神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.6.30

関数の合成2

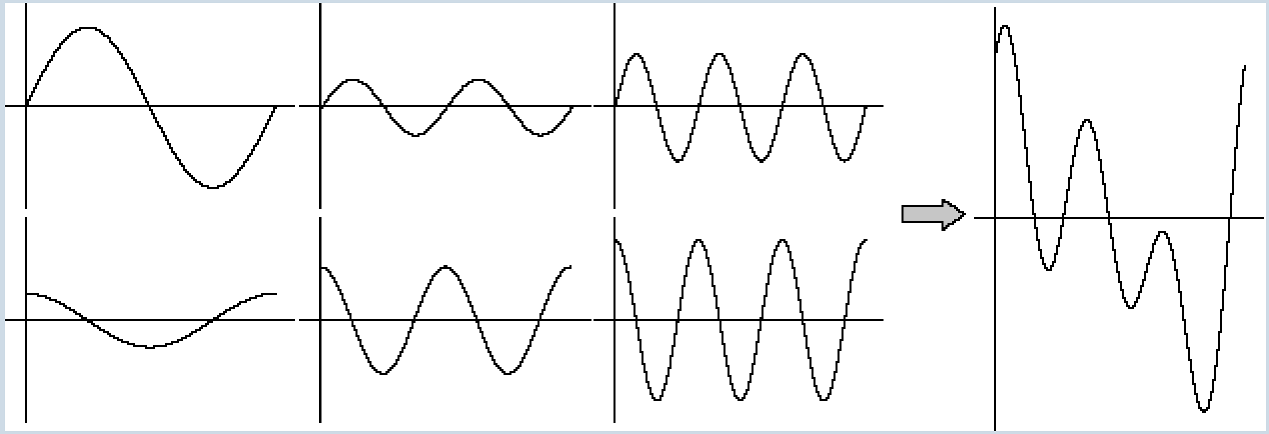
山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

波の合成

- 単純な波（sin波とcos波）は周期的に繰り返される。周期関数とも呼ばれる。
  - 周期：波の山と山（または谷と谷）の間隔。
  - 周波数：描かれる波の数。周期の逆数。
- 「フーリエ級数」は単純な波を組み合わせることで関数を表現する



画像引用元：http://izumi-math.jp/sanae/report/katati/katati_5.htm

- 単純な波の重ね合わせによって複雑な波の形を表現することができる

フーリエ級数

- 周期L の、任意の周期関数$f(x)$ は、次のように展開することができる
  - $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right)$
  - a_0, a_n, b_n は「フーリエ係数」と呼び、この右辺 を「フーリエ級数」と呼ぶ
- フーリエ級数は定数、基本波、高調波から構成される級数
  - 定数$\frac{a_0}{2}$ は、1周期のsin波とcos波の平均がそれぞれゼロなので、右辺の周期L における平均を示す
  - 基本波とは、$n = 1$ における周期L, 周波数$\frac{1}{L}$ のsin波とcos波
  - 高調波とは、$n > 1$ における周期$\frac{L}{n}$, 周波数$\frac{\mathrm{n}}{L}$ のsin波とcos波
- 周期関数$f(x)$ は不連続点があっても良いが、その場合のフーリエ級数は元の周期関数$f(x)$ に一致しなくなる。不連続点付近で、一様な収束をしなくなる。

フーリエ係数の導出

- 周期$L = X_2 - X_1$として、フーリエ係数は以下の式で求めることができる
  - $$\begin{cases} a_n = \frac{2}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{L}dx \\ b_n = \frac{2}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}dx \end{cases} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots)$$
- フーリエ係数a_n, b_nは、次の性質を持つことが明らかである
  - $a_{-n} = a_n$
  - $b_{-n} = -b_n$
- ※この性質は複素フーリエ級数で利用される

