

Микроэкономика 1

Лекция 7

Морфий

Группа БЭАД242

Лекция 7. Сравнительная статика маршаллианского спроса: уравнение (тождество) Слуцкого

Декомпозиция по Слуцкому

$N = 2$. Предположим, что меняется одна из цен, доход и другая цена остаются неизменными. Как меняется объём спроса на благо при изменении его цены?

- меняется покупательная способность фиксированная дохода
- меняется пропорция замещения благ по рыночным ценам

Подход Слуцкого для того, чтобы отделить один эффект от другого (декомпозиция по Слуцкому): одновременно с изменением цены так корректировать доход потребителя, чтобы при новых ценах был в точности доступен исходный выбор потребителя.

Пусть $m > 0$ — доход потребителя,

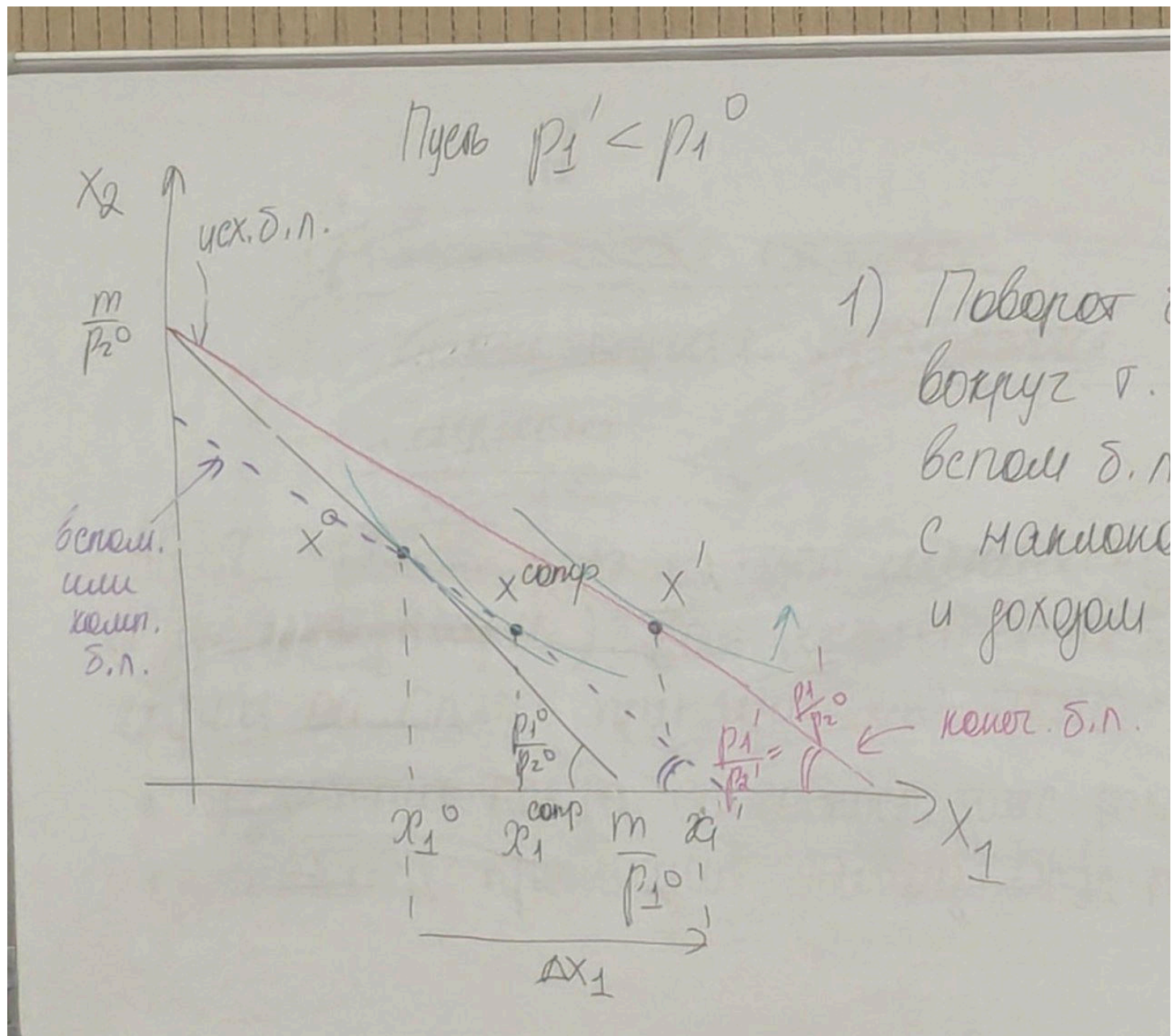
$p^0 = (p_1^0, p_2^0)$ — исходный вектор цен,

