神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.11.29

偏微分方程式2

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

波動方程式

- 1次元波動方程式の一般形は、次のようになる。
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- このcは物理量uが伝播する速さを規定する。
- 例題：弦の振動（pp. 116）
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ u(x,0) = 2x(1-x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ \ u(0,t) = u(1,t) = 0$
  - 2,3番目の式は初期条件、4番目の式は境界条件
  - この式の微分解は、$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\{\sin(2n-1)\pi(x+t) + \sin(2n-1)\pi(x-t)\}$

波動方程式の差分法1

- 波動方程式を差分化し、数値的に解いていく。初期条件を一般化して、
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0) = \phi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$
  - $\phi(0) = \phi(1) = 0$, ϕ, ψは任意の関数
- 格子点は拡散方程式と同様、
  - $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$, $N\Delta x = 1$
- 差分方程式で微分方程式を近似。
  - $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_j, t_n) \approx \frac{1}{\Delta t^2}\{u(x_j, t_n + \Delta t) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j, t_n - \Delta x)\}$
  - $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t_n) \approx \frac{1}{\Delta x^2}\{u(x_j + \Delta x, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j - \Delta x, t_n)\}$

波動方程式の差分法2

- 従属変数uを格子点の位置での変数U_j^nで代表させると、差分化された波動方程式は、
  - $\frac{1}{\Delta t^2}\left\{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}\right\} = \frac{c^2}{\Delta x^2}\left\{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right\} \quad (j = 1,2,\dots,N-1, n = 0,1,\dots)$
- この式を漸化式として変形させると、
  - $U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_j^{n-1} + \alpha\left\{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right\}$
  - ただし、$\alpha = c^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$
- 時刻t_{n-1}, t_nの2つを用いてt_{n+1}の値を計算するので、初期条件としてU_j^0とU_j^1が必要。
- uの初期条件より、
  - $U_j^0 = \phi(x_j) \qquad (j = 0,1,\dots,N)$

波動方程式の差分法3

- テイラーの公式から、Δt後の従属変数uについて、
  - $u(x,\Delta t) = u(x,0) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0) + O(\Delta t^3)$
- 初期条件より、$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$であり、また$t = 0$で波動方程式が成り立つとすると、$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,0)$となる。この式の右辺を2階差分商を用いて近似すると、
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,0) = \frac{1}{\Delta x^2}\{u(x+\Delta x,0) - 2u(x,0) + u(x-\Delta x,0)\}$
- ゆえに、U_j^1について、
  - $U_j^1 = U_j^0 + \Delta t\,\psi(x,0) + \frac{\alpha}{2}\{U_{j+1}^0 - 2U_j^0 + U_{j-1}^0\}$
- また境界条件より、
  - $U_0^n = U_N^n = 0 \qquad\qquad (n = 0,1,\ldots)$

波動方程式の安定性解析1

- 差分方程式$U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_j^{n-1} + \alpha\left\{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right\}$の特解として、次の形を考える。
  - $U_j^n = f(n)e^{ikj\Delta x}$,　k: 実数，i: 虚数単位
- これを差分方程式に代入すると、
  - $f(n+1)e^{ikj\Delta x} = 2f(n)e^{ikj\Delta x} - f(n-1)e^{ikj\Delta x} + \alpha\left\{f(n)e^{ik(j+1)\Delta x} - 2f(n)e^{ikj\Delta x} + f(n)e^{ik(j-1)\Delta x}\right\}$
  - $f(n+1) = f(n)\left\{\alpha e^{ik\Delta x} + (2-2\alpha) + \alpha e^{-ik\Delta x}\right\} - f(n-1)$　（オイラーの公式）
  - $f(n+1) = f(n)(2 - 2\alpha + 2\alpha\cos k\Delta x) - f(n-1)$　（半角公式）
  - $f(n+1) = 2f(n)\left(1 - 2\alpha\sin^2\frac{k\Delta x}{2}\right) - f(n-1)$
- 右辺を左辺に移項して、$f(n) = s^n$ とおくと、
  - $s^{n+1} - 2\left(1 - 2\alpha\sin^2\frac{k\Delta x}{2}\right)s^n + s^{n-1} = 0$

