

Микроэкономика 1

Лекция 13

17.04.2025

Морфий

Группа БЭАД242

Экономика обмена.

Вопросы экономики:

1. Эффективное распределение ресурсов в экономике в целом?
Парето-оптимальность; централизованное принятие решений
2. Результат поведения индивидуальных экономических агентов: распределение и цены?
Равновесие по Вальрасу
3. Как соотносится равновесие и оптимальность?

Описание экономики.

Пусть $N = 2$ благ, $M = 2$ потребителей: A и B . Предпочтения потребителей представимы непрерывными функциями полезности.

x_i^k — объём потребления блага i потребителем k .

Полезность потребителя $u^k(x^k)$, где $x^k = (x_1^k, x_2^k)$.

Нет фиксированного дохода, но есть первоначальный запас благ $\omega^k = (\omega_1^k, \omega_2^k) \geq 0$.

Пусть $\bar{\omega}_i = \omega_i^A + \omega_i^B$ — совокупный запас блага i в экономике.

Допустимые распределения.

Определение.

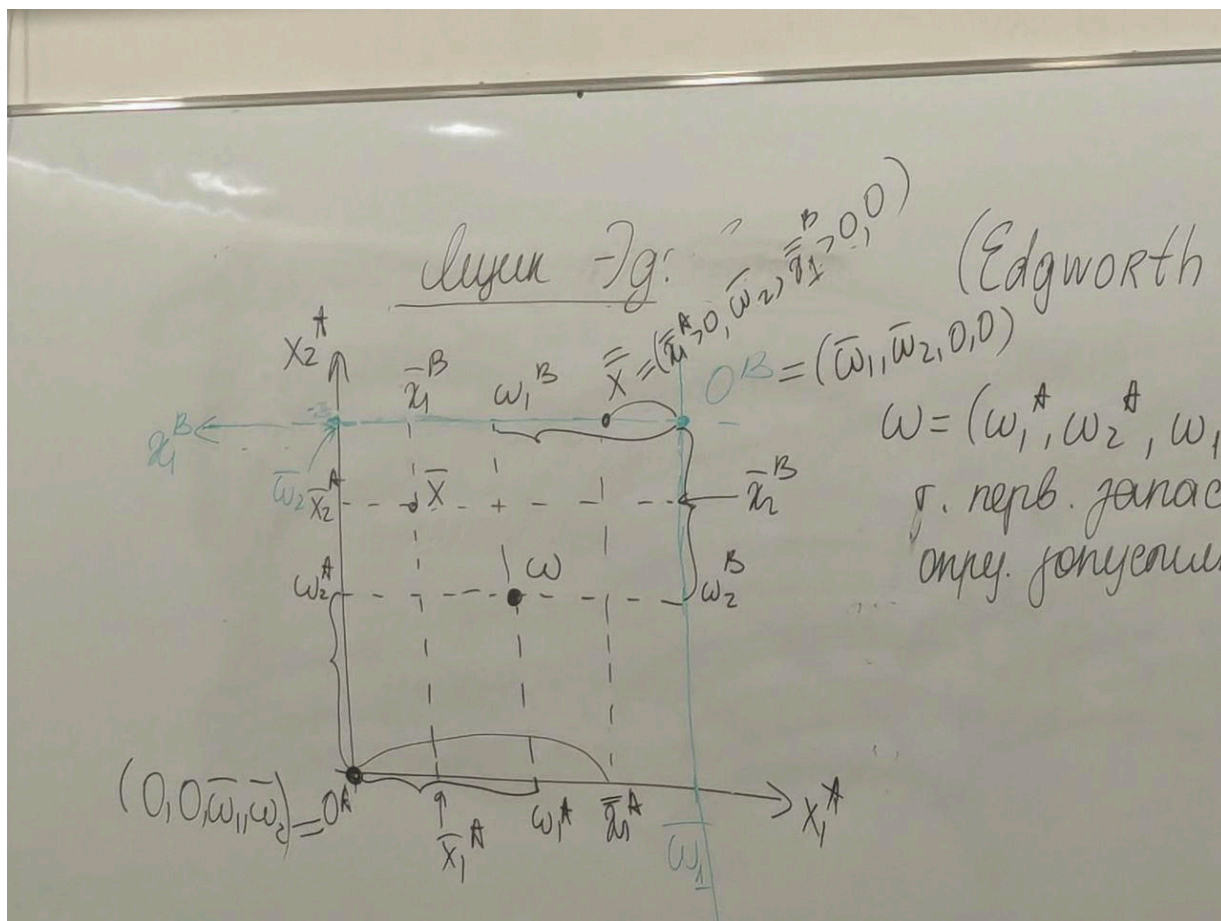
Распределение — набор, специфицирующий объём потребления каждого блага каждым потребителем:
 $x = (x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$.

