TP 1 Statistique bayésienne

Franck Corset

Master 2 SSD

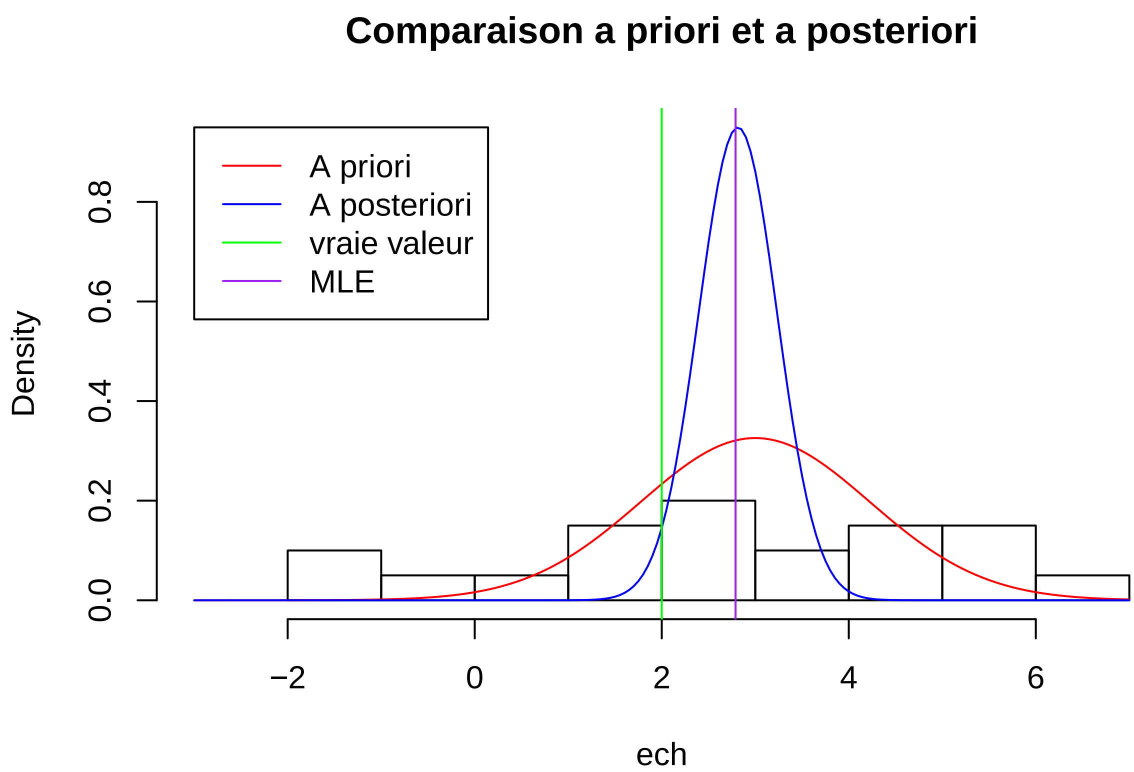
Cas gaussien

On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 connue.

On prend comme loi a priori sur μ, $\mathcal{N}(\mu_0, \tau^2)$.

Mettre en place un programme permettant de comparer la loi a posteriori et la loi a priori en faisant varier les paramètres du modèle.

```
mu<-2
sigma2<-4
n<-20 # petite taille d'échantillon

# Définition des hyperparamètres
mu0<-3   # Notre expert est parfait
tau2<-1.5 # et fiable

# Simulation d'un échantillon
ech<-rnorm(n,mu,sqrt(sigma2))

xbar<-mean(ech)
mean.post<-(n*tau2*xbar+sigma2*mu0)/(n*tau2+sigma2)
var.post<-sigma2*tau2/(n*tau2+sigma2)

infx<- -3           # valeur min sur l'axe des x
supx<- 7            # valeur max sur l'axe des x
x<-seq(infx,supx,0.05) # creation d'un vecteur du min au max par pas de 0.1

infy<-0
supy<-dnorm(mean.post,mean.post,sqrt(var.post))

hist(ech,freq=FALSE,breaks=10,xlim=c(infx,supx),main =
       "Comparaison a priori et a posteriori",ylim = c(infy,supy))
lines(x,dnorm(x,mu0,sqrt(tau2)),col="red") # loi a priori
lines(x,dnorm(x,mean.post,sqrt(var.post)),col="blue") # loi a posteriori
abline(v=mu,col="green")
abline(v=xbar,col="purple")
legend(-3,supy,legend=c("A priori", "A posteriori","vraie valeur","MLE"),
       col=c("red", "blue","green","purple"), lty=rep(1,4))
```



Cas Bernoulli

On suppose que $X \sim \mathcal{B}(1,\theta)$ (loi de Bernoulli).

On prend comme loi a priori sur θ, une loi Beta, $\mathcal{B}(a,b)$.

Etudier la loi Beta en faisant varier les paramètres a et b. Donner l'espérance et la variance.

Mettre en place un programme permettant de comparer la loi a posteriori et la loi a priori en faisant varier les paramètres du modèle.

```
theta<-.3 # paramètre que l'on cherche à estimer
n<-10 # taille d'échantillon

# Définition des hyperparamètres
moy.a.prior<- 0.3 # la moyenne a priori est égale à la vraie valeur !
var.a.prior<- 0.01 # variance a priori à faire varier...
b<- moy.a.prior-1+moy.a.prior*(1-moy.a.prior)^2/var.a.prior
a<-b*moy.a.prior/(1-moy.a.prior)

# Simulation d'un échantillon
ech<-rbinom(n,1,theta)

xbar<-mean(ech) # estimation par maximum de vraisemblance
xbar
```

```
## [1] 0.1
```

```
mean.post<-(a+n*xbar)/(b+a+n) # moyenne a posteriori
mean.post
```

```
## [1] 0.2333333
```

```
infx<- 0           # valeur min sur l'axe des x
supx<- 1            # valeur max sur l'axe des x
x<-seq(infx,supx,0.01) # creation d'un vecteur du min au max par pas de 0.01

infy<-0
supy<-6

hist(ech,freq=FALSE,breaks=10,xlim=c(infx,supx),main =
       "Comparaison a priori et a posteriori",ylim = c(infy,supy))
lines(x,dbeta(x,a,b),col="red") # loi a priori
lines(x,dbeta(x,a+n*xbar,n-n*xbar+b),col="blue") # loi a posteriori
abline(v=theta,col="green")
abline(v=xbar,col="purple")
legend(0.6,supy,legend=c("A priori", "A posteriori","vraie valeur","MLE"),
       col=c("red", "blue","green","purple"), lty=rep(1,4))
```