神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.7.7

関数の合成3

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

フーリエ級数の問題

- 周期L の、任意の周期関数$f(x)$ は、次のように展開することができる
  - $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right)$
- 周期$L = X_2 - X_1$ として、フーリエ係数は以下の式で求めることができる
  - $\begin{cases} a_n = \frac{2}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{L}\,dx \\ b_n = \frac{2}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}\,dx \end{cases} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots)$
- 関数をフーリエ級数で展開・合成する方法は、フーリエ係数を求めるために積分が必要
  - 計算機にやらせるには、テイラー級数展開よりも複雑　$\Rightarrow$　数値計算に適したフーリエ級数展開

複素フーリエ級数1

- 虚数単位i を導入。n は正負の値に拡張し、係数c_n を定義する。
  - $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (n = \ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$
- オイラーの恒等式（ $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ ）より、
  - $\exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) = \cos\frac{2\pi nx}{L} + i\sin\frac{2\pi nx}{L}$
  - $\exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right) = \cos\frac{2\pi nx}{L} - i\sin\frac{2\pi nx}{L}$
- ゆえに、
  - $\cos\frac{2\pi nx}{L} = \frac{1}{2}\left\{\exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) + \exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right)\right\}$
  - $\sin\frac{2\pi nx}{L} = \frac{1}{2i}\left\{\exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right)\right\}$

複素フーリエ級数2

- 関数$f(x)$ は次のように置き換えられる
  - $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} \left\{ \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) + \exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right) \right\} + \frac{b_n}{2i} \left\{ \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right) \right\} \right)$
  - $= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) + \frac{a_n + ib_n}{2} \exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right) \right)$
  - $= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} \exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right)$
- フーリエ係数の性質（$a_{-n} = a_n, b_{-n} = -b_n$ ）より、
  - $= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n - ib_n}{2} \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right)$
  - $= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right)$

複素フーリエ級数3

- $n=0$ のとき、$b_0=0, c_0=\frac{a_0}{2}$ なので、
  - $f(x) \approx \sum_{n=0}^{0} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right)$
  - $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right)$
- このときc_n は次のように表される
  - $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{L}dx - \frac{2i}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}dx\right)$
  - $= \frac{1}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\left\{\cos\frac{2\pi nx}{L} - i\sin\frac{2\pi nx}{L}\right\}dx$
  - $= \frac{1}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\left\{\frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) + \exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right)\right)\right\}dx$
  - $= \frac{1}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right)dx$

複素フーリエ級数の特性

- 「複素フーリエ級数」
  - $f(x) \approx \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right)$
- 「複素フーリエ係数」
  - $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right)dx \qquad (n = \ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$
- 実際の複素フーリエ級数展開においては、nの範囲が制限される
  - 計算機では無限大の操作をできない
- その場合、n は$-N \sim N$ としなければならない。なぜなら、複素フーリエ級数における$n = N$と$n = -N$の項の和が、フーリエ級数における$n = N$の項に相当するため。
- このとき、$n = 0$ を中心とした$-N \sim N$項までの長い周期の項(L/N)で構成される
  - 関数$f(x)$ に対するローパスフィルタとなる

離散フーリエ変換1

- 関数$f(x)$ 上のN個の点$(x_0, f(x_0))$($x_1, f(x_1)$)…($x_{N-1}, f(x_{N-1})$)が与えられたとする。
  - 関数$f(x)$ の飛び飛びの値のみ分かっている ⇒ 離散的である
- 周期L の範囲を$x = 0 \sim L$ として、L をΔx 間隔でN 等分し($L = N\Delta x$)、m番目のxの位置$x_m = m\Delta x = \frac{mL}{N}$ とおくと、積分を総和の形で近似することができる(区分求積法)。
  - $c_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f(m\Delta x)\exp\left(-\frac{2\pi imn}{N}\right)$
  - Nを大きくする(多くの点を与える)とΔx が小さくなり、元の複素フーリエ係数に近づく
- ここで$f(m\Delta x)$ は定数となるので、$f(m\Delta x) = f_m$ として、
  - $F_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp\left(-\frac{2\pi imn}{N}\right)$ $(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$
- F_nを「離散フーリエ係数」という

