Микроэкономика 1

Лекция 13
17.04.2025

Морфий

Группа БЭАД242

Лекция 13. Экономика обмена.

Вопросы экономики:

1. Эффективное распределение ресурсов в экономике в целом?
   Парето-оптимальность; централизованное принятие решений
2. Результат поведения индивидуальных экономических агентов: распределение и цены?
   Равновесие по Вальрасу
3. Как соотносится равновесие и оптимальность?

Описание экономики.

Пусть $N = 2$ благ, $M = 2$ потребителей: A и B. Предпочтения потребителей представимы непрерывными функциями полезности.
x_i^k — объём потребления блага i потребителем k.
Полезность потребителя $u^k(x^k)$, где $x^k = (x_1^k, x_2^k)$.
Нет фиксированного дохода, но есть первоначальный запас благ $\omega^k = (\omega_1^k, \omega_2^k) \geqslant 0$.
Пусть $\overline{\omega}_i = \omega_i^A + \omega_i^B$ — совокупный запас блага i в экономике.

Допустимые распределеения.

Определение.

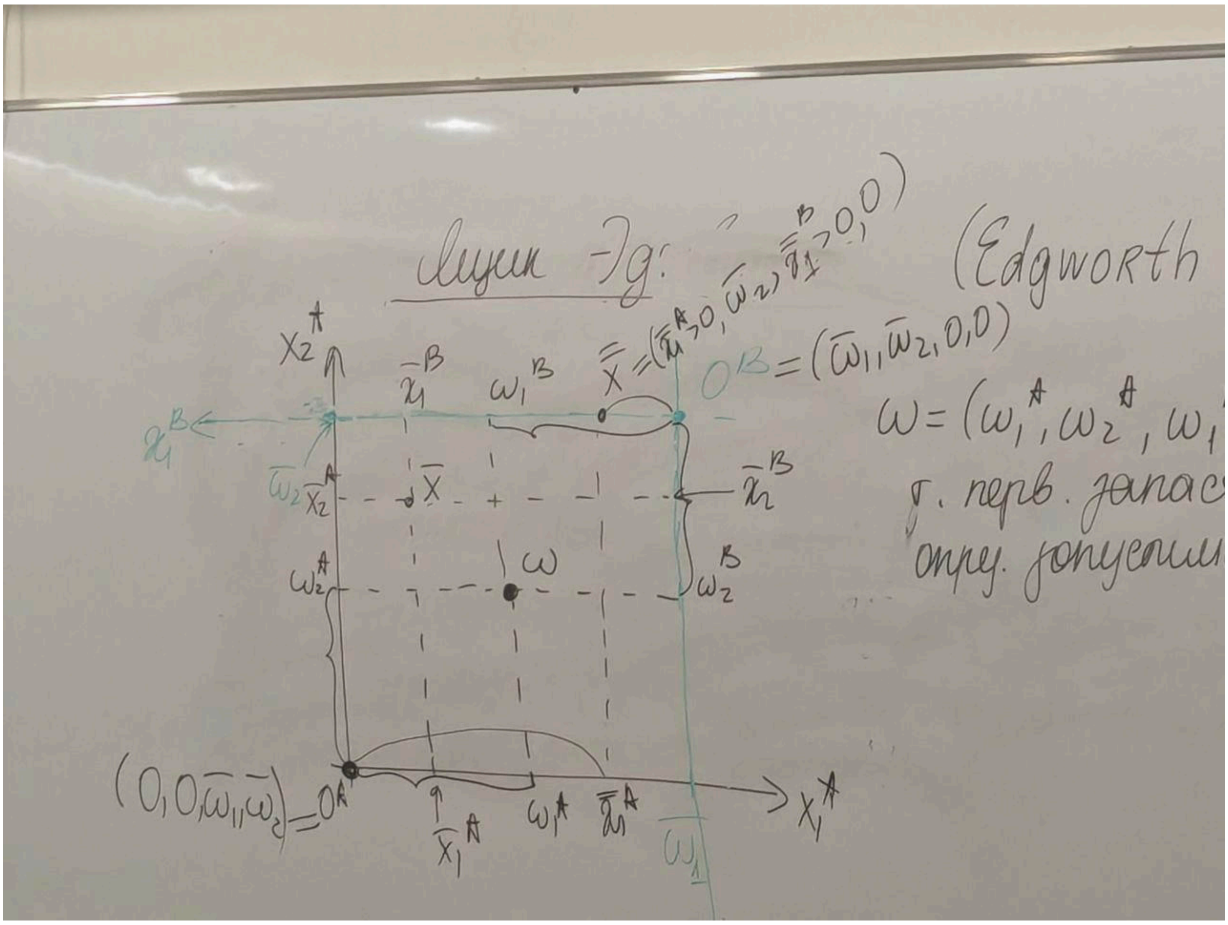
Распределение — набор, специфицирующий объём потребления каждого блага каждым потребителем: $x = (x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B)$.

