神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.10.6

常微分方程式1

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

常微分方程式とは

- 独立変数tの関数$y(t)$を考え、t, yおよびyの1階導関数y'を含む方程式を考える
  - Ex. $y' = (1 - t)y$
- 従属変数の導関数を含む方程式を**微分方程式**といい、独立変数が1つだけの微分方程式を**常微分方程式**という
- 微分方程式は自然現象を数学的に表現するために頻繁に用いられる
  - 天体の軌道予測、電気回路内の電圧変化など

常微分方程式と解1

- 任意のtに対し$y' = (1-t)y$を満たす解yが存在するか？
- 両辺をyで割って変形
  - $\frac{y'}{y} = (\log|y|)' = 1 - t$
- 両辺を不定積分、積分定数Cを置く
  - $\log|y| = -\frac{1}{2}(1-t)^2 + C$
- これを満たすyは、
  - $y = A\exp\left(-\frac{1}{2}(1-t)^2\right)$　　ただし、Aは任意定数

常微分方程式と解2

- 導関数y'は接線の傾きなので、解のグラフに対して接線を引くことができる
- ただし解$y = A\exp\left(-\frac{1}{2}(1-t)^2\right)$は、無数の解が存在しうる
  - 制限条件を加え、解を1つに定める
- $t = 0$のときのyの値を$y(0) = 1$と決めてやると、任意定数$A = \sqrt{e}$と定まる
  - $y = \sqrt{e}\exp\left(-\frac{1}{2}(1-t)^2\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2} + t - \frac{t^2}{2}\right) = \exp\left(t - \frac{t^2}{2}\right)$
- あるtの値でのyの値を定める制限条件を、**初期条件**という
- 常微分方程式を初期条件の下で解く問題を、常微分方程式の**初期値問題**という

常微分方程式の問題の分類

- 1階常微分方程式の初期値問題
  - $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = a \end{cases}$
  - ただしaは定数
- 連立1階常微分方程式の初期値問題
  - $\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2) \\ y_1(0) = a_1,\ y_2(0) = a_2 \end{cases}$
  - ただしa_1, a_2は定数
- 2階常微分方程式の初期値問題
  - $\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(0) = a_1,\ y'(0) = a_2 \end{cases}$
  - ただしa_1, a_2は定数
- 2階常微分方程式の**境界値問題**
  - $\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(0) = a_1,\ y(1) = a_2 \end{cases}$
  - ただしa_1, a_2は定数
  - この条件を**境界条件**という

常微分方程式の実例

- 1階常微分方程式の初期値問題
  - 積分
  - 生物増殖
  - 変数係数常微分方程式
- 2階常微分方程式の初期値問題
  - 単振動
  - 減衰振動
- 連立1階常微分方程式の初期値問題
  - 生物捕食関係
- 2階常微分方程式の境界値問題
  - 梁のたわみ