Микроэкономика 1

Лекция 2

Морфий

Группа БЭАД242

Лекция 2.

Отношение предпочтения и его свойства.

Обозначение. Отношение предпочтения

1. $\succsim$ — отношение «не хуже чем» или отношение нестрогого предпочтения (частичный нестрогий порядок)
   $x, y, \in \mathbb{X}$: $x \succsim y$ — набор x не хуже набора y
2. $\succ$ — отношение строгого предпочтения
   $x \succ y$ — набор x лучше набора y
   $x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y \wedge \neg(y \succsim x)$
3. $\sim$ — отношение эквивалентности или безразличия
   $x \sim y$ — наборы x и y эквивалентны или потребитель безразличен при выборе между x и y.
   $x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \wedge y \succsim y$

Свойства отношения предпочтения.

1. **Полнота.** $\forall x, y \in \mathbb{X} : x \succsim y \vee y \succsim x$ (линейный нестрогий порядок).
   То есть, любые два набора из потребительского множества сравнимы с точки зрения вкусов потребителя.

Пример.

1) $N = 2$, $x \succsim y \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \geqslant \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}$. Такое отношение является полным, так как $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}$ для любого набора — число, а любые два числа можно сравнить друг с другом.
2) $N = 2$, $x \succ\sim y \Leftrightarrow x_1 \geqslant y_1 \wedge x_2 \geqslant y_2$. Это не полное отношение, т.к. $x = (5, 2)$ и $y = (2, 5)$ несравнимы.

2. **Транзитивность.** $\forall x, y, z \in \mathbb{X} : (x \succsim y \wedge y \succsim z) \to (x \succsim z)$ (нет «циклов» в предпочтениях).

Пример.

1) $N = 2$, $x \succsim y \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \geqslant \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}$. Это отношение транзитивно, так как отношение «$\geqslant$» транзитивно.
2) $N = 3$, $x \succsim y \Leftrightarrow \exists i \neq j : x_i \geqslant y_i \wedge x_j \geqslant y_j$, то есть хотя бы две координаты в наборе x не меньше соответствующих координат в наборе y.
Рассмотрим $x = (1, 2, 3), y = (2, 3, 1), z = (3, 1, 2)$. Тогда $z \succsim y, y \succsim x$, но $x \succsim z$.

Определение. Рациональные предпочтения

Предпочтения, являющиеся одновременно полными и транзитивными, называют рациональными.

3. **Непрерывность.** Для любых сходящихся последовательностей наборов $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n, y_n \in \mathbb{X}$, $\forall n \;\; x_n \succsim y_n \to \lim_{n \to +\infty} x_n = x \succsim y = \lim_{n \to +\infty} y_n$, где $x, y \in \mathbb{X}$.
   То есть, предпочтения сохраняются в пределе (или нет «скачков» в предпочтениях).

Пример. Лексикографиеские предпочтения

$N = 2, x \succsim y \Leftrightarrow (x_1 > y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \geqslant y_2)$.
Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(3 + \frac{1}{n}, 3\right)$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} = (3, 4)$. Тогда $\forall n \;\; x_n \succsim y_n$, так как $\forall n \;\; 3 + \frac{1}{n} > 3$.
Но $\lim_{n \to +\infty} x_n = (3, 3) = x, \lim_{n \to +\infty} y_n = (3, 4) = y \Rightarrow y \succsim x$.
Значит, лексикографиеские предпочтения не являются непрерывными.

Утверждение.

Отношение предпочтения является непрерывным, если $\forall x \in \mathbb{X}$ множество наборов, не худших, чем x, является замкнутым.

Кривая безразличия и её свойства.

Определение.

Кривая безразличия в потребительском множестве $\mathbb{X}$, проходящая через набор $x \in \mathbb{X}$ — множество всех наборов, эквивалетных x, то есть $\{y \in \mathbb{X} : y \sim x\}$.

Утверждение.

Елси предпочтения полны, транзитивны и непрерывны, то:
1. Через любую точку в $\mathbb{X}$ можно провести кривую безразличия.
2. Нет разрывов кривых безразличия.
3. Кривые безразличия или совпадают, или не пересекаются.

Функция полезности.

Определение.

Функция $U : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, называется **функцией полезности**, если $\forall x, y \in \mathbb{X}\ \ x \succsim y \Leftrightarrow U(x) \geqslant U(y)$

Замечания:
1. Функция полезности только ранжирует наборы из $\mathbb{X}$ — порядковая или ординалистская функция полезности.
2. Функция полезности определена с точностью до положительного монотонного преобразования:

Утверждение.

Пусть $U : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ — функция полезности, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая функция, определённая на множестве значений U. Тогда $V(x) = f(U(x))$ — функция полезности, описывающая те же предпочтения на $\mathbb{X}$.

Тогда кривая безразличия — множество таких наборов x, что $U(x) = \overline{U} = \text{const}$. То есть, кривая безразличия — линия уровня функции в $\mathbb{X}$.

