. Определение. Вектор цен

$p = (p_1, ..., p_N)$ — вектор цен, где p_i — цена единицы блага i.

Предпосылки:
1. Полнота и универсальность рынков: все блага продаются по общеизвестным и наблюдаемым ценам,
2. Цены благ положительны, если не оговорено иного,
3. Потребитель — ценополучатель (price-taker), то есть принимает заданные цены (цены — экзогенный фактор).

Пусть $m > 0$ — фиксированная величина, представляющая доход потребителя.

1.2.2. Определение. Бюджетное ограничение

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i x_i}_{\text{расходы}} \leqslant \underbrace{m}_{\text{доход}}$$

1.2.3. Определение. Бюджетное множество

$$B(p, m) = \left\{x \in \mathbb{X} : \sum_{i=1}^{N} p_i x_i \leqslant m\right\}$$

1.2.4. Утверждение.

Бюджетное множество:
1. ограничено, замкнуто, непусто $\Rightarrow$ бюджетное множество компактно.
2. выпукло, то есть

$$\forall x \in B(p, m), x' \in B(p, m) \Rightarrow x'' = \alpha x + (1 - \alpha) x' \in B(p, m), \text{где } 0 < \alpha < 1$$

Докажем:
$x \in B(p, m) \Rightarrow px \leqslant m$,
$x' \in B(p, m) \Rightarrow px' \leqslant m$,
$px'' = \alpha px + (1 - \alpha) px' \leqslant \alpha m + (1 - \alpha) m = m \Rightarrow x'' \in B(p, m)$.

1.2.5. Определение. Бюджетная линия (плоскость, пространство...)

$\{x \in \mathbb{X} : px = m\}$, то есть множество наборов из $\mathbb{X}$ доступных при полном расходовании дохода (в точности доступных).

1.2.6. Пример.

$N = 2 : p_1x_1 + p_2x_2 = m$, или

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

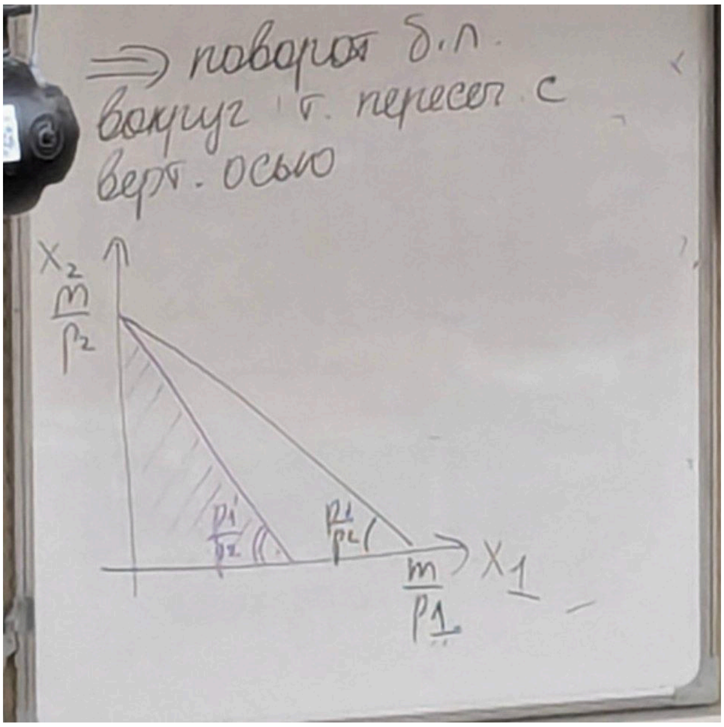
где $\dfrac{p_1}{p_2}$ — альтернативные издержки потребления 1–го блага, то есть от скольки единиц второго блага нужно отказаться, чтобы позволить дополнительную единицу перого блага.

1.3. Изменение бюджетного множества при изменении цен и дохода.

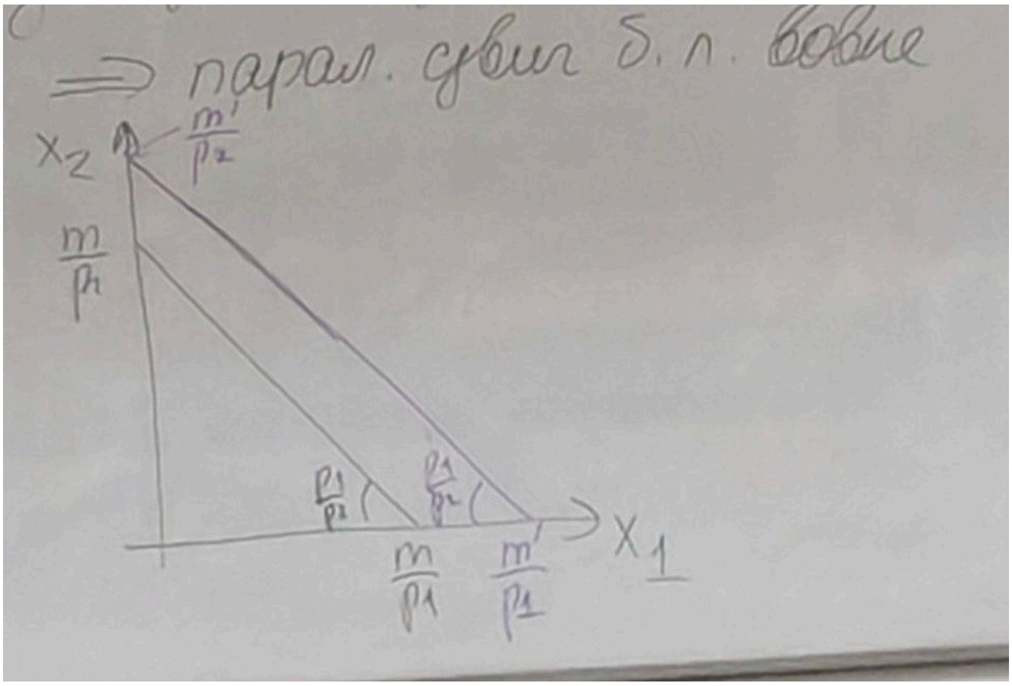
1. Пусть меняется цена на одно из благ: $p_1 \to p_1' > p_1$, остальные цены и доход не меняются. Пусть $N = 2$:

- $\dfrac{p_1}{p_2} \to \dfrac{p_1'}{p_2} > \dfrac{p_1}{p_2} \Rightarrow$ бюджетная линия становится «круче»
- $\dfrac{m}{p_{1'}} < \dfrac{m}{p_1}$
- $\dfrac{m}{p_2}$ не меняется.

Итого получаем поворот бюджетной линии вокруг точки пересечения с вертикальной осью.



2. Предположим, что цены не меняются, но изменяется доход $m \to m' > m$. Тогда наклон прямой не изменяется, она сдвигается паралелльно вправо и вверх (на северо-восток).



3. Предположим, что все цен и доход меняются в $t > 0$ раз. Так как $px \leqslant m \Leftrightarrow tpx \leqslant tm$, то бюджетное множество не изменяется. Тогда, если мы возьмём $t = \dfrac{1}{p_2} > 0$, то получим уравнение $tp_1x_2 + tp_2x_2 = tm \Rightarrow \dfrac{p_1}{p_2}x_1 + x_2 = \dfrac{m}{p_2} \Leftrightarrow \hat{p}_1 + x_2 = \hat{m}$. То есть, одну из цен всегда можно пронормировать, положив равную единице. То благо, цена которого равна 1, называют благом-измерителем или агрегированным потребительским благом.

Другими словами, можно все блага разделить на 2 группы:

1. Благо, которое нас интересует (e.g, яблоки)
2. Агрегированное потребительское благо, цена которого равна единице.

Тогда имеем уравнение бюджетной линии $p_1x_1 + x_2 = m$, то есть x_2 — расходы на всё остальное, кроме яблок.

1.3.1. Определение. Налоги и субсидии

1. **Потоварный налог** t — фиксировнная сумма в д.е., которая добавляется к цене каждой единицы блага. $p_j \to p_j + t$. Вследствие потоварного налога бюджетное ограничение меняется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i x_i + \underbrace{tx_j}_{\substack{\text{налог.}\\ \text{сбор}}} \leqslant m$$

   Потоварная субсидия — налог с обратным знаком: $p_j \to p_j - s$.

2. **Адвалорный налог** (налог на стоимость, налог с продаж) $\tau > 0$ — фиксированный процент (доля): $p_j \to (1+\tau)p_j$. Бюджетное ограничение:

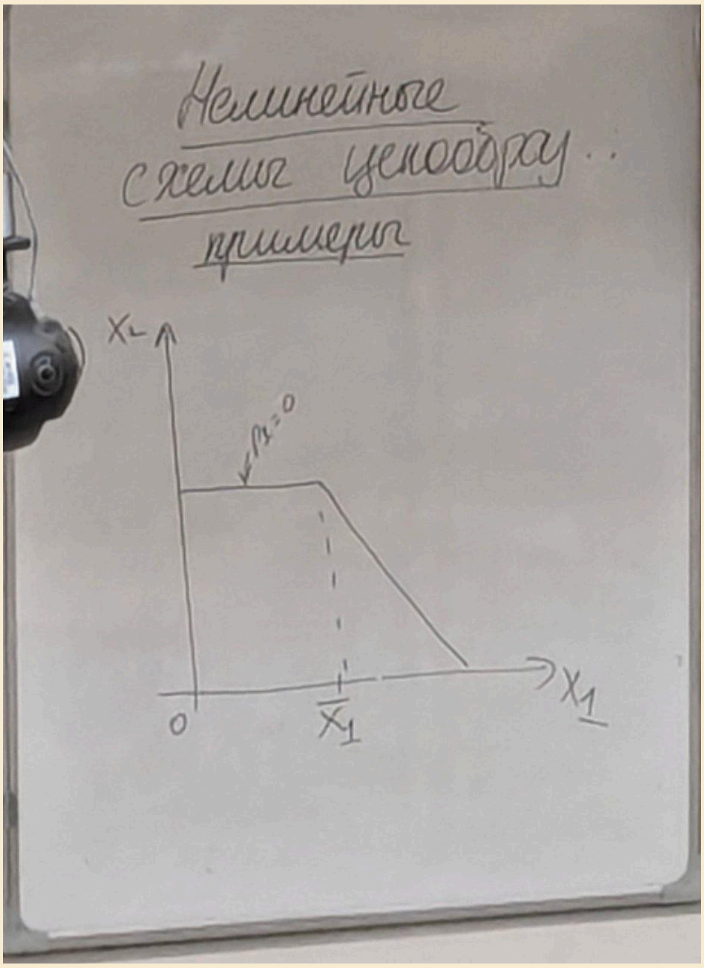
$$\sum_{i=1}^{N} p_i x_i + \underbrace{\tau p_j x_j}_{\substack{\text{налог.}\\ \text{сбор}}} \leqslant m$$

3. **Паушальный налог** (аккордный налог, lump sum tax) — фиксированная сумма T в д.е., которая снижает доход потребителя.

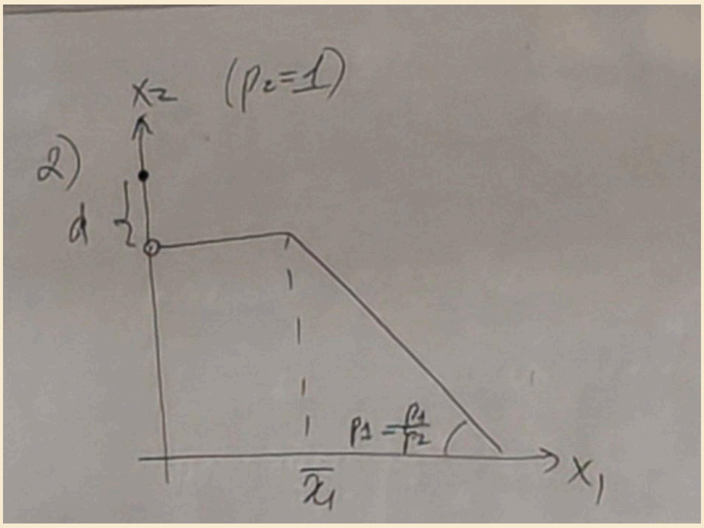
$$\sum_{i=1}^{N} p_i x_i \leqslant m - T$$

1.3.2. Пример. Нелинейные схемы ценообразования

1. Первые $\overline{x}_1$ единиц первого блага бесплатны.



2. Чтобы получить бесплатно $\overline{x}_1$, нужно сначала заплатить d



1.4. Описание предпочтений выбора потребителей.

1. Описание предпочтений ⇒ описание выбора потребителя (классический подход)
2. Наблюдаем выбор ⇒ выявляем предпочтения потребителя (теория выявленных предпочтений)

1.5. Теория выявленных предпочтений.

Будем считать, что:

1. Каждый раз потребитель выбирает только один набор благ.
2. Выбор происходит на бюджетной линии.
3. Предпочтения потребителя не меняются.

1.5.1. Определение.

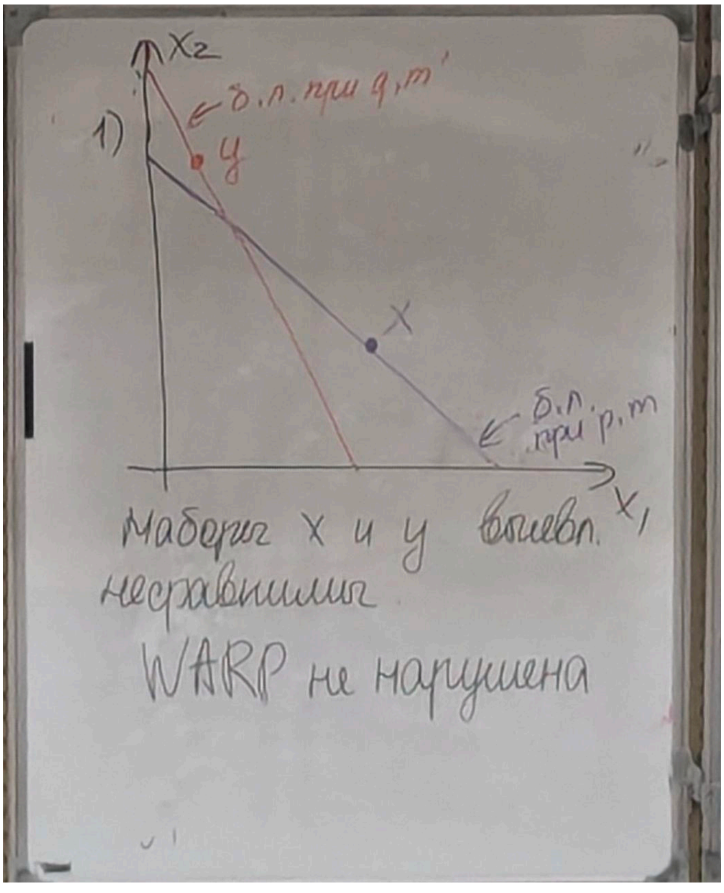
Набор x *прямо выявлено предпочитается* набору $y \neq x$, если приобретая набор x, потребитель мог выбрать набор y, но не сделал этого.

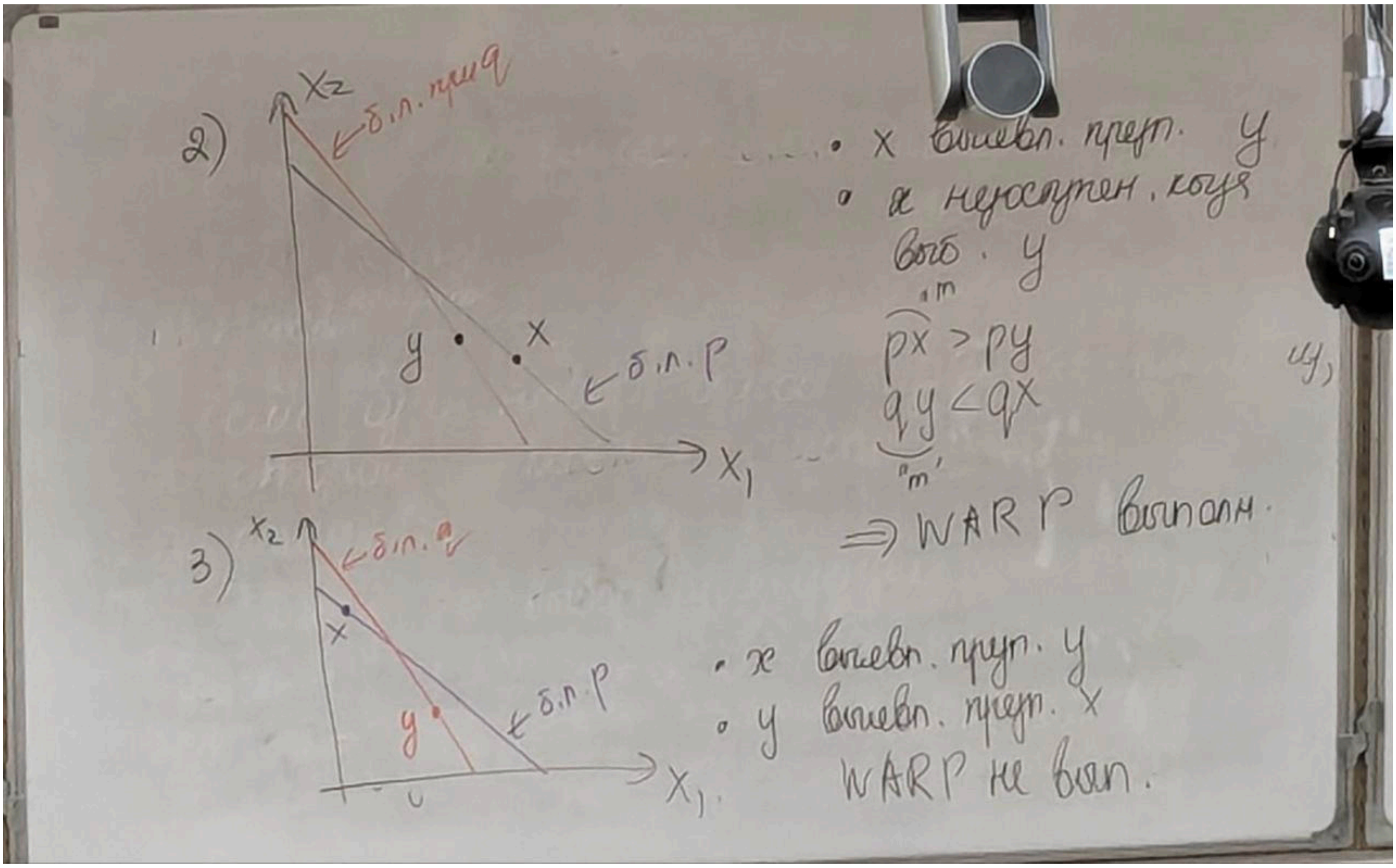
Получаем, что если потребитель выбрал набор x, то $p \cdot x = m$.
Если мог выбрать y, то $p \cdot y \leqslant m$.
$x \neq y$ прямо выявлено предпочитается $y \Rightarrow p \cdot x \geqslant p \cdot y$.

1.5.2. Утверждение. Слабая аксиома выявленных предпочтений (weak axiom of revealed preferences, WARP)

Если один набор выявленно предпочитается второму, то второй не может выявленно преподчитаться первому.

Действительно, пусть x — выбор при ценах p и доходе m, $y \neq x$ — выбор при ценах q и доходе m'. Тогда из $px \geqslant py \Rightarrow qx \geqslant qy$.




2)
б.л. при q
б.л. p
x вылевл. предп. y
x недоступен, когда выб. y
$px > py$
$qy < qx$
⇒ WARP выполн.
3)
б.л. q
б.л. p
x вылевл. предп. y
y вылевл. предп. x
WARP не вып.

2. Лекция 2. Отношение предпочтения и его свойства.

2.0.1. Обозначение. Отношение предпочтения

1. $\succsim$ — отношение «не хуже чем» или отношение нестрогого предпочтения (частичный нестрогий порядок)
   $x, y, \in \mathbb{X}$: $x \succsim y$ — набор x не хуже набора y
2. $\succ$ — отношение строгого предпочтения
   $x \succ y$ — набор x лучше набора y
   $x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y \land \neg(y \succsim x)$
3. $\sim$ — отношение эквивалентности или безразличия
   $x \sim y$ — наборы x и y эквивалентны или потребитель безразличен при выборе между x и y.
   $x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \land y \succsim y$

2.1. Свойства отношения предпочтения.

1. **Полнота.** $\forall x, y \in \mathbb{X} : x \succsim y \lor y \succsim x$ (линейный нестрогий порядок).
   То есть, любые два набора из потребительского множества сравнимы с точки зрения вкусов потребителя.

2.1.1. Пример.

1) $N = 2$, $x \succsim y \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \geqslant \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}$. Такое отношение является полным, так как $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}$ для любого набора — число, а любые два числа можно сравнить друг с другом.
2) $N = 2$, $x \succ\sim y \Leftrightarrow x_1 \geqslant y_1 \land x_2 \geqslant y_2$. Это не полное отношение, т.к. $x = (5, 2)$ и $y = (2, 5)$ несравнимы.

2. **Транзитивность.** $\forall x, y, z \in \mathbb{X} : (x \succsim y \land y \succsim z) \to (x \succsim z)$ (нет «циклов» в предпочтениях).

2.1.2. Пример.

1) $N = 2$, $x \succsim y \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \geqslant \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}$. Это отношение транзитивно, так как отношение «$\geqslant$» транзитивно.
2) $N = 3$, $x \succsim y \Leftrightarrow \exists i \neq j : x_i \geqslant y_i \land x_j \geqslant y_j$, то есть хотя бы две координаты в наборе x не меньше соответствующих координат в наборе y.
Рассмотрим $x = (1, 2, 3), y = (2, 3, 1), z = (3, 1, 2)$. Тогда $z \succsim y, y \succsim x$, но $x \succsim z$.

2.1.3. Определение. Рациональные предпочтения

Предпочтения, являющиеся одновременно полными и транзитивными, называют рациональными.

3. **Непрерывность.** Для любых сходящихся последовательностей наборов $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n, y_n \in \mathbb{X}$, $\forall n \;\; x_n \succsim y_n \to \lim_{n \to +\infty} x_n = x \succsim y = \lim_{n \to +\infty} y_n$, где $x, y \in \mathbb{X}$.
   То есть, предпочтения сохраняются в пределе (или нет «скачков» в предпочтениях).

2.1.4. Пример. Лексикографиеские предпочтения

$N = 2, x \succsim y \Leftrightarrow (x_1 > y_1) \lor (x_1 = y_1 \land x_2 \geqslant y_2)$.
Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(3 + \frac{1}{n}, 3\right)$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} = (3, 4)$. Тогда $\forall n \;\; x_n \succsim y_n$, так как $\forall n \;\; 3 + \frac{1}{n} > 3$.
Но $\lim_{n \to +\infty} x_n = (3, 3) = x, \lim_{n \to +\infty} y_n = (3, 4) = y \Rightarrow y \succsim x$.
Значит, лексикографиеские предпочтения не являются непрерывными.

2.1.5. Утверждение.

Отношение предпочтения является непрерывным, если $\forall x \in \mathbb{X}$ множество наборов, не худших, чем x, является замкнутым.

2.2. Кривая безразличия и её свойства.

2.2.1. Определение.

Кривая безразличия в потребительском множестве $\mathbb{X}$, проходящая через набор $x \in \mathbb{X}$ — множество всех наборов, эквивалетных x, то есть $\{y \in \mathbb{X} : y \sim x\}$.

2.2.2. Утверждение.

Елси предпочтения полны, транзитивны и непрерывны, то:
1. Через любую точку в $\mathbb{X}$ можно провести кривую безразличия.
2. Нет разрывов кривых безразличия.
3. Кривые безразличия или совпадают, или не пересекаются.

2.3. Функция полезности.

2.3.1. Определение.

Функция $U : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, называется **функцией полезности**, если $\forall x, y \in \mathbb{X}\ \ x \succsim y \Leftrightarrow U(x) \geqslant U(y)$

Замечания:
1. Функция полезности только ранжирует наборы из $\mathbb{X}$ — порядковая или ординалистская функция полезности.
2. Функция полезности определена с точностью до положительного монотонного преобразования:

2.3.2. Утверждение.

Пусть $U : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ — функция полезности, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая функция, определённая на множестве значений U. Тогда $V(x) = f(U(x))$ — функция полезности, описывающая те же предпочтения на $\mathbb{X}$.

Тогда кривая безразличия — множество таких наборов x, что $U(x) = \overline{U} = \text{const}$. То есть, кривая безразличия — линия уровня функции в $\mathbb{X}$.

2.4. Существование функции полезности.

2.4.1. Утверждение. Необходимое условие существования функции полезности

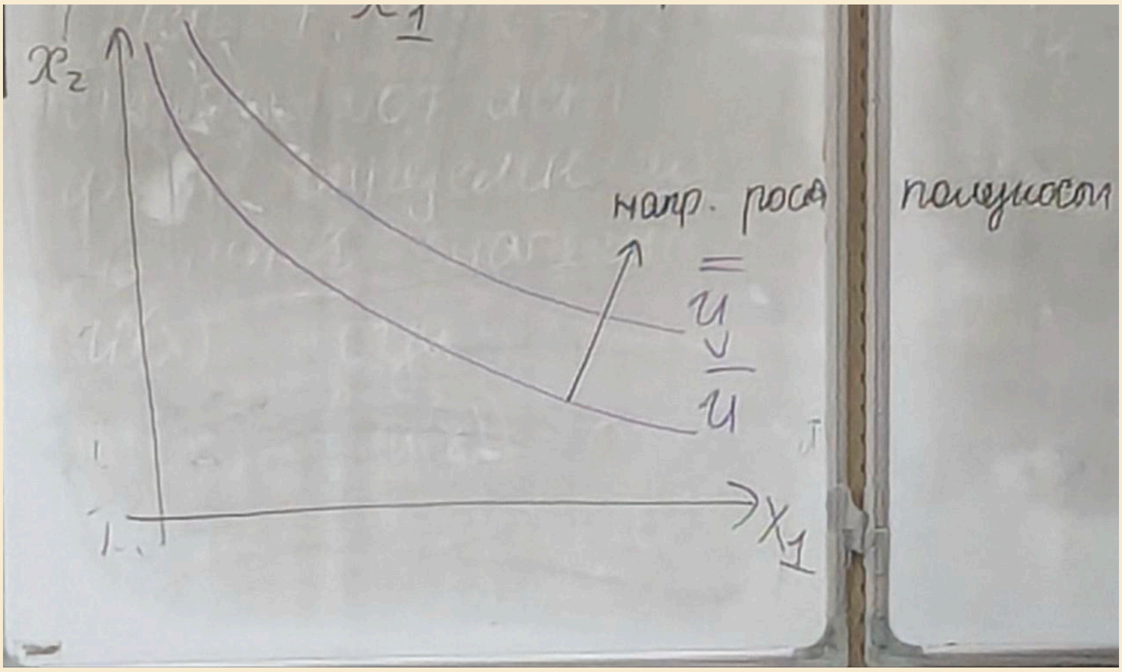
Если предпочтения представими в виде функции полезности, то они рациональны, то есть полны и транзитивны.

2.4.2. Утверждение. Достаточное условие существования функции полезности

Если предпочтения полны, транзитивны и непрерывны, то они представимы непрерывной функции полезности.

2.4.3. Пример.

$U(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \alpha, \beta > 0$ (функция Кобба-Дугласа)
Пусть $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow U(x) = x_1 x_2$.
При $\overline{U} > 0$ уравнение кривой безразличия имеет вид $x_2 = \dfrac{\overline{U}}{x_1}$ — гипербола.



Аналогичные функции:
1. $V(x) = \ln(U(X)) = \ln x_1 + \ln x_2$ (на $\mathbb{R}^2_+$),
2. $V(x) = \sqrt{x_1 x_2}$,
3. $V(x) = (x_1 x_2)^2$

2.4.4. Предельная норма замещения.

2.4.5. Определение.

MRS_{12} (marginal rate of substitution) — предельная норма замещения второго блага первым — максимальное количество малых единиц второго блага, от которых готов отказаться потребитель в обмен на малую единицу первого блага.

2.4.6. Утверждение.

MRS_{12} — наклон кривой безразличия в некоторой точке, взятый с обратным знаком. ТО есть, если $x_2 = \varphi(x_1)$ — уравнение кривой безразличия, то

$$MRS_{12}(\overline{x}) = -\frac{dx_2}{dx_1} = -\varphi'(\overline{x}_1)$$

Если предпочтения представимы функцией полезности, то уравнение кривой безразличия имеет вид $u(x_1, x_2) = \overline{u} = \text{const}$, то по теореме о дифференцировании неявной функции:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} \Rightarrow MRS_{12} = \frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}}$$

$$MU_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \Rightarrow MRS_{12} = \frac{MU_1}{MU_2}$$

2.4.7. Пример.

$U = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} : \alpha, \beta > 0$
1. Уравнение кривой безразличия:

$$x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = \overline{U} = \text{const}$$

$$x_2^{\beta} = \frac{U}{x_1^{\alpha}}$$

$$x_2^{\beta} = \left(\frac{\overline{U}}{x_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$x_2'(x_1) = \left(\overline{U}^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right) = \overline{U}^{\frac{1}{\beta}}\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot (x_1)^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} = -\frac{\alpha}{\beta}\left(x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} = -\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$

$$MRS_{12} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$

2.

$$MRS_{12} = \frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}}{\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

3. Лекция 3. Отношение предпочтения и его свойства (продолжение)

3.1. Монотонность и строгая монотонность.

Свойствам, рассматриваемым в дальнейшем, некоторые предпочтения могут не удовлеторять.

3.1.1. Определение. Монотонность

Предпочтения потребителя называются монотонными, если $\forall x, y \in \mathbb{X}\ (x > y) \to (x \succ y)$.
То есть, если в одном наборе каждого блага больше, чем в другом, то первый набор лучше второго.

У полных, транзитивных, непрерывных и монотонных предпочтений наклон кривых безразличия будет неположительным.

3.1.2. Определение. Строгая монотонность

Предпочтения потребителя строго монотонны, если $\forall x, y \in \mathbb{X}\ (x \geqslant y \wedge x \neq y) \to (x \succ y)$.

Почему если при проверке монотонности нужно увеличивать количество обих благ, а при проверке строгой монотонности — только одного, то почему строгой называется вторая, а не наоборот?

3.1.3. Пример.

Пусть предпочтения потребителя определены на наборах (яблоки, груши). Потребитель любит яблоки и безразличен к грушам. Если к произвольному набору добавить и яблоки, и груши, то благосостояние потребителя возрастёт. Если же добавить только груши, то благосостояние потребителя не изменится.

Из того, что предпочтения строго монотонны, следует, что они монотонны. В обратную сторону утверждение неверно.

3.2. Выпуклость и строгая выпуклость.

3.2.1. Определение. Выпуклость предпочтений

Предпочтения потребителя выпуклы, если

$$\forall x, y \in \mathbb{X}, \forall \alpha \in (0.1)\ (x \succsim y) \to (\alpha x + (1-\alpha) y \succsim y)$$

В частности, если $x \sim y$, то $\forall \alpha \in [0, 1]\ \ \alpha x + (1-\alpha) y \succsim y$.

3.2.2. Утверждение.

Множество $\{\alpha x + (1-\alpha) y, \alpha \in [0, 1]\}$ задаёт прямую, соединяющую наборы x и y.

3.2.3. Определение. Строгая выпуклость

Предпочтения потребителя строго выпуклы, если

$$\forall x, y \in \mathbb{X}, \forall \alpha \in (0, 1)\ (x \succsim y \wedge x \neq y) \to (\alpha x + (1-\alpha) y \succ y)$$

Строго выпуклые предпочтения выпуклы.
Если предпочтения строго монотонны и (строго) выпуклы, то их часто называют «хорошими» или «стандартными».
Если предпочтения строго монотонны и строго выпуклы, то MRS_{12} убывает вдоль кривой безразличия по мере роста количества первого блага.

3.2.4. Утверждение.

Если функция полезности (строго) вогнута, то предпочтения (строго) выпуклы.

4. Лекция 4. Задача потребителя и характеристика её решения.

Покуда предпочтения потребителя полны, транзитивны и непрерывны, существует непрерывная функция полезности $U(x)$. Пусть все цены положительные $(p \gg 0), m > 0$.

Тогда задача потребителя — задача выбора наилучшего набора из доступных, то есть выбор такого набора (таких наборов) в бюджетном множестве, который (которые) приносят наибольшую полезность.

Формально:

$$\begin{cases} u(x) \longrightarrow \max\limits_{x_i \geqslant 0} \\ px \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x_1, x_2, ..., x_N) \to \max\limits_{x_i \geqslant 0} \\ \sum\limits_{i=0}^{N} p_i x_i \leqslant m \end{cases} \qquad (*)$$

Так как $U(x)$ непрерывна, а бюджетное множество компактно, то по теореме Вейерштрасса о функции на компакте решение существует всегда. Пусть $\tilde{x}$ — решение задачи $(*)$. Тогда $\tilde{x} = f(p, m)$ — отображение (функция, если отображение однозначно) маршалловского (маршаллианского) или вальрассовского (вальрассианского) спроса.

Подставив решение в целевую функцию, получим косвенную функцию полезности: $v = f(p, m) = u(x(p, m))$ — функция значений.

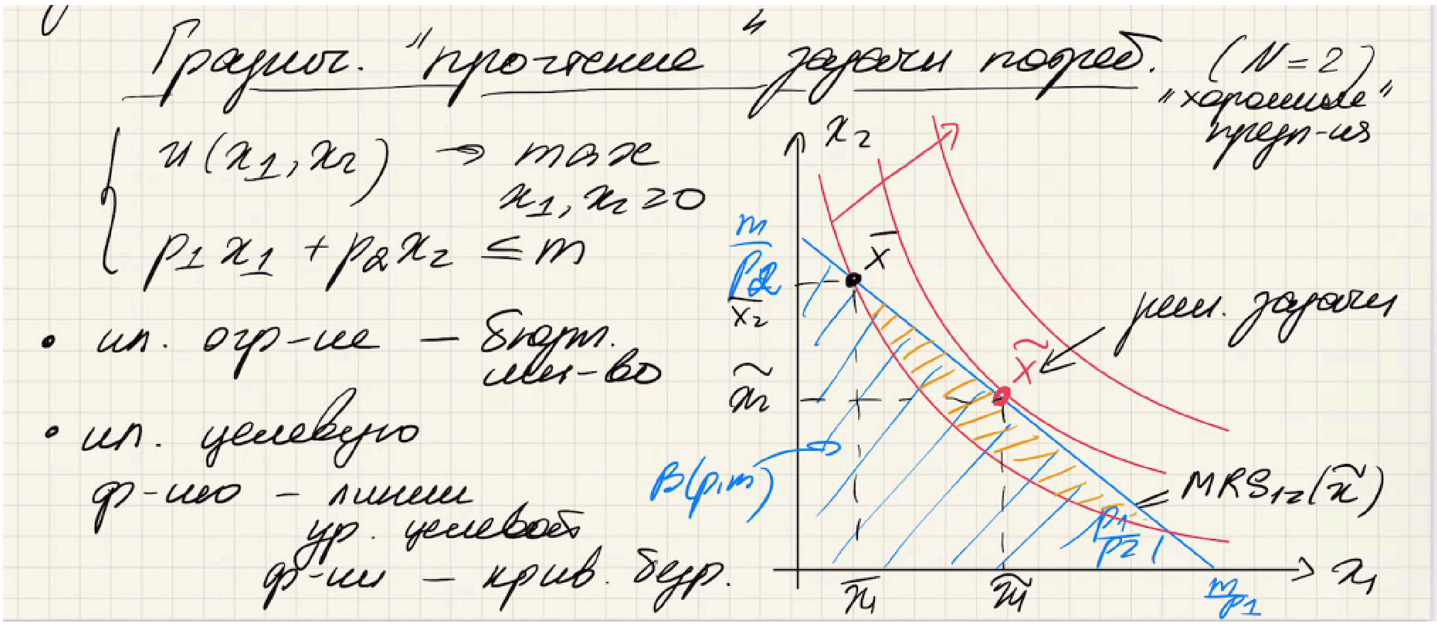
4.0.1. Графическое прочтение задачи потребителя. $(N = 2)$

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \to \max\limits_{x_1, x_2 \geqslant 0} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant m \end{cases}$$

1. Иллюстрируем ограничение — бюджетное множество.
2. Иллюстрируем целевую функцию (функцию полезности) — линии уровня (кривые безразличия).
3. Находим такую точку, что её кривая безразличия касается бюджетного множества.

Для «хороших» предпочтений:

- Такое решение $\tilde{x}$, что $\tilde{x} \gg 0$, будем называть внутренним.
- $\tilde{x}$ лежит на бюджетной линии, то есть $p\tilde{x} = m$.
- $\tilde{x}$ — точка касания бюджетной линии и кривой безразличия, то есть $\dfrac{p_1}{p_2} = MRS_{12}(\tilde{x})$.



4.0.2. Утверждение. Свойства маршаллианского спроса

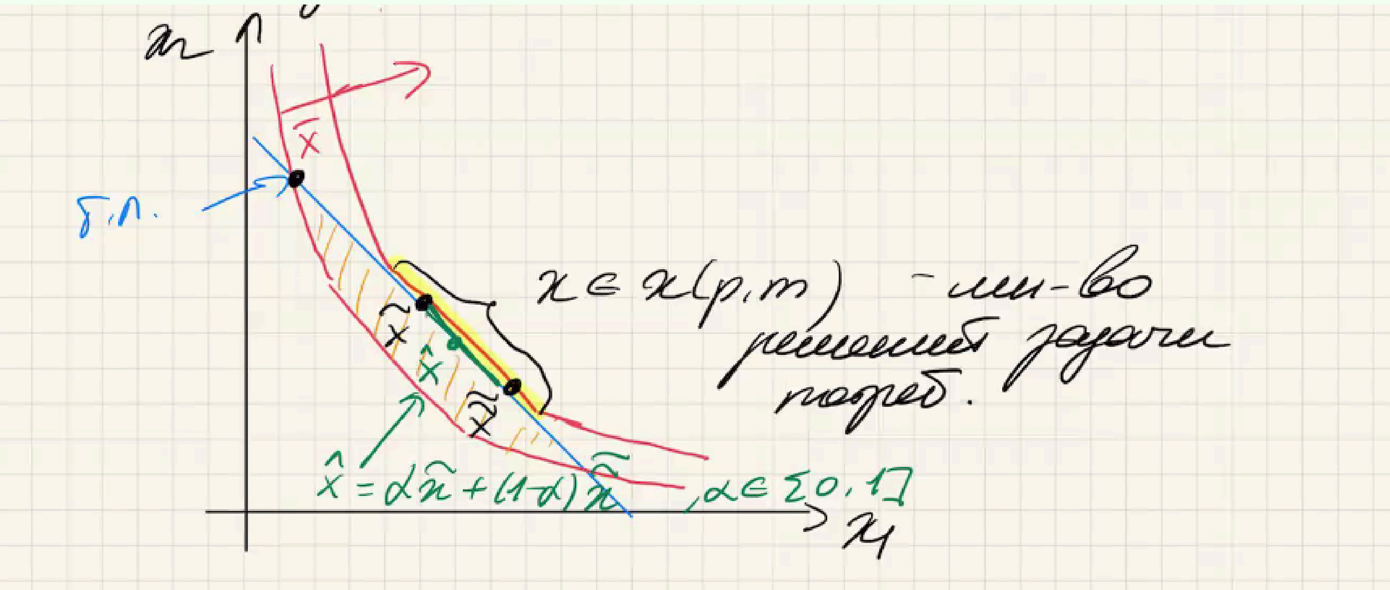
1. $\forall t > 0 \;\; x(tp, tm) = x(p, m)$ — функция спроса однородна нулевой степени по ценам и доходу, то есть $x(tp, tm) = t^n x(p, m)$, где $n = 0 \Leftrightarrow t^n = 1$.
Действительно, изменение всех цен и дохода в одной и той же положительной пропорции не изменяет бюджетное множество, и тем более не изменяет функцию полезности, поэтому решение задачи потребителя остаётся тем же.

2. Если предпочтения монотонны, то решение задачи потребителя лежит на бюджетной линии.
Действительно, пусть предпочтения потребители монотонны, но его решение лежит не на бюджетной линии, то есть $p\tilde{x} < m$. Пусть оставшиеся деньги он потратит в равной мере на все блага (то есть, $\tilde{x}_i' = \tilde{x}_i + \frac{m - px}{np_i}$). Тогда количество каждого блага увеличится, значит, получившийся набор $\tilde{x}'$ будет точно лучше изначального в силу монотонности предпочтений. Тогда изначальный набор $\tilde{x}$ не мог быть решением задачи потребителя. ■

4.0.3. Пример.

Если имеем предпочтения с точкой насыщения, которая лежит строго внутри бюджетного множества, то решение задачи потребителя будет строго внутри бюджетного множества.

3. Если предпочтения выпуклы (то есть функция полезности квазивогнута), то множество решений задачи $(*)$ $x(p, m)$ — выпуклое множество.



4. Если предпочтения строго выпуклы (то есть функция полезности строго квазивогнута), то решение задачи $(*)$ единственно.
Замечание: если предпочтения строго выпуклы, то функция $x(p, m)$ непрерывна.

4.1. Дифференциальная характеристика внутреннего решения задачи потребителя.