フーリエ係数の証明1

- 元の周期関数$f(x)$の式の両辺に$\cos\frac{2\pi nx}{L}$をかけて、$X_1 \sim X_2$の範囲で積分すると、
  - $\int_{X_1}^{X_2} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{L}dx = \int_{X_1}^{X_2}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{2\pi mx}{L} + b_m\sin\frac{2\pi mx}{L}\right)\right\}\cos\frac{2\pi nx}{L}dx$
- ここで、右辺の各項について考える
  - $\frac{a_0}{2}\cos\frac{2\pi nx}{L}$
  - $a_m\cos\frac{2\pi mx}{L}\cos\frac{2\pi nx}{L} = \frac{a_m}{2}\left(\cos\frac{2\pi(m+n)x}{L} + \cos\frac{2\pi(m-n)x}{L}\right) \quad (m > 0)$
  - $b_m\sin\frac{2\pi mx}{L}\cos\frac{2\pi nx}{L} = \frac{b_m}{2}\left(\sin\frac{2\pi(m+n)x}{L} + \sin\frac{2\pi(m-n)x}{L}\right) \quad (m > 0)$

フーリエ係数の証明2

- $n = 0$ の場合： $L = X_2 - X_1$の範囲で積分されると、
  - $\int_{X_1}^{X_2} \frac{a_0}{2} \cos \frac{2\pi nx}{L} dx = \int_{X_1}^{X_2} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0 L}{2}$
  - $\int_{X_1}^{X_2} \frac{a_m}{2} \left(\cos \frac{2\pi(m+n)x}{L} + \cos \frac{2\pi(m-n)x}{L} \right) dx = \int_{X_1}^{X_2} a_m \left(\cos \frac{2\pi mx}{L} \right) dx = 0$
  - $\int_{X_1}^{X_2} \frac{b_m}{2} \left(\sin \frac{2\pi(m+n)x}{L} + \sin \frac{2\pi(m-n)x}{L} \right) dx = \int_{X_1}^{X_2} b_m \left(\sin \frac{2\pi mx}{L} \right) dx = 0$
  - sin波、cos波が整数個含まれる範囲での積分なので、ゼロになる。

フーリエ係数の証明3

- $n > 0$ かつ$m \neq n$ の場合： $L = X_2 - X_1$の範囲で積分されると、
  - $\int_{X_1}^{X_2} \frac{a_0}{2} \cos \frac{2\pi n x}{L} dx = 0$
  - $\int_{X_1}^{X_2} \frac{a_m}{2} \left(\cos \frac{2\pi(m+n)x}{L} + \cos \frac{2\pi(m-n)x}{L} \right) dx = 0$
  - $\int_{X_1}^{X_2} \frac{b_m}{2} \left(\sin \frac{2\pi(m+n)x}{L} + \sin \frac{2\pi(m-n)x}{L} \right) dx = 0$
- さらに、$n > 0$ かつ$m = n$ の場合は、
  - $\int_{X_1}^{X_2} \frac{a_m}{2} \left(\cos \frac{2\pi(m+n)x}{L} + \cos \frac{2\pi(m-n)x}{L} \right) dx = \int_{X_1}^{X_2} \frac{a_n}{2} \left(\cos \frac{4\pi n x}{L} + 1 \right) dx = \frac{a_n L}{2}$
- よって、
  - $\int_{X_1}^{X_2} f(x) \cos \frac{2\pi n x}{L} dx = \int_{X_1}^{X_2} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{2\pi m x}{L} + b_m \sin \frac{2\pi m x}{L} \right) \right\} \cos \frac{2\pi n x}{L} dx = \frac{a_n L}{2}$
  - $a_n = \frac{2}{L} \int_{X_1}^{X_2} f(x) \cos \frac{2\pi n x}{L} dx$

