神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.10.20

常微分方程式3

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

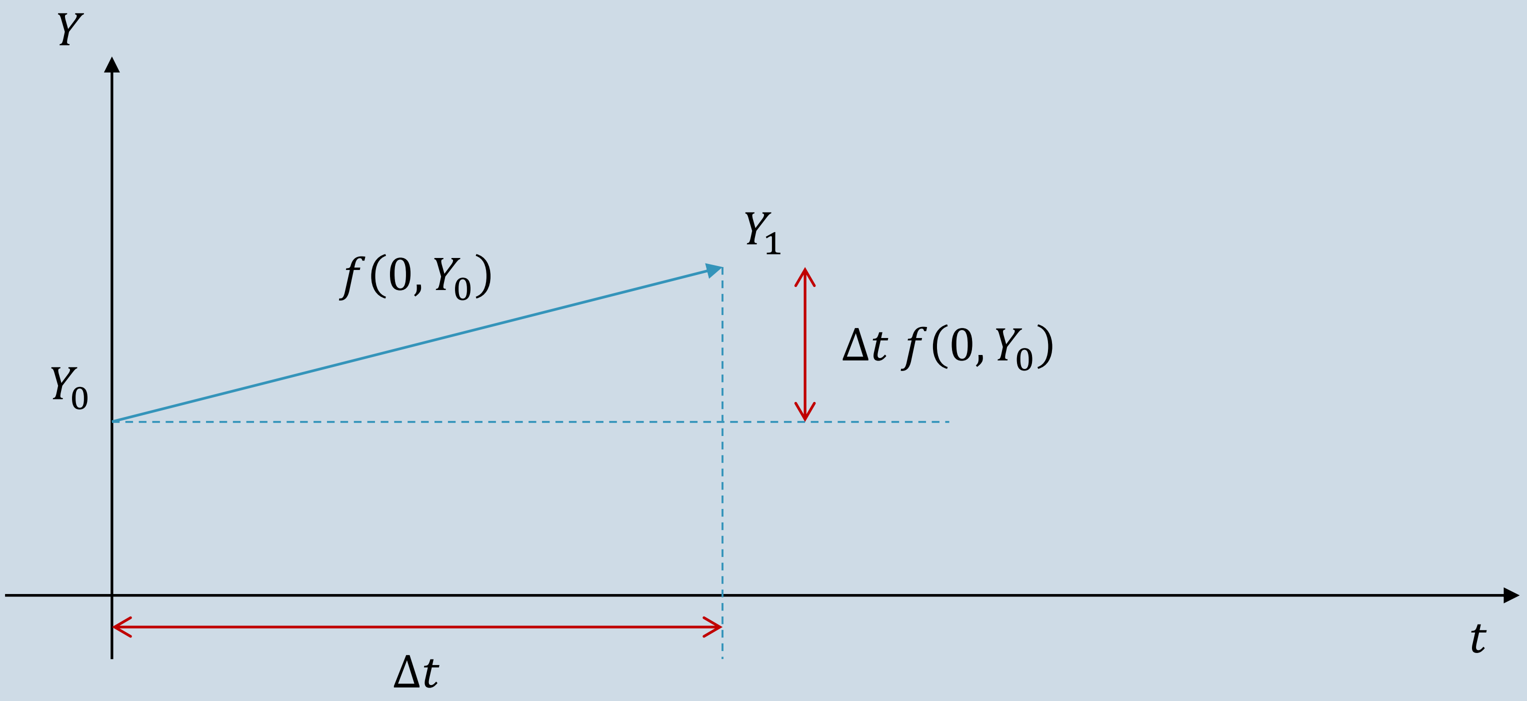
- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

色々な差分法

- **オイラー法**
  - $\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1}-Y_j\}=f(t_j,Y_j)$
- **ホイン法**
  - $\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1}-Y_j\}=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$
  - $k_1=f(t_j,Y_j),\qquad k_2=f(t_j+\Delta t,Y_j+\Delta t k_1)$
- **ルンゲ・クッタ法**
  - $\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1}-Y_j\}=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$
  - $k_1=f(t_j,Y_j),\qquad k_2=f\left(t_j+\frac{\Delta t}{2},Y_j+\frac{\Delta t}{2}k_1\right)$
  - $k_3=f\left(t_j+\frac{\Delta t}{2},Y_j+\frac{\Delta t}{2}k_2\right),\qquad k_4=f(t_j+\Delta t,Y_j+\Delta t k_3)$

