# Микроэкономика 1

## Лекция 4

**Морфий**

**Группа БЭАД242**

# Лекция 4. Задача потребителя и характеристика её решения.

Покуда предпочтения потребителя полны, транзитивны и непрерывны, существует непрерывная функция полезности $U(x)$. Пусть все цены положительные $(p \gg 0), m > 0$.
Тогда задача потребителя — задача выбора наилучшего набора из доступных, то есть выбор такого набора (таких наборов) в бюджетном множестве, который (которые) приносят наибольшую полезность.
Формально:

$$\begin{cases} u(x) \longrightarrow \max\limits_{x_i \geqslant 0} \\ px \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x_1, x_2, ..., x_N) \to \max\limits_{x_i \geqslant 0} \\ \sum\limits_{i=0}^{N} p_i x_i \leqslant m \end{cases} \qquad (*)$$

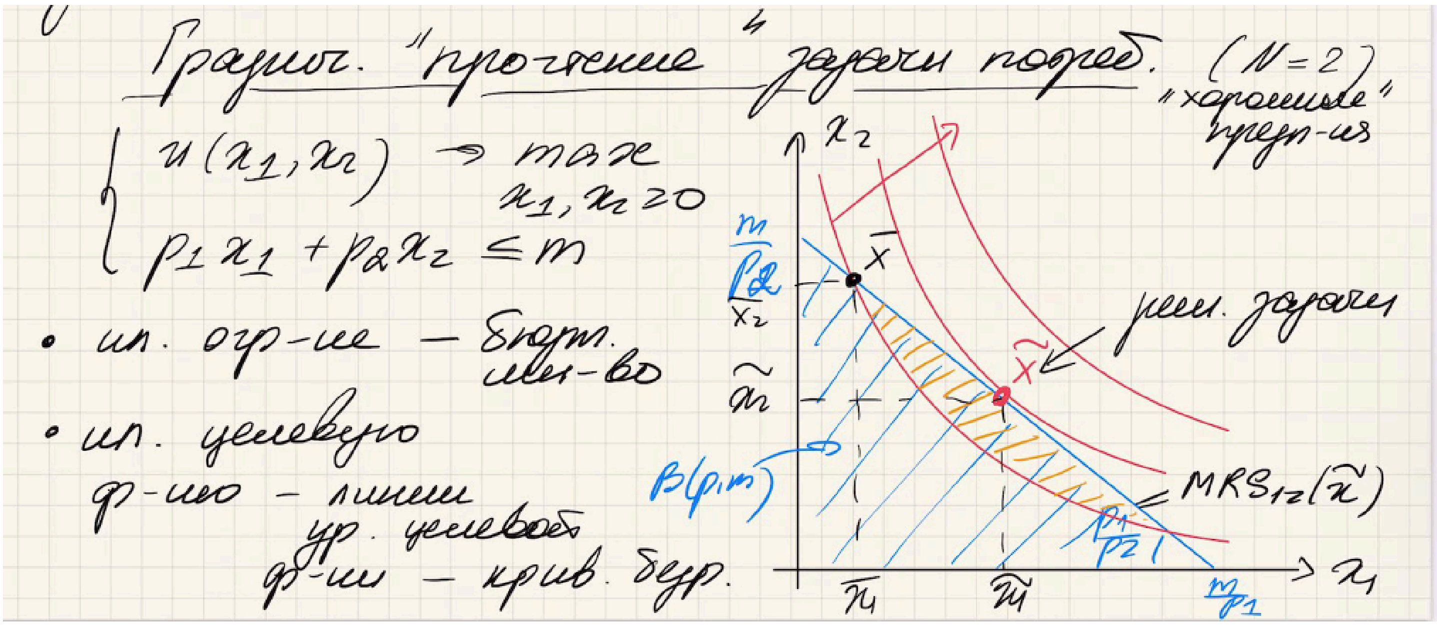
Так как $U(x)$ непрерывна, а бюджетное множество компактно, то по теореме Вейерштрасса о функции на компакте решение существует всегда. Пусть $\tilde{x}$ — решение задачи $(*)$. Тогда $\tilde{x} = f(p, m)$ — отображение (функция, если отображение однозначно) маршалловского (маршаллианского) или вальрассовского (вальрассианского) спроса.
Подставив решение в целевую функцию, получим косвенную функцию полезности: $v = f(p, m) = u(x(p, m))$ — функция значений.