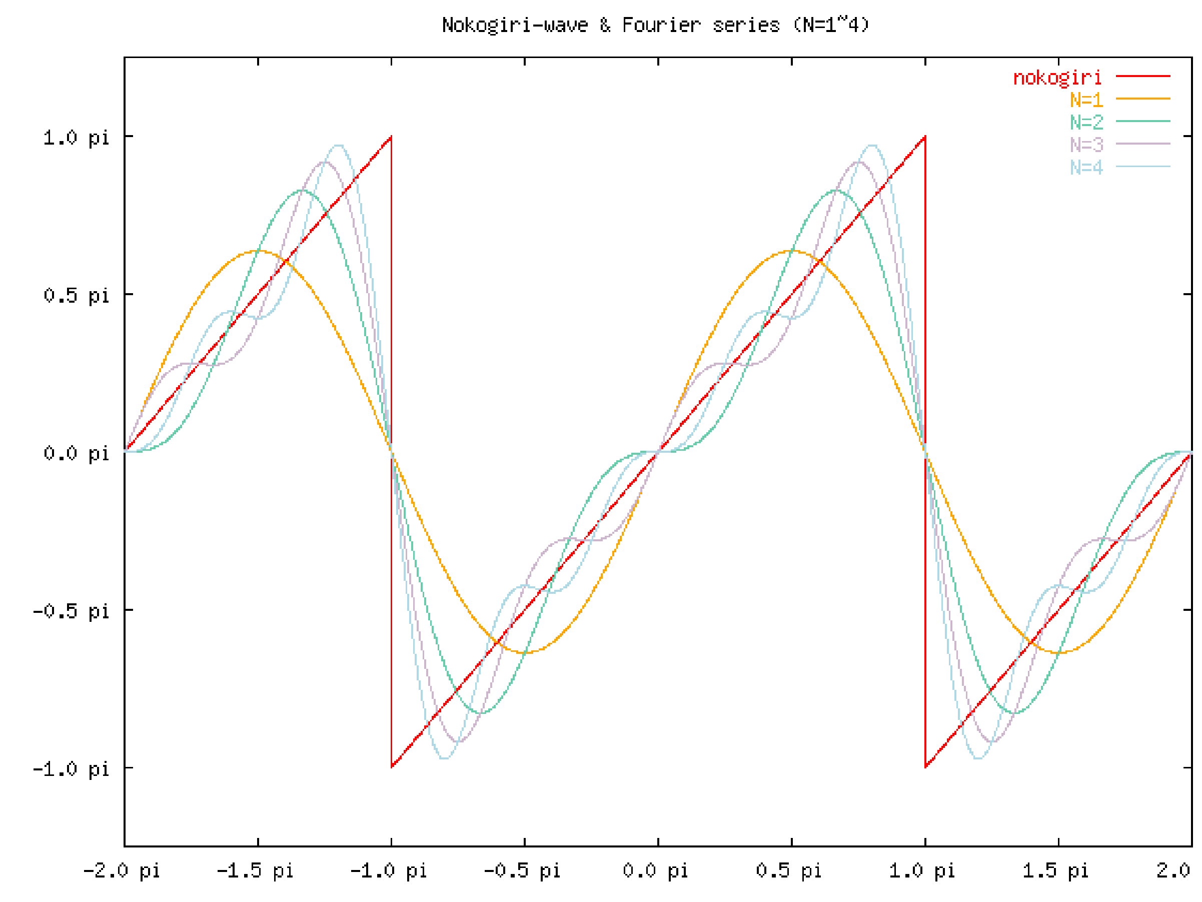
フーリエ級数の特性

- 周期関数$f(x)$ が偶関数であれば、定数とcos関数だけのフーリエ級数になり、周期関数$f(x)$ が奇関数であれば、sin関数だけのフーリエ級数になる。
- 証明： 偶関数$f(-x) = f(x)$ なので、フーリエ級数展開すると、
  - $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{L} - b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right)$
  - $\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right) = 0$
- よって周期関数$f(x)$が偶関数であれば、定数とcos関数だけのフーリエ級数となる
- 奇関数は$f(-x) = -f(x)$ であることに注意して、同様に証明できる

ノコギリ波のフーリエ級数展開1

- $f(x) = x, (-\pi < x \leq \pi)$ かつ$f(x + 2\pi) = f(x)$ という周期関数をつくる
  - 周期$L = 2\pi$ で、この周期関数は奇関数 $\Rightarrow$ $a_n = 0$
  - $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx$
    - $g(x) = x, h'(x) = \sin nx$ と考えて、部分積分を行う
  - $b_n = \frac{1}{\pi}\left[x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right) dx$
  - $b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\pi\left(-\frac{1}{n}\cos n\pi\right) - (-\pi)\left(-\frac{1}{n}\cos n(-\pi)\right)\right\} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \, dx$
  - $b_n = -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}$
  - $b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$
  - $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$

