神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2018.1.26

演習7

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

復習: ガウスの消去法

- $N, a_{i,j}, y_i$を設定 $\Rightarrow$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$の問題設定
- $k \coloneqq 1,2,\ldots,N-1$の順に
  - （部分ピボット選択）
    $|a_{i,k}|(i = k, k+1, \ldots, N)$のうち、
    最大値を$|a_{l,k}|$とする。$l \neq k$ならば、
    係数$a_{i,k}$およびy_kを入れ替える。
  - $i \coloneqq k+1, k+2, \ldots, N$の順に
    - $\alpha \coloneqq a_{i,k}/a_{k,k}$
    - $j \coloneqq k+1, k+2, \ldots, N$の順に
      - $a_{i,j} \coloneqq a_{i,j} - \alpha a_{k,j}$
    - を繰り返す
    - $y_i \coloneqq y_i - \alpha y_k$
  - を繰り返す
- を繰り返す

$x_N \coloneqq y_N / a_{N,N}$

- $i \coloneqq N-1, N-2, \ldots, 1$の順に
  - $x_i \coloneqq \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{N} a_{i,k} x_k\right) / a_{i,i}$
- を繰り返す

- 最終的に求めたい解$\boldsymbol{x}$が算出できる。

例題1：ガウスの消去法

- ガウスの消去法を用いて、以下の連立1次方程式を解く。
  - $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$
- アルゴリズムをプログラム化。
  - 部分ピボット選択は含まれていない。

```
A(1,1) =  1.0d0
A(1,2) = -2.0d0
A(1,3) =  3.0d0
A(2,1) =  2.0d0
A(2,2) =  1.0d0
A(2,3) =  0.0d0
A(3,1) =  1.0d0
A(3,2) =  2.0d0
A(3,3) = -1.0d0

Y(1) = 1.0d0
Y(2) = 5.0d0
Y(3) = 5.0d0
```

```
do k = 1, N-1
  do i = k+1, N
    b = A(i,k) / A(k,k)
    do j = k+1, N
      A(i,j) = A(i,j) - b * A(k,j)
    end do
    Y(i) = Y(i) - b * Y(k)
  end do
end do

X(N) = Y(N) / A(N,N)
do i = N-1, 1, -1
  c = 0.0d0
  do k = i+1, N
    c = c + A(i,k) * X(k)
  end do
  X(i) = ( Y(i) - c ) / A(i,i)
end do
```

復習：3重対角行列のLU分解

- $N, a_{i,j}, y_i$を設定　⇒　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$の問題設定
- LU分解（係数行列AをLとUに分解）
- $$d_1 \coloneqq a_1$$
  $$\left[\begin{array}{l} i \coloneqq 2,3,\ldots,N\text{の順に} \\ \qquad l_i \coloneqq b_i/d_{i-1} \\ \qquad d_i \coloneqq a_i - l_i c_{i-1} \\ \text{を繰り返す} \end{array}\right.$$
- 前進代入（$L\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$を解く）
- $$z_1 \coloneqq y_1$$
  $$\left[\begin{array}{l} i \coloneqq 2,3,\ldots,N\text{の順に} \\ \qquad z_i \coloneqq y_i - l_i z_{i-1} \\ \text{を繰り返す} \end{array}\right.$$
- 後退代入（$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$を解く）
- $$x_N \coloneqq z_N/d_N$$
  $$\left[\begin{array}{l} i \coloneqq N-1, N-2, \ldots, 1\text{の順に} \\ \qquad x_i \coloneqq (z_i - c_i x_{i+1})/d_i \\ \text{を繰り返す} \end{array}\right.$$

例題2：3重対角行列のLU分解

- LU分解を用いて、以下の連立1次方程式を解く。
- $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- 係数行列を次のように考える。
- $$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \mathbf{0} \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\ \mathbf{0} & & & b_N & a_N \end{pmatrix}$$

```
a(:) =  2.0d0
b(:) = -1.0d0
c(:) = -1.0d0

Y(1) = -1.0d0
Y(2) =  2.0d0
Y(3) =  1.0d0
```

```
d(1) = a(1)
do i = 2, N
  l(i) = b(i) / d(i-1)
  d(i) = a(i) - l(i) * c(i-1)
end do

Z(1) = Y(1)
do i = 2, N
  Z(i) = Y(i) - l(i) * Z(i-1)
end do

X(N) = Z(N) / d(N)
do i = N-1, 1, -1
  X(i) = ( Z(i) - c(i) * X(i+1) ) / d(i)
end do
```

課題

1. 次の連立1次方程式について、例題1を参考に、部分ピボット選択のアルゴリズムを追加して解け。
   - $$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$
2. 次の連立1次方程式について、3重対角行列のLU分解を用いて解け。
   - $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
3. 次の3重対角行列を含む連立1次方程式を解け。ただし$\alpha = \frac{1}{2}, n = 100$とし、$y_i = 1 - \left|\frac{2i}{n} - 1\right| \quad (i = 1,2,\ldots,n)$とする。
   - $$\begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & & & & \mathbf{0} \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & & & \\ & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha \\ \mathbf{0} & & & & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

提出方法

- 〆切：2018/02/02（金）講義開始まで
- メールにプログラムを添付
  - 主題：演習7レポート（学籍番号）
  - 宛先：tyamaura@riken.jp
  - 本文：なくてもOK
  - 添付：学籍番号_課題番号.f90 を2ファイル
    - 課題7-1：r???????_kadai07-1.f90
    - 課題7-2：r???????_kadai07-2.f90
    - 課題7-3：r???????_kadai07-3.f90