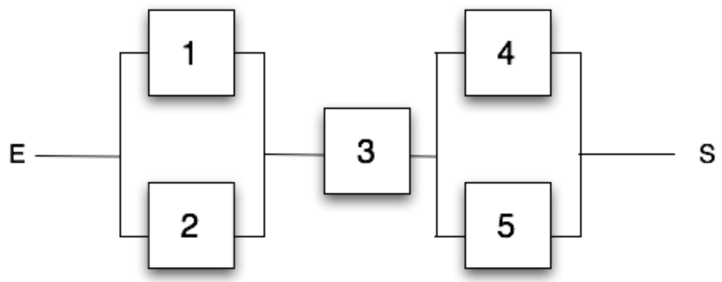
Master 2 de Statistique et Science des Données



Fiabilité des Systèmes
Première partie

Notes de cours

Olivier Gaudoin

olivier.gaudoin@univ-grenoble-alpes.fr

Table des matières

Chapitre 1

Maîtrise des risques, sûreté de fonctionnement et fiabilité

Ces dernières années, les problèmes liés à la **maîtrise des risques** et la **sûreté de fonctionnement** ont vu leur importance et leur retentissement considérablement augmenter.

Exemples :

- risque environnemental et climatique : canicules (2003, 2018, 2019 en France), incendies (Grèce et Californie en 2018, Amazonie 2019, Notre Dame de Paris 2019), inondations, tsunamis (2004, 2011), ouragans (Katrina 2005, Irma 2017, Dorian 2019), tremblements de terre (Haïti 2010, Katmandou 2015, Italie 2016),...
- risque sanitaire : grippe aviaire, grippe A, Chikungunya, virus Ebola, ...
- risque industriel : explosion de la navette spatiale Columbia (2003), de la plateforme pétrolière Deepwater Horizon (2010), du lanceur Falcon 9 de Space X (2016), accidents d'avion ou de train (Brétigny sur Orge, 2013), accidents nucléaires de Tchernobyl (1986) et Fukushima (2011), effondrement du pont de Gènes (2018), incendie de l'usine Lubrizol de Rouen (2019),...
- risque financier : crise des subprimes, faillite de Lehmann-Brothers (2008), affaires Kerviel (2008) et Madoff (2008), ...
- risque géopolitique : guerre, terrorisme, ...

Plus prosaïquement, les problèmes de fiabilité surgissent également dans la vie de tous les jours :

- grande panne électrique à la gare Montparnasse (2018)
- panne de réseaux téléphoniques, de distributeurs de billets,...
- panne de voiture, retard de train,...
- panne de la machine à café ou du photocopieur de l'UFR,...

Un **risque** associe une perte potentielle quantifiable et une probabilité d'occurrence d'un événement indésirable. L'**analyse des risques** a pour objectif d'évaluer et d'anticiper les risques, de mettre en place des mesures de prévention et de réduction de risques (systèmes de surveillance et d'alerte par exemple) et de réaliser un compromis entre le gain en sûreté obtenu et le coût de ces mesures. L'opinion publique accepte de moins en moins la notion de risque et demande des niveaux de sûreté et de sécurité de plus en plus élevés. Pourtant, le risque zéro n'existe pas.

Toutes les entreprises et les collectivités locales, nationales et internationales, sont concernées par la mesure, la gestion et la prévention des risques. Une des composantes principales de la gestion des risques est la sûreté de fonctionnement.

Un **système** est un ensemble de composants en interaction destiné à accomplir une tâche donnée. C'est le cas par exemple des systèmes de production, systèmes de transport, systèmes informatiques, etc...

La **sûreté de fonctionnement** (SdF, en anglais *dependability*) d'un système est la propriété qui permet à ses utilisateurs de placer une confiance justifiée dans le service qu'il leur délivre. On dit aussi que la SdF est la science des défaillances.

Un système subit une **défaillance** quand il ne peut plus délivrer le service attendu. La **panne** est l'état du système résultant d'une défaillance.

La sûreté de fonctionnement comprend 4 composantes : la fiabilité, la disponibilité, la maintenabilité et la sécurité.

- La **fiabilité** (*reliability*) est la caractéristique du système exprimée par la probabilité qu'il délivre le service attendu dans des conditions données et pendant une durée déterminée. La fiabilité exprime l'aptitude à la continuité du service (ex : envoyer une sonde sur Mars).
- La **disponibilité** (*availability*) est exprimée par la probabilité que le système délivre le service attendu dans des conditions données et à un instant donné. La disponibilité caractérise donc l'aptitude du système à fonctionner quand on a besoin de lui (ex : avoir du réseau quand on veut téléphoner).
- La **maintenabilité** (*maintainability*) caractérise l'aptitude du système à être réparé quand il est défaillant, ou à évoluer.
- La **sécurité** (*safety*) caractérise l'aptitude du système à ne pas encourir de défaillances catastrophiques.

Un **système non réparable** est un système qui est mis au rebut dès qu'il tombe en panne. C'est le cas des petits systèmes (par exemple des ampoules) ou des systèmes qui coûtent plus cher à réparer qu'à remplacer.

Un **système réparable** est un système qui, après sa défaillance, peut être remis en état de marche par des actions de réparation ou maintenance. C'est le cas de quasiment tous les systèmes complexes (véhicules, usines, etc.). Dans la plupart des cas, un système réparable est constitué de composants non réparables. Quand un composant tombe en panne, on le remplace par un neuf, mais le système complet, lui, n'est pas remis à neuf.

Dans les systèmes réparables, on distingue en général les **systèmes matériels**, qui ont tendance à se dégrader à cause de l'usure, et les **systèmes logiciels**, qui ont tendance à s'améliorer du fait des corrections et mises à jour appliquées.

La maintenance des systèmes est de deux types :

- La **maintenance corrective** ou **réparation** remet en fonctionnement un système après sa défaillance.

- La **maintenance préventive** est effectuée alors que le système fonctionne et a pour but de retarder l'occurrence des défaillances futures.

Par exemple, une voiture subit une maintenance corrective après un accident et une maintenance préventive lors des révisions.

L'optimisation de la maintenance est un enjeu industriel majeur. Par exemple, après le crash de l'Airbus d'Air France Rio-Paris en 2009, les sondes Pitot (qui mesurent la vitesse de l'avion par rapport à l'air) ont été incriminées. Les autorités de sûreté aérienne ont recommandé de remplacer 2 sondes sur 3 et de modifier la périodicité de leur maintenance. De manière générale, l'optimisation de la maintenance se base sur des études de fiabilité, sans attendre de défaillance catastrophique !

Dans les études de fiabilité, on distingue les approches boîte noire et boîte blanche :

- **Approche boîte blanche** ou **structurelle** : on considère qu'un système complexe est constitué de composants et que sa fiabilité dépend à la fois de la fiabilité de ses composants et de la façon dont le bon fonctionnement ou la panne de chaque composant influe sur le bon fonctionnement ou la panne du système tout entier.

- **Approche boîte noire** ou **globale** : on considère le système comme un tout, qu'on ne cherche pas à décomposer en composants. On s'intéresse alors à la suite des défaillances et réparations successives du système.

Il existe des méthodes pour construire des systèmes au fonctionnement sûr : tolérance aux fautes, redondance, prévention des défaillances, etc. Mais il faut aussi des méthodes pour évaluer la SdF des systèmes, prévoir les défaillances ultérieures, et vérifier que les objectifs de fiabilité ont bien été atteints.

Une étude de fiabilité classique comprend deux parties :

— La **modélisation probabiliste**. Construite à partir d'hypothèses sur le mécanisme du hasard engendrant les défaillances, elle permet de calculer toutes les caractéristiques de SdF des composants (qui vont être définies dans le chapitre suivant) : fiabilité, MTTF, taux de défaillance, etc. Elle permet également de calculer la fiabilité d'un système à partir de sa structure et de la fiabilité de ses composants.

— L'**analyse statistique**. Basée sur le retour d'expériences, c'est-à-dire l'observation des défaillances et réparations, elle permet de valider les hypothèses probabilistes retenues et d'estimer les valeurs numériques des caractéristiques de SdF, pour in fine prendre les décisions adéquates pour le système étudié (comme par exemple de changer une politique de maintenance).

Ce cours abordera les éléments essentiels de ces deux aspects. Dans une première partie probabiliste, nous commencerons par définir les principales mesures de fiabilité, pour les systèmes non réparables comme pour les systèmes réparables. Puis nous présenterons les lois de probabilités utilisées usuellement en fiabilité, principalement la loi exponentielle et la loi de Weibull. Enfin, nous expliquerons comment calculer la fiabilité d'un système en fonction de sa structure.

Dans une seconde partie statistique, nous étudierons comment évaluer la fiabilité d'un système à partir de l'observation de ses défaillances. Cela requiert des méthodes d'estimation et de tests statistiques, que l'on appliquera à des échantillons de lois exponentielle et de Weibull. Enfin, on abordera la problématique des données censurées, consistant à adapter les méthodes précédentes au cas où les données observées sont incomplètes.

Par exemple, le tableau 1.1 donne les durées de fonctionnement successives (en heures) d'appareils d'air conditionné dans 13 Boeing 720. Un appareil défaillant est remplacé par un neuf. A l'aide de ces observations, on souhaite déterminer une loi de probabilité vraisemblable pour la durée de vie de ces appareils, ce qui permettra d'estimer leur fiabilité. On pourra alors mettre en place un plan de maintenance approprié.