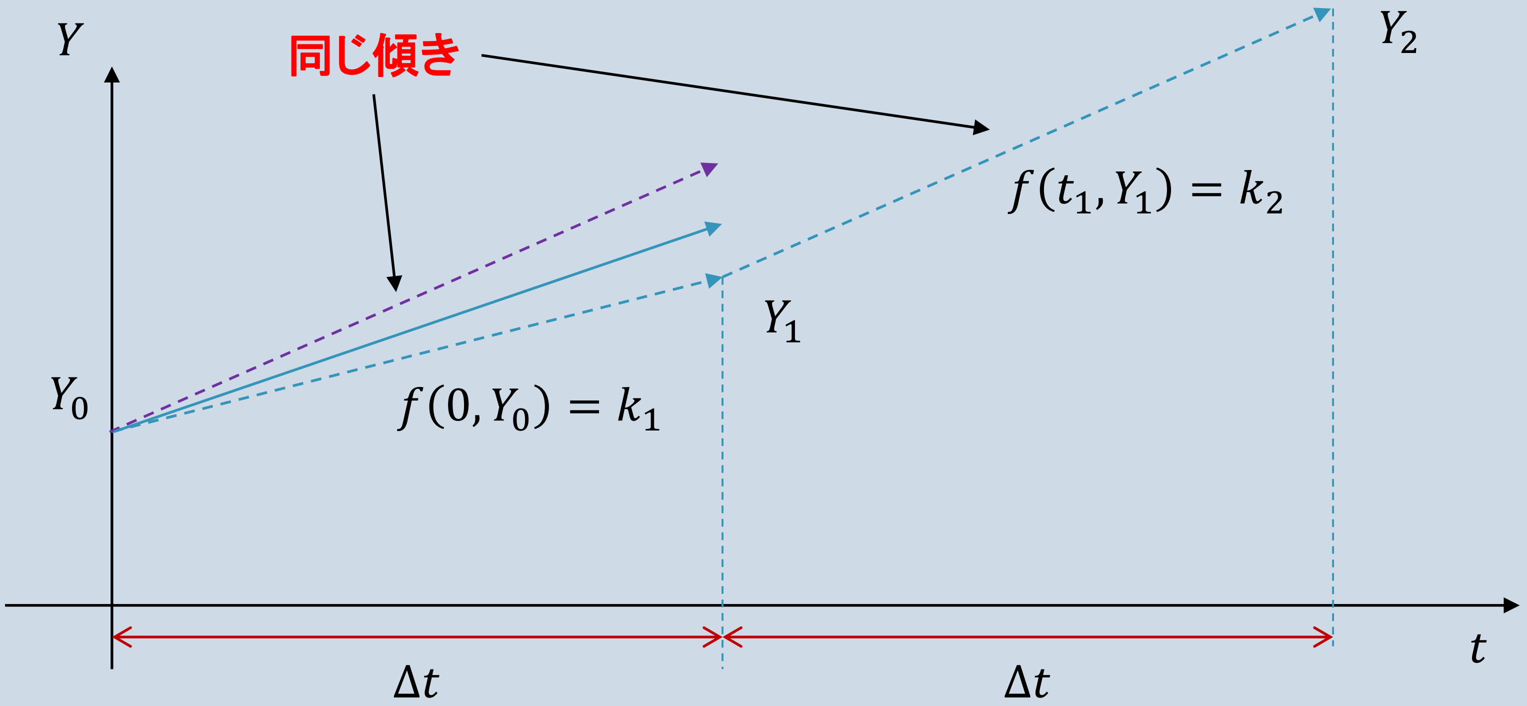
オイラー法

- $\frac{1}{\Delta t}\left\{Y_{j+1} - Y_j\right\} = f\left(t_j, Y_j\right)$



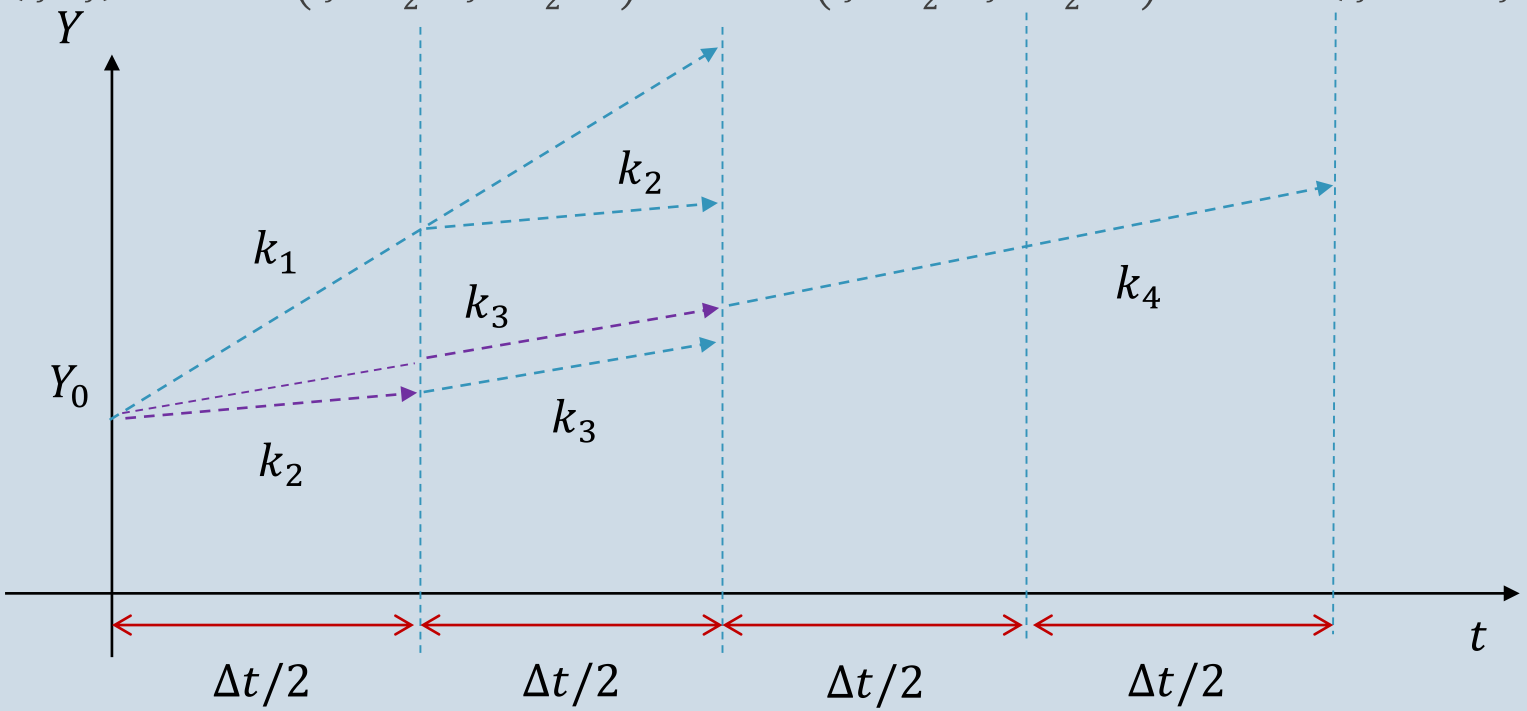
ホイン法（改良オイラー法）

- $\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1} - Y_j\} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2),\ \ k_1 = f\left(t_j, Y_j\right),\ \ k_2 = f\left(t_j + \Delta t, Y_j + \Delta t k_1\right)$



ルンゲ･クッタ法

- $\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1} - Y_j\} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
  - $k_1 = f(t_j, Y_j),\ \ k_2 = f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, Y_j + \frac{\Delta t}{2}k_1\right),\ \ k_3 = f\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, Y_j + \frac{\Delta t}{2}k_2\right),\ \ k_4 = f(t_j + \Delta t, Y_j + \Delta t k_3)$



局所打ち切り誤差1

- 各差分法の近似精度はどの程度か？
  - $\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1} - Y_j\} = F(t_j, Y_j)$ とおく
- $t = t_j$での微分解$y(t_j)$を差分方程式のY_jに代入し、Y_{j+1}を計算する。
  - $Y_{j+1} = y(t_j) + \Delta t\, F(t_j, y(t_j))$
- このときの誤差$|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}|$を求める。 ⇒ 差分解と微分解の差の目安となる。
  - $|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}| = |y(t_{j+1}) - y(t_j) - \Delta t\, F(t_j, y(t_j))|$
- この量をΔtで割ったものを**局所打ち切り誤差**と呼ぶ。
  - $\delta = \left|\frac{y(t_{j+1}) - Y_{j+1}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{\Delta t} - F(t_j, y(t_j))\right|$