Пусть функция полезности непрерывна и дифференцируема на $\mathbb{X}$. Кроме того, пусть предпочтения потребителя строго монотонны.

- По рисунку для «хороших» (строго монотонных и строго выпуклых) предпочтений: во внутреннем решении $\tilde{x} \gg 0$

$$\underbrace{MRS_{12}(\tilde{x})}_{\substack{\text{субъективная} \\ \text{норма замещения} \\ \text{благ}}} = \underbrace{\frac{p_1}{p_2}}_{\substack{\text{объективная (рыночная)} \\ \text{норма замещения благ}}}$$

$$\frac{\partial U(\tilde{x})/\partial x_1}{p_1} = \frac{\partial U(\tilde{x})/\partial x_1}{p_2}$$

$$\frac{MU_1(\tilde{x})}{p_1} = \frac{MU_2(\tilde{x})}{p_2}$$

Это — необходимое условие первое порядка для экстремума в точке $\tilde{x}$.

4.1.1. Утверждение. Необходимое условие внутреннего решения

Пусть $\tilde{x}$ — внутреннее решение задачи потребителя. Тогда

$$MRS_{ij}(\tilde{x}) = \frac{p_i}{p_J}$$

Докажем для $N = 2$ от противного. Пусть $\tilde{x}$ — решение задачи потребителя и $MRS_{12}(\tilde{x}) \neq \frac{p_1}{p_2}$.
Не умаляя общности, пусть $MRS_{12}(\tilde{x}) > \frac{p_1}{p_2}$ (симметричный случай рассматривается аналогично). Раз $MRS_{12}(\tilde{x}) > \frac{p_1}{p_2}$, то субъективная оценка первого блага выше объективной (рыночной).
В точке $\tilde{x}$ потребитель готов отказаться от $MRS_{12}(\tilde{x})dx_1$ единиц второго блага в обмен на dx_1 единиц первого блага. Раз $MRS_{12}(\tilde{x}) > \frac{p_1}{p_2}$, то если он откажется от $\frac{p_1}{p_2}dx_1$ единиц второго блага в обмен на dx_1 единиц первого блага, то его бюджетное ограничение останется верным, а положение улучшится. Значит, $\tilde{x}$ не может быть решением задачи потребителя. ■

4.2. Формальное решение задачи.

1. Через Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = U(x_1, x_2, ..., x_N) + \lambda\left(m - \sum_{i=1}^{N} p_i x_i\right)$$

Далее нужно записать условие первого порядка FOC (first order condition) для внутреннего решения:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U(\tilde{x})}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U(\tilde{x})}{\partial x_i} = \lambda p_i \quad \forall i = 1, ..., n$$

$$i \neq j : MRS_{ij} = \frac{\partial U(\tilde{x})/\partial x_i}{\partial U(\tilde{x})/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

2. Если предпочтения строго монотонны, то решение на бюджетной линии. В предположении внутреннего решения (для $N = 2$) можем выразить $x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$ и подставить в целевую функцию:

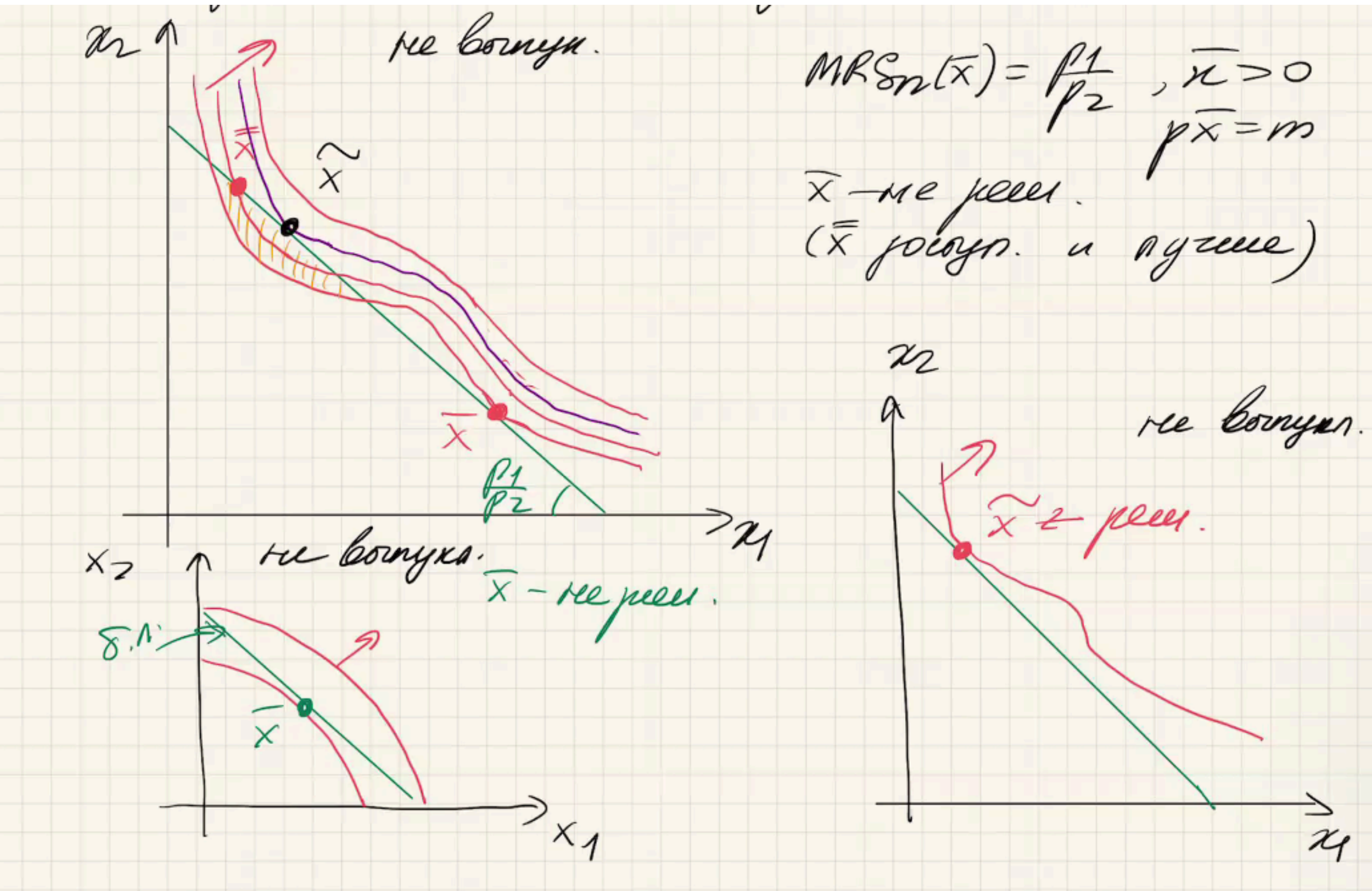
$$u\left(x_1, \underbrace{\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1}_{x_2}\right) \to \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{m}{p_1}}$$

FOC для внутреннего решения:

$$\frac{\partial U(\tilde{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial U(\tilde{x})}{\partial x_2} \cdot \left(-\frac{p_1}{p_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U(\tilde{x})/\partial x_1}{\partial U(\tilde{x})/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow MRS_{12}(\tilde{x}) = \frac{p_1}{p_2}$$

4.2.1. Будет ли $MRS_{ij}\tilde{x} = \frac{p_i}{p_j}$ достаточным условием для внутреннего решения?

Ответ: если предпочтения не выпуклы, то нет!



4.2.2. Утверждение. Критерий внутреннего решения

Если предпочтения строго монотонны, выпуклы и представимы дифференцируемой функцией полезности, то условие $MRS_{ij}(\sim(x)) = \frac{p_i}{p_j}, i \neq j$ является необходимым и достаточным условием внутреннего решения $\tilde{x}$.
То есть, если функция полезности является квазивогнутой, то условие первого порядка является необходимым и достаточным условием внутреннего решения $\tilde{x}$.

4.2.3. Пример. Функция Кобба-Дугласа

$N = 2$, $U(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$
1. Во внутренних наборах ($x \gg 0$) предпочтения строго монотонны. В граничных наборах предпочтения монотонны.
2. Во внутренних наборах предпочтения строго выпуклы. В граничных наборах предпочтения выпуклы (кривые безразличия в граничных точках совпадают с осями).
Тогда $MRS_{12}(\tilde{x}) = \frac{p_1}{p_2}$ будет критерием условиям внутреннего решения. А в силу монотонности решение будет на бюджетной линии.

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 = m \\ MRS_{12}(x) = \frac{p_1}{p_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 = m \\ \dfrac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \dfrac{p_1}{p_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(p, m) = \frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)p_1} > 0 \\ x_2(p, m) = \frac{\beta m}{(\alpha+\beta)p_2} > 0 \end{cases}$$

Может ли решение задачи потребителя быть граничным? То есть, может ли объём потребления одного из благ быть равен нулю?
Раз предпочтения монотонны, то выбор точно на бюджетной линии. Граничных решений на бюджетной линии два — это точки пересечения бюджетной линии с осями: $\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$, $\left(0, \frac{m}{p_2}\right)$. Но полезность в этих точках равна нулю, а во всех внутренних точках она положительна. Значит, граничные точки не могут быть решениями функции Кобба-Дугласа, поэтому для решения задачи потребителя можно записать функцию полезности Кобба-Дугласа как $U(x) = \alpha \log x_1 + \beta \log x_2$.

Окончательно: для функции полезности Кобба-Дугласа $U(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ функция маршаллианского спроса выглядит так:

$$x_1(p, m) = \frac{\alpha m}{(\alpha + \beta)p_1} \qquad x_2(p, m) = \frac{\beta m}{(\alpha + \beta)p_2}$$

4.2.4. Особеннности:

- Спрос на благо зависит только от дохода и цены этого блага.
- Доля расходов на каждое благо в доходе потребителя постоянна:

$$\frac{p_1x_1}{m} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \qquad \frac{p_2x_2}{m} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

Если рассмотреть $\hat{U} = (u)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} x_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$, которая описывает те же самые предпочтения, только сумма степеней теперь равна 1. Тогда показатели степени — доля расходов на каждое благо в доходе потребителя.

5. Лекция 5. Задача потребителя (продолжение)

Напоминание. Пусть $u(x)$ — непрерывная функция полезности, $p > 0$, $m > 0$. Тогда задача потребителя — это задача максимизации полезности на бюджетном множестве, то есть

$$\begin{cases} u(x) \to \max\limits_{x \geqslant 0} \\ px \leqslant m \end{cases}$$

Её решение $x(p, m)$ — отображение (функция) маршаллианского спроса.
Подставляя $x(p, m)$ в целевую функцию, получим косвенную функцию полезности $\mathcal{V}(p, m) = U(x(p, m))$.

5.1. Дифференциальная характеристика граничных решений.

5.1.1. Определение. Граничное решение задачи потребителя

Граничное решение $\tilde{x}$ — такой набор, в котором хотя бы одно благо отсутствует. То есть, $\exists i : x_i = 0$.

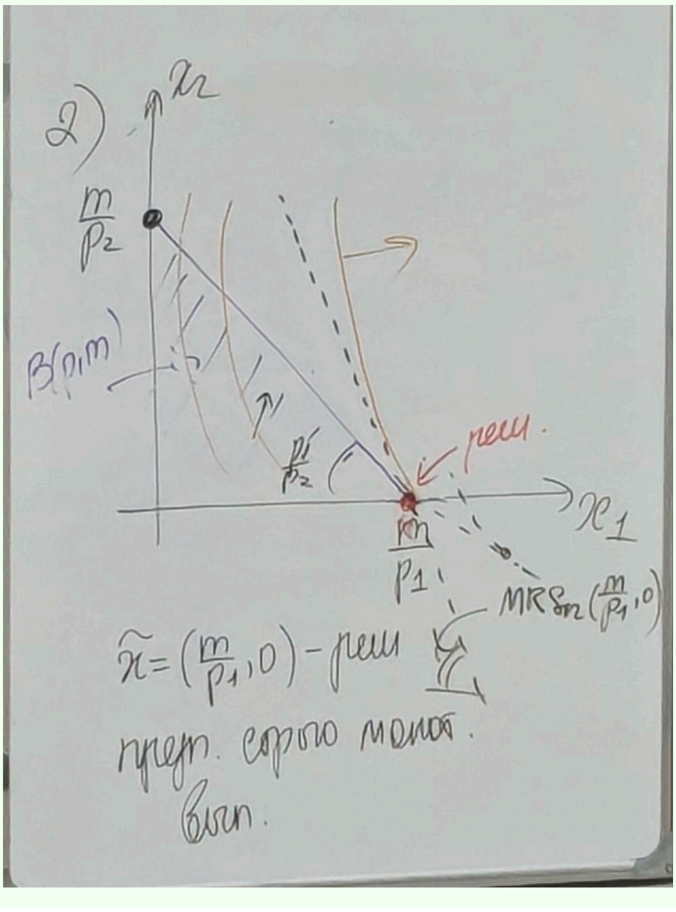
5.1.2. Утверждение.

Пусть $N = 2$ и рассмотрим строго выпуклые строго монотонные предпочтение такие, что решением задачи потребителя является набор $\tilde{x} = \left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$. Тогда имеем

$$MRS_{12}(\tilde{x}) \geqslant \frac{p_1}{p_2}$$

Если же $\tilde{x} = \left(0, \frac{m}{p_2}\right)$, то имеем

$$MRS_{12}(\tilde{x}) \leqslant \frac{p_1}{p_2}$$



5.2. Свойства косвенной функции полезности $\mathcal{V}(p, m)$

Пусть $u(x)$ — непрерывная функция полезности, $p, m > 0$.

5.2.1. Утверждение.

1. $\mathcal{V}(tp, tm) = \mathcal{V}(p, m) \;\; \forall t > 0$
2. $\mathcal{V}(p, m)$ не убывает по доходу и строго возрастает по доходу, если предпочтения монотонны, то есть

$$m' > m \Rightarrow \mathcal{V}(p, m') \geqslant \mathcal{V}(p, m) \;\; (" > " \text{ если предпочтения монотонны})$$

3. $\mathcal{V}(p, m)$ не возрастает по ценам и убывает, если предпочтения монотонны, то есть

$$p' > p \Rightarrow \mathcal{V}(p', m) \leqslant \mathcal{V}(p, m) \;\; (" > " \text{ если предпочтения монотонны})$$

4. $\mathcal{V}(p, m)$ квазивыпукла по (p, m) (доказательство на семинаре).
5. $\mathcal{V}(p, m)$ непрерывна по (p, m).
6. (тождества Роя, Roy's identity)
Пусть предпочтения строго монотонны и строго выпуклы (функция полезности квазивогнута). Пусть $\mathcal{V}(p, m)$ дифференцируема при $(\overline{p}, \overline{m}) \gg 0$, тогда

$$x_i(\overline{p}, \overline{m}) = -\frac{\partial \mathcal{V}(\overline{p}, \overline{m})/\partial p_i}{\partial \mathcal{V}(\overline{p}, \overline{m})/\partial m}$$

5.3. Сравнительная статика маршаллианского спроса.

5.3.1. Терминология.

1. Реакция на доход

- нормальное благо — с ростом (при снижении) дохода объём спроса на благо растёт (снижается). То есть, $\dfrac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} > 0$.

- инфериорное благо — с ростом (при снижении) дохода объём спроса на благо снижается (растёт). То есть, $\dfrac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} < 0$.

- нейтральное к доходу благо — объём спроса на благо не зависит от дохода. То есть, $\dfrac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} = 0$.

2. Реакция на изменение «своей» цены.

- обычное благо — с ростом (при снижении) цены объём спроса на благо снижается (растёт). То есть, $\dfrac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_i} < 0$.

- товар Гиффена — с ростом (при снижении) цены объём спроса на благо растёт (снижается). То есть, $\dfrac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} > 0$.

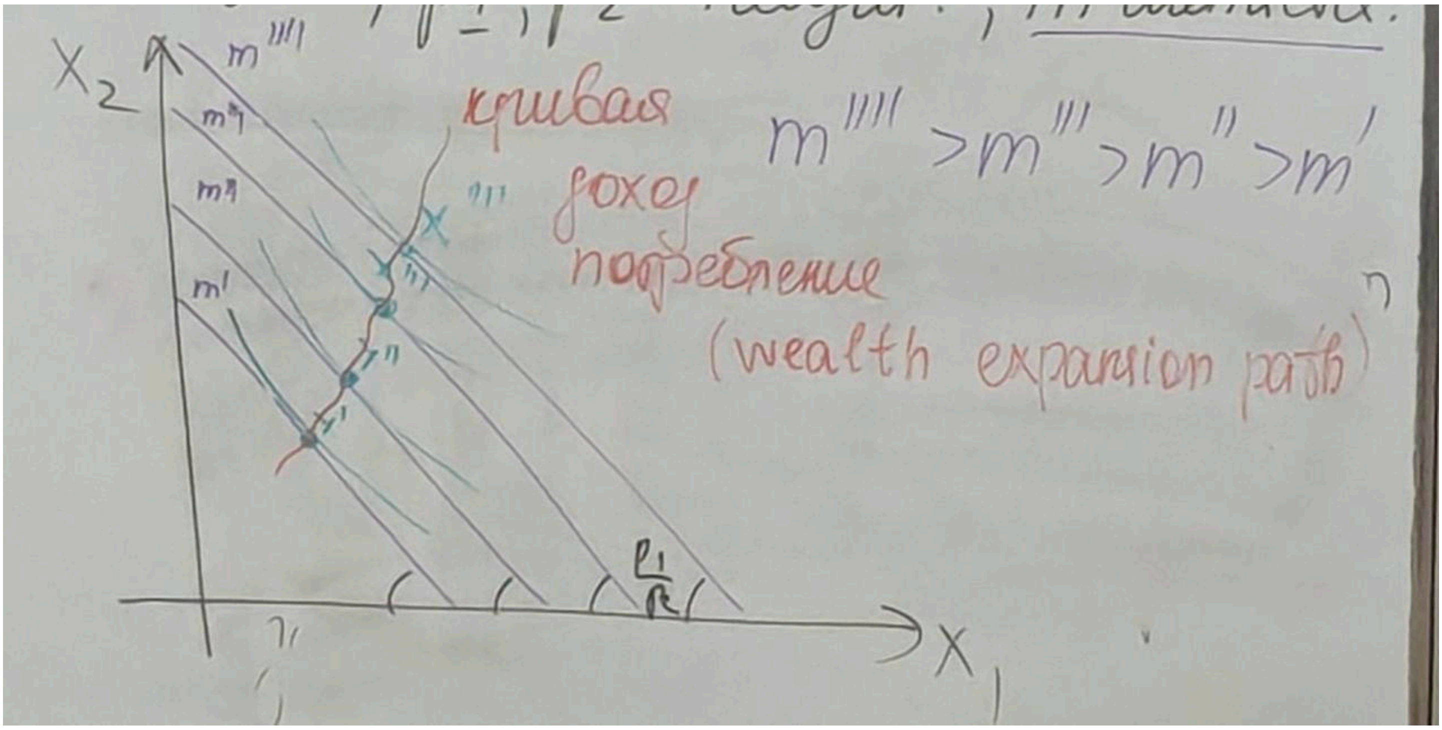
3. Реакция на изменение «чужой» цены.

- (валовые) субституты — с ростом (при снижении) цены субститута объём спроса на благо растёт (снижается). То есть, $\dfrac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} > 0$.

- (валовые) комплементы — с ростом (при снижении) цены комплемента объём спроса на благо снижается (растёт). То есть, $\dfrac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} < 0$.

5.3.2. Подробнее про реакцию на доход.

$N = 2$, p_1, p_2 — незименно, m изменяется.



5.3.3. Определение. Кривая доход-потребление

Кривая доход-потребление — это множество наборов, на которые предъявляется спрос при разных уровнях дохода и неизменных ценах.

5.3.4. Утверждение.

1. Если оба блага нормальные, то кривая доход-потребления в осях (x_1, x_2) имеет положительный наклон.
2. Если кривая доход-потребление имеет отрицательный наклон, то одно из благ — инфериорное, а другое — нормальное, но распределение качеств благ зависит от отношения цен (вообще говоря, от отношения наклона кривой доход-потребление к отношению цен).

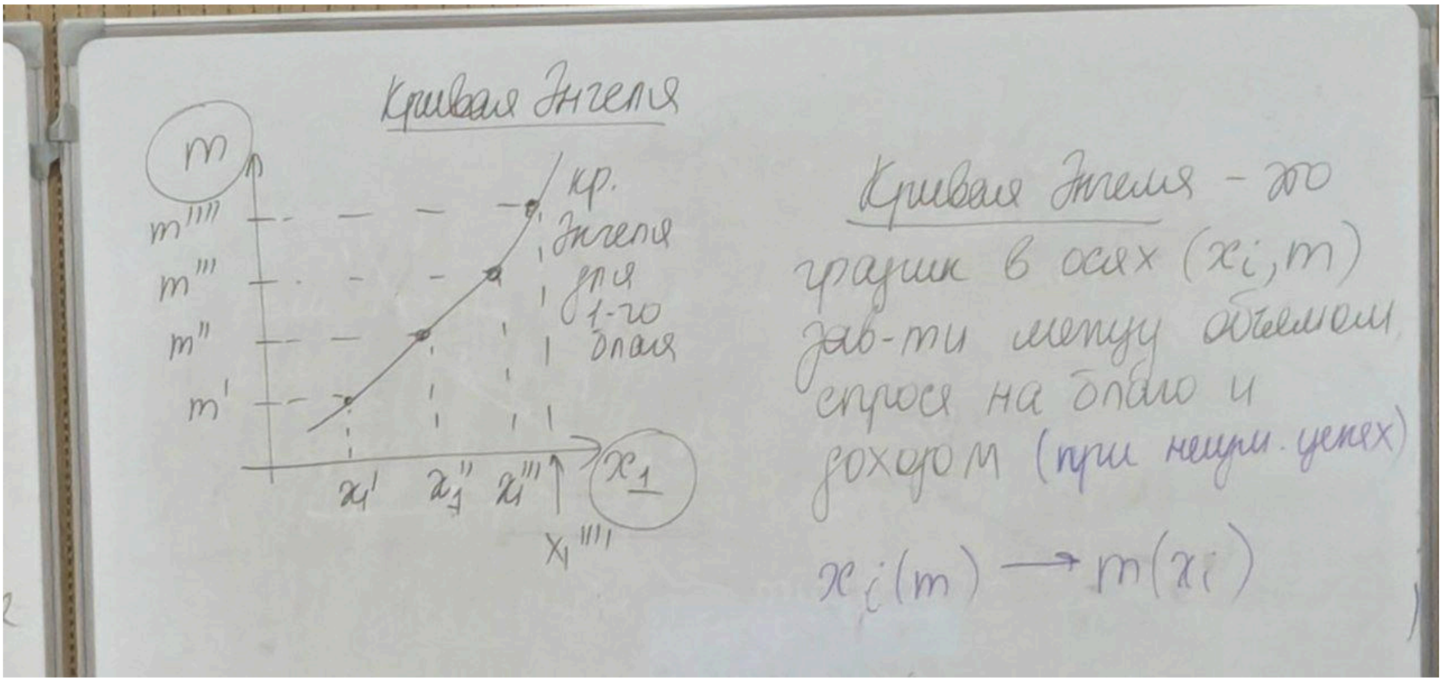
Замечания:

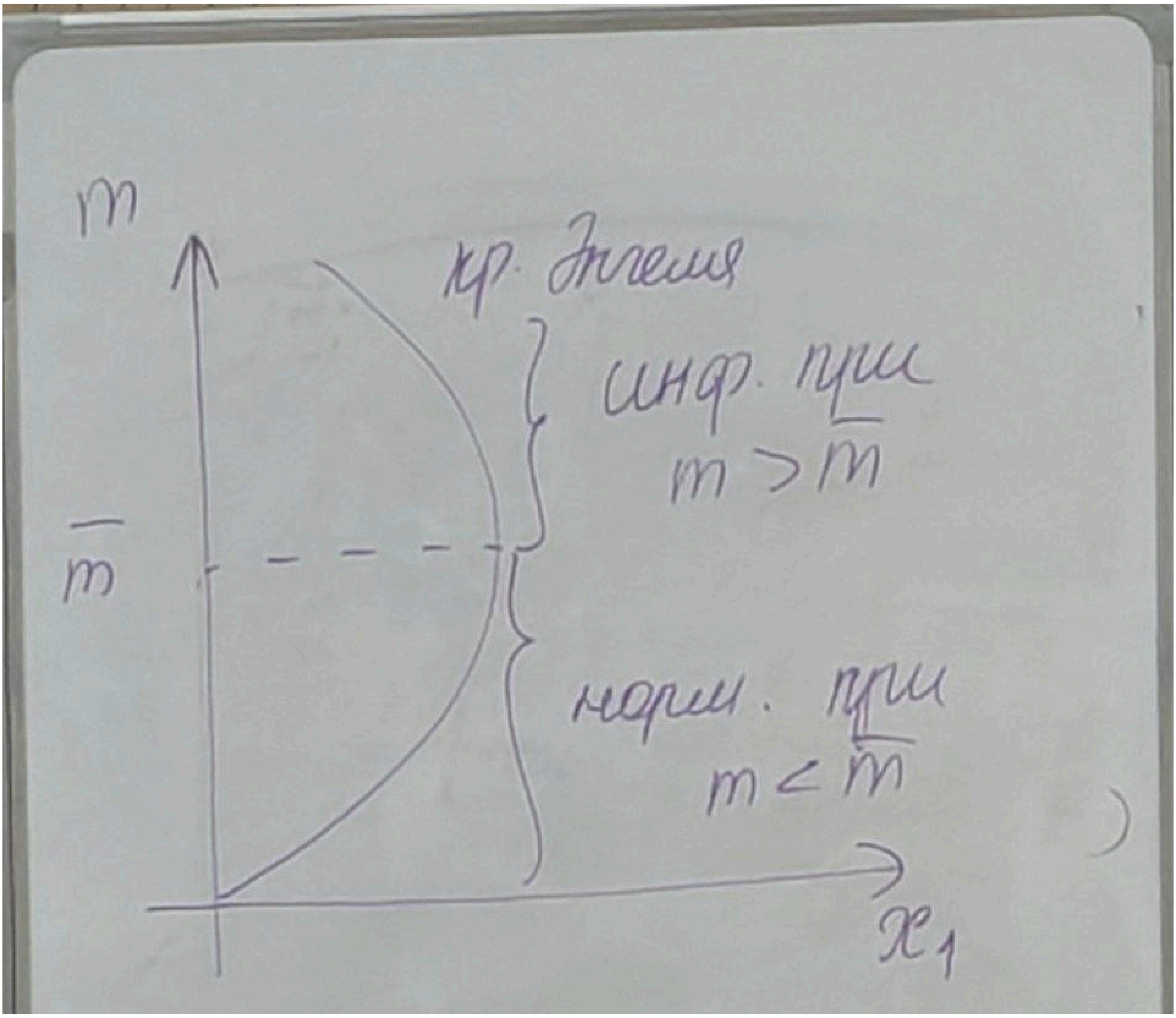
- Если предпочтения монотонны, оба блага не могут быть инфериорными (т.к. иначе падают расходы на оба блага, и выбор не будет на бюджетной линии).

5.3.5. Кривая Энгеля.

5.3.6. Определение.

Кривая Энгеля — график в осях (x_i, m) зависимости между объёмом спроса на благо и доходов при неизменных ценах.


Кривая Энгеля
m
m''''
m'''
m''
m'
кр. Энгеля для 1-го блага
x1'
x1''
x1'''
x1''''
x1
Кривая Энгеля - это график в осях (xi, m) зав-ти между объемом спроса на благо и доходом (при неизм. ценах)
xi(m) → m(xi)


m
кр. Энгеля
инф. при
m > m̄
m̄
норм. при
m < m̄
x1

5.3.7. Пример.

Рассмотрим функцию Кобба-Дугласа $u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta, \alpha, \beta > 0$. Имеем функции спроса:

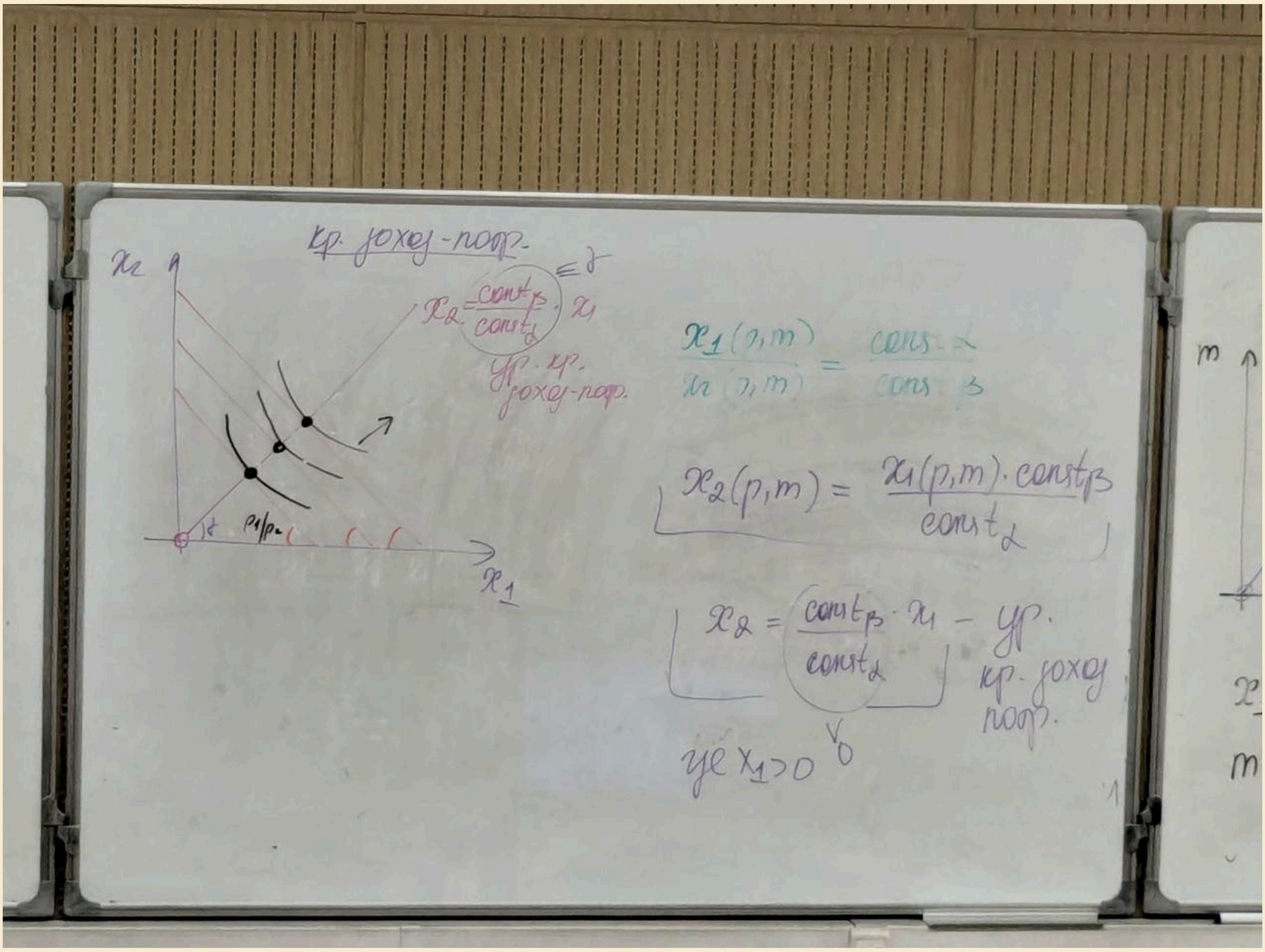
$$x_1(p,m) = \frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)p_1}$$

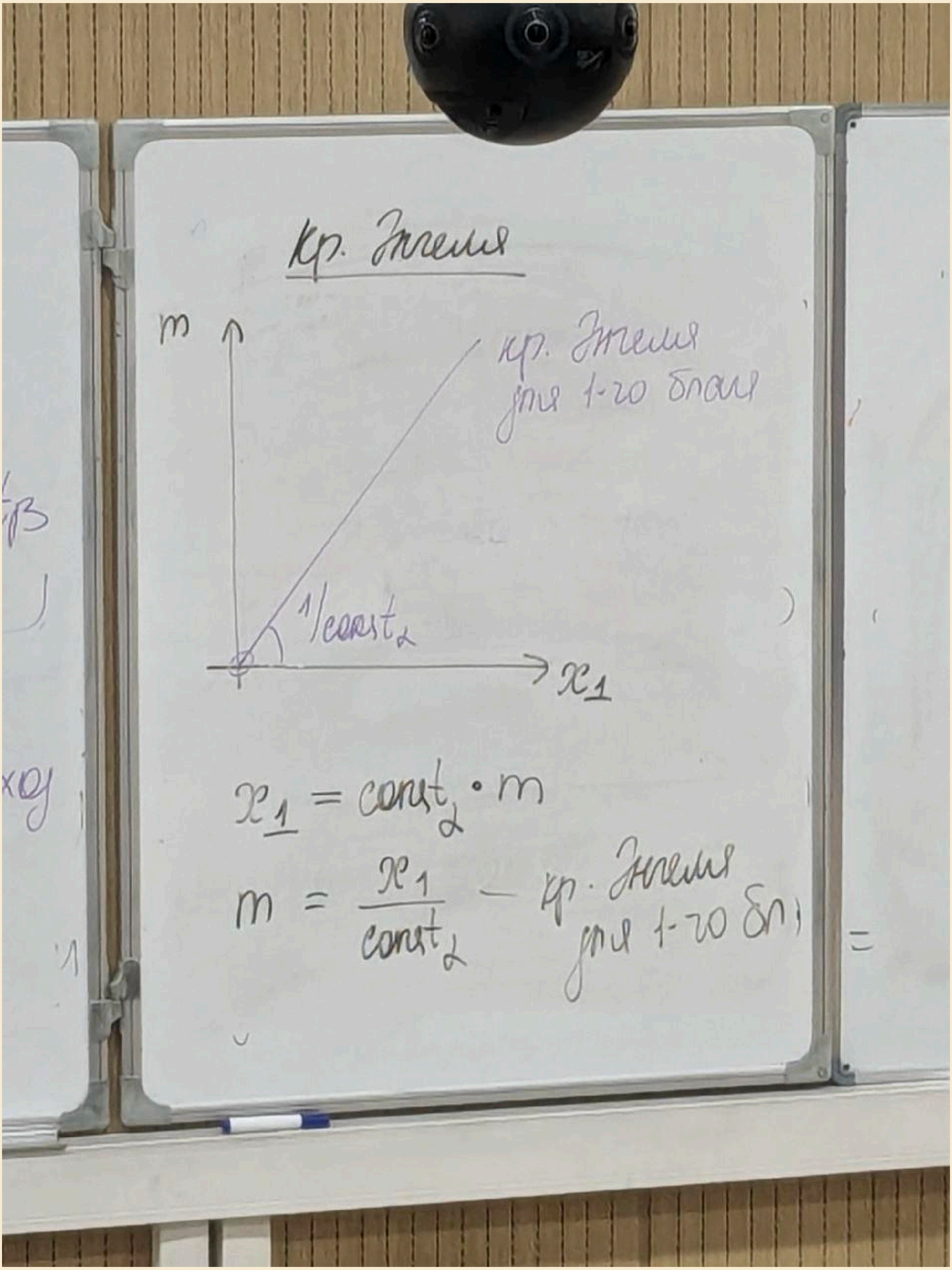
$$x_2(p,m) = \frac{\beta m}{(\alpha+\beta)p_2}$$

Имеем

$$\frac{x_2(p,m)}{x_1(p,m)} = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} = \frac{const_\beta}{const_\alpha} \Rightarrow x_2(p,m) = \frac{const_\beta}{const_\alpha} x_1 - \text{уравнение кривой доход-потребление}$$

Имеем $x_1(p,m) = const_\alpha \cdot m \Rightarrow m = \frac{1}{const_\alpha} x_1$ — кривая Энгеля для 1-го блага.



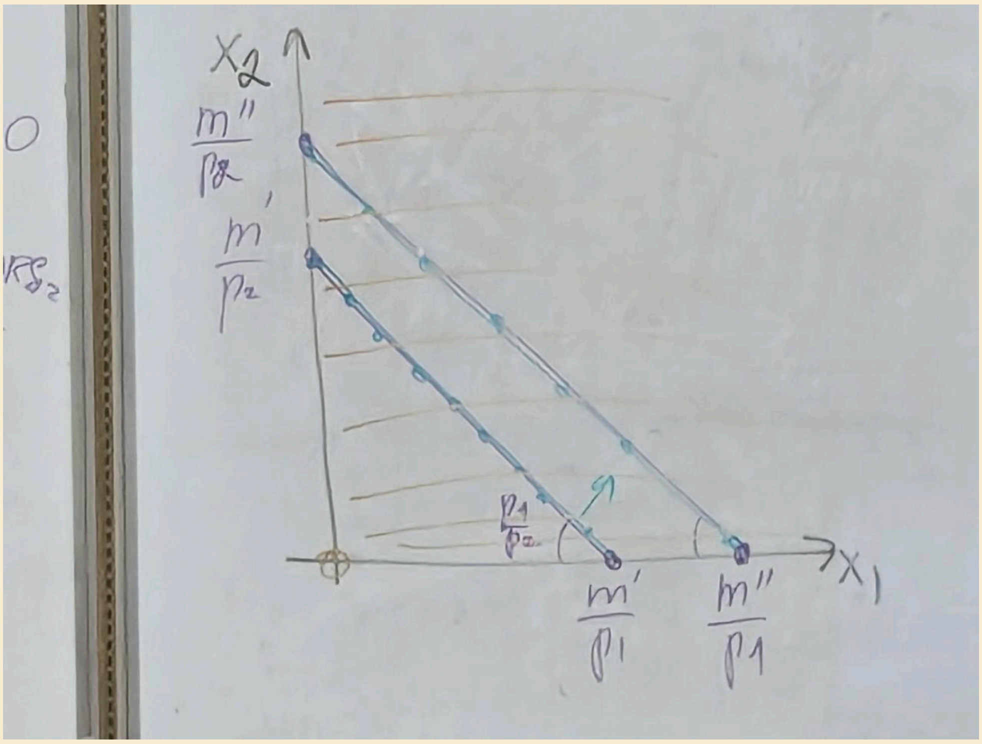

Кр. Энгеля
m
кр. Энгеля
для 1-го блага
1/const₂
x₁
x₁ = const₂ · m
m = x₁ / const₂ – кр. Энгеля для 1-го бл.

5.3.8. Пример. Товары-субституты

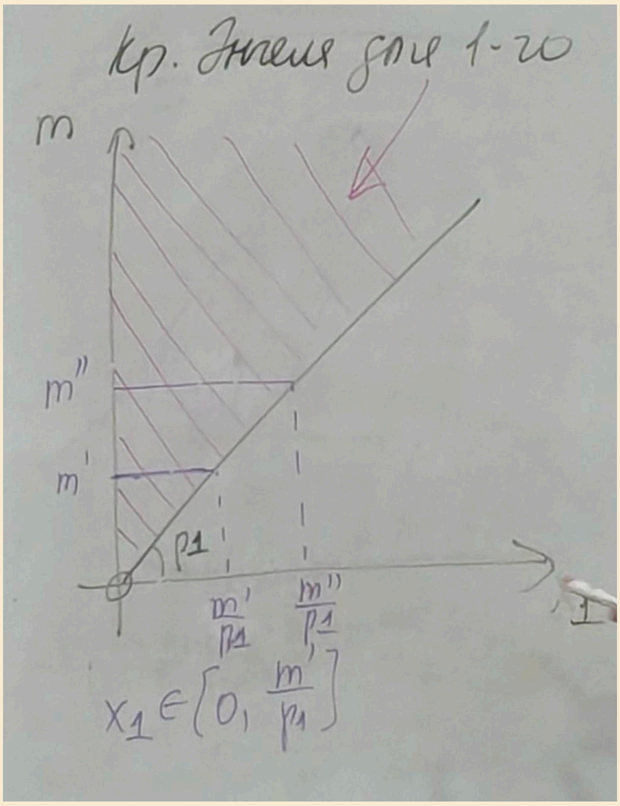
$u(x) = \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha, \beta > 0$. Функции спроса:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m}{p_1}, x_2 = 0, \frac{p_1}{p_2} < \frac{\alpha}{\beta} \\ x_1 = 0, x_2 = \frac{m}{p_2}, \frac{p_1}{p_2} > \frac{\alpha}{\beta} \\ \forall x_1, x_2 : p_1 x_1 + p_2 x_2 = m, \frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

1. $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{\beta}$. Тогда кривая доход-потребление — вся первая четверть, исключая начало координат.