$n°$	Durées de fonctionnement
1	194, 15, 41, 29, 33, 181
2	413, 14, 58, 37, 100, 65, 9, 169, 447, 184, 36, 201, 118, 34, 31, 18, 18, 67, 57, 62, 7, 22, 34
3	90, 10, 60, 186, 61, 49, 14, 24, 56, 20, 79, 84, 44, 59, 29, 118, 25, 156, 310, 76, 26, 44, 23, 62, 130, 208, 70, 101, 208
4	74, 57, 48, 29, 502, 12, 70, 21, 29, 386, 59, 27, 153, 26, 326
5	55, 320, 56, 104, 220, 239, 47, 246, 176, 182, 33, 15, 104, 35
6	23, 261, 87, 7, 120, 14, 62, 47, 225, 71, 246, 21, 42, 20, 5, 12, 120, 11, 3, 14, 71, 11, 14, 11, 16, 90, 1, 16, 52, 95
7	97, 51, 11, 4, 141, 18, 142, 68, 77, 80, 1, 16, 106, 206, 82, 54, 31, 216, 46, 111, 39, 63, 18, 191, 18, 163, 24
8	50, 44, 102, 72, 22, 39, 3, 15, 197, 188, 79, 88, 46, 5, 5, 36, 22, 139, 210, 97, 30, 23, 13, 14
9	359, 9, 12, 270, 603, 3, 104, 2, 438
10	50, 254, 5, 283, 35, 12
11	130, 493
12	487, 18, 100, 7, 98, 5, 85, 91, 43, 230, 3, 130
13	102, 209, 14, 57, 54, 32, 67, 59, 134, 152, 27, 14, 230, 66, 61, 34

Table 1.1 – Durées de fonctionnement d'appareils d'air conditionné dans des Boeing 720

Chapitre 2

Les mesures de fiabilité

Les mesures de fiabilité sont différentes suivant que les systèmes concernés sont réparables ou non réparables.

2.1 Mesures pour les systèmes non réparables

Comme on l'a vu, un système non réparable est un système qui est mis au rebut dès qu'il tombe en panne. Les considérations sur les réparations ou corrections n'ont donc pas lieu d'être ici. Le seul point important est la **date de panne**, appelée aussi **instant de défaillance**, **durée de vie** ou **durée de bon fonctionnement** du système. Comme celle-ci n'est pas prévisible avec certitude à l'avance, on la modélise par une variable aléatoire, que l'on note X. Une durée étant un réel positif, cette variable aléatoire est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Si on s'intéressait à des systèmes pour lesquels le temps est exprimé par un nombre entier, comme un nombre de sollicitations, X serait à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pourrait aussi prendre en compte la possibilité que le système soit en panne à l'instant initial, ce qui voudrait dire que $\mathbb{P}(X = 0) \neq 0$. Nous ne nous placerons ici dans aucun de ces deux cas. Par conséquent, X sera une variable aléatoire continue à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Sa loi de probabilité est définie par :

- sa **fonction de répartition** $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$,
- sa **densité** $f(x) = F'(x)$.

Plus la durée de fonctionnement est grande, meilleure est la fiabilité du système. Donc on choisit de définir la fiabilité du système à l'instant x comme la probabilité que le système ne soit pas encore tombé en panne à l'instant x ou encore comme la probabilité que le système fonctionne sans défaillance entre 0 et x.

Définition 1 *La* **fiabilité** *d'un système non réparable est la fonction du temps R (R pour* **reliability***) définie par :*

$$\forall x \geq 0, \quad R(x) = \mathbb{P}(X > x) \tag{2.1}$$

On a évidemment $R(x) = 1 - F(x)$ et $R'(x) = -f(x)$. R est donc une fonction décroissante. Cela traduit le fait naturel que l'aptitude au bon fonctionnement d'un système non réparable diminue avec le temps. Mais la monotonie de cette fonction fait que la fiabilité n'est pas suffisamment souple pour pouvoir clairement prendre en compte la diversité des types d'usure. Aussi la principale mesure de fiabilité n'est pas la fonction de fiabilité mais le taux de défaillance.

Définition 2 *Le* **taux de défaillance** *ou* **taux de panne** *ou* **taux de hasard** *d'un système non réparable est la fonction du temps h définie par :*

$$\forall x \geq 0, \quad h(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta x \mid X > x) \tag{2.2}$$

Dans cette expression, la probabilité considérée est la probabilité que le système tombe en panne entre x et $x + \Delta x$ sachant qu'il a bien fonctionné entre 0 et x. Notons que la fiabilité est une probabilité mais que le taux de défaillance n'en est pas une : $h(x)$ peut être supérieur à 1.

L'interprétation du taux de défaillance est liée à celle de la densité de la façon suivante. On sait que :

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \big[\mathbb{P}(X \leq x + \Delta x) - \mathbb{P}(X \leq x)\big] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta x) \end{aligned}$$

On a donc, pour Δx "petit" :

$$f(x)\,\Delta x \approx \mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta x)$$

et :

$$h(x)\,\Delta x \approx \mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta x \mid X > x)$$

La quantité $f(x)\,\Delta x$ peut donc être considérée comme la probabilité de défaillance juste après l'instant x alors que $h(x)\,\Delta x$ peut être considérée comme la probabilité de défaillance juste après l'instant x *sachant que* le système n'est pas tombé en panne avant x. Il y a donc une notion d'instantanéité dans $f(x)$ et une notion de durée dans $h(x)$ (comme dans $R(x)$).

On peut illustrer cette différence en comparant :

- la probabilité qu'un homme meure entre 100 et 101 ans ;
- la probabilité qu'un homme meure entre 100 et 101 ans sachant qu'il a vécu jusqu'à 100 ans.

La première (liée à la densité) est très faible : on a de très fortes chances de mourir avant 100 ans. La seconde (liée au taux de défaillance) est évidemment très forte.

On conçoit donc que le taux de défaillance est une mesure pratique de l'usure ou du vieillissement. Un taux de défaillance croissant correspond à un système qui se dégrade, tandis qu'un taux de défaillance décroissant correspond à un système qui s'améliore avec le temps.

Il est facile d'établir les liens entre le taux de défaillance et la fiabilité :

$$\begin{aligned}
h(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta x \mid X > x) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{\mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta x \cap X > x)}{\mathbb{P}(X > x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{\mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta x)}{\mathbb{P}(X > x)} \\
&= \frac{1}{R(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[F(x + \Delta x) - F(x) \right] \\
&= \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = -\frac{R'(x)}{R(x)} = -\frac{d}{dx} \ln R(x)
\end{aligned}$$

En intégrant et en prenant comme condition initiale $R(0) = 1$, car on a supposé que le système fonctionne à l'instant initial, on obtient la *formule d'exponentiation* :

$$R(x) = \exp\left(-\int_0^x h(u)\, du \right) \tag{2.3}$$

Puisque $f(x) = -R'(x)$, la densité de X s'exprime à l'aide du taux de défaillance sous la forme :

$$f(x) = h(x) \exp\left(-\int_0^x h(u)\, du \right) \tag{2.4}$$

Définition 3 *Le* **taux de défaillance cumulé** *ou* **taux de hasard cumulé** *d'un système non réparable est la fonction du temps H définie par :*

$$\forall x \geq 0, \quad H(x) = \int_0^x h(u)\, du = -\ln R(x) \tag{2.5}$$

La formule d'exponentiation s'écrit donc aussi $R(x) = \exp(-H(x))$.

Toutes les grandeurs caractéristiques de la loi de probabilité de X s'expriment à l'aide de la fonction h. Le taux de défaillance caractérise donc la loi d'une durée de vie. C'est pourquoi, en pratique, **construire un modèle de fiabilité de systèmes non réparables revient à se donner une forme particulière pour le taux de défaillance**.

Le choix de cette forme est basé sur des considérations de modélisation ou des constatations expérimentales. De nombreuses études pratiques ont montré que le graphe du taux de défaillance d'un système non réparable simple a très souvent une **forme de baignoire**, comme dans la figure 2.1. En effet, h se décompose dans ce cas en 3 parties :

- La **période de jeunesse** : quand un système est neuf, on observe souvent des défaillances précoces, dues à des défauts intrinsèques ou des fautes de conception. Le risque de défaillance est donc assez fort au tout début de la vie du système. Ensuite il diminue car, s'il y a des défauts initiaux, ils vont se manifester tôt. h est donc d'abord décroissant. C'est le **rodage** pour les matériels mécaniques et le **déverminage** pour les matériels électroniques. C'est aussi la **mortalité infantile** pour les êtres vivants.

- La **vie utile** : pendant cette période, le taux de défaillance est constant et les défaillances sont purement accidentelles.
- Le **vieillissement** : h se remet à croître car le risque de défaillance va finir par augmenter à cause de l'usure du système.

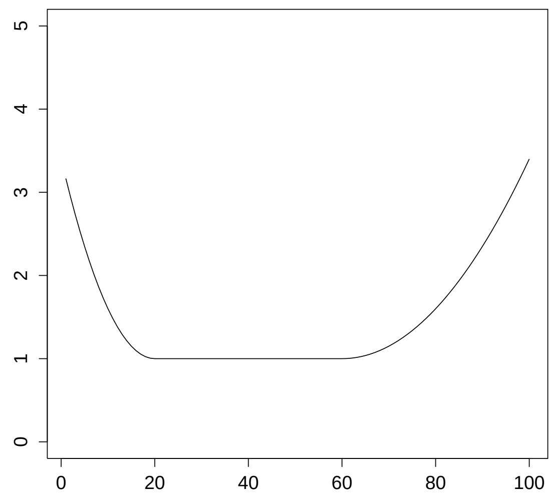


FIGURE 2.1 – Taux de défaillance en forme de baignoire

Du point de vue du consommateur cherchant à s'assurer contre les pannes du système, il est impératif d'avoir une garantie à court terme pour se prémunir contre les défauts de jeunesse. On peut souhaiter avoir une garantie à long terme contre le vieillissement, mais cela va coûter cher et les contrats ne garantissent en général pas les problèmes d'usure. En revanche, une garantie à moyen terme n'est pas forcément utile car, si le système a passé la période de jeunesse, il subira en général peu de défaillances en période de vie utile. Naturellement, pour pouvoir fixer de façon optimale les durées de garantie, il faut connaître ou estimer les dates de transition entre les différentes périodes, ce qui est généralement difficile.