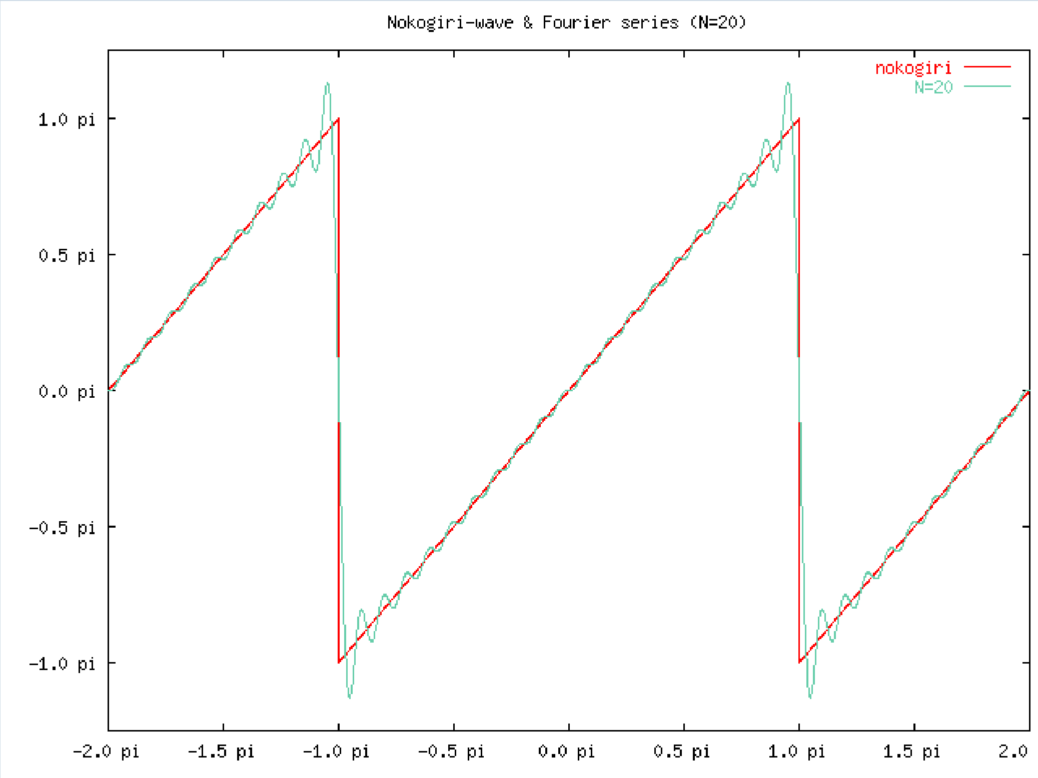
ノコギリ波のフーリエ級数展開2

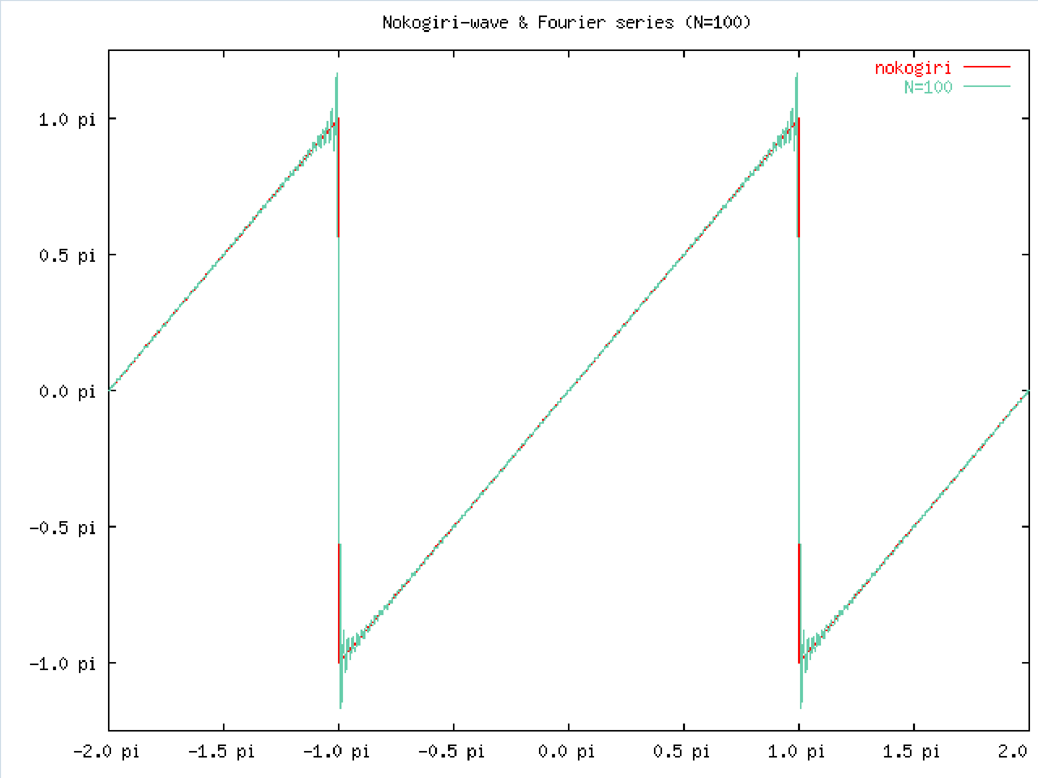


- フーリエ級数について、$n = N$ までの和で表現する
- Nを増やせば元の関数の形に近づくが、不連続点があるためにその周辺で誤差が大きくなる
- この誤差はNをいくら増やしても一定程度存在し続ける
- これを「ギブス現象」と呼ぶ

画像引用元:
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/info2/info2.html

ノコギリ波のフーリエ級数展開3





画像引用元：http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/info2/info2.html

練習問題

- フーリエ係数 $b_n = \frac{2}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}\,dx$ を証明せよ
- 周期関数$f(x)$ が奇関数であれば、sin関数だけのフーリエ級数になることを証明せよ
- $f(x)$ が以下のように与えられる場合に、フーリエ係数$a_{n=0\ldots2}, b_{n=1\ldots3}$を求めよ
  - $f(x) = \begin{cases} -h\ (-\pi \le x < 0) \\ 0\ (x = 0) \\ h\ (0 < x \le \pi) \end{cases}$
  - ここで$x_1 = -\pi, x_2 = \pi, L = 2\pi, h$ は定数である
- $f(x)$ が以下のように与えられる場合に、フーリエ係数$a_{n=0\ldots2}, b_{n=1\ldots3}$を求めよ
  - $f(x) = |x|\ (-\pi < x < \pi)$
  - ここで$x_1 = -\pi, x_2 = \pi, L = 2\pi$ である

解答例1

- 元の周期関数$f(x)$ の式の両辺に$\sin\frac{2\pi nx}{L}$ をかけて、X_1～ X_2の範囲で積分すると、
