Exercices

1 Programmes linéaires

Modélisation et géométrie

Exercice 1. Votre régime alimentaire exige que tous les aliments que vous mangez proviennent de l'un des quatre "groupes d'aliments de base" (*gâteau au chocolat, crème glacée, soda* et *cheesecake*). À l'heure actuelle, les quatre aliments suivants sont disponibles pour la consommation : *brownies, glace au chocolat, cola* et *cheesecake à l'ananas.* Chaque brownie coûte 1€, chaque boule de glace au chocolat coûte 40 centimes, chaque bouteille de cola coûte 60 centimes, et chaque morceau de cheesecake aux ananas coûte 1,60€. Tous les jours, vous devez consommer au moins 500 calories, 120 g de chocolat, 200 g de sucre et 160 g de matières grasses. Le contenu nutritionnel par unité de chaque aliment est indiqué dans le tableau ci-dessous. Formuler un modèle de programmation linéaire qui peut être utilisé pour satisfaire vos besoins nutritionnels quotidiens à un coût minimal.

	Calories	Chocolat (g)	Sucre (g)	Graisses (g)
Brownie	400	60	40	40
Glace au chocolat (boule)	20	40	40	80
Cola (bouteille)	150	0	80	20
Cheesecake ananas (morceau)	500	0	80	100

Exercice 2. Vous avez décidé ouvrir une fabrique de bonbons. Vous envisagez de produire deux types de bonbons : *Slugger* et *Cool Breeze*, les deux composés uniquement de sucre, de noix et de chocolat. À l'heure actuelle, vous avez en stock 100 kg de sucre, 20 kg de noix, et 30 kg de chocolat. Le mélange utilisé pour faire *Cool Breeze* doit contenir au moins 20% de noix. Le mélange utilisé pour préparer *Slugger* doit contenir au moins 10% de noix et 10% de chocolat. Chaque kilo de *Cool Breeze* peut être vendu pour 25€, et chaque kilo de *Slugger* pour 20€. Formuler un PL qui vous permettra de maximiser vos revenus de vente. Rédigez-le en forme standard ou canonique.

Exercice 3. La compagnie Chandler Oil possède 5.000 barils de pétrole de type 1 et 10.000 barils de pétrole type 2. La société vend deux produits : l'essence et le fioul. Les deux produits sont fabriqués en combinant le pétrole 1 et le pétrole 2. Les niveaux de qualité des pétroles 1 et 2 sont respectivement 10 et 5. L'essence doit avoir un niveau de qualité moyen d'au moins 8 et le mazout au moins 6. La demande pour chaque produit doit être créée par publicité. Chaque dollar dépensé en publicité pour l'essence crée une demande de 5 barils, et chaque dollar dépensé pour le fioul de chauffage crée une demande de 10 barils. L'essence est vendue pour 25$ le baril, le mazout pour 20$. Formuler un PL pour aider Chandler Oil à maximiser ses profits. On admet qu'aucun pétrole de l'un ou l'autre type ne peut être acheté.

Exercice 4. Vers 435 av. J.-C., Sparte décida de constituer des troupes de réserve pour compléter son armée régulière. De nouveaux guerriers pourraient être enrôlés pour 1, 2, 3 ou 4 ans. Soit x_{1t}, x_{2t}, x_{3t} et x_{4t} le nombre de soldats enrôlés l'année t pour respectivement 1, 2, 3 et 4 ans, et soit les coûts unitaires associés c_{1t}, c_{2t}, c_{3t} et c_{4t}. Chaque année t, la force minimale de la réserve totale en soldats était fixée à R_t ; R_t a varié d'année en année.
En tant que général spartiate, vous devez trouver une politique d'enrôlement optimale pour les 10 années suivantes en résolvant le problème en tant que modèle de programmation linéaire. Pour simplifier, on pose $t = 1$ pour l'année 435 av. J.-C.

Exercice 5. Quand est-ce qu'un demi-espace contient un autre ? Sous quelles conditions

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : (a')^T x \leq b'\}$$

(on suppose que $a \neq 0$ et $a' \neq 0$). Sous quelles conditions les 2 demi-espaces coincident ?