La dernière mesure fondamentale de fiabilité est le MTTF.

Définition 4 *Le* **MTTF** *(***Mean Time To Failure***) d'un système non réparable est la durée de vie moyenne, ou durée moyenne de bon fonctionnement avant sa défaillance :*

$$\mathrm{MTTF} = \mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, dx \tag{2.6}$$

Une intégration par parties aboutit alors à :

$$\mathrm{MTTF} = \big[-x\, R(x) \big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} R(x)\, dx$$

En supposant que $R(x)$ tend vers 0 plus vite que $\frac{1}{x}$, ce qui sera toujours le cas, on obtient une formule plus usuelle pour le MTTF :

$$\text{MTTF} = \int_0^{+\infty} R(x)\,dx \tag{2.7}$$

2.2 Mesures pour les systèmes réparables

Quand les systèmes sont réparables, deux cas de figure sont possibles, selon que l'on prend en compte ou pas les durées de réparation.

2.2.1 Durées de réparation comptabilisées

Le fonctionnement du système est une succession de **durées de bon fonctionnement** et de **durées de non fonctionnement** ou de **réparation**. On note traditionnellement $\{X_i\}_{i\geq 1}$ les durées de bon fonctionnement successives et $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ les durées de réparation successives.

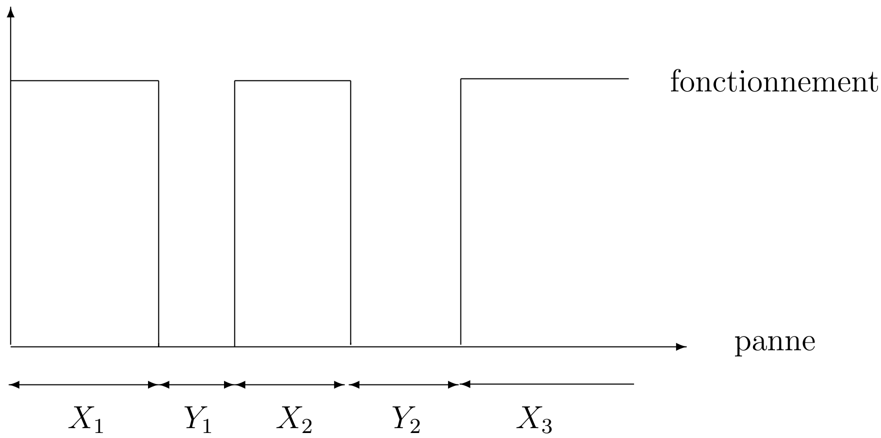


FIGURE 2.2 – Durées de bon fonctionnement et de réparation

La "durée de réparation" Y comprend en fait une durée de détection de la panne, une durée de réparation proprement dite et une durée de remise en service.

Pour une durée de réparation Y, on définit des quantités similaires à celles qui ont été définies pour une durée de bon fonctionnement X :

- La **maintenabilité** est la fonction de répartition de Y. La maintenabilité en y est la probabilité qu'un système en panne à l'instant 0 soit réparé avant l'instant y :

$$\forall y \geq 0, \quad M(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$$

- Le **taux de réparation** est défini par

$$\forall y \geq 0, \quad \mu(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y}\, \mathbb{P}(y < Y \leq y + \Delta y \mid Y > y)$$

- Le **MTTR** (**Mean Time To Repair**) est la durée moyenne de réparation :

$$\mathrm{MTTR} = \mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} [1 - M(y)]\, dy$$

Dans ce contexte, on peut toujours définir la fiabilité à l'instant x comme la probabilité que le système ne tombe pas en panne entre 0 et x. Cela signifie que l'instant de la première panne doit être supérieur à x, donc

$$\forall x \geq 0, \quad R(x) = \mathbb{P}(X_1 > x).$$

Mais on peut s'intéresser à une autre quantité particulièrement intéressante pour les systèmes réparables, la disponibilité.

Définition 5 *La* **disponibilité** *d'un système réparable est la fonction du temps A (A pour* **availability***) telle que :*

$$\forall t \geq 0, \quad A(t) = \textit{Probabilité que le système fonctionne à l'instant } t.$$

Donner une expression mathématique générale est beaucoup plus complexe pour la disponibilité que pour la fiabilité. Heureusement, il est souvent possible de donner des expressions simples de la **disponibilité asymptotique** :

$$A(\infty) = \lim_{t \to +\infty} A(t).$$

Remarque : La fiabilité implique une notion de durée (fonctionnement pendant une certaine durée) tandis que la disponibilité implique une notion d'instantanéité (fonctionnement à un instant donné).

Contrairement à ceux de $R(x)$ et $M(y)$, le sens de variation de $A(t)$ n'est pas déterminé. On a des systèmes à disponibilité croissante, d'autres à disponibilité décroissante et tous les sens de variation imaginables sont possibles.

Quand le système est remis à neuf après réparation, il est logique de supposer que X_2 a la même loi de probabilité que X_1. Plus généralement, on suppose couramment que les X_i sont indépendants et de même loi, et que les Y_i sont aussi indépendants et de même loi (mais pas la même que celle des X_i). Cela facilite grandement le calcul de la disponibilité. Mais dans la pratique, la réparation ne remet pas souvent le système à neuf, ce qui complexifie les calculs.

On parle parfois de MTBF = MTTF+MTTR (Mean Time Between Failures). Le MTBF est la durée moyenne entre deux défaillances successives, comprenant la durée moyenne de bon fonctionnement et la durée moyenne de réparation. On a alors souvent :

$$\lim_{t \to +\infty} A(t) = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR},$$

ce qui se conçoit bien intuitivement.

2.2.2 Durées de réparation non comptabilisées

En pratique, il est fréquent que les durées de réparation soient négligeables par rapport aux durées de bon fonctionnement. Il est donc intéressant de modéliser la situation où les durées de réparation sont non comptabilisées. Dans ce cas, la notion de disponibilité n'a plus aucun sens.

Dans ces conditions, on considère que l'on observe le fonctionnement d'un système réparable à partir d'un instant $T_0 = 0$. Des défaillances se produisent à des instants que l'on note $T_1, T_2, \ldots$. Après chaque défaillance, le système est réparé ou corrigé puis relancé. Le **processus des défaillances** d'un tel système réparable est défini de manière équivalente par l'un des 3 processus aléatoires suivants.

- la suite des instants de défaillance $\{T_i\}_{i \geq 1}$, avec $T_0 = 0$.
- la suite des durées inter-défaillances $\{X_i\}_{i \geq 1}$ où $\forall i \geq 1, X_i = T_i - T_{i-1}$ est la durée entre la $(i-1)^{\text{ème}}$ et la $i^{\text{ème}}$ défaillance. $T_i = \sum\limits_{j=1}^{i} X_j$.
- le processus de comptage des défaillances $\{N_t\}_{t \geq 0}$, où N_t est le nombre cumulé de défaillances survenues entre 0 et t.

La figure 2.3 illustre les quantités aléatoires ainsi définies en présentant une trajectoire quelconque du processus des défaillances.

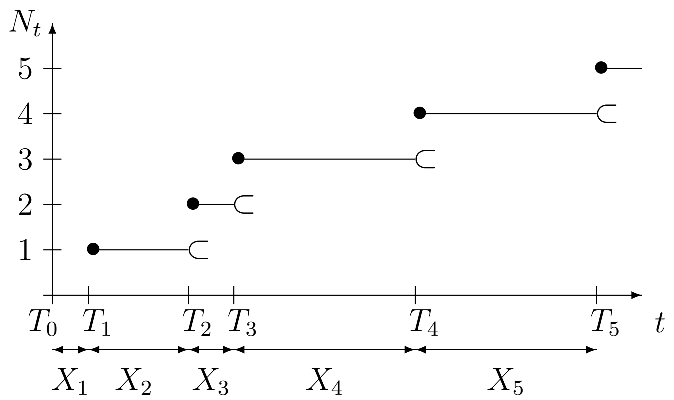


FIGURE 2.3 – Trajectoire quelconque du processus des défaillances

Si on définit la fiabilité comme précédemment, seul l'instant de la première défaillance est en jeu :

$$\forall x \geq 0, \quad R(x) = \mathbb{P}(X_1 > x) = \mathbb{P}(T_1 > x).$$

Or, pour un système réparable, on a évidemment envie de pouvoir calculer la probabilité que le système fonctionne correctement pendant une durée quelconque après n'importe quelle réparation. Aussi, on va modifier la définition de la fiabilité en considérant que la fiabilité du système à l'instant t exprime la probabilité qu'il fonctionne correctement pendant une certaine durée à partir de t. Pour être tout à fait complet, on va considérer que cette probabilité peut éventuellement dépendre de tout ce qui s'est passé depuis la mise en service du système. Mathématiquement, cela signifie que c'est une probabilité conditionnelle au nombre et aux instants des défaillances ayant précédé l'instant présent t. D'où la définition suivante.