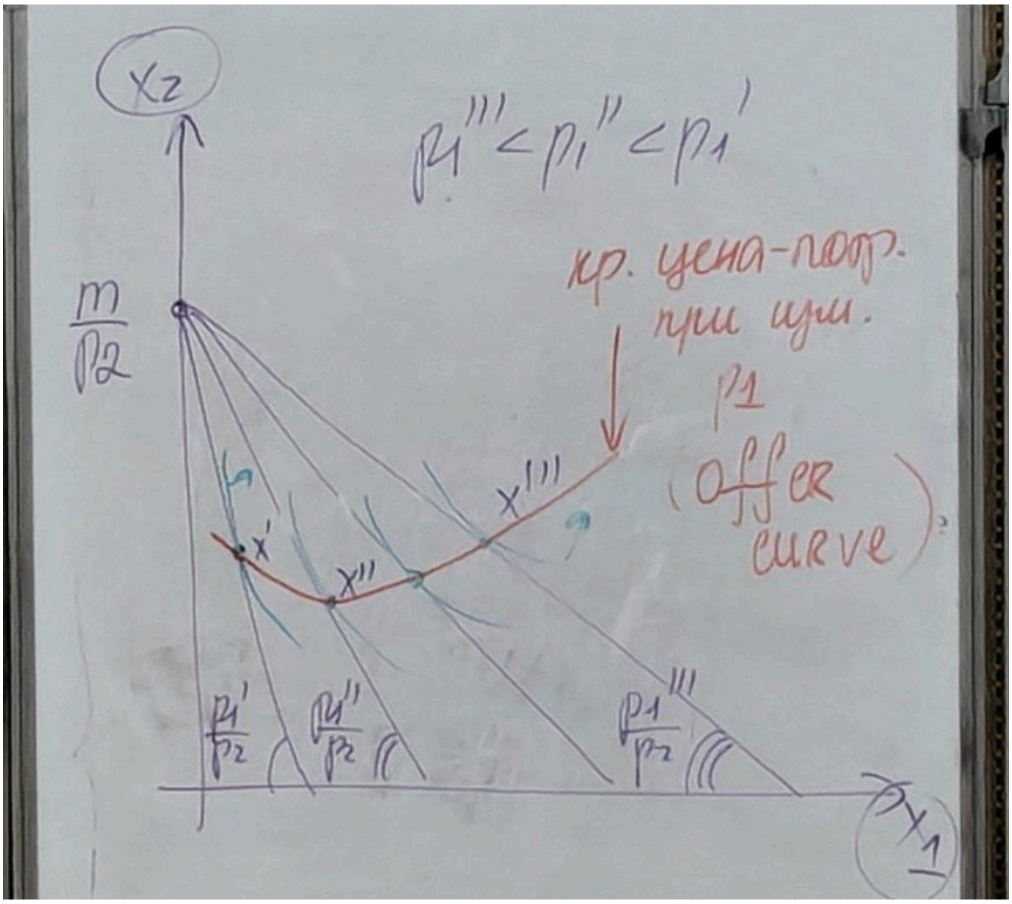


А кривая Энгеля для первого блага — область первой четверти, ограниченная осью Oy и прямой $m = p_1 x_1$.



5.4. Подробнее про реакцию на «свою» цену.

Пусть m и p_2 неизменны, а меняется только цена 1-го блага.

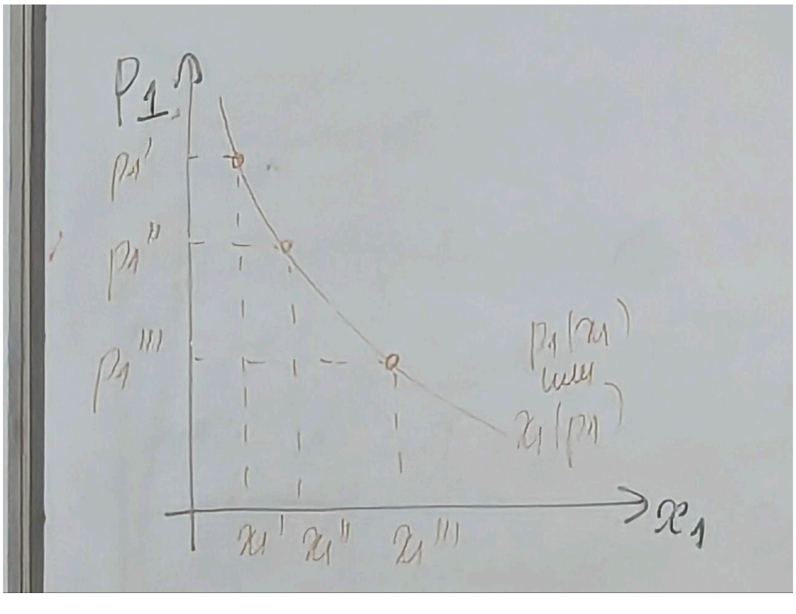


(здесь благо обычное)

5.4.1. Определение. Кривая цена-потребление

Кривая цена-потребление при изменении p_1 — множество наборов, на которые предъявляется спрос при изменении p_1 и неизменных p_2 и m.

В паре с кривой цена-потребление при изменении p_1 идёт кривая спроса на 1-ое благо.
$x_1(p_1)$ — прямая функция маршаллианского спроса на 1-ое благо при фиксированных p_2 и m.
$p_1(x_1)$ — обратная функция маршаллианского спроса на 1-ое благо при фиксированных p_2 и m.
Кривая спроса — график $p_1(x_1)$.

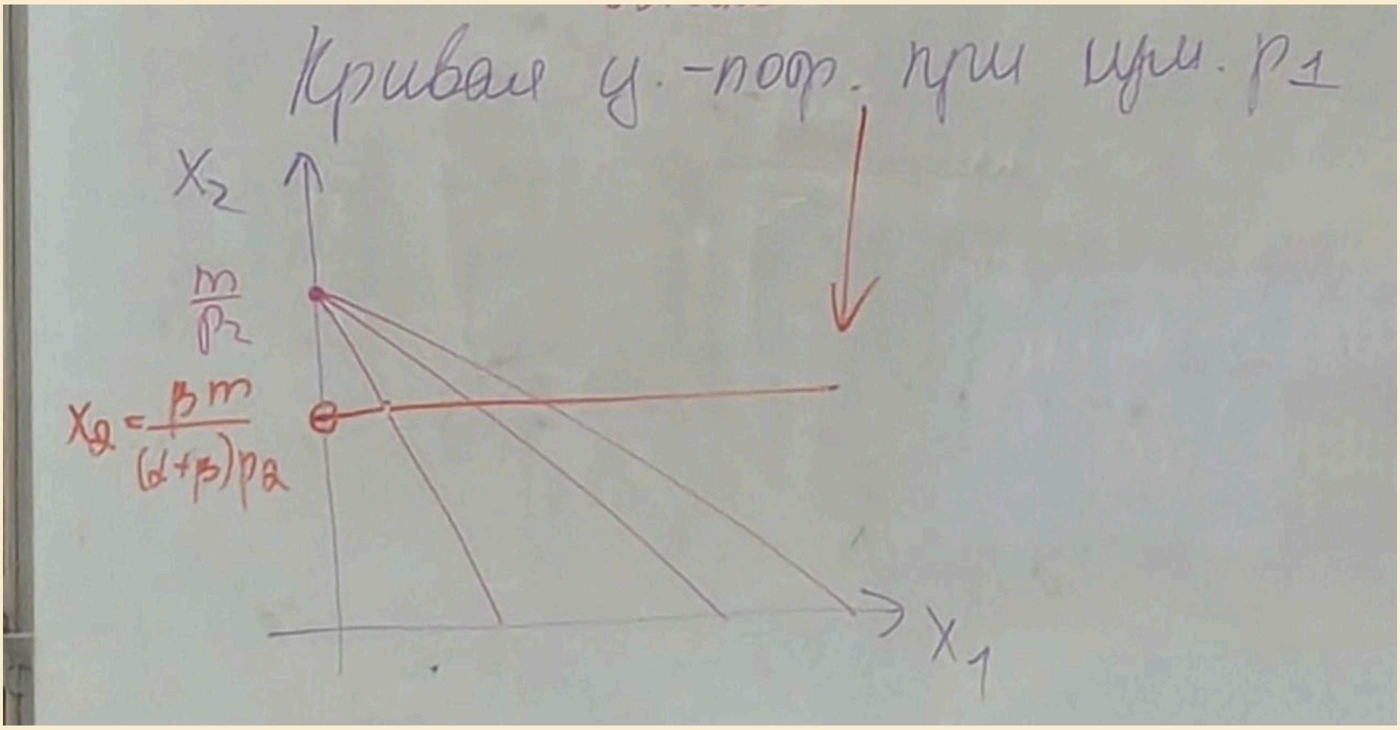


5.4.2. Пример.

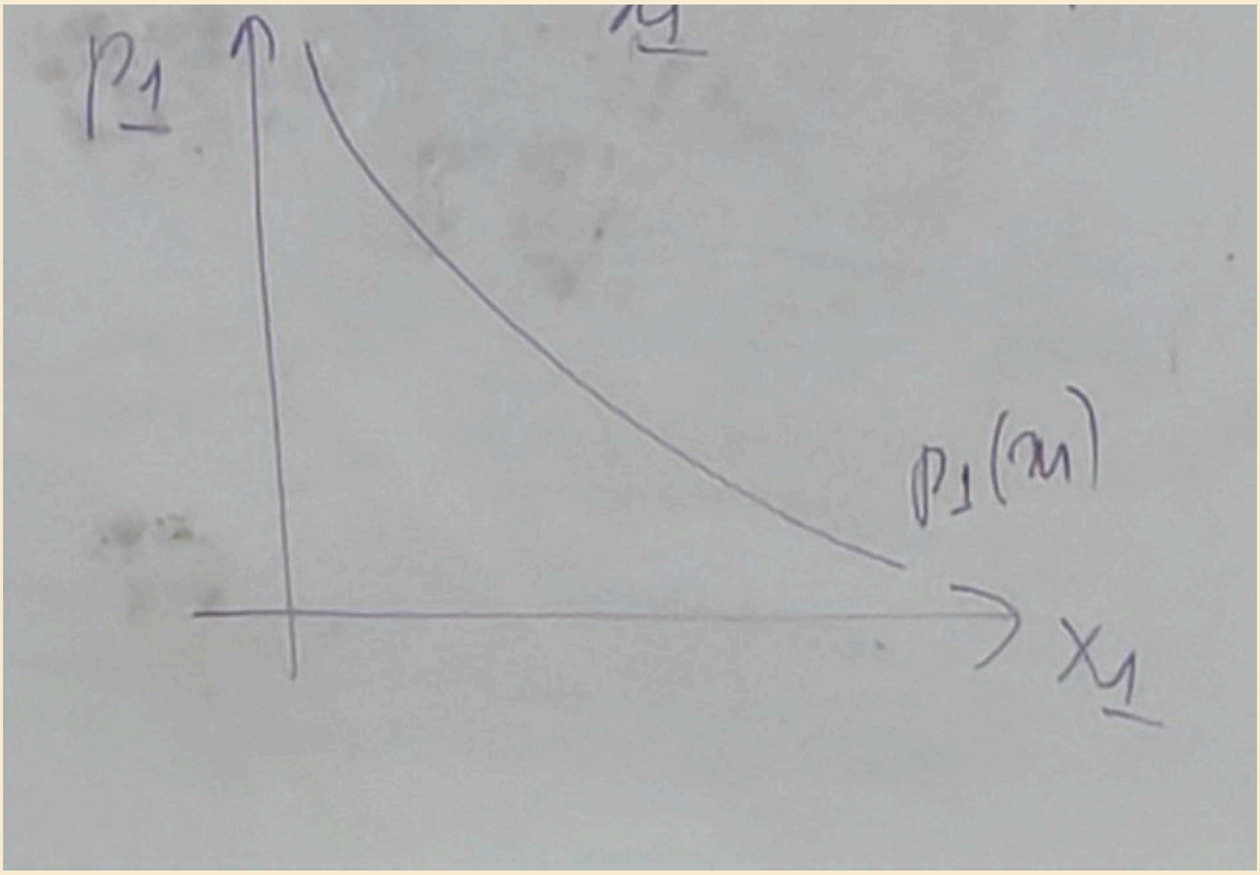
Рассмотрим функцию Кобба-Дугласа $u(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \quad \alpha, \beta > 0$

$$x_1(p, m) = \frac{\alpha m}{(\alpha + \beta) p_1}, x_2(p, m) = \frac{\beta m}{(\alpha + \beta) p_2}$$

Изобразим кривую цена-потребления при изменении p_1. При изменении p_1 не изменяется x_2. Первое благо — обычное.



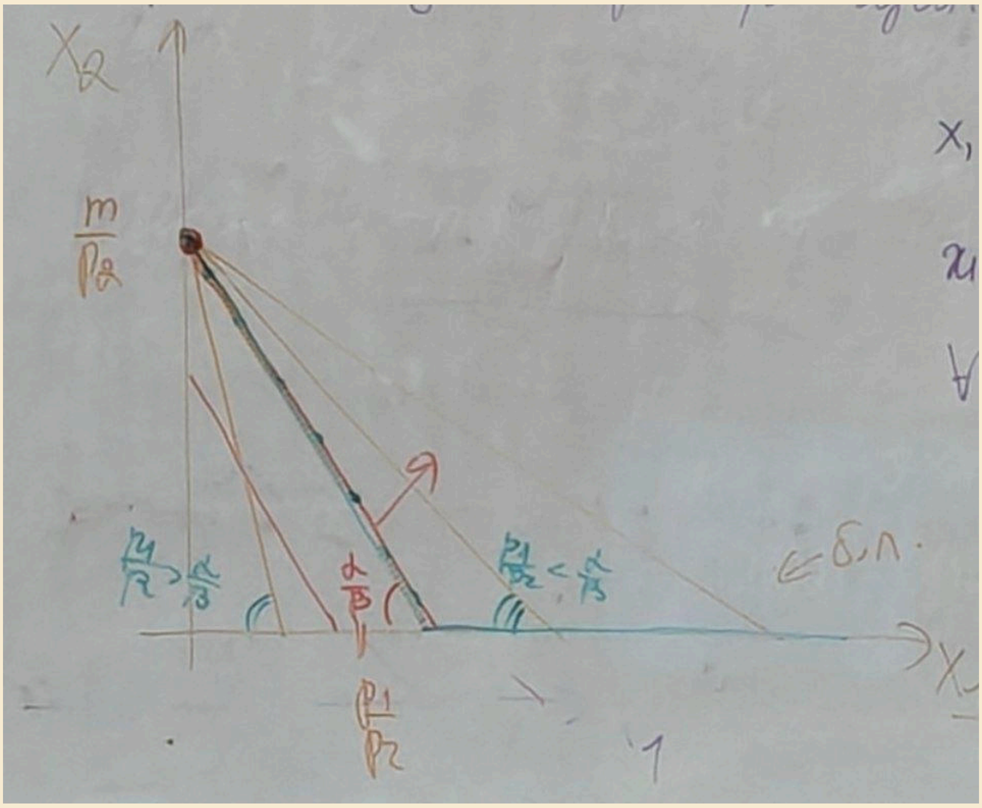
Кривая спроса $x_1(p_1) = \frac{\gamma}{p_1} \Leftrightarrow p_1 = \frac{\gamma}{x_1}$ — гипербола.



5.4.3. Пример. Товары-субституты

$U(x) = \alpha x_1 + \beta x_2 \quad \alpha, \beta > 0.$

1. Кривая цена-потребления при изменении p_1.



6. Лекция 6. Эластичность.

$$\varepsilon_x^f = \frac{\text{изменение f в процентах}}{\text{изменение x в процентах}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f}$$

6.0.1. Определение.

Эластичность f по x в точке —

$$\varepsilon_x^f(x) = \frac{df}{dx} \cdot \frac{x}{f}$$

Показывает, на сколько % изменится f при изменении x на 1%.

6.1. Эластичность маршаллианского спроса по своей цене.

Пусть $x_i(p, m)$ — функция маршаллианского спроса на благо i.

- $\varepsilon_{p_i}^{x_i}$ — эластичность спроса на благо i по своей цене

$$\varepsilon_{p_i}^{x_i} = \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i}$$

Если $x_i(p_i)$ — функция спроса на благо только как функция от p_i при фиксированных остальных ценах и доходе, то

$$\varepsilon_{p_i}^{x_i} = \frac{dx_i}{dp_i} \cdot \frac{p_i}{x_i}$$

показывает, на сколько в % изменится объём спроса при изменении цены на 1%.
В зависимости от реакции на свою цену:
- $\varepsilon_{p_i}^{x_i} < 0$, если благо обычное,
- $\varepsilon_{p_i}^{x_i} > 0$, если благо является товаром Гиффена.

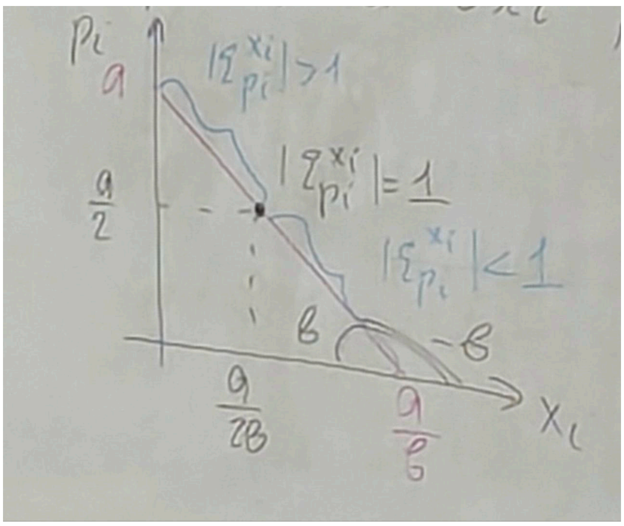
6.1.1. Отступление про линейную кривую спроса.

Обратная функция спроса $p_i(x_i) = a - bx_i$, $a, b > 0 \Rightarrow x_i(p_i) = \dfrac{a - p_i}{b}$ — прямая функция спроса.

$$\varepsilon_{p_i}^{x_i} = \frac{dx_i}{dp_i}\frac{p_i}{x_i} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{p_i}{\frac{a-p_i}{b}} = -\frac{p_i}{a - p_i}$$

Видим, что наклон кривой спроса постоянен, но эластичность в разных точках разная. В частности,

$$\left|\varepsilon_{p_i}^{x_i} = 1\right| \Leftrightarrow p_i = \frac{a}{2}, x_i = \frac{a}{2b}$$



6.1.2. Определение.

Функцию полезности $u(x_1, x_2) = \mathcal{V}(x_1) + x_2$, где $\mathcal{V}(x_1)$ — монотонная строго вогнутая функция, называют квазилинейной функцией.

Если $\mathcal{V}(x_1) = ax_1 - b\dfrac{x_1^2}{2}, a, b > 0$. То во внутреннем решении задачи потребителя имеем

$$\frac{\mathcal{V}'(x_1)}{1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow a - bx_1 = \frac{p_1}{p_2} \overset{\text{при } p_2=1}{\Rightarrow} p_1 = a - bx_1, x_1 < \frac{a}{b}$$

Отступление закончено.

6.2. Разные случаи.

Пусть благо i является обычным.

- $\left|\varepsilon_{p_i}^{x_i}(p_i)\right| = 1$. Для линейной функции это условие достигается ровно в одной точке.

6.2.1. Пример.

Пример функции постоянной эластичности: $u = x_1^\alpha x_2^\beta, \alpha, \beta > 0$.

$$x_1(p, m) = \frac{\alpha m}{(\alpha + \beta)p_1} = \frac{\gamma}{p_1}$$

$$x_1(p_1) = \frac{\gamma}{p_1}$$

$$\varepsilon_{p_1}^{x_1} = \frac{dx_1}{dp_1} \cdot \frac{p_1}{x_1} = -\frac{\gamma}{p_1^2} \cdot \frac{p_1}{\frac{\gamma}{p_1}} = -1$$

- $\left|\varepsilon_{p_i}^{x_i}\right| > 1$ — эластичный (чувствительный к изменению своей цены) спрос.

Особый случай: постоянная эластичность спроса по модулю больше 1.

6.2.2. Пример.

$u(x_1, x_2) = \alpha x_1^\beta + x_2$, где $\alpha > 0, 0 < \beta < 1$. Тогда $x_1(p_1) = \gamma \cdot p_1^\varepsilon$, где $\gamma > 0, \varepsilon < -1$ — эластичность спроса на первое благо по своей цене. Например, если $x_1(p_1) = \frac{1}{p_1^2}$, то $\varepsilon_{p_1}^{x_1} = 2$ (доказательство предоставляется читателю)

- Совершенно эластичный спрос: $\left|\varepsilon_{p_i}^{x_i}\right| \to \infty$. Тогда кривая спроса $p_i(x_i)$ будет горизонтальной.

6.2.3. Пример.

Рассмотрим товары-субституты $u = \alpha x_1 + \beta x_2$, $\alpha, \beta > 0$.
Имеем функцию спроса

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m}{p_1}, x_2 = 0, \frac{p_1}{p_2} < \frac{\alpha}{\beta} \\ x_1 = 0, x_2 = \frac{m}{p_2}, \frac{p_1}{p_2} > \frac{\alpha}{\beta} \\ \forall x_1, x_2 \geqslant 0 : p_1 x_1 + p_2 x_2 = m, \frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

Рассмотрим кривую спроса $x_1(p_1)$, зафиксировав p_2 и m.
Тогда

$$p_1 > \frac{\alpha}{\beta} p_2 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$p_1 = \frac{\alpha}{\beta} p_2 \Rightarrow x_1 \in \left[0, \frac{m}{p_1}\right] = \left[0, \frac{m\beta}{\alpha p_2}\right]$$

$$p_1 < \frac{\alpha}{\beta}(p_2) \Rightarrow x_1 = \frac{m}{p_1} \Leftrightarrow p_1 = \frac{m}{x_1}$$

- Совершенно неэластичный спрос: $\left|\varepsilon_{p_i}^{x_i}\right| = 0$ — вертикальная прямая.

6.2.4. Эластичность спроса по своей цене и расходы на благо.

$p_i x_i(p_i)$ — расходы на благо i. Тогда

$$(p_i \cdot x_i(p_i))'_{p_i} = x_i(p_i) + p_i x_i'(p_i) = x_i(p_i) \cdot \left[1 + x_i'(p_i) \cdot \frac{p_i}{x_i}\right] = x_i(p_i) \cdot \left(1 + \varepsilon_{p_i}^{x_i}\right)$$

Таким образом:
- если спрос эластичен, то есть $\varepsilon_{p_i}^{x_i} < -1$, то $(p_i \cdot x_i(p_i))'_{p_i} < 0$, значит, расходы на благо уменьшаются с ростом цены,
- если спрос неэластичен, то есть $\varepsilon_{p_i}^{x_i} > -1$, то $(p_i \cdot x_i(p_i))'_{p_i} > 0$, значит, расходы на благо увеличиваются с ростом цены

6.3. Эластичность спроса по доходу.

$x_i(p, m)$ — функция спроса на благо i. Тогда эластичность спроса на благо i по доходу это

$$\varepsilon_m^{x_i} = \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} \frac{m}{x_i}$$

- нормальное благо: $\varepsilon_m^{x_i} > 0$,
- инфериорное благо: $\varepsilon_m^{x_i} < 0$,
- нейтральное благо: $\varepsilon_m^{x_i} = 0$

6.3.1. Пример.

Функция Кобба-Дугласа $u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta, \alpha, \beta > 0$

$$x_1(p, m) = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)p_1} m = \gamma m$$

$$\varepsilon_m^{x_1} = \frac{dx_1}{dm} \cdot \frac{m}{x_1} = \frac{\gamma m}{\gamma m} = 1 > 0$$

6.4. Перекрёстная эластичность спроса по цене (реакция на «чужую» цену)

$x_i(p, m)$ — функция спроса на благо i. Тогда эластичность спроса на благо i по цене блага j это

$$\varepsilon^{x_i}_{p_j} = \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i}$$

- валовые субституты: $\varepsilon^{x_i}_{p_j} > 0$,
- валовые комплементы: $\varepsilon^{x_i}_{p_j} < 0$

6.4.1. Пример.

Функция Кобба-Дугласа. $\varepsilon^{x_1}_{p_2} = \varepsilon^{x_2}_{p_1} = 0$. То есть, блага не являются ни субститутами, ни комплементами.

6.5. Связь эластичностей

Для Кобба-Дугласа имеем $\varepsilon^{x_1}_{p_1} + \varepsilon^{x_1}_{p_2} + \varepsilon^{x_1}_{m} = 0$ — это не особенность Кобба-Дугласа, а следствие однородности маршаллианского спроса.

6.5.1. Доказательство.

1. Пусть $f(x_1, ..., x_N)$ — функция, определённая на неотрицательных значениях $(x_1, ..., x_N) \geqslant 0$.
Функция $f(x_1, ..., x_N)$ называется однородной степени k, если $f(tx_1, ..., ..., tx_N) = t^k f(x_1, ..., x_n)\ \ \forall t > 0$.
2. Формула Эйлера для однородных функций.
Пусть $f(x_1, ..., x_N)$ однородна степени k и дифференцируема в точке $(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = \overline{x}$. Тогда

$$k \cdot f(\overline{x}) = \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_1}\overline{x}_1 + ... + \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_n}\overline{x}_n$$

Так как маршаллианский спрос $x_j(p, m)$ однороден степени 0 по ценам и по доходу, то есть $k = 0$, имеем

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x_j(p_1, ..., p_N, m)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i(p_1, ..., p_N, m)} + \frac{\partial x_j(p_1, ..., p_N, m)}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_i(p_1, ..., p_N, m)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon^{x_j}}{p_i} + \varepsilon^{x_j}_m$$

Или, для двух благ и $j = 1$:

$$0 = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial x_1}{\partial p_2}p_2 + \frac{\partial x_1}{\partial m}m \Rightarrow \varepsilon^{x_1}_{p_1} + \varepsilon^{x_1}_{p_2} + \varepsilon^{x_1}_{m} = 0$$

7. Лекция 7. Сравнительная статика маршаллианского спроса: уравнение (тождество) Слуцкого

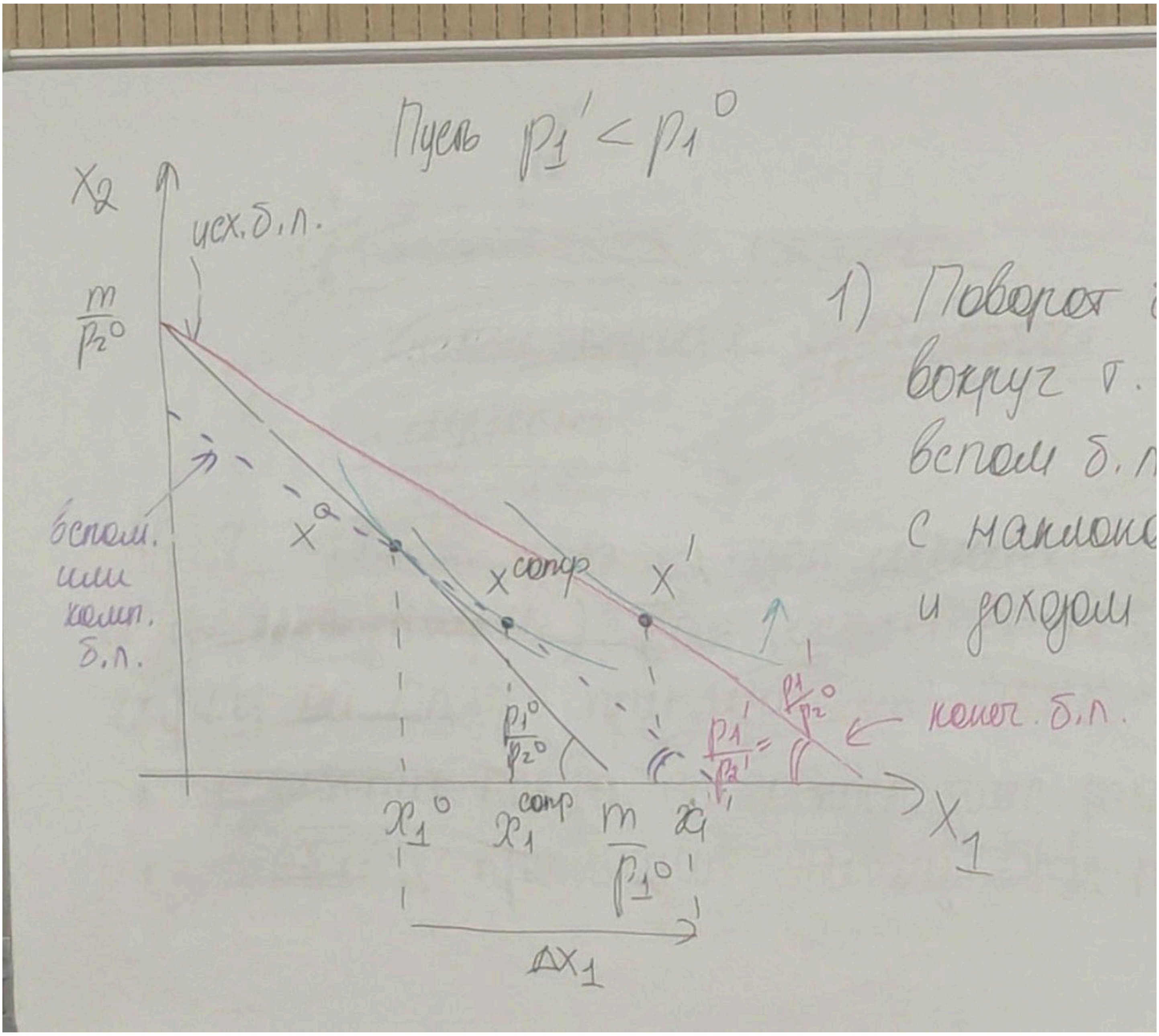
7.1. Декомпозиция по Слуцкому

$N = 2$. Предположим, что меняется одна из цен, доход и другая цена остаются неизменными. Как меняется объём спроса на благо при изменении его цены?

- меняется покупательная способность фиксированная дохода
- меняется пропорция замещения благ по рыночным ценам

Подход Слуцкого для того, чтобы отделить один эффект от другого (декомпозиция по Слуцкому): одновременно с изменением цены так корректировать доход потребителя, чтобы при новых ценах был в точности доступен исходный выбор потребителя.

Пусть $m > 0$ — доход потребителя,
$p^0 = (p_1^0, p_2^0)$ — исходный вектор цен,
$p' = (p_1', p_2')$ — новый вектор цен, где $p_2' = p_2^0, p_1^0 \neq p_1'$,
$x^0 = x(p^0, m)$ — исходнвый выбор,
$x' = x(p', m)$ — выбор при новых ценах (конечный выбор)
Будем считать, что предпочтения монотонны или таковы, что выбор лежит на бюджетной линии.



Происходит следующее:
1) Поворот бюджетной линии вокруг т. x^0. Получается вспомогательная бюджетная линия с наклоном $-\frac{p_1'}{p_2'}$ и доходом m^{comp}
2) На вспомогательной бюджетной линии выбор потребителя — $x^{\text{comp}} = x(p', m^{\text{comp}})$.
3) Сдвиг бюджетной линии от вспомогательной до конечной — цены неизменные, меняется только доход.

7.1.1. Формализация.

1) Корректируем доход так, чтобы при p' был в точности доступен исходный выбор x^0. Этот новый доход называем m^{comp}.

$$m^{\text{comp}} = p'x^0 = p_1'x_1^0 + p_2'x_2^0$$

Так как выбор на бюджетной линии, то

$$p^0x^0 = m = p_1^0x_1^0 + p_2^0x_2^0$$

Тогда

$$\Delta m = m^{\text{comp}} - m = x_1^0(p_1' - p_1^0) = x_1^0\Delta p_1$$

Отсюда видим, что корректировка дохода имеет тот же знак, что и изменение цены.
2) На вспомогательной бюджетной линии при ценах p' и m^{comp} определяем выбор $x^{\text{comp}} = x(p', m^{\text{comp}})$ — компенсированный (по Слуцкому) спрос.
3) $\Delta x_1^{\text{SE}} = x_1^{\text{comp}} - x_1^0 = x_1(p', m^{\text{comp}}) - x_1(p^0, m)$ — изменение величины спроса на первое благо в силу эффекта замещения (substitution effect) по Слуцкому, то есть в силу пропорции замещения благ при неизменной покупательной способности дохода.
4) $\Delta x_1^{\text{IE}} = x_1' - x_1^{\text{comp}} = x_1(p', m) - x_1(p', m^{\text{comp}})$ — изменение величины первого блага в силу эффекта замещения (income ffect) по Слуцкому, то есть при изменении покупательной способности дохода и неизменных ценах.
5) Уравнение (тождество) Слуцкого в абсолютных изменениях:

$$x_1' - x_1^0 = \Delta x_1 = \Delta x_1^{\text{SE}} + \Delta x_1^{\text{IE}}$$

7.1.2. Пример. КБ

$u(x) = x_1x_2$, $m = 16$, $p^0 = (2, 2)$, $p' = (1, 2)$.

- исходный выбор:

$$x_1^0 = \frac{m}{2p_1} = \frac{16}{4} = 4$$

$$x_2^0 = \frac{m}{2p_2} = \frac{16}{4} = 4$$

$$x^0 = (4, 4)$$

- конечнвый выбор:

$$x_1' = \frac{m}{2}p_1' = \frac{16}{2} = 8$$

$$x_2' = 4$$

$$x' = (8, 4)$$

Видим, что

$$\Delta x_1 = x_1' - x_1^0 = 8 - 4 = 4$$

Компенсированный доход:

$$m^{\text{comp}} = p_1' x_1^0 + p_2' x_2^0 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 12 < m = 16$$

$$x_1^{\text{comp}} = \frac{m^{\text{comp}}}{2p_1'} = \frac{12}{2 \cdot 1} = 6$$

$$x_2^{\text{comp}} = \frac{m^{\text{comp}}}{2p_2'} = \frac{12}{2 \cdot 2} = 3$$

Тогда

$$\Delta x_1^{\text{SE}} = x_1^{\text{comp}} - x_1^0 = 6 - 4 = 2$$

$$\Delta x_1^{\text{IE}} = x_1' - x_1^{\text{comp}} = 8 - 6 = 2$$

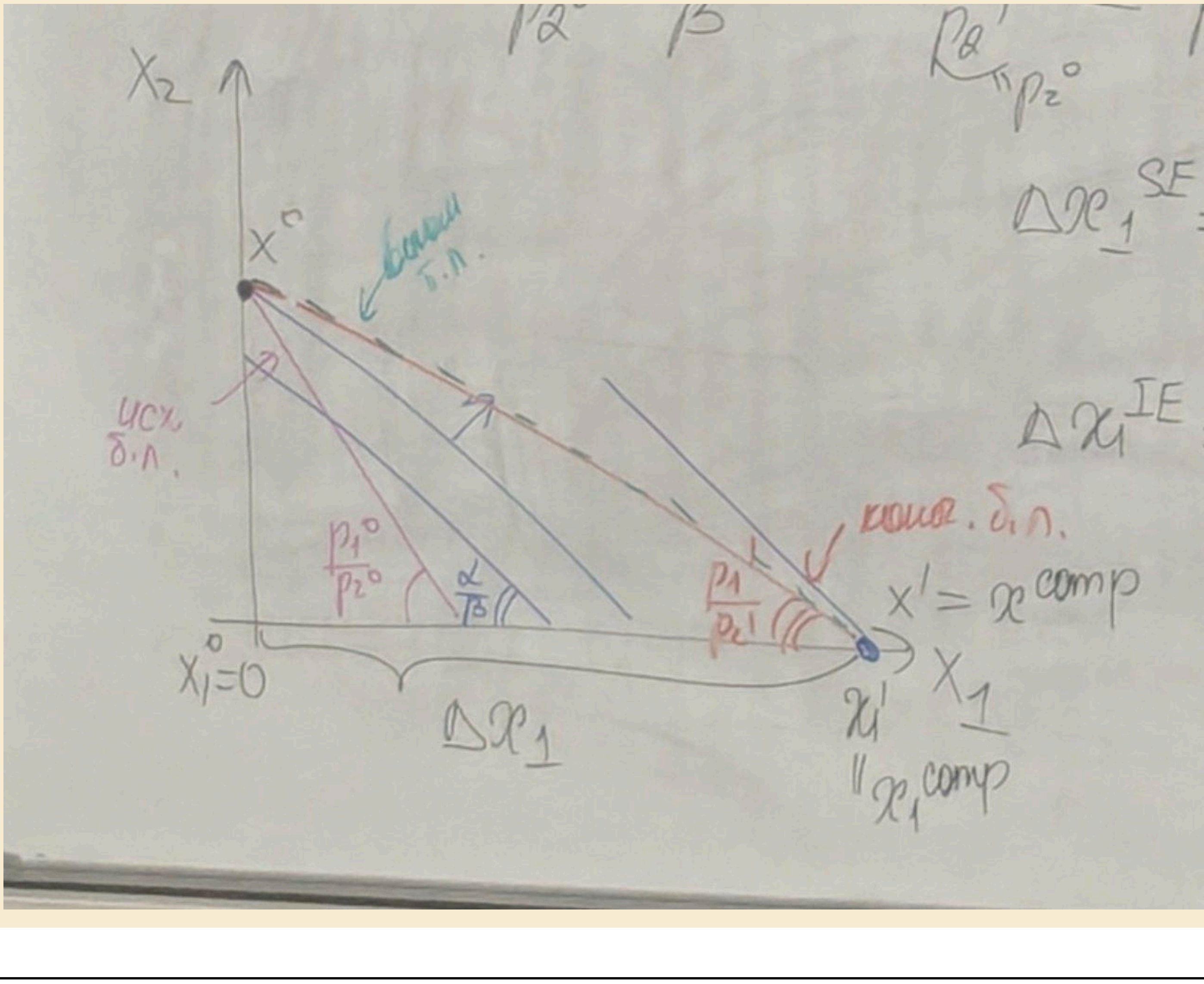
7.1.3. Пример. Субституты

$u(x) = \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha, \beta > 0$ Пусть

$$\frac{p_1^0}{p_2^0} > \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{p_1'}{p_2'} < \frac{\alpha}{\beta}$$

Тогда (см. картинку):
$x_1^0 = 0$,
$x_1' = x_1^{\text{comp}} = \frac{m}{p_1'}$. Тогда

$$\Delta x_1^{\text{SE}} = \Delta x_1^{\text{comp}} - x_1^0 = x_1' - x_1^0 = \Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1^{\text{IE}} = 0$$



7.2. Анализ уравнения (тождества) Слцукого в абсолютных изменениях

1)

7.2.1. Утверждение.

Изменения объёма спроса в силу эффекта замещения противонаправлено изменению цены. То есть,

- если $p_1' < p_1^0$, то $\Delta x_1^{\text{SE}} \geqslant 0 \Leftrightarrow x_1^{\text{comp}} \geqslant x_1^0$,
- если $p_1' > p_1^0$, то $\Delta x_1^{\text{SE}} \leqslant 0 \Leftrightarrow x_1^{\text{comp}} \leqslant x_1^0$

или, если $\Delta p_1 = p_1' - p_1^0$, то

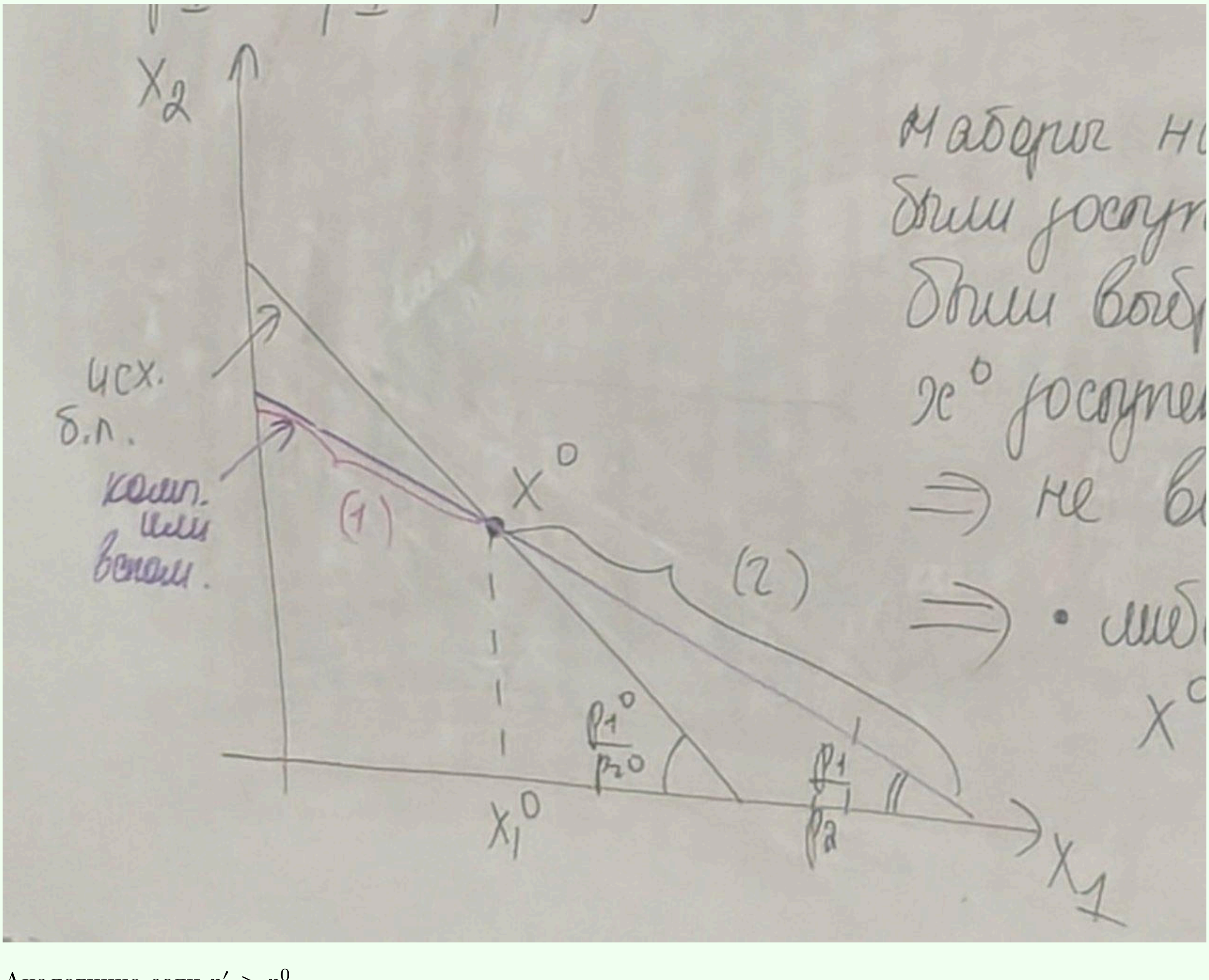
$$\frac{\Delta x_1^{\text{SE}}}{\Delta p_1} \leqslant 0$$

Доказательство:

Пусть $p_1' < p_1^0$, пусть $x^0 \gg 0$.