Определение.

Допустимым распределением назоывается такое распределение, что $x_i^A + x_i^B = \overline{\omega}_i$

Ящик Эджворта.

Построим ящик Эджворта. Любая точка внутри него является допустимым распределением.



Определение.

Внутреннее распределение — такое распределение, в котором у каждого потребителя положительное количество каждого блага, лежит внутри ящика Эджворта.

Определение.

Граничное распределение — такое распределение, в котором хотя бы у одного потребителя отсутствует хотя бы одно благо; лежит на стенке ящика Эджворта.

Парето-оптимальность (ПО) распределения

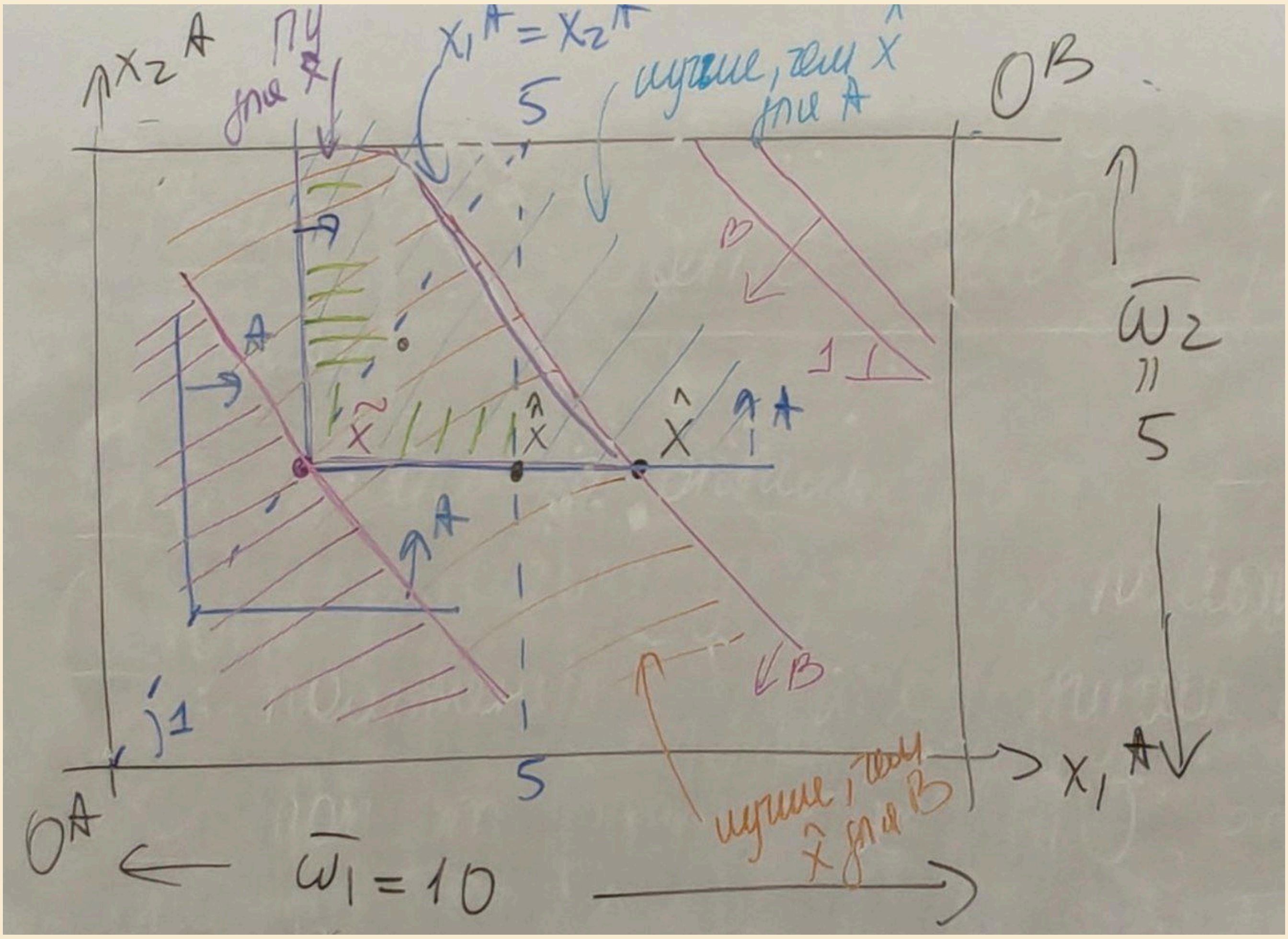
Определение.