Définition 6 *La* **fiabilité** *d'un système réparable à l'instant t, ayant subi n défaillances avant t, est la fonction R_t définie par :*

$$\begin{aligned} \forall \tau \geq 0, \quad R_t(\tau; n, t_1, \ldots, t_n) &= \mathbb{P}(T_{n+1} > t + \tau | N_t = n, T_1 = t_1, \ldots, T_n = t_n) \quad (2.8) \\ &= \mathbb{P}(N_{t+\tau} - N_t = 0 | N_t = n, T_1 = t_1, \ldots, T_n = t_n) \end{aligned}$$

Autrement dit, $R_t(\tau; n, t_1, \ldots, t_n)$ est la probabilité que le système fonctionne sans défaillances pendant une durée au moins égale à τ après t, sachant qu'il y a eu exactement n défaillances entre 0 et t, aux instants $t_1, \ldots, t_n$. La première écriture exprime que la prochaine défaillance aura lieu après $t + \tau$ et la seconde exprime qu'il n'y aura aucune défaillance entre t et $t + \tau$. On conçoit bien la définition de la fiabilité à l'aide de la figure 2.4, pour laquelle n défaillances ont eu lieu entre 0 et t.

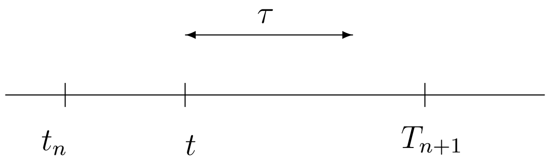


FIGURE 2.4 – Fiabilité pour une durée τ à partir de t, avec n défaillances observées

Quand on se place à l'instant t_n de la dernière défaillance, on est intéressé par la prévision de la durée X_{n+1} à attendre avant la prochaine défaillance. Sa loi de probabilité peut être influencée par le passé du processus de défaillance, donc on s'intéressera plutôt à la loi de X_{n+1} sachant $[T_1 = t_1, \ldots, T_n = t_n]$. Cette loi a pour taux de défaillance $h_{X_{n+1}|T_1=t_1,\ldots,T_n=t_n}(x)$.

Pour un système non réparable, la propension de défaillance à l'instant t est exprimée par le taux de défaillance $h(t)$. Pour un système réparable, il est logique d'exprimer la propension de défaillance à l'instant t par le taux de défaillance de la durée inter-défaillance courante à cet instant, autrement dit $h_{X_{n+1}|T_1=t_1,\ldots,T_n=t_n}(t - t_n)$. C'est ce qu'on appelle l'intensité de défaillance à l'instant t.

Définition 7 *L'***intensité de défaillance** *d'un système réparable à l'instant t est la fonction λ_t définie par :*

$$\lambda_t(n; t_1, \ldots, t_n) = h_{X_{n+1}|T_1=t_1,\ldots,T_n=t_n}(t - t_n) \quad (2.9)$$

Suivre l'intensité de défaillance au cours du temps revient donc à étudier les taux de défaillance conditionnels successifs des X_i sachant le passé. On parle alors de concaténation ou d'amalgame de taux de défaillance.

On montre que l'intensité de défaillance s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\lambda_t(n;t_1,\ldots,t_n) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\,\mathbb{P}(t < T_{n+1} \leq t+\Delta t \mid N_t = n, T_1 = t_1,\ldots,T_n = t_n)\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\,\mathbb{P}(N_{t+\Delta t} - N_t = 1 \mid N_t = n, T_1 = t_1,\ldots,T_n = t_n)\end{aligned} \quad (2.10)$$

La probabilité dans cette écriture est la probabilité que le système tombe en panne entre t et $t+\Delta t$ sachant tout le passé du processus des défaillances à l'instant t.

L'intensité de défaillance est aux systèmes réparables ce que le taux de défaillance est aux systèmes non réparables. Une intensité de défaillance croissante correspond à une fréquence de défaillance qui augmente avec le temps, donc à un système qui s'use malgré les réparations. Une intensité de défaillance décroissante correspond à un système qui s'améliore avec le temps. A priori, les matériels rentrent dans la première catégorie et les logiciels dans la seconde.

Définition 8 *Le* **MTTF** *d'un système réparable à l'instant t est la durée moyenne d'attente de la prochaine défaillance à l'instant t, sachant tout le passé du processus des défaillances à cet instant :*

$$\mathrm{MTTF}_t(n;t_1,\ldots,t_n) = \mathbb{E}\left[T_{n+1} - t \mid N_t = n, T_1 = t_1,\ldots,T_n = t_n\right] \quad (2.11)$$

Les résultats suivants sont les équivalents pour les systèmes réparables des formules (2.3) et (2.7).

$$R_t(\tau;n,t_1,\ldots,t_n) = \exp\left(-\int_t^{t+\tau}\lambda_u(n;t_1,\ldots,t_n)\,du\right) = \exp\left(-\int_0^{\tau}\lambda_{t+u}(n;t_1,\ldots,t_n)\,du\right) \quad (2.12)$$

$$\mathrm{MTTF}_t(n;t_1,\ldots,t_n) = \int_0^{+\infty} R_t(\tau;n,t_1,\ldots,t_n)\,d\tau \quad (2.13)$$

Une autre mesure importante de fiabilité des systèmes réparables est le nombre moyen de défaillances survenues à chaque instant. C'est ce qu'on appelle la fonction moyenne.

Définition 9 *La* **fonction moyenne** *(en anglais* mean value function*) du processus des défaillances est la fonction m définie par :*

$$\forall t \geq 0, \quad m(t) = \mathbb{E}[N_t] \quad (2.14)$$

Pour le cas où on ne prend pas en compte les durées de réparation, toutes les mesures de fiabilité des systèmes réparables s'expriment à l'aide de l'intensité de défaillance. Par conséquent, **construire un modèle de fiabilité des systèmes réparables revient à proposer une forme particulière pour l'intensité de défaillance**.

Les 3 classes de modèles les plus simples sont caractérisées par les formes d'intensité suivantes :

Processus de Poisson homogènes (HPP)	$\lambda_t(n; t_1, \ldots, t_n) = \lambda$
Modèles à durées inter-défaillances exponentielles (ETBF)	$\lambda_t(n; t_1, \ldots, t_n) = \lambda_{n+1}$
Processus de Poisson non homogènes (NHPP)	$\lambda_t(n; t_1, \ldots, t_n) = \lambda(t)$

2.3 Evaluation des mesures de fiabilité

On peut maintenant préciser le contenu des deux parties d'une étude classique de fiabilité, citées au chapitre 1. Pour évaluer la fiabilité, le taux de défaillance, la disponibilité ou l'intensité de défaillance d'un système, il faut passer par 2 étapes.

1. **Modélisation probabiliste**. A partir d'hypothèses sur le fonctionnement du système, l'effet des réparations et la nature du phénomène aléatoire ayant engendré les défaillances, il faut proposer des modèles réalistes pour les variables aléatoires impliquées. Par exemple, il faut proposer une loi de probabilité vraisemblable pour la durée de bon fonctionnement X d'un système non réparable ou pour la suite $\{X_i\}_{i\geq 1}$ des durées inter-défaillances d'un système réparable.

2. **Analyse statistique**. Les modèles proposés ont des paramètres inconnus qu'il va falloir estimer. Pour cela, il faut observer le fonctionnement des systèmes, relever les instants des défaillances et des réparations, et effectuer une analyse statistique de ces données (qu'on appelle le **retour d'expériences**). On va pouvoir ainsi estimer les caractéristiques de fiabilité des systèmes et utiliser ces estimations pour prendre des décisions qui peuvent être cruciales en termes de sûreté de fonctionnement. Par exemple, il faut décider si un produit est suffisamment fiable pour que l'on puisse le mettre en vente sans risque. Ou bien, on mettra en place un plan de maintenance ayant pour but de prolonger la durée de vie des systèmes, à un coût raisonnable. Pour effectuer les estimations, plusieurs méthodes sont possibles, mais on utilise la plupart du temps la méthode du **maximum de vraisemblance**.

Par exemple, dans le cas des Boeing, un appareil défaillant est remplacé par un neuf. On s'attend donc à ce que les durées de vie dans un Boeing donné soient des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Il faut le vérifier, trouver une loi de probabilité adaptée (exponentielle, Weibull ou autre), et estimer ses paramètres. Il est intéressant également de déterminer si cette loi de probabilité est la même pour les 13 appareils. On doit estimer la fiabilité, le taux de défaillance et le MTTF de ces appareils. Au final, les estimations effectuées doivent permettre de prendre la décision de passer ou non à une nouvelle gamme d'appareils. On peut aussi décider de réparer les appareils au lieu de les remplacer par des neufs.

Chapitre 3

Les lois de probabilité usuelles en fiabilité

On a dit que la fiabilité d'un système non réparable est caractérisée par la loi de probabilité de sa durée de bon fonctionnement X. Quand on s'intéresse, dans une approche boîte blanche, à un système complexe constitué de composants interconnectés, on va chercher à déterminer la loi de X en fonction des lois des durées de bon fonctionnement des composants élémentaires. Dans une approche boîte noire, on s'intéressera directement à la loi de X, sans chercher à décomposer le système en composants.

Il est donc capital d'avoir des modèles de base pour les lois des durées de bon fonctionnement de systèmes non réparables simples. Dans ce chapitre, on présente les plus utilisées de ces lois, essentiellement la loi exponentielle et la loi de Weibull. Pour chaque loi, on donnera, quand c'est possible, l'expression de la fiabilité, du taux de défaillance et du MTTF. Dans tout ce chapitre, on supposera que les durées de bon fonctionnement sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc x sera implicitement supposé être un réel positif.

