神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.6.23

関数の合成1

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

前期(中間)再試験

- 7月6日(木) 7時間目(50分)
  - 70点満点、前期中間試験で70点未満の人を対象、試験成績の良い方を採用する
  - 関数電卓の持ち込みは認める
- 出題範囲
  - 前期(中間)試験と同じ
  - 第1章「数値解析への案内」始め～ 第3章「曲線の推定」終わりまで(1-4, 1-5は除く)
  - 教科書(pp.1～pp.55)、関連する講義ノートのいずれも含む
- 出題レベル
  - 設問レベルは中間試験と同程度、設問方式は変わりうる
  - 教科書の章末問題程度
  - 知識を問う問題、計算問題、数値計算プログラムに関する問題

関数合成がなぜ必要なのか

- ある関数$f(x)$を別の数式の形で表現する
  - $f(x) = \sin x$とし、コンピュータ上で$\sin x$を計算することを考える
  - 数学ライブラリを使えばよい　⇒　ライブラリはどのように値を返している？
  - 数学ライブラリが一切使えない場合に、基本的な命令（四則演算）で$\sin x$を表すには？
    - $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
  - $x = 0$の周辺で、$f(x) = \sin x$を級数近似
  - この考え方を応用し、複雑な関数でもコンピュータ上で扱うことができるようになる
- 級数とは、無限項の数列の和
  - 無限であることを強調する場合、無限級数と表記することもある

テイラー展開1

- 「テイラーの定理」
  - 関数$f(x)$ が$a \leq x \leq b$ においてn 回微分可能であるとき、次式を満たすc $(a < c < b)$ が存在する
  - $f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}$
- テイラーの定理は、「平均値の定理」の一般化に相当する
  - 区間$[a, b]$ で連続、(a, b) で微分可能な関数$f(x)$ に対し、次式を満たすc $(a < c < b)$ が存在する
  - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$
  - $n = 1$ のテイラーの定理に相当する

テイラー展開2

- テイラーの定理をもとに、a を定数、$b = x$ を変数として考える
  - $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + f^{(n)}(c)\frac{(x-a)^n}{n!}$
  - この式の第2項目を「剰余項」という
- 関数$f(x)$を、テイラーの定理を用いて上記の多項式で表すことを「テイラー展開」という
- $a = 0$ とするときのテイラー展開を、特に「マクローリン展開」という
  - $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + f^{(n)}(c)\frac{x^n}{n!}$

テイラーの定理の証明1

- 関数$g(x)$を次のように定義する
  - $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} + A(b-x)^n$
  - $g(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \cdots + f^{(n-1)}(x) \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} + A(b-x)^n$
- ここでAは定数で、$g(a) = g(b)$となる値を選ぶ。このとき、$g'(c) = 0$となるc $(a < c < b)$が存在する（ロルの定理）
  - $g'(x) = f^{(n)}(x) \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} - nA(b-x)^{n-1}$
  - $g'(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} - nA = 0$
  - $A = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$

テイラーの定理の証明2

- 一方、$g(a) = g(b)$ であり、$g(b) = f(b)$ なので、$g(a) = f(b)$
  - $g(a) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + A(b-a)^n = f(b)$
  - $g(a) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + A(b-a)^n = f(b)$
- ここで$A = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ であるので、「テイラーの定理」を得ることができる

テイラー展開の例

- 関数$f(x) = \sin x$をマクローリン展開で表す
  - $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + f^{(n)}(c)\frac{x^n}{n!}$
  - $f(x) = \sin x = \sum_{k=0}^{\frac{n}{4}-1}\left\{\sin^{(4k)}(0)\frac{x^{4k}}{4k!} + \sin^{(4k+1)}(0)\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} + \sin^{(4k+2)}(0)\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} + \sin^{(4k+3)}(0)\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}\right\} + \sin^{(\mathrm{n})}(c)\frac{x^n}{n!}$
- ここで、$\sin^{(4k)}(0) = \sin(0) = 0,\quad \sin^{(4k+1)}(0) = \cos(0) = 1,\quad \sin^{(4k+2)}(0) = -\sin(0) = 0,$ $\sin^{(4k+3)}(0) = -\cos(0) = -1$
  - $\sin x = \sum_{k=0}^{\frac{n}{4}-1}\left\{\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}\right\} + \sin^{(\mathrm{n})}(c)\frac{x^n}{n!}$
  - $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \sin^{(\mathrm{n})}(c)\frac{x^n}{n!}$

テイラー展開の誤差

- 関数$f(x) = \sin x$とし、$n = 4$でマクローリン展開による近似を打ち切ると、
  - $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \sin(c)\frac{x^4}{4!}$
- 剰余項のみを右辺に残し、両辺の絶対値を取る。$|\sin(c)| \leq 1$なので、
  - $\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| = \left|\sin(c)\frac{x^4}{4!}\right| \leq \frac{1}{4!}|x^4|$
- ここで、$x = 0.1$とすると、
  - $\left|\sin 0.1 - \left(0.1 - \frac{0.1^3}{3!}\right)\right| \approx |\sin 0.1 - 0.099833333| \leq 4.1667 \times 10^{-6}$
  - $\sin 0.1 = 0.09983341664 \ldots$

練習問題

- 次の関数をマクローリン級数で3次の項まで表せ
  - (a) $\sqrt{1+x}$
  - (b) $\cos x$
  - (c) e^x
  - (d) $\log(1+x)$
- $f(x)=e^x$ および$f(x)=e^{1+x}$ について、4次の項までマクローリン展開を行い、e^2 を有効数字4桁で値を示せ。また$e^2=7.389$に対し、後者のほうが誤差が小さいことを確認せよ

解答例1

- 3次の項までのマクローリン級数
  - $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$
- (a) $\sqrt{1+x}$
  - $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}, f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$
  - $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2\ 2!}x^2 + \frac{3}{2^3\ 3!}x^3 + \cdots$
- (b) $\cos x$
  - $f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x$
  - $f(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$

解答例2

- 3次の項までのマクローリン級数
  - $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$
- (c) e^x
  - $f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$
  - $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$
- (d) $\log(1 + x)$
  - $f(x) = \log(1 + x), f'(x) = (1 + x)^{-1}, f''(x) = -(1 + x)^{-2}, f'''(x) = 2(1 + x)^{-3}$
  - $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

解答例3

- 4次の項までのマクローリン展開で打ち切る
  - $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 7.000\ (x = 2)$
  - $e^{1+x} = e\ e^x = e\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4\right) = e\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 7.362\ (x = 1)$
- e^x の$x = 2$ における誤差は-0.389
- e^{1+x} の$x = 1$ における誤差は-0.027