Парето-оптимальное распределение — это такое допустимое распределение, что нельзя улучшить положение одного потребителя, не ухудшая положение другого (других), то есть допустимое распределение $\overline{x}$ парето-оптимально, если не существует другого допустимого распределения $\hat{x}$ такого, что, $\forall k \;\; u^k\left(\hat{x}^k\right) \geqslant u^k\left(\overline{x}^k\right)$ и $\exists m : \; u^m\left(\hat{x}^m\right) > u^m\left(\overline{x}^m\right)$.

Если такое $\hat{x}$ находится, то его называют парето-улучшением для распределения $\overline{x}$.

Пример.

$\omega^A = (1, 2), \omega^B = (9, 3)$
$\overline{\omega}_1 = 10, \overline{\omega}_2 = 5.$
$u^A = \min\left\{x_1^A, x_2^A\right\}, u^B = x_1^B + x_2^B.$
Кривые безразличия у B: $x_2^B = u - x_1^B$
Кривые безразличия у A: уголки с точкой в $x_1^A = x_2^A$



$\hat{x}$ — не оптимальное распределение, в сиреневой трапеции — все парето-улучшения $\hat{x}$.
$\tilde{x}$ — ПО распределение. Более того, любая точка на луче $x_2^A = x_1^A$ — ПО распределение.