**Графическое прочтение задачи потребителя.** $(N = 2)$

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \to \max\limits_{x_1, x_2 \geqslant 0} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant m \end{cases}$$

1. Иллюстрируем ограничение — бюджетное множество.
2. Иллюстрируем целевую функцию (функцию полезности) — линии уровня (кривые безразличия).
3. Находим такую точку, что её кривая безразличия касается бюджетного множества.

Для «хороших» предпочтений:
- Такое решение $\tilde{x}$, что $\tilde{x} \gg 0$, будем называть внутренним.
- $\tilde{x}$ лежит на бюджетной линии, то есть $p\tilde{x} = m$.
- $\tilde{x}$ — точка касания бюджетной линии и кривой безразличия, то есть $\dfrac{p_1}{p_2} = MRS_{12}(\tilde{x})$.



**Утверждение. Свойства маршаллианского спроса**

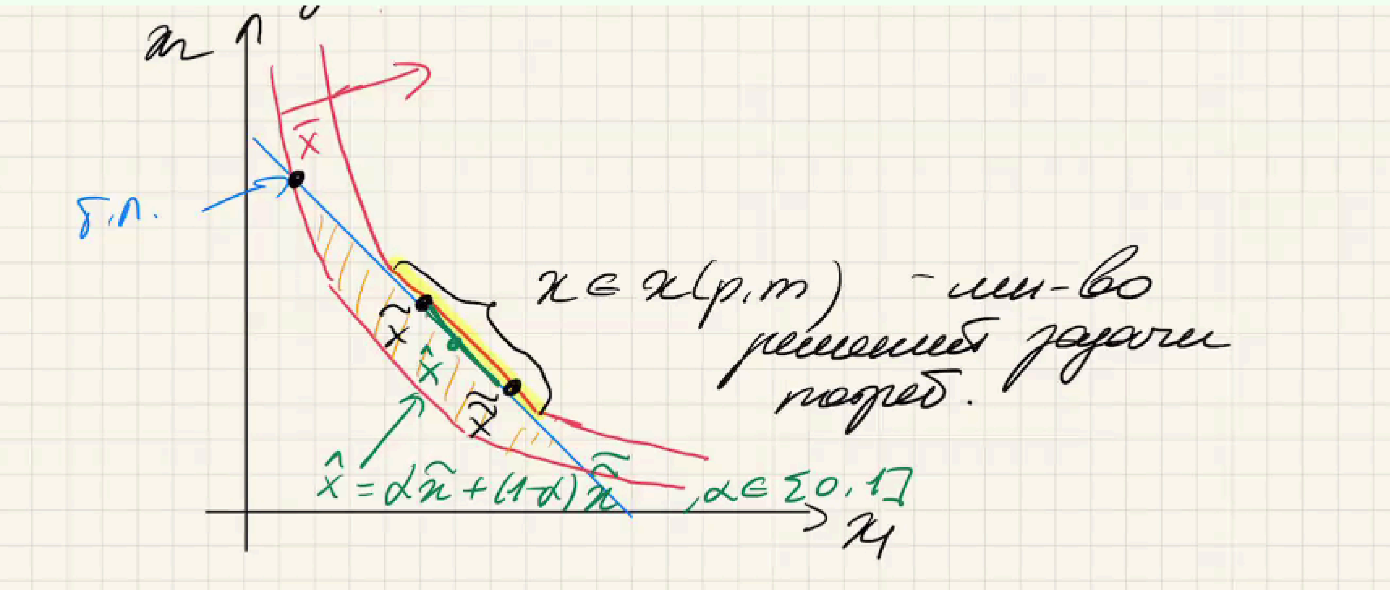
**1.** $\forall t > 0 \;\; x(tp, tm) = x(p, m)$ — функция спроса однородна нулевой степени по ценам и доходу, то есть $x(tp, tm) = t^n x(p, m)$, где $n = 0 \Leftrightarrow t^n = 1$.
Действительно, изменение всех цен и дохода в одной и той же положительной пропорции не изменяет бюджетное множество, и тем более не изменяет функцию полезности, поэтому решение задачи потребителя остаётся тем же.