$p' = (p_1', p_2')$ — новый вектор цен, где $p_2' = p_2^0, p_1' \neq p_1^0$,

$x^0 = x(p^0, m)$ — исходный выбор,

$x' = x(p', m)$ — выбор при новых ценах (конечный выбор)

Будем считать, что предпочтения монотонны или таковы, что выбор лежит на бюджетной линии.



Происходит следующее:

- 1) Поворот бюджетной линии вокруг т. x^0 . Получается вспомогательная бюджетная линия с наклоном $-\frac{p'_1}{p'_2}$ и доходом m^{comp}
- 2) На вспомогательной бюджетной линии выбор потребителя — $x^{\text{comp}} = x(p', m^{\text{comp}})$.
- 3) Сдвиг бюджетной линии от вспомогательной до конечной — цены неизменные, меняется только доход.

Формализация.

- 1) Корректируем доход так, чтобы при p' был в точности доступен исходный выбор x^0 . Этот новый доход называем m^{comp} .

$$m^{\text{comp}} = p'x^0 = p'_1x_1^0 + p'_2x_2^0$$

Так как выбор на бюджетной линии, то

$$p^0x^0 = m = p_1^0x_1^0 + p_2^0x_2^0$$

Тогда

$$\Delta m = m^{\text{comp}} - m = x_1^0(p'_1 - p_1^0) = x_1^0\Delta p_1$$

Отсюда видим, что корректировка дохода имеет тот же знак, что и изменение цены.

- 2) На вспомогательной бюджетной линии при ценах p' и m^{comp} определяем выбор $x^{\text{comp}} = x(p', m^{\text{comp}})$ — компенсированный (по Слуцкому) спрос.
- 3) $\Delta x_1^{\text{SE}} = x_1^{\text{comp}} - x_1^0 = x_1(p', m^{\text{comp}}) - x_1(p^0, m)$ — изменение величины спроса на первое благо в силу эффекта замещения (substitution effect) по Слуцкому, то есть в силу пропорции замещения благ при неизменной покупательной способности дохода.
- 4) $\Delta x_1^{\text{IE}} = x'_1 - x_1^{\text{comp}} = x_1(p', m) - x_1(p', m^{\text{comp}})$ — изменение величины первого блага в силу эффекта замещения (income effect) по Слуцкому, то есть при изменении покупательной способности дохода и неизменных ценах.
- 5) Уравнение (тождество) Слуцкого в абсолютных изменениях:

$$x'_1 - x_1^0 = \Delta x_1 = \Delta x_1^{\text{SE}} + \Delta x_1^{\text{IE}}$$

Пример. КБ

$u(x) = x_1x_2$, $m = 16$, $p^0 = (2, 2)$, $p' = (1, 2)$.