Наборы на участке (1) компенсированной бюджетной линии были доступны в исходной системе, но не были выбраны, а исхондый выбор x^0 доступен и при компенсированной бюджетной линии. Тогда согласно WARP выбор потребителя не может лежать на участке (1).

Значит, на вспомогательной бюджетной линии потребитель выбирает или набор x^0, или набор правее x^0 на участке (2), значит, $\Delta x_1^{\text{SE}} \geqslant 0$.



Аналогично если $p_1' > p_1^0$.

(мне лень рисовать табличку)

2 $\Delta x_1 = \Delta x_1^{SE} + \Delta x_1^{IE}$

	норм.		инф.		нейтр. к дох.	
	$p_1\downarrow$	$p_1\uparrow$	$p_1\downarrow$	$p_1\uparrow$	$p_1\downarrow$	$p_1\uparrow$
Δx_1^{SE}	≥ 0	≤ 0	≥ 0	≤ 0	≥ 0	≤ 0
Δx_1^{IE}	>0	<0	<0	>0	$=0$	$=0$
Δx_1	>0	<0	?	?	≥ 0	≤ 0
	обычное	обычное				

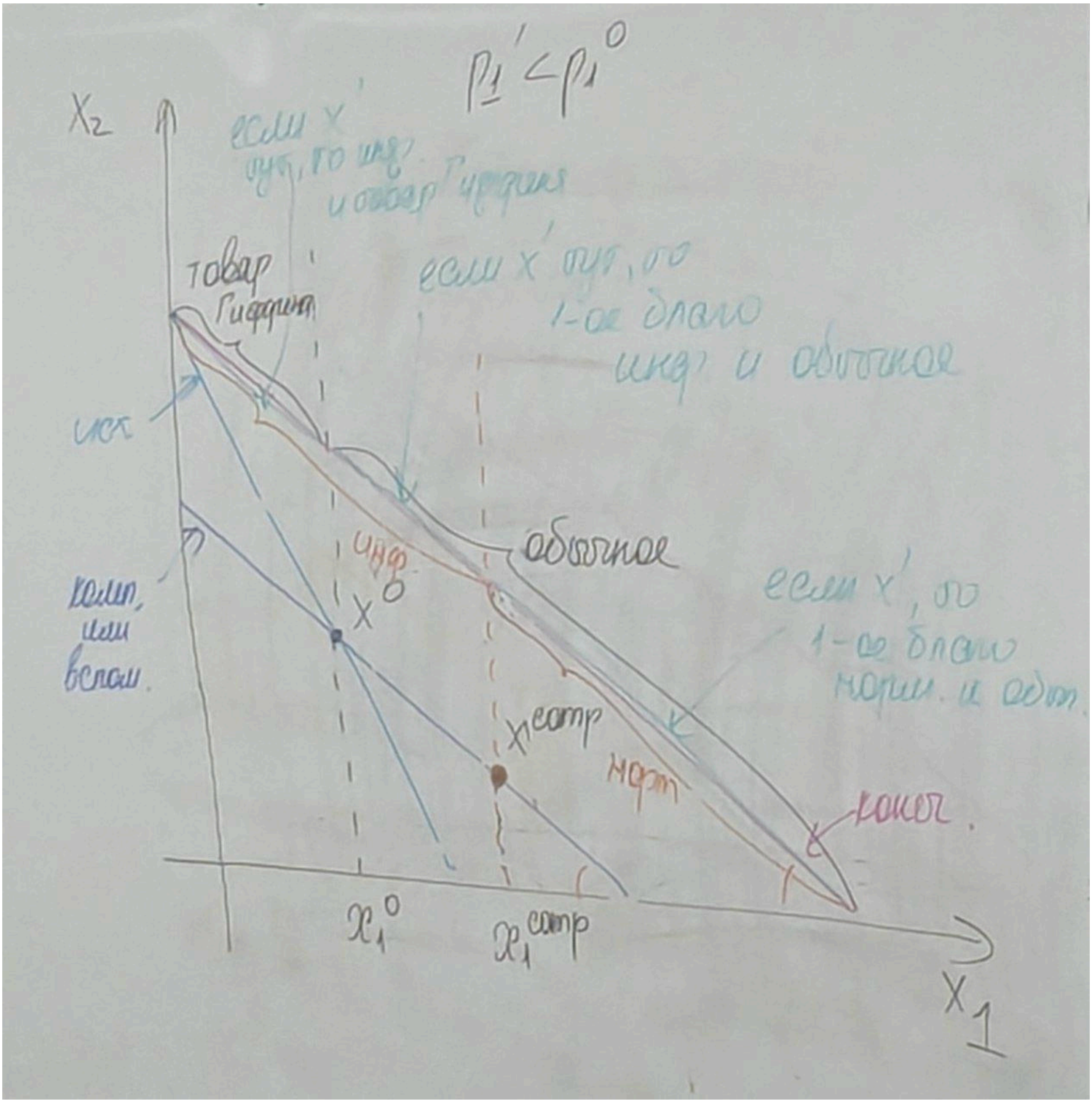
Выводы:

1) Если благо нормальное, то оно обычное (знаки эффектов однонаправлены)

2) Если благо инфериорное, оно может быть как обычным, так и товаром Гиффена:

- если доминирует IE, то товар Гиффена,
- если доиминирует SE, то обычное благо.

2.1) Товар Гиффена обязательно является инфериорным благом, но инфериорное не обязательно является товаром Гиффена.


$p_1' < p_1^0$
X_2
X_1
товар Гиффина
обычное
инф.
норм.
x^0
x^{comp}
x_1^0
x_1^{comp}

7.3. Замечание про уравнение слуцкого в виде отношения изменений.

Имеем

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^{\mathrm{SE}} + \Delta x_1^{\mathrm{IE}} \ \ (*)$$

Разделим обе части $(*)$ на $\Delta p_1 = p_1' - p_1^0$:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^{\mathrm{SE}}}{\Delta p_1} + \frac{\Delta x_1^{\mathrm{IE}}}{\Delta p_1}$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\frac{\Delta x_1^{\mathrm{IE}}}{\Delta p_1} = \frac{x_1' - x_1^{\mathrm{comp}}}{p_1' - p_1^0} = \frac{x_1(p', m) - x_1(p', m^{\mathrm{comp}})}{p_1' - p_1^0}$$

Пусть

$$\Delta x_1^m = -\Delta x_1^{\mathrm{IE}} = x_1^{\mathrm{comp}} - x_1' = x_1(p', m^{\mathrm{comp}}) - x_1(p'm)$$

$$\Delta m = m^{\mathrm{comp}} - m = p'x^0 - p^0x^0 = x_1^0(p_1' - p_1^0) \Rightarrow \Delta m = x_1^0 \Delta p_1 \Rightarrow \Delta p_1 = \frac{\Delta m}{x_1^0}$$

Тогда

$$\frac{\Delta x_1^{\mathrm{IE}}}{\Delta p_1} = -\frac{\Delta x_1^m}{\Delta p_1} = -x_1^0 \frac{\Delta x_1^m}{\Delta m} = -x_1^0 \frac{x_1(p', m^{\mathrm{comp}}) - x_1(p', m)}{m^{\mathrm{comp}} - m}$$

Окончательно уравнение (тождетсво) Слуцкого в относительных изменениях:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^{\mathrm{SE}}}{\Delta p_1} - x_1^0 \frac{\Delta x_1^m}{\Delta m}$$

7.3.1. Замечания.

1) $\dfrac{\Delta x_1^{\mathrm{SE}}}{\Delta p_1} \leqslant 0$ — эффект замещения

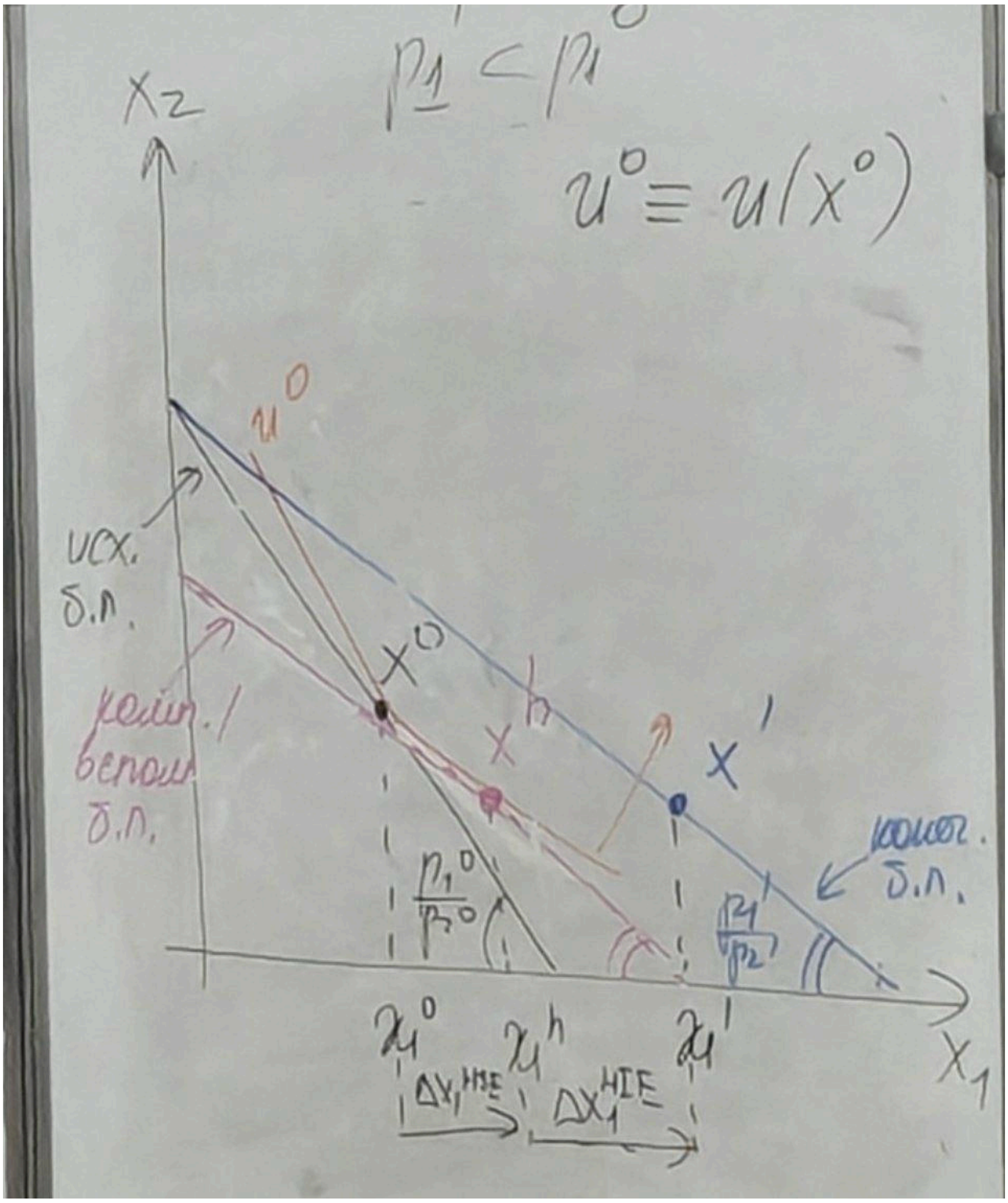
2) $-x_1^0 \dfrac{\Delta x_1^m}{\Delta m}$ — эффект дохода. Знак минус отражает тот факт, что изменение покупательной способности дохода противонаправлено изменению цены.

- для нормального блага и $x_1^0 > 0$ эффект дохода отрицательный, следовательно, знаки эффекта замещения и дохода совпадают.
- для инфериорного блага и $x_1^0 > 0$ эффект дохода положительный, знаки эффектов разнонаправлены.
- чем больше x_1^0, тем значимее эффект дохода.

7.4. Декомпозиция по Хиксу.

Слуцкий: чтобы отделить эффекты одновременно с изменением цены так изменить доход, чтобы при новых ценах в точности был доступен исходный набор x^0.

Хикс: такая корректировка дохода, чтобы при новых ценах был доступен исходный уровень *благосостояния*



x^h — компенсированный выбор по Хиксу: $u(x^0) = u(x^h)$
m^h — компенсированный доход по Хиксу: $m^h = p' \cdot x^h$,

$$\Delta x\mathrm{HSE}_1 = x_1^h - x_1^0$$

$$\Delta x_1^{\mathrm{HIE}} = x_1' - x_1^h$$

Тогда уравнение (тождество) Слуцкого при декомпозиции по Хиксу в абсолютных изменениях:

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^{\mathrm{HSE}} + \Delta x_1^{\mathrm{HIE}}$$

- $\Delta x_1^{\mathrm{HSE}}$ — эффект замещения по Хиксу — изменения величины спроса на благо в силу изменения пропорции замещения благ при неизменном уровне благосостояния. Аналогично SE противонаправлен изменению цены.
- $\Delta x_1^{\mathrm{HIE}}$ — эффект дохода по Хиксу — изменения величины спроса на благо в силу изменения покупательной способности дохода при неизменных ценах.

7.4.1. Пример.

$u(x) = x_1 x_2$, $m = 16$, $p^0 = (2,2)$, $p' = (1,2)$,
$x^0 = (4,4), x' = (8,4)$.
x^h −?, m^h −?

$$\begin{cases} u(x^h) = u(x^0) \\ MRS_{12}(x^h) = \frac{p'_1}{p'_2} \\ m^h = p'_1 x^h_1 + p'_2 x^h_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^h_1 x^h_2 = 16 \\ \frac{x^h_2}{x^h_1} = \frac{1}{2} \\ m^h = p'_1 x^h_1 + p'_2 x^h_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^h_1 \cdot \frac{x^h_1}{2} = 16$$

$$\left(x^h_1\right)^2 = 32$$

$$x^h_1 = 4\sqrt{2} \Rightarrow x^h_2 = 2\sqrt{2}$$

$$m^h = 1 \cdot 4\sqrt{2} + 2 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Тогда

$$\Delta x_1^{\text{HSE}} = x^h_1 - x^0_1 = 4\sqrt{2} - 4 \approx 1.6$$

$$\Delta x_1^{\text{HIE}} = x'_1 - x^h_1 = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2.4$$

8. Лекция 8. Минимизация расходов.

UMP — задача максимизации полезности при бюджетном ограничении — при заданных ценах и доходе выбрать набор(ы), где достигается наибольшая полезность.

EMP — задача минимизации расходов — при заданных ценах выбирается набор(ы), которые позволяют достичь желаемого заданного уровня полезности с наименьшими расходами:

$$\begin{cases} p \cdot x \to \min\limits_{x \geqslant 0} \\ u(x) \geqslant \tilde{u} \end{cases}$$

<u>Предпосылки:</u> будем считать, что предпочтения монотонны и представимы непрерывной функцией полезности $u(x)$ на $\mathbb{X}$, $p \gg 0$; заданный уровень полезности в EMP $u > u\big(\vec{0}\big)$.

<u>Замечание.</u> Полученные далее результаты справедливы при замене требования монотонности на более слабое требование локальной ненасыщаемости предпочтений (LNS) — в любой открытой окрестности любого набора из $\mathbb{X}$ найдётся лучший набор.

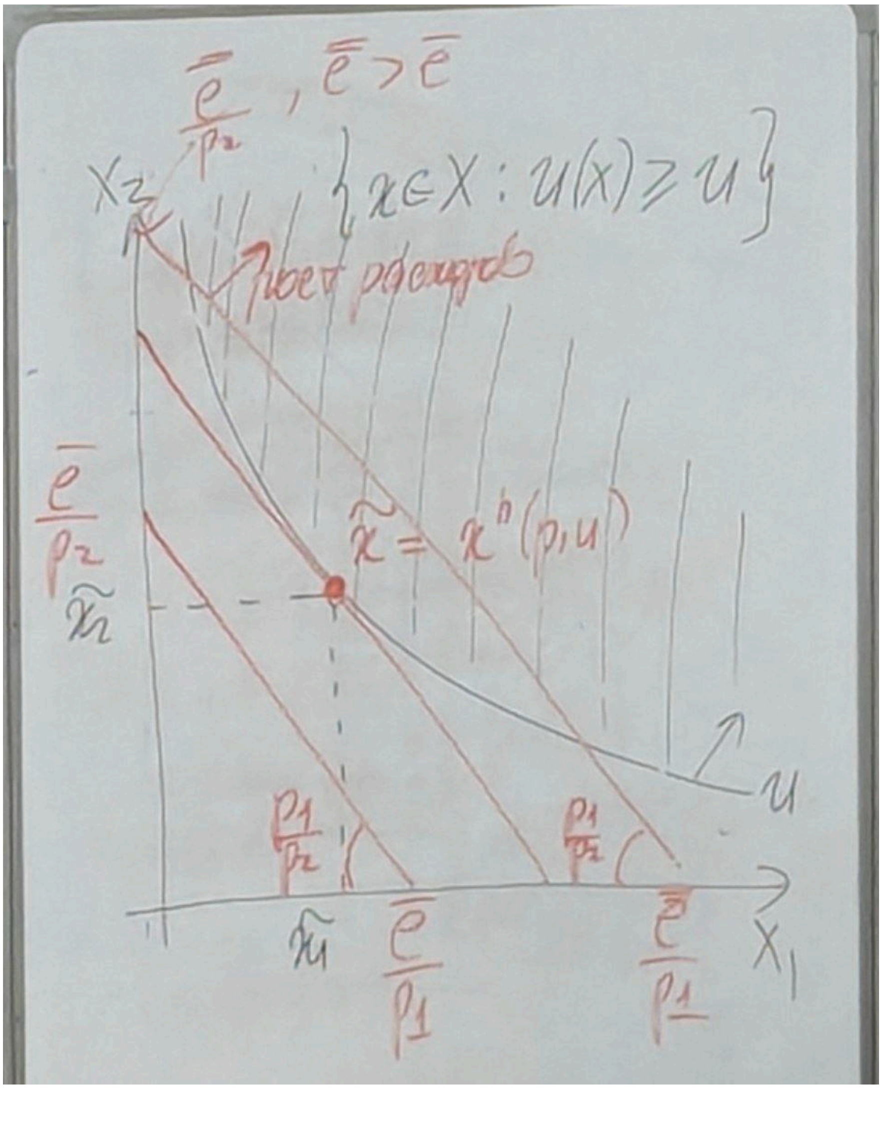
Решением задачи EMP является $x^h(p, u)$ — хиксианский или компенсированный спрос.

Если решение единственно, то $\tilde{x} = x^h(p, u)$ — функция хиксианского спроса.

Подставив $x^h(p, u)$ в целевую функцию EMP, получим функцию расходов: $e(p, u) = p \cdot x^h(p, u)$.

8.1. Графическое прочтение EMP при $N = 2$

- ограничение: $u(x) \geqslant 0$
- целевая функция: $p_1 x_1 + p_2 x_2 = \bar{e}$. Линии уровня этой функции — прямые с наклоном $-\frac{p_1}{p_2}$, чем дальше от начала координат, тем расход больше.



На рисунке:

- $\tilde{x} > 0$
- $u(\tilde{x}) = u$ на кривой безразличия
- $\mathrm{MRS}_{12}(\tilde{x}) = \frac{p_1}{p_2}$ — касание кривой безразличия и линии постоянных расходов.

Замечание: маршаллианский спрос — наблюдаемый выбор, хиксианский спрос — абстракция.

8.2. Формальное решение EMP

$$L = px + \lambda(u - u(x))$$

FOC (необходимым, причём будет и достаточным, если предпочтения выпуклы) для внутреннего решения по x_i:

$$\forall i \ \ p_i - \lambda \frac{\partial u(\tilde{x})}{\partial x_i} = 0$$

Получаем, что

$$p_i = \lambda \frac{\partial u(\tilde{x})}{\partial x_i} \Rightarrow \forall i \neq j \ \ \frac{p_i}{p_j} = \frac{\partial u(\tilde{x})/\partial x_i}{\partial u(\tilde{x})/\partial x_j}$$

$p \to$ линии уровня $px = \overline{e}$,
$2p \to$ линии уровня $2px = \overline{\overline{e}} \Rightarrow px = \frac{\overline{\overline{e}}}{2}$.

8.3. Свойства хиксианского спроса.

Пусть $p \gg 0$, $u(x)$ — непрерывна, предпочтения монотонны, $u > u(0)$. Тогда хиксианский спрос $x^h(p,u)$ обладает следующими свойствами:
1. Однородность степени 0 по ценам, то есть

$$x^h(tp, u) = x^h(p,u) \ \ \forall t > 0$$

Изменение всех цен в $t > 0$ раз не меняет ограничение задачи, только приводит к пропорциональному изменению расходов $\Rightarrow$ такое изменение не повлияет на решение задачи.
2. В решении задачи ограничение выполняется как равенство, то есть $u\big(x^h(p,u)\big) = u$ (решения лежат на кривой безразличия u).
Действительно, пусть существует решение EMP x' такое, что $u(x') > u$. Рассмотрим $x'' = \alpha x', \alpha \in (0,1)$. Тогда

- $px'' < px'$
- В силу непрерывности функции полезности $\exists \alpha \in (0,1) : u(x'') > u$.

Это противоречит тому, что x' — решение.
3. Если предпочтения выпуклы, то $x^h(p,u)$ — выпуклое множество; если предпочтения строго выпуклы, то решение EMP единственно, т.е. $x^h(p,u)$ — функция хиксианского спроса.
4. Если предпочтения строго выпуклы (тогда $x^h(p,u)$ — функция), выполнен закон компенсированного спроса:

$$(p'' - p')\big(x^h(p'',u) - x^h(p',u)\big) \leqslant 0$$

Замечаение:

- закон спроса как противонаправленность изменения цены и объёма оптребления для хиксианского спроса, а для маршаллианского спроса — нет.
- закон компенсированного спроса— обоснование неположительности эффекта замещения по Хиксу:

$$\frac{\Delta x_i^{\mathrm{HSE}}}{\Delta p_i} \leqslant 0$$

Доказательство.
Пусть $x' = x^h(p',u)$, $x'' = x^h(p'',u)$ — решения EMP. Нужно доказать, что

$$(p'' - p')(x'' - x') \leqslant 0$$

Тогда
1. $p'x' \leqslant p'x \;\; \forall x \in \mathbb{X} : u(x) \geqslant u$. Так как $u(x'') = u$, то $p'x' \leqslant p'x''$ (1)
2. Аналогично $p''x'' \leqslant p''x'$ (1).
3. Сложим (1) и (2):

$$p'x' + p''x'' \leqslant p'x'' + p''x'$$

$$p'x' - p''x' + p''x'' - p'x'' \leqslant 0$$

$$x'(p' - p'') + x''(p'' - p') \leqslant 0$$

$$(p'' - p')(x'' - x') \leqslant 0$$

■

8.3.1. Пример.

Опять Кобб-Дугласс: $u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta, \;\; \alpha, \beta > 0$
- найти хиксианский спрос
- найти функцию расходов

Задача минимизации расходов:

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 \to \min\limits_{x_1, x_2 \geqslant 0} \\ x_1^\alpha x_2^\beta = u \end{cases}$$

$$L = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda\Big(u - x_1^\alpha x_2^\beta\Big)$$

FOC для внутреннего решения (необходимо и достаточно):
по $x_1 : p_1 - \lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta = 0$,
по $x_2 : p_2 - \lambda\beta x_1^\alpha x_2^{b-1} = 0$

$$\begin{cases} p_1 = \lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta \\ p_2 = \lambda\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} \end{cases}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{p_1}{p_2}\frac{\beta}{\alpha}x_1$$

$$u = x_1^\alpha x_2^\beta = x_1^\alpha \left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^\beta x_1^\beta = u$$

$$x_1^{\alpha+\beta} = u\left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^\beta$$

$$x_1 = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = x_1^h(p, u) - \text{хиксианский спрос на первое благо}$$

$$x_2^h(p, u) = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Функция расходов.

$$p_1x_1^h(p, u) = p_1u^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$p_2x_2^h(p, u) = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$e(p,u) = p_1 x_1^h(p,u) + p_2 x_2^h(p,u) = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right]$$

1. Как $e(p,u)$з ависит от u? Чем больше u, тем выше расходы.
2. Как $e(p,u)$ зависит от p_1, p_2? Возрастает по p_1 и по p_2.
3. $e(p,u)$ строго вогнута по p.

8.4. Свойства функции расходов.

Пусть $u(x)$— непрерывна, предпочтения монотонны, $p \gg 0, u > u(0)$, тогда функция расходов $e(p,u)$ обладает следующими свойствами:
1. Однородность первой степени по ценам, т. е. $e(tp,u) = te(p,u) \quad \forall t > 0$,
2. Возрастает по уровеню полезности, то есть $u'' > u' \to e(p,u'') > e(p,u')$.
3. $e(p,u)$ не убывает по p_i, то есть $e(p'',u) \geqslant e(p',u)$, где $p_i'' > p_i', p_j'' = p_j', i \neq j$. То есть, если возрастает цена хотя бы одного блага, то расходы не могут уменьшиться.

8.4.1. Утверждение.

4. $e(p,u)$ вогнута по p.

Доказательство:
Пусть $x' = x^h(p',u), x'' = x^h(p'',u) \Rightarrow e(p',u) = p'x', e(p'',u) = p''x''$. Тогда нужно доказать, что

$$e(\alpha p' + (1-\alpha)p'', u) \geqslant \alpha e(p',u) + (1-\alpha)e(p'',u), \quad \alpha \in [0,1]$$

Рассмотрим $\overline{p} = \alpha p' + (1-\alpha)p'', \overline{x} = x^h(\overline{p},u)$. Тогда $e(\overline{p},u) = \overline{p} \cdot \overline{x}$. Тогда
- $p'x' \leqslant p'\overline{x}$
- $p''x'' \leqslant p''\overline{x}$

Рассмотрим сумму $\alpha(1) + (1-\alpha)(2)$:

$$\alpha p'x' + (1-\alpha)p''x'' \leqslant \alpha p'\overline{x} + (1-\alpha)p''\overline{x} = \overline{x}(\alpha p' + (1-\alpha)p'') = \overline{p} \cdot \overline{x} = e(\overline{p},u)$$

Откуда следует требуемое. ■

8.4.2. Утверждение.

5. (Лемма Шепарда) Пусть $e(p,u)$ дифференцируема, пусть предпочтения строго выпуклы; решение EMP внутреннее, то есть $x^h(p,u) \gg 0$. Тогда:

$$\boxed{x_i^h(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}}$$

Идеи доказательства:
1) через FOC: Надо рассмотреть

$$\frac{\partial e}{\partial p_i} = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = \frac{\partial \big(p \cdot x^h(p,u)\big)}{\partial p_i} = \ldots$$

и продифференцировать как производную произведения, помня о дифференциальной характеристике внутреннего решения.

2) через теорему об огибающей

9. Лекция 9. Свойства функции расходов (продолжение).

9.1. Лемма Шепарда.

9.1.1. Утверждение. Лемма Шепарда

Пусть предпочтения монотонны и строго выпуклы и представимы непрерывной функцией полезности. Пусть $x^h(p,u) > 0$ и функция расходов $e(p,u)$ дифференцируема. Тогда

$$x_i^h(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$$

9.1.2. Доказательство леммы Шепарда.

1)

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = \frac{\partial\left(p \cdot x^h(p,u)\right)}{\partial p_i} = \frac{p_1 x_1^h(p,u) + \ldots + p_i x_i^h(p,u) + \ldots + p_N x_{i(p,u)}^h}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j x_j^h(p,u)}{\partial p_i} =$$

$$= x_i^h(p,u) + p_i \frac{\partial x_i^h(p,u)}{\partial p_i} + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} p_j \partial \frac{x_j^h(p,u)}{\partial p_i} = x_i^h(p,u) + \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial\left(x_j^h(p,u)\right)}{\partial p_i} \ \ (*)$$

2) из FOC для внутреннего решения:

$$p_j = \lambda \frac{\partial u\left(x^h(p,u)\right)}{\partial x_j}$$

Подставим в $(*)$:

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i^h(p,u) + \lambda \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u\left(x^h(p,u)\right)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial\left(x_j^h(p,u)\right)}{\partial p_i} \ \ (**)$$

3) В решении EMP ограничение выполняется как равенство:

$$u\left(x^h(p,u)\right) = \tilde{u}$$

Возьмём производную от обеих частей по p_i:

$$u\left(x^h(p,u)\right) = u\left(x_1^h(p,u), x_2^h(p,u), \ldots, x_N^h(p,u)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u\left(x^h(p,u)\right)}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u\left(x^h(p,u)\right)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j^h(p,u)}{\partial p_i} = 0$$

Подставляя в $(**)$, получаем:

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i^h(p,u) + \lambda \cdot 0 = x_i^h(p,u)$$

■

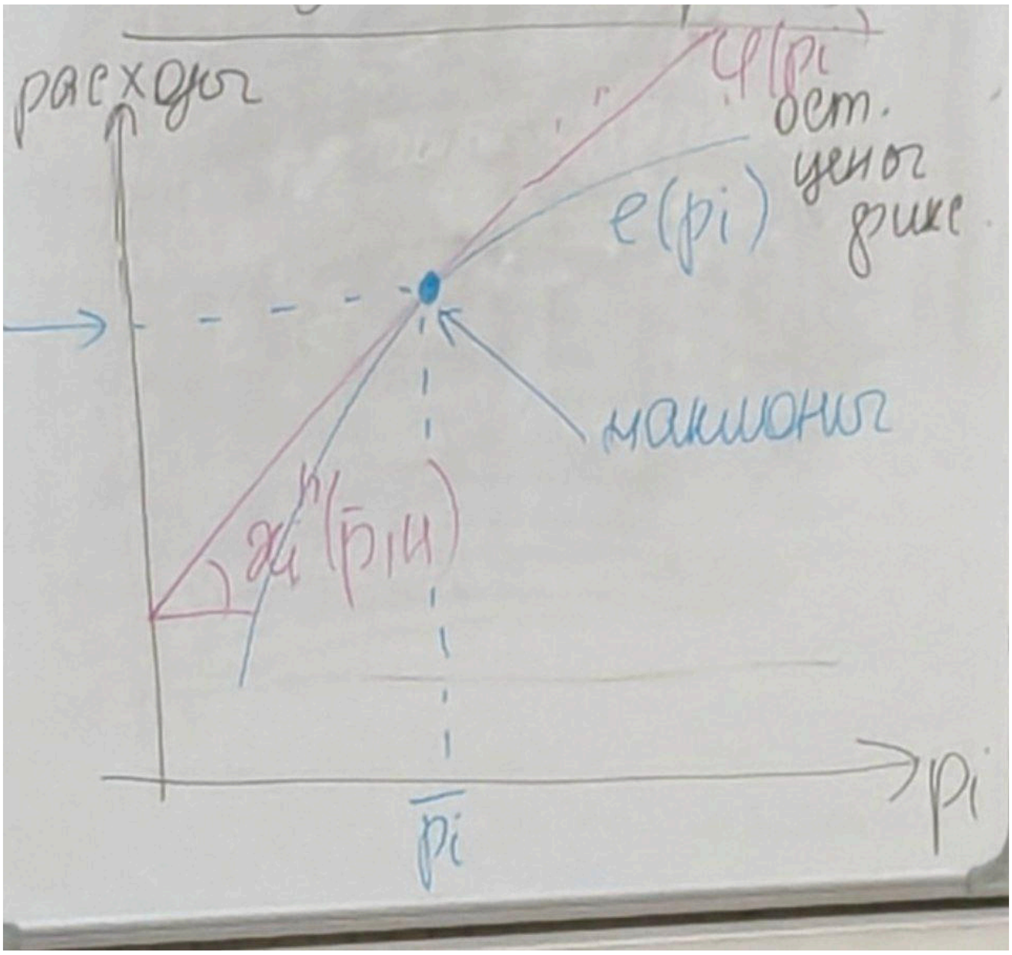
9.2. Графическое иллюстрации леммы Шепарда и вогнутости $e(p, u)$

Пусть при ценах $\overline{p} = (\overline{p}_1, ..., \overline{p}_N)$ решением EMP является $x^h(\overline{p}, u) > 0 \Rightarrow e(\overline{p}, u) = \overline{p} \cdot x^h(\overline{p}, u)$.
Пусть все цены, кроме p_i, зафиксированы на уровне $p_j = \overline{p}_j$, а p_i меняется.
Предположим, что при ценах $(\overline{p}_1, \overline{p}_{i-1}, p_i, \overline{p}_{i+1}, ..., \overline{p}_N)$ потребитель выбирает прежний набор $x^h(\overline{p}, u)$. Пусть

$$\varphi(p_i) = p_i \cdot x_i^h(\overline{p}, u) + \sum_{j \neq i} p_j x_j^h(\overline{p}, u)$$

Ясно, что $e(p_i) \leqslant \varphi(p_i)$, причем $e(\overline{p}_i) = \varphi(\overline{p}_i)$.
Тогда на рисунке в осях $(p_i, \text{расходы})$:

- $\varphi(p_i)$ — луч с наклоном $x_i^h(\overline{p}, u) > 0$
- $e(p_i)$ всюду ниже $\varphi(p_i)$, кроме $\overline{p}_i$, где они совпадают:



9.3. Двойственность UMP и EMP

Напоминание:

$$\text{UMP}: \begin{cases} u(x) \to \max\limits_{x \geqslant 0} \\ px \leqslant m \end{cases} \Rightarrow x(p,m) - \text{маршаллинский спрос}, \mathcal{V}(p,m) - \text{косвенная функция полезности}$$

$$\text{EMP}: \begin{cases} px \to \min\limits_{x \geqslant 0} \\ u(x) \geqslant u \end{cases} \Rightarrow x^h(p,u) - \text{хиксианский спрос}, e(p,u) - \text{функция расходов}$$

9.3.1. Утверждение.

Пусть предпочтения монотонны и представимы непрерывной функцией полезности. Пусть $p > 0$ — вектор цен.
1) Если $\tilde{x}$ — решение UMP при доходе m, то $\tilde{x}$ — решение EMP при $u = u(\tilde{x})$, причём в EMP минимальные расходы равны m.
2) Если $\tilde{x}$ — решение EMP при $u(x) \geqslant u$, то $\tilde{x}$ — решение UMP при доходе $m = p \cdot \tilde{x}$, причём в решении UMP максимальная полезность равна $u(\tilde{x})$.

Замечание от Ариэля Рубинштейна (и тут евреи): Почему важна монотонность и непрерывность для двойственности?
Короче, там был долгий разговор про черепаху, которая ползёт, которое сводится к одной идее: если функция полезности биективна (а из монотонности и непрерывности следует биективность на области значений), то двойственность работает. Если же функция полезности не биективна, то двойственность может не сработать.

9.3.2. Доказательство двойственности.

1) От противного. Пусть $\tilde{x}$ не является решением EMP при $u(x) \geqslant u(\tilde{x}) \Rightarrow \exists x' \neq \tilde{x} : px' < p\tilde{x}, u(x)' \geqslant u(\tilde{x})$. Так как предпочтения монотонны, то $p\tilde{x} = m$. Таким образом, x' доступен при (p, m) и при этом $u(x') \geqslant u(\tilde{x})$. Раз $px' < m$, то найдётся набор $x'' = \alpha x', \alpha > 1$ такой, что $px'' = m$. Тогда из монотонности $u(x'') > u(x') \geqslant u(\tilde{x}) \Rightarrow u(x'') > u(\tilde{x}) \Rightarrow \tilde{x}$ — не решение UMP. Противоречие.
2) От противного. Пусть $\tilde{x}$ не является решением UMP при $m = p\tilde{x} \Rightarrow \exists x' \neq \tilde{x} : u(x') > u(\tilde{x})$ и $px' \leqslant p\tilde{x} = m$. Тогда рассмотрим $x'' = \alpha x', \alpha \in (0,1) \Rightarrow px'' < px$, а из непрерывности $\exists \alpha : u(x'') \geqslant u(\tilde{x})$. Таким образом, x'' дешевле $\tilde{x}$ и удовлетворяет ограничению EMP. Значит, $\tilde{x}$ — не решение EMP. Противоречие. ■

9.4. Соотношение двойственности

1) Соотношение маршаллианского и хиксианского спроса

$$x(p,m) = x^h(p, \mathcal{V}(p,m))$$

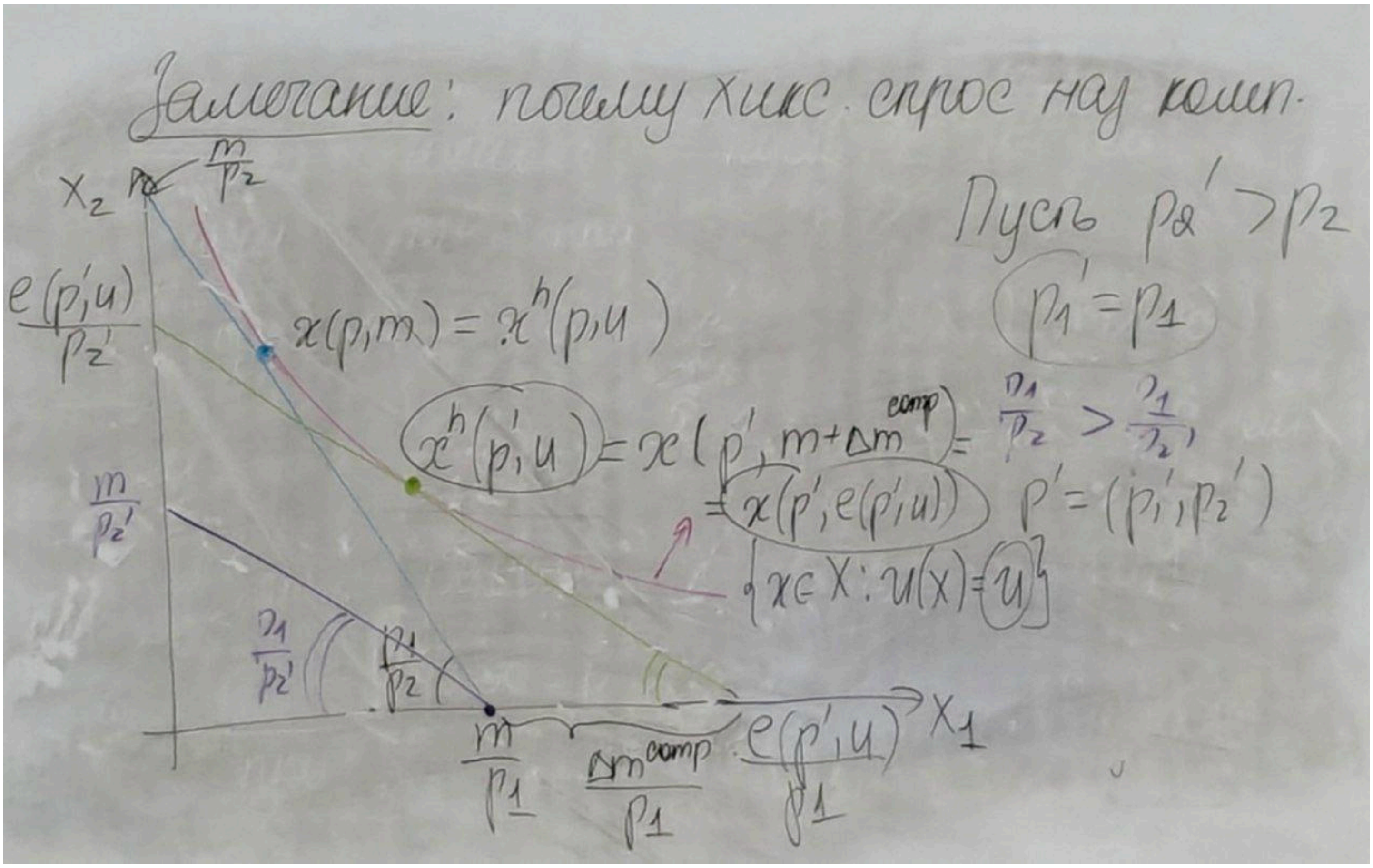
$$x^h(p,u) = x(p, e(p,u))$$

2) Соотношение косвенной функции полезности и функции расходов

$$\mathcal{V}(p, e(p,u)) = u$$

$$e(p, \mathcal{V}(p,m)) = m$$

Замечание: почему хиксианский спрос называют компенсированным?



Хиксианский и маршаллианский спрос совпадут, если одновременно с изменением цен так компенсировать доход потребителя, чтобы он остался на той же кривой безразличия.

