Examen du 8 Novembre 2017

Exercise 1.
Un test a été étalonné sur une population A de manière que sa distribution suive une loi normale de moyenne 13 et d'écart type 3. Sur un échantillon de taille 10 issu d'une population B, on a observé les valeurs suivantes :

$$8.43, 8.70, 11.27, 12.92, 13.05, 13.050001, 13.17, 13.44, 13.89, 18.90$$

Avec le logiciel R on obtient:

```
X1 <- c(8.43, 8.70, 11.27, 12.92, 13.05, 13.050001, 13.17, 13.44, 13.89, 18.90)
ks.test(X1,"pnorm",mean=13, sd=3)

One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data: X1
D = 0.2834, p-value = 0.3326
alternative hypothesis: two-sided
```

1. Préciser les hypothèses H_0 et H_1 ainsi que la statistique du test.
2. A quoi correspond la valeur $D = 0.2834$?.
3. Donner l'expression mathématique de la p-valeur de cet échantillon.
4. Quelle est la conclusion de ce test.

Exercise 2.
On considère les deux échantillons observés suivants :

$$x = (0.11, 0.20, 0.69, 1.02), \;\; y = (0.86, 0.99, 1.24, 1.57, 1.62)$$

On cherche à tester l'hypothèse nulle H_0 : "les deux échantillons proviennent d'une même loi" contre H_1 : "les deux échantillons proviennent de deux lois différentes".

1. Rappeler la forme de la statistique du test de Kolmogorov-Smirnov à deux échantillons $h_{4,5}$.
2. A l'aide de la Table 1, et éventuellement de la Figure 1 des fonctions de répartition empiriques, calculer la p-valeur du test de Kolmogorov-Smirnov.
3. Rappeler la forme de la statistique de Mann-Whitney, et donner son espérance sous H_0 ainsi que ses valeurs minimale et maximale.
4. A l'aide de la Table 2, calculer la p-valeur du test de Mann-Whitney.

x	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.50	0.55	0.60	0.75	0.80	1
$P(h_{4,5} \geq x)$	1	0.99	0.97	0.87	0.75	0.56	0.43	0.29	0.14	0.079	0.016

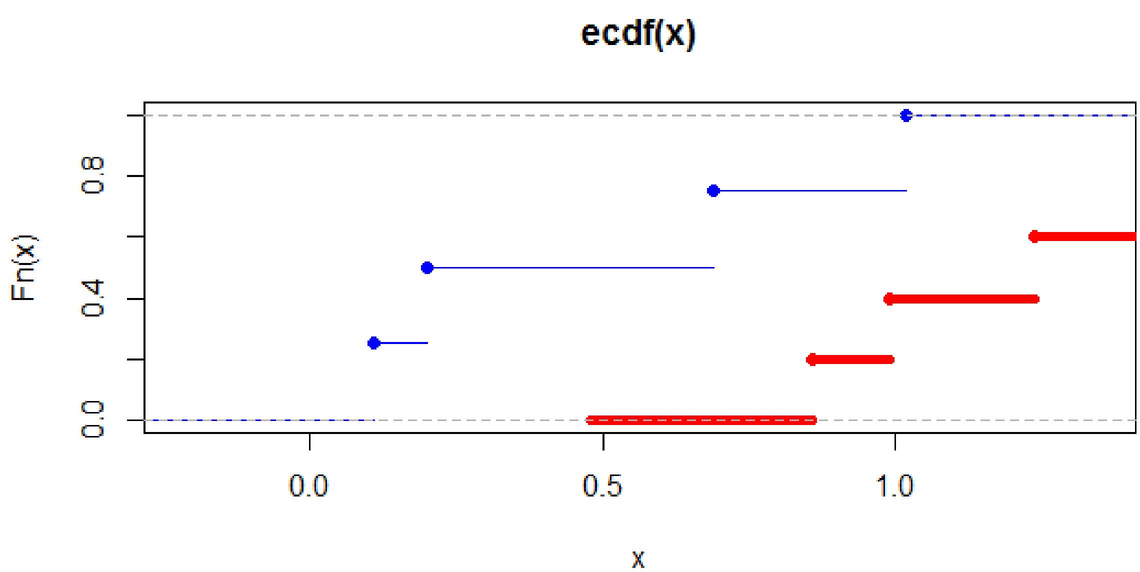
Table 1. Table de la loi de la statistique de Kolmogorov-Smirnov $h_{4,5}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(W_X \leq x)$	0.0079	0.016	0.032	0.056	0.095	0.14	0.21	0.28	0.37	0.45	0.55

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$P(W_X \leq x)$	0.63	0.72	0.79	0.86	0.90	0.94	0.97	0.98	0.99	1.00

Table 2: Table de la loi de la statistique de Mann-Whitney W_X, à laquelle on a soustrait la valeur minimale.

FIGURE 1. La première courbe est celle de la fonction de répartition empirique de l'échantillon x. La seconde (celle en gras) est celle de l'échantillon y.



Exercise 3.