- исходный выбор:

$$x_1^0 = \frac{m}{2p_1} = \frac{16}{4} = 4$$

$$x_2^0 = \frac{m}{2p_2} = \frac{16}{4} = 4$$

$$x^0 = (4, 4)$$

- конечный выбор:

$$x'_1 = \frac{m}{2p'_1} = \frac{16}{2} = 8$$

$$x'_2 = 4$$

$$x' = (8, 4)$$

Видим, что

$$\Delta x_1 = x'_1 - x_1^0 = 8 - 4 = 4$$

Компенсированный доход:

$$m^{\text{comp}} = p'_1 x_1^0 + p'_2 x_2^0 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 12 < m = 16$$

$$x_1^{\text{comp}} = \frac{m^{\text{comp}}}{2p'_1} = \frac{12}{2 \cdot 1} = 6$$

$$x_2^{\text{comp}} = \frac{m^{\text{comp}}}{2p'_2} = \frac{12}{2 \cdot 2} = 3$$

Тогда

$$\Delta x_1^{\text{SE}} = x_1^{\text{comp}} - x_1^0 = 6 - 4 = 2$$

$$\Delta x_1^{\text{IE}} = x'_1 - x_1^{\text{comp}} = 8 - 6 = 2$$

Пример. Субституты

$u(x) = \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha, \beta > 0$ Пусть

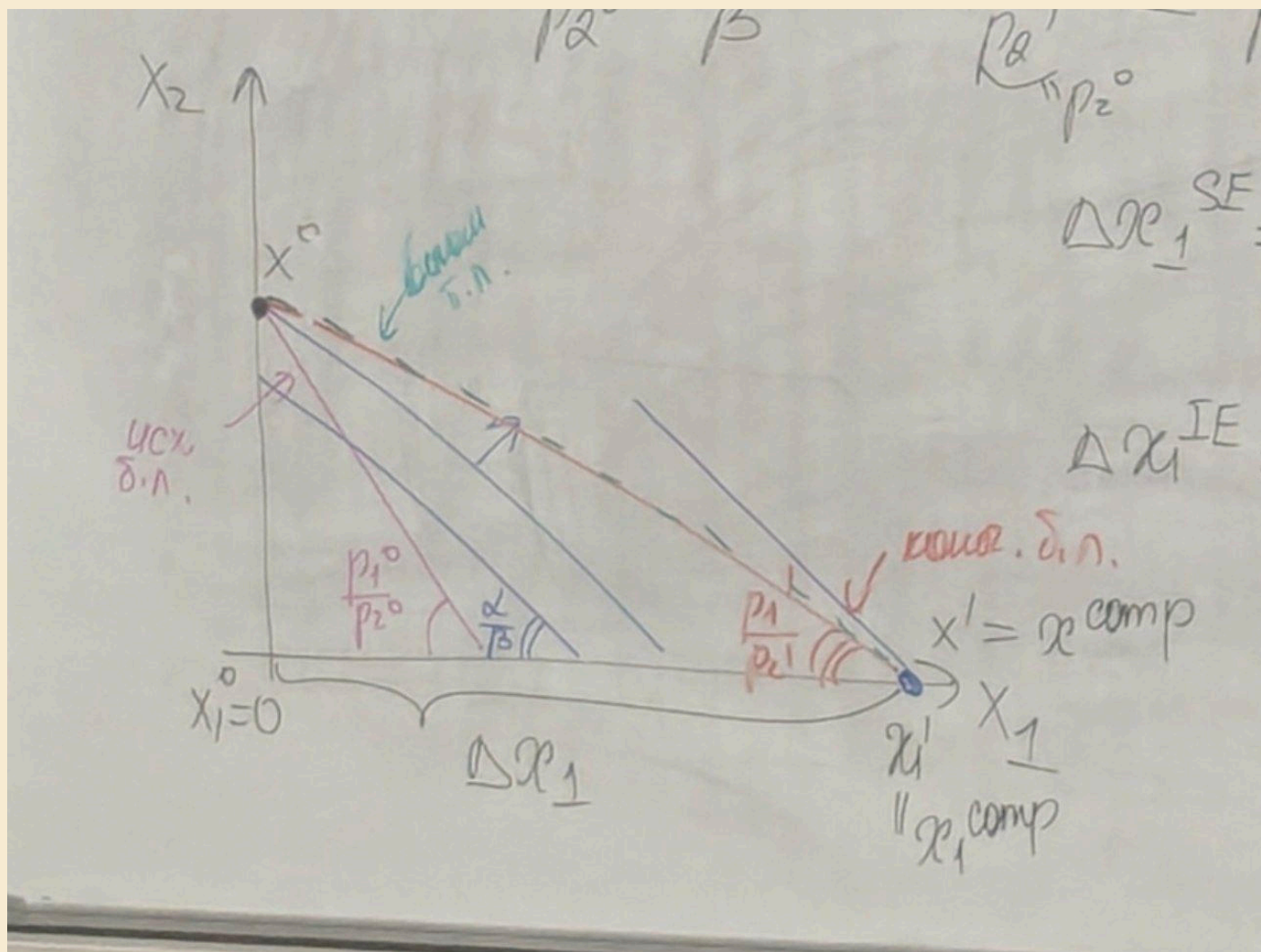
$$\frac{p_1^0}{p_2^0} > \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{p_1'}{p_2'} < \frac{\alpha}{\beta}$$

