

Микроэкономика 1

Лекция 5

Морфий

Группа БЭАД242

Лекция 5. Задача потребителя (продолжение)

Напоминание. Пусть $u(x)$ — непрерывная функция полезности, $p > 0$, $m > 0$. Тогда задача потребителя — это задача максимизации полезности на бюджетном множестве, то есть

$$\begin{cases} u(x) \rightarrow \max_{x \geq 0} \\ px \leq m \end{cases}$$

Её решение $x(p, m)$ — отображение (функция) маршаллианского спроса.

Подставляя $x(p, m)$ в целевую функцию, получим косвенную функцию полезности $\mathcal{V}(p, m) = U(x(p, m))$.

Дифференциальная характеристика граничных решений.

Определение. Граничное решение задачи потребителя

Граничное решение \tilde{x} — такой набор, в котором хотя бы одно благо отсутствует. То есть, $\exists i : x_i = 0$.

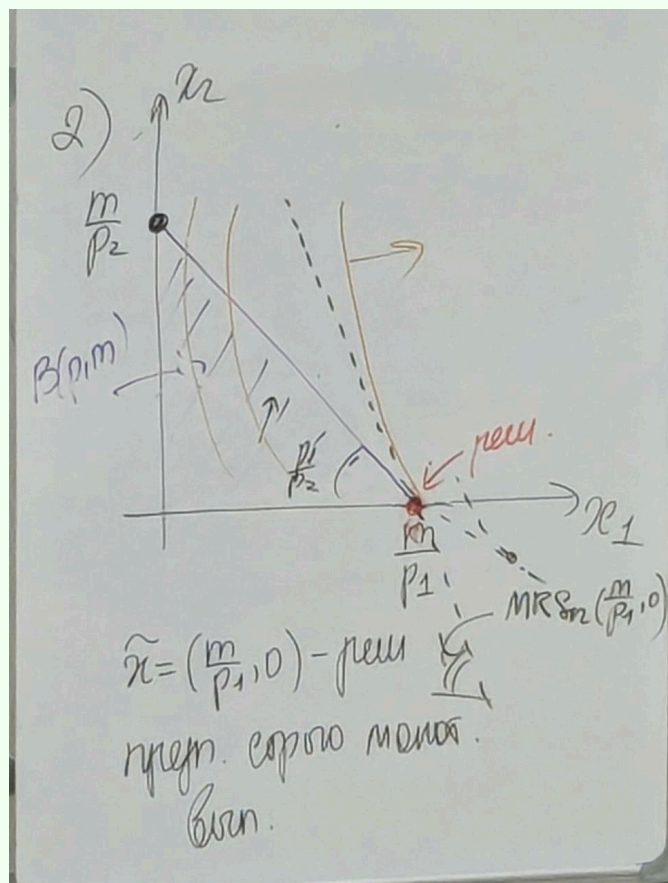
Утверждение.

Пусть $N = 2$ и рассмотрим строго выпуклые строго монотонные предпочтения такие, что решением задачи потребителя является набор $\tilde{x} = (\frac{m}{p_1}, 0)$. Тогда имеем

$$MRS_{12}(\tilde{x}) \geq \frac{p_1}{p_2}$$

Если же $\tilde{x} = (0, \frac{m}{p_2})$, то имеем

$$MRS_{12}(\tilde{x}) \leq \frac{p_1}{p_2}$$



Свойства косвенной функции полезности $\mathcal{V}(p, m)$

Пусть $u(x)$ — непрерывная функция полезности, $p, m > 0$.

Утверждение.

1. $\mathcal{V}(tp, tm) = \mathcal{V}(p, m) \quad \forall t > 0$

2. $\mathcal{V}(p, m)$ не убывает по доходу и строго возрастает по доходу, если предпочтения монотонны, то есть

$$m' > m \Rightarrow \mathcal{V}(p, m') \geq \mathcal{V}(p, m) \quad (" > " \text{ если предпочтения монотонны})$$

3. $\mathcal{V}(p, m)$ не возрастает по ценам и убывает, если предпочтения монотонны, то есть

$$p' > p \Rightarrow \mathcal{V}(p', m) \leq \mathcal{V}(p, m) \quad (" > " \text{ если предпочтения монотонны})$$

4. $\mathcal{V}(p, m)$ квазивыпукла по (p, m) (доказательство на семинаре).

5. $\mathcal{V}(p, m)$ непрерывна по (p, m) .

