Микроэкономика 1

Лекция 9

Морфий

Группа БЭАД242

Свойства функции расходов (продолжение).

Утверждение. Лемма Шепарда

Пусть предпочтения монотонны и строго выпуклы и представимы непрерывной функцией полезности. Пусть $x^h(p,u) > 0$ и функция расходов $e(p,u)$ дифференцируема. Тогда

$$x_i^h(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$$

Доказательство леммы Шепарда.

1)

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = \frac{\partial\big(p \cdot x^h(p,u)\big)}{\partial p_i} = \frac{p_1 x_1^h(p,u) + ... + p_i x_i^h(p,u) + ... + p_N x_{i(p,u)}^h}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j x_j^h(p,u)}{\partial p_i} =$$

$$= x_i^h(p,u) + p_i \frac{\partial x_i^h(p,u)}{\partial p_i} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N} p_j \partial \frac{x_j^h(p,u)}{\partial p_i} = x_i^h(p,u) + \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial\Big(x_j^h(p,u)\Big)}{\partial p_i} \quad (*)$$

2) из FOC для внутреннего решения:

$$p_j = \lambda \frac{\partial u\big(x^h(p,u)\big)}{\partial x_j}$$

Подставим в $(*)$:

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i^h(p,u) + \lambda \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u\big(x^h(p,u)\big)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial\Big(x_j^h(p,u)\Big)}{\partial p_i} \quad (**)$$

3) В решении EMP ограничение выполняется как равенство:

$$u\big(x^h(p,u)\big) = \tilde{u}$$

Возьмём производную от обеих частей по p_i:

$$u\big(x^h(p,u)\big) = u\big(x_1^h(p,u), x_2^h(p,u), ..., x_N^h(p,u)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u\big(x^h(p,u)\big)}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u\big(x^h(p,u)\big)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j^h(p,u)}{\partial p_i} = 0$$

Подставляя в $(**)$, получаем:

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i^h(p,u) + \lambda \cdot 0 = x_i^h(p,u)$$

■

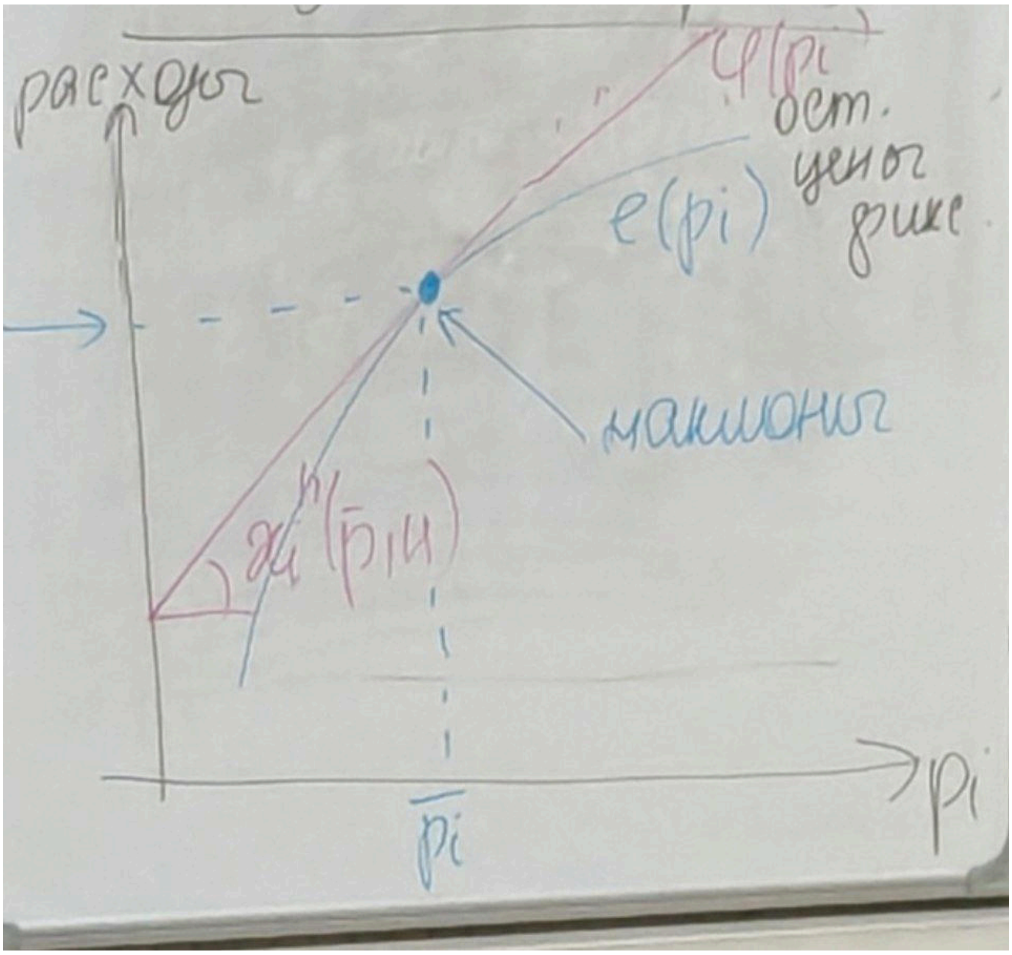
Графическое иллюстрации леммы Шепарда и вогнутости $e(p, u)$