Тогда (см. картинку):

$$x_1^0 = 0,$$

$$x'_1 = x_1^{\text{comp}} = \frac{m}{p'_1}. \text{ Тогда}$$

$$\Delta x_1^{\text{SE}} = \Delta x_1^{\text{comp}} - x_1^0 = x'_1 - x_1^0 = \Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1^{\text{IE}} = 0$$



Анализ уравнения (тождества) Слуцкого в абсолютных изменениях

1)

Утверждение.

Изменения объёма спроса в силу эффекта замещения противонаправлено изменению цены. То есть,

- если $p'_1 < p_1^0$, то $\Delta x_1^{\text{SE}} \geq 0 \Leftrightarrow x_1^{\text{comp}} \geq x_1^0$,
- если $p'_1 > p_1^0$, то $\Delta x_1^{\text{SE}} \leq 0 \Leftrightarrow x_1^{\text{comp}} \leq x_1^0$

или, если $\Delta p_1 = p'_1 - p_1^0$, то

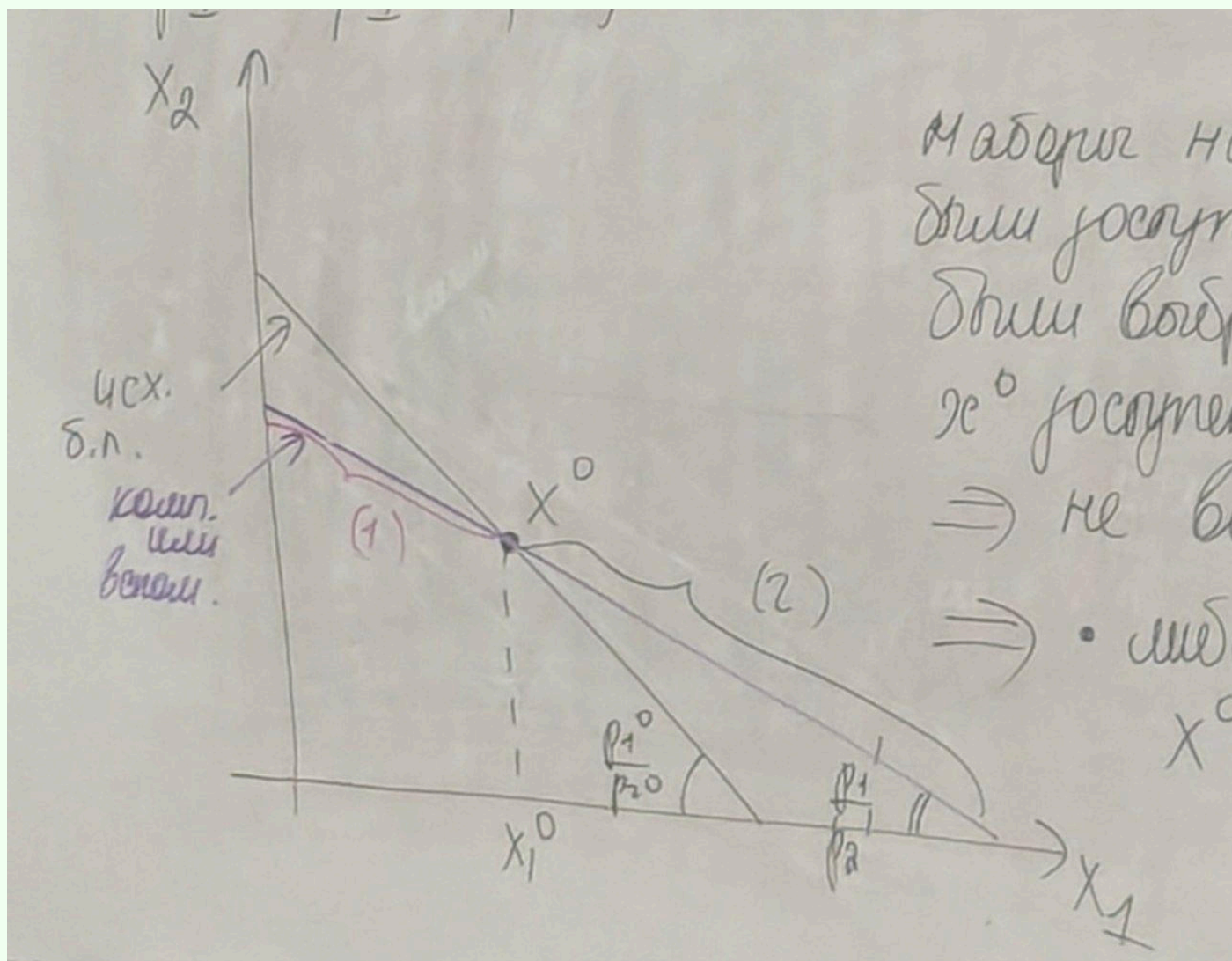
$$\frac{\Delta x_1^{\text{SE}}}{\Delta p_1} \leq 0$$