Определение.

Допустимым распределением называется такое распределение, что $x_i^A + x_i^B = \bar{\omega}_i$

Ящик Эджворта.

Построим ящик Эджворта. Любая точка внутри него является допустимым распределением.



Определение.

Внутреннее распределение — такое распределение, в котором у каждого потребителя положительное количество каждого блага, лежит внутри ящика Эджворта.

Определение.

Граничное распределение — такое распределение, в котором хотя бы у одного потребителя отсутствует хотя бы одно благо; лежит на стенке ящика Эджворта.

Парето-оптимальность (ПО) распределения

Определение.

Парето-оптимальное распределение — это такое допустимое распределение, что нельзя улучшить положение одного потребителя, не ухудшая положение другого (других), то есть допустимое распределение \bar{x} парето-оптимально, если не существует другого допустимого распределения \hat{x} такого, что, $\forall k \ u^k(\hat{x}^k) \geq u^k(\bar{x}^k)$ и $\exists m : u^m(\hat{x}^m) > u^m(\bar{x}^m)$.

Если такое \hat{x} находится, то его называют парето-улучшением для распределения \bar{x} .

Пример.

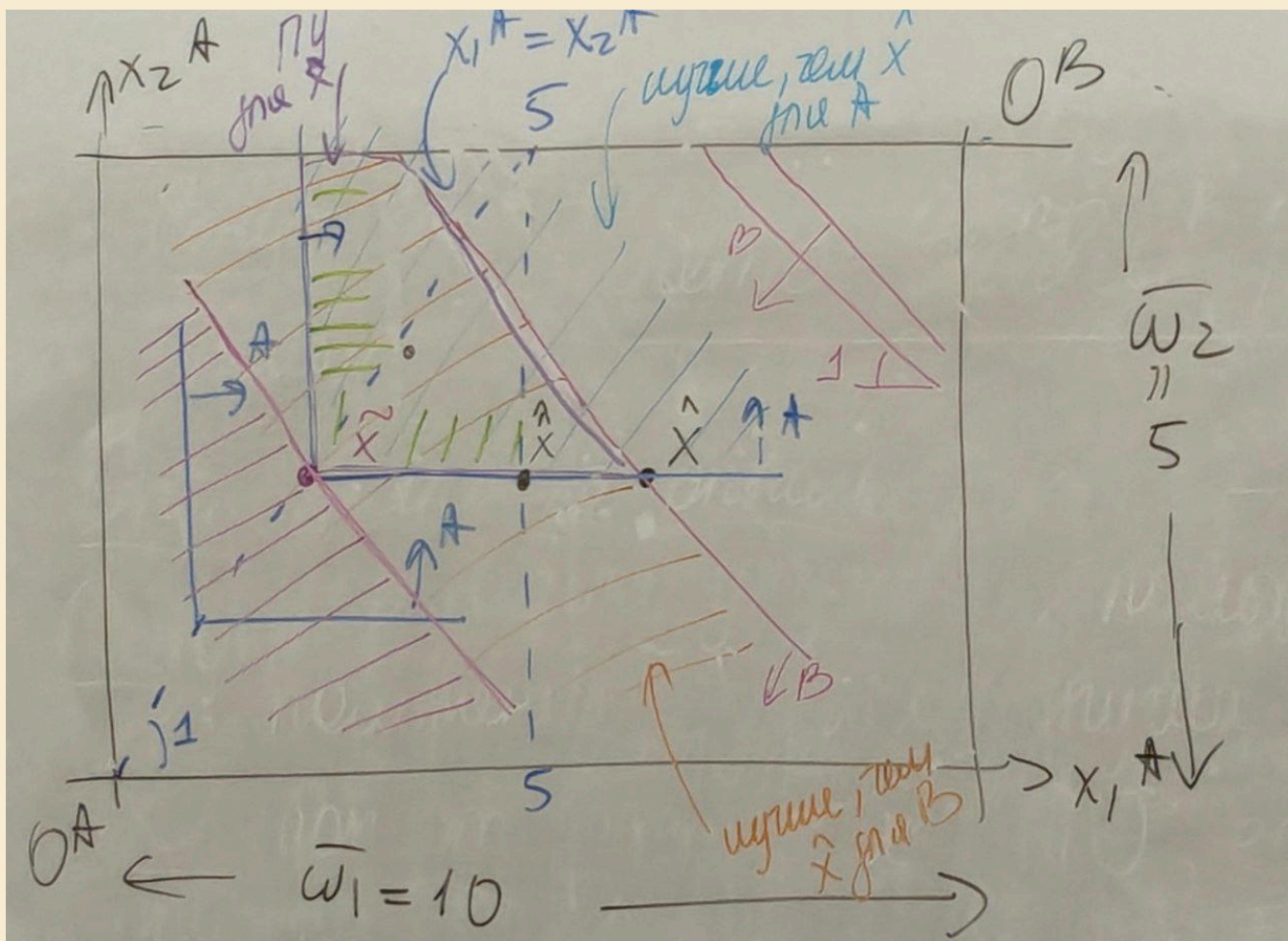
$$\omega^A = (1, 2), \omega^B = (9, 3)$$