9.5. Общая диаграмма.

$$x(p,m) \underset{x^h(p,u)=x(p,e(p,u))}{\overset{x(p,m)=x^h(p,\mathcal{V}(p,m))}{\longleftrightarrow}} x^h(p,u)$$

$$\underbrace{\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h(p,u)}{\partial p_j} - x_j(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m}}_{\text{Уравнение Слуцкого}}$$

При подстановке в целевые функции:

$$\mathcal{V}(p,m) \underset{e(p,\mathcal{V}(p,m))=m}{\overset{\mathcal{V}(p,e(p,u))=u}{\longleftrightarrow}} e(p,u)$$

$$\underbrace{\partial x_i(p,m) = -\frac{\partial \mathcal{V}(p,m)/\partial p_i}{\partial \mathcal{V}(p,m)/\partial m}}_{\text{Тождество Роя}}$$

10. Лекция 10. Снова про уравнение Слуцкого.

10.1. Анализ уравнения Слуцкого.

10.1.1. Утверждение.

Пусть предпочтения монотонны, строго выпуклы и представимы непрерывной функцией полезности $u(x)$. Пусть $x^h(p,u)$ и $x(p,m)$ — дифференцируемые функции хиксианского и маршаллианского спроса соответственно. Тогда $\forall p, m > 0$ выполнено уравнение Слуцкого в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h(p,u)}{\partial p_j} - x_j(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m}$$

При $i = j$ получаем уравнение Слуцкого по «своей» цене,
при $i \neq j$ получаем уравнение Слуцкого по «чужой» цене

10.1.2. Доказательство.

Рассмотрим цены $\overline{p}$ и $\overline{m}$. Пусть $\overline{u}$ — максимальный уровень полезности, достижимый при $\overline{p}, \overline{m}$, то есть $\overline{u} = \mathcal{V}(\overline{p}, \overline{m})$.
По соотношению двойственности $x_i^h(p,u) = x(p, e(p,u))$. Продифференцируем его по p_j:

$$\frac{\partial x_i^h(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p, e(p,u))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, e(p,u))}{\partial e} \cdot \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j}$$

Подставим $\overline{p}, \overline{u}$. Тогда получим по двойственности

$$e(\overline{p}, \overline{u}) = e(\overline{p}, \mathcal{V}(\overline{p}, \overline{m})) = \overline{m}$$

И из леммы Шепарда

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j} = x_j^h(\overline{p}, \overline{u}) = x_j(\overline{p}, \overline{m})$$

Подставим:

$$\frac{\partial x_i^h(\overline{p}, \overline{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\overline{p}, \overline{m})}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\overline{p}, \overline{m})}{\partial m} \cdot x_j(\overline{p}, \overline{m})$$

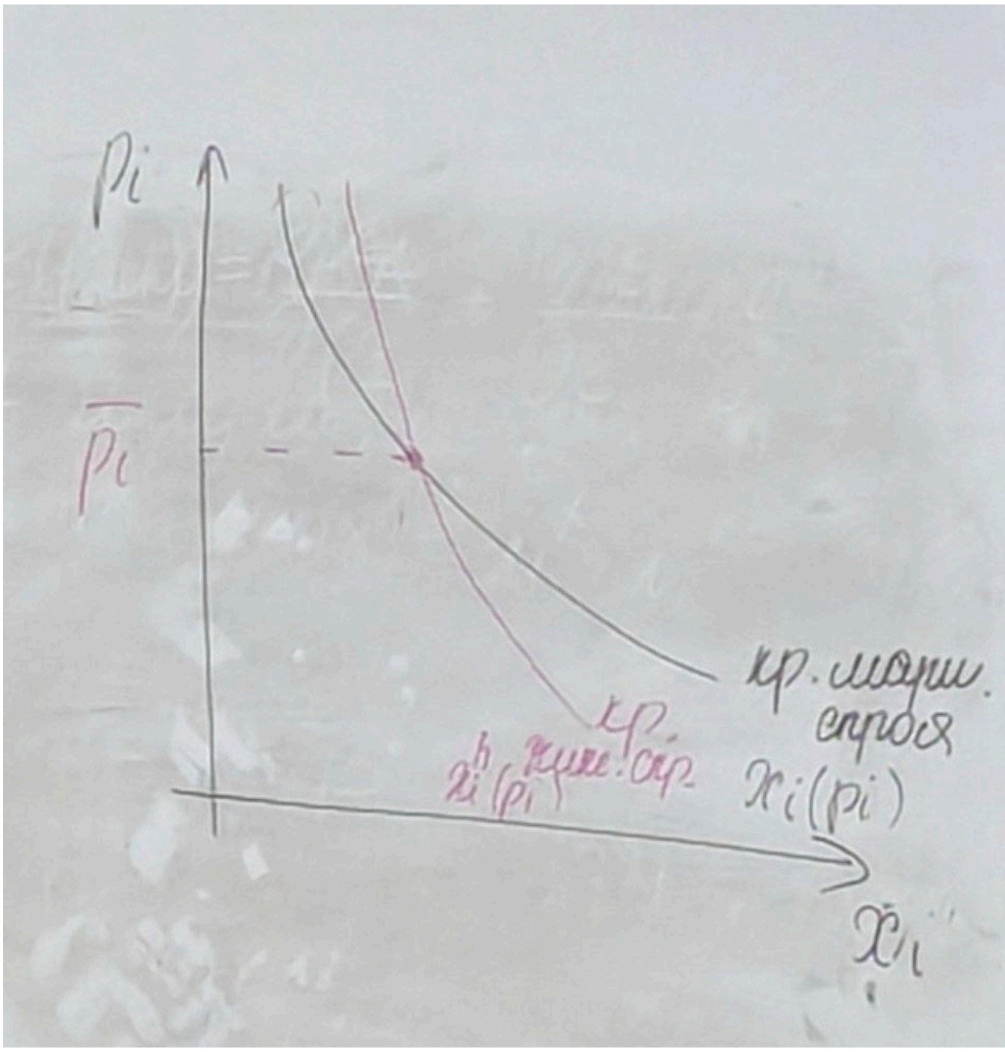
Откуда следует требумое соотношение. ■

Замечание.
Рассмотрим уравнение Слуцкого при $i = j$.

- Для нормального блага эффект дохода отрицательный, значит,

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i} > \frac{\partial x_i}{\partial p_i}$$

то есть кривая хиксианского спроса идёт «круче»



10.1.3. Уравнение Слуцкого по своей цене

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_i} - x_i \frac{\partial x_i}{\partial m} \,\Bigg|\, \cdot \frac{p_i}{x_i}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i^h} - \frac{\partial x_i}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_i} \cdot \frac{x_i \cdot p_i}{m}$$

$$\varepsilon_{p_i}^{x_i} = \varepsilon_{p_i}^{x_i^h} - \delta_i \varepsilon_m^{x_i}$$

Где $\delta_i = \frac{p_i x_i}{m}$ — доля расходов на i-ое благо в доходе.

- Инфериорное благо будет товаром Гиффена, если доминирует IE, тогда товар ГИффена можно искать среди тех благ, расходы которых составляют существенную долю в доходе, например, питание в малообеспеченной семье.
- Если $\varepsilon_{p_i}^{x_i} \approx \varepsilon_{p_i}^{x_i^h}$, тогда IE невелик, то есть либо невелика доля расходов на благо в доходе потребителя, либо маршаллианский спрос малочувствителен к изменениям дохода.

10.1.4. Уравнение Слуцкого по «чужой» цене

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial m}$$

(1) $N=2$, $\frac{\partial x_1^h}{\partial p_2}=?$
По закону хиксианского спроса $\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}\leqslant 0$.

$x_1^h(p,u)$ однороден степени 0 по ценам, значит, по правилу Эйлера:

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_1}\cdot p_1+\frac{\partial x_1^h}{\partial p_2}\cdot p_2=0\Rightarrow\frac{\partial x_1^h}{\partial p_2}\geqslant 0$$

то есть перекрёстный эффект замещения неотрицателен. СЛедовательно, для нормального блага перекрёстные SE и IE разнонаправленные $\Rightarrow$ могут быть как валовые субституты, так и валовые комплементы.

10.1.5. Про валовые и чистые субституты/комплементы

- валовые субституты — по маршаллианскому спросу:
- $\frac{\partial x_i}{\partial p_j}>0\Rightarrow$ субституты
- $\frac{\partial x_i}{\partial p_j}<0\Rightarrow$ комплементы

Когда мы смотрим на реакцию маршаллианского спроса на чужую цену то, вообще говоря, влияет и SE, и IE, но тогда получаем несимметричную характеристику. Например, может быть такое, что $\frac{\partial x_1}{\partial p_2}>0$, но $\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\leqslant 0$.

10.1.6. Пример.

$u(x)=\ln x_1+x_2$ Во внутреннем решении UMP:

$$\frac{1}{x_1}=\frac{p_1}{p_2}\Rightarrow x_1=\frac{p_2}{p_1}\Rightarrow\frac{\partial x_1}{\partial p_2}>0$$

$$x_2=\frac{m}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{p_2}{p_1}=\frac{m}{p_2}-1\Rightarrow\frac{\partial x_2}{\partial p_1}=0$$

10.1.7. Определение.

Чистые субституты/комплементы — смотрим по хиксианскому спросу (только SE):

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}>0-\text{чистые субституты}$$

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}<0-\text{чистые комплементы}$$

Это симметричное соотношение:

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}=\frac{\partial x_j^h}{\partial p_i}$$

Ведь по лемме Шепарда:

$$(x_i^h)=\frac{\partial e}{\partial p_i}\Rightarrow\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}=\frac{\partial^2 e}{\partial p_i\partial p_j}=\frac{\partial^2 e}{\partial p_j\partial p_i}=\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}$$

Тогда в случае $N=2$ два блага точно будут чистыми субститутами, а в случае $N>2$ для каждого блага найдётся хотя бы один чистый субститут.

10.1.8. Уравнение Слуцкого по чужой цене в эластичностях.

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}-x_j\frac{\partial x_i}{\partial m}\Bigg|\cdot\frac{p_j}{x_i}$$

$$\varepsilon^{x_i}_{p_j} = \varepsilon^{x^h}_{p_j} - \delta_j \varepsilon^{x_i}_m$$

10.2. Матрица Слуцкого.

Пусть S' — матрица, элементами которого являются эффекты замещения, то есть

$$s'_{i,j} = \frac{\partial x^h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial m}$$

Тогда S' — матрица, зависящая от p и m

10.2.1. Определение.

$S = S(p, m)$ называется матрицей Слуцкого.

10.2.2. Утверждение.

Пусть предпочтения монотонны, строго выпуклы и представимы непрерывной функцией полезности. Рассматриваемые функции дифференцируемы и $e(p, u)$ дифференцируема дважды и её вторая производная непрерывна.. Тогда матрица Слуцкого обладает следующими свойствами:
1) $S = S^T$
2)

$$s_{ij} = \frac{\partial x^h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 e}{\partial p_i \partial p_j}$$

Тогда $S(p, m)$ — матрица вторых производных функции расходов.
Так как функция расходов вогнута по ценам, то $S(p, m)$ неположительно определённая.
3) $S(p, m) \cdot p = 0$

11. Лекция 11. Оценка благосостояния.

Будем считать, что предпочтения потребителя монотонны и представимы непрерывной функцией полезности, $m > 0$. Предположим, меняется цена первого блага $p_1^0 \to p_1'$. Остальные цены и доход неизменны. Как изменится благосостояние потребителя?

Пусть $p^0 = (p_1^0, p_{-1})$, где $p_{-1} = (p_2, ..., p_N)$ — все остальные цены, они незименны. Тогда $p' = (p_1', p_{-1})$ — все остальные цены.

Пусть $p_1' < p_1,\ u' = \mathcal{V}(p', m),\ u^0 = \mathcal{V}(p^0, m)$. По свойству косвенной функции полезности $u' \geqslant u^0$. Если $x_1(p, m) > 0$, то неравенство становится строгим: $u' > u^0$ (из монотонности предпочтений).

Почему бы не взять $u' - u^0$ как меру оценки изменения благосостояния?

1) функция полезности не единственна,

2) нет сопоставимости функций полезности разных потребителей.

Поэтому хочется получить денежную оценку изменения благосостояния.

Рассмотрим функцию $e(\overline{p}, \mathcal{V}(p, m))$, где $\overline{p} \gg 0$ — вектор цен. Эта функция соответствует уровню доходу, который требуется потребителю, чтобы достичь полезности $\mathcal{V}(p, m)$ при $\overline{p}$.

Функция расходов возрастает по полезности. Тогда в качестве меры изменения благосостояния можем рассматривать разность $e(\overline{p}, u') - e(\overline{p}, u^0)$.

Как выбрать $\overline{p}$?

- если $\overline{p} = p'$, то получим *компенсирующую вариацию* (CV),
- если $\overline{p} = p^0$, то получим *эквивалентную вариацию* (EV).

11.0.1. Компенсирующая вариация (CV).

11.0.2. Определение.

$$\mathrm{CV}(p^0, p', m) = e(p', u') - e(p', u^0)$$

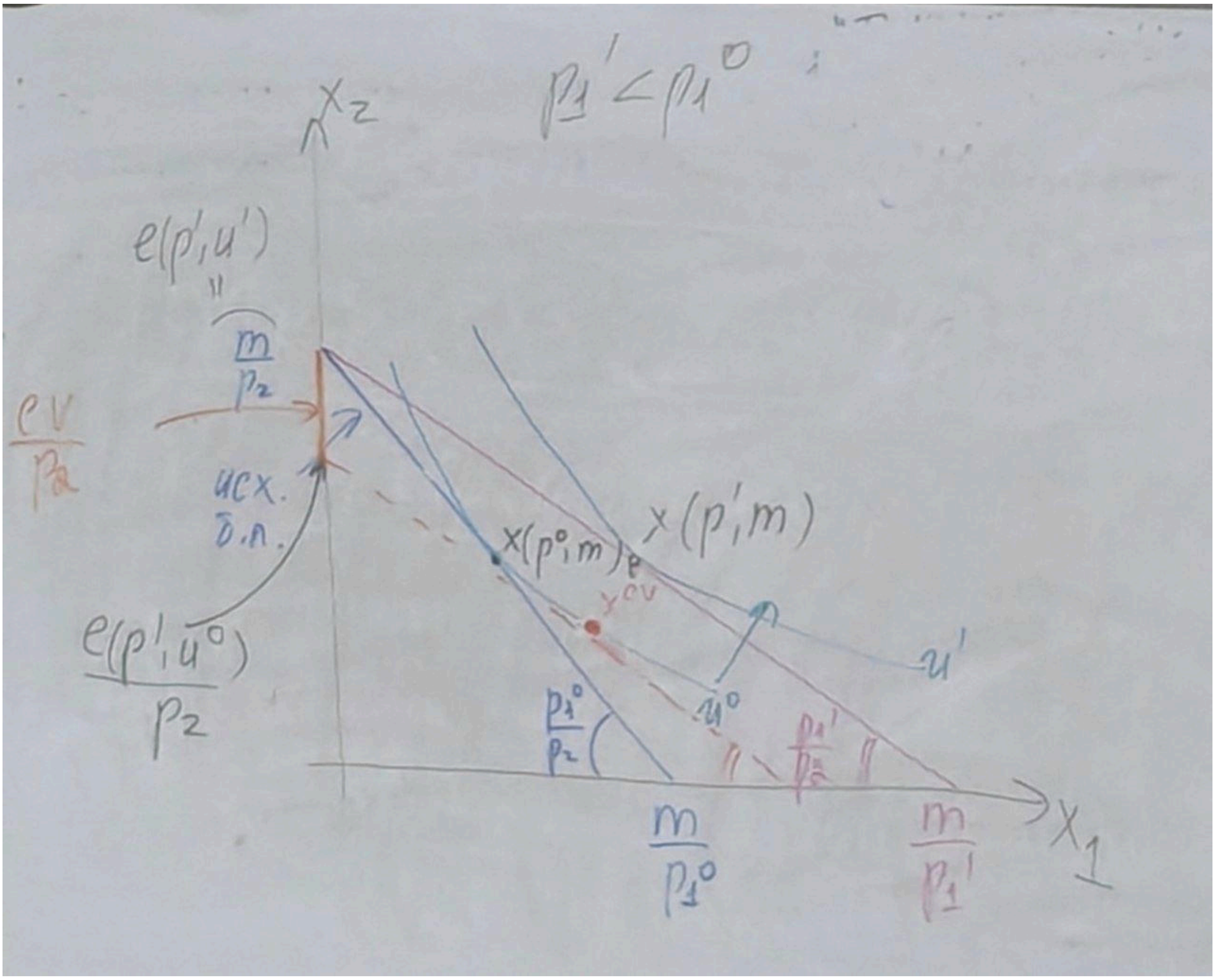
.

$e(p', u') = e(p', \mathcal{V}(p', m)) = m$. Тогда

$$\mathrm{CV}(p^0, p', m) = m - e(p', u^0).$$

(цены новые, полезность старая)

Тогда CV — такое максимальное по модулю изменение дохода, которое при новых ценах позволяет сохранить исходный уровень полезности (то есть, компенсировать изменение цены). При повышении цены $\mathrm{CV} > 0$, при снижении цены $\mathrm{CV} < 0$.



(очень похоже на декомпозицию по Хиксу)

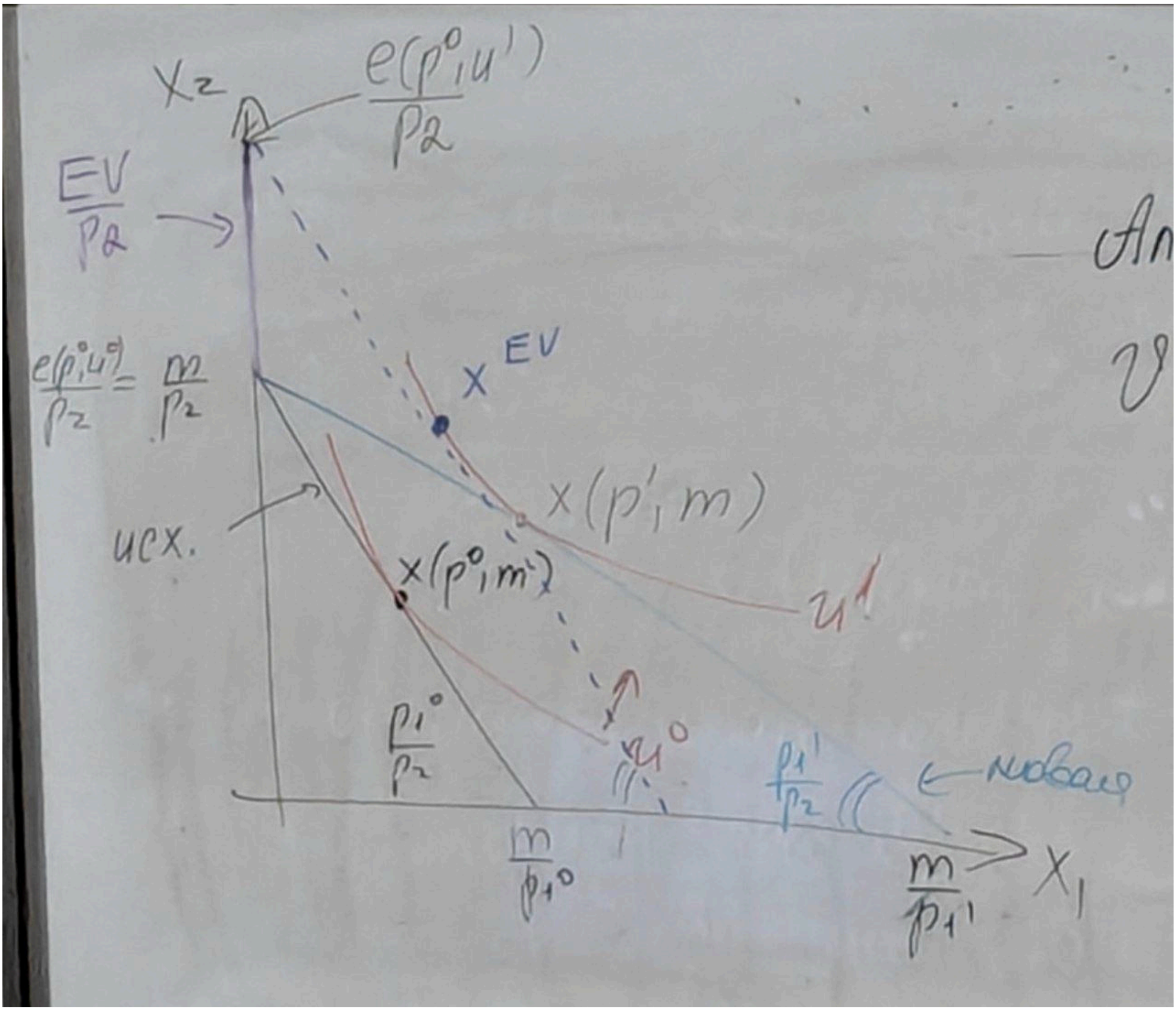
Альтернативное определение $\mathcal{V}(p', m - \text{CV}) = u^0$.

11.0.3. Эквивалентная вариация (EV).

11.0.4. Определение.

$$\text{EV}(p^0, p', m) = e(p^0, u') - e(p^0, u^0) = e(p^0, u') - m$$

- цены старые, полезность новая,
- EV — изменение дохода, эквивалентное изменению цены, то есть позволяющее при исходных ценах достичь нового уровня полезности.



Альтернативное определение EV: $\mathcal{V}(p^0, m + \mathrm{EV}) = u'$.

11.0.5. EV и CV в терминах хиксианского спроса.
1)

$$\mathrm{CV}(p^0, p', m) = e(p', u') - e(p', u^0) = m - e(p', u^0) = e(p^0, u^0) - e(p', u^0) =$$
$$= \int_{p_1'}^{p_1^0} \frac{\partial e(p, u^0)}{\partial p_1}\,\mathrm{d}p_1 = \int_{p_1'}^{p_1^0} x_1^h(p, u^0)\,\mathrm{d}p_1$$

то есть, CV численно равна площади под кривой хиксианского проса при u^0 при изменении цены 1-го блага с p_1' до p_1^0.
2)

$$\mathrm{EV}(p^0, p', m) = e(p^0, u') - e(p^0, u^0) = e(p^0, u') - e(p', u') = \int_{p_1'}^{p_1^0} x_1^h(p, u')\,\mathrm{d}p_1$$

то есть, EV численно равна площади под кривой хиксианского спроса при u' при изменении цены первого блага с p_1' до p_1^0.
3) Как нарисовать $x_1(p, m), x_1^h(p, u^0), x_1^h(p, u')$ на одном рисунке в пространстве (объём, цена)?
- как соотносятся наклоны кривых маршаллианского и хиксианского спроса?

$$\frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial x_1}{\partial m}$$

- если благо нормальное и $x_1 > 0$, то выполняется неравенство:

$$0 > \frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} > \frac{\partial x_1}{\partial p_1}$$

Значит, хиксианский спрос идёт круче (если рисовать в осях, где на оси Oy цена, а на Ox объём потребления первого блага).
- Если инфериорное, то

$$\frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} < \frac{\partial x_1}{\partial p_1}$$

- Если нейтральное, то

$$\frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}$$

- Как соотносятся маршаллианский и хиксианский спрос p_1^0 и p_1'? Из двойственности:

$$x_1(p, m) = x_1^h(p, \mathcal{V}(p, m))$$

При p^0:

$$x_1(p^0, m) = x_1^h(p^0, u^0)$$

При p':

$$x_1(p', m) = x_1^h(p', u')$$

- Как соотносятся $x_1^h(p, u^0)$ и $x_1^h(p, u')$?

Пусть $p_1' < p_1^0 \Rightarrow u' > u^0$ (при $x_1 > 0$). Тогда $e(p, u') > e(p, u^0)$ по свойству функции расходов. Тогда:
- если благо нормальное, то

$$x_1(p, e(p, u')) > x_1(p, e(p, u^0))$$

Из двойственности:

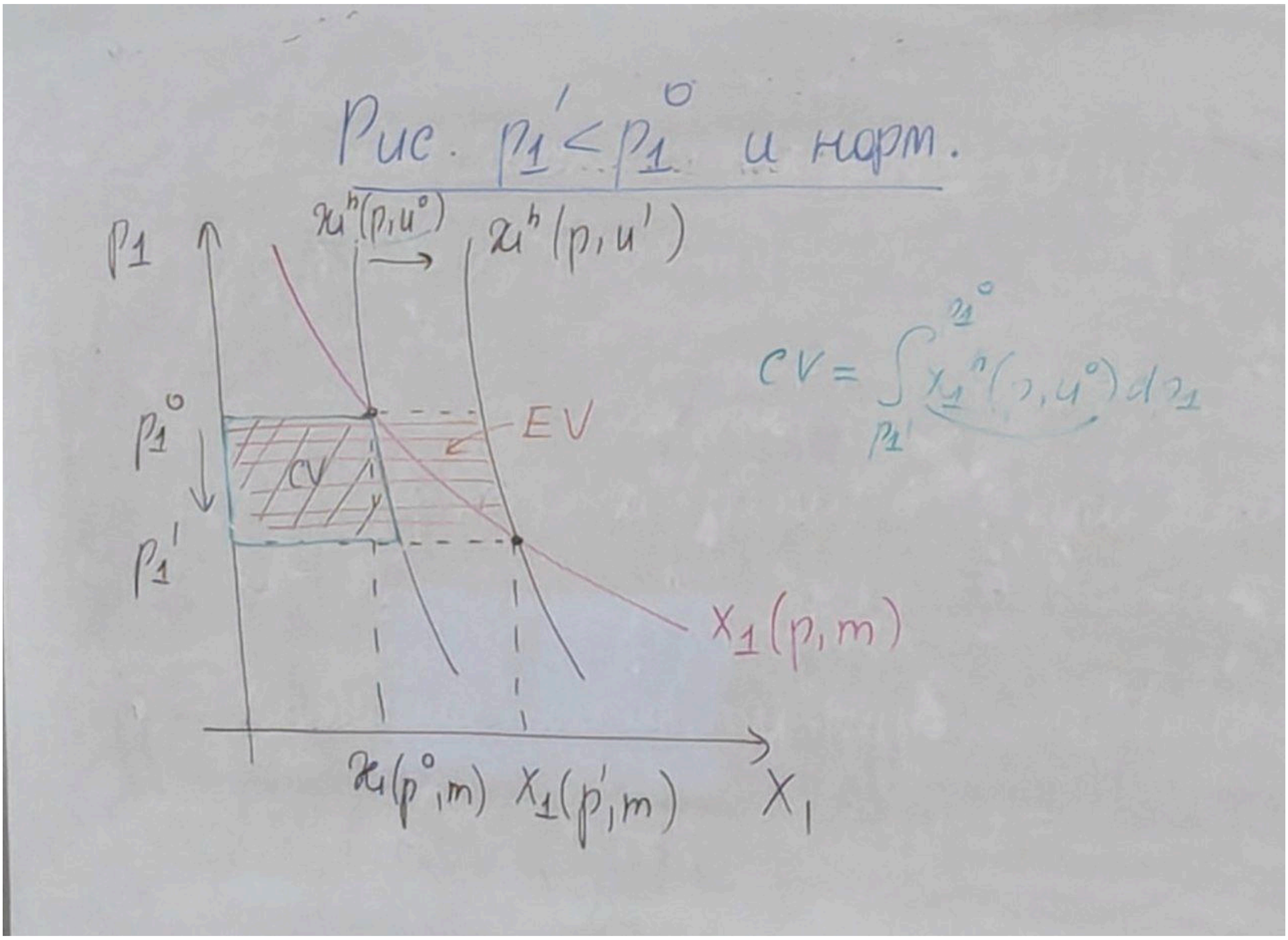
$$x_1^h(p, u') > x_1^h(p, u^0)$$

- если благо инфериорное, то

$$x_1^h(p, u') < x_1^h(p, u^0)$$

- если благо нейтральное, то

$$x_1^h(p, u') = x_1^h(p, u^0)$$



11.0.6. Утверждение. Соотношение CV и EV при снижении цены

Пусть предпочтения монотонны, строго выпуклы и представимы непрерывной функцией полезности. Пусть объём потребления блага положителен и $p_1' < p_1^0$ (остальные ценны неизменны и равны p_{-1}) и доход m фиксирован. Тогда
1) если первое благо при указанных ценах и доходе нормальное, то $\mathrm{EV}(p^0, p', m) > \mathrm{CV}(p^0, p', m)$,
2) если первое благо при указанных ценах и доходе инфериорное, то $\mathrm{EV}(p^0, p', m) < \mathrm{CV}(p^0, p', m)$,
3) если первое благо при указанных ценах и доходе нейтрально к доходу, то $\mathrm{EV}(p^0, p', m) = \mathrm{CV}(p^0, p', m)$.

11.0.7. Доказательство.

$p_1' < p_1^0 \Rightarrow$ в силу невозрастания косвенной функции полезности по ценам и с учётом того, что объём потребления блага положителен, $\mathcal{V}(p', m) > \mathcal{V}(p^0, m) \Leftrightarrow u' > u^0$. В силу возрастания функции расходов по полезности $e(p, u') > e(p, u^0)$.

- если благо нормальное, то рост дохода $\Rightarrow$ рост маршаллианского спроса. То есть,

$$x_1(p, e(p, u')) > x_1(p, e(p, u^0))$$

В силу двойственности

$$x_1^h(p, u') > x_1^h(p, u^0)$$

Тогда

$$\mathrm{EV}(p^0, p', m) = \int_{p_1'}^{p_1^0} x_1^h(p, u')\,\mathrm{d}p_1 > \int_{p_1'}^{p_1^0} x_1^h(p, u^0)\,\mathrm{d}p_1 = \mathrm{CV}(p^0, p', m)$$

- если благо инфериорное, то всё точно так же, но ровно наоборот:

То есть,

$$x_1(p, e(p, u')) < x_1(p, e(p, u^0))$$

В силу двойственности

$$x_1^h(p, u') < x_1^h(p, u^0)$$

Тогда

$$\mathrm{EV}(p^0, p', m) = \int_{p_1'}^{p_1^0} x_1^h(p, u')\,\mathrm{d}p_1 < \int_{p_1'}^{p_1^0} x_1^h(p, u^0)\,\mathrm{d}p_1 = \mathrm{CV}(p^0, p', m)$$

- если благо нейтральное к доходу:

$$x_1(p, e(p, u')) = x_1(p, e(p, u^0))$$

В силу двойственности

$$x_1^h(p, u') = x_1^h(p, u^0) = x_1(p, m) \ \text{(все три кривые совпадают)}$$

Тогда

$$\mathrm{EV}(p^0, p', m) = \int_{p_1'}^{p_1^0} x_1^h(p, u')\,\mathrm{d}p_1 = \int_{p_1'}^{p_1^0} x_1^h(p, u^0)\,\mathrm{d}p_1 = \mathrm{CV}(p^0, p', m) = \Delta\ \mathrm{CS}$$

■

11.1. Модель с натуральным доходом.

Пусть у потребителя нет фиксированного дохода, но есть первоначальный запас благ (endowment), $w = (w_1, ..., w_n) \neq \vec{0}$, $w_i \geqslant 0$ — запас блага i, $p \gg 0$. Тогда доход потребителя равен стоимости первоначального запаса: $m = p \cdot w$.
UMP:

$$\begin{cases} u(x) \to \max\limits_{x \geqslant 0} \\ px \leqslant pw \end{cases} \Rightarrow \text{маршаллианский спрос } x(p, pw)$$

11.1.1. Новая терминология

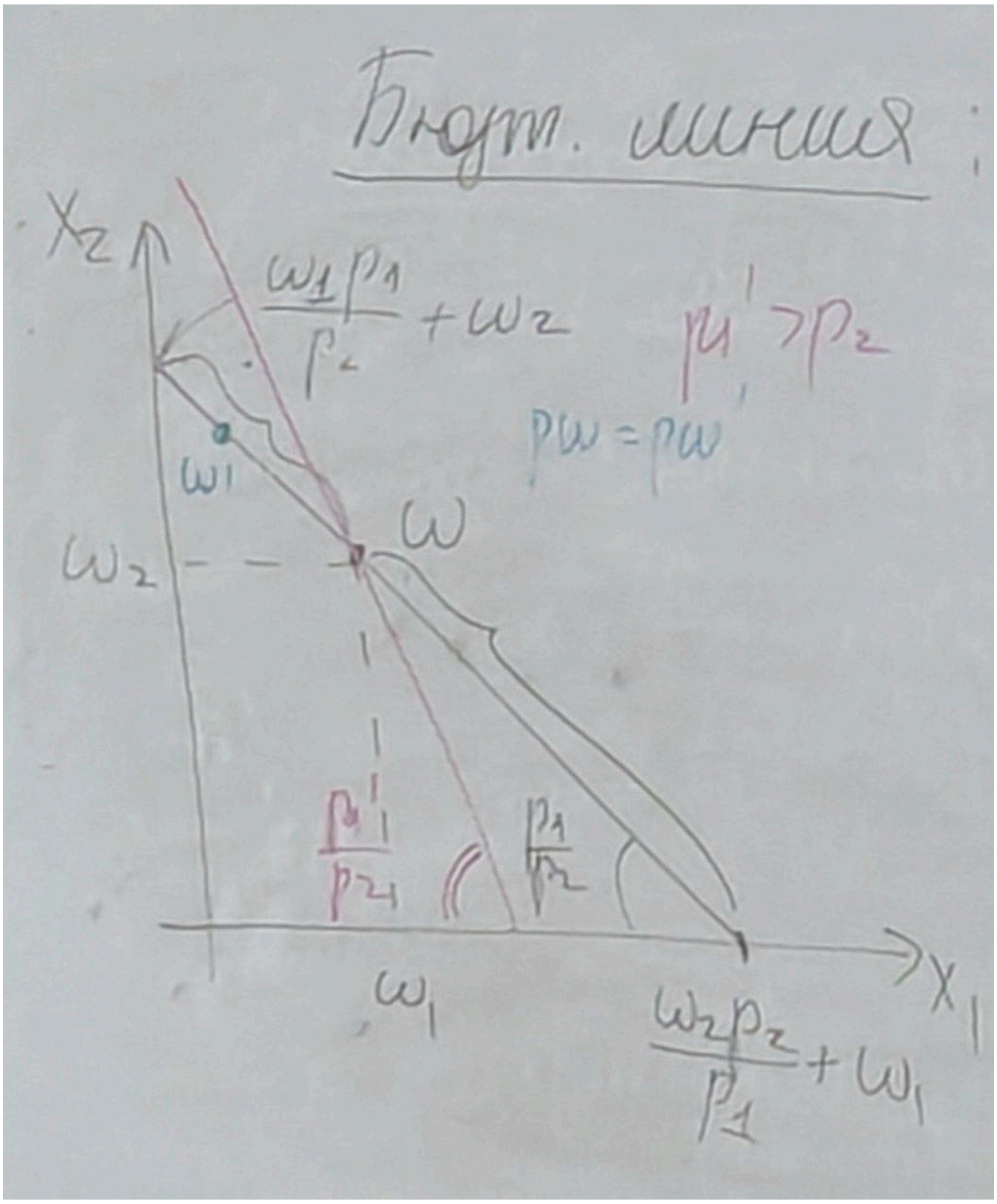
- если в решении задачи потребителя $x_i > w_i$, то говорят, что потребитель — чистый покупатель i-го блага,
- если в решении задача потребителя $x_i < w_i$, то говорят, что потребитель — чистый продавец i-го блага,

11.1.2. Бюджетная линия: $N = 2$

Уравнение бюджетной линии: $p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 w_1 + p_2 w_2$
- отрицательный наклон $-\frac{p_1}{p_2}$,
- $w = (w_1, w_2)$ лежит на бюджетной линии при любых ценах,

- изменение цен — поворот бюджетной линии вокруг w,
- изменение первоначального запаса $w \to w'$ — параллельный сдвиг:

  если $pw' > pw$, сдвиг вовне (вверх),
  если $pw' < pw$, сдвиг внутрь (вниз),
  если $pw' = pw$, бюджетная линия не изменяется.



Уравнение бюджетной линии:

$$p_1(x_1 - w_1) + p_2(x_2 - w_2) = 0$$

То есть, если предпочтения монотонны, то $(x_1 - w_1)(x_2 - w_2) \leqslant 0$, то есть потребитель не может быть одновременно чистым покупателем (продавцом) и первого, и второго блага.

11.1.3. Уравнение Слуцкого в случае натурального дохода в абсолютных изменениях.
$N = 2$, пусть p_2 не изменяется, меняется $p_1' > p_1^0$. Такое изменение цены, вообще говоря, влечёт изменение объёма маршаллианского спроса на первое благо в силу трёх эффектов:
- эффект замещения,
- эффект фиксированного дохода,
- эффект первоначального запаса.

Объединим два последних эффекта в эффект богатства. Выделяем два эффекта:

- SE (эффект замещения) — как и при фиксированном доходе — изменение объёма потребления блага в силу изменения пропорции замещения благ при неизменной покупательной способности дохода.
- WE (wealth effect — эффект богатства) — совокупный эффект, отражающий изменение объёма спроса на благо как в силу изменения покупательной способности блага (старый эффект дохода), так и в силу изменения самой величины дохода.

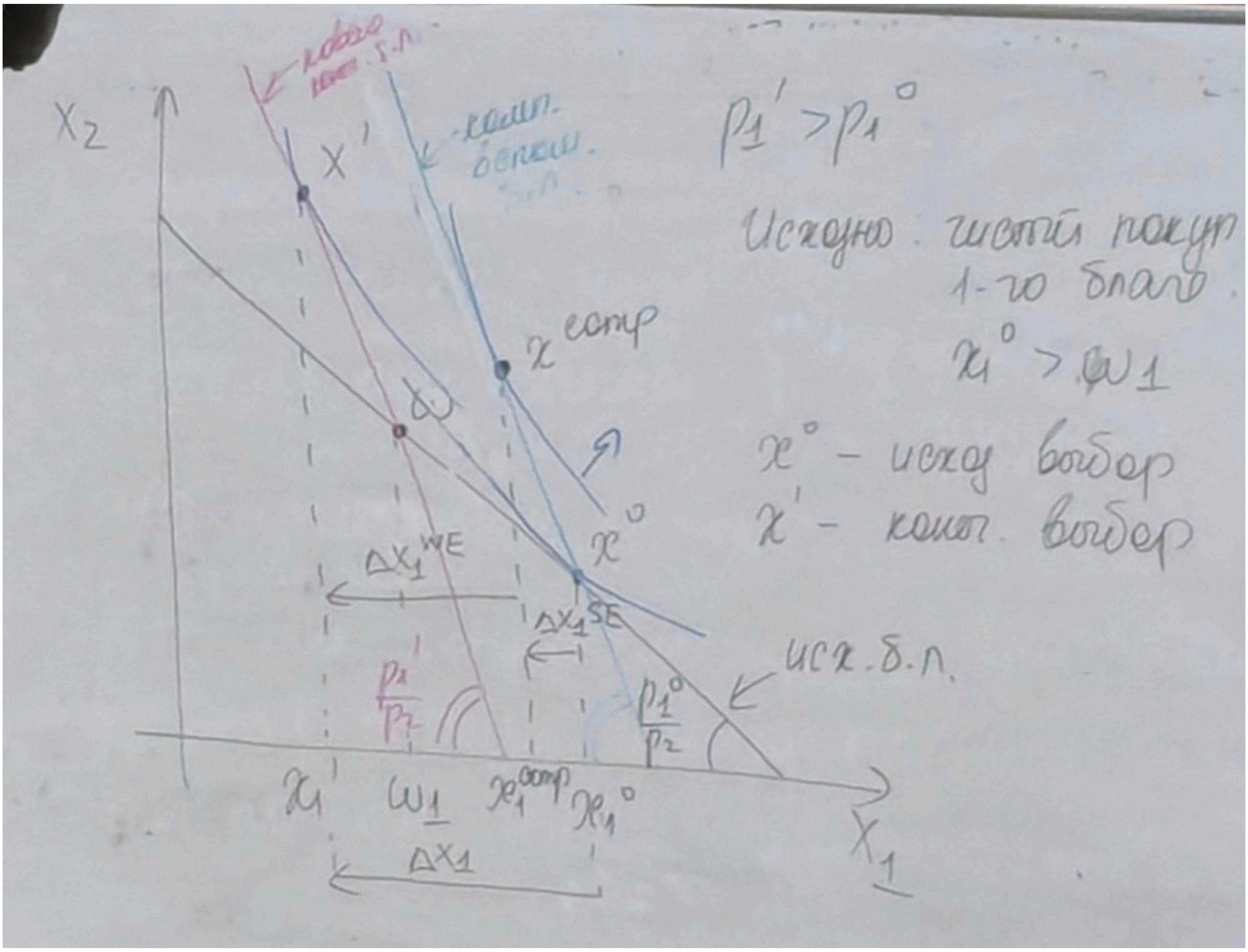
Уравнение Слуцкого в абсолютных приращениях:

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^{\mathrm{SE}} + \Delta x_1^{\mathrm{WE}}$$

Декомпозиция по Слуцкому:
1) корректировка дохода такая, что при p' в точности доступен $x^0 : m^{\mathrm{comp}} = p' \cdot x^0$. На компенсированной бюджетной линии определяем выбор: $x^{\mathrm{comp}} = x(p', m^{\mathrm{comp}})$.

$$\Delta x_1^{\mathrm{SE}} = x_1^{\mathrm{comp}} - x_1^0 - \text{противонаправлен изменению цены}$$

$$\Delta x_1^{\mathrm{WE}} = x_1' - x_1^{\mathrm{comp}}$$



Зависимость направлений эффектов от благ:

Изменение объема потребления блага	Изначально продавец блага				Изначально покупатель блага			
	цена блага растет ($p_1' > p_1^0$)		цена блага падает ($p_1' < p_1^0$)		цена блага растет ($p_1' > p_1^0$)		цена блага падает ($p_1' < p_1^0$)	
	норм.	инфер.	норм.	инфер.	норм.	инфер.	норм.	инфер.
Δx_1^{SE}	≤ 0	≤ 0	≥ 0	≥ 0	≤ 0	≤ 0	≥ 0	≥ 0
Δx_1^{WE}	>0	<0	<0	>0	<0	>0	>0	<0
Δx_1	?	<0	?	>0	<0	?	>0	?