Доказательство:

Пусть $p'_1 < p_1^0$, пусть $x^0 \gg 0$.

Наборы на участке (1) компенсированной бюджетной линии были доступны в исходной системе, но не были выбраны, а исходный выбор x^0 доступен и при компенсированной бюджетной линии. Тогда согласно WARP выбор потребителя не может лежать на участке (1).

Значит, на вспомогательной бюджетной линии потребитель выбирает или набор x^0 , или набор правее x^0 на участке (2), значит, $\Delta x_1^{\text{SE}} \geq 0$.



Аналогично если $p'_1 > p_1^0$.

(мне лень рисовать табличку)

② $\Delta x_1 = \Delta x_1^{SE} + \Delta x_1^{IE}$

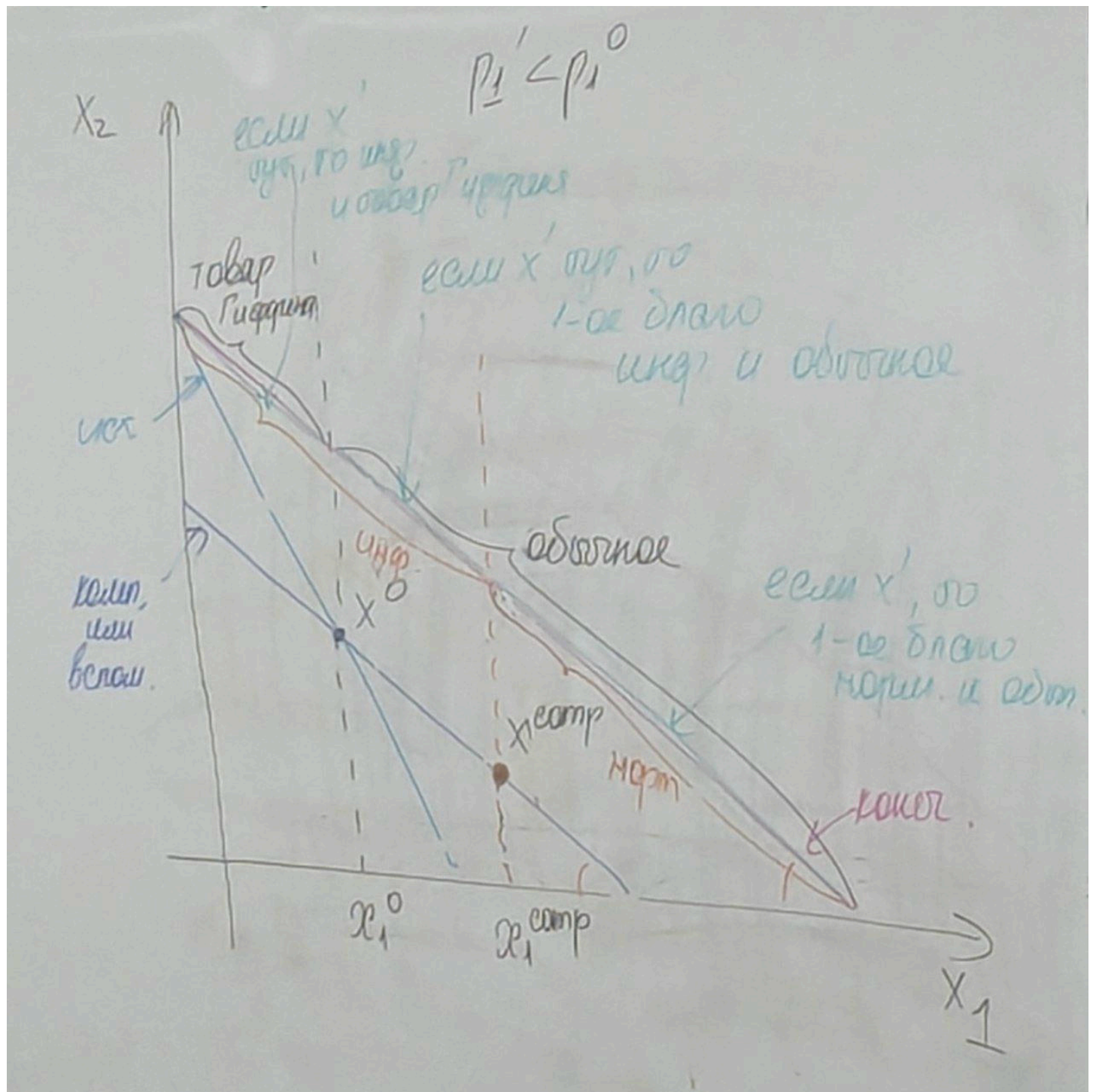
	норм.		инф.		нейтр. к fox.	
	$p_1 \downarrow$	$p_1 \uparrow$	$p_1 \downarrow$	$p_1 \uparrow$	$p_1 \downarrow$	$p_1 \uparrow$
Δx_1^{SE}	≥ 0	≤ 0	≥ 0	≤ 0	≥ 0	≤ 0
Δx_1^{IE}	> 0	< 0	< 0	> 0	$= 0$	$= 0$
Δx_1	> 0	< 0	?	?	≥ 0	≤ 0

обычное обычное

Выводы:

- 1) Если благо нормальное, то оно обычное (знаки эффектов однонаправлены)
- 2) Если благо инфериорное, оно может быть как обычным, так и товаром Гиффена:
 - если доминирует IE, то товар Гиффена,
 - если доминирует SE, то обычное благо.

2.1) Товар Гиффена обязательно является инфериорным благом, но инфериорное не обязательно является товаром Гиффена.



Замечание про уравнение слущкого в виде отношения изменений.