波動方程式の安定性解析2

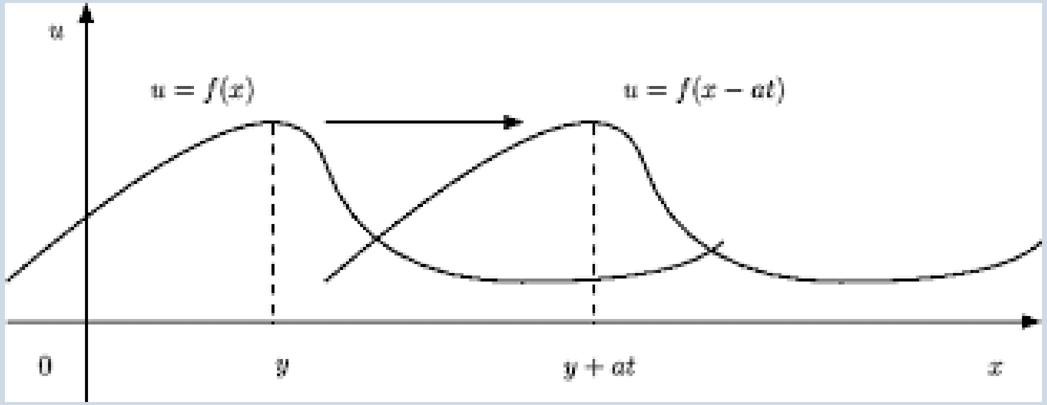
- ここで$f(0) = 1$とすると、$f(1) = s$なので、
  - $s^2 - 2\left(1 - 2\alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}\right) s + 1 = 0$
- ゆえに、$U_j^n = s^n e^{ikj\Delta x}$ はこの差分方程式の特解であり、振幅sは上の二次方程式の根となる。
  - $s = 1 - 2\beta \pm \sqrt{4\beta(\beta - 1)}$　　ただし、$\beta = \alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}$
- 解が発散しないための条件は、任意のkに対して、$|s| \leq 1$でなければならない。
  - $\beta > 1$ の場合：　解s_1, s_2はともに実数。$s_1 \neq s_2$かつ$s_1 s_2 = 1$なので、どちらかが必ず1より大きくなる。
  - $\beta = 1$ の場合：　解は重根。$|s_1| = |s_2| = 1$となる。
  - $\beta < 1$ の場合：　解s_1, s_2はともに複素数。$|s_1| = |s_2| = 1$となる。
- よって、解が発散しないためには$\beta = \alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \leq 1$であり、任意の$k$に対して安定であるためには、
  - $\alpha = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 1 \;\Rightarrow\; |c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$
- これが波動方程式の安定性の条件であり、特に**CFL条件（クーラン・フリードリヒ・ルーイの条件）**という。

波動方程式の安定性解析3

- 波動方程式において、空間領域が$-\infty < x < \infty$の無限領域での問題を考える。
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$
- 原点で質点が運動しているとすると、この変位を$u(0,t)$とおける。変位が速度cでx軸上を正の向きに伝播していくとすると、点xにuの変位が到達するにはx/cだけ時間がかかる。
- 点xで時刻tの変位を$u(x,t)$とすると、この変位は$x-ct$でのuの値$\phi(x-ct)$が伝わってきたということになる。
- 伝播速度が負であれば、cを$-c$と考えればよい。すると、初期条件を満たす波動方程式の解は、
  - $u(x,t) = \frac{1}{2}\{\phi(x-ct) + \phi(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x')dx'$
- これを**ダランベールの解**という。
  - ある点xで時刻tに観測した変位$u(x,t)$は、$\phi(x-ct)$と$\phi(x+ct)$、$x-ct$から$x+ct$までの$\psi(x)$に依存。
  - 差分方程式を解く場合、差分解が微分解の依存範囲をカバーしていないと計算が破綻する。

移流方程式

- 波動方程式$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$を形式的に因数分解すると、
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
  - $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$
- 変位uが伝播速度$\pm c$の波で運動を表現する式　⇒　**移流方程式**
  - $\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$　（x軸の正方向に進行する波）



