

# **Микроэкономика 1**

## **Лекция 6**

**Морфий**

**Группа БЭАД242**

## Лекция 6.

### Эластичность.

$$\varepsilon_x^f = \frac{\text{изменение } f \text{ в процентах}}{\text{изменение } x \text{ в процентах}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f}$$

#### Определение.

Эластичность  $f$  по  $x$  в точке —

$$\varepsilon_x^f(x) = \frac{df}{dx} \cdot \frac{x}{f}$$

Показывает, на сколько % изменится  $f$  при изменении  $x$  на 1%.

### 1. Эластичность маршаллианского спроса по своей цене.

Пусть  $x_i(p, m)$  — функция маршаллианского спроса на благо  $i$ .

- $\varepsilon_{p_i}^{x_i}$  — эластичность спроса на благо  $i$  по своей цене

$$\varepsilon_{p_i}^{x_i} = \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i}$$

Если  $x_i(p_i)$  — функция спроса на благо только как функция от  $p_i$  при фиксированных остальных ценах и доходе, то

$$\varepsilon_{p_i}^{x_i} = \frac{dx_i}{dp_i} \cdot \frac{p_i}{x_i}$$

показывает, на сколько в % изменится объём спроса при изменении цены на 1%.

В зависимости от реакции на свою цену:

- $\varepsilon_{p_i}^{x_i} < 0$ , если благо обычное,
- $\varepsilon_{p_i}^{x_i} > 0$ , если благо является товаром Гиффена.

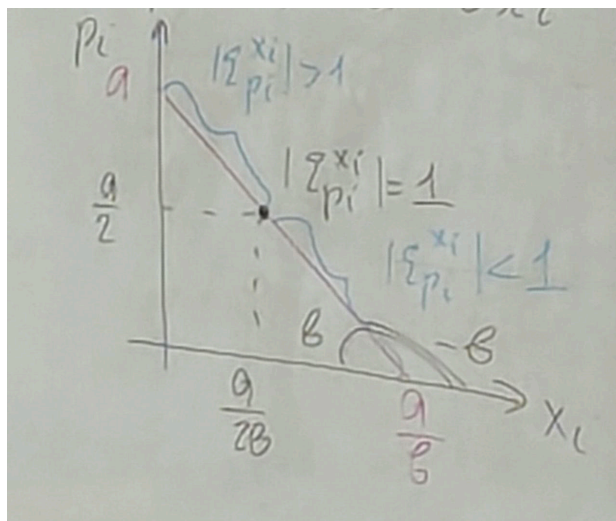
#### Отступление про линейную кривую спроса.

Обратная функция спроса  $p_i(x_i) = a - bx_i$ ,  $a, b > 0 \Rightarrow x_i(p_i) = \frac{a - p_i}{b}$  — прямая функция спроса.

$$\varepsilon_{p_i}^{x_i} = \frac{dx_i}{dp_i} \frac{p_i}{x_i} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{p_i}{\frac{a - p_i}{b}} = -\frac{p_i}{a - p_i}$$

Видим, что наклон кривой спроса постоянен, но эластичность в разных точках разная. В частности,

$$|\varepsilon_{p_i}^{x_i} = 1| \Leftrightarrow p_i = \frac{a}{2}, x_i = \frac{a}{2b}$$



### Определение.

Функцию полезности  $u(x_1, x_2) = \mathcal{V}(x_1) + x_2$ , где  $\mathcal{V}(x_1)$  — монотонная строго вогнутая функция, называют квазилинейной функцией.

Если  $\mathcal{V}(x_1) = ax_1 - b\frac{x_1^2}{2}$ ,  $a, b > 0$ . То во внутреннем решении задачи потребителя имеем

$$\frac{\mathcal{V}'(x_1)}{1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow a - bx_1 = \frac{p_1}{p_2} \stackrel{\text{при } p_2=1}{\Rightarrow} p_1 = a - bx_1, x_1 < \frac{a}{b}$$

Отступление закончено.

### Разные случаи.

Пусть благо  $i$  является обычным.

- $|\varepsilon_{p_i}^{x_i}| = 1$ . Для линейной функции это условие достигается ровно в одной точке.

### Пример.

Пример функции постоянной эластичности:  $u = x_1^\alpha x_2^\beta$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

$$x_1(p, m) = \frac{\alpha m}{(\alpha + \beta)p_1} = \frac{\gamma}{p_1}$$

$$x_1(p_1) = \frac{\gamma}{p_1}$$

$$\varepsilon_{p_1}^{x_1} = \frac{dx_1}{dp_1} \cdot \frac{p_1}{x_1} = -\frac{\gamma}{p_1^2} \cdot \frac{p_1}{\frac{\gamma}{p_1}} = -1$$

- $|\varepsilon_{p_i}^{x_i}| > 1$  — эластичный (чувствительный к изменению своей цены) спрос.

Особый случай: постоянная эластичность спроса по модулю больше 1.

### Пример.

$u(x_1, x_2) = \alpha x_1^\beta + x_2$ , где  $\alpha > 0, 0 < \beta < 1$ . Тогда  $x_1(p_1) = \gamma \cdot p_1^\varepsilon$ , где  $\gamma > 0, \varepsilon < -1$  — эластичность спроса на первое благо по своей цене. Например, если  $x_1(p_1) = \frac{1}{p_1^2}$ , то  $\varepsilon_{p_1}^{x_1} = 2$  (доказательство предоставляется читателю)

- Совершенно эластичный спрос:  $|\varepsilon_{p_i}^{x_i}| \rightarrow \infty$ . Тогда кривая спроса  $p_i(x_i)$  будет горизонтальной.