Существование функции полезности.

Утверждение. Необходимое условие существования функции полезности

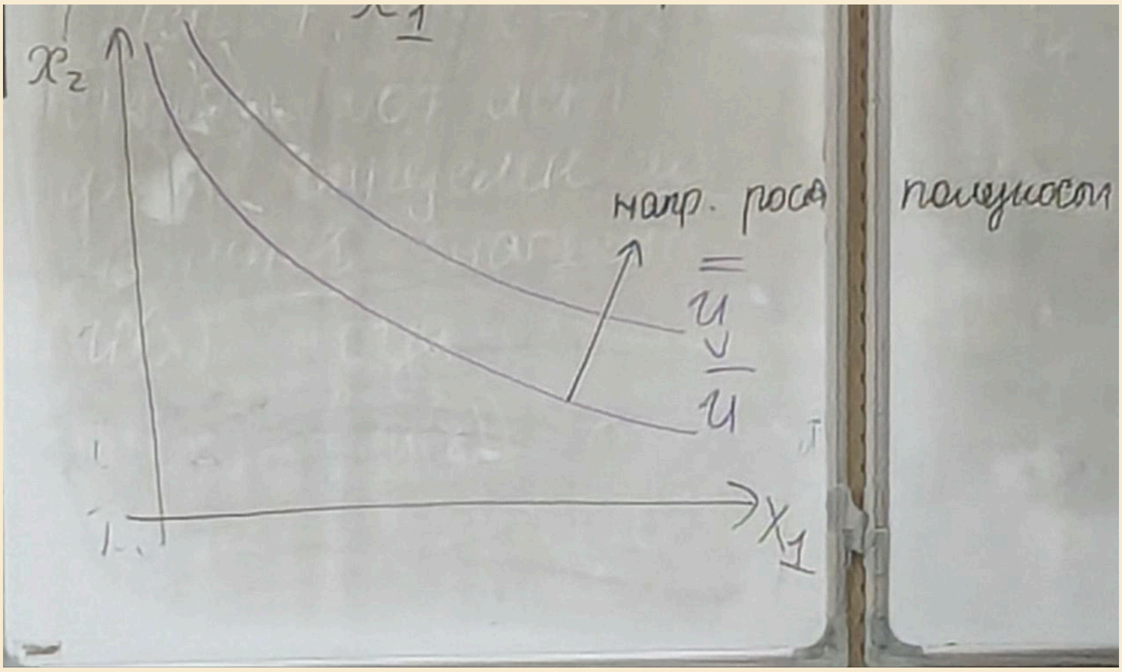
Если предпочтения представими в виде функции полезности, то они рациональны, то есть полны и транзитивны.

Утверждение. Достаточное условие существования функции полезности

Если предпочтения полны, транзитивны и непрерывны, то они представимы непрерывной функции полезности.

Пример.

$U(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \alpha, \beta > 0$ (функция Кобба-Дугласа)
Пусть $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow U(x) = x_1 x_2$.
При $\overline{U} > 0$ уравнение кривой безразличия имеет вид $x_2 = \dfrac{\overline{U}}{x_1}$ — гипербола.



Аналогичные функции:
1. $V(x) = \ln(U(X)) = \ln x_1 + \ln x_2$ (на $\mathbb{R}^2_+$),
2. $V(x) = \sqrt{x_1 x_2}$,
3. $V(x) = (x_1 x_2)^2$

Предельная норма замещения.

Определение.

MRS_{12} (marginal rate of substitution) — предельная норма замещения второго блага первым — максимальное количество малых единиц второго блага, от которых готов отказаться потребитель в обмен на малую единицу первого блага.

Утверждение.

MRS_{12} — наклон кривой безразличия в некоторой точке, взятый с обратным знаком. ТО есть, если $x_2 = \varphi(x_1)$ — уравнение кривой безразличия, то

$$MRS_{12}(\overline{x}) = -\frac{dx_2}{dx_1} = -\varphi'(\overline{x}_1)$$

Если предпочтения представимы функцией полезности, то уравнение кривой безразличия имеет вид $u(x_1, x_2) = \overline{u} = \text{const}$, то по теореме о дифференцировании неявной функции:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} \Rightarrow MRS_{12} = \frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}}$$

$$MU_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \Rightarrow MRS_{12} = \frac{MU_1}{MU_2}$$

Пример.

$U = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} : \alpha, \beta > 0$
1. Уравнение кривой безразличия:

$$x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = \overline{U} = \text{const}$$

$$x_2^{\beta} = \frac{U}{x_1^{\alpha}}$$

$$x_2^{\beta} = \left(\frac{\overline{U}}{x_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$x_2'(x_1) = \left(\overline{U}^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right) = \overline{U}^{\frac{1}{\beta}} \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot (x_1)^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} = -\frac{\alpha}{\beta}\left(x_1^{\alpha} x_2^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} = -\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$

$$MRS_{12} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$

2.

$$MRS_{12} = \frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$