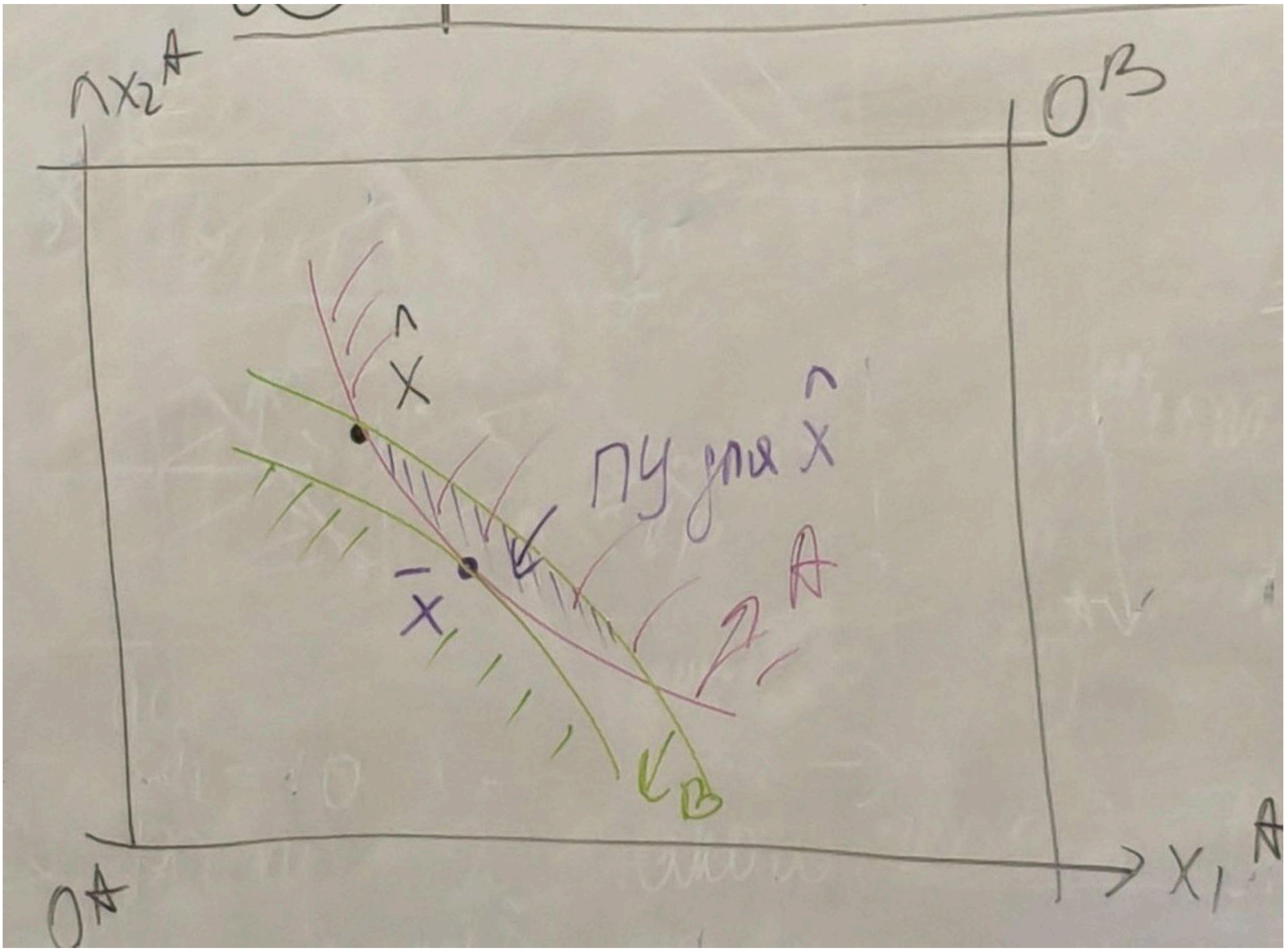
Утверждение.

Если предпочтения обоих потребителей сторго монотонны, то точки O_A и O_B — ПО.

Дифференциальная характеристика внутренних ПО.

Видим: $\overline{x}$ — внутреннее допустимое распределение, точка касания кривых безразличия:

$$\mathrm{MRS}_{12}^A(\overline{x}^A) = \mathrm{MRS}_{12}^B(\overline{x}^B)$$



1. Необходимое условие внутреннего ПО.

Утверждение.

Пусть предпочтения потребителей строго монотонны и представимы дифференцируемой функцией полезности. Пусть $\overline{x}$ — внутреннее ПО. Тогда это точка касания кривых безразличия:

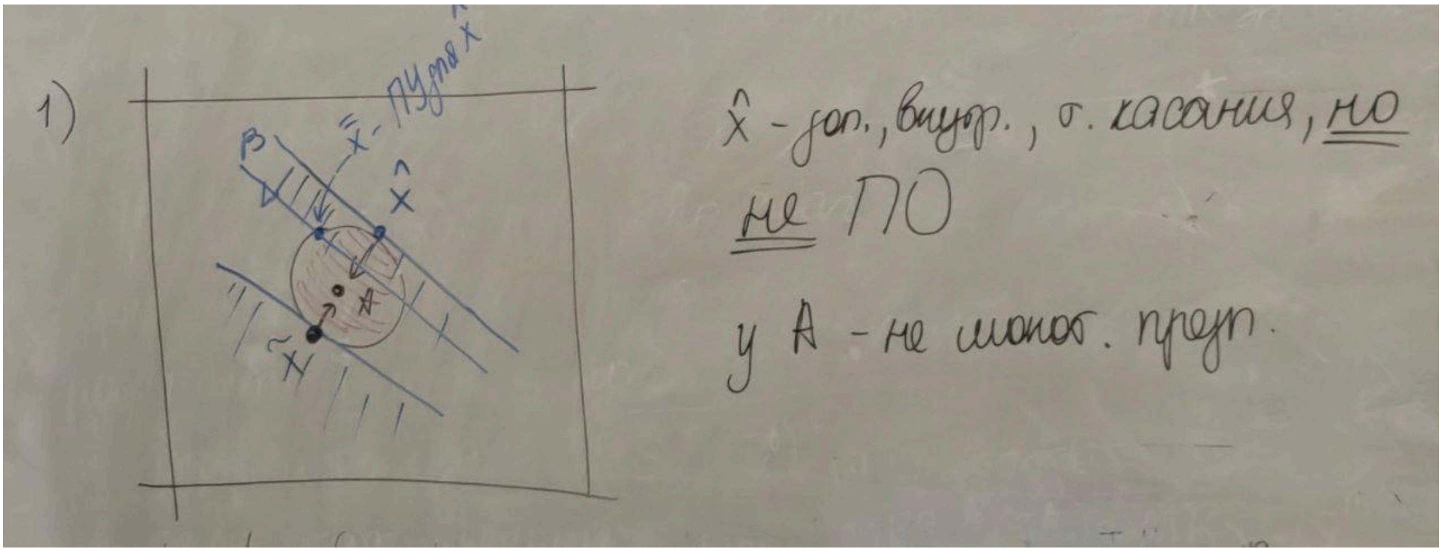
$$\mathrm{MRS}_{12}^{A}(\overline{x}^{A}) = \mathrm{MRS}_{12}^{B}(\overline{x}^{B})$$

Доказательство:

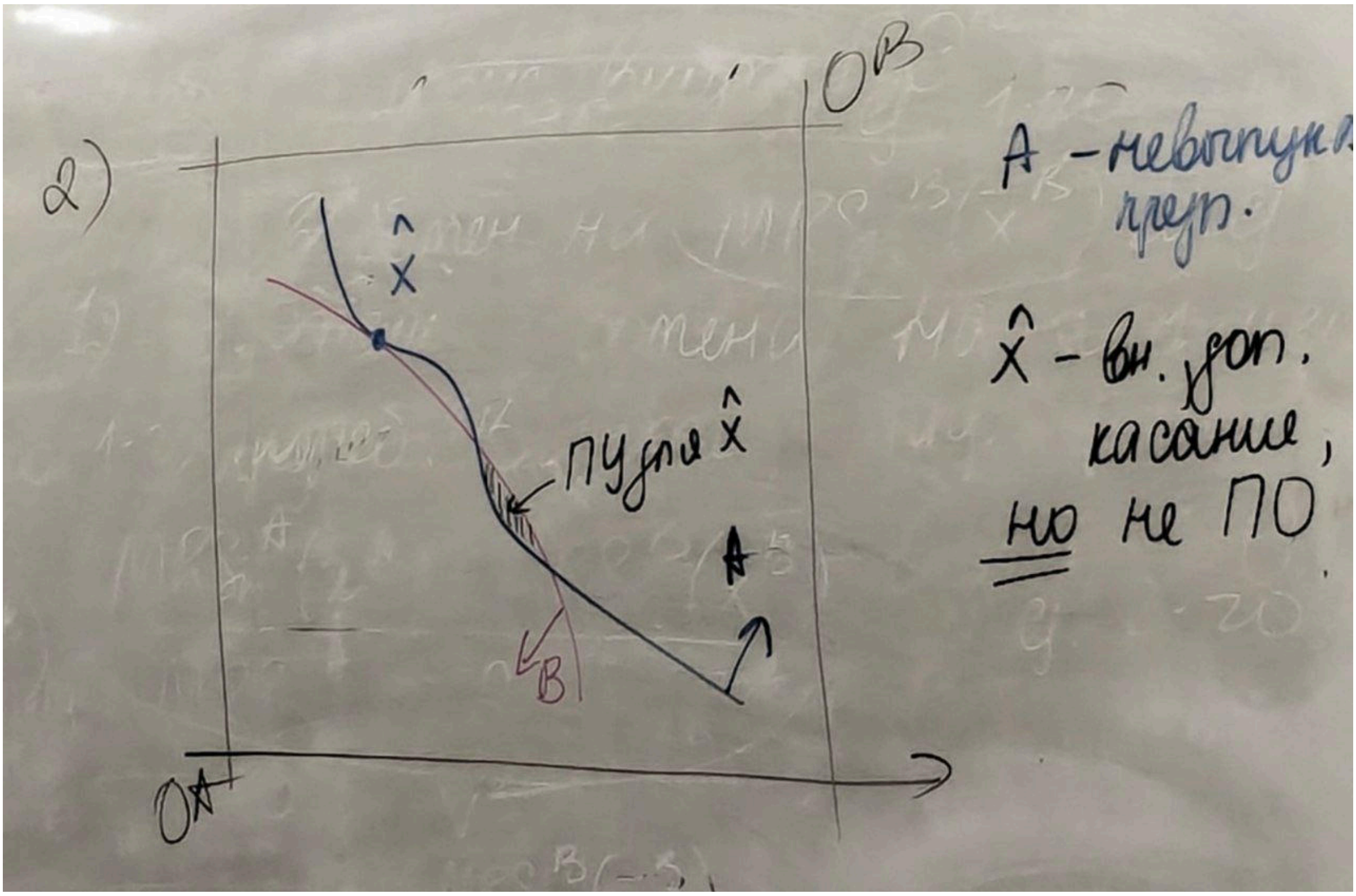
Пусть $\overline{x}$ — внутреннее ПО, но $\mathrm{MRS}_{12}^{A}(\overline{x}^{A}) \neq \mathrm{MRS}_{12}^{B}(\overline{x}^{B})$.
Не умаляя общности, $\mathrm{MRS}_{12}^{A}(\overline{x}^{A}) > \mathrm{MRS}_{12}^{B}(\overline{x}^{B})$.
Идея: увеличить у A первое благо и уменьшить второго.
Рассмотрим допустимое перераспределение благ такое, что потребитель A получает 1 малую единицу первого блага, в обмен готов отдать $\mathrm{MRS}_{12}^{A}(\overline{x}^{A})$ малых единиц второго блага, а если отдаст меньше, например, $\dfrac{1}{2}(\mathrm{MRS}_{12}^{A} + \mathrm{MRS}_{12}^{B}) < \mathrm{MRS}_{12}^{A}$, тогда положение A в силу строгой монотонности предпочтений улучшится.
B готов отдать 1 малую единицу первого блага в обмен на MRS_{12}^{B} малых единиц второго. Если в обмен за одну малую единицу первого блага B получает $\dfrac{1}{2}(\mathrm{MRS}_{12}^{A} + \mathrm{MRS}_{12}^{B})$, его положение в силу строгой монотонности предпочтений улучшится.
Этот набор — ПУ $\overline{x} \Rightarrow \overline{x}$ — не ПО. Противоречие. ■

2. Достаточное условие внутреннего ПО.

1) Нужна монотонность:



2) Нужна выпуклость:



Утверждение.

Пусть предпочтения потребителей строго монотонны, выпуклы и представимы непрерывной функцией полезности. Тогда условие равенства MRS_{12} является не только необходимым, но и достаточным условием внутреннего ПО.

3. Задача на поиск ПО.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u^A\big(x_1^A, x_2^A\big) \to \max\limits_{x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B \geqslant 0} \\ u^B\big(x_1^B, x_2^B\big) \geqslant \overline{u}^B \\ x_1^A + x_1^B = \overline{\omega}_1 \\ x_2^A + x_2^B = \overline{\omega}_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Утверждение.

Пусть предпочтения потребителя строго монотонны и представимы непрерывной функцией полезности. Пусть $u^k(0) = 0$. Тогда любое решение задачи $(*)$ является ПО и наоборот, любое ПО распределение является решение м задачи $(*)$ при некотором значении $\overline{u}^B$.

