

神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.7.28

演習4

山浦 剛 (tyamaura@riken.jp)

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

復習： 台形則

- 関数 $f(x)$ について、積分の始点 x 座標を a 、終点 x 座標を b 、分割数 $N = 2^n$ の台形則の総和面積を T_n 、台形幅 $h = (b - a)/2^n$ とする。 T_n を用いて T_{n+1} を表すと、
 - $\frac{T_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \left\{ \frac{f(a)}{2} + f\left(a + 2 \cdot \frac{b-a}{2^{n+1}}\right) + f\left(a + 4 \cdot \frac{b-a}{2^{n+1}}\right) + \cdots + \frac{f(b)}{2} \right\}$
 - $T_{n+1} = \frac{T_n}{2} + \frac{b-a}{2^{n+1}} \left\{ f\left(a + 1 \cdot \frac{b-a}{2^{n+1}}\right) + f\left(a + 3 \cdot \frac{b-a}{2^{n+1}}\right) + \cdots + f\left(b - \frac{b-a}{2^{n+1}}\right) \right\}$
- という漸化式を作ることができる。ただし、
 - $T_0 = \frac{b-a}{2} \{f(a) + f(b)\}$

(サンプル4-1) 台形則

```
program trapezoidal_rule
implicit none

integer, parameter :: NUM = 4
integer :: n, m
real(8) :: T(0:NUM-1) ! trapezoidal area
real(8) :: area ! small area
real(8) :: a, b, L

a = 0.0d0
b = 2.0d0
L = b - a
T(0) = L / 2.0d0 * ( 2.0d0**a + 2.0d0**b )

do n = 1, NUM-1
  area = 0.0d0
  do m = 1, 2**(n-1)
    area = area + L / 2.0d0**(n) &
      * ( 2.0d0**( a + dble(2*m-1) * L / 2.0d0**(n) ) )
  end do
  T(n) = T(n-1) / 2.0d0 + area
end do
end program
```

| | | |
|--------------|---|--------------------|
| { n, T(n) }: | 0 | 5.0000000000000000 |
| { n, T(n) }: | 1 | 4.5000000000000000 |
| { n, T(n) }: | 2 | 4.3713203435596428 |
| { n, T(n) }: | 3 | 4.3389101309124340 |

➤ $\int_0^2 2^x dx = \frac{3}{\ln 2} \approx 4.32808512$

- 分割数を8, 16, (32)と増やしていき、誤差がおおよそ $1/N^2$ で小さくなっていくことを確認せよ。

復習： シンプソン則と台形則

- $N = 2^n$ のときの台形則およびシンプソン則による積分近似値をそれぞれ T_n 、 S_n とする
 - $S_{n+1} = \frac{4}{3}T_{n+1} - \frac{1}{3}T_n$
 - $= \frac{4}{3}h \left\{ \frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right\} - \frac{2}{3}h \left\{ \frac{f(a)}{2} + f(a+2h) + \cdots + f(b-2h) + \frac{f(b)}{2} \right\}$
 - $= \frac{h}{3} \{ f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b) \}$
 - $= S_{n+1}$

復習： ロンバーグ積分法

➤ 分割数を $N = 2^n$ とし、各 n における台形則の積分近似値を $T_n^{(0)}$ とする

➤
$$T_n^{(k)} = \frac{4^k T_n^{(k-1)} - T_{n-1}^{(k-1)}}{4^k - 1} \quad (k = 1, 2, \dots \cap n \geq k)$$

➤ このとき、 $k = 1$ を考えると、

➤
$$T_n^{(1)} = \frac{4}{3} T_n^{(0)} - \frac{1}{3} T_{n-1}^{(0)}$$

➤ シンプソン則の積分近似値 $S_n = T_n^{(1)}$ であることが分かる

課題

1. サンプルプログラム4-1を参考に、 $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ について、 $x = 0 \sim 1$ の範囲で分割数 $N=16$ として、台形則を用いて積分近似値を求め、真値との誤差を出力するプログラムを作成せよ
2. 課題4-1について、関数 $f(x)$ の積分近似値 S_n とその誤差を、シンプソン則で求めるプログラムを作成せよ
3. 課題4-1について、関数 $f(x)$ の積分近似値 $T_n^{(n)}$ とその誤差を、ロンバーグ積分法で求めるプログラムを作成せよ
 - ヒント： 2次元配列で考えるとよい

提出方法

- 〆切: 2017/08/10(木)まで
- メールにプログラムを添付
 - 主題: 演習4レポート(学籍番号)
 - 宛先: tyamaura@riken.jp
 - 本文: なくてもOK
 - 添付: 学籍番号_課題番号.f90 を3ファイル
 - 課題4-1: r???????_kadai04-1.f90
 - 課題4-2: r???????_kadai04-2.f90
 - 課題4-3: r???????_kadai04-3.f90

前期定期試験

- 7月31日(月) 2時間目(50分)
 - 電卓の持ち込みを許可
- 出題範囲
 - 「数値計算法入門」(松田忠重著・三恵社) 第3章「関数の合成」
 - 第4章「数値積分」
 - 関連する講義ノート of いずれも含む
- 出題レベル
 - 知識を問う問題 (記号選択問題)
 - 数値計算プログラムに関する問題 (記号選択問題)
 - 計算問題 (記述問題)
 - 問題レベルは講義中の練習問題と同等