神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.7.14

前期中間再試験解説

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

問1－1

- 次の文章中の空欄（a～e）に当てはまる適切な言葉を下の選択肢から選び、記号で答えよ。（各1点）
  - 数値計算は、与えられた数値に対する演算を全て説明できなければならず、またその手続きに従えば誰が計算しても同じ答えに達する。このような明示された手続きによる一連の演算を「（a）イ 」という。例えば余弦関数は$\cos x=1-x^2/2\ +x^4/24$ という近似ができるが、xの値が与えられれば誰でも近似計算を行うことができる。上記の$\cos x$の近似計算をする場合、「（b）エ 」の演算量を必要とする。ここでは四則演算に要するコストを1演算と考え、（＝）は無視する。1秒間に100万回の演算を実行することができる計算機では、この近似計算を10^7回繰り返す場合、「（c）カ 」秒かかる。このような近似計算を行うと、元の数式に対して誤差が発生する。この誤差を「（d）コ 」という。誤差を除いて数値の意味を考えるために、数値の先頭から数えてp桁まで意味のある値であった場合、pを「（e）シ 」という。

ア．プログラム	イ．アルゴリズム	ウ．6	エ．8	オ．10	カ．80	キ．90	ク．100
ケ．相対誤差	コ．打ち切り誤差	サ．丸め誤差	シ．有効桁数	ス．精度			

問１－２

- 次の4つの**<u>8ビット符号付2進数</u>**について、10進数に変換した時の値を答えよ。（各2点）
  - (a) 10011001　　(b) 01010101　　(c) 10101010　　(d) 11001100
- (a)$-2^7+2^4+2^3+2^0=-128+16+8+1=-103$
- (b) $2^6+2^4+2^2+2^0=64+16+4+1=85$
- (c)$-2^7+2^5+2^3+2^1=-128+32+8+2=-86$
- (d)$-2^7+2^6+2^3+2^2=-128+64+8+4=-52$

問１－３

- $\exp 0.2$の真の値$\alpha = 1.3499 \ldots$ に対し、近似計算によって1.3511という値を得た。
  - (a) 近似計算で得た値の有効桁数を答えよ。(2点)
  - (b) この時の絶対誤差$|\varepsilon|$を求めよ。(3点)
  - (c) この時の相対誤差$\varepsilon_R = |\varepsilon|/\alpha$を、浮動小数点表示を用いて、有効数字4桁で求めよ。(3点)

- (a) 小数点第3位で四捨五入すると値が一致(1.35)するので、有効数字3桁
- (b) $|\varepsilon| = |1.3499 - 1.3511| = 0.0012\ (1.2 \times 10^{-3})$
- (c) $|\varepsilon|/\alpha = 1.2 \times 10^{-3}/1.3499 = 8.890 \times 10^{-4}\ (8.9 \times 10^{-4})$

問2－1

- 次の文章中の空欄(a～e)に当てはまる適切な言葉を下の選択肢から選び、記号で答えよ。(各1点)
  - $f(x)=0$となるようなxを、$f(x)$の根という。数値計算を用いて根の数値解を求めるとき、二分法とニュートン法という基本的な反復計算解法が存在する。二分法による根の求め方は、「(a) ア 」という定理を基礎とする。これは$f(x)$が連続で、$a, b\ (a<b)$の値を与えたときに$f(x)$の値が「(b) エ (ウ) 」かつ「(c) カ (キ) 」という条件を満たせば、少なくとも1つの解がその間に存在することを保証するというものである。一方、ニュートン法は接線を利用した反復解法で、そのメリットとして「(d) コ 」という点が挙げられる。ただしニュートン法を適用するには、$f(x)$が連続で、根の周辺で「(e) サ 」と「関数が急激に変化しないこと」という条件を満たしていなければならず、そうでない場合は計算が正しく終了しないことがある。

ア．中間値の定理　イ．平均値の定理　ウ．$f(a)>0$　エ．$f(a)<0$　オ．$f(a)\neq 0$
カ．$f(b)>0$　キ．$f(b)<0$　ク．$f(b)\neq 0$　ケ．二分法より安定　コ．二分法より高速
サ．関数の傾きの符号が変化しないこと　シ．関数の傾きが0になること　ス．関数の正負が変わらないこと