  - $\int_{X_1}^{X_2} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}dx = \int_{X_1}^{X_2}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{2\pi mx}{L} + b_m\sin\frac{2\pi mx}{L}\right)\right\}\sin\frac{2\pi nx}{L}dx$
  - $= \int_{X_1}^{X_2}\left\{\frac{a_0}{2}\sin\frac{2\pi nx}{L} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{2\pi mx}{L}\sin\frac{2\pi nx}{L} + b_m\sin\frac{2\pi mx}{L}\sin\frac{2\pi nx}{L}\right)\right\}dx$
  - $= \int_{X_1}^{X_2}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{a_m}{2}\left(\sin\frac{2\pi(n-m)x}{L} + \sin\frac{2\pi(n+m)x}{L}\right) + \frac{b_m}{2}\left(\cos\frac{2\pi(n-m)x}{L} - \cos\frac{2\pi(n+m)x}{L}\right)\right)\right\}dx$
  - $= \int_{X_1}^{X_2}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{b_m}{2}\left(\cos\frac{2\pi(n-m)x}{L} - \cos\frac{2\pi(n+m)x}{L}\right)\right)\right\}dx$
- $m \neq n$ ならば総和の中の項は全てゼロ。$m = n$ のとき、
  - $\int_{X_1}^{X_2} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}dx = \int_{X_1}^{X_2}\left\{\frac{b_n}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi nx}{L}\right)\right\}dx = \frac{b_n L}{2}$
  - $b_n = \frac{2}{L}\int_{X_1}^{X_2} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}dx$