**2.** Если предпочтения монотонны, то решение задачи потребителя лежит на бюджетной линии.
Действительно, пусть предпочтения потребители монотонны, но его решение лежит не на бюджетной линии, то есть $p\tilde{x} < m$. Пусть оставшиеся деньги он потратит в равной мере на все блага (то есть, $\tilde{x}'_i = \tilde{x}_i + \frac{m - px}{np_i}$). Тогда количество каждого блага увеличится, значит, получившийся набор $\tilde{x}'$ будет точно лучше изначального в силу монотонности предпочтений. Тогда изначальный набор $\tilde{x}$ не мог быть решением задачи потребителя. ■

**Пример.**

Если имеем предпочтения с точкой насыщения, которая лежит строго внутри бюджетного множества, то решение задачи потребителя будет строго внутри бюджетного множества.

**3.** Если предпочтения выпуклы (то есть функция полезности квазивогнута), то множество решений задачи $(*)$ $x(p, m)$ — выпуклое множество.




**4.** Если предпочтения строго выпуклы (то есть функция полезности строго квазивогнута), то решение задачи $(*)$ единственно.
*Замечание:* если предпочтения строго выпуклы, то функция $x(p, m)$ непрерывна.

## Дифференциальная характеристика внутреннего решения задачи потребителя.

Пусть функция полезности непрерывна и дифференцируема на $\mathbb{X}$. Кроме того, пусть предпочтения потребителя строго монотонны.

- По рисунку для «хороших» (строго монотонных и строго выпуклых) предпочтений: во внутреннем решении $\tilde{x} \gg 0$

$$\underbrace{MRS_{12}(\tilde{x})}_{\substack{\text{субъективная}\\\text{норма замещения}\\\text{благ}}} = \underbrace{\frac{p_1}{p_2}}_{\substack{\text{объективная (рыночная)}\\\text{норма замещения благ}}}$$

$$\frac{\partial U(\tilde{x})/\partial x_1}{p_1} = \frac{\partial U(\tilde{x})/\partial x_1}{p_2}$$

$$\frac{MU_1(\tilde{x})}{p_1} = \frac{MU_2(\tilde{x})}{p_2}$$

Это — необходимое условие первое порядка для экстремума в точке $\tilde{x}$.

**Утверждение. Необходимое условие внутреннего решения**

Пусть $\tilde{x}$ — внутреннее решение задачи потребителя. Тогда

$$MRS_{ij}(\tilde{x}) = \frac{p_i}{p_J}$$

Докажем для $N = 2$ от противного. Пусть $\tilde{x}$ — решение задачи потребителя и $MRS_{12}(\tilde{x}) \neq \frac{p_1}{p_2}$.
Не умаляя общности, пусть $MRS_{12}(\tilde{x}) > \frac{p_1}{p_2}$ (симметричный случай рассматривается аналогично). Раз $MRS_{12}(\tilde{x}) > \frac{p_1}{p_2}$, то субъективная оценка первого блага выше объективной (рыночной).
В точке $\tilde{x}$ потребитель готов отказаться от $MRS_{12}(\tilde{x})dx_1$ единиц второго блага в обмен на $dx_1$ единиц первого блага. Раз $MRS_{12}(\tilde{x}) > \frac{p_1}{p_2}$, то если он откажется от $\frac{p_1}{p_2}dx_1$ единиц второго блага в обмен на $dx_1$ единиц первого блага, то его бюджетное ограничение останется верным, а положение улучшится. Значит, $\tilde{x}$ не может быть решением задачи потребителя. ■