6. (тождества Роя, Roy's identity)

Пусть предпочтения строго монотонны и строго выпуклы (функция полезности квазивогнута). Пусть $\mathcal{V}(p, m)$ дифференцируема при $(\bar{p}, \bar{m}) \gg 0$, тогда

$$x_i(\bar{p}, \bar{m}) = - \frac{\partial \mathcal{V}(\bar{p}, \bar{m}) / \partial p_i}{\partial \mathcal{V}(\bar{p}, \bar{m}) / \partial m}$$

Сравнительная статика маршаллианского спроса.

(1) Терминология.

1. Реакция на доход

- нормальное благо — с ростом (при снижении) дохода объём спроса на благо растёт (снижается). То есть, $\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} > 0$.

- инфериорное благо — с ростом (при снижении) дохода объём спроса на благо снижается (растёт). То есть, $\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} < 0$.

- нейтральное к доходу благо — объём спроса на благо не зависит от дохода. То есть, $\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} = 0$.

2. Реакция на изменение «своей» цены.

- обычное благо — с ростом (при снижении) цены объём спроса на благо снижается (растёт). То есть, $\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_i} < 0$.

- товар Гиффена — с ростом (при снижении) цены объём спроса на благо растёт (снижается). То есть, $\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_i} > 0$.

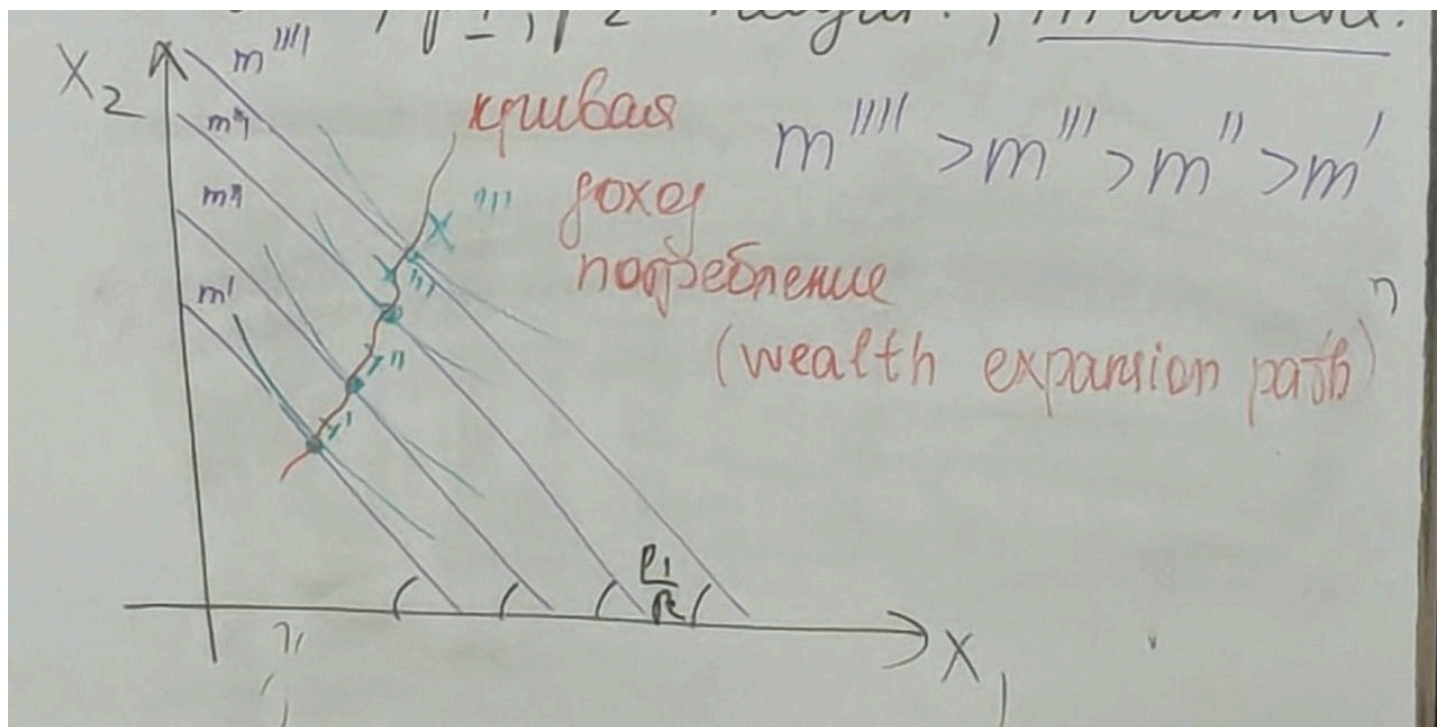
3. Реакция на изменение «чужой» цены.