12. Лекция 12. 2 приложения модели с натуральным доходом.

- модель предложения труда
- модель межпериодного выбора

12.1. Модель предложения труда.

1-ое благо — время, которое потребитель распределяет между трудом и отдыхом. Будем считать, что потребитель может свободно варьировать время занятости.
l (leisure) – время отдыха (свободное время),
L (labour) – время работы,
$\overline{L} > 0$ – запас времени.
2-ое благо — агрегированное потребительское благо (то есть, расходы на всё остальное), $p_c = 1$.
c (consumption) — агрегированное потребительское благо.
$w > 0$ (wage) — ставка заработной платы.
$M \geqslant 0$ (money) — нетрудовой доход.

<u>12.1.1.</u> <u>Уравнение бюджетной линии.</u>

$$c = wL + M \quad , L \leqslant \overline{L}$$

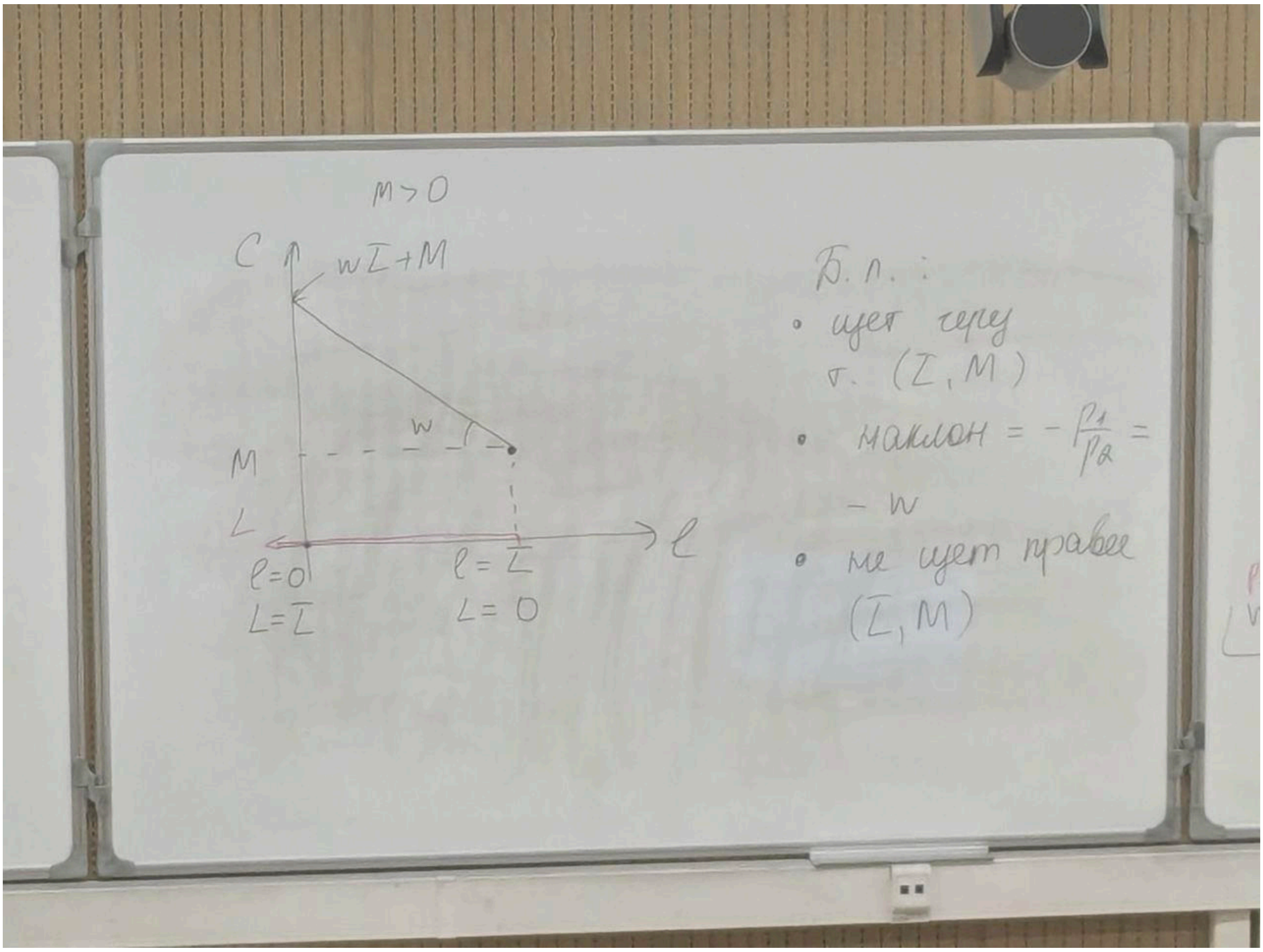
Ясно, что $l + L = \overline{L} \Rightarrow L = \overline{L} - l$:

$$c = w\left(\overline{L} - l\right) + M = w\overline{L} + M - wl \quad , l \leqslant \overline{L}$$

$$wl + c = w\overline{L} + M$$

Отсюда $wl = p_1x_1$, $c = p_2x_2$, $wL = p_1\omega_1$, $M = p_2\omega_2$, как в модели с натуральным доходом при точке первоначального запаса $\left(\overline{L}, M\right)$.

- каждый час отдыха «стоит» w



Будем считать, что предпочтения потребителя на наборах (l, c) описываются непрерывной функцией полезности $u(l, c)$ и предпочтения монотонны. Задача UMP:

$$\begin{cases} u(l, c) \to \max\limits_{l, c \geqslant 0} \\ wl + C = w\overline{L} + M \\ l \leqslant \overline{L} \end{cases}$$

Если предпочтения строго выпуклы, то существует единственное решение $\left(\tilde{l}, \tilde{c}\right) \Rightarrow \tilde{L} = \overline{L} - \tilde{l}$.
Если функция полезности дифференцируема и $\left(\tilde{l}, \tilde{c} > 0\right)$ — внутренее решение UMP (то есть $0 < \tilde{l} < \overline{L}$), то:

$$\mathrm{MRS}_{lc}\left(\tilde{l}, \tilde{c}\right) = w$$

Потребитель не может быть чистым покупателем свободного времени. Тогда он либо чистый продавец, либо потребитель отдыха.

12.1.2. Пример.

$u(l, c) = l^{\alpha} c^{\beta}$

$$l(w) = \frac{\alpha m}{(\alpha + \beta) w} = \frac{\alpha\left(w\overline{L} + M\right)}{(\alpha + \beta) w} = \frac{\alpha \overline{L}}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha M}{(\alpha + \beta) w}$$

Спрос на досуг падает с ростом цены.

12.1.3. Как меняется предложение труда при росте ставки заработной платы?

$w^0 \to w' > w^0$.

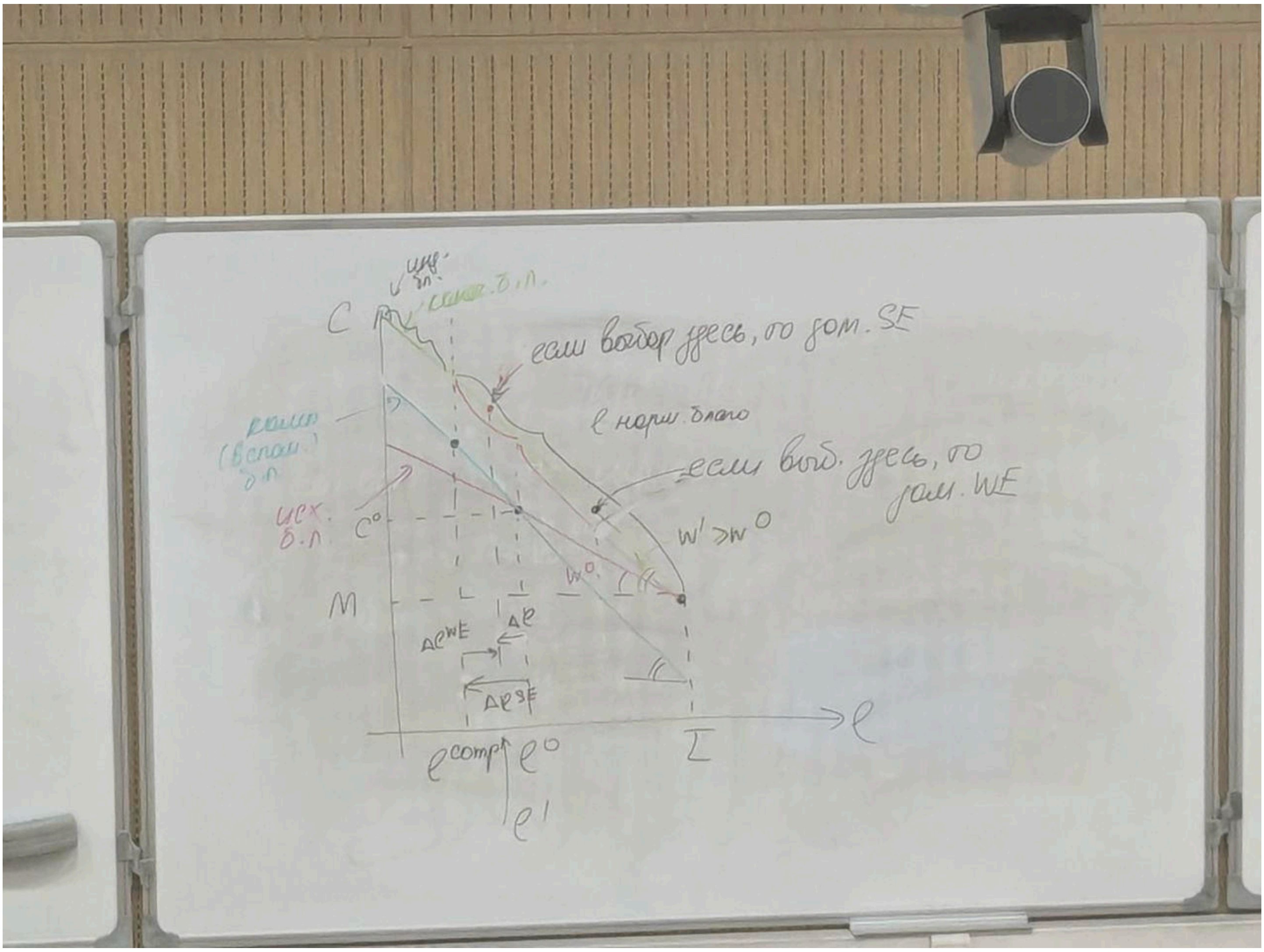
$$\Delta l = \Delta l^{\mathrm{SE}} + \Delta l^{\mathrm{WE}}$$

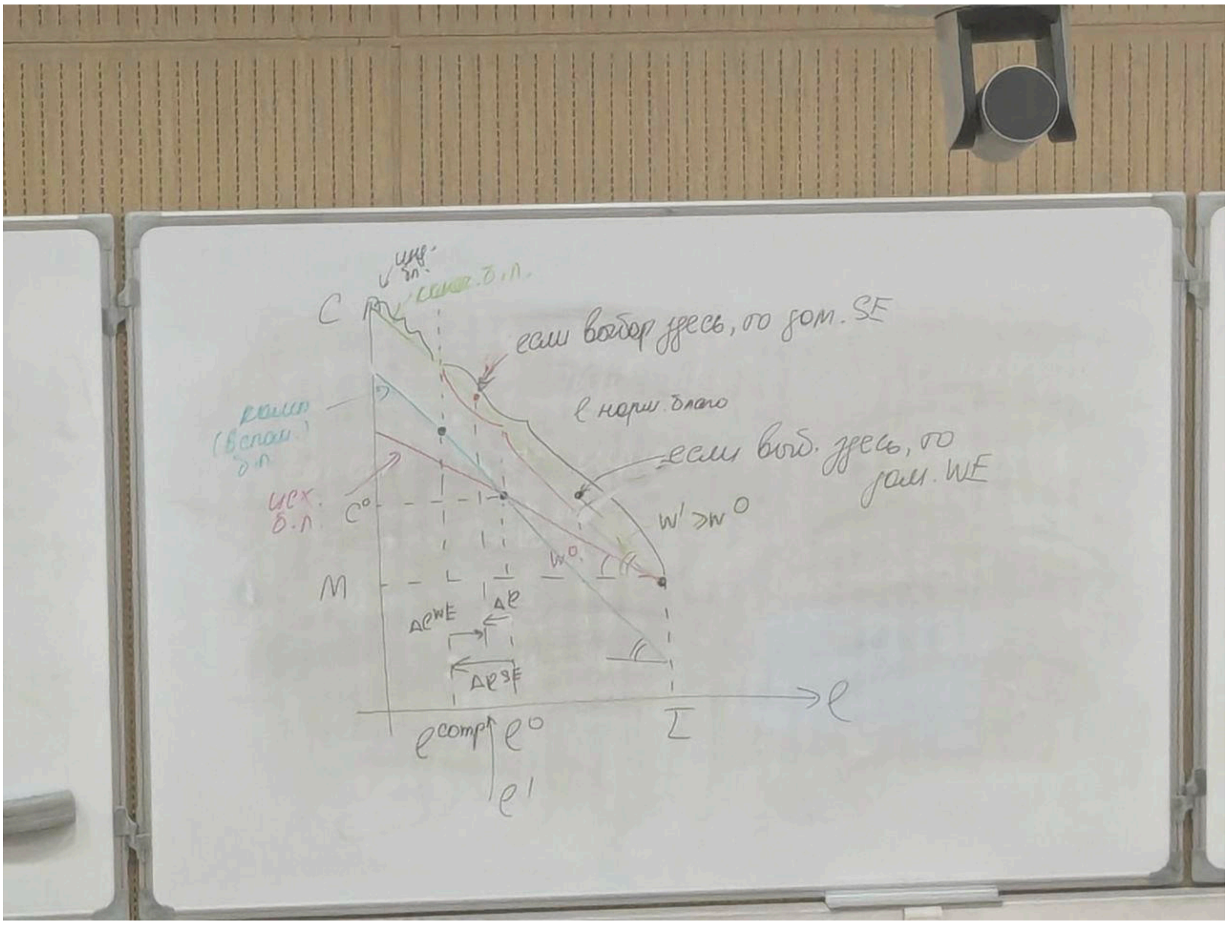
$$\Delta l^{\mathrm{SE}} \leqslant 0$$

Потребитель — чистый продавец отдыха.
Цена растёт $\Rightarrow$ потребитель становится богаче.

- если отдых — инфериорное благо, то $\Delta l^{\mathrm{WE}} < 0$,
- если отдых — нормальное благо, то $\Delta l^{\mathrm{WE}} > 0$.

Будем считать, что отдых — нормальное благо, тогда знаки эффектов разнонаправлены.
Если доминирует SE, то $\Delta l < 0 \Rightarrow \Delta L > 0$,
Если доминирует WE, то $\Delta l > 0 \Rightarrow \Delta L < 0$.
Из обобщенного уравнения Слуцкого в дифференциальной форме слудет ожидать, что WE доминирует при достаточно высоком уровне занятости.

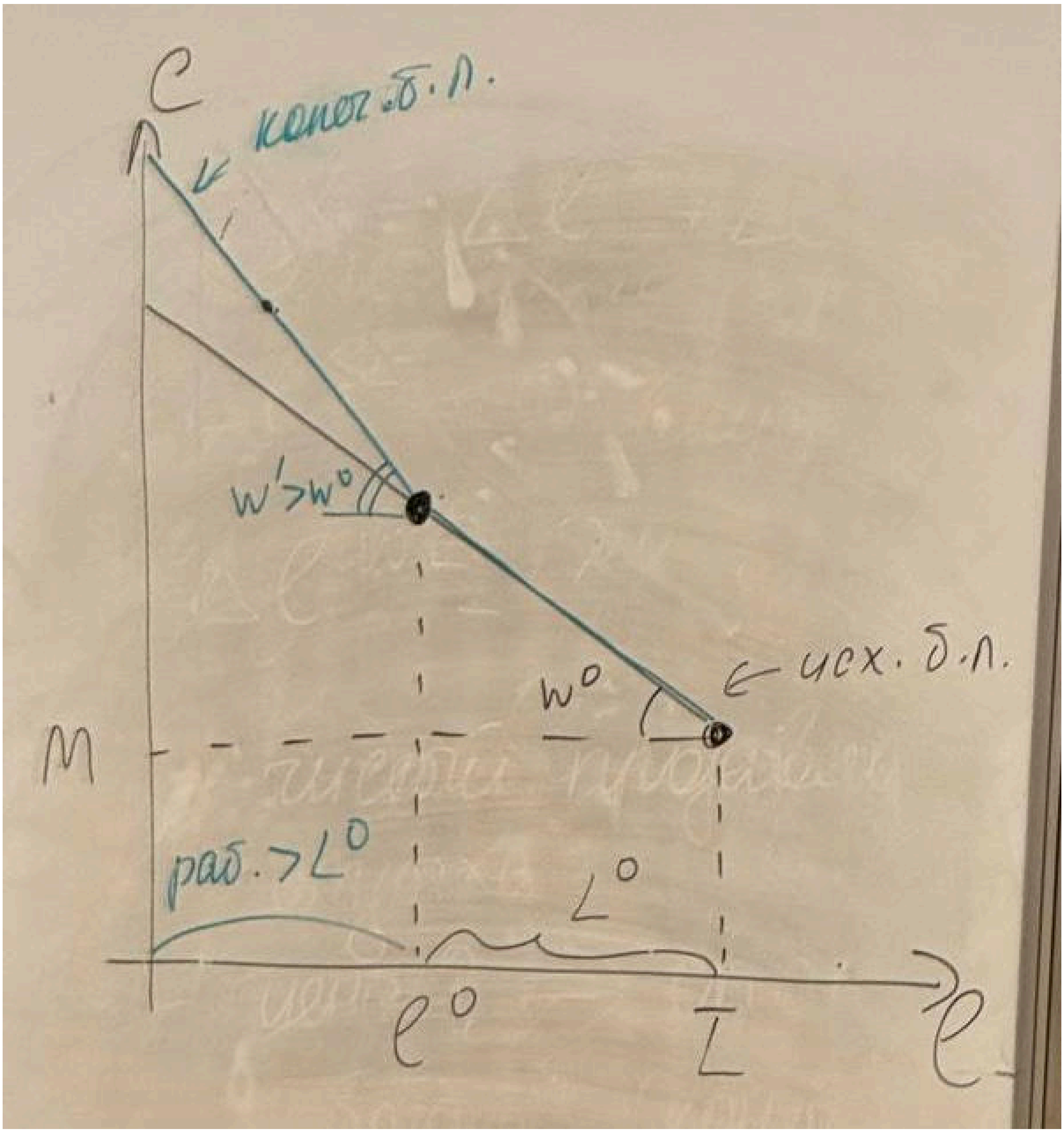

инд. б.л.
комп. б.л.
C
если выбор здесь, то дом. SE
l норм. благо
комп (вспом.) б.л.
если выб. здесь, то дом. WE
исх. б.л.
C⁰
w' > w⁰
w⁰
M
Δl^WE
Δl
Δl^SE
l^comp
l⁰
l'
L
l



12.1.4. Рост ставки заработной платы только за сверхурочные часы.

Пусть при $w^0 \to l^0 \Rightarrow L^0 = \overline{L} - l^0 > 0$.

При $L > L^0$ ставка $w' > w^0$.



По WARP выбор на конечной бюджетной линии не может лежать правее исходного набора. Значит:

- либо выбран тот же набор $\Rightarrow$ предложение труда не изменяется,
- либо набор левее, где $l < l^0 \Rightarrow$ пердпочтение труда растёт, положение потребителя улучшается.

12.1.5. Уравнение бюджетной линии при повышении ставки заработной платы за сверхурочные.

$$\begin{cases} c = w^0 L + M, L \leqslant L^0 \\ c = w^0 L^0 + w'(L - L^0) + M, L > L^0 \end{cases}$$

12.2. Модель межпериодного выбора.

Пусть потребитель живёт два периода времени: «сегодня» и «завтра».
$m_i \geqslant 0$ — доход в i-ый период,
c_i — расходы на потребление в i-ый период.
Потребитель может занимать и сберегать по ставке процента r (в долях).

12.2.1. Уравнение бюджетной линии.

- сегодня сберегаю: $c_1 < m_1$. Тогда $c_2 = (m_1 - c_1)(1 + r) + m_2$
- сегодня занимаю, $c_1 > m_1$:

$$c_2 = m_2 - (c_1 - m_1)(1 + r) = m_2 + (m_1 - c_1)(1 + r)$$

- расходую сегодня всё, что есть: $c_1 = m_1, c_2 = m_2$.

Итоговое уравнение:

$$c_2 = m_2 + (m_1 - c_1)(1 + r)$$

Или:

$$c_1(1 + r) + c_2 = m_1(1 + r) + m_2$$

(выражено через будущую стоимость)

очень похоже на уравнение бюджетной линии при натуральном доходе, где $p_1 = (1 + r), p_2 = 1,\ \omega = (m_1, m_2)$.
Если поделить обе части на $(1 + r)$:

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = m_1 + \frac{m_2}{1 + r}$$

(выражено через текущую стоимость)

12.2.2. Возможные варианты бюджетной линии.

- ограничение ликвидности (нет возможности занимать)
- разные ставки процента: $r_b > r_s$ (borrow, save)

Будем считать, что предпочтения потребителя на наборах (c_1, c_2) описываются непрерывной функцией полезности $u(c_1, c_2)$. Предположим, что они монтонные.

12.2.3. Пример.

- $u(c_1, c_2) = c_1 + c_2$, $\mathrm{MRS}_{12} = 1$.
- $u(c_1, c_2) = \min\{c_1, c_2\}$

12.2.4. Задача потребителя (UMP):

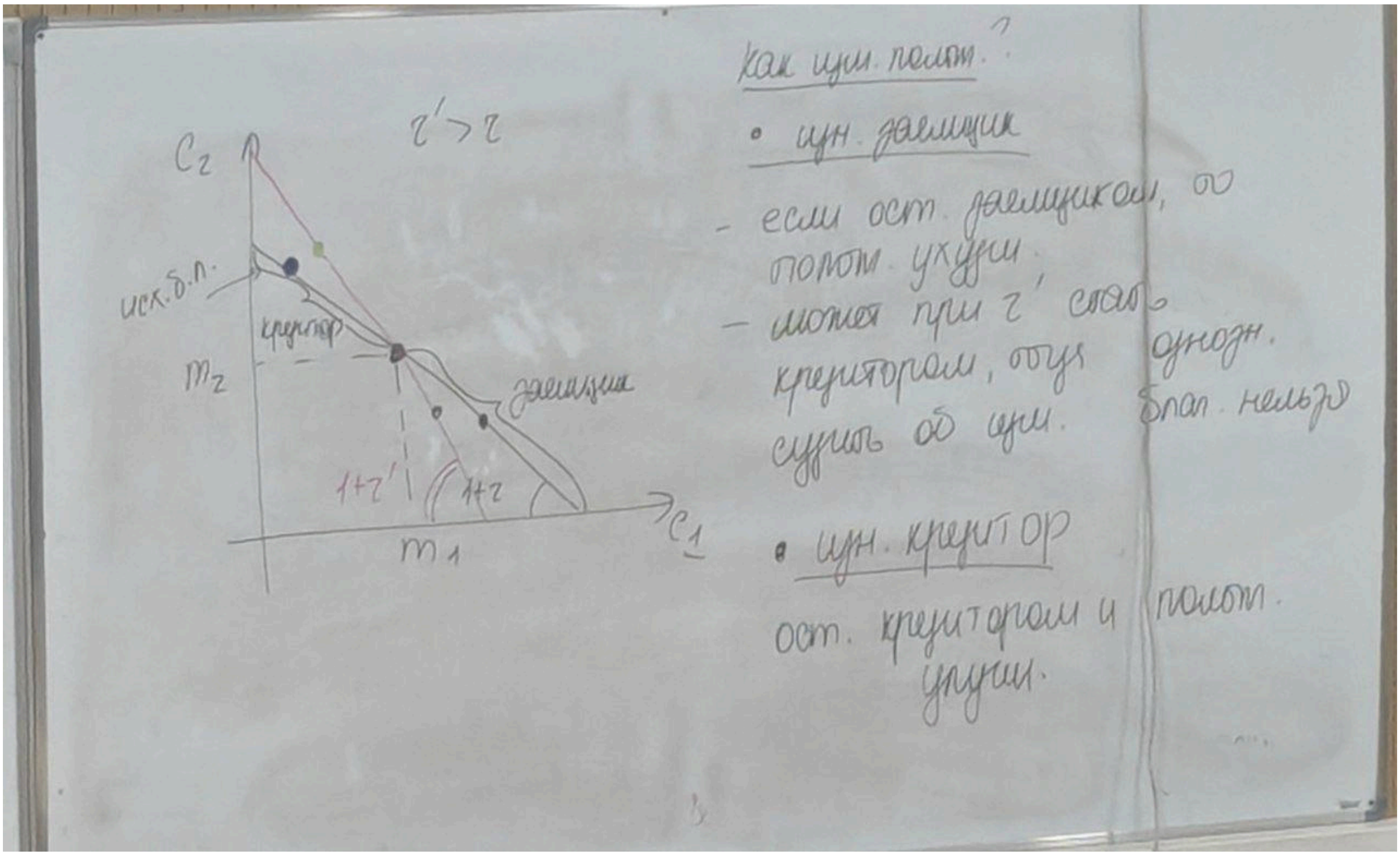
$$\begin{cases} u(c_1, c_2) \to \max\limits_{c_1, c_2 \geqslant 0} \\ c_1(1 + r) + c_2 = m_1(1 + r) + m_2 \end{cases}$$

Получаем решение $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ — маршаллианский спрос:
- $\tilde{c}_1 > m_1$, тогда потребитель — заёмщик,
- $\tilde{c}_1 < m_1$, тогда потребитель — кредитор.

Если функция полезности дифференцируема и $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ — внутреннее решение, то $\mathrm{MRS}_{12}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = 1 + r$.

12.2.5. Реакция на изменение ставки процента.

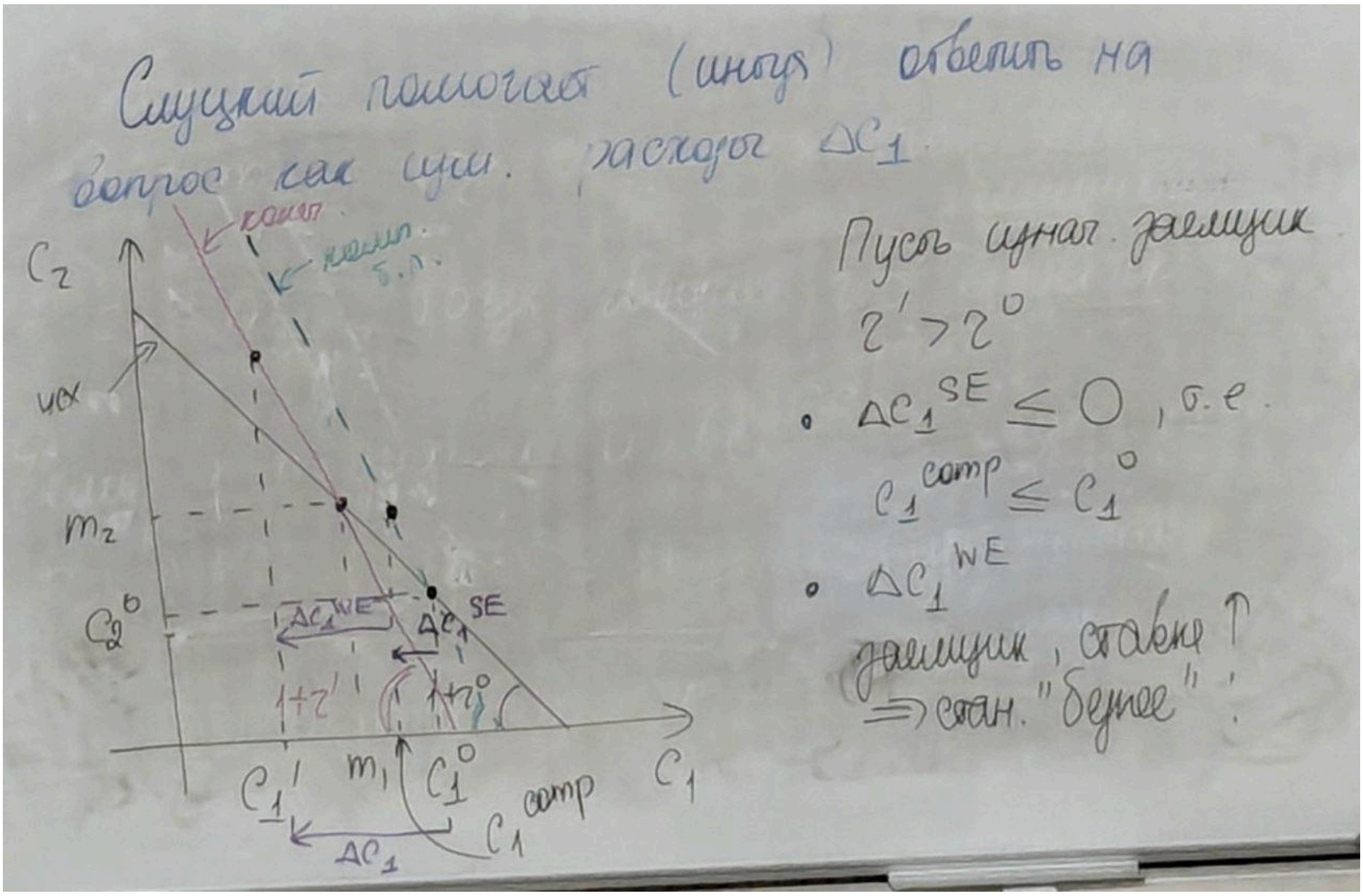
$r^0 \to r' > r^0$.
я уже не могу техать, спасите



Слуцкий помогает (иногда) ответить на вопрос, как изменятся расходы Δc_1.
Пусть изначально заёмщик, ставка растёт. Тогда потребитель становится беднее.

- $\Delta c_1^{\text{SE}} \leqslant 0$,
- если благо нормальное, $\Delta c_1^{\text{WE}} < 0$. Если благо инфериорное, $\Delta c_1^{\text{WE}} > 0$.

Окончательно для нормального блага $\Delta c_1 < 0 \Rightarrow$ обычное благо.



12.3. Дисконтированная полезность.

$$u(c_1, c_2) = \varphi(c_1) + \frac{1}{1+\rho}\varphi(c_2)$$

$\varphi'(c) > 0$ — строгая монотонность предпочтений,
$\varphi''(c) < 0$ — строгая выпуклость предпочтений,
$\rho \geqslant 0$ — ставка субъективных межпериодных предпочтений (ставка дисконтирования полезности).

12.3.1. Пример.

$$u = \log c_1 + \frac{1}{1+\rho}\log c_2$$

Равносильно функции Кобба-Дугласа

$$\tilde{u} = c_1 c_2^{\frac{1}{1+\rho}}$$

12.3.2. Характеристика выбора потребителя при дисконтировании полезности.

Пусть решение UMP внутренее, то есть $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \gg 0$. Тогда $\mathrm{MRS}_{12}(\tilde{c}_1), \tilde{c}_2 = 1 + r$.

$$\mathrm{MRS}_{12} = \frac{\partial u/\partial c_1}{\partial u/\partial c_2} = \frac{\varphi'(c_1)}{\frac{1}{1+\rho}\varphi'(c_2)} = (1+\rho)\frac{\varphi'(c_1)}{\varphi'(c_2)}$$

Тогда

$$\mathrm{MRS}_{12} = 1 + r \Leftrightarrow (1+\rho)\frac{\varphi'(\tilde{c}_1)}{\varphi'(\tilde{c}_2)} = 1 + r$$

- если $r = \rho \Rightarrow \varphi'(\tilde{c}_1) = \varphi'(\tilde{c}_2)$. Так как $\varphi(x)$ монотонно убывает, то $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$.
- если $\rho > r$, тогда $\varphi'(\tilde{c}_1) < \varphi'(\tilde{c}_2)$. Так как $\varphi'(x)$ убывает, то $\tilde{c}_1 > \tilde{c}_2$.

- если $\rho < r$, аналогично $\tilde{c}_1 < \tilde{c}_2$.

13. Лекция 13. Экономика обмена.

Вопросы экономики:

1. Эффективное распределение ресурсов в экономике в целом?
   Парето-оптимальность; централизованное принятие решений
2. Результат поведения индивидуальных экономических агентов: распределение и цены?
   Равновесие по Вальрасу
3. Как соотносится равновесие и оптимальность?

13.1. Описание экономики.

Пусть $N = 2$ благ, $M = 2$ потребителей: A и B. Предпочтения потребителей предстaвимы непрерывными функциями полезности.

x_i^k — объём потребления блага i потребителем k.

Полезность потребителя $u^k(x^k)$, где $x^k = (x_1^k, x_2^k)$.

Нет фиксированного дохода, но есть первоначальный запас благ $\omega^k = (\omega_1^k, \omega_2^k) \geqslant 0$.

Пусть $\overline{\omega}_i = \omega_i^A + \omega_i^B$ — совокупный запас блага i в экономике.

13.2. Допустимые распределеения.

13.2.1. Определение.

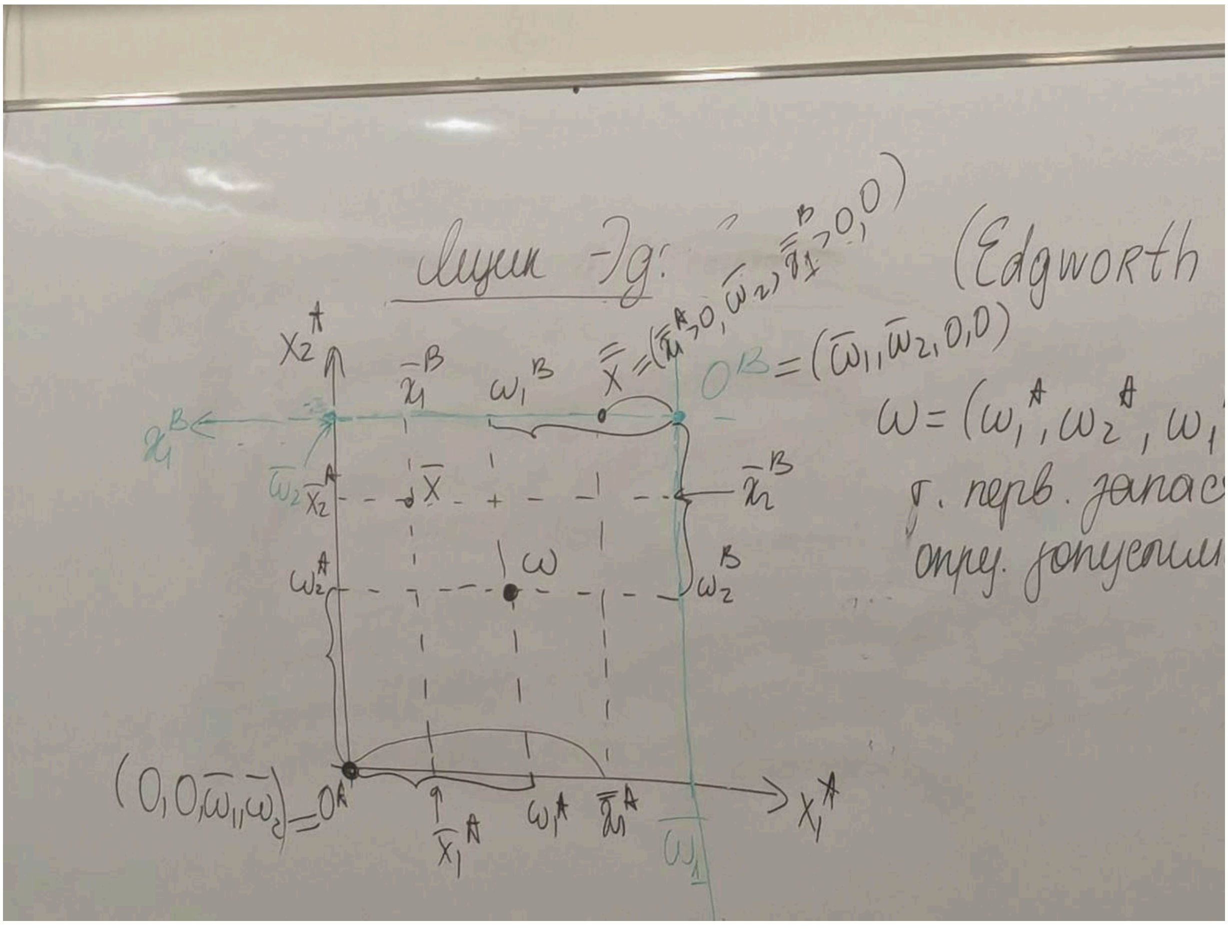
Распределение — набор, специфицирующий объём потребления каждого блага каждым потребителем: $x = (x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$.

13.2.2. Определение.

Допустимым распределением назоывается такое распределение, что $x_i^A + x_i^B = \overline{\omega}_i$

13.3. Ящик Эджворта.

Построим ящик Эджворта. Любая точка внутри него является допустимым распределением.



13.3.1. Определение.

Внутреннее распределение — такое распределение, в котором у каждого потребителя положительное количество каждого блага, лежит внутри ящика Эджворта.

13.3.2. Определение.

Граничное распределение — такое распределение, в котором хотя бы у одного потребителя отсутствует хотя бы одно благо; лежит на стенке ящика Эджворта.

13.4. Парето-оптимальность (ПО) распределения

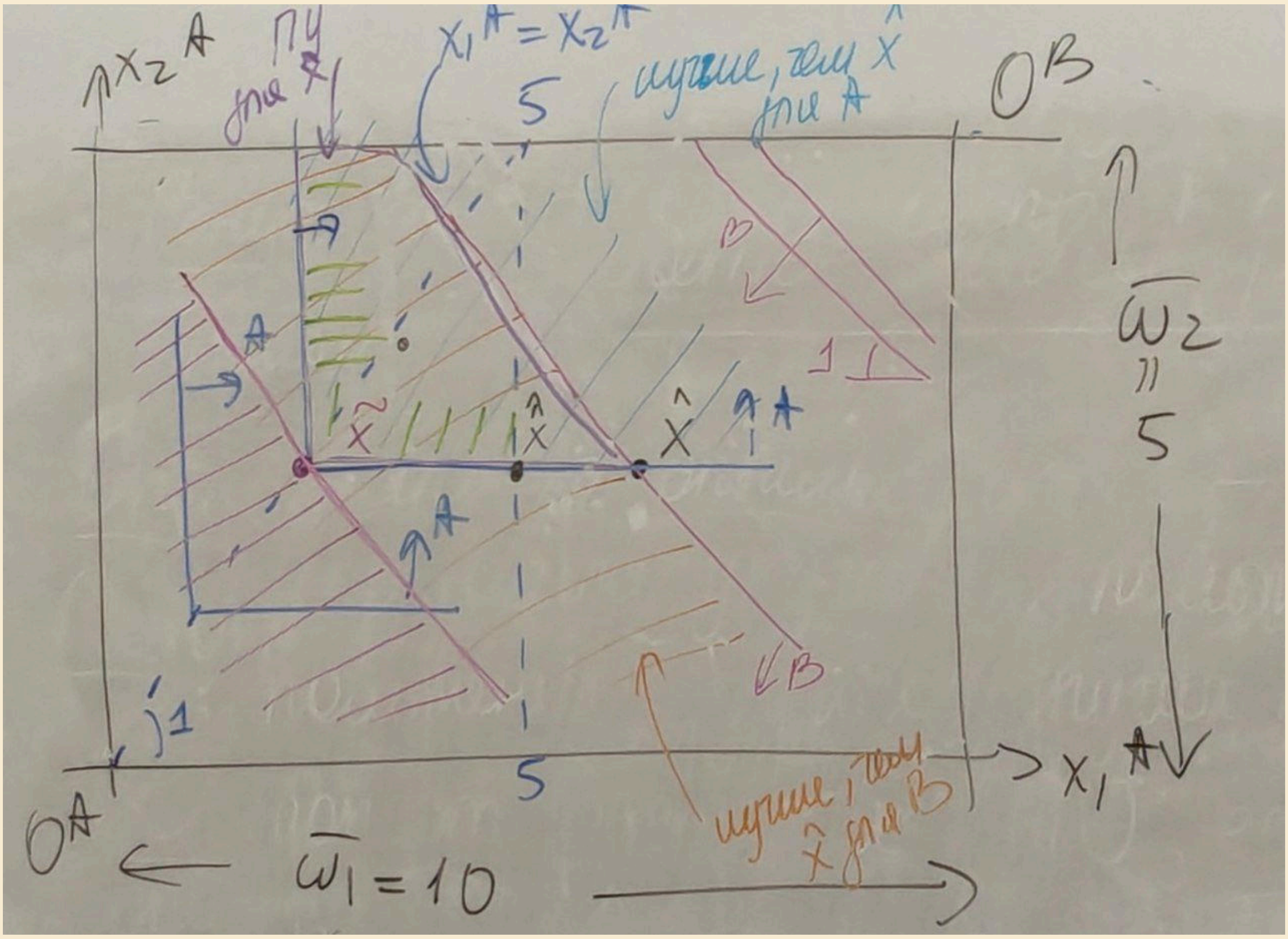
13.4.1. Определение.

