TP: Simulation de processus stochastiques
Master SSD (2019-2020)

Olivier Zahm*

Le but de ce TP est d'apprendre à simuler des processus Gaussiens ainsi que des processus ponctuels de Poisson. On apprendra aussi à simuler des processus Gaussiens conditioné à des observations. Pour simplifier, on supposera que le domaine d'étude $S = [0, 1]^2$ est un carré.

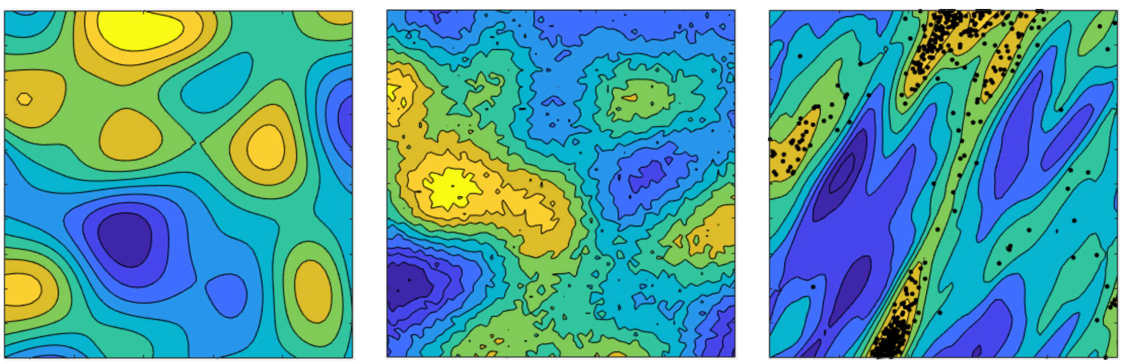

Figure 1: Exemples de résultats que l'on obtiendra aujourd'hui.

Consignes: Vous travaillerez en binôme en utilisant le langage de programmation de votre choix (R, Python, Matlab...). Les consignes sont assez ouvertes : n'hésitez pas à prendre des initiatives ! Les compte rendus de TP sont à envoyer au plus tard **jeudi 9 janvier 23h59** à l'adresse `olivier.zahm@inria.fr`. N'envoyez qu'un seul document au format pdf **avec le code <u>en annexe</u>**.

*olivier.zahm@inria.fr

1 Processus Gaussiens

On rappelle qu'un processus Gaussien est un champs aléatoire $\{X_s : s \in S\}$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $s_1, \ldots, s_n \in S$, le vecteur aléatoire $(X_{s_1}, \ldots, X_{s_n})$ est un vecteur Gaussien. En utilisant la moyenne et la fonction de covariance

$$\mathbb{E}[X_s] = m(s), \qquad \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = c(s,t),$$

on a $(X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ avec

$$\mu = \begin{pmatrix} m(s_1) \\ \vdots \\ m(s_n) \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} c(s_1, s_1) & \ldots & c(s_1, s_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c(s_n, s_1) & \ldots & c(s_n, s_n) \end{pmatrix}.$$

On suppose que X est stationnaire d'ordre 2 avec $m(s) = 0$ et $c(s,t) = c(s-t, 0) = c(s-t)$ pour tout $s, t \in S$. On s'intéressera aux fonctions de covariance suivantes :

Delta :

$$c_1(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sphérique :

$$c_2(h) = \begin{cases} \frac{2\sigma^2}{\pi}\left(\arccos\left(\frac{\|h\|}{a}\right) - \frac{\|h\|}{a}\sqrt{1 - \frac{\|h\|^2}{a^2}}\right) & \text{si } \|h\| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exponentiel :

$$c_3(h) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\|h\|}{a}\right)$$

Matérn-3/2 :

$$c_4(h) = \sigma^2 \left(1 + \sqrt{3}\frac{\|h\|}{a}\right) \exp\left(-\sqrt{3}\frac{\|h\|}{a}\right)$$

Matérn-5/2 :

$$c_5(h) = \sigma^2 \left(1 + \sqrt{5}\frac{\|h\|}{a} + \frac{5\|h\|^2}{3a^2}\right) \exp\left(-\sqrt{5}\frac{\|h\|^2}{a^2}\right)$$

Gaussien :

$$c_6(h) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\|h\|^2}{2a^2}\right)$$

Tâche 1 Pour chacune des 6 fonctions de covariance $c_1, \ldots, c_6$, réaliser des tirages de X_s. En quoi le choix de la fonction de covariance et de ses paramètres σ et a influencent-ils le résultat ?