問2－2

- 次のFortranソースコードは、ニュートン法を用いて、$f(x) = e^{-x} - x^2$ の根を求めるものである。
  - (a) ソースコードの空欄（ア～エ）を、次の選択肢から正しいものを選んで埋めよ。（各2点）

```
program newton_method
  implicit none

  integer :: n
  real(8) :: x, nx, fx, dfx
  real(8) :: eps

  x = 2.0
  eps = 1.0e-4

  do n = 1, 10
    fx = exp(-x) - x**2
    dfx = -exp(-x) - 2.0*x
    nx = x - fx / dfx

    write(*,*) 'step number =',n,'; c=',c,'; d=',d

    if( abs( nx - x ) / nx < eps ) then
      exit
    else
      x = nx
    end if
  end do
end program
```

問2－2（続）

- 次のFortranソースコードは、ニュートン法を用いて、$f(x) = e^{-x} - x^2$ の根を求めるものである。
  - (b) このプログラムの結果として得られるxの値を、有効桁数4桁で求めよ。（5点）

- ニュートン法の解：$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}, f'(x) = -e^{-x} - 2x$
  - $x_0 = 2$
  - $x_1 = x_0 - \frac{e^{-x_0} - x_0^2}{-e^{-x_0} - 2x_0} = 2 - \frac{e^{-2} - 4}{-e^{-2} - 4} = 1.065$
  - $x_2 = x_1 - \frac{e^{-x_1} - x_1^2}{-e^{-x_1} - 2x_1} = 1.065 - \frac{e^{-1.065} - 1.065^2}{-e^{-1.065} - 2.13} = 0.7460$
  - $x_3 = x_2 - \frac{e^{-x_2} - x_2^2}{-e^{-x_2} - 2x_3} = 0.7460 - \frac{e^{-0.7460} - 0.7460^2}{-e^{-0.7460} - 1.492} = 0.7042$
  - $x_4 = x_3 - \frac{e^{-x_3} - x_3^2}{-e^{-x_3} - 2x_3} = 0.7042 - \frac{e^{-0.7042} - 0.7042^2}{-e^{-0.7042} - 1.4084} = 0.7035$
  - $x_5 = x_4 - \frac{e^{-x_4} - x_4^2}{-e^{-x_4} - 2x_4} = 0.7035 - \frac{e^{-0.7035} - 0.7035^2}{-e^{-0.7035} - 1.4070} = 0.7035$

問2ー3

- 二分法を用いて、$f(x) = e^{-x} - x^2$ の根を求めるための最小の反復回数を整数で求めよ。ただし初期値は0と2、許容誤差は$\varepsilon = 10^{-4}$とする。計算途中の式も書くこと。（5点）
- 最小の反復計算回数Nは、$\frac{|a-b|}{2^{N+1}} < \varepsilon$ を満たす最小の整数Nとなる
  - ここで$\varepsilon = 10^{-4}, a = 0, b = 2$
- $\frac{2^1}{2^{N+1}} < 10^{-4} \Rightarrow 2^{-N} < 10^{-4} \Rightarrow -\mathrm{N} < -\frac{4}{\log_2 10} \Rightarrow N > \frac{4}{\log_2 10} = 13.288 \ldots$
- 反復計算回数は14回となる

問3ー1

- 次の文章中の空欄（a〜e）に当てはまる適切な言葉を下の選択肢から選び、記号で答えよ。（各1点）
  - 未知の関数$f(x)$について、その関数の値が$N+1$個のx座標$x=x_j$ $(j=1,2,\ldots,N)$ に対してのみ分かっているとする。このとき、$x=x_j$以外の$f(x)$ の値を推定することを補間という。この補間の1つとして、N次の補間多項式を用いて曲線を推定する「(a) エ 」がある。この「(a) エ 」は、$y=\frac{1}{1+25x^2}$ のような曲線の上にある点について補間を行うと、誤差が非常に大きくなる時がある。この現象を「(b) カ 」という。この現象を避けるためには、一般に「(c) ウ 」を用いる。この「(c) ウ 」によって推定される関数$y=S(x)$は、特によく3次の多項式で近似される。この「(c) ウ 」を行うためには、全ての点を通ることの他に、区分の境目で「(d) コ 」という条件を満たさなければならない。また、$S(x)$を一意に定めるためには曲線の両端で形状を設定しなければならない。ここで「(e) シ 」という条件を与える場合、曲線$S(x)$は特に自然スプラインという。