移流の概念的な説明図。伝播速度によって、変位の形がそのまま伝わっていく。

移流方程式の差分法1

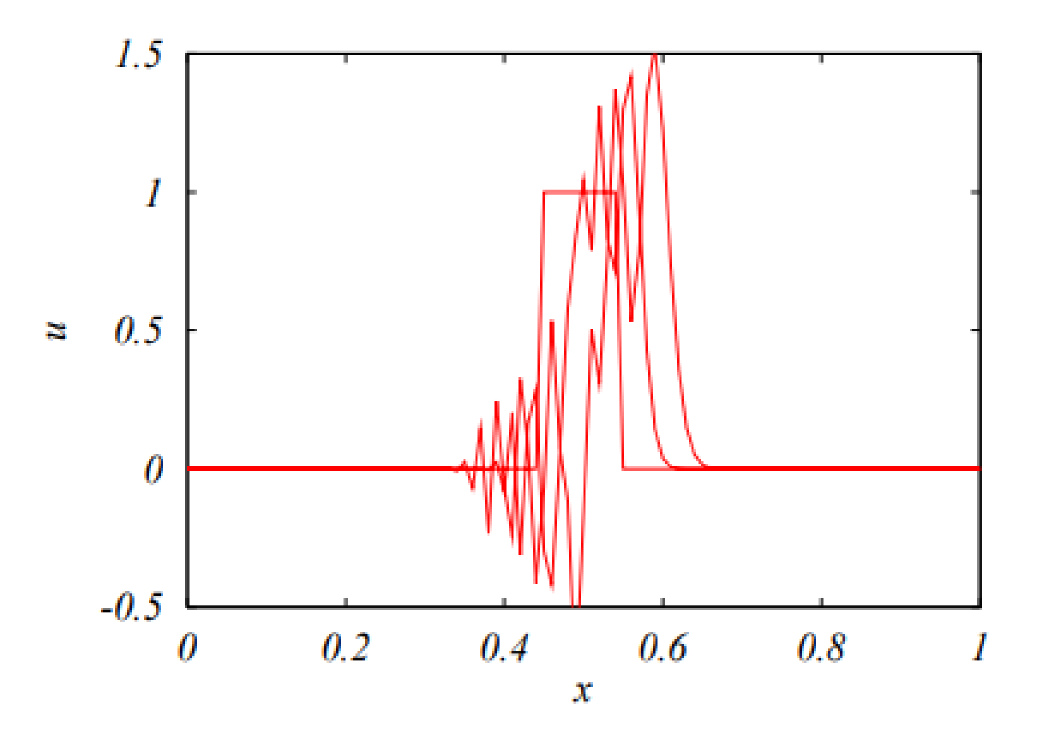
- 移流方程式を差分化し、数値的に解いていく。初期条件を一般化して、
  - $\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$, $u(x,0) = \phi(x)$
  - $u(x+L,t) = u(x,t)$, ϕは任意の関数, 周期Lの境界条件を設定
- 格子点は波動方程式と同様、
  - $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$, $N\Delta x = 1$
- 差分方程式で微分方程式を近似。時間は前進差分、空間は中心差分とすると、
  - $\frac{\partial}{\partial t}u(x_j,t_n) \approx \frac{1}{\Delta t}\{u(x_j,t_n+\Delta t) - u(x_j,t_n)\}$
  - $\frac{\partial}{\partial x}u(x_j,t_n) \approx \frac{1}{2\Delta x}\{u(x_j+\Delta x,t_n) + u(x_j-\Delta x,t_n)\}$

移流方程式の差分法2

- 従属変数uを格子点の位置での変数U_j^nで代表させると、差分化された移流方程式は、
  - $\frac{1}{\Delta t}\left\{U_j^{n+1} - U_j^n\right\} = -\frac{c}{2\Delta x}\left\{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right\} \quad (j = 1,2,\dots, N-1, n = 0,1,\dots)$
- この式を漸化式として変形させると、
  - $U_j^{n+1} = U_j^n + \alpha\left\{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right\}$
  - ただし、$\alpha = -\frac{c}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}$
- uの初期条件より、
  - $U_j^0 = \phi\left(x_j\right) \qquad (j = 0,1,\dots, N)$