- (валовые) субституты — с ростом (при снижении) цены субститута объём спроса на благо растёт (снижается). То есть, $\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} > 0$.

- (валовые) комплементы — с ростом (при снижении) цены комплемента объём спроса на благо снижается (растёт). То есть, $\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} < 0$.

Подробнее про реакцию на доход.

$N = 2$, p_1, p_2 — неизменно, m изменяется.



Определение. Кривая доход-потребление

Кривая доход-потребление — это множество наборов, на которые предъявляется спрос при разных уровнях дохода и неизменных ценах.

Утверждение.

1. Если оба блага нормальные, то кривая доход-потребления в осях (x_1, x_2) имеет положительный наклон.
2. Если кривая доход-потребление имеет отрицательный наклон, то одно из благ — инфериорное, а другое — нормальное, но распределение качеств благ зависит от отношения цен (вообще говоря, от отношения наклона кривой доход-потребление к отношению цен).

Замечания:

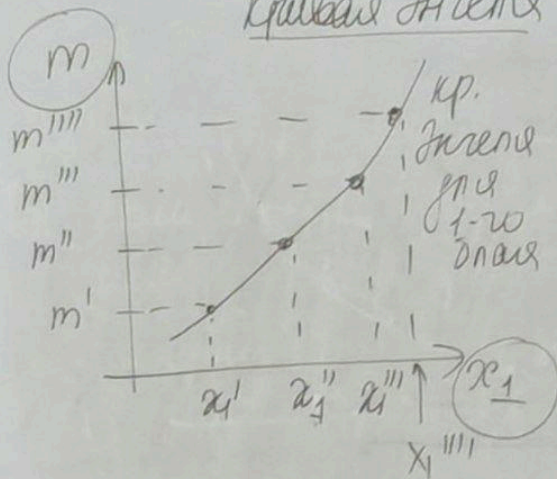
- Если предпочтения монотонны, оба блага не могут быть инфериорными (т.к. иначе падают расходы на оба блага, и выбор не будет на бюджетной линии).

Кривая Энгеля.

Определение.

Кривая Энгеля — график в осях (x_i, m) зависимости между объёмом спроса на благо и доходов при неизменных ценах.

Кривая Энгеля



Кривая Энгеля — это график в осях (x_i, m) зав-ти между объемом спроса на благо и доходом (при неизм. ценах)

$$x_i(m) \rightarrow m(x_i)$$

m

кр. Энгеля

инф. при $m > \bar{m}$

\bar{m}

норм. при $m < \bar{m}$

x_1

Пример.

Рассмотрим функцию Кобба-Дугласа $u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta$, $\alpha, \beta > 0$. Имеем функции спроса:

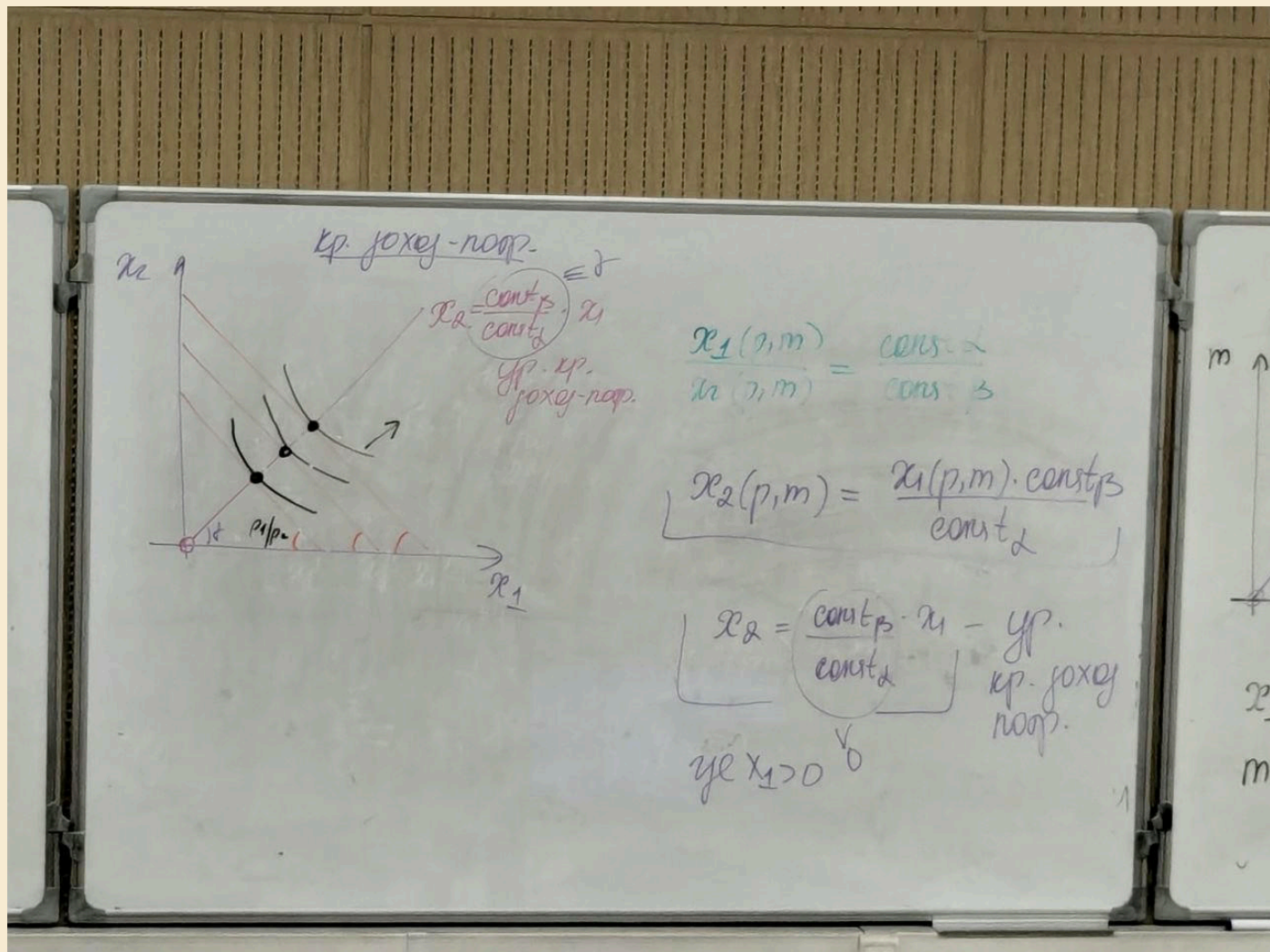
$$x_1(p, m) = \frac{\alpha m}{(\alpha + \beta)p_1}$$

$$x_2(p, m) = \frac{\beta m}{(\alpha + \beta)p_2}$$

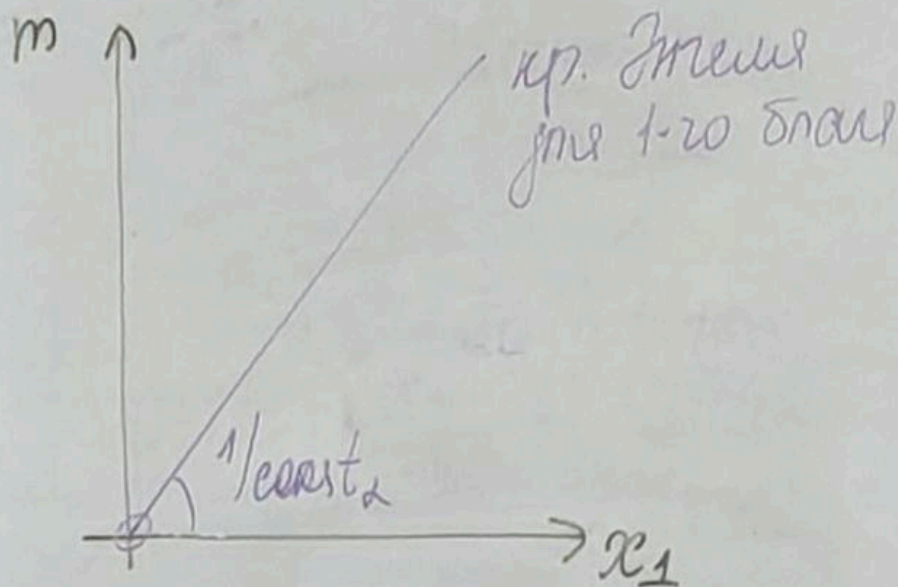
Имеем

$$\frac{x_2(p, m)}{x_1(p, m)} = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} = \frac{\text{const}_\beta}{\text{const}_\alpha} \Rightarrow x_2(p, m) = \frac{\text{const}_\beta}{\text{const}_\alpha} x_1 - \text{уравнение кривой доход-потребление}$$

Имеем $x_1(p, m) = \text{const}_\alpha \cdot m \Rightarrow m = \frac{1}{\text{const}_\alpha} x_1$ — кривая Энгеля для 1-го блага.