離散フーリエ変換2

- ここで、$F_n = F_{n+N}$ となることに注意
  - $F_{n+N} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp\left(-\frac{2\pi i m(n+N)}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp\left(-\frac{2\pi i mn}{N}\right)\exp(-2\pi i m)$
  - $= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp\left(-\frac{2\pi i mn}{N}\right) = F_n$
- 即ち、F_n はN個毎に値を繰り返す周期関数となる。これは$\{F_n; n = -N/2 \sim N/2\}$であれば$\{c_n; n = -N/2 \sim N/2\}$ の近似として使えることを示す
  - $c_n \approx F_n \qquad (n = -N/2 \sim N/2)$
  - 無制限にF_n をc_n の近似としてよいわけではなく、関数を標本化することで「折り返し」という現象が起き、「折り返し誤差」という誤差が生じる。
- この近似はつまり、$\{f_n; n = 0 \sim N-1\}$ から$\{F_n; n = -N/2 \sim N/2\}$ への変換となる
  - これを「離散フーリエ変換（discrete Fourier transform; DFT）」と呼ぶ
  - 高速なアルゴリズムで行う離散フーリエ変換を、「高速フーリエ変換（fast Fourier transform; FFT）」と呼ぶ

逆離散フーリエ変換

- 離散フーリエ変換によりF_n を求めることができるので、このF_n から元の関数$f(x)$を近似できる
  - $F_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp\left(-\frac{2\pi imn}{N}\right)$
  - $\sum_{n=-N/2}^{N/2} F_n \exp\left(\frac{2\pi ink}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2}\sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp\left(-\frac{2\pi imn}{N}\right)\exp\left(\frac{2\pi ink}{N}\right)$
  - $\sum_{n=-N/2}^{N/2} F_n \exp\left(\frac{2\pi ink}{N}\right) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \left\{\frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2} \exp\left(\frac{2\pi i(k-m)n}{N}\right)\right\}$
- ここで、$\frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2} \exp\left(\frac{2\pi i(k-m)n}{N}\right) = \begin{cases} 0\ (k \neq m) \\ 1\ (k = m) \end{cases}$ となるので、
  - $f_k = f(k\Delta x) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} F_n \exp\left(\frac{2\pi ink}{N}\right)$
  - $f(x) \approx \sum_{n=-N/2}^{N/2} F_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right)$
- この近似はつまり、$\{F_n; n = -N/2 \sim N/2\}$から$\{f_n; n = 0 \sim N-1\}$ への変換となる
  - これを「逆離散フーリエ変換（inverse discrete Fourier transform; IDFT）」と呼ぶ

練習問題

- 三角波形$f(x) = x\ (0 \leq x \leq 1), f(x) = 2 - x\ (1 < x \leq 2)$をもとに$x = 0 \sim 2$の範囲で$x = 0$から0.5毎に$N = 4$個の標本データを作り、離散フーリエ係数$F_0, F_{\pm 1}, F_{\pm 2}$を求めよ
- 前問の離散フーリエ係数を用いて、逆離散フーリエ変換により関数$f(x)$を近似せよ
- ノコギリ波形$f(x) = x\ (0 \leq x \leq 1), f(x) = x - 2\ (1 < x \leq 2)$をもとに$x = 0 \sim 2$の範囲で$x = 0$から0.5毎に$N = 4$個の標本データを作り、離散フーリエ係数$F_0, F_{\pm 1}, F_{\pm 2}$を求めよ
- 前問の離散フーリエ係数を用いて、逆離散フーリエ変換により関数$f(x)$を近似せよ