Calculez la distance entre les 2 hyperplans parallèles $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_1\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_2\}$.

Exercice 6. Dans les problèmes suivantes dessinez l'ensemble réalisable, les lignes de niveau de la fonction-objective, en indiquant la direction de la valeur objective croissante et la solution optimale.

$$(a) \qquad \min \left\{ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0,\, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

pour les valeurs d'objectif $c = [-1; 0; 1]$, $c = [0; 1; 0]$, $c = [0; 0; -1]$.

$$(b) \qquad \min \left\{ z = 3x_1 + 4x_2 : \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \geq 36 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 45 \\ x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Exercice 7. *Meuble&Co* fabrique des bureaux et des fauteuils. Le profit de vente d'un bureau est 40€, et d'un fauteuil – 25€. Chaque bureau utilise 4 unités de bois, et chaque fauteuil en utilise 3. Seulement 20 unités de bois sont disponibles. Les contraintes de commercialisation exigent que le nombre de fauteuils soit au moins deux fois supérieur au nombre de bureaux produits. La demande de fauteuils est limitée à 6. En outre, en raison de ses engagements précédents, *Meuble&Co* doit fabriquer au moins 2 fauteuils.

Formulez le problème de maximisation du profit de *Meuble&Co* comme PL par rapport aux variables x_1 et x_2, les quantités de tables et de fauteuils réalisés.

1. Indiquez la région réalisable du PL de *Meuble&Co* en montrant les lignes définies par chaque inégalité (y compris les contraintes de signe).
2. Dénombrez tous les points extrêmes et calculer leur valeur objective.
3. Dessinez la ligne d'iso-profit qui passe par la solution optimale et indiquez la direction de la valeur objective croissante.

4. Identifiez la solution optimale et calculer les valeurs des variables à la solution optimale.
5. Indiquer toutes les contraintes "actives" à la solution optimale.
6. Supposons que la contribution d'un fauteuil augmente de 25 à 30€, trouver deux solutions optimales – points extrêmes – pour la nouvelle fonction objective.
7. Convertir le problème de depart en forme standard.

Exercice 8. Pour chaque PL suivant exprimer la solution optimale en fonction des données du problème (paramètres c, n, d, etc). Si la solution optimale n'est pas unique, il suffit de donner une solution optimale.

1. $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c^T x : \ 0 \leq x \leq \mathbf{1}\}$
2. $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c^T x : \ -\mathbf{1} \leq x \leq \mathbf{1}\}$
3. $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c^T x : \ -1 \leq \mathbf{1}^T x \leq 1\}$
4. $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c^T x : \ \mathbf{1}^T x = 1, \ x \geq 0\}$
5. $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c^T x : \ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq 1\}$
6. $\min_{u,v\in\mathbb{R}^n}\{\mathbf{1}^T u + \mathbf{1}^T v : \ u - v = c, \ u \geq 0, v \geq 0\}$
7. $\min_{u,v\in\mathbb{R}^n}\{d_1^T u + d_2^T v : \ u - v = c, \ u \geq 0, v \geq 0\}$ pour $d_1 > d_2$

Algorithme du simplexe

Exercice 9. Résoudre les programmes linéaires suivants par algorithme du simplexe

$$(1) \qquad \max_{x_1,x_2} \left\{ 4x_1 + 6x_2 : \begin{array}{r} -x_1 + x_2 \leq 11, \\ x_1 + x_2 \leq 27 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$(2) \qquad \max_{x_1,x_2,x_3} \left\{ 4x_1 + x_2 - x_3 : \begin{array}{r} x_1 + 3x_3 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Exercice 10. Les tableaux suivants ont été obtenus en cours de résolution des programmes linéaires avec deux variables non négatives x_1 et x_2 et deux contraintes d'inégalité (la fonction objective z est maximisée). Les variables d'écart (slack) s_1 et s_2 ont été ajoutées. Dans chaque cas, indiquez si le programme linéaire

(i) n'est pas borné
(ii) a une solution optimale unique
(iii) a une solution optimale cyclique
(iv) est dégénéré (dans ce cas, indiquer si l'un des éléments ci-dessus est valable).