кр. Изменя



$$\underline{x_1} = \text{const}_2 \cdot m$$

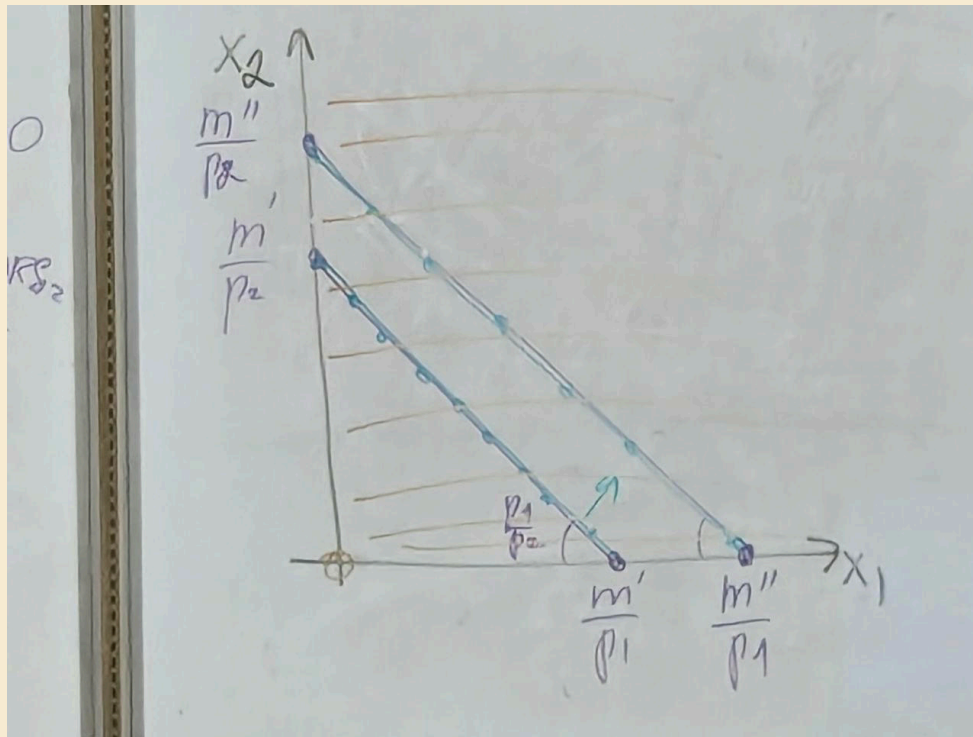
$$m = \frac{x_1}{\text{const}_2} - \text{кр. Изменя для 1-го блага}$$

Пример. Товары-субституты

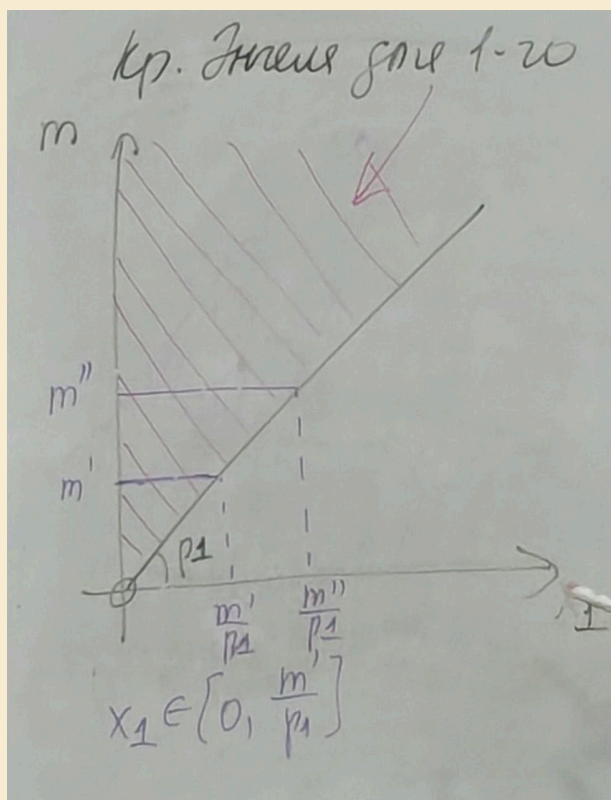
$u(x) = \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha, \beta > 0$. Функции спроса:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m}{p_1}, x_2 = 0, \frac{p_1}{p_2} < \frac{\alpha}{\beta} \\ x_1 = 0, x_2 = \frac{m}{p_2}, \frac{p_1}{p_2} > \frac{\alpha}{\beta} \\ \forall x_1, x_2 : p_1 x_1 + p_2 x_2 = m, \frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

1. $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{\beta}$. Тогда кривая доход-потребление — вся первая четверть, исключая начало координат.

