神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.6.16

中間試験（前期）解説

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

問１－１

- 次の文章中の空欄(a～e)を適切な数、数式、または言葉で埋めよ。(各2点)
  - 数値計算において、明示された一連の手続きによる演算を「 (a)アルゴリズム 」という。しかし複雑な数値計算を手計算や電卓で行うには非常に大きな労力を伴う。そこで計算機が実行可能な命令の並びに翻訳できる「 (b)プログラム 」を作成し、計算機に数値計算を実行させることで、それらの労力を大幅に削減できる。例えば1秒間に100万回の演算を実行することができる計算機では、$x_{n+1} = x_n^3 + 5x_n + 3$ という漸化式についてn=1～2000万回まで実行する必要がある場合、「 (c)120 」秒かかる。ここでは四則演算および代入に要するコストを1演算と考える。計算機は実数を有限の浮動小数点数でしか表せないため、下位の桁を四捨五入等の操作により、一定の桁数に収める必要がある。このとき生じる誤差を「 (d)丸め誤差 」という。他に、計算機は無限小等の無限に関する数学的操作を行えないため、有限の操作で置き換えて近似計算を行う。この操作による誤差を「 (e)打ち切り誤差 」という。
  - $x_{n+1} = x_n^3 + 5x_n + 3$: 乗算が3回、加算が2回、代入が1回の合計6演算。100万回/秒の計算を行える計算機で、6演算×2000万回行う必要があるので、$6 \times 2 \times 10^7 \div 10^6 = 120$ [sec]

問１－２

- 次の4つの8ビット符号付2進数について、10進数に変換した時の値を答えよ。（各3点）
  - (a) 00010101　(b) 00111001　(c) 10111010　(d) 11111001
- (a) $2^4+2^2+2^0=16+4+1=21$
- (b) $2^5+2^4+2^3+2^0=32+16+8+1=57$
- (c) $-2^7+2^5+2^4+2^3+2^1=-128+32+16+8+2=-70$
- (d) $-2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+2^0=-128+64+32+16+8+1=-7$

問１－３

- 有効数字6桁の2つの数字 p=98.3248 と q=98.2511 がある。
  - (a) p-q の有効桁数を求めよ。(3点)
  - (b) この有効桁数が変化する現象を何と呼ぶか、答えよ。(2点)
- (a) $p-q=98.3248-98.2511=0.0737$, 即ち有効数字は3桁
- (b) 有効数字6桁から3桁へ減少している ⇒ 桁落ち

問1－4

- ネイピア数の真値e=2.7182818･･･ に対し、数値解として2.7181368 を得たとする。
  - (a) この時の絶対誤差$|\varepsilon|$を、浮動小数点表示を用いて、有効数字4桁で求めよ。(3点)
  - (b) この時の相対誤差ε_Rを、浮動小数点表示を用いて、有効数字4桁で求めよ。(3点)
- (a) $|\varepsilon| = |2.7181368 - 2.7182818| = 0.0001450 = 1.450 \times 10^{-4}$
- (b) $\varepsilon_R = \frac{|\varepsilon|}{\alpha} = \frac{1.450\times10^{-4}}{2.7182818} = 0.000053342 \ldots = 5.334 \times 10^{-5}$

問2－1

- 次の文章中の空欄（a～e）を適切な数、数式、または言葉で埋めよ。（各2点）
  - $f(x) = 0$となるようなxを、$f(x)$の根という。数値計算を用いて根の数値解を求めるとき、二分法とニュートン法という基本的な反復計算解法が存在する。反復計算による数値解は、あくまで近似解であるので、厳密に$f(x) = 0$を満たすxとはならない。そのため、誤差がごく小さな数を下回れば計算が終了したと判断する。この条件を「（a）収束判定条件 」という。二分法のメリットは、適切な初期値を選べば「（b）必ず収束する 」ということである。これを数値的に安定と呼び、二分法の特徴の1つである。一方、ニュートン法はそのメリットとして、二分法に比べて「（c）収束が速い 」ということが挙げられる。ただしニュートン法を適用するには、根の周辺で関数が「（d）連続であること 」「（e）単調に変化すること 」「急激に変化しないこと」という3つの条件を満たしていなければならず、そうでない場合は計算が正しく終了しないことがある。