3.1 La loi exponentielle $\exp(\lambda)$

Une variable aléatoire X est de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\exp(\lambda)$, si et seulement si sa fonction de répartition est :

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$$

- La fiabilité est $R(x) = 1 - F(x)$ d'où :

$$R(x) = \exp(-\lambda x) \tag{3.1}$$

- La densité est $f(x) = F'(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$.
- La durée de vie moyenne est :

$$\text{MTTF} = \mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} R(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x)\, dx = \frac{1}{\lambda} \tag{3.2}$$

- La variance de X est $Var[X] = 1/\lambda^2$.
- Le taux de défaillance est :

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\lambda \exp(-\lambda x)}{\exp(-\lambda x)} = \lambda \tag{3.3}$$

Le taux de défaillance est donc constant, ce qui signifie que la loi exponentielle modélise les durées de vie de systèmes qui ne s'usent pas et qui ne s'améliorent pas.

On dit aussi que la loi exponentielle est **sans mémoire**, ce qu'on exprime de la façon suivante : si le système n'est pas encore tombé en panne à l'instant t, c'est comme s'il était neuf à cet instant. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\forall t \geq 0, \quad \forall x \geq 0, \quad \mathbb{P}(X > t + x \mid X > t) = \mathbb{P}(X > x).$$

On a :

$$\mathbb{P}(X > t + x \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x \cap X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{R(t+x)}{R(t)}$$

Si X est de loi $\exp(\lambda)$, alors :

$$\mathbb{P}(X > t + x \mid X > t) = \frac{\exp(-\lambda(t+x))}{\exp(-\lambda t)} = \exp(-\lambda x) = \mathbb{P}(X > x)$$

donc la loi exponentielle est sans mémoire.

Réciproquement, si X est une variable aléatoire sans mémoire, alors on a :

$$\mathbb{P}(X > t + x \mid X > t) = \frac{R(t+x)}{R(t)} = \mathbb{P}(X > x) = R(x)$$

Donc la propriété d'absence de mémoire implique que $R(t + x) = R(t)R(x)$ pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$. On en déduit que pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} R'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{R(x + \Delta x) - R(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{R(x)R(\Delta x) - R(x)}{\Delta x} \\ &= R(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{R(\Delta x) - 1}{\Delta x} = R(x)\, R'(0) \end{aligned}$$

Comme R est décroissante, $R'(0)$ est une constante strictement négative que l'on note $-\lambda$, avec $\lambda > 0$. Ainsi, R est l'unique solution de l'équation différentielle $R'(x) = -\lambda R(x)$ avec comme condition initiale $R(0) = 1$. Autrement dit, on a $R(x) = \exp(-\lambda x)$. Ainsi la seule loi de probabilité à densité continue vérifiant la propriété d'absence de mémoire est la loi exponentielle. Dans le contexte de la fiabilité, cette absence de mémoire s'interprète comme une absence de vieillissement et une absence de rajeunissement.

Dans la pratique, on dit souvent que l'on peut modéliser par une loi exponentielle la durée de vie de systèmes qui sont dans leur période de vie utile, c'est-à-dire qui, dans la courbe en baignoire, ont dépassé la période de jeunesse et ne sont pas encore entrés en période d'usure. Mais c'est une erreur méthodologique car la loi de probabilité de X doit pouvoir modéliser l'ensemble de la durée de vie du système.

Par conséquent, la loi exponentielle ne devrait être utilisée que pour des systèmes qui ne s'usent pas et ne s'améliorent pas. Or tous les systèmes matériels sont soumis à l'usure, donc leur durée de vie devrait avoir a priori un taux de défaillance croissant, au moins en fin de vie. Par contre, un logiciel ne s'use pas. Tant qu'il n'est pas modifié, sa propension à subir une défaillance reste constante. Aussi la loi exponentielle a-t-elle un rôle prépondérant en fiabilité des logiciels. Par ailleurs, l'expérience montre qu'un taux de défaillance constant est une hypothèse réaliste pour les composants électroniques après déverminage.

Remarque 1 : Le MTTF est exprimé par une unité de temps, par exemple l'heure. La relation MTTF $= 1/\lambda$ implique donc qu'en pratique, on donne pour unité de λ l'inverse d'une unité de temps. Cela explique qu'un objectif de fiabilité soit souvent exprimé en terme de taux de panne "par heure".

Remarque 2 : Si l'on admet que la durée de vie d'un système est de loi exponentielle, toute maintenance préventive est inutile puisque le système est comme neuf à chaque instant tant qu'il n'est pas tombé en panne.

Si la loi exponentielle est de loin la loi de durée de vie la plus utilisée en raison de sa simplicité, elle ne permet de modéliser ni l'usure, ni le rajeunissement. Il est donc nécessaire de disposer de lois plus sophistiquées. En fiabilité, la loi de Weibull est la plus populaire d'entre elles.

3.2 La loi de Weibull $\mathcal{W}(\eta, \beta)$

Une variable aléatoire X est de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\eta > 0$ et de paramètre de forme $\beta > 0$, notée $\mathcal{W}(\eta, \beta)$, si et seulement si sa fonction de répartition est :

$$F(x) = 1 - \exp\left(- \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta} \right)$$

- La fiabilité est :

$$R(x) = \exp\left(- \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta} \right) \tag{3.4}$$

- La densité est :

$$f(x) = F'(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(- \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta} \right)$$

- La durée de vie moyenne est MTTF $= \int_0^{+\infty} \exp\left(-(x/\eta)^{\beta}\right) dx$. Un changement de variables $u = (x/\eta)^{\beta}$ permet d'obtenir :

$$\text{MTTF} = \eta\, \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \tag{3.5}$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \exp(-x)\, dx \tag{3.6}$$

En particulier, $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- La variance de X est :

$$Var[X] = \eta^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^2 \right]$$

- Le taux de défaillance est :

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \tag{3.7}$$

Le taux de défaillance de la loi de Weibull est donc une puissance du temps, ce qui permet de modéliser de nombreuses situations. En particulier :

- si $\beta < 1$, h est décroissant donc le système s'améliore ;
- si $\beta > 1$, h est croissant donc le système s'use ;
- si $\beta = 1$, h est constant et on retrouve la loi exponentielle comme cas particulier de la loi de Weibull.

La figure 3.1 donne les graphes des taux de défaillance de la loi de Weibull pour $\beta \in \{0.5, 1, 1.5, 3\}$.

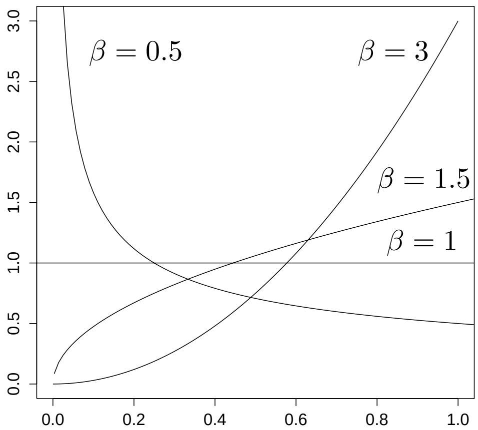


FIGURE 3.1 – Taux de défaillance de la loi de Weibull

Remarquons que pour $\beta \in]1, 2[$, h est concave, donc le système s'use, mais de moins en moins vite. L'interprétation de ce type d'usure est difficile et fait l'objet de controverses. Pour $\beta > 2$, h est convexe, ce qui correspond à une accélération de l'usure. Cela se conçoit plus facilement.

On dit parfois que la loi de Weibull permet de modéliser la période de jeunesse (pour $\beta < 1$), la vie utile (pour $\beta = 1$) et la période de vieillissement (pour $\beta > 1$). Là encore, c'est une erreur méthodologique car on doit représenter l'ensemble de la durée de vie par une seule loi de probabilité.

Une propriété remarquable de la loi de Weibull est que c'est l'une des lois des valeurs extrêmes : pour n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et de même loi, la loi limite de variables aléatoires s'écrivant $a_n \min_{i=1}^n X_i + b_n$ quand on fait tendre n vers l'infini, est de trois types possibles. La seule dont le support soit $\mathbb{R}_+$ est la loi de Weibull. Concrètement, cela signifie que la loi de Weibull est un modèle naturel pour des systèmes constitués d'un très grand nombre de composants et dont la panne survient dès qu'un composant est défaillant (système série, voir chapitre 4).

3.3 Autres lois usuelles

3.3.1 La loi gamma $\mathcal{G}(\alpha, \lambda)$

X est de loi gamma de paramètre de forme $\alpha > 0$ et de paramètre d'échelle $\lambda > 0$, notée $\mathcal{G}(\alpha, \lambda)$, si et seulement si sa densité est :

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\lambda x) \; x^{\alpha-1}$$

où Γ est la fonction gamma définie en (3.6).

La fonction de répartition de la loi gamma n'a pas d'expression explicite, donc la fiabilité et le taux de défaillance non plus. En revanche, on dispose du MTTF et d'éléments qualitatifs sur le taux de défaillance :

- La durée de vie moyenne est : $\text{MTTF} = \dfrac{\alpha}{\lambda}$.
- La variance de X est : $Var[X] = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$
- On peut montrer que :
  — si $\alpha < 1$, h est décroissant donc le système s'améliore ;
  — si $\alpha > 1$, h est croissant donc le système s'use ;
  — si $\alpha = 1$, h est constant et on retrouve la loi exponentielle.

  Ces 3 cas sont représentés dans la figure 3.2.

Pour n entier, $\mathcal{G}\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ est la **loi du chi-2** à n degrés de liberté, notée χ^2_n.

Proposition 1 *Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi* $\exp(\lambda)$*, alors* $\sum_{i=1}^{n} X_i$ *est de loi gamma* $\mathcal{G}(n, \lambda)$.