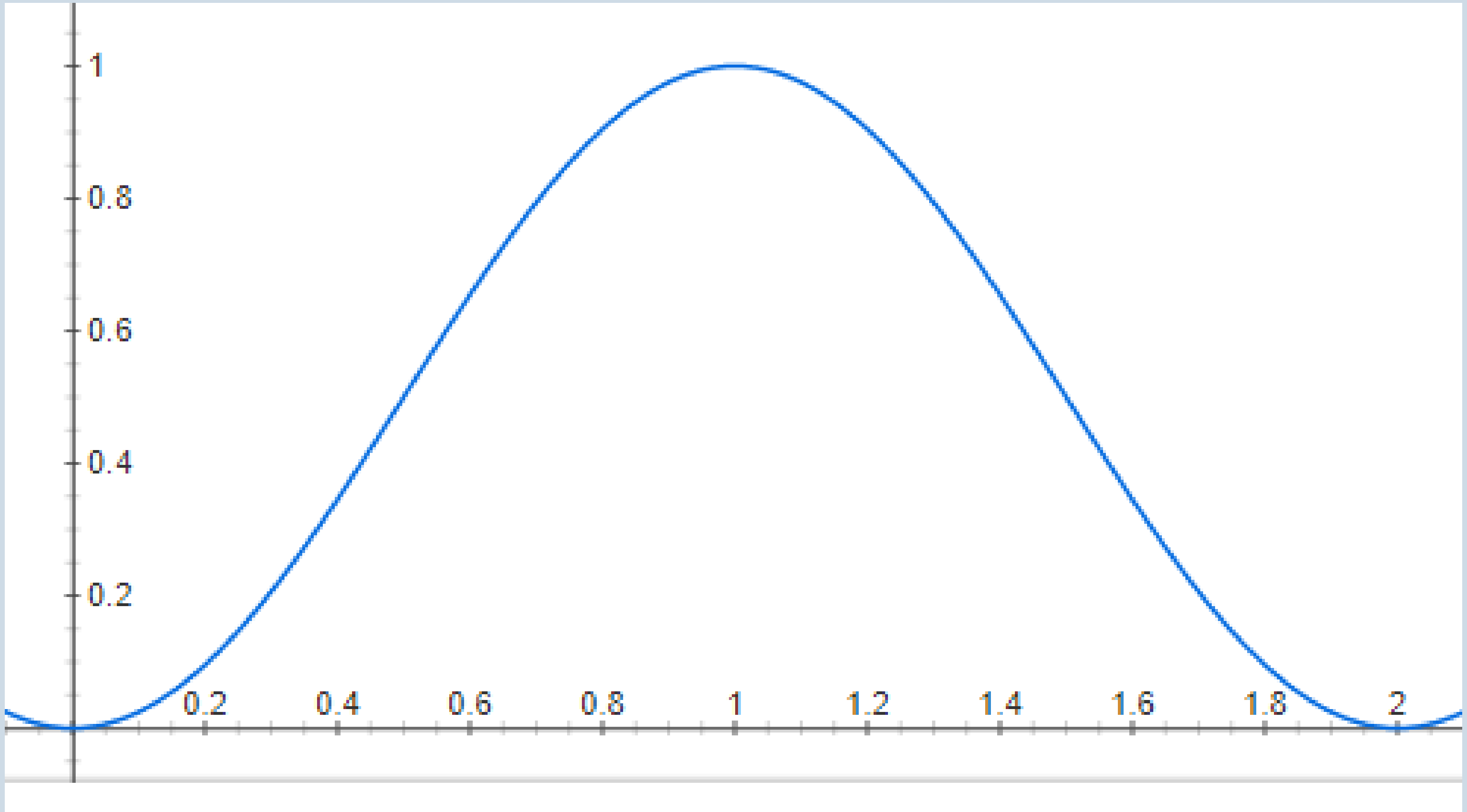
解答例1

- 標本データ: $(0,0)$ $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $(1,1)$ $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$、離散フーリエ係数 : $F_n = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} f_m \exp\left(-\frac{2\pi imn}{4}\right)$
  - $F_0 = \frac{1}{4}(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
  - $F_1 = \frac{1}{4}\left(f_0 + f_1 \exp\left(-\frac{2\pi i}{4}\right) + f_2 \exp\left(-\frac{4\pi i}{4}\right) + f_3 \exp\left(-\frac{6\pi i}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\pi i}{2}\right) + \exp(-\pi i) + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{3\pi i}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(0 - \frac{i}{2} - 1 + \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{4}$