### Пример.

Рассмотрим товары-субституты  $u = \alpha x_1 + \beta x_2$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

Имеем функцию спроса

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m}{p_1}, x_2 = 0, \frac{p_1}{p_2} < \frac{\alpha}{\beta} \\ x_1 = 0, x_2 = \frac{m}{p_2}, \frac{p_1}{p_2} > \frac{\alpha}{\beta} \\ \forall x_1, x_2 \geq 0 : p_1 x_1 + p_2 x_2 = m, \frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

Рассмотрим кривую спроса  $x_1(p_1)$ , зафиксировав  $p_2$  и  $m$ .

Тогда

$$p_1 > \frac{\alpha}{\beta} p_2 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$p_1 = \frac{\alpha}{\beta} p_2 \Rightarrow x_1 \in \left[0, \frac{m}{p_1}\right] = \left[0, \frac{m\beta}{\alpha p_2}\right]$$

$$p_1 < \frac{\alpha}{\beta} p_2 \Rightarrow x_1 = \frac{m}{p_1} \Leftrightarrow p_1 = \frac{m}{x_1}$$

- Совершенно неэластичный спрос:  $|\varepsilon_{p_i}^{x_i}| = 0$  — вертикальная прямая.

### Эластичность спроса по своей цене и расходы на благо.

$p_i x_i(p_i)$  — расходы на благо  $i$ . Тогда

$$(p_i \cdot x_i(p_i))'_{p_i} = x_i(p_i) + p_i x_i'(p_i) = x_i(p_i) \cdot \left[1 + x_i'(p_i) \cdot \frac{p_i}{x_i}\right] = x_i(p_i) + x_i(p_i) \cdot (1 + \varepsilon_{p_i}^{x_i})$$

Таким образом:

- если спрос эластичен, то есть  $\varepsilon_{p_i}^{x_i} < -1$ , то  $(p_i \cdot x_i(p_i))'_{p_i} < 0$ , значит, расходы на благо уменьшаются с ростом цены,
- если спрос неэластичен, то есть  $\varepsilon_{p_i}^{x_i} > -1$ , то  $(p_i \cdot x_i(p_i))'_{p_i} > 0$ , значит, расходы на благо увеличиваются с ростом цены

## 2. Эластичность спроса по доходу.

$x_i(p, m)$  — функция спроса на благо  $i$ . Тогда эластичность спроса на благо  $i$  по доходу это

$$\varepsilon_m^{x_i} = \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} \frac{m}{x_i}$$

- нормальное благо:  $\varepsilon_m^{x_i} > 0$ ,
- инфериорное благо:  $\varepsilon_m^{x_i} < 0$ ,
- нейтральное благо:  $\varepsilon_m^{x_i} = 0$

### Пример.

Функция Кобба-Дугласа  $u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta$ ,  $\alpha, \beta > 0$

$$x_1(p, m) = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)p_1} m = \gamma m$$

$$\varepsilon_m^{x_1} = \frac{dx_1}{dm} \cdot \frac{m}{x_1} = \frac{\gamma m}{\gamma m} = 1 > 0$$

### 3. Перекрёстная эластичность спроса по цене (реакция на «чужую» цену)

$x_i(p, m)$  — функция спроса на благо  $i$ . Тогда эластичность спроса на благо  $i$  по цене блага  $j$  это

$$\varepsilon_{p_j}^{x_i} = \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i}$$

- валовые субституты:  $\varepsilon_{p_j}^{x_i} > 0$ ,
- валовые комплементы:  $\varepsilon_{p_j}^{x_i} < 0$

**Пример.**

Функция Кобба-Дугласа.  $\varepsilon_{p_2}^{x_1} = \varepsilon_{p_1}^{x_2} = 0$ . То есть, блага не являются ни субститутами, ни комплементами.

### 4. Связь эластичностей

Для Кобба-Дугласа имеем  $\varepsilon_{p_1}^{x_1} + \varepsilon_{p_2}^{x_1} + \varepsilon_m^{x_1} = 0$  — это не особенность Кобба-Дугласа, а следствие однородности маршаллианского спроса.

**Доказательство.**

1. Пусть  $f(x_1, \dots, x_N)$  — функция, определённая на неотрицательных значениях  $(x_1, \dots, x_N) \geq 0$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_N)$  называется однородной степени  $k$ , если  $f(tx_1, \dots, tx_N) = t^k f(x_1, \dots, x_N) \quad \forall t > 0$ .

2. Формула Эйлера для однородных функций.

Пусть  $f(x_1, \dots, x_N)$  однородна степени  $k$  и дифференцируема в точке  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \bar{x}$ . Тогда

$$k \cdot f(\bar{x}) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \bar{x}_1 + \dots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \bar{x}_n$$

Так как маршаллианский спрос  $x_j(p, m)$  однороден степени 0 по ценам и по доходу, то есть  $k = 0$ , имеем

$$0 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x_j(p_1, \dots, p_N, m)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i(p_1, \dots, p_N, m)} + \frac{\partial x_j(p_1, \dots, p_N, m)}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_i(p_1, \dots, p_N, m)} = \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_{p_i}^{x_j}}{p_i} + \varepsilon_m^{x_j}$$

Или, для двух благ и  $j = 1$ :

$$0 = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial x_1}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial x_1}{\partial m} m \Rightarrow \varepsilon_{p_1}^{x_1} + \varepsilon_{p_2}^{x_1} + \varepsilon_m^{x_1} = 0$$