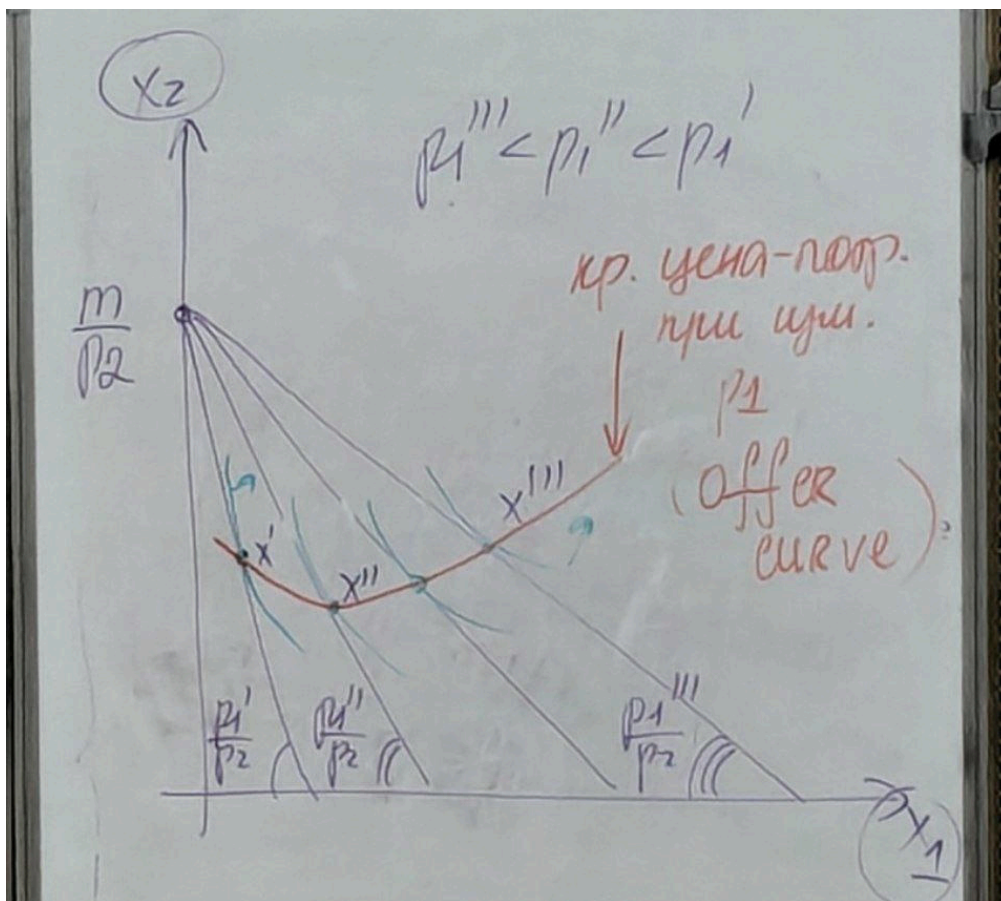


А кривая Энгеля для первого блага — область первой четверти, ограниченная осью Oy и прямой $m = p_1 x_1$.



Подробнее про реакцию на «свою» цену.

Пусть m и p_2 неизменны, а меняется только цена 1-го блага.



(здесь благо обычное)