$$\bar{\omega}_1 = 10, \bar{\omega}_2 = 5.$$

$$u^A = \min\{x_1^A, x_2^A\}, u^B = x_1^B + x_2^B.$$

$$\text{Кривые безразличия у } B: x_2^B = u - x_1^B$$

$$\text{Кривые безразличия у } A: \text{уголки с точкой в } x_1^A = x_2^A$$



\hat{x} — не оптимальное распределение, в сиреневой трапеции — все парето-улучшения \hat{x} .
 \tilde{x} — ПО распределение. Более того, любая точка на луче $x_2^A = x_1^A$ — ПО распределение.

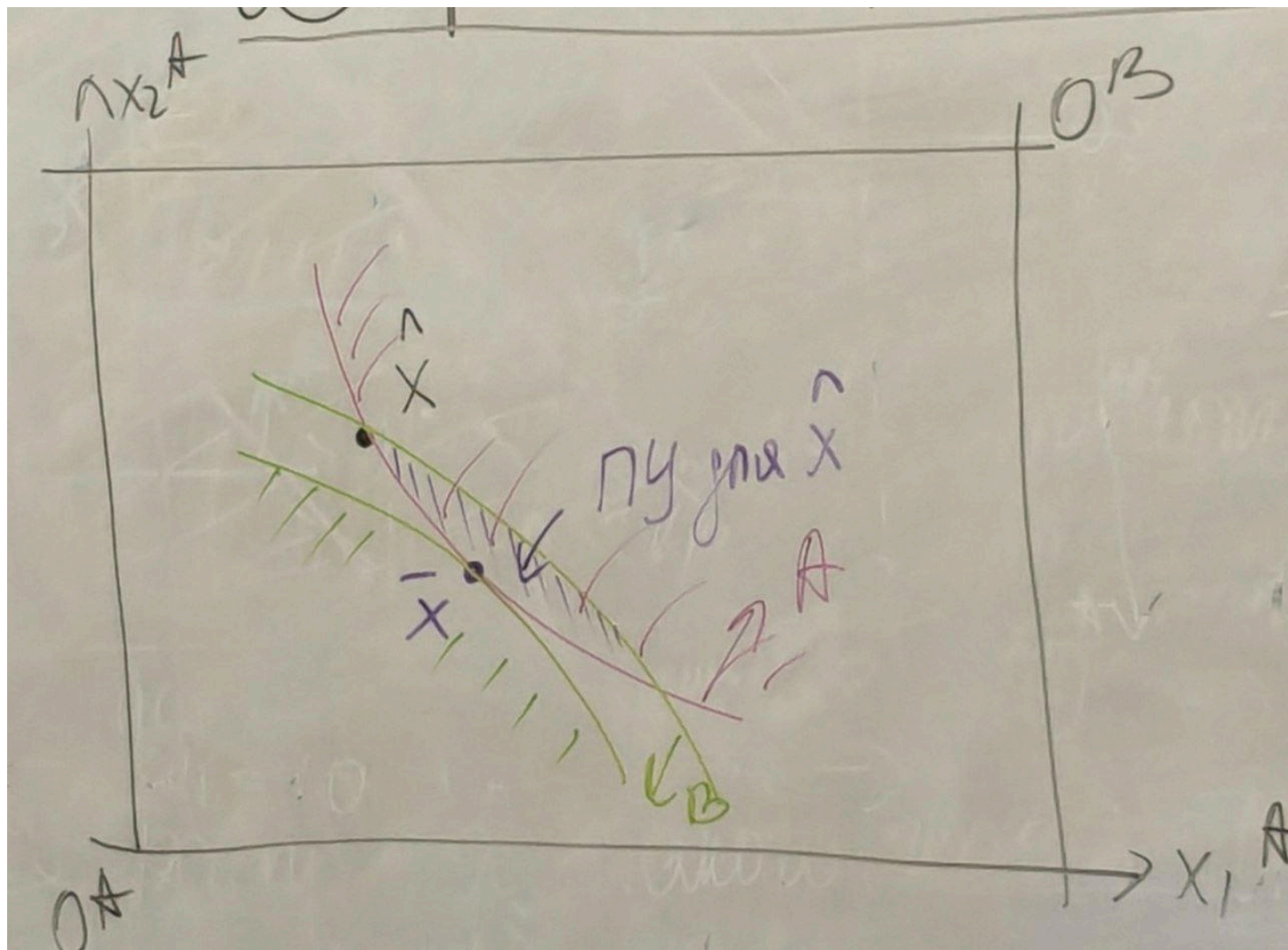
Утверждение.

Если предпочтения обоих потребителей строго монотонны, то точки O_A и O_B — ПО.

Дифференциальная характеристика внутренних ПО.

Видим: \bar{x} — внутреннее допустимое распределение, точка касания кривых безразличия:

$$MRS_{12}^A(\bar{x}^A) = MRS_{12}^B(\bar{x}^B)$$



1. Необходимое условие внутреннего ПО.

Утверждение.

Пусть предпочтения потребителей строго монотонны и представимы дифференцируемой функцией полезности. Пусть \bar{x} — внутреннее ПО. Тогда это точка касания кривых безразличия:

$$MRS_{12}^A(\bar{x}^A) = MRS_{12}^B(\bar{x}^B)$$

Доказательство:

Пусть \bar{x} — внутреннее ПО, но $MRS_{12}^A(\bar{x}^A) \neq MRS_{12}^B(\bar{x}^B)$.

Не умаляя общности, $MRS_{12}^A(\bar{x}^A) > MRS_{12}^B(\bar{x}^B)$.

Идея: увеличить у A первое благо и уменьшить второго.