局所打ち切り誤差2

- 局所打ち切り誤差を$O\left((\Delta t)^p\right)$という形で評価した時、$p$を**次数**と呼び、その差分方程式を$\boldsymbol{p}$**次の公式**という。
  - pが大きいほどΔtを小さくしたときに誤差が小さくなり、元の微分方程式をよく近似している。
- オイラー法の次数を考える。テイラー展開で、
  - $y\left(t_{j+1}\right) = y\left(t_j\right) + \Delta t\, y'\left(t_j\right) + O\left((\Delta t)^2\right)$
  - $\frac{y\left(t_{j+1}\right)-Y_{j+1}}{\Delta t} - f\left(t_j, Y_j\right) = y'\left(t_j\right) - f\left(t_j, y\left(t_j\right)\right) + O(\Delta t)$
- オイラー法は1次の公式であることが分かる。
  - 同様にホイン法は2次の公式、ルンゲ・クッタ法は4次の公式。

練習問題

- 以下の微分方程式の初期値問題を考える
  - $\frac{dy}{dt} = y(5-y), \qquad y(0) = 1$
- $t_j = j\Delta t$, 差分解Y_jを用いて、ホイン法およびルンゲ・クッタ法の差分方程式を示せ。
  - k_1, k_2, k_3, k_4を用いて表現してもよい
- $\Delta t = 0.5$の場合において、$t = 0$から$t = 2$までホイン法およびルンゲ・クッタ法を用いて差分解をそれぞれ導出し、さらに微分解$y = \frac{5}{1+4e^{-5t}}$との誤差を有効数字6桁で示せ。
  - 表を作ると何を求めるべきかわかりやすくなる

回答例1

- 以下の微分方程式の初期値問題を考える
  - $\frac{dy}{dt} = y(5-y), \qquad y(0)=1$
- $t_j = j\Delta t$, 差分解Y_jを用いて、ホイン法およびルンゲ･クッタ法の差分方程式を示せ。
- ホイン法
  - $Y_{j+1} = Y_j + \frac{\Delta t}{2}(k_1 + k_2), \quad k_1 = Y_j(5 - Y_j), \quad k_2 = (Y_j + k_1\Delta t)\left(5 - (Y_j + k_1\Delta t)\right)$
- ルンゲ･クッタ法
  - $Y_{j+1} = Y_j + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$
  - $k_1 = Y_j(5 - Y_j), \quad k_2 = \left(Y_j + \frac{k_1\Delta t}{2}\right)\left(5 - \left(Y_j + \frac{k_1\Delta t}{2}\right)\right)$
  - $k_3 = \left(Y_j + \frac{k_2\Delta t}{2}\right)\left(5 - \left(Y_j + \frac{k_2\Delta t}{2}\right)\right), \quad k_4 = (Y_j + k_3\Delta t)\left(5 - (Y_j + k_3\Delta t)\right)$

回答例2

- 以下の微分方程式の初期値問題を考える
  - $\frac{dy}{dt} = y(5 - y), \qquad y(0) = 1$
- $\Delta t = 0.5$の場合において、$t = 0$から$t = 2$までホイン法およびルンゲ・クッタ法を用いて差分解をそれぞれ導出し、さらに微分解$y = \frac{5}{1+4e^{-5t}}$との誤差を有効数字6桁で示せ。
- 真値$y(2) = \frac{5}{1+4e^{-10}} = 4.99909216627\ldots$　　誤差$|3.0008499 - 4.99909216627| = 1.99824$

t	0	0.5	1	1.5	2
Y_j	1	3.5	3.0898438	2.9933965	3.0008499
k_1	4	5.25	5.9020844	6.0065598	
k_2	6	-6.890625	-6.2878731	-5.9767464	

回答例2（続）

- 以下の微分方程式の初期値問題を考える
  - $\frac{dy}{dt} = y(5-y), \quad y(0) = 1$
- $\Delta t = 0.5$の場合において、$t = 0$から$t = 2$までホイン法およびルンゲ・クッタ法を用いて差分解をそれぞれ導出し、さらに微分解$y = \frac{5}{1+4e^{-5t}}$との誤差を有効数字6桁で示せ。
- 真値$y(2) = \frac{5}{1+4e^{-10}} = 4.99909216627 \ldots$　　誤差$|4.7796523 - 4.99909216627| = 0.219440$

t	0	0.5	1	1.5	2
Y_j	1	3.6757813	4.4567944	4.6633890	4.7796523
k_1	4	4.8675385	2.4209556	1.5697481	
k_2	6	0.5251501	-0.3140147	-0.2822466	
k_3	6.25	4.5415712	2.7220240	1.8700738	
k_4	3.609375	-5.6288232	-4.7578392	-3.3502428	