Определение. Кривая цена-потребление

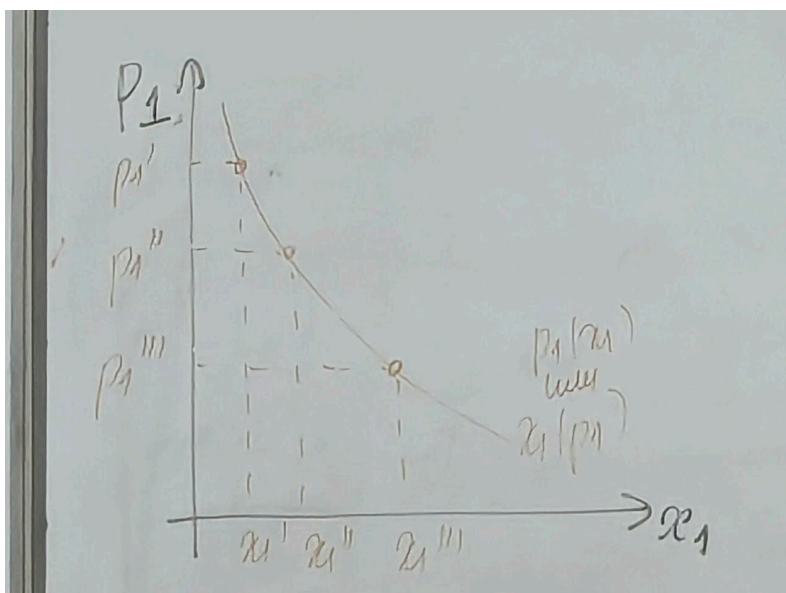
Кривая цена-потребление при изменении p_1 — множество наборов, на которые предъявляется спрос при изменении p_1 и неизменных p_2 и m .

В паре с кривой цена-потребление при изменении p_1 идёт кривая спроса на 1-ое благо.

$x_1(p_1)$ — прямая функция маршаллианского спроса на 1-ое благо при фиксированных p_2 и m .

$p_1(x_1)$ — обратная функция маршаллианского спроса на 1-ое благо при фиксированных p_2 и m .

Кривая спроса — график $p_1(x_1)$.

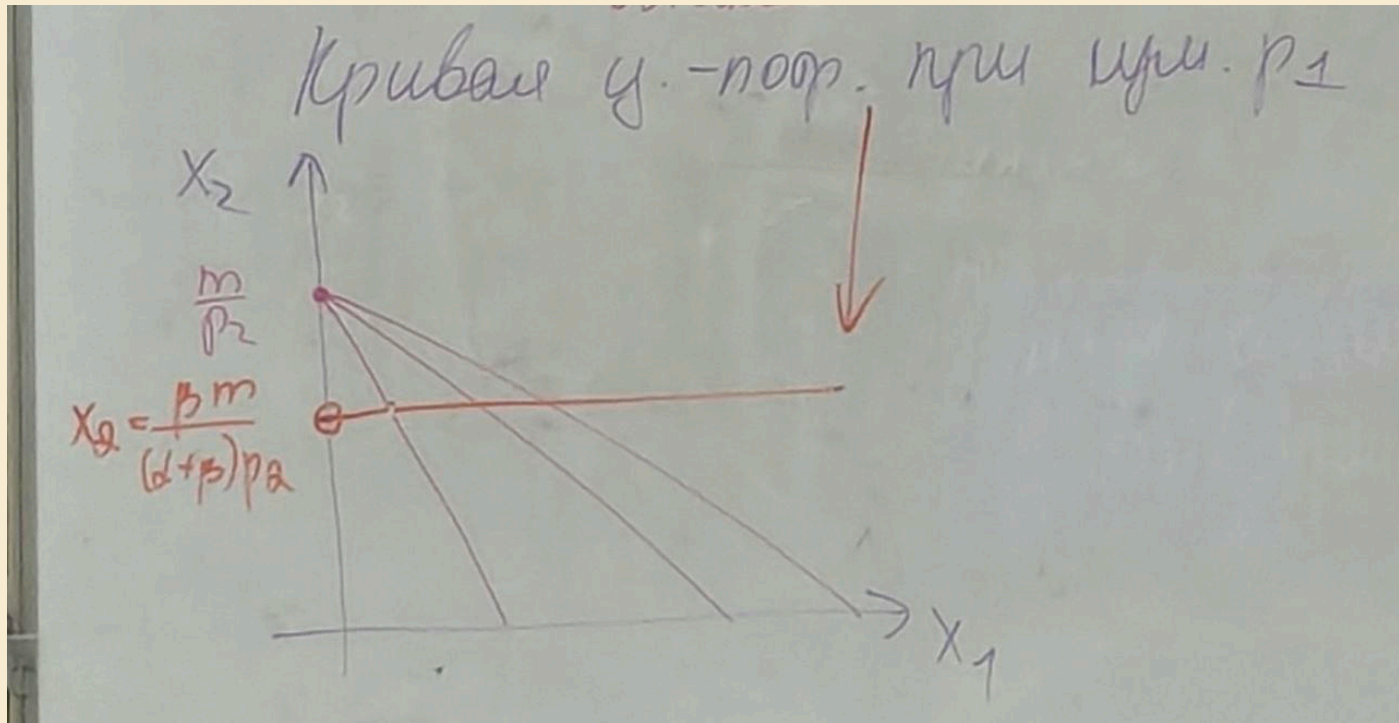


Пример.