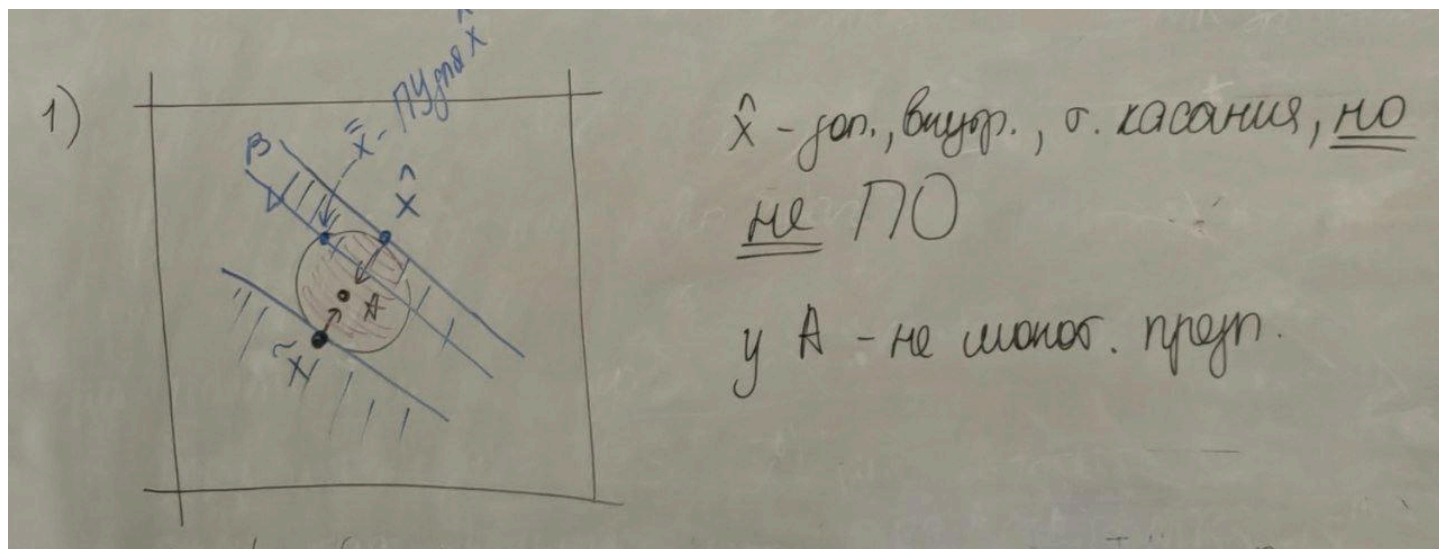
Рассмотрим допустимое перераспределение благ такое, что потребитель A получает 1 малую единицу первого блага, в обмен готов отдать $MRS_{12}^A(\bar{x}^A)$ малых единиц второго блага, а если отдаст меньше, например, $\frac{1}{2}(MRS_{12}^A + MRS_{12}^B) < MRS_{12}^A$, тогда положение A в силу строгой монотонности предпочтений улучшится.

В готов отдать 1 малую единицу первого блага в обмен на MRS_{12}^B малых единиц второго. Если в обмен за одну малую единицу первого блага B получает $\frac{1}{2}(MRS_{12}^A + MRS_{12}^B)$, его положение в силу строгой монотонности предпочтений улучшится.