Proposition 2 *Si X est de loi $\mathcal{G}(\alpha, \lambda)$ et a est un réel strictement positif, alors aX est de loi $\mathcal{G}(\alpha, \lambda/a)$.*

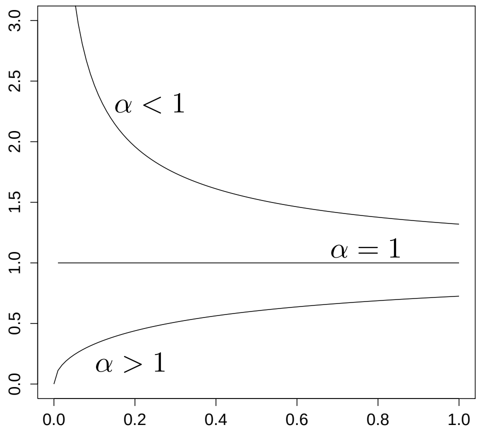


FIGURE 3.2 – Taux de défaillance de la loi gamma

3.3.2 La loi lognormale $\mathcal{LN}(m, \sigma^2)$

X est de loi lognormale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$, notée $\mathcal{LN}(m, \sigma^2)$, si et seulement si $\ln X$ est de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

- La densité est :
$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - m)^2\right)$$
- Le MTTF vaut : $\text{MTTF} = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$.
- La variance de X est : $Var[X] = \exp(2m)\ (\exp(2\sigma^2) - \exp(\sigma^2))$.

Là encore, la fonction de répartition, la fiabilité et le taux de défaillance de la loi lognormale n'ont pas d'expression explicite. En revanche, on peut vérifier que le taux de défaillance croît puis décroît en tendant vers 0 (voir la figure 3.3). Ceci peut modéliser des situations réelles : un système qui se détériore puis se met à s'améliorer au bout d'un moment. En fait l'expérience montre que la loi lognormale est plus à même de modéliser des durées de réparation que des durées de bon fonctionnement.

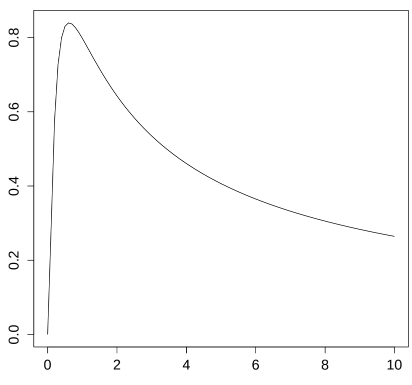


FIGURE 3.3 – Taux de défaillance de la loi lognormale

3.3.3 Lois avec taux de défaillance en baignoire

Il est étonnant de constater que, bien qu'il soit communément admis qu'en pratique le taux de défaillance d'un système non réparable a souvent une forme de baignoire, il existe peu de lois de probabilité de durées de vie possédant cette propriété. Par exemple, aucune des lois citées jusqu'à maintenant ne rentre dans ce cadre. La façon la plus simple de construire un taux de défaillance en baignoire est de "raccorder" trois taux de type Weibull respectivement décroissant, constant et croissant, en faisant en sorte que le taux résultant soit continu et à dérivée continue. Par exemple, la figure 2.1 a été obtenue à partir d'un taux de la forme :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda + \dfrac{\beta_1}{\eta_1}\left(\dfrac{\tau_1 - x}{\eta_1}\right)^{\beta_1 - 1} & \text{si} \quad x \in [0, \tau_1[\\ \lambda & \text{si} \quad x \in [\tau_1, \tau_2] \\ \lambda + \dfrac{\beta_2}{\eta_2}\left(\dfrac{x - \tau_2}{\eta_2}\right)^{\beta_2 - 1} & \text{si} \quad x \in]\tau_2, +\infty[\end{cases}$$

Dans cette expression, la période de vie utile est l'intervalle $[\tau_1, \tau_2]$. D'autres lois de probabilité possèdent des taux de défaillance dont la forme se rapproche d'une baignoire, sans avoir pour autant une période de vie utile aussi bien délimitée. Notons par exemple :

$$\begin{aligned} h(x) &= \alpha\beta(\alpha x)^{\beta-1} + \frac{\alpha}{\beta}(\alpha x)^{1/\beta - 1} \\ h(x) &= \alpha(\beta + \lambda x)x^{\beta-1}\exp(\lambda x) \end{aligned}$$

La figure 3.4 donne les graphes des 3 taux de défaillance ci-dessus.

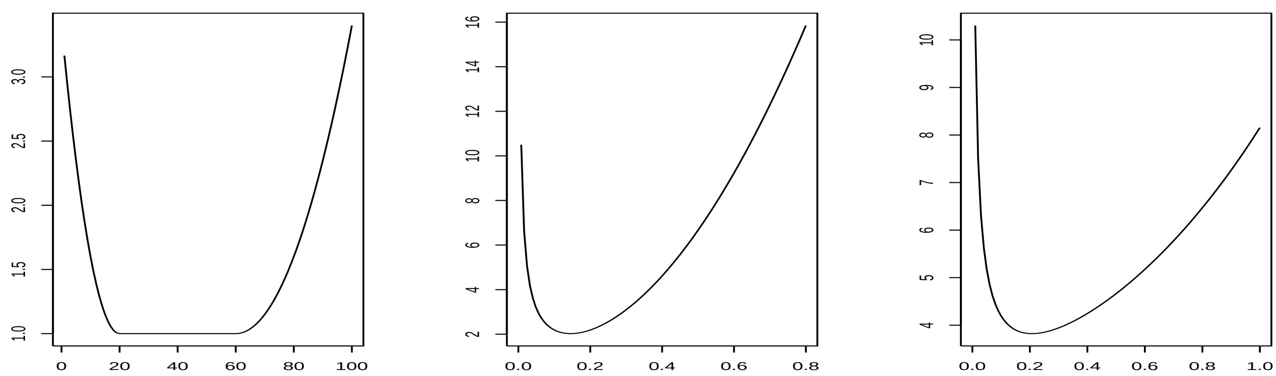


FIGURE 3.4 – Taux de défaillance en baignoire

Remarque : Quand on assemble des composants ayant chacun un taux de défaillance constant ou de type Weibull, il est possible que le système résultant ait un taux de défaillance en baignoire.

Chapitre 4

Calculs de fiabilité par structure

4.1 Principes

Le principe des calculs de fiabilité par structure (ou architecture) est de considérer qu'un système est constitué de composants élémentaires, et que sa fiabilité dépend à la fois de la fiabilité de ses composants et de la façon dont le bon fonctionnement ou la panne de chaque composant influe sur le bon fonctionnement ou la panne du système tout entier. Il est donc nécessaire de représenter la **logique de fonctionnement** du système.

Plusieurs types de représentations sont possibles : diagrammes de fiabilité, arbres de défaillance, graphes de Markov, réseaux de Petri, diagrammes de décision binaires, réseaux bayésiens, etc... On ne s'intéressera ici qu'à des systèmes non réparables et on représentera leur fonctionnement par un diagramme de fiabilité.

Le **diagramme de fiabilité** d'un système est un graphe sans circuit admettant une entrée E et une sortie S, dont :

- les sommets, appelés **blocs**, représentent les composants du système,
- les arcs traduisent les relations entre les différents composants, au sens où le système fonctionne si et seulement si il existe un chemin allant de E à S qui ne passe que par des composants en fonctionnement.

On peut faire l'analogie avec un réseau de distribution d'eau : l'eau n'est pas coupée tant qu'il existe un chemin dans le réseau qui lui permet d'aller de son point d'entrée à son point de sortie.

Remarque : le diagramme de fiabilité est une représentation *logique* du fonctionnement du système, qui n'a rien à voir avec une représentation *physique* des liaisons entre les différents composants. De même, il n'y a aucune contrainte de précédence dans ces diagrammes.

Exemple : une chaîne hi-fi comprend une platine CD (1), un tuner FM (2), un amplificateur (3) et deux enceintes (4 et 5). Le fonctionnement normal de la chaîne implique que tous ces éléments fonctionnent. Le diagramme de fiabilité est alors donné dans la figure 4.1. En effet, si un seul de ces éléments ne fonctionne pas, la chaîne ne fonctionne pas correctement.

Mais on peut admettre un fonctionnement dégradé dans lequel il est suffisant d'entendre au moins une des deux sources sonores sur au moins une des deux enceintes. Le diagramme

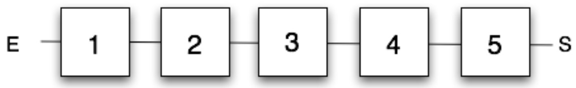


FIGURE 4.1 – Diagramme de fiabilité de la chaîne hi-fi en fonctionnement normal

de fiabilité est alors donné dans la figure 4.2.

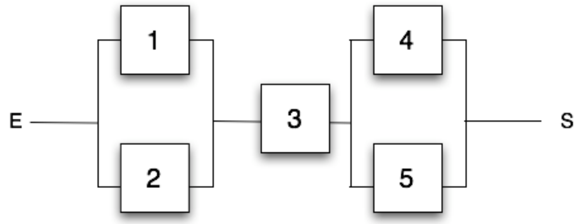


FIGURE 4.2 – Diagramme de fiabilité de la chaîne hi-fi en fonctionnement dégradé

Si on note $X_1, \ldots, X_5$ les durées de bon fonctionnement des 5 composants, il est facile de voir que, dans le premier cas, la durée de bon fonctionnement du système est $X = \min_{i=1}^{5} X_i$. Dans le deuxième cas, c'est moins évident mais on obtient que $X = \min\left(\max(X_1, X_2), X_3, \max(X_4, X_5)\right)$.

Quand le nombre de composants augmente, la structure du système peut se complexifier. Dans ce chapitre, nous allons étudier les structures de base les plus simples et donner une méthode permettant de calculer la fiabilité d'un système pour une structure complexe quelconque. Les critères de fiabilité sont un élément à prendre en compte dans le choix d'une architecture pour un système complexe.