Парето-оптимальное распределение — это такое допустимое распределение, что нельзя улучшить положение одного потребителя, не ухудшая положение другого (других), то есть допустимое распределение $\overline{x}$ парето-оптимально, если не существует другого допустимого распределения $\hat{x}$ такого, что, $\forall k\ \ u^k\left(\hat{x}^k\right) \geqslant u^k\left(\overline{x}^k\right)$ и $\exists m:\ u^m(\hat{x}^m) > u^m(\overline{x}^m)$.

Если такое $\hat{x}$ находится, то его называют парето-улучшением для распределения $\overline{x}$.

13.4.2. Пример.

$\omega^A = (1,2), \omega^B = (9,3)$
$\overline{\omega}_1 = 10, \overline{\omega}_2 = 5.$
$u^A = \min\left\{x_1^A, x_2^A\right\}, u^B = x_1^B + x_2^B.$
Кривые безразличия у B: $x_2^B = u - x_1^B$
Кривые безразличия у A: уголки с точкой в $x_1^A = x_2^A$



$\hat{x}$ — не оптимальное распределение, в сиреневой трапеции — все парето-улучшения $\hat{x}$.
$\tilde{x}$ — ПО распределение. Более того, любая точка на луче $x_2^A = x_1^A$ — ПО распределение.

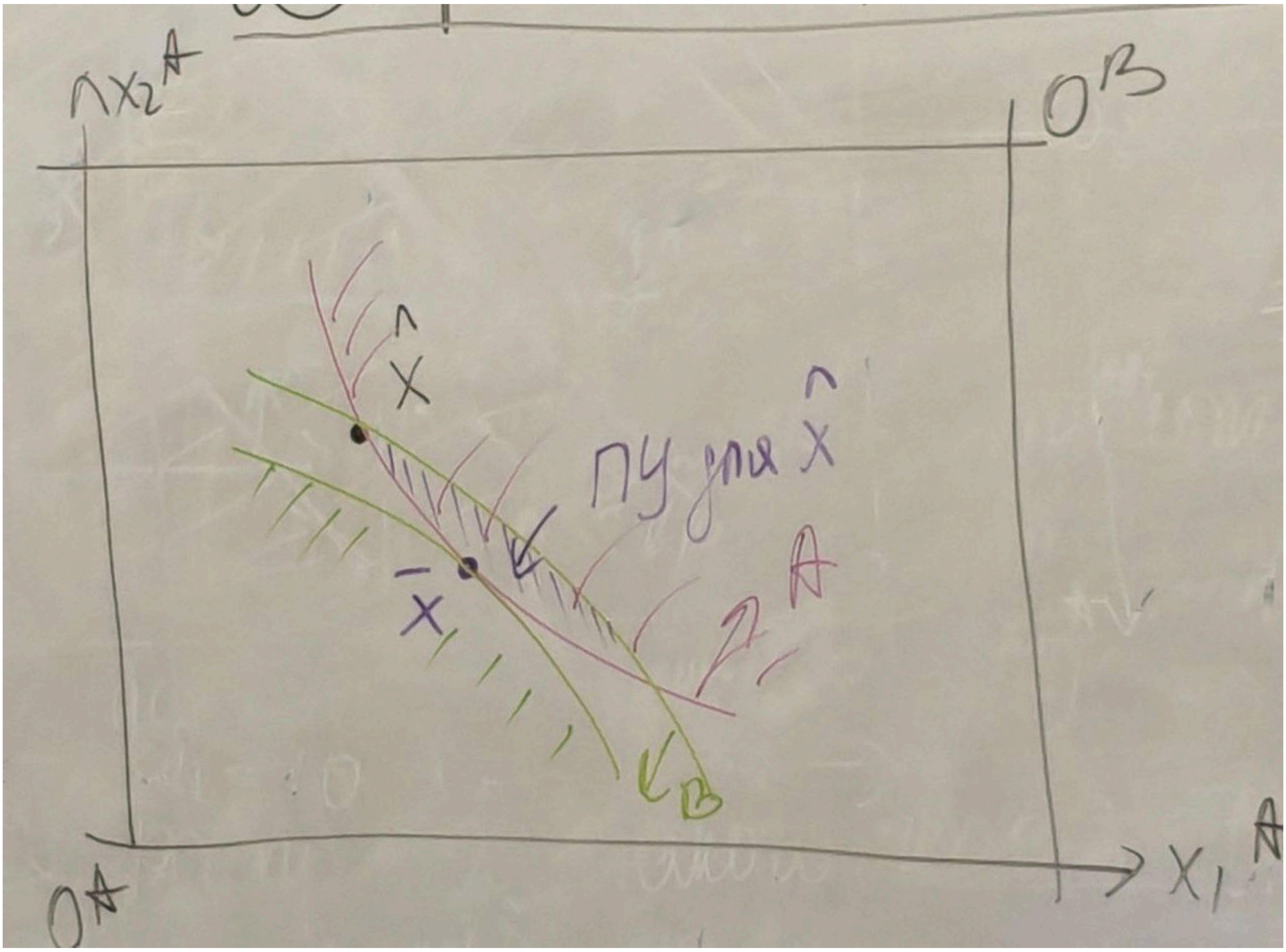
13.4.3. Утверждение.

Если предпочтения обоих потребителей сторго монотонны, то точки O_A и O_B — ПО.

13.5. Дифференциальная характеристика внутренних ПО.

Видим: $\overline{x}$ — внутреннее допустимое распределение, точка касания кривых безразличия:

$$\mathrm{MRS}_{12}^A(\overline{x}^A) = \mathrm{MRS}_{12}^B(\overline{x}^B)$$



13.6. 1. Необходимое условие внутреннего ПО.

13.6.1. Утверждение.

Пусть предпочтения потребителей строго монотонны и представимы дифференцируемой функцией полезности. Пусть $\overline{x}$ — внутреннее ПО. Тогда это точка касания кривых безразличия:

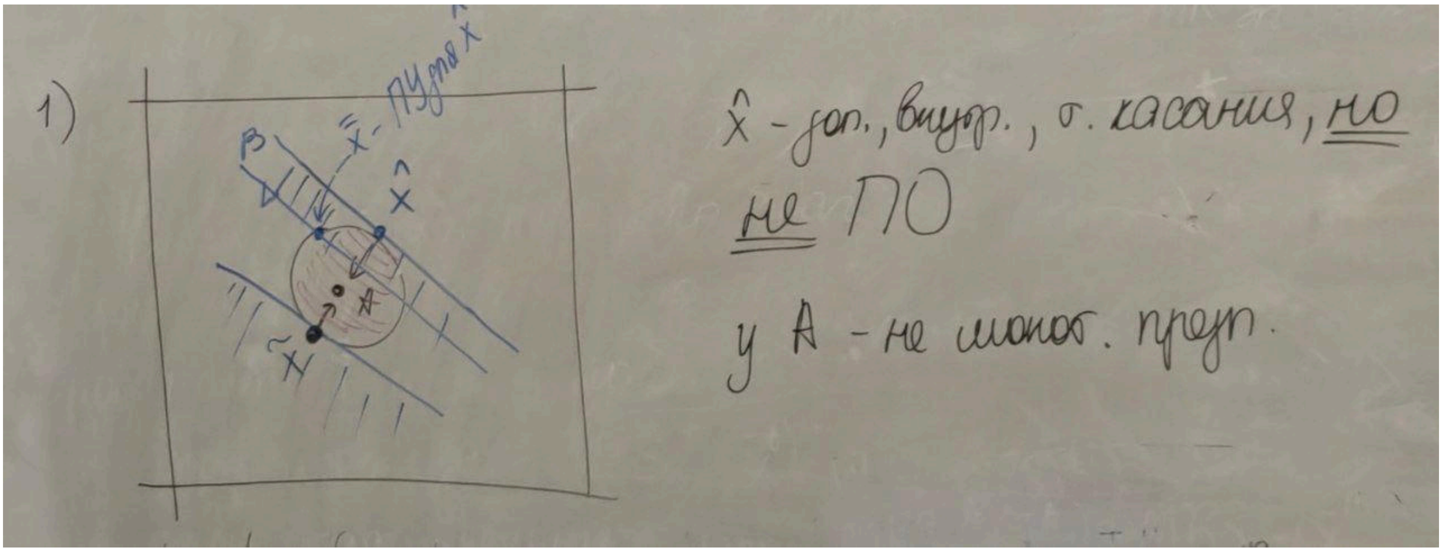
$$\mathrm{MRS}_{12}^{A}(\overline{x}^{A}) = \mathrm{MRS}_{12}^{B}(\overline{x}^{B})$$

13.6.2. Доказательство:

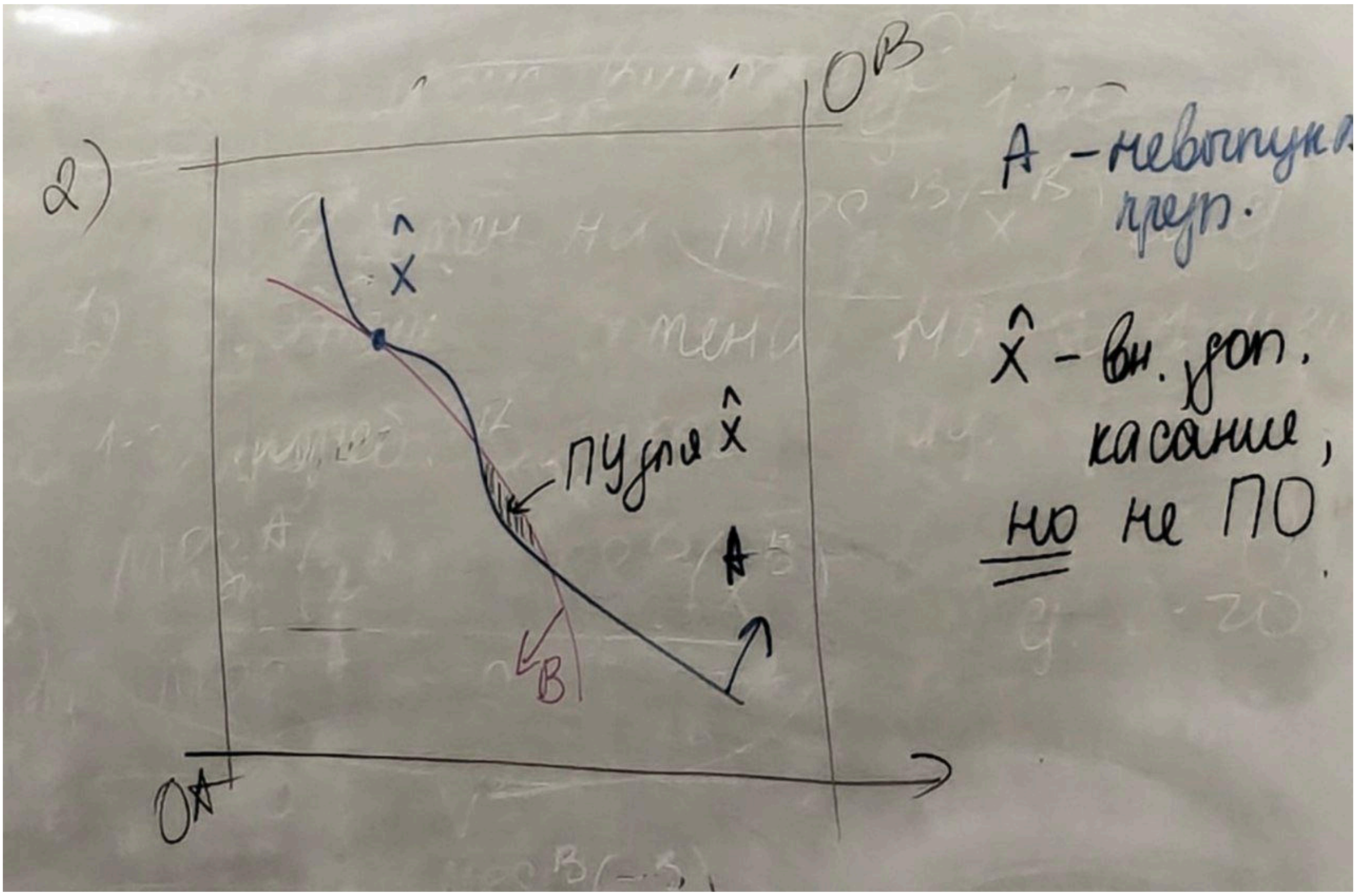
Пусть $\overline{x}$ — внутреннее ПО, но $\mathrm{MRS}_{12}^{A}(\overline{x}^{A}) \neq \mathrm{MRS}_{12}^{B}(\overline{x}^{B})$.
Не умаляя общности, $\mathrm{MRS}_{12}^{A}(\overline{x}^{A}) > \mathrm{MRS}_{12}^{B}(\overline{x}^{B})$.
Идея: увеличить у A первое благо и уменьшить второго.
Рассмотрим допустимое перераспределение благ такое, что потребитель A получает 1 малую единицу первого блага, в обмен готов отдать $\mathrm{MRS}_{12}^{A}(\overline{x}^{A})$ малых единиц второго блага, а если отдаст меньше, например, $\dfrac{1}{2}(\mathrm{MRS}_{12}^{A} + \mathrm{MRS}_{12}^{B}) < \mathrm{MRS}_{12}^{A}$, тогда положение A в силу строгой монотонности предпочтений улучшится.
B готов отдать 1 малую единицу первого блага в обмен на MRS_{12}^{B} малых единиц второго. Если в обмен за одну малую единицу первого блага B получает $\dfrac{1}{2}(\mathrm{MRS}_{12}^{A} + \mathrm{MRS}_{12}^{B})$, его положение в силу строгой монотонности предпочтений улучшится.
Этот набор — ПУ $\overline{x} \Rightarrow \overline{x}$ — не ПО. Противоречие. ■

13.7. 2. Достаточное условие внутреннего ПО.

1) Нужна монотонность:



2) Нужна выпуклость:



13.7.1. Утверждение.

Пусть предпочтения потребителей строго монотонны, выпуклы и представимы непрерывной функцией полезности. Тогда условие равенства MRS_{12} является не только необходимым, но и достаточным условием внутреннего ПО.

13.8. 3. Задача на поиск ПО.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u^A\big(x_1^A, x_2^A\big) \to \max\limits_{x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B \geqslant 0} \\ u^B\big(x_1^B, x_2^B\big) \geqslant \overline{u}^B \\ x_1^A + x_1^B = \overline{\omega}_1 \\ x_2^A + x_2^B = \overline{\omega}_2 \end{cases} \qquad (*)$$

13.8.1. Утверждение.

Пусть предпочтения потребителя строго монотонны и представимы непрерывной функцией полезности. Пусть $u^k(0) = 0$. Тогда любое решение задачи $(*)$ является ПО и наоборот, любое ПО распределение является решение м задачи $(*)$ при некотором значении $\overline{u}^B$.

Пусть функции полезности дифференцируемы. Тогда можем получить дифференциальную характеристику решений задачи. Лагранжиан:

$$L = u^A\big(x_1^A + x_2^A\big) + \lambda\big(\overline{u}^B - u^B\big(x_1^B, X_2^B\big)\big) + \mu_1\big(\overline{\omega}_1 - x_1^A - x_1^B\big) + \mu_2\big(\overline{\omega}_2 - x_2^A - x_2^B\big)$$

FOC для внутреннего решения:
по x_1^A

$$\frac{\partial u^A}{\partial x_1^A} - \mu_1 = 0$$

по x_2^A:

$$\frac{\partial u^A}{\partial x_2^A} - \mu_2 = 0$$

по x_1^B:

$$-\lambda \frac{\partial u^B}{\partial x_1^B} - \mu_1 = 0$$

по x_2^B:

$$-\lambda \frac{\partial u^B}{\partial x_2^B} - \mu_2 = 0$$

Итого:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\partial u^A / \partial x_1^A}{\partial u^A / \partial x_2^A} = \frac{\partial u^B / \partial x_1^B}{\partial u^B / \partial x_2^B}$$

Получаем

$$\mathrm{MRS}_{12}^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = \mathrm{MRS}_{12}^B\left(x_1^B, x_2^B\right)$$

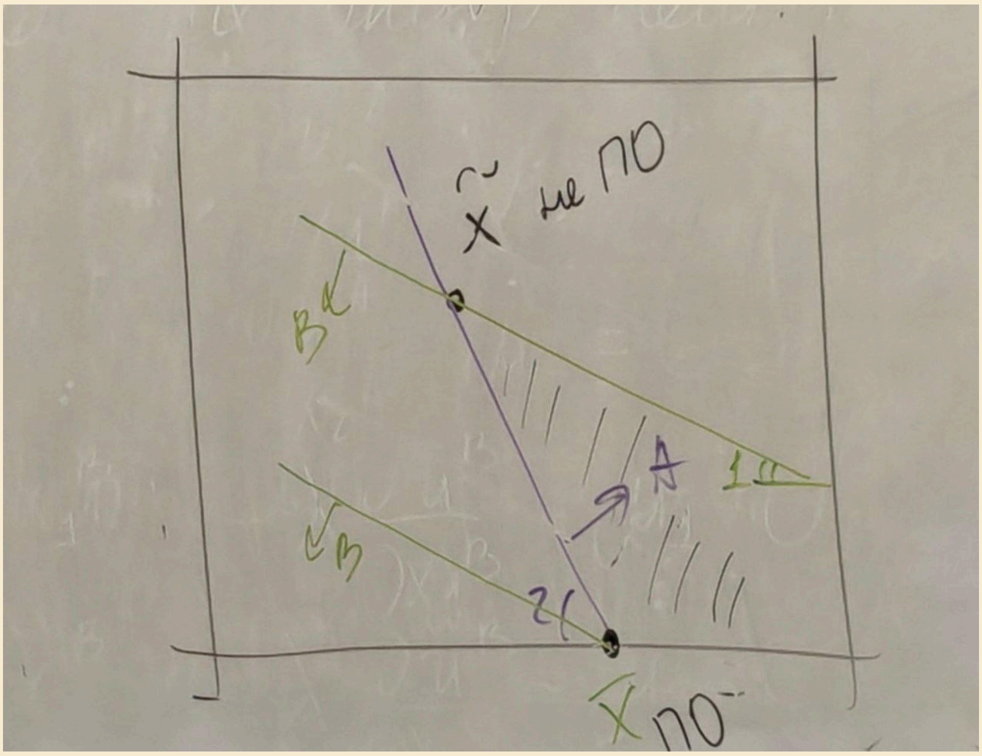
Это условие будет необходимым и достаточным, если целевая функция вогнута (квазивогнута), то есть предпочтения выпуклы.

13.9. 4. Граничные ПО

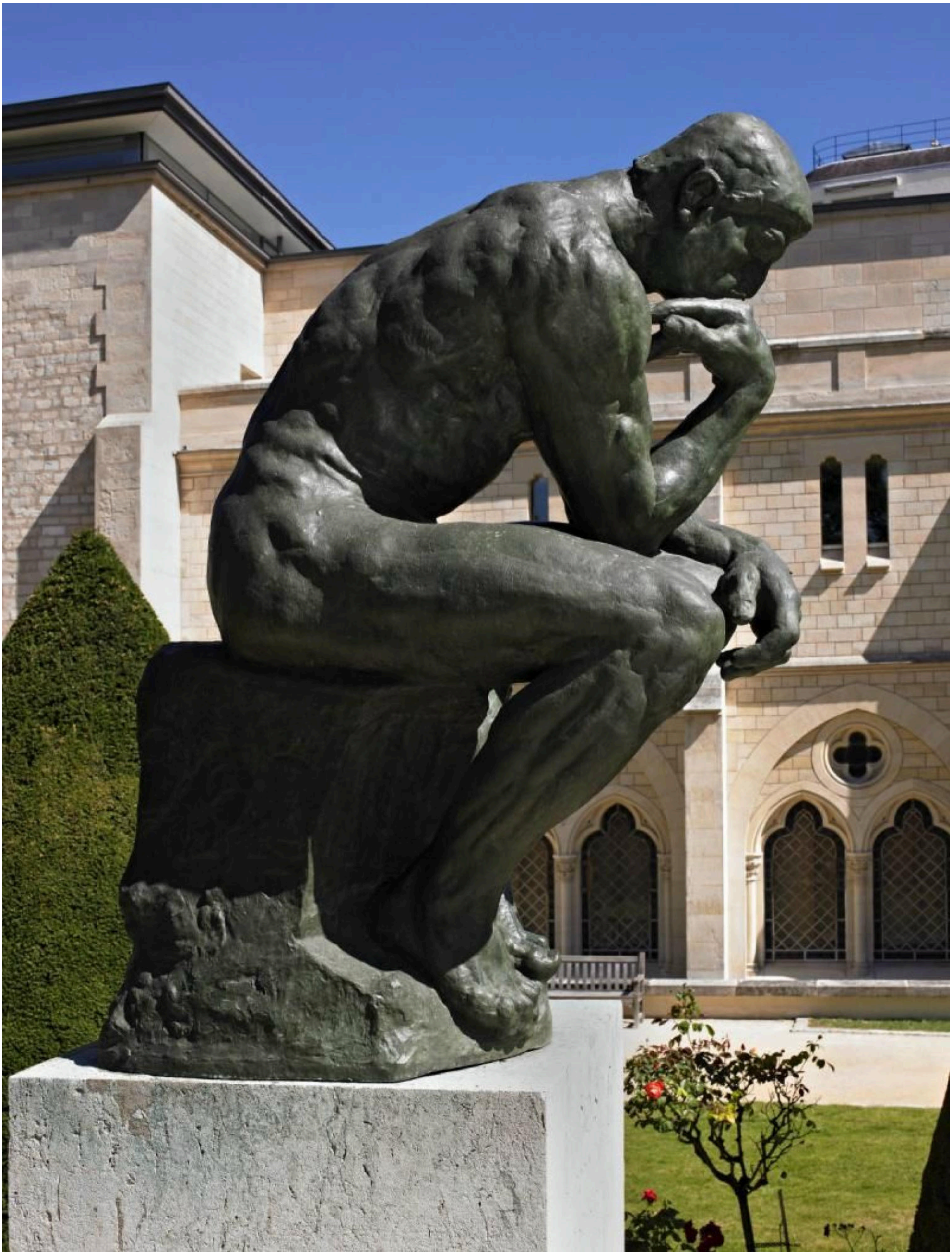
13.9.1. Пример.

$u^A = 2x_1^A + x_2^A, u^B = x_1^B + x_2^B$. Тогда $\mathrm{MRS}_{12}^A = 2 \neq \mathrm{MRS}_{12}^B = 1$. Значит, тут не может быть внутреннего парето-оптимума.

Так как кривая безразличия A идёт круче, ожидаем ПО на нижней и на правой стенке ящика.



Здесь $\overline{x}$ — ПО, и в ней $\mathrm{MRS}^A_{12} > \mathrm{MRS}^B_{12}$.



14. Лекция 14. Экономика обмена: равновесие по Вальрасу и закон Вальраса

14.1. Предпосылки:

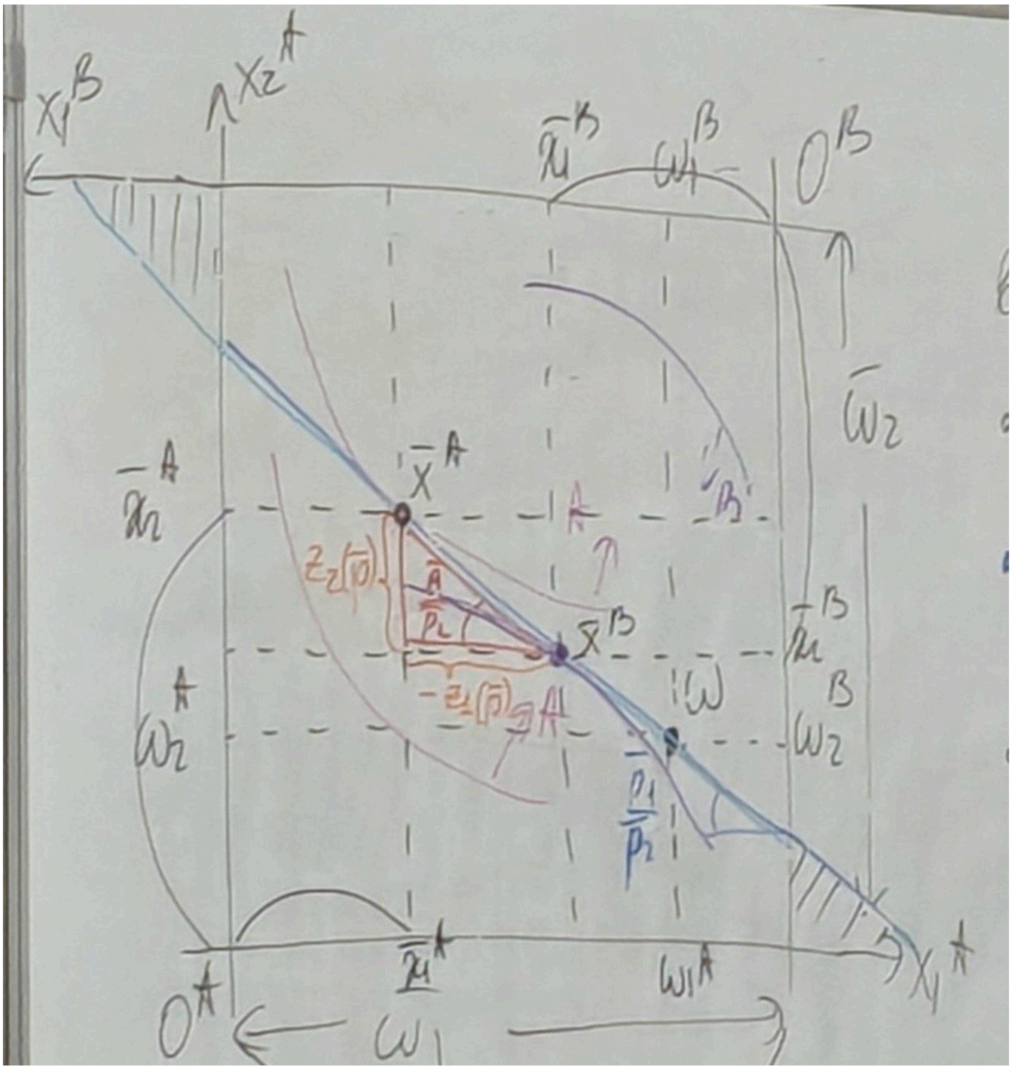
- потребители принимают цены заданными
- $p = (p_1, p_2) \gg 0$ — вектор цен, $p_i > 0$ — цена за единицу блага i
- нет внешних воздействий потребителей друг на друга
- нет ассиметрии информации между потребителями

Задача потребителя k:

$$\begin{cases} u_k(x_1^k, x_2^k) \to \max\limits_{x_1^k, x_2^k \geqslant 0} \\ p_1 x_1^k + p_2 x_2^k \leqslant p_1 \omega_1^k + p_2 \omega_2^k \end{cases}$$

Бюджетная линия в ящике Эджворта:

- наклон $-\frac{p_1}{p_2}$
- проходит через точку первоначального запаса ω.
- бюджетные линии для потребителей в ящике Эджворта совпадают



На рисунке $x_1^A + x_1^B < \overline{\omega_1} \Rightarrow$ профицит первого блага, $x_2^A + x_2^B > \overline{\omega_2} \Rightarrow$ дефицит первого блага.

14.1.1. Определение.

$z_i(p_1, p_2)$ — функция избыточного спроса на благо i.

$$z_i(p_1, p_2) = x_i^A(p_1, p_2, \omega^A) + x_i^B(p_1, p_2, \omega^B) - \overline{\omega}_i$$

Если $z_i(p_1, p_2) > 0$ — дефицит i-го блага, если $z_i(p_1, p_2) < 0$ — профицит i-го блага.

На рисунке: $z_1(p) < 0, z_2(p) > 0$. Тогда

$$\frac{p_1}{p_2} = \left|\frac{z_2(p)}{z_1(p)}\right|$$

$$p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) = 0$$

Закон Вальраса. Совокупная стоимость избыточного спроса равна нулю.
Когда выполняется закон Вальраса?

14.1.2. Утверждение.

Если предпочтения локально ненасыщаемые (в частности, если монотонные), то есть выбор потребителя лежит на бюджетной линии, то закон Вальраса выполнен при любых ценах, при которых определён избыточный спрос.

14.1.3. Доказательство.

Предпочтения монотонны, значит, в решении UMP ограничение выполняется как равенство, значит,

$$\forall k \;\; p_1 x_1^k + p_2 x_2^k = p_1 \omega_1^k + p_2 \omega_2^k \Leftrightarrow p_1\left(x_1^k - \omega_1^k\right) + p_2\left(x_2^k - \omega_2^k\right) = 0$$

Сложим все эти равенства. Получим

$$p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) = 0$$

■

14.1.4. Следствие.

Если закон Вальраса выполнен и цены положительны, то не может быть профицита на всех рынках, как и дефицита на всех рынках.

14.1.5. Определение. Равновесие по Вальрасу

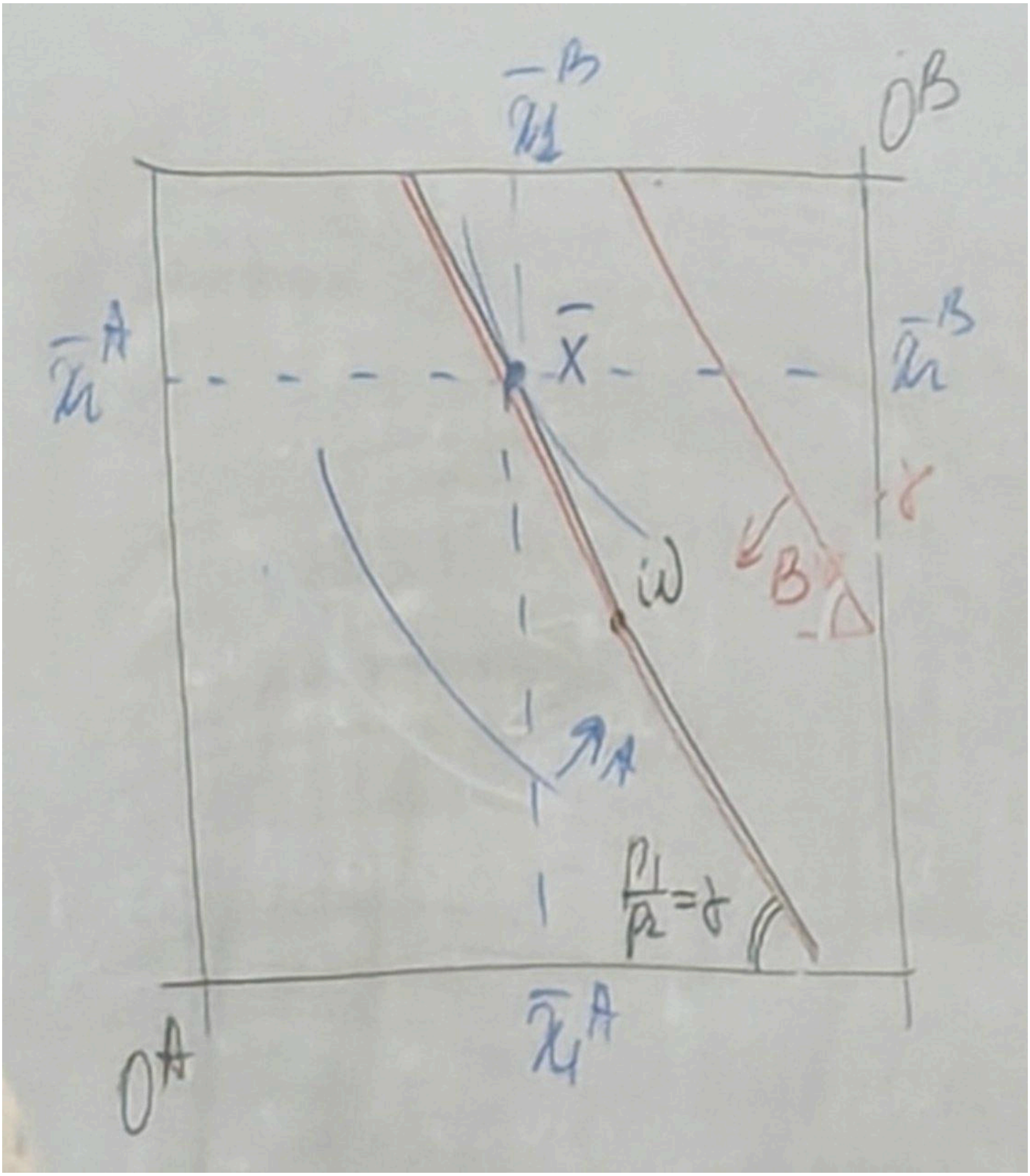
Набор $\left(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B, p_1, p_2\right)$ называется равновесным по Вальрасу, если:
1. $\forall k$ набор $x^k = \left(x_1^k, x_2^k\right)$ является решением UMP потребителя k при ценах p_1, p_2.
2. $x_i^A + x_i^B = \overline{\omega_i}$, то есть $\forall i \;\; z_i(p) = 0$.

14.1.6. Замечания:

1. Равновесные распределения в ящике Эджворта.

14.1.7. Пример. Аля-КД + субституты

$u^B = \gamma x_1^B + x_2^B$
1) $\frac{p_1}{p_2} = \gamma$


0^B
$\bar{x}_2^B$
$\bar{x}_1^A$
$\bar{x}_1^B$
$\bar{X}$
ω
γ
B
$-\Delta$
x_A
$\frac{p_1}{p_2}=\gamma$
$\bar{x}_1^A$
0^A

2) $\frac{p_1}{p_2} < \gamma \Rightarrow x_1^B > 0, x_2^B = 0$ Если кривая безразличия A коснётся бюджетной линии в этой точке, то это будет равновесием.
3) Если кривая безразличия A (в субститутах) будет круче бюджетной линии, то такие цены вообще не могут быть равновесными.

2. Пусть $\tilde{p}$ — равновесный вектор цен. Рассмотрим $t\tilde{p}$. Тогда ничего не поменяется, так как не поменялось отношение цен (например, всегда можем отнормировать одну из цен.)
3. Если предпочтения монотонны, то закон Вальраса выполнен при любых корректных ценах, в частности, при равновесных. Тогда

$$\tilde{p}_1 z_1(\tilde{p}) + \tilde{p}_2 z_2(\tilde{p}) = 0$$

Тогда $z_1(\tilde{p}) = 0 \Leftrightarrow z_2(\tilde{p}) = 0$.
То есть, при $N = 2$ из следствия закона Вальраса достаточно уравновесить один рынок. При $N > 2$ достаточно уравновесить $N - 1$ рынок.

14.1.8. Пример.

Пусть $u^A = x_1 x_2^3, u^B = x_1^2 x_2^5$.
$\omega^A = (5, 5), \omega^B = (2, 2)$.
Найти равновесие по Вальрасу:
1) Решаем для каждого потребителя UMP $\Rightarrow$ находим маршаллианский спрос.

$$x_1^A(p) = \frac{5p_1 + 5p_2}{4p_1} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}\frac{p_2}{p_1}$$

$$x_2^A(p) = 3\frac{5p_1 + 5p_2}{4}(p_2) = \frac{15}{4}\frac{p_1}{p_2} + \frac{15}{4}$$

$$x_1^B(p) = \frac{2}{7}\frac{2p_1 + 2p_2}{p_1} = \frac{4}{7} + \frac{4}{7}\frac{p_2}{p_1}$$

$$x_2^B(p) = \frac{5}{7}\frac{2p_1 + 2p_2}{p_2} = \frac{10}{7}\frac{p_1}{p_2} + \frac{10}{7}$$

Уравновесим, например, второй рынок, так как предпочтения монотонны:

$$x_2^A + x_2^B = 7$$

$$\frac{15}{4}\left(\frac{p_1}{p_2} + 1\right) + \frac{10}{7}\left(\frac{p_1}{p_2} + 1\right) = 7$$

$$\frac{145}{28}\frac{p_1}{p_2} + \frac{145}{28} = 7$$

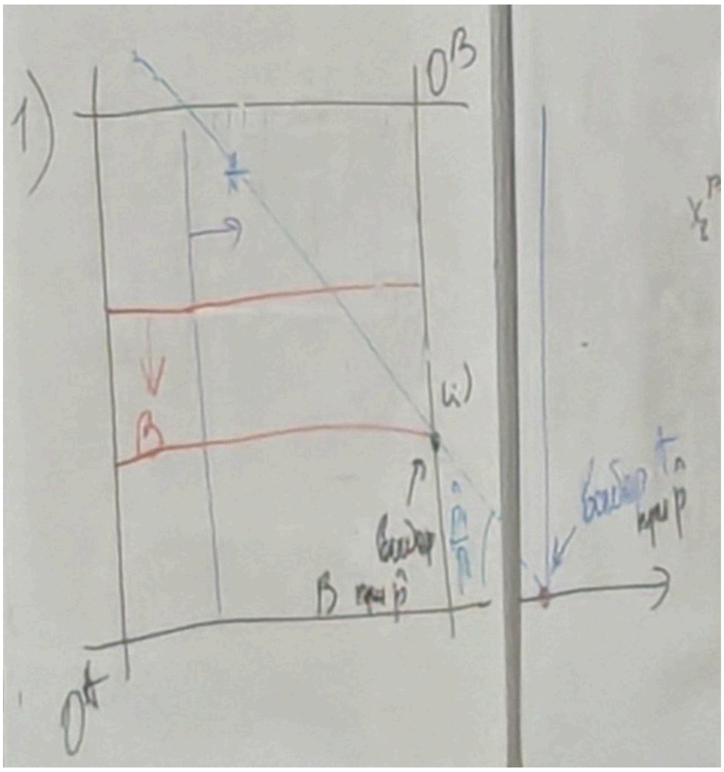
$$145\frac{p_1}{p_2} = 51$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{51}{145}$$

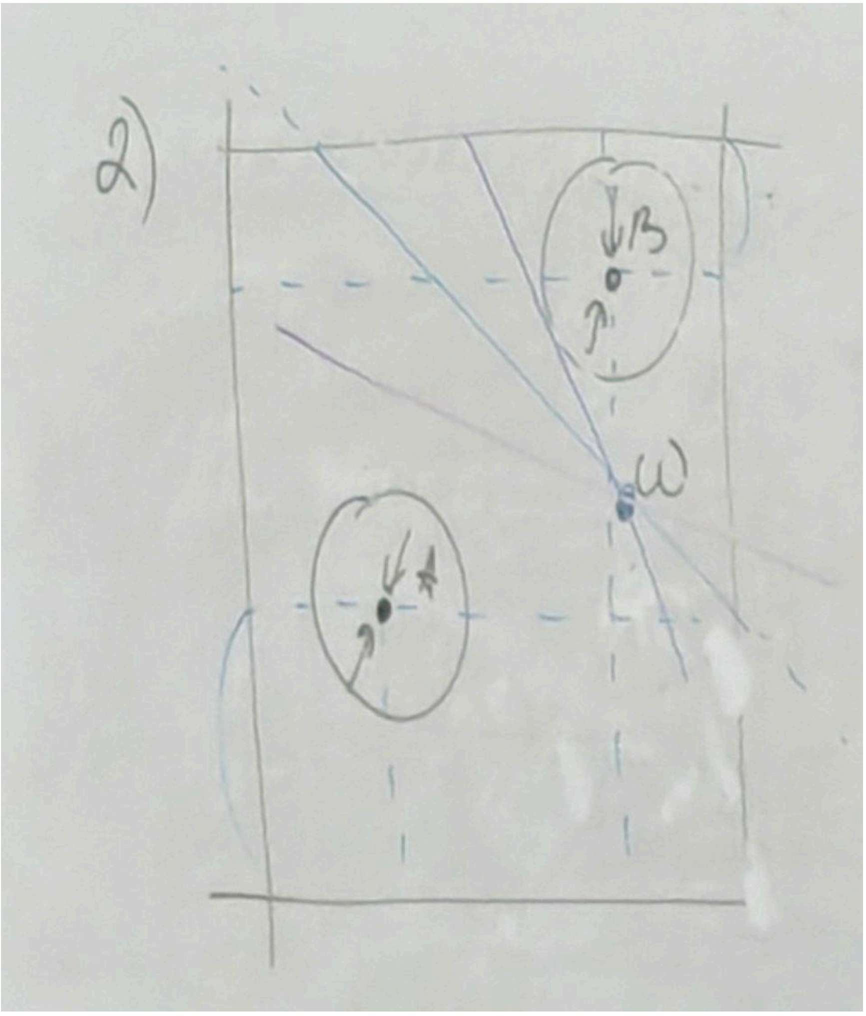
Подставив соотношение цен в функции маршаллианского спроса двух потребителей, получим равновесное распределение $\tilde{x}$.

14.2. Существование и единственность равновесия по Вальрасу.

1) Нет строгой выпуклости:



В этом случае не будет равновесия вовсе. 2) Нет монотонности (точка насыщения):



14.2.1. Утверждение.