- Le plus simple serait de considérer une grille régulière de $S = [0,1]^2$ comportant, par exemple, $n = 32$ points par coté.
- Après avoir assemblé la matrix de covariance Σ il ne restera plus qu'à faire des tirages de $\mathcal{N}(0, \Sigma)$: comment fait-on cela ? On pourra demander à Wikipedia.
- Que ce passe-t-il si on change $n = 32$ points par coté par $n = 64$ ou $n = 124$?

Tâche 2 Comment modifier les fonctions de covariance afin d'obtenir des réalisations comme celle de la Figure 2 ?

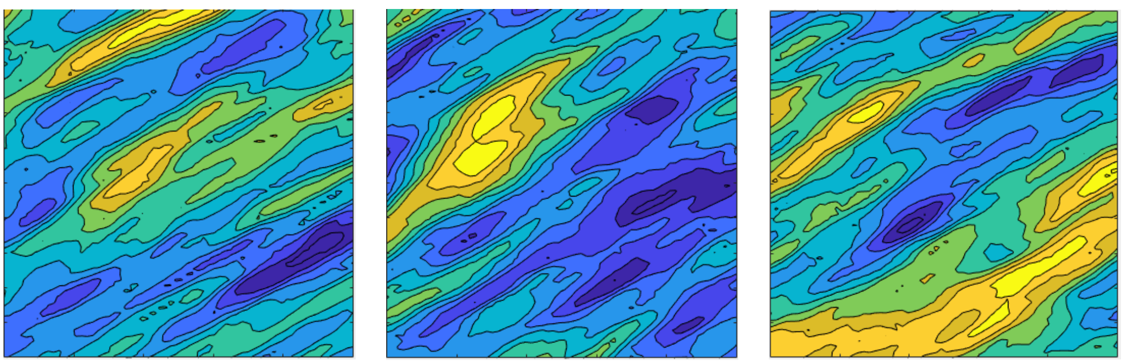

Figure 2: Réalisations obtenues avec un noyau Matérn-3/2 modifié.

2 Processus ponctuels de Poisson

Soit ρ une fonction positive et intégrable sur S. Un processus ponctuel de Poisson $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$ est un processus dont les réalisations sont des ensembles dénombrables de points $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset S$. Un processus de Poisson se définit par :

1. Le nombre de point $\text{card}\{X\} \sim P(\lambda)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \int_S \rho(x)\mathrm{d}x$.
2. Conditionellement à l'évènement $\text{card}\{X\} = n$, les points de $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sont indépendants de loi
$$x_i \sim \frac{\rho(\cdot)}{\int_S \rho(x)\mathrm{d}x}.$$
En d'autres termes, la probabilité que x_i tombe dans une partie $A \subset S$ est $\int_A \rho(x)\mathrm{d}x / \int_S \rho(x)\mathrm{d}x$.

Tâche 1 Réaliser des tirages de $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$ avec $\rho(x, y) = 10^3 \times xy$. On pourra aussi essayer avec $\rho = \exp(Y)$, où Y est une réalisation d'un processus Gaussien $\sim \mathcal{N}(0, c)$. On devrait arriver à simuler des processus comme dans la Figure 3.

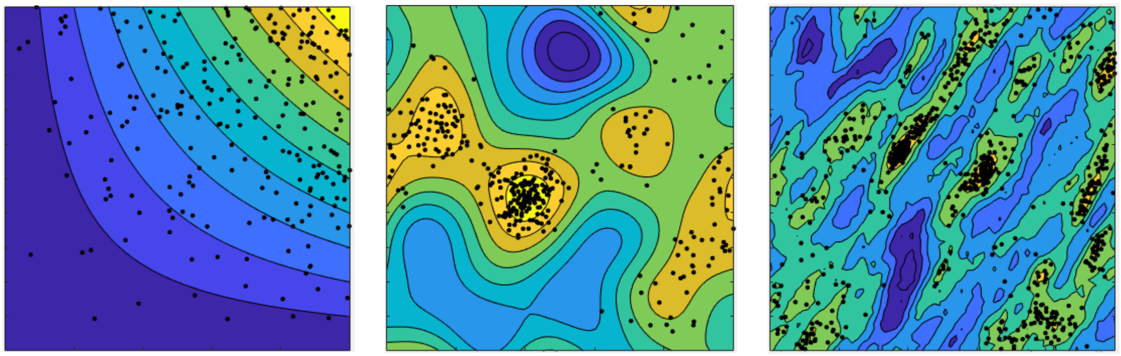

Figure 3: Quelques réalisations de $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$

Tâche 2 Un arbre a été planté au milieu de la forêt (c'est à dire en $x = (0.5, 0.5)$). Cet arbre a produit $N_1 \sim P(3)$ graines qui se sont dispersées pour donner, l'année suivante, de nouveaux arbres. Quelle est la situation au bout de 5 ans ? Que se passe-t-il s'il y a du vent ?