移流方程式の差分法3

- 初期条件として、次のように設定する。
  - $$u(x,0)=\begin{cases}1 & (0.45\le x\le 0.55)\\ 0 & (0\le x<0.45, 0.55<x\le 1)\end{cases}$$
- 解析解は元の矩形が伝播速度cでそのまま流れていくだけと予測されるのに対し、数値解は細かな振動が現れる。
- なぜか？



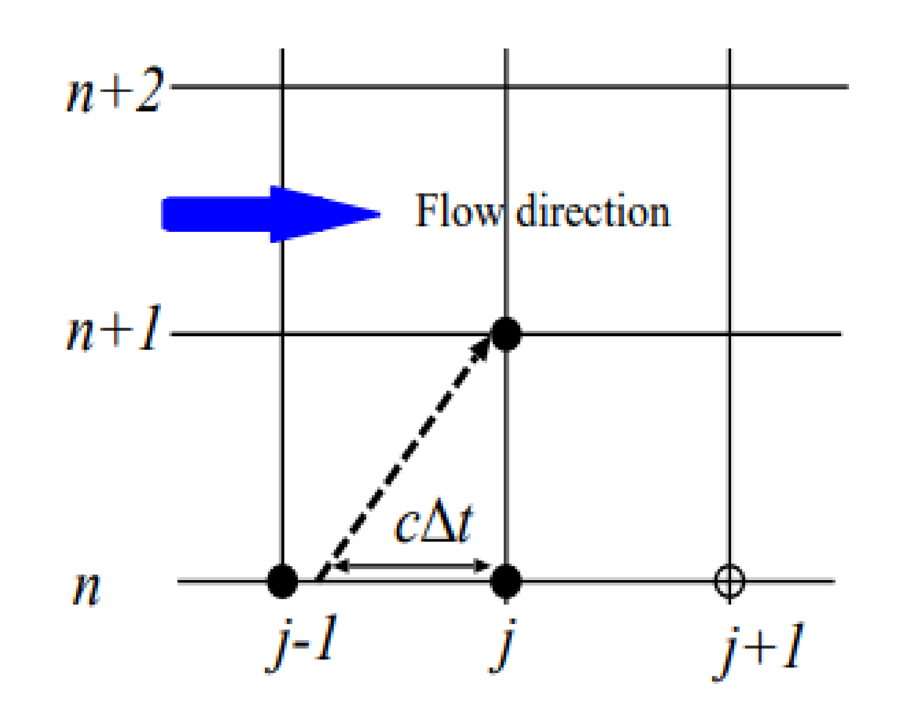
移流方程式の数値解の時間変化を示した図。解は徐々に波打ちだす。最終的に解が発散する。

移流方程式の安定性解析1

- 差分方程式$U_j^{n+1} = U_j^n + \alpha\{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\}$の特解として、次の形を考える。
  - $U_j^n = f(n)e^{ikj\Delta x}$,　k: 実数, i: 虚数単位
- これを差分方程式に代入すると、
  - $f(n+1)e^{ikj\Delta x} = f(n)e^{ikj\Delta x} + \alpha\{f(n)e^{ik(j+1)\Delta x} - f(n)e^{ik(j-1)\Delta x}\}$
  - $f(n+1) = f(n)\{1 + \alpha e^{ik\Delta x} - \alpha e^{-ik\Delta x}\}$　（オイラーの公式）
  - $f(n+1) = f(n)(1 - 2i\alpha \sin k\Delta x)$
- ここで$f(0) = 1$とすると、$f(n) = (1 - 2i\alpha \cos k\Delta x)^n$
- ゆえに、$U_j^n = (1 - 2i\alpha \cos k\Delta x)^n \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} e^{ikj\Delta x}$ はこの差分方程式の特解である。解が発散しないための条件は、任意のkに対して、$\sqrt{1 + 4\alpha^2 \cos^2 k\Delta x} \leq 1$でなければならない。
  - 条件を満たす実数αは存在しない ⇒ この差分方程式は必ず発散する