Dans chaque cas précisez la base et la valeur courante du problème.

(a)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
1	0	3	2	0	20
0	1	-2	-1	0	4
0	0	-1	0	1	2

(b)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
1	0	-1	0	2	20
0	0	0	1	-2	5
0	1	-2	0	3	6

(c)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
1	2	0	0	1	8
0	3	1	0	-2	4
0	-2	0	1	1	0

(d)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
1	0	0	2	0	5
0	0	-1	1	1	4
0	1	1	-1	0	4

Exercice 11. Soit le programme linéaire

$$\max_{x_1,x_2,x_3} \left\{ 5x_1 + 3x_2 + x_3 : \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 15 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

et le tableau associé

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
1	0	0	5	0	1	15
0	0	$2/5$	$-1/5$	1	$-1/5$	3
0	1	$3/5$	$6/5$	0	$1/5$	3

(a) Quelle solution basique ce tableau représente-t-il ? Cette solution est-elle optimale ? Justifiez votre réponse.
(b) Ce tableau représente-t-il un optimum unique ? Sinon, trouvez une solution optimale alternative.

Exercice 12. En utilisant l'algorithme du simplex et $x_1,\ x_4$ comme base de départ, résolvez le LP suivant :

$$\max_{x_1,\ldots x_4} \left\{ 5x_1 - x_2 - x_3 + x_4 : \begin{array}{r} 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Si vous avez trouvé une solution optimale, précisez les valeurs des variables de décision et de l'objectif. Sinon, expliquez l'étape à laquelle l'algorithme du simplex a échoué, et la conclusion pour le type de problème.

Exercice 13. Une usine peut fabriquer cinq produits $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ et P_5. L'usine possède deux zones de travail : la zone A_1 d'atelier et la zone A_2 d'assemblage. Le temps requis pour traiter une unité de produit P_j dans la zone de travail A_i est p_{ij} (en heures), pour $i = 1, 2$ et $j = 1, ..., 5$. La capacité hebdomadaire (en heures) de la zone de travail A_i est C_i. La société peut vendre tout ce qu'elle produit de P_j au profit s_j, pour $j = 1, ..., 5$.

Le directeur de l'usine pense régulièrement à écrire un programme linéaire pour maximiser ses profits, mais ne l'a jamais fait pour la raison suivante : de l'expérience passée, il a observé que l'usine fonctionne mieux quand au plus deux produits sont fabriqués à la fois. Il croit que s'il utilise la programmation linéaire, la solution optimale consistera à produire tous les cinq produits. Êtes-vous d'accord avec lui ? Expliquez, en vous servant de vos connaissances en programmation linéaire.

Dualité linéaire

Exercice 14. On considère de nouveau le problème du régime mais sous une forme différente. On suppose qu'il y a 6 aliments de base (numérotés de 1 à 6), dont le contenu en vitamines A et C (unités/kg) et le coût (cents/kg) sont donnés dans le tableau suivant :

Aliments	1	2	3	4	5	6	Minimum vitamines
Contenu en vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
Contenu en vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
Coût des aliments	35	30	60	50	27	2	

1. Un consommateur essaie de se constituer un régime diététique de coût minimal, de manière à absorber au moins 9 unités de vitamine A et 19 unités de vitamine C par jours. En supposant que le régime cherché comporte y_j kg de chaque aliment, écrire le problème linéaire du consommateur diététicien amateur.
2. Un industriel de la pharmacie, fabricant de pilules, s'attaque au marché en proposant au consommateur des pilules contenant les vitamines. Mais pour le convaincre, il doit proposer les pilules à un prix inférieur à celui des aliments nécessaires pour arriver au même résultat. Soit alors x_1 et x_2 le prix des vitamines A et C en pilules (en cents/unité).