ア. 補完　　イ. 補外　　ウ. スプライン補間　　エ. ラグランジュ補間　　オ.　線形補間
カ. ルンゲ現象　　キ. スプライン現象　　ク. 曲線の傾きが等しい　　ケ. 傾きの変化率が等しい　　コ. 曲線の傾きと傾きの変化率がそれぞれ等しい　　サ. 曲線の傾きがゼロ
シ. 傾きの変化率がゼロ

問3－2

- 関数$f(x)$とラグランジュの補間多項式$p_N(x)$の誤差$f(x)-p_N(x)$について、

$$|f(x)-p_N(x)| = \frac{\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|}{(N+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_N)|\ (x_0 < x < x_N)$$

- を満たす$x_0 < \xi < x_N$ が存在することが証明されている。$\cos(29.5° \times\ \pi/\ 180° = 29.5\ rad)$ の近似計算を、29,30,31 rad の3点から2次の補間多項式を用いて行い、sin/cos関数の最大値を1として、その場合の誤差の最大値を有効数字4桁で表せ。計算途中の式も書くこと。（5点）

与えられた3点を誤差の式に代入する

- $|f(x)-p_2(x)| = \frac{|\sin\xi|}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 |(29.5-29)(29.5-30)(29.5-31)|$
- $|f(x)-p_2(x)| = \frac{|\sin\xi|}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 |0.5\times 0.5\times 1.5| = 3.323\times 10^{-7}|\sin\xi| \le 3.323\times 10^{-7}$

問3－3

- 次のFortranソースコードは、5回の測定で得られた測定データに対し、最小二乗法による理論式y=Ax+Bが成立するとして、A, Bの値を決定するプログラムである。
  - (a) ソースコードの空欄（ア～エ）を、次の選択肢から正しいものを選んで埋めよ。（各2点）

```
program least_square_fitting
  implicit none

  integer, parameter :: num_pt = 5
  real(8), parameter :: px(num_pt) = &
(/ 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0 /)
  real(8), parameter :: py(num_pt) = &
(/ 0.847, 1.263, 2.328, 4.165, 4.825 /)

  integer :: i
  real(8) :: a, b, cv, xv
  real(8) :: xm, xa(num_pt)
  real(8) :: ym, ya(num_pt)

  xm = sum( px(:) ) / real( num_pt )
  ym = sum( py(:) ) / real( num_pt )
```

```
 do i = 1, num_pt
   xa(i) = px(i) − xm
   ya(i) = py(i) − ym
  end do

  cv = 0.0d0
  xv = 0.0d0

  do i = 1, num_pt
   cv = cv + xa(i) * ya(i)
   xv = xv + xa(i)**2
  end do
  a = cv / xv
  b = ym − xm * a

  write(*,*) '( gradient, intercept ) = ', a, b
end program
```

問3－3（続）

- 最小二乗法は、N回の測定で得られた測定データに対し、理論式$y = Ax + B$が成立するとして、各点から直線$y = Ax + B$に垂直に下した線分の長さの2乗の総和Eが最も小さくなるようなA, Bの値を決める。
  - (b) 最小二乗法によって$y = Ax + B$の係数A, Bの値を求めるために必要な条件となる方程式（正規方程式）を、誤差の平方和$E = \sum_{i=1}^{5}(y_i - Ax_i - B)^2$ を用いて記述せよ。（3点）
  - (c)上記のプログラムによって計算されるA, Bの値を有効数字4桁まで求めよ。計算途中の式も書くこと。（5点）

- $\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial B} = 0$
- $\overline{x} = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)/5 = 15/5 = 3$
- $\overline{y} = (0.847 + 1.263 + 2.328 + 4.165 + 4.825)/5 = 13.428/5 = 2.6856$
- $A = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{X}^2} = \frac{51.142-5\times3\times2.6856}{55-5\times3^2} = 1.0858 \approx 1.086$
- $B = 2.6856 - 3 \times 1.0858 = -0.5718$