移流方程式の安定性解析2

- もう少し直観的に理解するため、移流方程式の物理的な理解に立ち返る。伝播速度$c > 0$なので、情報は全てx軸の負から正へと伝わる。
  - 全ての変動は左から右へ伝播し、逆はない。
  - 中心差分をとると、右から左への情報の伝播が発生してしまう ⇒ 不安定
- $c > 0$のとき、左から右への流れと考え、
  - $c\frac{\partial u}{\partial x} = c\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad (c > 0)$
- 逆に$c < 0$のとき、右から左への流れと考え、
  - $c\frac{\partial u}{\partial x} = c\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}, \quad (c < 0)$
- このような差分を**風上（上流）差分**という。



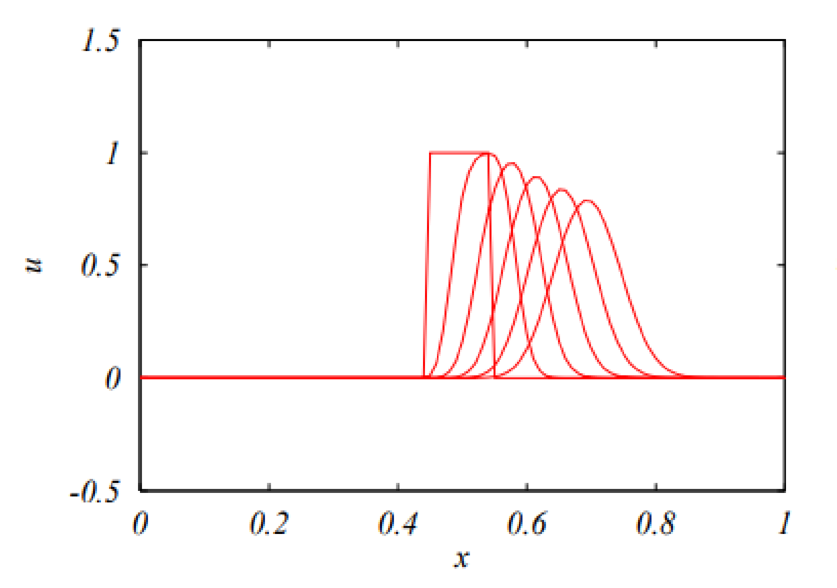
一次元定常移流における情報の流れ

風上差分方程式1

- 風上差分によって差分化された移流方程式は、
  - $$\frac{1}{\Delta t}\left\{U_j^{n+1}-U_j^n\right\}=\begin{cases}-\frac{c}{\Delta x}\left\{U_j^n-U_{j-1}^n\right\} & (c>0)\\ -\frac{c}{\Delta x}\left\{U_{j+1}^n-U_j^n\right\} & (c<0)\end{cases}$$
- この形では不便なので、cの正負をまとめていく。$c\pm|c|$を考えると、
  - $$c+|c|=\begin{cases}2c & (c>0)\\ 0 & (c<0)\end{cases},\quad c-|c|=\begin{cases}0 & (c>0)\\ 2c & (c<0)\end{cases}$$
- 風上差分方程式に代入すると、
  - $$\frac{1}{\Delta t}\left\{U_j^{n+1}-U_j^n\right\}=-\frac{c+|c|}{2\Delta x}\left\{U_j^n-U_{j-1}^n\right\}-\frac{c-|c|}{2\Delta x}\left\{U_{j+1}^n-U_j^n\right\}$$

風上差分方程式2

- 右辺を整理すると、
  - $\frac{1}{\Delta t}\{U_j^{n+1} - U_j^n\} = -\frac{c}{2\Delta x}\{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\} + \frac{|c|\Delta x}{2}\frac{1}{\Delta x^2}\{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\}$
- 右辺第2項は拡散係数$\kappa = \frac{|c|\Delta x}{2}$で与えられる拡散項に対応する　⇒　**数値拡散**
- 風上差分方程式は、中心差分項に数値拡散項が加わったものと解釈できる。
  - 風上差分方程式の場合、数値拡散によって元の波の形が維持されず、徐々に崩れていく。