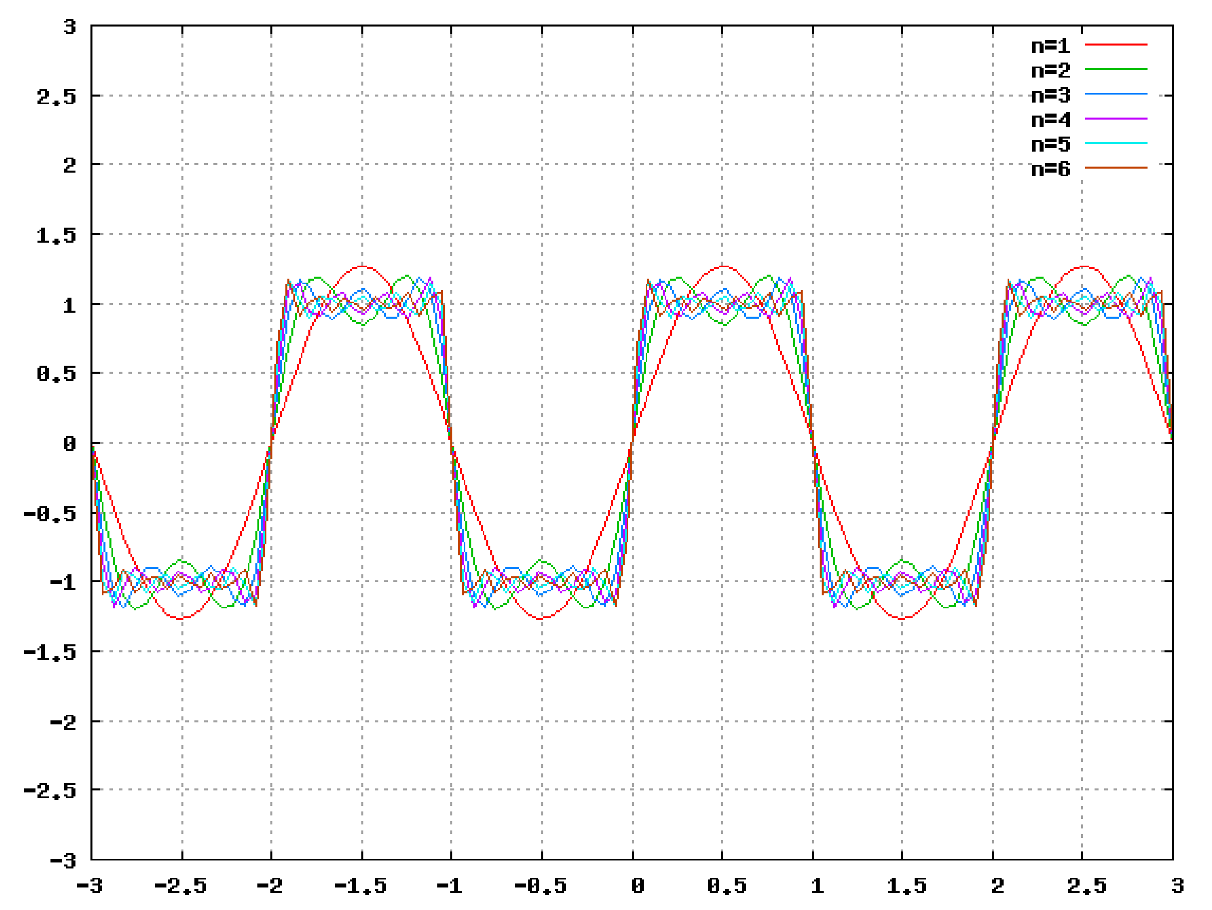
解答例2

- 奇関数$f(-x) = -f(x)$ なので、フーリエ級数展開すると、
  - $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{L} - b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right) = -\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right)\right\}$
  - $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{L}\right) = 0$
- これを満たすには、$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ がすべてゼロでなければならない
- よって周期関数$f(x)$が奇関数であれば、sin関数だけのフーリエ級数となる

解答例3

- この関数は奇関数なので、フーリエ係数は次のようになる
  - $a_n = 0,\qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$
- 積分範囲の分割により、
  - $b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right\}$
  - $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} h\sin nx\,dx$
  - $b_n = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{n}(-\cos nx)\right]_0^{\pi}$
  - $b_n = \frac{2h}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2h}{n\pi}(1+(-1)^{n+1})$
- よってフーリエ係数は、
  - $a_0 = a_1 = a_2 = 0,\qquad b_1 = \frac{4h}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4h}{3\pi},$