Dans la suite, on considèrera des systèmes à n composants. Sauf mention contraire, les fonctionnements des n composants seront supposés indépendants. Pour le composant i, on note :

- X_i sa durée de bon fonctionnement,
- $r_i(x) = \mathbb{P}(X_i > x)$ sa fiabilité,
- $h_i(x)$ son taux de défaillance. $r_i(x) = \exp\left(-\int_0^x h_i(u)\,du\right)$.

Pour le système, on note X sa durée de bon fonctionnement, $R(x)$ sa fiabilité et $h(x)$ son taux de défaillance.

4.2 Systèmes série

Définition 10 *Un* **système série** *est un système qui ne fonctionne que si tous ses composants fonctionnent.*

C'est le cas de la chaine hi-fi en fonctionnement normal. Le diagramme de fiabilité est similaire à celui de la figure 4.1, avec n composants au lieu de 5.

Un système série tombe en panne dès qu'un de ses composants tombe en panne. On a donc :

$$X = \min_{i=1}^{n} X_i$$

La fiabilité du système est alors :

$$R(x) = \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(\min_{i=1}^{n} X_i > x) = \mathbb{P}(\forall i, X_i > x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]\right)$$

Comme on a supposé les composants indépendants, la probabilité ci-dessus est la probabilité d'une intersection d'évènements indépendants. Elle est donc égale au produit des probabilités de ces évènements :

$$R(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x) = \prod_{i=1}^{n} r_i(x)$$

On a donc :

$$R(x) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\int_0^x h_i(u)\,du\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\int_0^x h_i(u)\,du\right) = \exp\left(-\int_0^x \sum_{i=1}^{n} h_i(u)\,du\right)$$

Et comme $R(x) = \exp\left(-\int_0^x h(u)\,du\right)$, on en déduit que :

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x)$$

Autrement dit, le taux de défaillance d'un système série à composants indépendants est égal à la somme des taux de défaillance de ses composants.

Il n'y a pas de résultat simple pour le MTTF :

$$MTTF = \int_0^{+\infty} R(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} r_i(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\int_0^x \sum_{i=1}^{n} h_i(u)\,du\right)\,dx$$

Si tous les composants ont un taux de défaillance constant, $\forall i, \forall x, h_i(x) = \lambda_i$, donc X_i est de loi $\exp(\lambda_i)$ et $r_i(x) = \exp(-\lambda_i x)$. Alors $R(x) = \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda_i x) = \exp\left(-[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i]x\right)$ et $h(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ est encore constant.

On met donc là en évidence une propriété remarquable de la loi exponentielle : si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de lois respectives $\exp(\lambda_i)$, alors $X = \min_{i=1}^{n} X_i$ est de loi $\exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$. Dans ce cas, on a un résultat simple pour le MTTF :

$$MTTF = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

De même, un système série constitué de composants indépendants et de durées de vie de lois de Weibull avec le même paramètre β a une durée de vie qui est encore de loi de Weibull. Enfin, on a aussi vu que la durée de vie d'un système série dont le nombre de composants tend vers l'infini a une loi qui tend vers une loi de Weibull.

4.3 Systèmes parallèles

4.3.1 Définition et propriétés

Définition 11 *Un* **système parallèle** *est un système tel qu'il suffit qu'un seul de ses composants fonctionne pour qu'il fonctionne.*

Autrement dit, la défaillance du système survient quand tous ses composants sont en panne.

Dans les systèmes parallèles, on distingue deux cas :

- La **redondance passive** ou **stand-by** : un seul composant fonctionne à la fois. Quand le composant qui fonctionne tombe en panne, il est instantanément remplacé par un des composants en attente. Dans ce cas, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. La proposition 2 montre que si tous les composants sont indépendants et de même loi $\exp(\lambda)$, la durée de vie du système en redondance passive correspondant est de loi gamma $G(n, \lambda)$.
- La **redondance active** : les n composants fonctionnent en même temps.

On se place dans la suite de cette section dans le cas de la redondance active. Le diagramme de fiabilité est donné dans la figure 4.3.

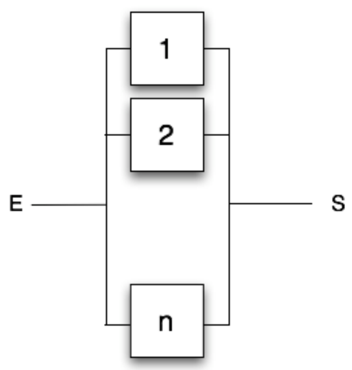


FIGURE 4.3 – Diagramme de fiabilité pour un système parallèle.

On a évidemment :

$$X = \max_{i=1}^{n} X_i$$

La fiabilité du système est alors :

$$R(x) = \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(\max_{i=1}^{n} X_i > x) = 1 - \mathbb{P}(\max_{i=1}^{n} X_i \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\forall i, X_i \leq x)$$

Avec des composants indépendants, on obtient :

$$R(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(X_i > x))$$

d'où finalement :

$$R(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - r_i(x))$$

En écrivant $R(x) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \exp\left(-\int_0^x h_i(u)\,du\right)\right)$ puis $h(x) = -\dfrac{R'(x)}{R(x)}$, on obtient que le taux de défaillance du système est :

$$h(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i(x) \exp\left(-\int_0^x h_i(u)\,du\right) \prod\limits_{j \neq i} \left(1 - \exp\left(-\int_0^x h_j(u)\,du\right)\right)}{1 - \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \exp\left(-\int_0^x h_i(u)\,du\right)\right)}$$

Donc, contrairement au cas d'un système série, le taux de défaillance d'un système parallèle ne s'exprime pas facilement en fonction du taux de défaillance de ses composants.

Il n'y a pas non plus d'expression simple du MTTF.

4.3.2 Cas où tous les composants ont un taux de défaillance constant

On a :

- $\forall i, h_i(x) = \lambda_i$.
- $R(x) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - \exp(-\lambda_i x))$.
- $h(x) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \exp(-\lambda_i x) \prod\limits_{j \neq i} (1 - \exp(-\lambda_j x))}{1 - \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - \exp(-\lambda_i x))}$. Donc un système parallèle dont tous les composants ont un taux de défaillance constant, n'a pas un taux de défaillance constant !

En développant la fiabilité, on obtient :

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{i=1}^{n} \exp(-\lambda_i x) - \sum_{i,j\,distincts} \exp(-(\lambda_i + \lambda_j)x) + \sum_{i,j,k\,distincts} \exp(-(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x) \\ &\quad - \ldots + (-1)^{n+1} \exp(-[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i]x) \end{aligned}$$

d'où on déduit le MTTF :

$$MTTF = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{i,j\, distincts} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} + \sum_{i,j,k\, distincts} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

On montre que $\lim_{t \to +\infty} h(x) = \min_{i=1}^{n} \lambda_i$. C'est logique : c'est le composant le plus fiable qui a tendance à tomber en panne le dernier, donc à provoquer la panne du système.

4.3.3 Cas où tous les composants sont identiques

On a $\forall i, r_i(x) = r(x)$. Alors la fiabilité du système est :

$$R(x) = 1 - [1 - r(x)]^n$$

Comme $r(x) \in [0, 1]$, on a $[1 - r(x)]^n \geq [1 - r(x)]^{n+1}$, donc $1 - [1 - r(x)]^n \leq 1 - [1 - r(x)]^{n+1}$. Par conséquent, quand on augmente le nombre de composants en redondance dans un système parallèle, on augmente la fiabilité du système.

Notons que c'est l'inverse pour les systèmes série puisque $[r(x)]^n \geq [r(x)]^{n+1}$.

4.4 Systèmes k/n

Définition 12 *Un* **système** k/n *est un système qui ne fonctionne que si au moins k composants parmi n fonctionnent.*

Par exemple, le système de contrôle-commande de la température d'un réacteur chimique ou nucléaire est conçu selon une architecture 2/3.

- $k = 1$ correspond à un système parallèle.
- $k = n$ correspond à un système série.

On ne peut pas représenter ce mode de fonctionnement par un diagramme de fiabilité usuel.

La fiabilité $R(x)$ est la probabilité que k composants au moins parmi n fonctionnent encore à l'instant x. Si on note N_x le nombre de composants qui fonctionnent à l'instant x, on a :

$$R(x) = \mathbb{P}(N_x \geq k)$$

Dans le cas général, on ne peut rien dire de plus. Mais si on suppose que tous les composants sont identiques et indépendants, de même fiabilité $r(x)$, alors la variable aléatoire N_x est de loi binomiale $\mathcal{B}(n, r(x))$, ce qui permet de calculer :

$$R(x) = \sum_{j=k}^{n} C_n^j \, r(x)^j \, [1 - r(x)]^{n-j}$$

- Pour $k = n$, on obtient $R(x) = r(x)^n$. C'est bien la fiabilité d'un système série.
- Pour $k = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{j=1}^{n} C_n^j \, r(x)^j \, [1 - r(x)]^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \, r(x)^j \, [1 - r(x)]^{n-j} - C_n^0 \, r(x)^0 \, [1 - r(x)]^{n-0} \\ &= [r(x) + 1 - r(x)]^n - [1 - r(x)]^n = 1 - [1 - r(x)]^n \end{aligned}$$

C'est bien la fiabilité d'un système parallèle.

4.5 Systèmes mixtes

Les systèmes mixtes sont obtenus en combinant les systèmes série et les systèmes parallèles.

4.5.1 Systèmes série-parallèle

Définition 13 *Un* **système série-parallèle** *résulte de la mise en parallèle de sous-systèmes série.*

Le diagramme de fiabilité est donné dans la figure 4.4.