風上差分による移流方程式の数値解の時間変化を示した図。解は徐々に鈍っていくことが分かる。

練習問題

- 次の波動方程式の初期値・境界値問題を差分法で解く。
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1, t > 0)$
  - $u(x,0) = x(2-x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$
  - 陽公式を用いて、$(\Delta x, \Delta t) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{50}\right)$の時、$t = \frac{1}{25}$での$x = \frac{1}{2}$における値を答えよ。
- 次の差分方程式の安定性の条件を示せ。
  - $\frac{1}{\Delta t}\left\{U_j^{n+1} - U_j^n\right\} = -\frac{c}{\Delta x}\left\{U_j^n - U_{j-1}^n\right\} \qquad (c > 0)$

回答例1

- 次の拡散方程式の初期値・境界値問題を差分法で解く。
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1, t > 0)$
  - $u(x,0) = x(2-x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad (0 \le x \le 1)$
  - 陽公式を用いて、$(\Delta x, \Delta t) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{50}\right)$の時、$t = \frac{1}{25}$での$x = \frac{1}{2}$における値を答えよ。
- 差分方程式を立てる。
  - $U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_j^{n-1} + \alpha\left\{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right\}$ 　ただし、$\alpha = c^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} = \frac{4}{25}$
  - $U_j^1 = U_j^0 + \frac{\alpha}{2}\left\{U_{j+1}^0 - 2U_j^0 + U_{j-1}^0\right\}$
- 求める答えをU_j^nとおくと、$(j,n) = (10,2)$
  - $U_{10}^2 = 2U_{10}^1 - U_{10}^0 + \frac{4}{25}\{U_{11}^1 - 2U_{10}^1 + U_9^1\}, \quad U_{11}^1 = U_{11}^0 + \frac{2}{25}\{U_{12}^0 - 2U_{11}^0 + U_{10}^0\}, \quad U_{10}^1 = U_{10}^0 + \frac{2}{25}\{U_{11}^0 - 2U_{10}^0 + U_9^0\}, \quad U_9^1 = U_9^0 + \frac{2}{25}\{U_{10}^0 - 2U_9^0 + U_8^0\}$
- 初期条件より、$U_{12}^0 = 0.84, \ U_{11}^0 = 0.7975, \ U_{10}^0 = 0.75, \ U_9^0 = 0.6975, \ U_8^0 = 0.64$ なので、$U_{11}^1 = 0.7971, \ U_{10}^1 = 0.7496, \ U_9^1 = 0.6971$
  よって、$U_{10}^2 = 0.7484$

回答例2

- 次の差分方程式の安定性の条件を示せ。
  - $\frac{1}{\Delta t}\{U_j^{n+1} - U_j^n\} = -\frac{c}{\Delta x}\{U_j^n - U_{j-1}^n\} \quad (c > 0)$
- 差分方程式の特解を求め、それが発散しないような条件を考える。特解として、
  - $U_j^n = f(n)e^{ikj\Delta x}, \quad k$: 実数, i: 虚数単位
- これを差分方程式に代入すると、$\alpha = c\frac{\Delta t}{\Delta x} > 0$ とおいて、
  - $f(n+1)e^{ikj\Delta x} = f(n)e^{ikj\Delta x} - \alpha f(n)e^{ikj\Delta x} + \alpha f(n)e^{ik(j-1)\Delta x}$
  - $f(n+1) = f(n)\{1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x}\} = f(n)\{1 - \alpha + \alpha(\cos k\Delta x - i\sin k\Delta x)\}$
- $f(0) = 1$ とすると、$f(n) = (1 - \alpha + \alpha\cos k\Delta x - i\alpha\sin k\Delta x)^n$ なので、$U_j^n = (1 - \alpha + \alpha\cos k\Delta x - i\alpha\sin k\Delta x)^n e^{ikj\Delta x}$ はこの差分方程式の特解となる。絶対値は、$|1 - \alpha + \alpha\cos k\Delta x - i\alpha\sin k\Delta x| = \sqrt{(1 - \alpha + \alpha\cos k\Delta x)^2 + \alpha^2\sin^2 k\Delta x} = \sqrt{1 - 4\alpha\sin^2\frac{k\Delta x}{2} + 4\alpha^2\sin^2\frac{k\Delta x}{2}}$
- 任意のkについて$\sqrt{1 - 4\alpha\sin^2\frac{k\Delta x}{2} + 4\alpha^2\sin^2\frac{k\Delta x}{2}} \leq 1$ であればよいので、$\alpha = c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$