Имеем

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^{\text{SE}} + \Delta x_1^{\text{IE}} \quad (*)$$

Разделим обе части $(*)$ на $\Delta p_1 = p'_1 - p_1^0$:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^{\text{SE}}}{\Delta p_1} + \frac{\Delta x_1^{\text{IE}}}{\Delta p_1}$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\frac{\Delta x_1^{\text{IE}}}{\Delta p_1} = \frac{x'_1 - x_1^{\text{comp}}}{p'_1 - p_1^0} = \frac{x_1(p', m) - x_1(p', m^{\text{comp}})}{p'_1 - p_1^0}$$

Пусть

$$\Delta x_1^m = -\Delta x_1^{\text{IE}} = x_1^{\text{comp}} - x'_1 = x_1(p', m^{\text{comp}}) - x_1(p', m)$$

$$\Delta m = m^{\text{comp}} - m = p'x^0 - p^0x^0 = x_1^0(p'_1 - p_1^0) \Rightarrow \Delta m = x_1^0 \Delta p_1 \Rightarrow \Delta p_1 = \frac{\Delta m}{x_1^0}$$

Тогда

$$\frac{\Delta x_1^{\text{IE}}}{\Delta p_1} = -\frac{\Delta x_1^m}{\Delta p_1} = -x_1^0 \frac{\Delta x_1^m}{\Delta m} = -x_1^0 \frac{x_1(p', m^{\text{comp}}) - x_1(p', m)}{m^{\text{comp}} - m}$$

Окончательно уравнение (тождество) Слуцкого в относительных изменениях:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^{\text{SE}}}{\Delta p_1} - x_1^0 \frac{\Delta x_1^m}{\Delta m}$$

Замечания.

1) $\frac{\Delta x_1^{\text{SE}}}{\Delta p_1} \leq 0$ — эффект замещения

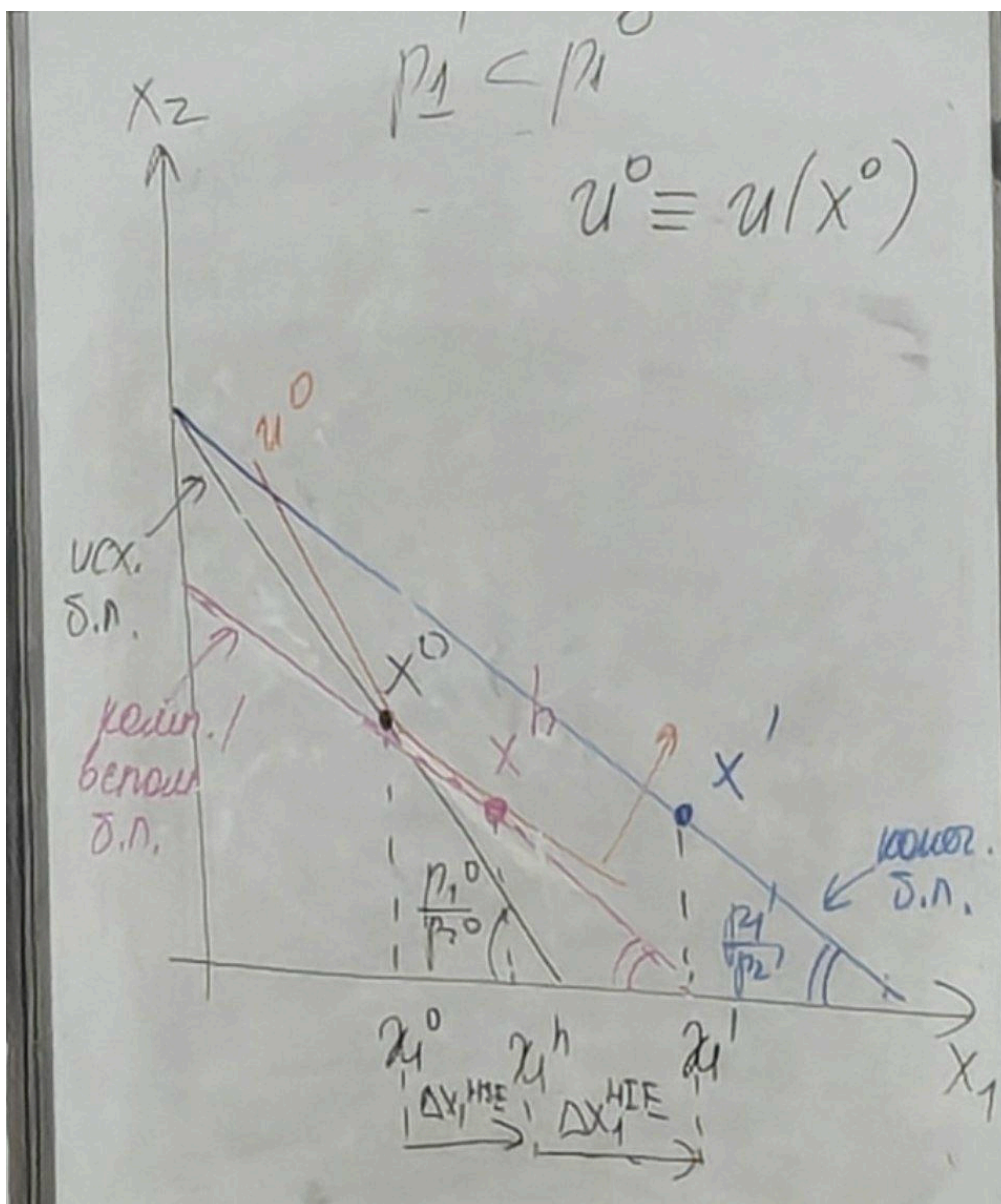
2) $-x_1^0 \frac{\Delta x_1^m}{\Delta m}$ — эффект дохода. Знак минус отражает тот факт, что изменение покупательной способности дохода противонаправлено изменению цены.