Пусть при ценах $\overline{p} = (\overline{p}_1, ..., \overline{p}_N)$ решением EMP является $x^h(\overline{p}, u) > 0 \Rightarrow e(\overline{p}, u) = \overline{p} \cdot x^h(\overline{p}, u)$.
Пусть все цены, кроме p_i, зафиксированы на уровне $p_j = \overline{p}_j$, а p_i меняется.
Предположим, что при ценах $(\overline{p}_1, \overline{p}_{i-1}, p_i, \overline{p}_{i+1}, ..., \overline{p}_N)$ потребитель выбирает прежний набор $x^h(\overline{p}, u)$. Пусть

$$\varphi(p_i) = p_i \cdot x_i^h(\overline{p}, u) + \sum_{j \neq i} p_j x_j^h(\overline{p}, u)$$

Ясно, что $e(p_i) \leqslant \varphi(p_i)$, причем $e(\overline{p}_i) = \varphi(\overline{p}_i)$.
Тогда на рисунке в осях (p_i, расходы):

- $\varphi(p_i)$ — луч с наклоном $x_i^h(\overline{p}, u) > 0$
- $e(p_i)$ всюду ниже $\varphi(p_i)$, кроме $\overline{p}_i$, где они совпадают:



Двойственность UMP и EMP

Напоминание:

$$\text{UMP}: \begin{cases} u(x) \to \max\limits_{x \geqslant 0} \\ px \leqslant m \end{cases} \Rightarrow x(p,m) - \text{маршаллинский спрос}, \mathcal{V}(p,m) - \text{косвенная функция полезности}$$

$$\text{EMP}: \begin{cases} px \to \min\limits_{x \geqslant 0} \\ u(x) \geqslant u \end{cases} \Rightarrow x^h(p,u) - \text{хиксианский спрос}, e(p,u) - \text{функция расходов}$$

Утверждение.

Пусть предпочтения монотонны и представимы непрерывной функцией полезности. Пусть $p > 0$ — вектор цен.
1) Если $\tilde{x}$ — решение UMP при доходе m, то $\tilde{x}$ — решение EMP при $u = u(\tilde{x})$, причём в EMP минимальные расходы равны m.
2) Если $\tilde{x}$ — решение EMP при $u(x) \geqslant u$, то $\tilde{x}$ — решение UMP при доходе $m = p \cdot \tilde{x}$, причём в решении UMP максимальная полезность равна $u(\tilde{x})$.

Замечание от Ариэля Рубинштейна (и тут евреи): Почему важна монотонность и непрерывность для двойственности?
Короче, там был долгий разговор про черепаху, которая ползёт, которое сводится к одной идее: если функция полезности биективна (а из монотонности и непрерывности следует биективность на области значений), то двойственность работает. Если же функция полезности не биективна, то двойственность может не сработать.

Доказательство двойственности.
1) От противного. Пусть $\tilde{x}$ не является решением EMP при $u(x) \geqslant u(\tilde{x}) \Rightarrow \exists x' \neq \tilde{x} : px' < p\tilde{x}, u(x)' \geqslant u(\tilde{x})$. Так как предпочтения монотонны, то $p\tilde{x} = m$. Таким образом, x' доступен при (p, m) и при этом $u(x') \geqslant u(\tilde{x})$. Раз $px' < m$, то найдётся набор $x'' = \alpha x', \alpha > 1$ такой, что $px'' = m$. Тогда из монотонности $u(x'') > u(x') \geqslant u(\tilde{x}) \Rightarrow u(x'') > u(\tilde{x}) \Rightarrow \tilde{x}$ — не решение UMP. Противоречие.
2) От противного. Пусть $\tilde{x}$ не является решением UMP при $m = p\tilde{x} \Rightarrow \exists x' \neq \tilde{x} : u(x') > u(\tilde{x})$ и $px' \leqslant p\tilde{x} = m$. Тогда рассмотрим $x'' = \alpha x', \alpha \in (0,1) \Rightarrow px'' < px$, а из непрерывности $\exists \alpha : u(x'') \geqslant u(\tilde{x})$. Таким образом, x'' дешевле $\tilde{x}$ и удовлетворяет ограничению EMP. Значит, $\tilde{x}$ — не решение EMP. Противоречие. ∎