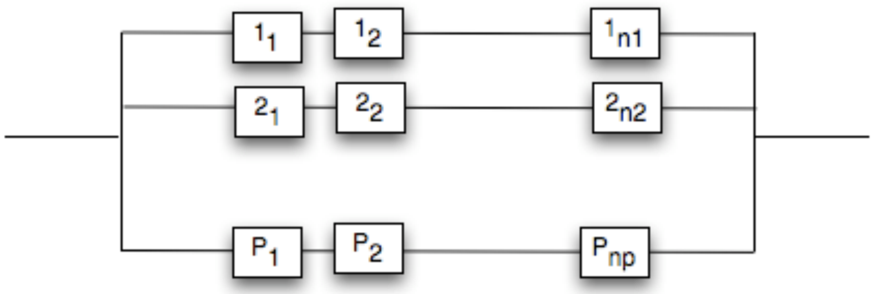


FIGURE 4.4 – Diagramme de fiabilité pour un système série-parallèle

Si on note $r_{ij}(x)$ la fiabilité du $j^{\text{ème}}$ composant de la $i^{\text{ème}}$ branche, les résultats précédents montrent que la fiabilité est :

$$R(x) = 1 - \prod_{i=1}^{p} \left[1 - \prod_{j=1}^{n_i} r_{ij}(x) \right]$$

4.5.2 Systèmes parallèle-série

Définition 14 *Un* **système parallèle-série** *résulte de la mise en série de sous-systèmes parallèles.*

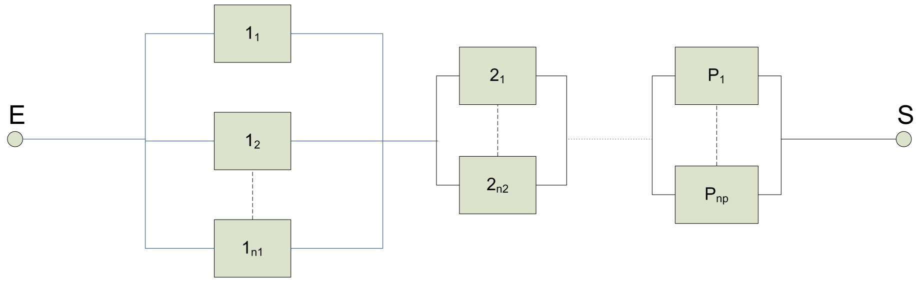


FIGURE 4.5 – Diagramme de fiabilité pour un système parallèle-série

Le diagramme de fiabilité est donné dans la figure 4.5.

Avec les mêmes notations que précédemment, on obtient que la fiabilité est :

$$R(x) = \prod_{i=1}^{p} \left[1 - \prod_{j=1}^{n_i} [1 - r_{ij}(x)] \right]$$

La chaîne hi-fi avec fonctionnement dégradé est un système parallèle-série. Sa fiabilité est :

$$R(x) = [1 - (1 - r_1(x))(1 - r_2(x))] \; r_3(x) \; [1 - (1 - r_4(x))(1 - r_5(x))]$$

4.6 La méthode de factorisation

De nombreux systèmes ne sont pas des systèmes série, parallèles, k/n ou mixtes. C'est le cas du système dit **en pont**, dont le diagramme de fiabilité est donné dans la figure 4.6.

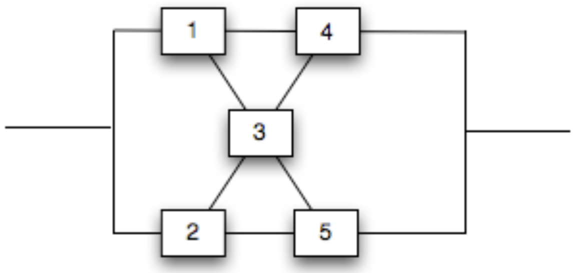


FIGURE 4.6 – Diagramme de fiabilité pour un système en pont

Pour calculer sa fiabilité, on va utiliser la **méthode de factorisation**. Celle-ci consiste à effectuer des conditionnements successifs qui vont permettre de se ramener à des systèmes mixtes.

On note $B_i(x)$ l'évènement $[X_i > x]$, signifiant que le composant i fonctionne entre 0 et x. De même, on note $B(x)$ l'évènement $[X > x]$, signifiant que le système fonctionne entre 0 et x. La fiabilité du composant i est $r_i(x) = \mathbb{P}(B_i(x))$ et la fiabilité du système est $R(x) = \mathbb{P}(B(x))$.

Le théorème des probabilités totales permet d'écrire :

$$\begin{aligned} R(x) &= \mathbb{P}(B(x)) = \mathbb{P}(B(x)|B_3(x))\,\mathbb{P}(B_3(x)) + \mathbb{P}(B(x)|\overline{B}_3(x))\,\mathbb{P}(\overline{B}_3(x)) \\ &= R_A(x)\,r_3(x) + R_B(x)\,(1 - r_3(x)) \end{aligned}$$

où $R_A(x)$ est la fiabilité du système quand on sait que le composant 3 fonctionne, c'est-à-dire la fiabilité du système A donné par la figure 4.7, et $R_B(x)$ est la fiabilité du système quand on sait que le composant 3 ne fonctionne pas, c'est-à-dire la fiabilité du système B donné par la figure 4.8.

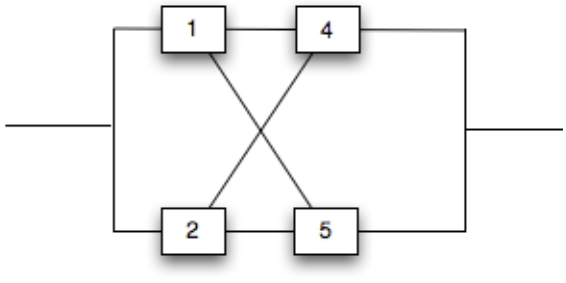


FIGURE 4.7 – Système en pont, 3 fonctionne

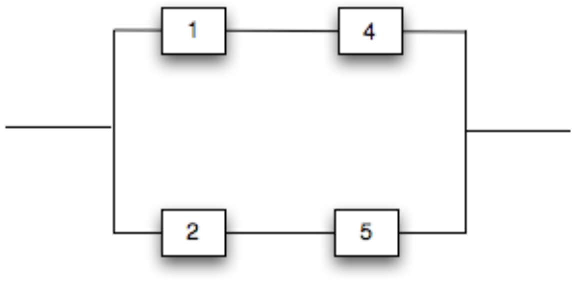


FIGURE 4.8 – Système en pont, 3 en panne

Il est clair que le système A est équivalent à un système parallèle-série, dont la fiabilité est :

$$R_A(x) = [1 - (1 - r_1(x))(1 - r_2(x))] \, [1 - (1 - r_4(x))(1 - r_5(x))]$$

De même, le système B est un système série-parallèle, dont la fiabilité est :

$$R_B(x) = 1 - [1 - r_1(x)r_4(x)] \, [1 - r_2(x)r_5(x)]$$

Finalement, la fiabilité du système en pont est :

$$\begin{aligned} R(x) &= r_3(x) \, [1 - (1 - r_1(x))(1 - r_2(x))] \, [1 - (1 - r_4(x))(1 - r_5(x))] \\ &\quad + (1 - r_3(x)) \, [1 - [1 - r_1(x)r_4(x)] \, [1 - r_2(x)r_5(x)]] \end{aligned}$$

Si tous les composants sont identiques, on obtient :

$$\begin{aligned} R(x) &= r(x) \left[1 - (1 - r(x))^2\right]^2 + (1 - r(x)) \left[1 - (1 - r^2(x))^2\right] \\ &= r^2(x) \left[2 + 2r(x) - 5r^2(x) + 2r^3(x)\right] \end{aligned}$$

Si les composants ont un taux de défaillance constant λ, $r(x) = \exp(-\lambda x)$, d'où :

$$R(x) = 2\exp(-2\lambda x) + 2\exp(-3\lambda x) - 5\exp(-4\lambda x) + 2\exp(-5\lambda x)$$

On en déduit facilement la durée de vie moyenne du système :

$$MTTF = \int_0^{+\infty} R(x)\,dx = \frac{2}{2\lambda} + \frac{2}{3\lambda} - \frac{5}{4\lambda} + \frac{2}{5\lambda} = \frac{49}{60\lambda} = 0.82\,\frac{1}{\lambda}$$

Le MTTF du système vaut donc 82 % du MTTF de ses composants.

Le taux de défaillance est :

$$h(x) = -\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{4\lambda \exp(-2\lambda x) + 6\lambda \exp(-3\lambda x) - 20\lambda \exp(-4\lambda x) + 10\lambda \exp(-5\lambda x)}{2 \exp(-2\lambda x) + 2 \exp(-3\lambda x) - 5 \exp(-4\lambda x) + 2 \exp(-5\lambda x)}$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 2\lambda$. Cela signifie qu'au bout d'un moment, le système se comporte comme deux composants en série, qui est la configuration minimale avant la panne définitive. La forme du taux de défaillance est donnée dans la figure 4.9.

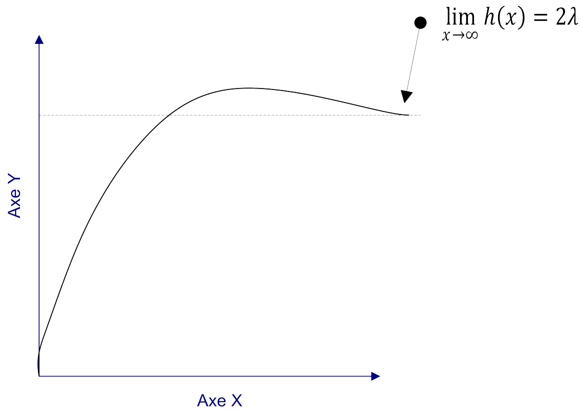


FIGURE 4.9 – Taux de défaillance du système en pont