

## Fiabilité des Systèmes

Durée : 1 heure.

Tous documents papiers autorisés.

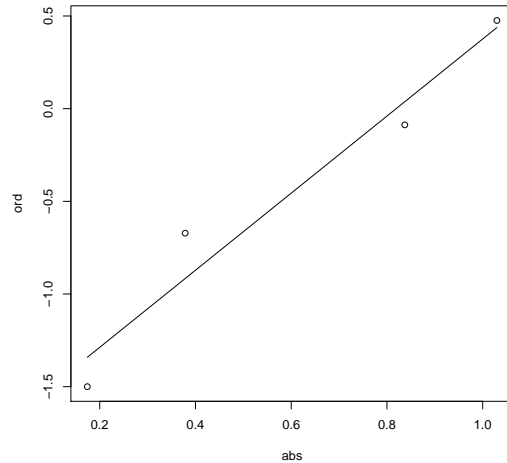
Cinq appareils identiques et indépendants ont été mis en fonctionnement à l'instant 0. On a observé leurs défaillances au bout de respectivement 3.55, 1.19, 1.46, 2.80 et 2.31 mois.

1. On suppose dans un premier temps que leur taux de défaillance est constant.
  - (a) Estimer le MTTF et le taux de défaillance de ces appareils.
  - (b) Estimer la probabilité qu'ils fonctionnent pendant au moins 6 mois.
2. On exécute le code R suivant, donnant la figure présentée page suivante.

```
> donnees<-c(3.55, 1.19, 1.46, 2.80, 2.31)
> n<-length(donnees)
> abs<-log(sort(donnees))[1:(n-1)]
> ord<-log(-log(1-(1:(n-1))/n))
> plot(abs,ord)
> reg <- lm(ord~abs)
> lines(abs,fitted.values(reg))
> cor(abs,ord)^2
[1] 0.9523223
> reg$coefficient[2]
      abs
2.079391
> exp(-reg$coefficients[1]/reg$coefficient[2])
(Intercept)
2.268694
```

Expliquer ce que fait ce code. Montrer que l'on peut déduire de ses sorties que le taux de défaillance n'est en fait pas constant et qu'un modèle dont le taux de défaillance est  $\lambda(t) = at$  est plus vraisemblable.

3. Quelle est dans ce cas la loi de probabilité de la durée de vie de ces appareils ? Exprimer sa fonction de répartition, sa densité et sa fonction de fiabilité.
4. Estimer le paramètre  $a$  à l'aide de la question 2. Donner une nouvelle estimation de la probabilité que les appareils fonctionnent pendant au moins 6 mois.



5. Ecrire la fonction de vraisemblance associée à cette observation. Calculer l'estimation de  $a$  par maximum de vraisemblance. Donner une nouvelle estimation de la probabilité que les appareils fonctionnent pendant au moins 6 mois.
6. En fait, ces 5 appareils sont issus d'un lot de 8 appareils identiques et indépendants et les 5 données sont les 5 premières dates de défaillance dans ce lot de 8. Expliquer alors dans quelle situation de censure on se trouve. Rappeler l'expression de la fonction de vraisemblance dans ce cas.
7. Dans l'hypothèse où le taux de défaillance est supposé constant, donner une nouvelle estimation de ce taux tenant compte de la censure. Puis donner une nouvelle estimation de la probabilité que les appareils fonctionnent pendant au moins 6 mois.
8. Dans l'hypothèse où le taux de défaillance est supposé de la forme  $\lambda(t) = at$ , donner l'expression de la fonction de vraisemblance. Calculer l'estimation de  $a$  par maximum de vraisemblance tenant compte de la censure. Donner une nouvelle estimation de la probabilité que les appareils fonctionnent pendant au moins 6 mois.