   Considérons maintenant, par exemple l'aliment numéro 5 : un kilogramme de cet aliment contient 1 unité de vitamine A et 3 unités de vitamine C, de valeur $x_1 + 3x_2$ pour le fabricant. Sachant qu'un kilogramme d'aliment 5 coûte 27 cents au consommateur, le fabricant n'aura de chances de le convaincre que si ses prix vérifient la contrainte $x_1 + 3x_2 \leq 27$. Il en sera de même pour les autres aliments...

   Formulez le problème du fabricant, qui, sous ces contraintes, cherchera à maximiser son profit, c'est à dire ici son prix de vente de la dose quotidienne de vitamines.
3. Comparez les problèmes obtenu. Trouvez la solution du problème de fabricant des pilules par l'algorithme du simplexe. Identifiez les solutions optimales du problème de consommateur, interprétez-les.

Exercice 15.

1. Montrez que l'ensemble polyédrique

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{r} x_1 + x_2 \leq 2, x_2 + x_3 \leq 2, ..., x_n + x_1 \leq 2, \\ -x_1 - ... - x_n \leq -n \end{array} \right\}$$

n'est pas vide.

2. Montrez que l'ensemble polyédrique

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \begin{array}{r} x_1 + x_2 \leq 2, x_2 + x_3 \leq 2, ..., x_n + x_1 \leq 2, \\ -x_1 - ... - x_n \leq -n{-}0.01 \end{array} \right\}$$

est vide.

Exercice 16. L'agriculteur Mr Robin possède 45 hectares de terre. Chaque hectare peut être planté avec du blé ou du maïs. Chaque hectare de blé rapporte 2000€de profit ; et chaque hectare de maïs en rapporte 3000€. Travail et les besoins en engrais par hectare pour planter du blé et du maïs sont les suivants :

	maïs	blé
Travail	3 travailleurs	2 travailleurs
Engrais	2 tonnes	4 tonnes

On suppose que 100 travailleurs et 120 tonnes d'engrais sont disponibles.

(1) Proposer une formulation LP du problème de maximisation du profit de Mr Robin.

(2) Développer le problème dual et écrivez une interprétation de celui-ci.

Exercice 17. Écrire le problème dual au problème du regime de l'exercice 1. Donner une breve interprétation de celui-ci.

Exercice 18. Une usine produit, sur deux chaînes, des appareils électroniques. En raison de différences importantes dans les procédés de fabrication, les temps nécessaires aux machines outils "fabrication" (FAB) et "finition-réglage" (FIR) pour traiter un appareil diffèrent sensiblement sur chaque chaîne, avec des prix de revient eux aussi sensiblement différents. L'élaboration d'un appareil sur la chaîne 1 nécessite 3 heures de FAB et 1 heure de FIR, pour un prix de revient unitaire de 20K€, tandis que la 2ème chaîne le produit pour 60K€ avec 1 heure de FAB et 2 heures de FIR. La machine FAB est disponible 60 heures par mois, et la machine FIR 70 heures.

1. La demande étant de 30 appareils par mois au moins, écrire le problème d'OL permettant de déterminer le plan de production (charges x_1 et x_2 des chaînes) de coût minimal.
2. Écrire et interpreter son dual.
3. Quel problème est plus adapté pour être résolu par l'algorithme du simplexe ? Trouver la solution optimale de ce problème (primal ou dual, à vous de decider) et reconstruire la solution du problème complémentaire.

Exercice 19. Soit PL

$$\min \left\{ 2x_2 - 4x_3 : \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Montrez que $x = [1; 1; 1]$ est une solution optimale.