On a mesuré le rythme des battements cardiaques de 9 sujets pris au hasard parmi les étudiants se présentant spontanément au camion de centre de transfusion sanguine pour faire un don du sang. Après le don du sang, les étudiants prennent une collation sur place. L'infirmière en profite pour leur mesurer leur rythme cardiaque. Les résultats sont les suivants exprimés en nombre de battements cardiaques par minute :

Sujet	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Mesure avant le don du sang	78	101	77	75	92	77	64	87	65
Mesure après le don du sang	84	80	67	72	79	76	66	80	61

Déterminer à l'aide du test de Wilcoxon et de la table ci-dessous l'influence du don du sang sur le battement cardiaque des étudiants. Au préalable, on formulera clairement les hypothèses nulle et alternative testées. On donne:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P[W_9^+ \leq k]$	0.0019	0.0039	0.0058	0.0097	0.0136	0.0195	0.0273	0.0371	0.0488	0.0644

k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$P[W_9^+ \leq k]$	0.0820	0.1015	0.125	0.1503	0.1796	0.2128	0.2480	0.2851	0.3261	0.3671

k	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$P[W_9^+ \leq k]$	0.4101	0.4550	0.5	0.5449	0.5898	0.6328	0.6738	0.7148	0.7519	0.7871

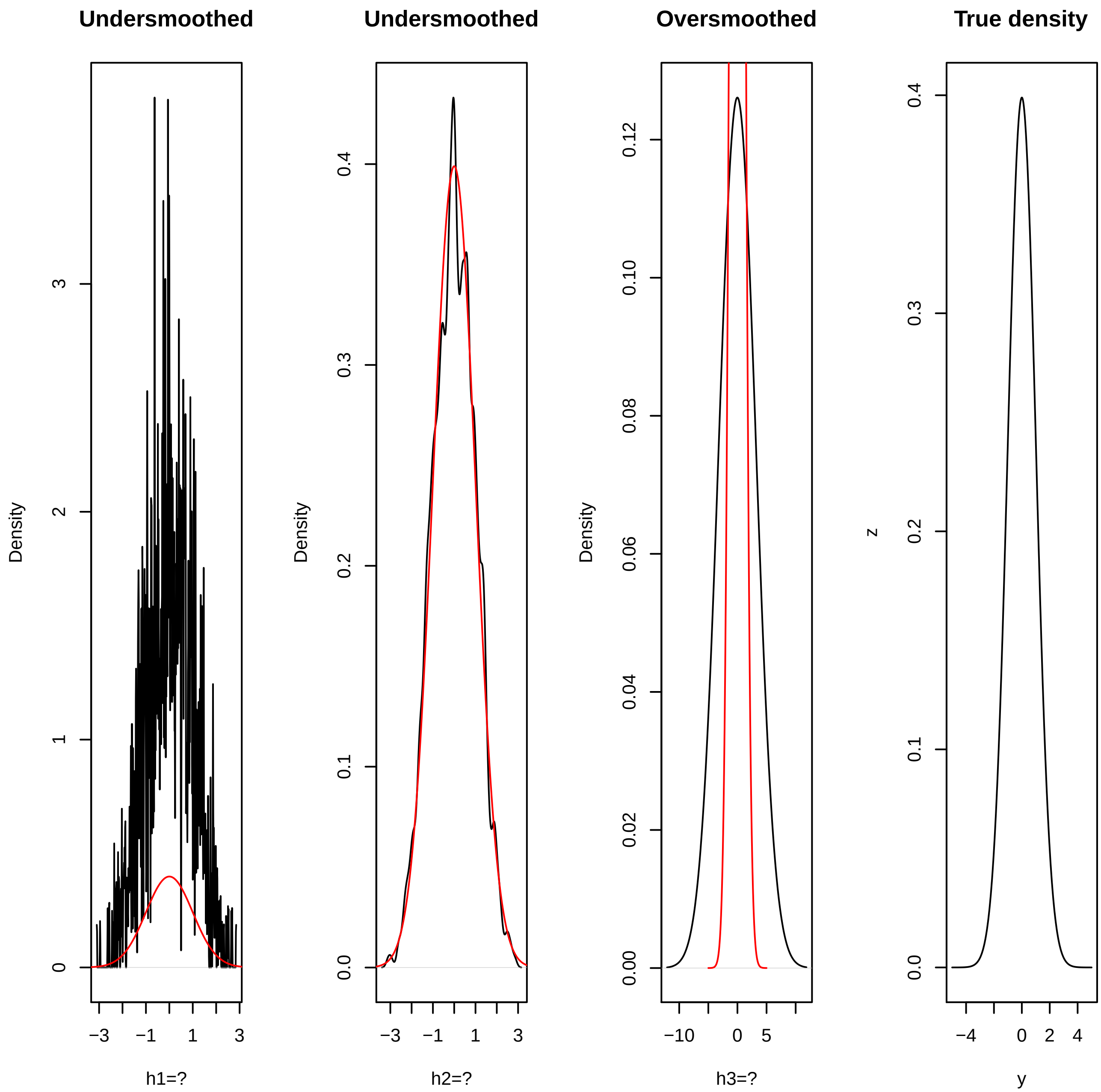
k	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$P[W_9^+ \leq k]$	0.8203	0.8496	0.875	0.8984	0.9179	0.9355	0.9511	0.9628	0.9726	0.9804

k	40	41	42	43	44	45
$P[W_9^+ \leq k]$	0.9863	0.9902	0.9941	0.9960	0.9980	1

Exercise 4.

A partir des données $(x_1, \cdots, x_n)$ issues d'un échantillon d'une loi normale de densité f, on a essayé de représenter graphiquement les estimateurs à noyaux de f : on a pris pour K le noyau gaussien et pour h les trois valeurs suivantes $\{3, 0.001, 0.1\}$. On a obtenu les 3 graphiques suivants : sur chaque graphe il y a une superposition entre l'estimateur de la densité et la densité réelle (le 4ème correspondant à la densité réelle f).

Question: Identifier pour chaque graphe la valeur de h correspondante.


Undersmoothed
Density
h1=?
Undersmoothed
Density
h2=?
Oversmoothed
Density
h3=?
True density
z
y