## Формальное решение задачи.

**1.** Через Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = U(x_1, x_2, ..., x_N) + \lambda \left( m - \sum_{i=1}^{N} p_i x_i \right)$$

Далее нужно записать условие первого порядка FOC (first order condition) для внутреннего решения:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U(\tilde{x})}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U(\tilde{x})}{\partial x_i} = \lambda p_i \quad \forall i = 1, ..., n$$

$$i \neq j : MRS_{ij} = \frac{\partial U(\tilde{x})/\partial x_i}{\partial U(\tilde{x})/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

**2.** Если предпочтения строго монотонны, то решение на бюджетной линии. В предположении внутреннего решения (для $N = 2$) можем выразить $x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$ и подставить в целевую функцию:

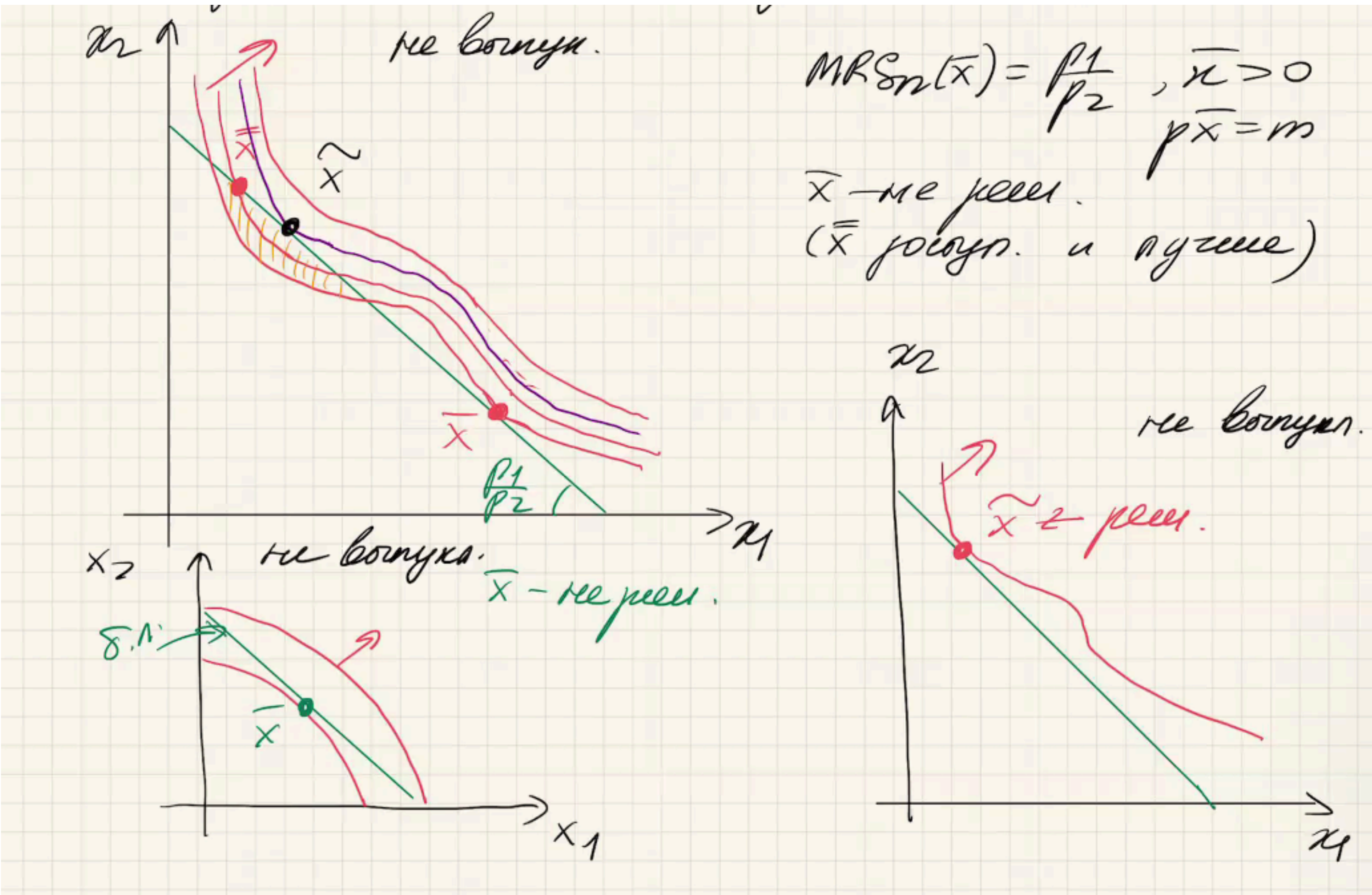
$$u\left( x_1, \underbrace{\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1}_{x_2} \right) \to \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{m}{p_1}}$$