解答例3（補足）



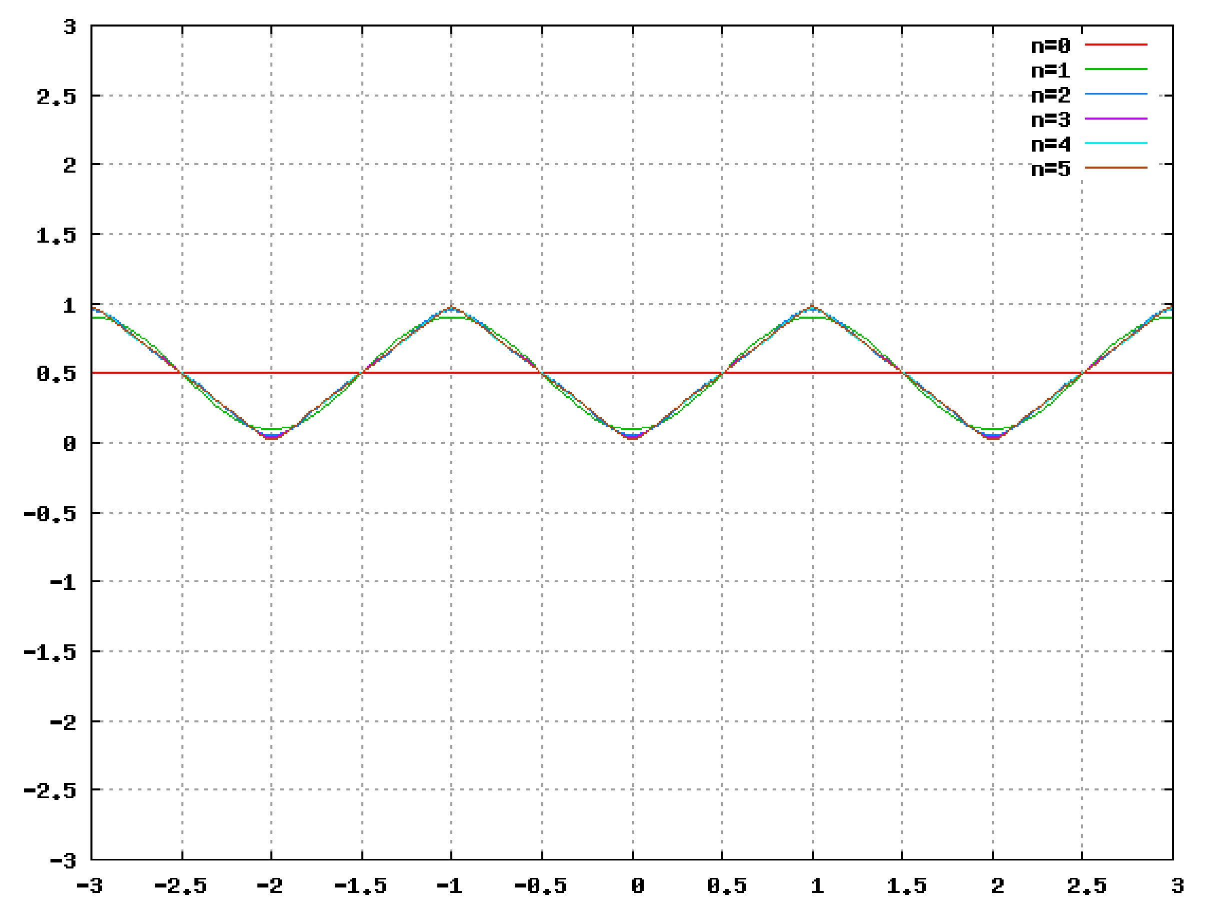
- この関数は矩形波と呼ばれ、クラリネットなどの音形に似ている
- 山と谷の大きさは同じだが、この比率を変えたものがパルス波と呼ばれ、トランペットやオーボエの音色に似ている

画像引用元：
http://shadowacademy.web.fc2.com/fourier.html

解答例4

- この関数は偶関数なので、フーリエ係数は次のようになる
  - $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx, \qquad b_n = 0$
- 積分範囲の分割により、
  - $a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right\} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx$
  - $a_n = \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right\}$
  - $a_n = \frac{2}{\pi}\left\{-\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{2}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)$
- $n = 0$ のとき、
  - $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \pi$
- よってフーリエ係数は、
  - $a_0 = \pi,\ a_1 = -\frac{4}{\pi}, a_2 = 0, \qquad b_1 = b_2 = b_3 = 0$

解答例4（補足）



- この関数は三角波と呼ばれ、口笛やフルートなどの音形に似ている

画像引用元：
http://shadowacademy.web.fc2.com/fourier.html