問2－2

- 次のFortranソースコードは、二分法を用いて、$f(x) = e^{x-2} - 4$ の根を求めるものである。
  - (a) ソースコードの空欄（ア～オ）を、Fortranのソースコードとして、正しく埋めよ。（各2点）

```
program bisection_method
  implicit none

  integer :: n
  real(8) :: a, b, c, d, fc
  real(8) :: eps

  a = 0.0
  b = 4.0
  eps = 1.0e-8

  do n = 1, 100
    c = ( a + b ) / 2.0
    d = abs( a - b ) / 2.0
```

```
    if( d < eps ) then
      exit
    end if

    fc = exp( c - 2.0 ) - 4.0
    if( fc < 0.0 ) then
      a = c
    else
      b = c
    end if
  end do

  write(*,*) 'step number =',n,'; c=',c,'; d=',d
end program
```

問2－2(続)

- 次のFortranソースコードは、二分法を用いて、$f(x)=e^{x-2}-4$ の根を求めるものである。
  - (b) この根を求めるための反復計算回数Nを整数で求めよ。計算途中の式も書くこと。(5点)
- 反復計算回数Nは、$\frac{|a-b|}{2^{N+1}}<\varepsilon$ を満たす最小の整数Nとなる
  - ここで$\varepsilon=10^{-8},\ a=0,\ b=4$
- $\frac{2^2}{2^{N+1}}<10^{-8} \Rightarrow 2^{1-N}<10^{-8} \Rightarrow 1-\mathrm{N}<-\frac{8}{\log 2} \Rightarrow N>\frac{8}{\log 2}+1=27.57\ldots$
- 反復計算回数は28回となる

問2－3

- ニュートン法を用いて、$f(x) = e^{x-2} - 4$ の根を求めよ。ただし初期値を4、許容誤差εは$\varepsilon = 10^{-3}$とする。また、計算途中の数値および数値解は四捨五入で有効数字4桁とする。計算途中の式も書くこと。（8点）

- ニュートン法の解：$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}, f'(x) = e^{x-2}$
  - $x_0 = 4$
  - $x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0-2}-4}{e^{x_0-2}} = 4 - \frac{e^2-4}{e^2} = 3.541$
  - $x_2 = x_1 - \frac{e^{x_1-2}-4}{e^{x_1-2}} = 3.541 - \frac{e^{1.541}-4}{e^{1.541}} = 3.398$
  - $x_3 = x_2 - \frac{e^{x_2-2}-4}{e^{x_2-2}} = 3.398 - \frac{e^{1.398}-4}{e^{1.398}} = 3.386$
  - $x_4 = x_3 - \frac{e^{x_3-2}-4}{e^{x_3-2}} = 3.386 - \frac{e^{1.386}-4}{e^{1.386}} = 3.386$

問3－1

- 次の文章中の空欄（a～e）を適切な数、数式、または言葉で埋めよ。（各2点）
  - 2次元座標上でN+1個の点を与えられたとき、その点を全て通る曲線を推定する。ラグランジュ補間は、N次の補間多項式を用いて曲線を推定する。ただし$y=\frac{1}{1+25x^2}$ のような曲線の上にある点について、区間をN等分してN次の補間多項式で近似すると、誤差が非常に大きくなる時がある。この現象を「（a）ルンゲ現象 」という。このような誤差を避けるため、区分的に低次のラグランジュ補間を用いることがある。しかし、一般にそれでは曲線は滑らかにならない。曲線を滑らかに接続するためには、「（b）スプライン」補間を用いる。この補間によって推定される関数$y=S(x)$は、特に3次の多項式で近似されることが多い。この補間を行うための条件として、全ての点を通ることの他に、区分の境目で「（c）$S'(x)$, $S''(x)$ が連続」という条件を満たす必要がある。すなわち、この条件は区分の境目で曲線に滑らかさを与える。また、$S(x)$を一意に定めるためには曲線の両端で形状を設定しなければならない。ここで曲線の傾きの変化率がゼロという条件を与える場合、曲線$S(x)$は特に「（d）自然スプライン 」という。この補間による誤差は、隣り合う点の間隔の最大値をhとすると、最悪でも「（e）h^2 」に比例して小さくなる。