Exercice 20. Expliquez comment vous allez résoudre le problème suivant en utilisant l'OL : étant donné deux polyèdres

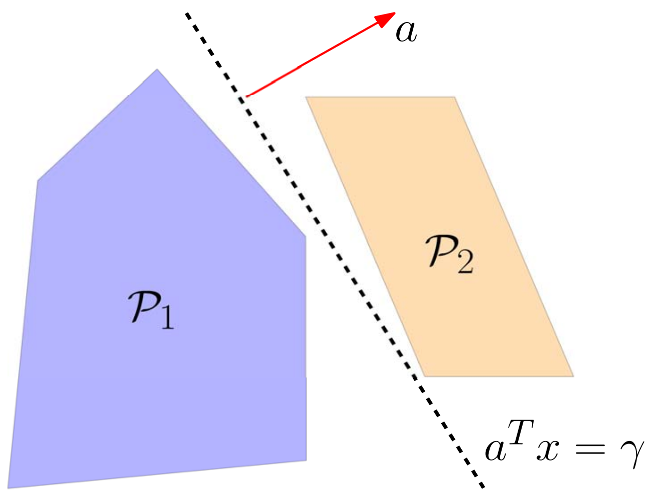
$$\mathcal{P}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \quad \mathcal{P}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx \leq d\},$$

vous devez soit montrer que $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, soit trouver un point dans $\mathcal{P}_1$ qui n'est pas dans $\mathcal{P}_2$. On suppose données les matrices $A, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et les vecteurs $b, d \in \mathbb{R}^m$.

Exercice 21. Proposez une méthode de construction d'un hyperplan qui sépare deux polyèdres

$$\mathcal{P}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \quad \mathcal{P}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx \leq d\}.$$

(on suppose que l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ soit vide.)



Votre méthode doit rendre un vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$a^T x < \gamma \; \forall x \in \mathcal{P}_1, \text{ et } a^T x < \gamma \; \forall x \in \mathcal{P}_2.$$

Réduction aux problèmes linéaires

Exercice 22. Formulez les problèmes suivantes comme programmes linéaires. Pour chaque programme donner une forme canonique ou standard du problème (assemblez avec soin la matrice A du problème). Dans tous les problèmes $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $d \in \mathbb{R}^m$.

1. $\min_{z\in\mathbb{R}^n}\{\|Cz-d\|_1 : \|z\|_\infty \le 1\}$
2. $\min_{z\in\mathbb{R}^n}\{\|z\|_1 : \|Cz-d\|_\infty \le 1\}$
3. $\min_{z\in\mathbb{R}^n} \|Cz-d\|_1 + r\|z\|_\infty$, avec $r>0$
4. $\min_{z\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \max\{0, c_i^T z + d_i\}$, où c_i^T sont les lignes de C
5. $\min_{z\in\mathbb{R}^n} \{\|z\|_1 : \|Cz-d\|_\infty \le r\}$, $r>0$
6. $\min_{z\in\mathbb{R}^n} r\|Cz-d\|_\infty + \|z\|_1$, $r>0$.

Exercice 23. On considère le problème d'optimisation en $x\in\mathbb{R}$:

$$\min\{c^T x : \|Ax+b\|_1 \le 1\},$$

où $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$ et $c\in\mathbb{R}^n$.

1. Formuler le problème comme un PL avec des contraintes d'inégalité.
2. Dérivez le problème linéaire dual, et montrez qu'il est équivalent au problème

$$\max\{b^T z - \|z\|_\infty : A^T z + c = 0\}.$$

Quel est le lien de z optimal et de la solution optimale du problème linéaire dual.

Exercice 24. On considère le problème PM suivant en $x\in\mathbb{R}^n$:

$$\min\{\|x\|_1 : \|Ax-b\|_\infty \le \gamma\}.$$

1. Formuler le problème comme un PL avec des contraintes d'inégalité.
2. Dérivez le problème linéaire dual, vérifiez qu'il est équivalent au problème

$$\max\{b^T z - \gamma\|z\|_1 : \|A^T z\|_\infty \le 1\}.$$

2 Programmes convexes

Fonctions et ensembles convexes
Exercice 25. On définit la dimension d'ensemble X comme la dimension du plus petit ensemble affine (plan dans l'espace) qui contient X.

Dans la liste ci-dessous donnez la dimension de chaque ensemble et indiquez si l'ensemble est convexe.