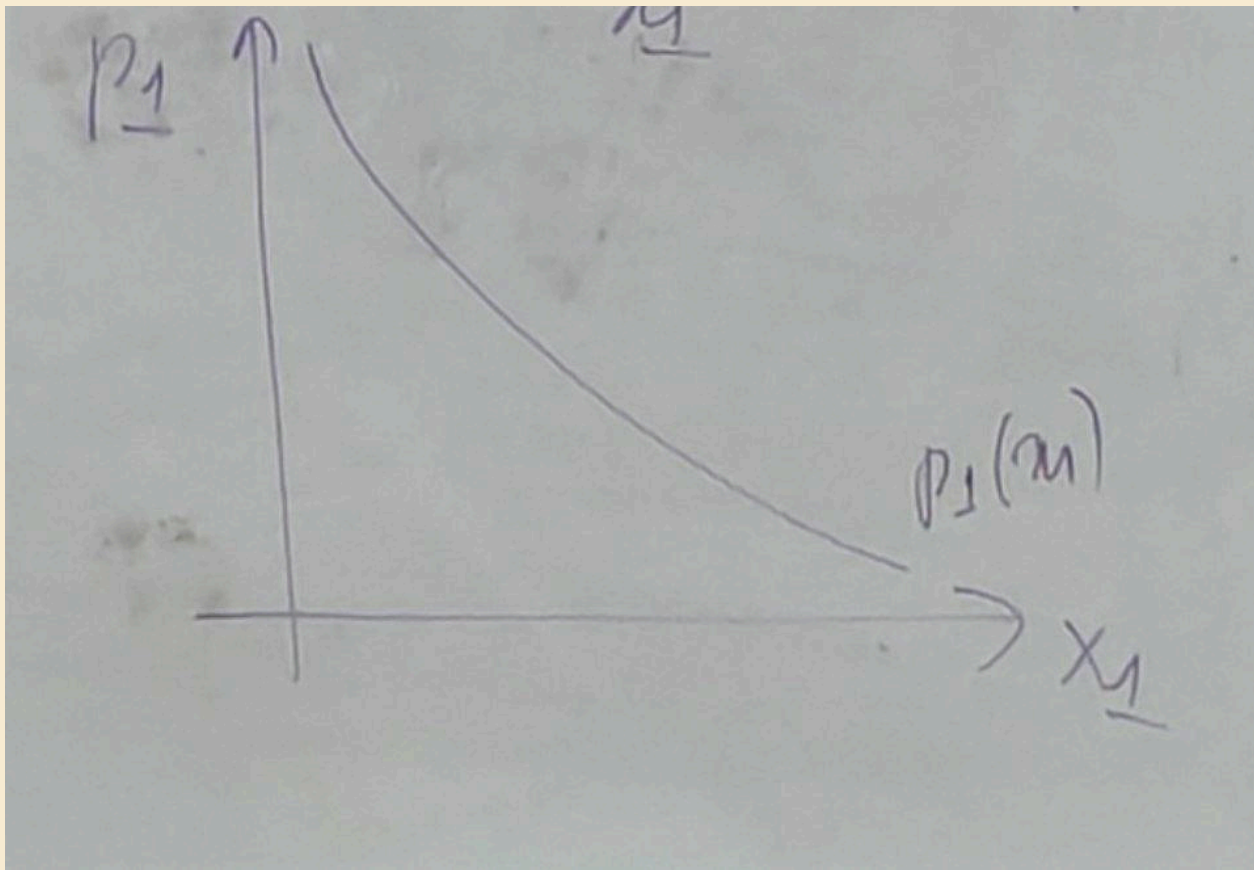
Рассмотрим функцию Кобба-Дугласа $u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta$ $\alpha, \beta > 0$

$$x_1(p, m) = \frac{\alpha m}{(\alpha + \beta)p_1}, x_2(p, m) = \frac{\beta m}{(\alpha + \beta)p_2}$$

Изобразим кривую цена-потребления при изменении p_1 . При изменении p_1 не изменяется x_2 . Первое благо — обычное.



Кривая спроса $x_1(p_1) = \frac{\gamma}{p_1} \Leftrightarrow p_1 = \frac{\gamma}{x_1}$ — гипербола.



Пример. Товары-субституты

$$U(x) = \alpha x_1 + \beta x_2 \quad \alpha, \beta > 0.$$

1. Кривая цена-потребления при изменении p_1 .