問3－2

- 次のFortranソースコードは、$\cos(x)$ 上の3点 $(x, y) = (-\frac{\pi}{2}, 0)\ (0, 1)\ (\frac{\pi}{2}, 0)$ が与えられ、ラグランジュ補間によって曲線を推定するものである。
  - (a) ソースコードの空欄（ア～ウ）を、Fortranのソースコードとして、正しく埋めよ。（各2点）

```
program lagrange
  implicit none

  real(8), parameter :: pi = &
    3.141592653589793d0
  real(8), parameter :: px(3) = &
    (/ -pi/2.0d0, 0.0d0, pi/2.0d0 /)
  real(8), parameter :: py(3) = &
    (/ 0.0d0, 1.0d0, 0.0d0 /)

  integer :: i, j, n
  real(8) :: x, y
  real(8) :: lx

  do i = 1, 101
    x = -pi/2.0d0 + pi / 100.0d0 * dble( i - 1 )
    y = 0.0d0
```

```
    do j = 1, 3
      lx = 1.0d0

      do n = 1, 3
        if( n /= j ) then
          lx = lx * ( x - px(n) ) / ( px(j) - px(n) )
        end if
      end do
      y = y + lx * py(j)

    end do

    write(*,*) x, y
  end do

end program
```

問3－2(続)

- 次のFortranソースコードは、$\cos(x)$ 上の3点 $(x,y)=(-\frac{\pi}{2},0)\,(0,1)\,(\frac{\pi}{2},0)$ が与えられ、ラグランジュ補間によって曲線を推定するものである。
  - (b) このラグランジュ補間によって導かれる補間多項式を用いて、x=π/4のときのyの値を求めよ。計算途中の式も書くこと。(5点)

- 3点が与えられているので、2次のラグランジュ補間多項式を用いる
  - $p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$
  - $p_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})}{(0+\frac{\pi}{2})(0-\frac{\pi}{2})}=-\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$

問3－3

- 最小二乗法は、N回の測定で得られた測定データに対し、理論式$y = Ax + B$が成立するとして、各点から直線$y = Ax + B$に垂直に下した線分の長さの2乗の総和Eが最も小さくなるようなA, Bの値を決める。
  - (a) 最小二乗法によって$y = Ax + B$の係数A, Bの値を求めるために必要な条件となる方程式を、Eを用いて記述せよ。（3点）
  - (b) 上記の(a)の方程式を何と呼ぶか、答えよ。（3点）

- (a) $\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial B} = 0$
- (b) 正規方程式

問3－3（続）

- 最小二乗法は、N回の測定で得られた測定データに対し、理論式$y = Ax + B$が成立するとして、各点から直線$y = Ax + B$に垂直に下した線分の長さの2乗の総和Eが最も小さくなるようなA, Bの値を決める。
  - (c) 下記の表のように、測定データが与えられたとする。このとき、理論式を$y = Ax + B$として、最小二乗法によって係数A, Bの値を有効数字4桁まで求めよ。計算途中の式も書くこと。（7点）

x	7.727	3.845	2.777	1.065	3.564
y	-15.89	-4.305	-2.029	3.758	-3.261

- $\overline{x} = (7.727 + 3.845 + 2.777 + 1.065 + 3.564)/5 = 18.978/5 = 3.7956$
- $\overline{y} = (-15.89 - 4.305 - 2.029 + 3.758 - 3.261)/5 = -21.727/5 = -4.3454$
- $A = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{X}^2} = \frac{-152.5892 - 5\times 3.7956\times(-4.3454)}{96.0386 - 5\times 3.7956^2} = -2.9211 \approx -2.921$
- $B = -4.3454 - 3.7956 \times (-2.9211) = 6.7419 \approx 6.742$