Микроэкономика 1

Лекция 6

Морфий

Группа БЭАД242

Лекция 6. Эластичность.

$$\varepsilon_x^f = \frac{\text{изменение f в процентах}}{\text{изменение x в процентах}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f}$$

Определение.

Эластичность f по x в точке —

$$\varepsilon_x^f(x) = \frac{df}{dx} \cdot \frac{x}{f}$$

Показывает, на сколько % изменится f при изменении x на 1%.

Эластичность маршаллианского спроса по своей цене.

Пусть $x_i(p, m)$ — функция маршаллианского спроса на благо i.

- $\varepsilon_{p_i}^{x_i}$ — эластичность спроса на благо i по своей цене

$$\varepsilon_{p_i}^{x_i} = \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i}$$

Если $x_i(p_i)$ — функция спроса на благо только как функция от p_i при фиксированных остальных ценах и доходе, то

$$\varepsilon_{p_i}^{x_i} = \frac{dx_i}{dp_i} \cdot \frac{p_i}{x_i}$$

показывает, на сколько в % изменится объём спроса при изменении цены на 1%.
В зависимости от реакции на свою цену:
- $\varepsilon_{p_i}^{x_i} < 0$, если благо обычное,
- $\varepsilon_{p_i}^{x_i} > 0$, если благо является товаром Гиффена.

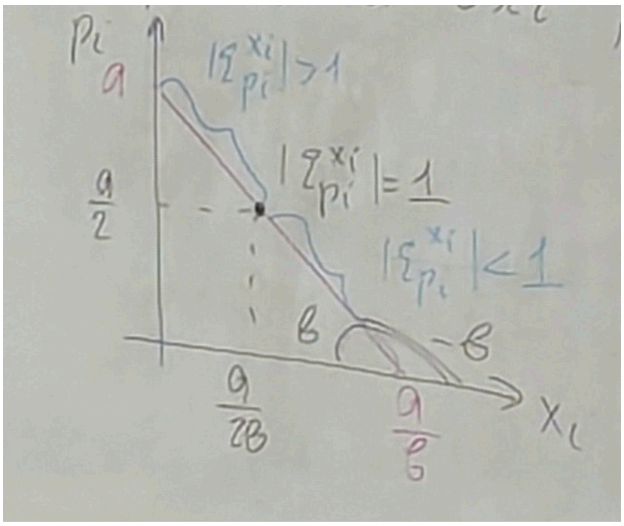
Отступление про линейную кривую спроса.

Обратная функция спроса $p_i(x_i) = a - bx_i$, $a, b > 0 \Rightarrow x_i(p_i) = \dfrac{a - p_i}{b}$ — прямая функция спроса.

$$\varepsilon_{p_i}^{x_i} = \frac{dx_i}{dp_i}\frac{p_i}{x_i} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{p_i}{\frac{a-p_i}{b}} = -\frac{p_i}{a - p_i}$$

Видим, что наклон кривой спроса постоянен, но эластичность в разных точках разная. В частности,

$$\left|\varepsilon_{p_i}^{x_i} = 1\right| \Leftrightarrow p_i = \frac{a}{2}, x_i = \frac{a}{2b}$$



Определение.

Функцию полезности $u(x_1, x_2) = \mathcal{V}(x_1) + x_2$, где $\mathcal{V}(x_1)$ — монотонная строго вогнутая функция, называют квазилинейной функцией.

Если $\mathcal{V}(x_1) = ax_1 - b\frac{x_1^2}{2}, a, b > 0$. То во внутреннем решении задачи потребителя имеем

$$\frac{\mathcal{V}'(x_1)}{1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow a - bx_1 = \frac{p_1}{p_2} \overset{\text{при } p_2=1}{\Rightarrow} p_1 = a - bx_1, x_1 < \frac{a}{b}$$

Отступление закончено.

Разные случаи.

Пусть благо i является обычным.

- $\left|\varepsilon_{p_i}^{x_i}(p_i)\right| = 1$. Для линейной функции это условие достигается ровно в одной точке.

Пример.

Пример функции постоянной эластичности: $u = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \alpha, \beta > 0$.

$$x_1(p, m) = \frac{\alpha m}{(\alpha + \beta) p_1} = \frac{\gamma}{p_1}$$

$$x_1(p_1) = \frac{\gamma}{p_1}$$

$$\varepsilon_{p_1}^{x_1} = \frac{dx_1}{dp_1} \cdot \frac{p_1}{x_1} = -\frac{\gamma}{p_1^2} \cdot \frac{p_1}{\frac{\gamma}{p_1}} = -1$$

- $\left|\varepsilon_{p_i}^{x_i}\right| > 1$ — эластичный (чувствительный к изменению своей цены) спрос.

Особый случай: постоянная эластичность спроса по модулю больше 1.

Пример.

$u(x_1, x_2) = \alpha x_1^{\beta} + x_2$, где $\alpha > 0, 0 < \beta < 1$. Тогда $x_1(p_1) = \gamma \cdot p_1^{\varepsilon}$, где $\gamma > 0, \varepsilon < -1$ — эластичность спроса на первое благо по своей цене. Например, если $x_1(p_1) = \frac{1}{p_1^2}$, то $\varepsilon_{p_1}^{x_1} = 2$ (доказательство предоставляется читателю)

- Совершенно эластичный спрос: $\left|\varepsilon_{p_i}^{x_i}\right| \to \infty$. Тогда кривая спроса $p_i(x_i)$ будет горизонтальной.