Пусть функции полезности дифференцируемы. Тогда можем получить дифференциальную характеристику решений задачи. Лагранжиан:

$$L = u^A\big(x_1^A + x_2^A\big) + \lambda\big(\overline{u}^B - u^B\big(x_1^B, X_2^B\big)\big) + \mu_1\big(\overline{\omega}_1 - x_1^A - x_1^B\big) + \mu_2\big(\overline{\omega}_2 - x_2^A - x_2^B\big)$$

FOC для внутреннего решения:
по x_1^A

$$\frac{\partial u^A}{\partial x_1^A} - \mu_1 = 0$$

по x_2^A:

$$\frac{\partial u^A}{\partial x_2^A} - \mu_2 = 0$$

по x_1^B:

$$-\lambda \frac{\partial u^B}{\partial x_1^B} - \mu_1 = 0$$

по x_2^B:

$$-\lambda \frac{\partial u^B}{\partial x_2^B} - \mu_2 = 0$$

Итого:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\partial u^A / \partial x_1^A}{\partial u^A / \partial x_2^A} = \frac{\partial u^B / \partial x_1^B}{\partial u^B / \partial x_2^B}$$

Получаем

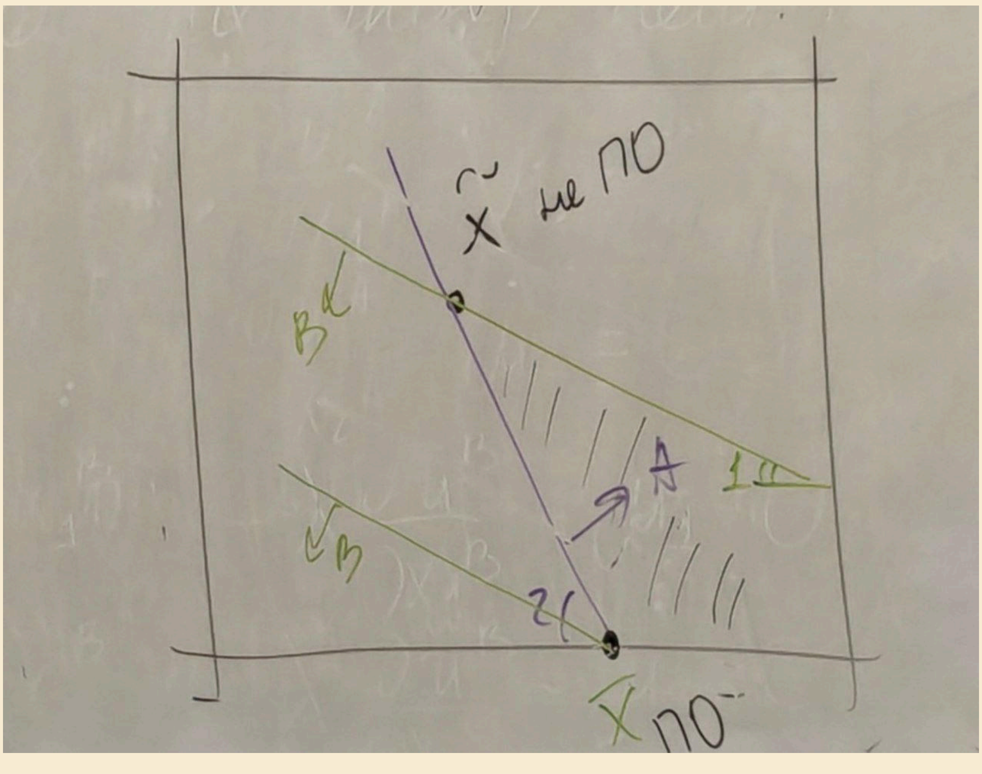
$$\mathrm{MRS}_{12}^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = \mathrm{MRS}_{12}^B\left(x_1^B, x_2^B\right)$$

Это условие будет необходимым и достаточным, если целевая функция вогнута (квазивогнута), то есть предпочтения выпуклы.

4. Граничные ПО

Пример.

$u^A = 2x_1^A + x_2^A, u^B = x_1^B + x_2^B$. Тогда $\mathrm{MRS}_{12}^A = 2 \neq \mathrm{MRS}_{12}^B = 1$. Значит, тут не может быть внутреннего парето-оптимума.
Так как кривая безразличия A идёт круче, ожидаем ПО на нижней и на правой стенке ящика.



Здесь $\overline{x}$ — ПО, и в ней $\mathrm{MRS}_{12}^{A} > \mathrm{MRS}_{12}^{B}$.

шалом алейхем