Соотношение двойственности

1) Соотношение маршаллианского и хиксианского спроса

$$x(p,m) = x^h(p, \mathcal{V}(p,m))$$

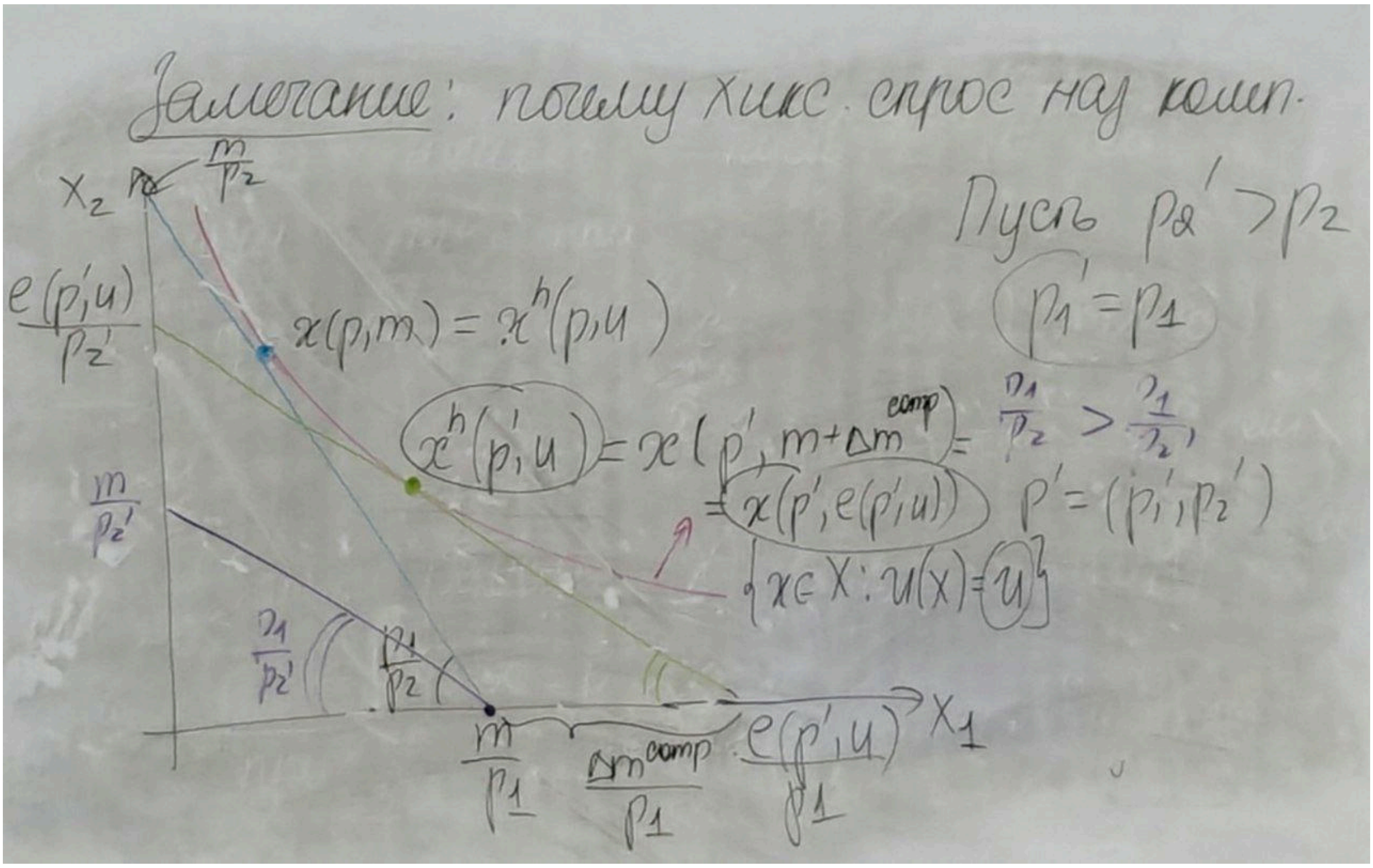
$$x^h(p,u) = x(p, e(p,u))$$

2) Соотношение косвенной функции полезности и функции расходов

$$\mathcal{V}(p, e(p,u)) = u$$

$$e(p, \mathcal{V}(p,m)) = m$$

Замечание: почему хиксианский спрос называют компенсированным?



Хиксианский и маршаллианский спрос совпадут, если одновременно с изменением цен так компенсировать доход потребителя, чтобы он остался на той же кривой безразличия.

Общая диаграмма.

$$x(p,m) \xleftrightarrow[x^h(p,u)=x(p,e(p,u))]{x(p,m)=x^h(p,\mathcal{V}(p,m))} x^h(p,u)$$

$$\underbrace{\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h(p,u)}{\partial p_j} - x_j(p,m)\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m}}_{\text{Уравнение Слуцкого}}$$

При подстановке в целевые функции:

$$\mathcal{V}(p,m) \xleftrightarrow[e(p,\mathcal{V}(p,m))=m]{\mathcal{V}(p,e(p,u))=u} e(p,u)$$

$$\underbrace{\partial x_i(p,m) = -\frac{\partial \mathcal{V}(p,m)/\partial p_i}{\partial \mathcal{V}(p,m)/\partial m}}_{\text{Тождество Роя}}$$