FOC для внутреннего решения:

$$\frac{\partial U(\tilde{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial U(\tilde{x})}{\partial x_2} \cdot \left( -\frac{p_1}{p_2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U(\tilde{x})/\partial x_1}{\partial U(\tilde{x})/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow MRS_{12}(\tilde{x}) = \frac{p_1}{p_2}$$

**Будет ли $MRS_{ij}\tilde{x} = \frac{p_i}{p_j}$ достаточным условием для внутреннего решения?**

Ответ: если предпочтения не выпуклы, то нет!



**Утверждение. Критерий внутреннего решения**

Если предпочтения строго монотонны, выпуклы и представимы дифференцируемой функцией полезности, то условие $MRS_{ij}(\sim(x)) = \frac{p_i}{p_j}, i \neq j$ является необходимым и достаточным условием внутреннего решения $\tilde{x}$.
То есть, если функция полезности является квазивогнутой, то условие первого порядка является необходимым и достаточным условием внутреннего решения $\tilde{x}$.

**Пример. Функция Кобба-Дугласа**

$N = 2$, $U(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$
**1.** Во внутренних наборах ($x \gg 0$) предпочтения строго монотонны. В граничных наборах предпочтения монотонны.
**2.** Во внутренних наборах предпочтения строго выпуклы. В граничных наборах предпочтения выпуклы (кривые безразличия в граничных точках совпадают с осями).
Тогда $MRS_{12}(\tilde{x}) = \frac{p_1}{p_2}$ будет критерием условиям внутреннего решения. А в силу монотонности решение будет на бюджетной линии.

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 = m \\ MRS_{12}(x) = \frac{p_1}{p_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 = m \\ \dfrac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \dfrac{p_1}{p_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(p,m) = \frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)p_1} > 0 \\ x_2(p,m) = \frac{\beta m}{(\alpha+\beta)p_2} > 0 \end{cases}$$

Может ли решение задачи потребителя быть граничным? То есть, может ли объём потребления одного из благ быть равен нулю?
Раз предпочтения монотонны, то выбор точно на бюджетной линии. Граничных решений на бюджетной линии два — это точки пересечения бюджетной линии с осями: $\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$, $\left(0, \frac{m}{p_2}\right)$. Но полезность в этих точках равна нулю, а во всех внутренних точках она положительна. Значит, граничные точки не могут быть решениями функции Кобба-Дугласа, поэтому для решения задачи потребителя можно записать функцию полезности Кобба-Дугласа как $U(x) = \alpha \log x_1 + \beta \log x_2$.

Окончательно: для функции полезности Кобба-Дугласа $U(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ функция маршаллианского спроса выглядит так:

$$x_1(p,m) = \frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)p_1} \qquad x_2(p,m) = \frac{\beta m}{(\alpha+\beta)p_2}$$

**Особенности:**

- Спрос на благо зависит только от дохода и цены этого блага.
- Доля расходов на каждое благо в доходе потребителя постоянна:

$$\frac{p_1x_1}{m} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \frac{p_2x_2}{m} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

Если рассмотреть $\hat{U} = (u)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} x_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$, которая описывает те же самые предпочтения, только сумма степеней теперь равна 1. Тогда показатели степени — доля расходов на каждое благо в доходе потребителя.