- для нормального блага и $x_1^0 > 0$ эффект дохода отрицательный, следовательно, знаки эффекта замещения и дохода совпадают.
- для инфериорного блага и $x_1^0 > 0$ эффект дохода положительный, знаки эффектов разнонаправлены.
- чем больше x_1^0 , тем значимее эффект дохода.

Декомпозиция по Хиксу.

Слущкий: чтобы отделить эффекты одновременно с изменением цены так изменить доход, чтобы при новых ценах в точности был доступен исходный набор x^0 .

Хикс: такая корректировка дохода, чтобы при новых ценах был доступен исходный уровень *благосостояния*



x^h — компенсированный выбор по Хиксу: $u(x^0) = u(x^h)$

m^h — компенсированный доход по Хиксу: $m^h = p' \cdot x^h$,

$$\Delta x_{HSE_1} = x_1^h - x_1^0$$

$$\Delta x_1^{HIE} = x_1^1 - x_1^h$$

Тогда уравнение (тождество) Слуцкого при декомпозиции по Хиксу в абсолютных изменениях:

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^{HSE} + \Delta x_1^{HIE}$$

- Δx_1^{HSE} — эффект замещения по Хиксу — изменения величины спроса на благо в силу изменения пропорции замещения благ при неизменном уровне благосостояния. Аналогично SE противопоставлен изменению цены.
- Δx_1^{HIE} — эффект дохода по Хиксу — изменения величины спроса на благо в силу изменения покупательной способности дохода при неизменных ценах.

Пример.

$$u(x) = x_1 x_2, m = 16, p^0 = (2, 2), p' = (1, 2),$$

$$x^0 = (4, 4), x' = (8, 4).$$

$$x^h - ?, m^h - ?$$

$$\begin{cases} u(x^h) = u(x^0) \\ MRS_{12}(x^h) = \frac{p'_1}{p'_2} \\ m^h = p'_1 x_1^h + p'_2 x_2^h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^h x_2^h = 16 \\ \frac{x_2^h}{x_1^h} = \frac{1}{2} \\ m^h = p'_1 x_1^h + p'_2 x_2^h \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^h \cdot \frac{x_1^h}{2} = 16$$

$$(x_1^h)^2 = 32$$

$$x_1^h = 4\sqrt{2} \Rightarrow x_2^h = 2\sqrt{2}$$

$$m^h = 1 \cdot 4\sqrt{2} + 2 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Тогда

$$\Delta x_1^{\text{HSE}} = x_1^h - x_1^0 = 4\sqrt{2} - 4 \approx 1.6$$

$$\Delta x_1^{\text{HIE}} = x'_1 - x_1^h = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2.4$$