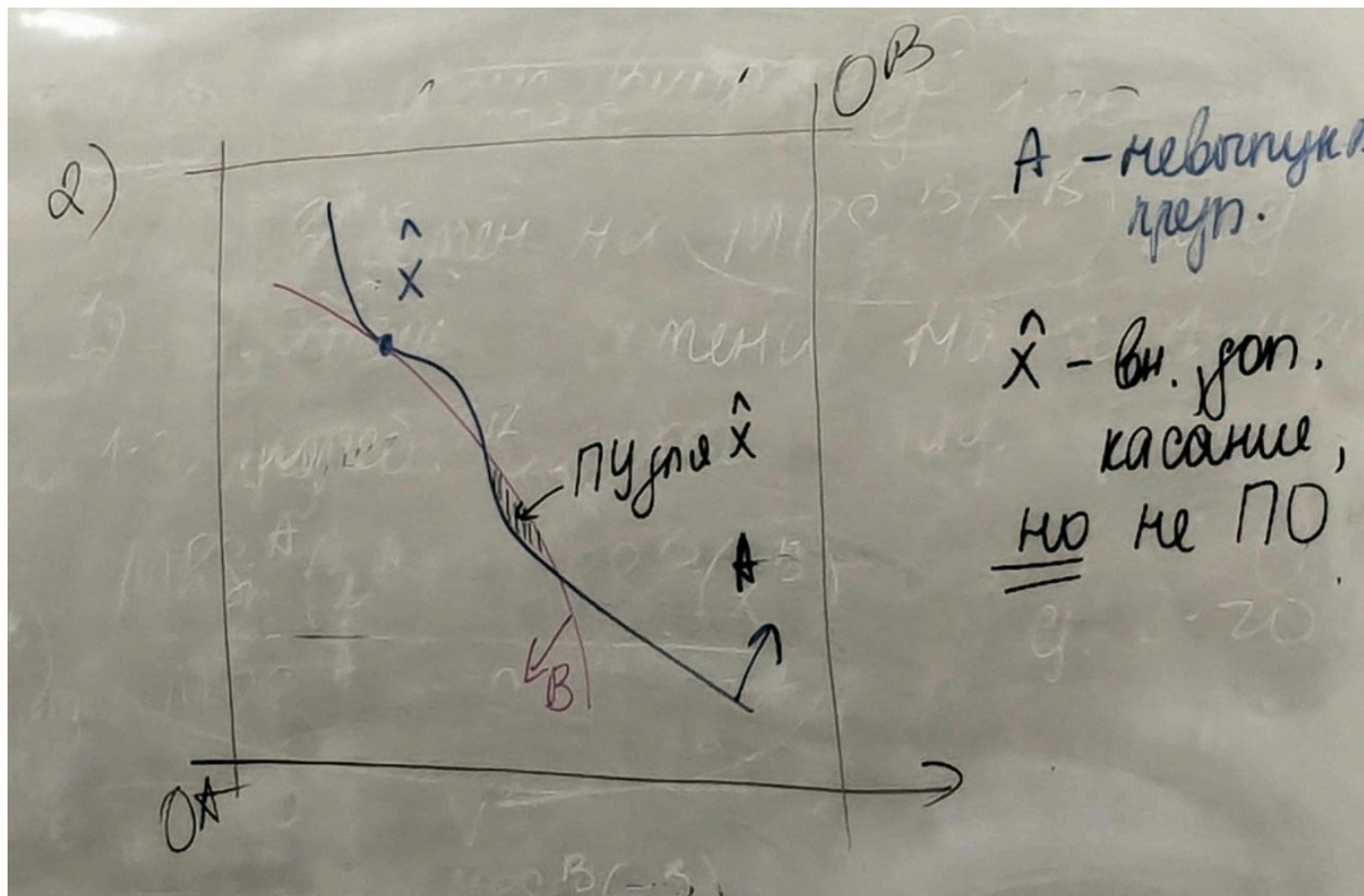
Этот набор — ПУ $\bar{x} \Rightarrow \bar{x}$ — не ПО. Противоречие. ■

2. Достаточное условие внутреннего ПО.

1) Нужна монотонность:



2) Нужна выпуклость:



Утверждение.

Пусть предпочтения потребителей строго монотонны, выпуклы и представимы непрерывной функцией полезности. Тогда условие равенства MRS_{12} является не только необходимым, но и достаточным условием внутреннего ПО.

3. Задача на поиск ПО.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u^A(x_1^A, x_2^A) \rightarrow \max_{x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B \geq 0} \\ u^B(x_1^B, x_2^B) \geq \bar{u}^B \\ x_1^A + x_1^B = \bar{w}_1 \\ x_2^A + x_2^B = \bar{w}_2 \end{cases} \quad (*)$$

Утверждение.

Пусть предпочтения потребителя строго монотонны и представимы непрерывной функцией полезности. Пусть $u^k(0) = 0$. Тогда любое решение задачи (*) является ПО и наоборот, любое ПО распределение является решением задачи (*) при некотором значении \bar{u}^B .