  - $F_2 = \frac{1}{4}\left(f_0 + f_1 \exp\left(-\frac{4\pi i}{4}\right) + f_2 \exp\left(-\frac{8\pi i}{4}\right) + f_3 \exp\left(-\frac{12\pi i}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{2}\exp(-\pi i) + \exp(-2\pi i) + \frac{1}{2}\exp(-3\pi i)\right) = \frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = 0$
  - $F_{-1} = F_1^* = F_1 = -\frac{1}{4}, F_{-2} = F_2^* = F_2 = 0$

解答例2

- 離散フーリエ係数$F_0 = \frac{1}{2}, F_{\pm 1} = -\frac{1}{4}, F_{\pm 2} = 0$なので、
  - $f(x) \approx \sum_{n=-2}^{2} F_n \exp(\pi i n x)$
  - $= F_0 + F_1 \exp(\pi i x) + F_{-1} \exp(-\pi i x) + F_2 \exp(2\pi i x) + F_{-2} \exp(-2\pi i x)$
  - $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \exp(\pi i x) - \frac{1}{4} \exp(-\pi i x)$
  - $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\exp(\pi i x) + \exp(-\pi i x)}{2} \right\}$
  - $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\pi x)$

解答例2（補足）



- $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\pi x)$
- 連続的な関数であれば、離散フーリエ変換も誤差が小さくなる