1. $\mathbb{R}^n$
2. $\{0\}$
3. $\{x\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n i x_i = 0\}$
4. $\{x\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n i x_i \le 0\}$

5. $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n i x_i \geq 0\}$
6. $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n i x_i^2 = 1\}$
7. $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n i x_i^2 \leq 1\}$
8. $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n i x_i^2 \geq 1\}$
9. $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$
10. $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| - |x_2| \leq 1\}$
11. $\{x \in \mathbb{R}^2 : -|x_1| - |x_2| \leq 1\}$

Exercice 26. Cochez les fonctions convexes dans la liste ci-dessous :
— $f(x) \equiv 1$ sur $\mathbb{R}$
— $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$
— $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$
— $f(x) = -|x|$ sur $\mathbb{R}$
— $f(x) = -|x|$ sur $\mathbb{R}_+ = \{x : x \geq 0\}$
— $\exp\{x\}$ sur $\mathbb{R}$
— $\exp\{x^2\}$ sur $\mathbb{R}$
— $\exp\{-x^2\}$ sur $\mathbb{R}$
— $\exp\{-x^2\}$ sur $\{x : x \geq 100\}$

Exercice 27. Vérifiez que les fonctions suivantes sont convexes sur les domaines indiqués :
— $\frac{x^2}{y}$ on $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$
— $\ln(\exp\{x\} + \exp\{y\})$ sur $\mathbb{R}^2$

Dualité de Lagrange
Exercice 28. Trouver l'expression analytique des fonctions

1. $f(z) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{2} x^T x - z^T x\right]$
2. $f(z) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{2} x^T B^T B x - z^T x\right]$, avec B tel que $B^T B$ est inversible.

Exercice 29. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $G \subset \mathbb{R}^n$ convexe et fermé. On appelle $x_* = \pi_G(a)$ *projection (Euclidienne) de y sur G* si x_* est la solution optimale de problème

$$\min_x \{\|a - x\|_2 : x \in G\}.$$

Calculez les projections dans les cas suivants :
— $G = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$
— $G = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, ..., n\}$
— $G = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$
— $G = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$

Exercice 30. Soit le problème d'optimization lineaire

$$\min_x \{c^T x \;\; Ax \le b\}$$

avec la matrice A $m \times n$ et soit x^* une solution optimale. Cela implique que x^* est un minimiseur de la fonction convexe et différentiable $f(x) = c^T x$ sous les contraintes convexe et différentiables $Ax \le b$. Ainsi, les conditions nécessaires et suffisantes de Karush-Kuhn-Tucker sont satisfaites en x^*.

Que signifient ces conditions en termes de A, b, c ?

Exercice 31. Trouver le minimum de la fonction linéaire

$$f(x) = c^T x$$

sur l'ensemble

$$B_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \le 1\};$$

où p, $1 < p < \infty$, est le paramètre. Qu'arrive-t-il quand le paramètre devient 0.5 ?

Exercice 32. Soit $a_1, ..., a_n > 0$. Résoudre le problème d'optimisation

$$\min_x \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i^2} : \; x > 0, \; \sum_i x_i \le 1 \right\}$$

Exercice 33.

1. On considère le problème de moindres carrés sous contrainte de norme ℓ_1 :

$$\min_x \left\{ \tfrac{1}{2}(Ax - b)^T (Ax - b) : \; \|x\|_1 \le r \right\} \qquad (LS_C)$$

   où $r > 0$ est un paramètre. Écrire le problème dual de (LS$_C$) (pour simplifier, on supposera que $A^T A$ est inversible).

2. Soit

$$\min_x \; \left[\tfrac{1}{2}(Ax - b)^T (Ax - b) + \kappa \|x\|_1 \right] \qquad (LS_P)$$

   On écrira (LS$_P$) sous la forme équivalente, en introduisant une variable supplémentaire :

$$\min_{x,v} \left\{ \tfrac{1}{2}(Ax - b)^T (Ax - b) + \kappa v : \; \|x\|_1 - v \le 0 \right\} \qquad (LS'_P)$$

   Écrivez le problème dual de (LS$'_P$), comparez-le au dual de (LS$_C$).