Если предпочтения строго монотонны и строго выпуклы, то равновесие по Вальрасу существует.

14.2.2. Про единственность.

В случае субститутов ($u = \min\{x_1, x_2\}$), все точки на диагонали, достижимые из точки изначального запаса, будут возможными равновесиями при всех возможных положительных ценах.
Если $u^A = u^B = \alpha x_1 + x_2$, то при $\frac{p_1}{p_2} = \alpha$ любая точка на бюджетной линии внутри Ящика будет равновесной.

14.3. Равновесие и оптимальность.

14.3.1. Утверждение. Первая теорема благосостояния

Пусть предпочтения потребителей монотонны (достаточно локальной ненасыщаемости) и $(\tilde{x}, \tilde{p})$ — равновесие по Вальрасу. Тогда $\tilde{x}$ — ПО.

14.3.2. Доказательство.

Пусть $\tilde{x}$ — равновесное распределение.
Пусть $\tilde{x}$ — не ПО $\Rightarrow$ существует распределение $\hat{x}$, являющееся ПУ для $\tilde{x}$, пусть $u^A\left(\hat{x}^A\right) > u^A\left(\tilde{x}^A\right), u^B\left(\hat{x}^B\right) \geqslant u^B\left(\tilde{x}^B\right)$.
A : $\hat{x}^A$ лучше, чем $\tilde{x}^A$, но не был выбран при $\tilde{p}$, значит, был недоступен:

$$\tilde{p}_1 \hat{x}_1^A + \tilde{p}_2 \hat{x}_2^A > \tilde{p}_1 \omega_1^A + \tilde{p}_2 \omega_2^A \quad (1)$$

B : покажем, что $\tilde{p}_1 \hat{x}_1^B + \tilde{p}_2 \hat{x}_2^B > \tilde{p}_1 \omega_1^B + \tilde{p}_2 \omega_2^B \quad (2)$.
Пусть это не так, то есть $\tilde{p}\hat{x}^B < \tilde{p}\omega^B$, то есть его выбор не на бюджетной линии. Это невозможно, так как предпочтения B монотонны.
Сложим (1) и (2):

$$\tilde{p}\left(\hat{x}^B + \hat{x}^A\right) > \tilde{p}\overline{\omega}$$

$$\tilde{p}\left(\hat{x}^B + \hat{x}^A - \overline{\omega}\right) > 0$$

Это значит, что $\hat{x}^A + \hat{x}^B > \overline{\omega}$. Но $\hat{x}$ — допустимое распределение, значит, $\hat{x}^A + \hat{x}^B = \overline{\omega}$. Противоречие! ∎

15. Лекция 15. Равновесие и оптимальность (продолжение)

15.1. Напоминание.

15.1.1. Утверждение. Первая теорема благосостояния

Пусть предпочтения потребителей монотонны, и $(\tilde{x}, \tilde{p})$ — равновесие по Вальрасу. Тогда $\tilde{x}$ — ПО.

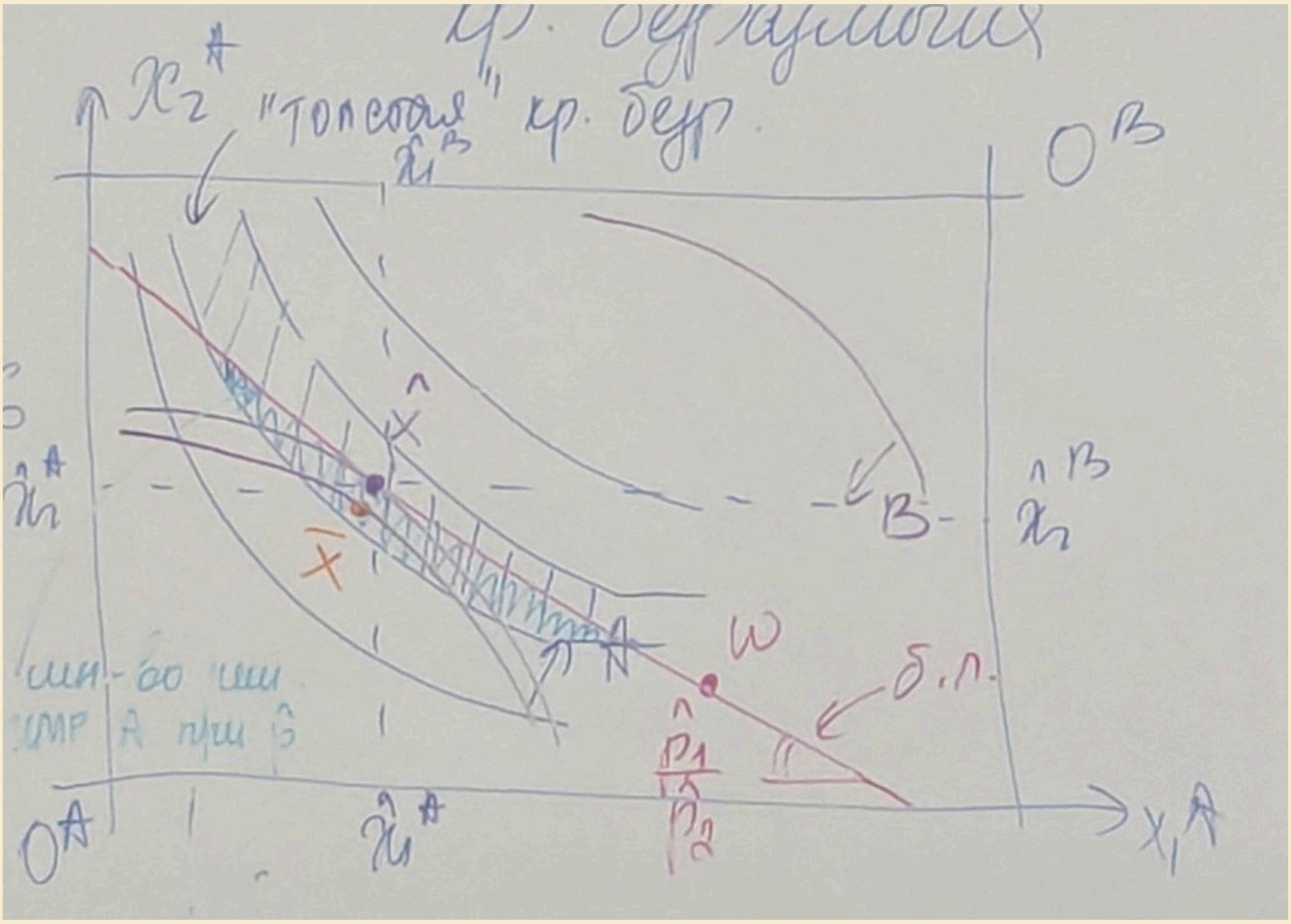
1)

15.1.2. Пример. Предпочтения с "толстой" кривой безразличия

Пусть:

$$u^A = \begin{cases} x_1^A x_2^A, x_1^A x_2^A < 3 \\ 3, 3 \leqslant x_1^A x_2^A \leqslant 6 \\ x_1^A x_2^A - 3, x_1^A x_2^A > 6 \end{cases}$$

Тогда у A не монотонные предпочтения. Пусть у B строго монотонные строго выпуклые предпочтения. Пусть например получится вот такая картина:



- $\hat{x}$ — равновесие по Вальрасу, но не ПО, так как есть $\overline{x}$ — пример ПУ для $\hat{x}$.

2) Если выполнены условия первой теоремы благосостояния, то равновесным распределением может быть только ПО.
3) Важны институциональные предпосылки:
- конкурентность (цены заданные)
- отсутствие экстерналий
- отсутствие асимметрии информации

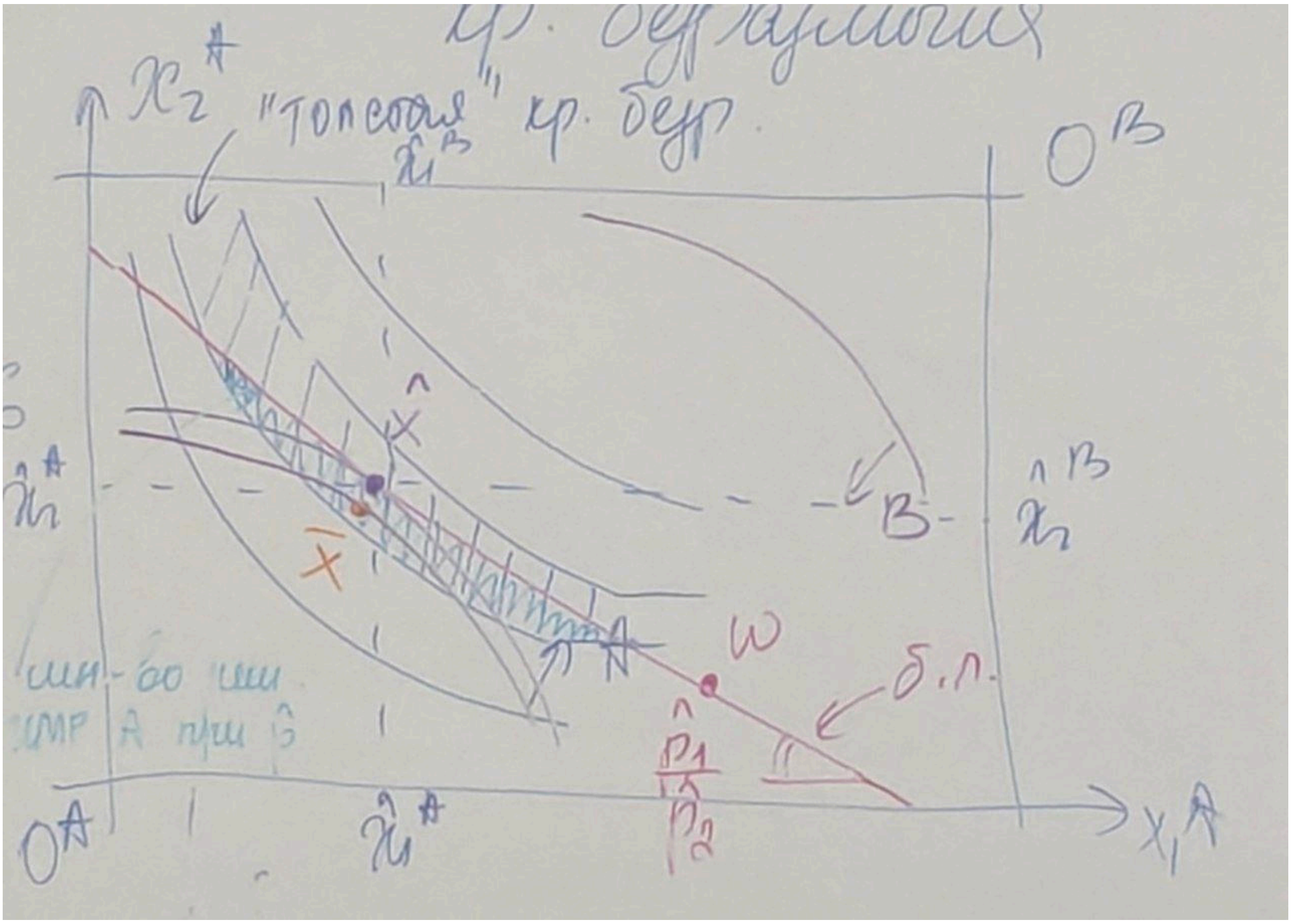
15.2. Вторая теорема благосостояния.

Идея:

Пусть предпочтения потребителей «хорошие», то есть строго выпуклые и строго монотонные. Тогда точка пересечения бюджетной линии с множеством ПО будет равновесным распределением по Вальрасу при соответствующих ценах.

Наоборот, если $\overline{x}$ — ПО, то $\overline{x}$ будет равновесным распределением при отношении цен, равному $\mathrm{MRS}_{12}^{A} = \mathrm{MRS}_{12}^{B}$.

Чтобы сдвинуть бюджетную линию в необходимую точку $\overline{x}$, если изначальная бюджетная линия не проходит через точку первоначального запаса, нужно произвести паушальную трансферту: на одного налог, на другого — субсидия в том же объёме.



15.2.1. Определение.

Набор $(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{T})$ называется <u>равновесием по Вальрасу в экономике с трансфертами</u>, если:

1) $\forall k$ набор $\tilde{x}^k$ является решением UMP потребителя k :

$$\begin{cases} u^k(x^k) \to \max\limits_{x^k \geqslant 0} \\ px^k \leqslant p\omega^k + T^k \end{cases}$$

при $\overline{p}$ и $\overline{T}^K$.

2) Рынки уравновешены, то есть

$$\forall i \ \sum_k \tilde{x}_i^k = \sum_k \omega_i^k$$

3) Финансовый баланс:

$$\sum_k \tilde{T}^k = 0$$

15.2.2. Утверждение. Вторая теорема благосостояния

Пусть предпочтения потребителей строго монотонные, выпуклы и представимы дифференцируемыми функциями полезности.
Пусть $\overline{x}$ — внутренний ПО. Тогда найдутся такие положительные цены $\overline{p}$, при которых $\overline{x}$ реализуемо как равновесное в экономике с трансфертами, где трансфер потребителю $k : \overline{T}^k = \overline{p} \cdot \overline{x}^k - \overline{p} \cdot \omega^K$

15.2.3. Доказательство:

$\overline{x}$ — внутренний ПО, предпочтения строго монотонны, выпуклые, функция полезности дифференцируема.
Тогда $\mathrm{MRS}^A_{12}\left(\overline{x}^A\right) = \mathrm{MRS}^B_{12}(\overline{x}^B)$ и $\overline{x}^A_i + \overline{x}^B_i = \overline{\omega}_i$.
Возьмём $\dfrac{\overline{p}_1}{\overline{p}_2} = \mathrm{MRS}^A_{12}\left(\overline{x}^A\right) = \mathrm{MRS}^B_{12}(\overline{x}^B)$, $\overline{T}^k = \overline{p} \cdot \overline{x}^k - \overline{p} \cdot \omega^k$.
1) Рациональность потребителя $k :$ $\overline{x}^k > 0$, предпочтения строго монотонны, выпуклы, значит, $\dfrac{\overline{p}_1}{\overline{p}_2} = \mathrm{MRS}^k_{12}\left(\overline{x}^k\right)$ — необходимое и достаточное условие внутреннего решения UMP.
Бюджетное ограничение выполняется как равенство: $\overline{p} \cdot \overline{x}^k = \overline{p} \cdot \omega^k + \overline{p} \cdot \overline{x}^k - \overline{p} \cdot \omega^k = \overline{p} \cdot \omega^k - \overline{T}^k$. Выполняется.
2) Рынки уравновешены в силу допустимости ПО: $\overline{x}^A + \overline{x}^B = \overline{\omega}$
3) Финансовый баланс:

$$\overline{T}^A + \overline{T}^B = \overline{p} \cdot \left(\overline{x}^A + \overline{x}^B - \omega^A - \omega^B\right) = 0$$

■

Идея решения подобных задач приведена в доказательстве.

16. Теория поведения фирмы.

16.1. Описание технологии.

$$\underbrace{x}_{\text{ресурсы или факторы производства}} \xrightarrow{\text{технология фирмы}} \underbrace{y}_{\text{выпуск или объём готовой продукции}}$$

x: либо скаляр — однофакторная фирма,
либо вектор, где $x_i \geqslant 0$ — объём использования i-го фактора производства.
$y \geqslant 0$ — уровень выпуска некоторой продукции *однопродуктовой* фирмы.

16.1.1. Определение.

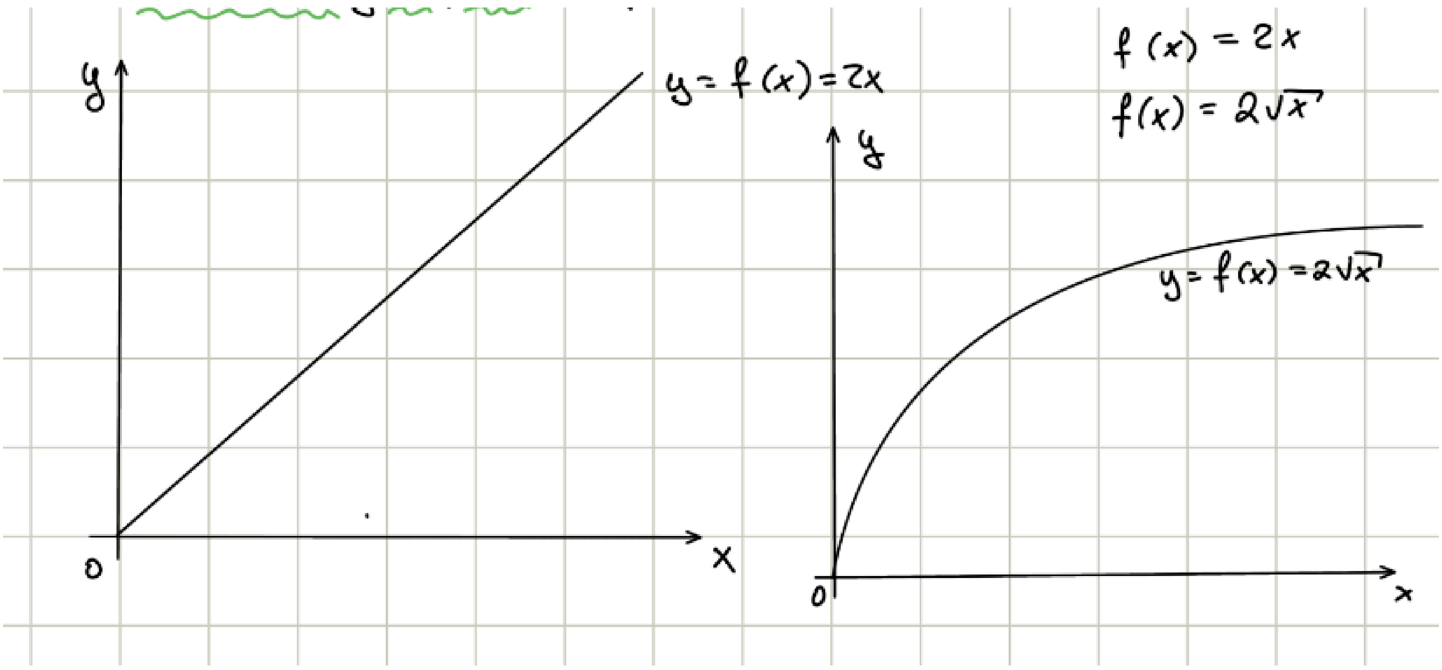
Производственная функция $f(x)$ показывает, какой *максимальный* уровень выпуска можно произвести, используя x факторов производства, то есть $y \leqslant f(x)$.

16.1.2. Предпосылки односительно $f(x)$:

- возрастает (для однофакторной) по x, не убывает по x (если факторов больше 1),
- непрерывна
- $f(0) = 0$

16.1.3. Графическая иллюстрация.

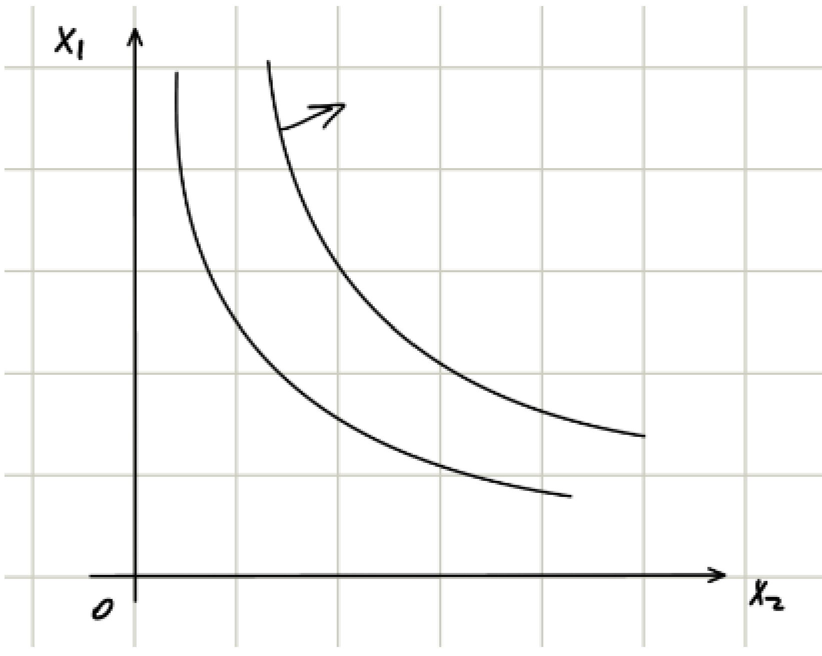
1) $N = 1$ — однофакторная фирма. Например, $f(x) = 2x, f(x) = 2\sqrt{x}$. В этом случае можно нарисовать график производственной функции в осях Oxy:



2) $N = 2$. В этом случае можно изобразить линии уровня производственной функции в осях Ox_1x_2 — изокванты.

16.1.4. Определение.

Изокванта — множество комбинаций факторов, которые позволяют производить один и тот же максимальный уровень выпуска.



16.1.5. Пример.

$f(x) = \min\{x_1, \frac{x_2}{4}\}$ (один стул — 1 сиденье и 4 ножки).
Но $f(x) = \min\{4x_1, x_2\}$ не подходит, т.к. $f(1,1) \neq \min\{4,1\} = 1$ (одной ножки не хватит)

Можно сказать, что в запими $f(x)$ нет произвола в терминах положительного монотонного преобразования, в отличие от функции полезности.

16.1.6. Пример.

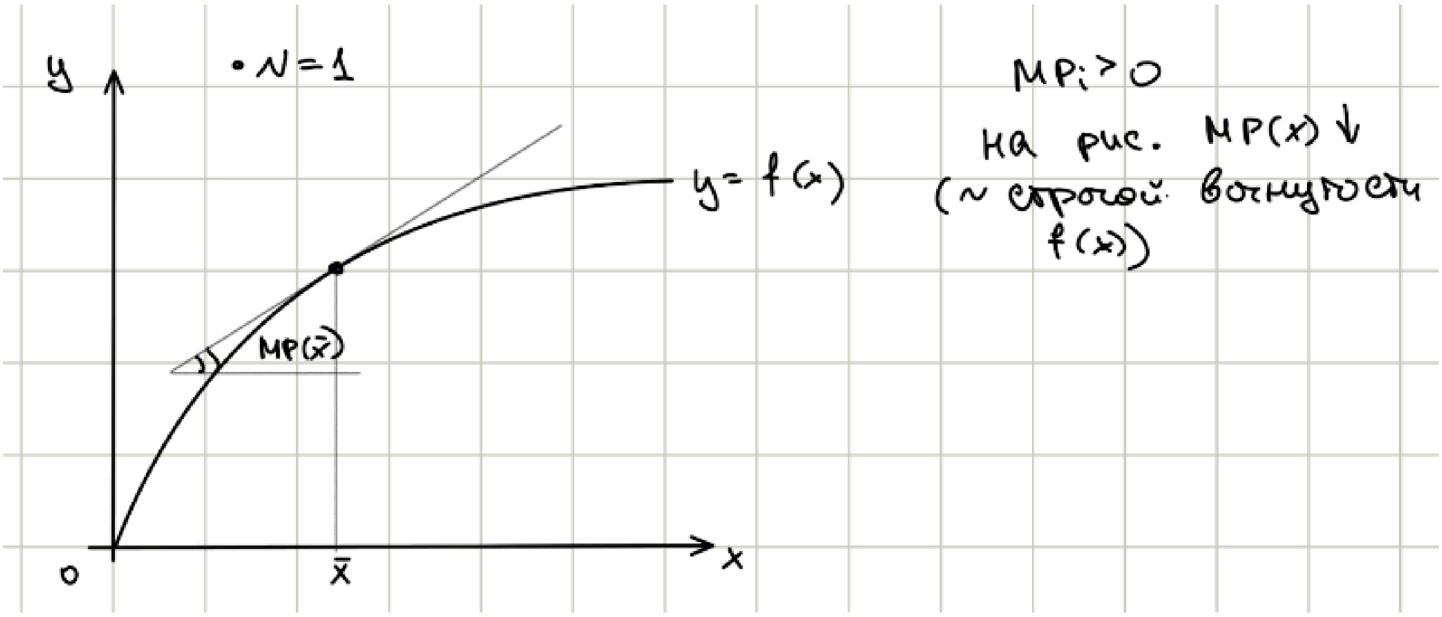
1) $f(x) = \min\left\{\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right\}$ — для производства 1 единицы готовой продукции требуется α единиц 1-го и β единиц 2-го фактора.
2) $f(x) = \alpha x_1 + \beta x_2$ — факторы взаимозаменяемы ($\frac{1}{\alpha}$ единиц 1-го фактора можно заменить на $\frac{1}{\beta}$ единиц второго)
3) $f(x) = Ax_1^\alpha x_2^\beta, \alpha, \beta > 0$ — функция Кобба-Дугласа, $A = f(1,1)$ (график на рис. выше)

16.2. Предельный и средний продукт фактора.

1) Предельный продукт фактора (MP):

$$\mathrm{MP}_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

показывает, на сколько малых единиц увеличится (снизится) выпуск при увеличении (уменьшении) количества i-го фактора на малую единицу и незименном количестве других факторов.



16.2.1. Пример.

$f(x) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$

$$\mathrm{MP}_1(x) = Ax_2^\beta \cdot \alpha \cdot x_1^{\alpha-1} > 0$$

$$\mathrm{MP}_1'(x) = Ax_2^\beta(\alpha-1)\alpha x_1^{\alpha-2} \quad \begin{cases} > 0 \text{ при } \alpha > 1 \\ = 0 \text{ при } \alpha = 1 \\ < 0 \text{ при } \alpha < 1 \end{cases}$$

16.2.2. Определение.

Средний продукт (AP — average product)

$$\mathrm{AP}_i = \frac{f(x)}{x_i}$$

16.3. AP и MP

16.3.1. Утверждение.

Пусть функции дифференцируемы. Тогда:
- если $\mathrm{AP}(x) \downarrow$, то $\mathrm{AP}(x) > \mathrm{MP}(X)$,
- если $\mathrm{AP}(x) \uparrow$, то $\mathrm{AP}(x) < \mathrm{MP}(x)$
- если $\mathrm{AP}(x) = const$, то $\mathrm{AP}(x) = \mathrm{MP}(X)$

16.3.2. Доказательство.

$$\mathrm{AP}'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{x}}{x} = \frac{\mathrm{MP}(x) - \mathrm{AP}(x)}{x}$$

Отсюда следует требуемое.

16.4. Предельная норма технологического замещения.

16.4.1. Определение.

MRTS_{12} (marginal rate of technological substitution) — предельная норма технологического замещения 2-го фактора 1-ым.

$$\mathrm{MRTS}_{12}(x) = \frac{\mathrm{MP}_1(x)}{\mathrm{MP}_2(x)}$$

это наклон изокванты в пространстве факторов (x_1, x_2), взятый с обратным знаком:

$$-\mathrm{MRTS}_{12}(x) = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}$$

Показывает какое количество малых единиц 2-го фактора можно заменить малой единицей 1-го фактора так, чтобы остаться на той же изокванте.

16.5. Отдача от масштаба

16.5.1. Определение.

Производственная функция $f(x)$ характеризуется:
- CRTS (постоянная отдача от масштаба), если

$$f(tx) = tf(x), \forall t > 0$$

- DRTS (убывающая отдача от масштаба), если

$$\forall t > 1 \;\; f(tx) < tf(x)$$

- IRTS (возрастающая отдача от масштаба), если

$$\forall t > 1 \;\; f(tx) > tf(x)$$

16.5.2. Пример.

КД

$$f(x) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$f(tx) = At^{\alpha+\beta} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = f(x) \cdot t^{\alpha+\beta}$$

Если $\alpha + \beta > 1$, IRTS,
Если $\alpha + \beta = 1$, CRTS,
ЕСли $\alpha + \beta < 1$, DRTS

17. Лекция 16. Максимизация прибыли.

17.1. Предпосылки.

- Фирма конкурентна, то есть принимает цены заданными (price-taker). $p > 0$ — цена единицы готовой продукции, $w > 0$ — цена (вектор цен) фактора(ов) производства. w_i — цена i-го фактора.
- выполнены предпосылки относительно технологии производства.

17.1.1. Определение. Прибыль

Прибыль $\pi =$ доход фирмы от продажи готовой продукции (выручка) - расходы на факторы производства

$$\pi = py - wx$$

17.1.2. Определение. Экономическая прибыль

Учитываются расходы на все факторы (в том числе альтернативные издержки.)

17.2. Long run и Short run

- LR (long-run) — долгосрочный период, в нём фирма может варьировать объёмы использования всех факторов,
- SR (short-run) — краткосрочный период, объём использования хотя бы одного фактора фиксриован. *Возможна отрицательная прибыль*

17.3. Однофакторная технология, LR

Задача максимизации прибыли фирмы (PMP):

$$\begin{cases} \pi = yp - xw \to \max_{x,y \geqslant 0} \\ y \leqslant f(x) \end{cases}$$

Из предпосылок неравенство выполнено как равенство.
Пусть $\tilde{x}, \tilde{y}$ — решение PMP, $\tilde{x} = x(p, w), \tilde{y} = y(p, w)$ — отображения спроса и предложения в LR.
Аналитически имеем

$$\pi = pf(x) - xw \to \max_{x \geqslant 0}$$

Если $\tilde{x} > 0$ — внутреннее решение, то выполнено FOC для внутреннего решения:

$$pf'(\tilde{x}) - w = 0 \Leftrightarrow p \cdot \mathrm{MP}(\tilde{x}) = w$$

SOC:

$$p \cdot f''(\tilde{x}) \leqslant 0 \Leftrightarrow f''(\tilde{x}) \leqslant 0$$

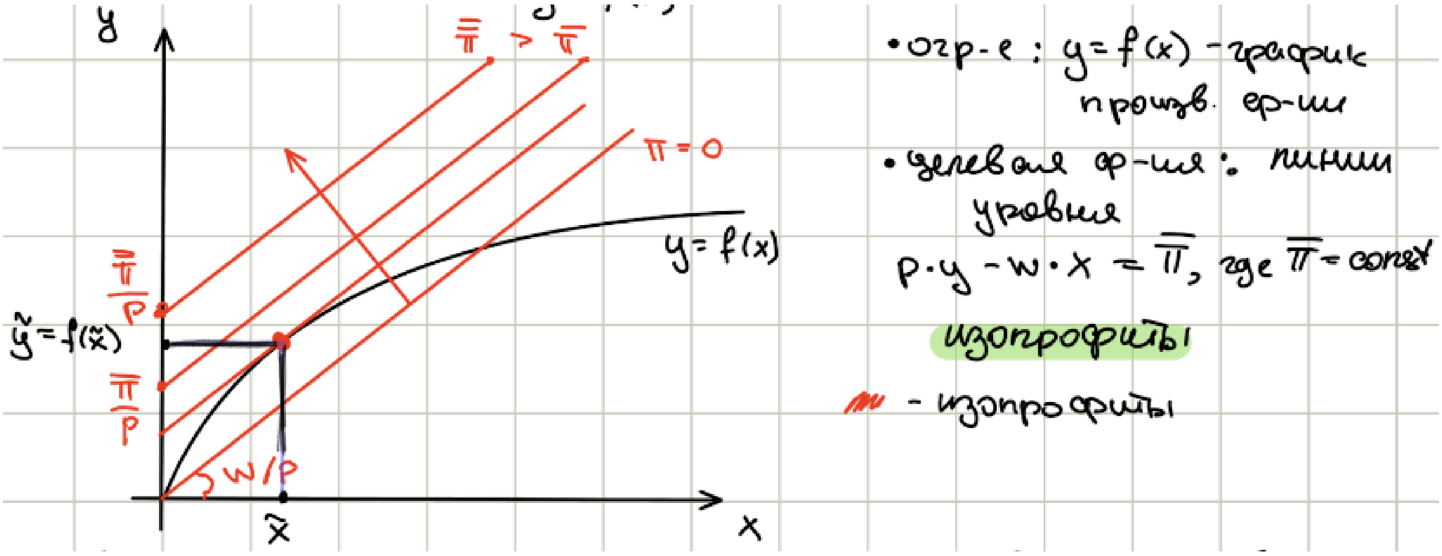
Значит, если $f(x)$ вогнута, то FOC — необходимое и достаточное условие.

- $f''(x) = 0 \Rightarrow f(x) = ax, a > 0 \Rightarrow$ CRTS,
- $f''(x) < 0$, например, $f(x) = ax^n, a > 0, 0 < n < 1 \Rightarrow$ DTS

Обсудим $p \cdot \mathrm{MP}(\tilde{x}) = w$.

- От противного: пусть $\tilde{x} > 0$ — решение PMP, и $p \cdot \mathrm{MP}(\tilde{x}) \neq w$. Если $p \cdot \mathrm{MP}(\tilde{x}) > w$, тогда увелиив количество фактора x, увеличим выпуск и увеличим прибыль. Противоречие с тем, что $\tilde{x}$ — решение. Аналогично, если $p \cdot \mathrm{MP}(\tilde{x}) < w$, можно увеличить прибыль, уменьшив x.

Графически:



- Ограничение: $y = f(x)$ — график производственной функции.
- Целевая функция: линии уровня $p \cdot y - w \cdot x = \overline{\pi} = const$. Красным уровнем изображены изопрофиты.

17.3.1. Определение. Изопрофита

Изопрофита — линия уровня прибыли в пространстве фактор-выпуск, то есть все комбинации (x, y), которые дают одну и ту же прибыль.

$$py - wx = \overline{\pi} \Rightarrow y = \frac{\overline{p}}{p} + \frac{w}{p}x$$

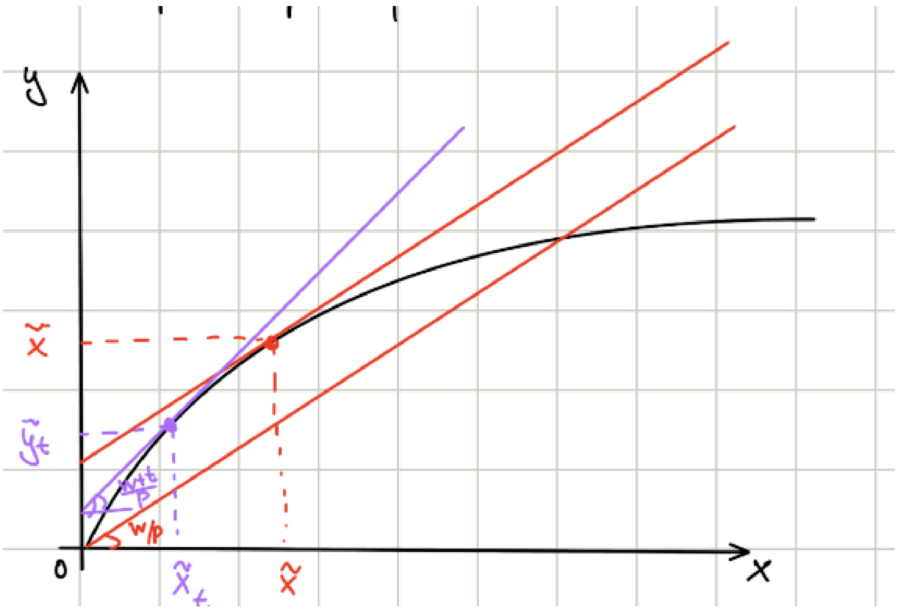
- прямые с положительным наклоном w/p
- $f(0) = 0 \Rightarrow$ из начала координат выходит изопрофита с $\tilde{\pi} = 0$.
- при $x = 0$ имеем $y = \frac{\overline{\pi}}{p} \Rightarrow$ прибыль растёт вверх

Во внутреннем решении PMP — точка касания графика производственной функции и самой высокой изопрофиты:

$$f'(\tilde{x}) = \frac{w}{p} \Leftrightarrow P \cdot \mathrm{MP}(\tilde{x}) = w$$

17.3.2. Сравнительная статика (примеры)

- потоварный налог t на фактор: $w \to w + t \Rightarrow \frac{w}{p} \to \frac{w+t}{p} > \frac{w}{p}$ — изопрофита круче $\Rightarrow$ касание левее $\Rightarrow \tilde{x}_t < \tilde{x}$ и $\tilde{y}_t = f(\tilde{x}_t) < \tilde{y}$



- потоварный налог t на готовую продукцию: $p \to p - t \Rightarrow \frac{w}{p-t} > \frac{w}{p} \Rightarrow$ изопрофита круче $\Rightarrow$ объём использования фактора, уровень выпуска и прибыль меньше.

17.4. Двухфакторная, LR

Задача максимизации прибыли:

$$\begin{cases} \pi = py - w_1x_1 - w_2x_2 \to \max\limits_{y,x_1,x_2} \geqslant 0 \\ y = f(x_1, x_2) \end{cases}$$

Пусть $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}$ — решение PMP. Имеем:

$$\pi = pf(x_1, x_2) - w_1x_1 - w_2x_2 \to \max_{x_1,x_2 \geqslant 0}$$

FOC для внутреннего решения:

$$\begin{cases} p \cdot \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_1} = w_1 \\ p \cdot \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_2} = w_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{MP}_1(\tilde{x})}{\mathrm{MP}_2(\tilde{x})} = \frac{w_1}{w_2} \Rightarrow \mathrm{MRTS}_{12} = \frac{w_1}{w_2}$$

17.5. Однофакторная, SR

Пусть $\overline{x} > 0$ — фиксированный объём фектора $\Rightarrow y = f(\overline{x}) \Rightarrow \overline{p} = p\overline{y} - w\overline{x}$ — фиксированная прибыль, может быть отрицательной

17.6. Двухфакторная, SR

$\tilde{x}_2 > 0$ — фиксированный объём второго фактора. Тогда решение аналогично однофакторной в LR:

$$\begin{cases} \pi = py - w_1x_1 - w_2\overline{x}_2 \to \max_{y,x_1 \geqslant 0} \\ y = f(x_1, \overline{x}_2) \end{cases}$$

Получаем функцию (отображения) краткосрочного спроса как зависимость от $(p, w_1, w_2, \overline{x}_2)$.
Во внутреннем решении $p \cdot \mathrm{MP}_1(p, w, \overline{x}_2) = w_1$

17.7. Слабая аксиома максимизации прибыли (WAPM)

17.7.1. Утверждение.

Пусть при ценах (p^t, w^t) фирма, максимизируя прибыль, выбрала (y^t, x^t), а при ценах (p^s, w^s) выбрала (y^s, x^s). Тогда должно быть выполнено

$$\begin{cases} p^ty^t - w^tx^t \geqslant p^ty^s - w^tx^s \\ p^sy^s - w^sx^s \geqslant p^sy^t - w^sx^t \end{cases}$$

17.7.2. Следствие.

Сложим неравенства и обозначим $\Delta p = p^t - p^s, \Delta w = w^t - w^s, \Delta y = y^t - y^s, \Delta x = x^t - x^s$. Получаем

$$\Delta p \cdot \Delta y - \Delta w \cdot \Delta x \geqslant 0$$

1) Пусть $\Delta w = 0, \Delta p \neq 0$. Тогда

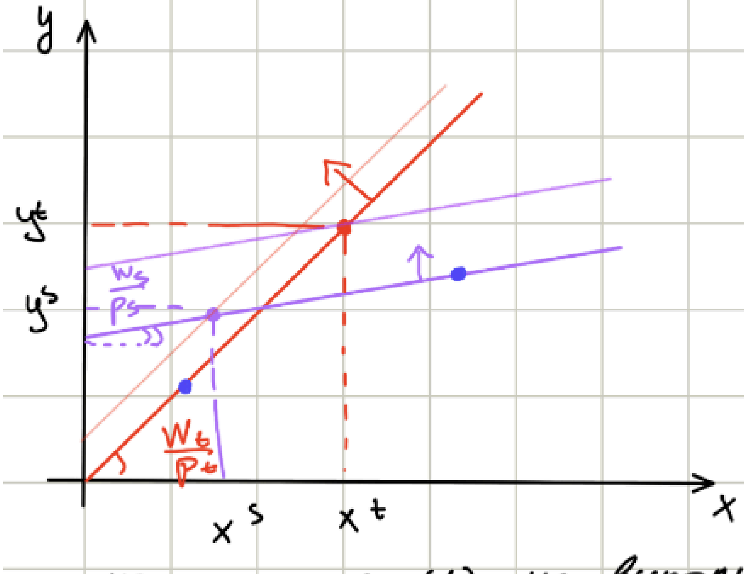
$$\Delta p \cdot \Delta y \geqslant 0$$

Тогда предложение готовой продукции не убывает по цене.
2) Пусть $\Delta p = 0, \Delta w_i = 0, \Delta w_j \neq 0, i \neq j$.
Тогда имеем

$$-\Delta w_j \Delta x_j \geqslant 0 \Leftrightarrow \Delta w_j \Delta x_j \leqslant 0$$

Тогда спрос на фактор не возрастает по цене.

- Графич. иллюстрация WAPM для однофакторной фирмы



WAPM:

(1) $p^t y^t - w^t x^t \geq p^t y^s - w^t x^s$

(2) $p^s y^s - w^s x^s \geq p^s y^t - w^s x^t$

$$\Updownarrow$$

(1) $\Pi_{tt} \geq \Pi_{ts}$

(2) $\Pi_{ss} \geq \Pi_{st}$

- изопр. при t
- изопр. при S

$\Big\}$ соотв. макс. прибыли

на рисунке (1) не выполнено $\Pi_{tt} < \Pi_{ts}$

(2) не выполнено $\Pi_{ss} < \Pi_{st}$

WAPM не вып.