Пусть функции полезности дифференцируемы. Тогда можем получить дифференциальную характеристику решений задачи. Лагранжиан:

$$L = u^A(x_1^A + x_2^A) + \lambda(\bar{u}^B - u^B(x_1^B, x_2^B)) + \mu_1(\bar{w}_1 - x_1^A - x_1^B) + \mu_2(\bar{w}_2 - x_2^A - x_2^B)$$

ФОС для внутреннего решения:
по x_1^A

$$\frac{\partial u^A}{\partial x_1^A} - \mu_1 = 0$$

по x_2^A :

$$\frac{\partial u^A}{\partial x_2^A} - \mu_2 = 0$$

по x_1^B :

$$-\lambda \frac{\partial u^B}{\partial x_1^B} - \mu_1 = 0$$

по x_2^B :

$$-\lambda \frac{\partial u^B}{\partial x_2^B} - \mu_2 = 0$$

Итого:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\partial u^A / \partial x_1^A}{\partial u^A / \partial x_2^A} = \frac{\partial u^B / \partial x_1^B}{\partial u^B / \partial x_2^B}$$

Получаем

$$MRS_{12}^A(x_1^A, x_2^A) = MRS_{12}^B(x_1^B, x_2^B)$$

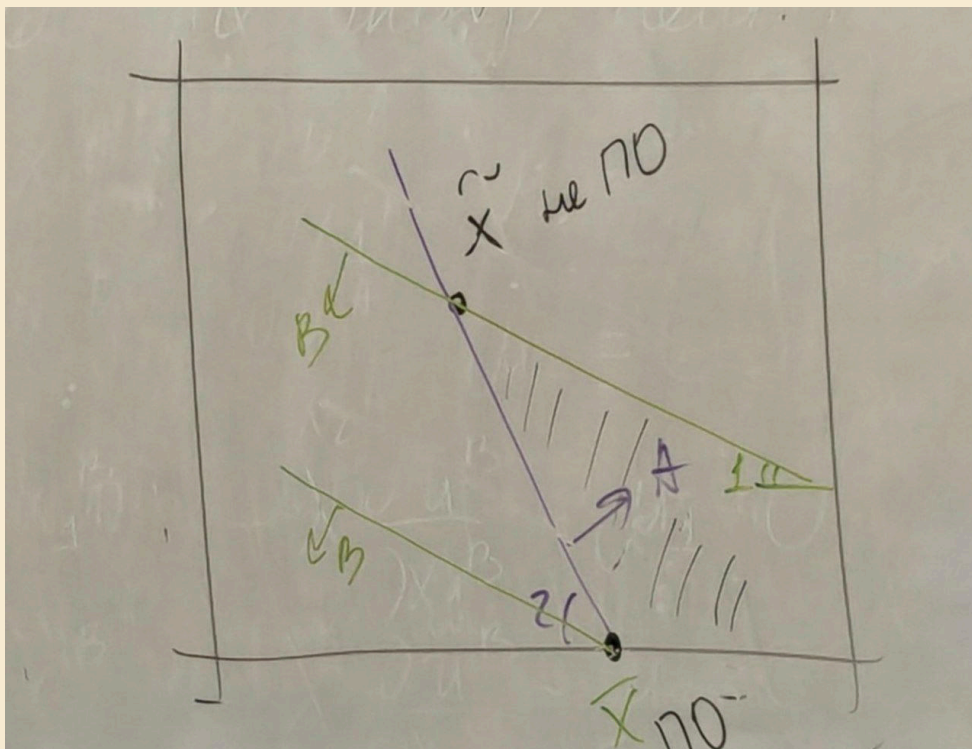
Это условие будет необходимым и достаточным, если целевая функция вогнута (квазивогнута), то есть предпочтения выпуклы.

4. Граничные ПО

Пример.

$u^A = 2x_1^A + x_2^A, u^B = x_1^B + x_2^B$. Тогда $MRS_{12}^A = 2 \neq MRS_{12}^B = 1$. Значит, тут не может быть внутреннего парето-оптимума.

Так как кривая безразличия A идёт круче, ожидаем ПО на нижней и на правой стенке ящика.



Здесь \bar{x} — ПО, и в ней $MRS_{12}^A > MRS_{12}^B$.