Пример.

Рассмотрим товары-субституты $u = \alpha x_1 + \beta x_2$, $\alpha, \beta > 0$.
Имеем функцию спроса

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m}{p_1}, x_2 = 0, \frac{p_1}{p_2} < \frac{\alpha}{\beta} \\ x_1 = 0, x_2 = \frac{m}{p_2}, \frac{p_1}{p_2} > \frac{\alpha}{\beta} \\ \forall x_1, x_2 \geqslant 0 : p_1 x_1 + p_2 x_2 = m, \frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

Рассмотрим кривую спроса $x_1(p_1)$, зафиксировав p_2 и m.
Тогда

$$p_1 > \frac{\alpha}{\beta} p_2 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$p_1 = \frac{\alpha}{\beta} p_2 \Rightarrow x_1 \in \left[0, \frac{m}{p_1}\right] = \left[0, \frac{m\beta}{\alpha p_2}\right]$$

$$p_1 < \frac{\alpha}{\beta}(p_2) \Rightarrow x_1 = \frac{m}{p_1} \Leftrightarrow p_1 = \frac{m}{x_1}$$

- Совершенно неэластичный спрос: $\left|\varepsilon_{p_i}^{x_i}\right| = 0$ — вертикальная прямая.

Эластичность спроса по своей цене и расходы на благо.
$p_i x_i(p_i)$ — расходы на благо i. Тогда

$$(p_i \cdot x_i(p_i))'_{p_i} = x_i(p_i) + p_i x_i'(p_i) = x_i(p_i) \cdot \left[1 + x_i'(p_i) \cdot \frac{p_i}{x_i}\right] = x_i(p_i) \cdot \left(1 + \varepsilon_{p_i}^{x_i}\right)$$

Таким образом:
- если спрос эластичен, то есть $\varepsilon_{p_i}^{x_i} < -1$, то $(p_i \cdot x_i(p_i))'_{p_i} < 0$, значит, расходы на благо уменьшаются с ростом цены,
- если спрос неэластичен, то есть $\varepsilon_{p_i}^{x_i} > -1$, то $(p_i \cdot x_i(p_i))'_{p_i} > 0$, значит, расходы на благо увеличиваются с ростом цены

Эластичность спроса по доходу.

$x_i(p, m)$ — функция спроса на благо i. Тогда эластичность спроса на благо i по доходу это

$$\varepsilon_m^{x_i} = \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} \frac{m}{x_i}$$

- нормальное благо: $\varepsilon_m^{x_i} > 0$,
- инфериорное благо: $\varepsilon_m^{x_i} < 0$,
- нейтральное благо: $\varepsilon_m^{x_i} = 0$

Пример.

Функция Кобба-Дугласа $u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta, \alpha, \beta > 0$

$$x_1(p, m) = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta) p_1} m = \gamma m$$

$$\varepsilon_m^{x_1} = \frac{dx_1}{dm} \cdot \frac{m}{x_1} = \frac{\gamma m}{\gamma m} = 1 > 0$$

Перекрёстная эластичность спроса по цене (реакция на «чужую» цену)

$x_i(p,m)$ — функция спроса на благо i. Тогда эластичность спроса на благо i по цене блага j это

$$\varepsilon^{x_i}_{p_j} = \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i}$$

- валовые субституты: $\varepsilon^{x_i}_{p_j} > 0$,
- валовые комплементы: $\varepsilon^{x_i}_{p_j} < 0$

Пример.

Функция Кобба-Дугласа. $\varepsilon^{x_1}_{p_2} = \varepsilon^{x_2}_{p_1} = 0$. То есть, блага не являются ни субститутами, ни комплементами.

Связь эластичностей

Для Кобба-Дугласа имеем $\varepsilon^{x_1}_{p_1} + \varepsilon^{x_1}_{p_2} + \varepsilon^{x_1}_{m} = 0$ — это не особенность Кобба-Дугласа, а следствие однородности маршаллианского спроса.

Доказательство.

1. Пусть $f(x_1, ..., x_N)$ — функция, определённая на неотрицательных значениях $(x_1, ..., x_N) \geqslant 0$.
Функция $f(x_1, ..., x_N)$ называется однородной степени k, если $f(tx_1, ..., ..., tx_N) = t^k f(x_1, ..., x_n)\ \ \forall t > 0$.
2. Формула Эйлера для однородных функций.
Пусть $f(x_1, ..., x_N)$ однородна степени k и дифференцируема в точке $(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = \overline{x}$. Тогда

$$k \cdot f(\overline{x}) = \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_1}\overline{x}_1 + ... + \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_n}\overline{x}_n$$

Так как маршаллианский спрос $x_j(p,m)$ однороден степени 0 по ценам и по доходу, то есть $k = 0$, имеем

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x_j(p_1, ..., p_N, m)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_i(p_1, ..., p_N, m)} + \frac{\partial x_j(p_1, ..., p_N, m)}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_i(p_1, ..., p_N, m)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon^{x_j}}{p_i} + \varepsilon^{x_j}_{m}$$

Или, для двух благ и $j = 1$:

$$0 = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial x_1}{\partial p_2}p_2 + \frac{\partial x_1}{\partial m}m \Rightarrow \varepsilon^{x_1}_{p_1} + \varepsilon^{x_1}_{p_2} + \varepsilon^{x_1}_{m} = 0$$