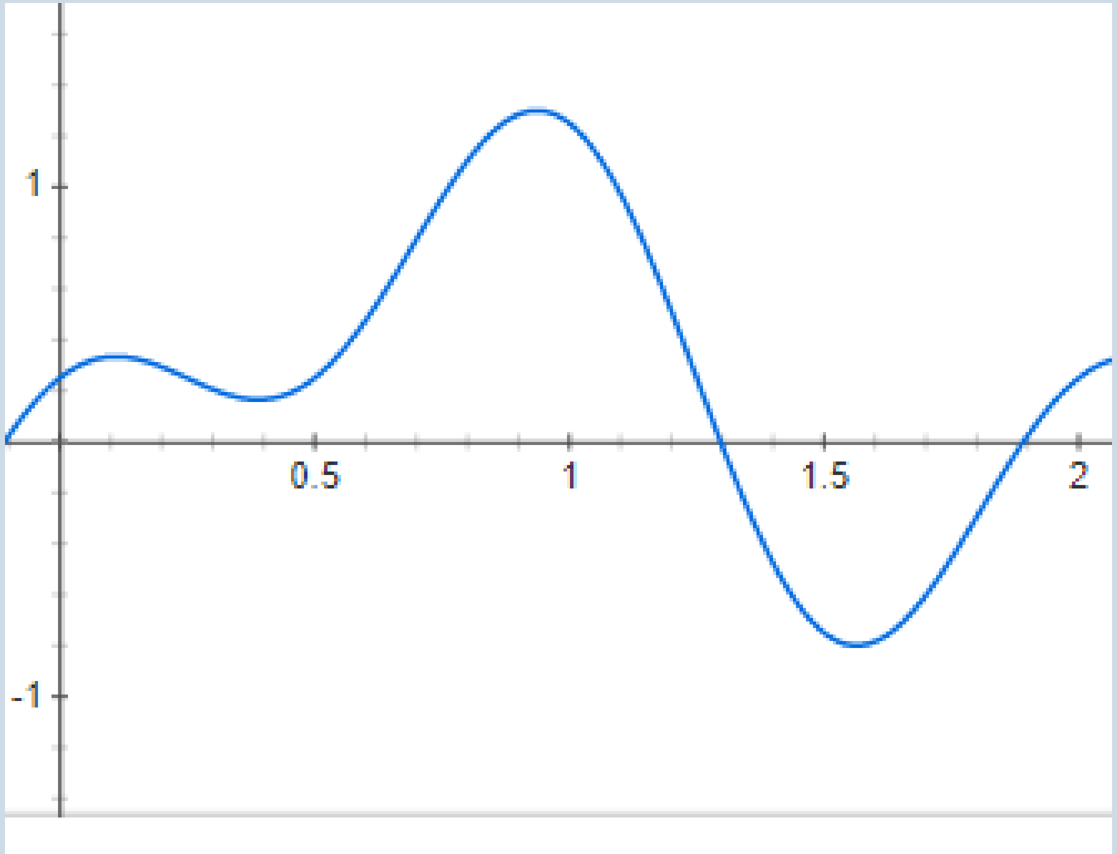
解答例3

- 標本データ: (0, 0) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (1, 1) $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$、離散フーリエ係数: $F_n=\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3}f_m\exp\left(-\frac{2\pi imn}{4}\right)$
  - $F_0=\frac{1}{4}(f_0+f_1+f_2+f_3)=\frac{1}{4}\left(0+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$
  - $F_1=\frac{1}{4}\left(f_0+f_1\exp\left(-\frac{2\pi i}{4}\right)+f_2\exp\left(-\frac{4\pi i}{4}\right)+f_3\exp\left(-\frac{6\pi i}{4}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(0+\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\pi i}{2}\right)+\right.$ $\left.\exp(-\pi i)-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{3\pi i}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(0-\frac{i}{2}-1-\frac{i}{2}\right)=-\frac{1}{4}(1+i)$
  - $F_2=\frac{1}{4}\left(f_0+f_1\exp\left(-\frac{4\pi i}{4}\right)+f_2\exp\left(-\frac{8\pi i}{4}\right)+f_3\exp\left(-\frac{12\pi i}{4}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(0+\right.$ $\left.\frac{1}{2}\exp(-\pi i)+\exp(-2\pi i)-\frac{1}{2}\exp(-3\pi i)\right)=\frac{1}{4}\left(0-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$
  - $F_{-1}=F_1^*=-\frac{1}{4}(1-i),\ F_{-2}=F_2^*=\frac{1}{4}$

解答例4

- 離散フーリエ係数$F_0 = \frac{1}{4}, F_1 = -\frac{1}{4}(1+i), F_{-1} = -\frac{1}{4}(1-i), F_{\pm 2} = \frac{1}{4}$なので、
  - $f(x) \approx \sum_{n=-2}^{2} F_n \exp(\pi i n x)$
  - $= F_0 + F_1 \exp(\pi i x) + F_{-1} \exp(-\pi i x) + F_2 \exp(2\pi i x) + F_{-2} \exp(-2\pi i x)$
  - $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1+i) \exp(\pi i x) - \frac{1}{4}(1-i) \exp(-\pi i x) + \frac{1}{4} \exp(2\pi i x) + \frac{1}{4} \exp(-2\pi i x)$
  - $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\exp(\pi i x)+\exp(-\pi i x)}{2}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\exp(\pi i x)-\exp(-\pi i x)}{2i}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{(\exp(2\pi i x)+\exp(-2\pi i x))}{2}\right\}$
  - $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(\pi x) + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)$

解答例4（補足）



- $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(\pi x) + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)$
- 離散フーリエ変換でも、不連続点を含む関数の近似を行うことができる
- ただし、ギブス現象の発生は避けられない