神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2018.1.12

連立1次方程式1

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

連立1次方程式とは

- 例：鶴亀算
  - 鶴と亀が合計10匹いる。足の数の合計は32本である。鶴と亀はそれぞれ何匹いるか？
- 鶴をx, 亀をyとし、鶴の足は2本、亀の足は4本と考えると、
  - $\begin{cases} x+y=10 & \ldots ① \\ 2x+4y=32 & \ldots ② \end{cases}$
- 答えを求めるには、この連立1次方程式を解けばよい。
  - ①を2倍した式を②から差し引く
  - $2y=12$なので、$y=6$
  - よって①式より、$x=4$

連立1次方程式の一般形

- いくつかの未知数に対する1次の代数方程式を連立させたものを**連立1次方程式**という。
  - $$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,N}x_N = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,N}x_N = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{M,1}x_1 + a_{M,2}x_2 + \cdots + a_{M,N}x_N = y_M \end{cases}$$
  - ここでNは未知変数x_j（$j = 1,2,\dots,N$）の個数、Mは式の数を示す。
  - 係数$a_{i,j}$（$i = 1,2,\dots,M, j = 1,2,\dots,N$）および右辺$y_i$（$i = 1,2,\dots,M$）は全て与えられている。
- ここでは$M = N$の場合のみを考える。
  - $M \geq N$の場合、未知変数x_jは一意に決定できる（可解である）。
  - $M < N$の場合、未知変数x_jは一意に決定できない（答えが複数ある）。

連立1次方程式の行列表現

- $M = N$の場合の連立1次方程式
  - $$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,N}x_N = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,N}x_N = y_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{N,1}x_1 + a_{N,2}x_2 + \cdots + a_{N,N}x_N = y_N \end{cases}$$
- 連立1次方程式を行列で表現すると、
  - $$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$
- さらにベクトル表記を用いて、
  - $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$
  - ここでAは**係数行列**と呼ばれ、N次の正方行列である。

数値計算の必要性

- 連立1次方程式を解くのに、なぜ数値計算が必要か？
  - 方程式の数が問題になりやすい。実際的な問題では$N \approx 10^6$というような問題もある。
  - あらゆる連立1次方程式に対して計算効率が良い解法は（現時点では）存在しない。
  - 係数行列に特定のパターンが現れることが多いので、そのパターンに応じた解法を選んで解く。
    - 例： 係数行列が3重対角行列となるケースに対するLU分解
- 数値計算による連立1次方程式の解き方
  - 直接法
    - ガウスの消去法、LU分解
  - 反復法
    - ヤコビ法、ガウス＝ザイデル法、SOR法

解の一意性

- 連立1次方程式が常に解けるとは限らない。
  - $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$
  - 左の連立1次方程式は、可解。解は$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$と求められる。
  - 真ん中の連立1次方程式は、解が無数にある。tをパラメータとして、$x_1 = -t + 4,\ x_2 = t - 1,\ x_3 = t$となる。
  - 右の連立1次方程式は、解がない（式を満たすx_1, x_2, x_3の組み合わせが存在しない）。
- 解が一意である必要十分条件は、係数行列の行列式$\det(A)$が非零。このとき行列Aは**正則行列**という。
- ベクトル表記で$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ならば、$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$となる。ただし$A^{-1}$は$A$の逆行列。解が一意に存在するならば、$A^{-1}$が存在しなければならない。$A$ が2次の正方行列の場合、逆行列は次のようになる。
  - $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のとき, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $\det(A) = ad - bc$

ガウスの消去法1

- 一般的な連立1次方程式の解法として、**ガウスの消去法**が挙げられる。
- $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 & \ldots ① \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 & \ldots ② \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 & \ldots ③ \end{cases}$$
- 具体的な手順はまず、② + ①および③ − 3 × ①を計算し、②③式からx_1を消去する。
- $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 & \ldots ① \\ x_2 - x_3 = -1 & \ldots ②' \\ 4x_2 - 5x_3 = -7 & \ldots ③' \end{cases}$$
- 次に③′ − 4 × ②′を計算し、③′式からx_2を消去する。
- $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 & \ldots ① \\ x_2 - x_3 = -1 & \ldots ②' \\ -x_3 = -3 & \ldots ③'' \end{cases}$$
- 続いて、下から順にx_3, x_2, x_1を求めていけばよい。上の式を用いて下の式の変数を次々消去していく手順を**前進消去**、下の式から変数の値が確定し、その値を一つ上の式に代入してまた別の変数の値を確定させる手順を**後退代入**という。ガウスの消去法はこの前進消去、後退代入の2段階の手続きを経て解を求める手法である。

ガウスの消去法2

- N元連立1次方程式に対するガウスの消去法を考える。
  - $$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,N}x_N = y_1 & \ldots ① \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,N}x_N = y_2 & \ldots ② \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,N}x_N = y_3 & \ldots ③ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{N,1}x_1 + a_{N,2}x_2 + \cdots + a_{N,N}x_N = y_N & \ldots Ⓝ \end{cases}$$
- ①式を用いて各式の変数x_1を消去する。Ⓝ $-\left(a_{N,1}/a_{1,1}\right)\times$ ①を実行。
  - $$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,N}x_N = y_1 & \ldots ① \\ \qquad a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{2,N}x_N = y'_2 & \ldots ②' \\ \qquad a'_{3,2}x_2 + \cdots + a'_{3,N}x_N = y'_3 & \ldots ③' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \qquad a'_{N,2}x_2 + \cdots + a'_{N,N}x_N = y'_N & \ldots Ⓝ' \end{cases}$$
- ②式以降の係数および右辺は元の式と異なるので、ダッシュをつけて区別する。これを順に繰り返す。

ガウスの消去法3

- 前進消去のアルゴリズム
  - $N, a_{i,j}, y_i$を設定 $\Rightarrow$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$の問題設定
  - $k \coloneqq 1,2, \ldots, N-1$の順に
    - $i \coloneqq k+1, k+2, \ldots, N$の順に
      - $\alpha \coloneqq a_{i,k}/a_{k,k}$
      - $j \coloneqq k+1, k+2, \ldots, N$の順に
        - $a_{i,j} \coloneqq a_{i,j} - \alpha a_{k,j}$
      - を繰り返す
      - $y_i \coloneqq y_i - \alpha y_k$
    - を繰り返す
  - を繰り返す
- 前進消去のアルゴリズムは3重ループとなっている。数値計算における代入の性質を利用して、ダッシュ付きの変数を各$a_{i,j}, y_i$を定義しなおしていく。

ガウスの消去法4

- 前進消去の結果、次のような連立1次方程式を得ることができる。
  - $$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \quad \dots \quad + \quad a_{1,N}x_N = y_1 \\ \qquad\quad a_{2,2}x_2 + \quad \dots \quad + \quad a_{2,N}x_N = y_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{N-1,N-1}x_{N-1} + a_{N-1,N}x_N = y_{N-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{N,N}x_N = y_N \end{cases}$$
- 最も下の式よりx_Nがすぐに求められる。このx_Nを一つ上の式に用いて、x_{N-1}が求められる。これを順に繰り返す。
- 後退代入のアルゴリズム
  - $x_N \coloneqq y_N / a_{N,N}$
    $i \coloneqq N-1, N-2, \dots, 1$の順に
    $\quad x_i \coloneqq \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{N} a_{i,k}x_k\right)/a_{i,i}$
    を繰り返す
- 後退代入より、最終的に求めたい解$\boldsymbol{x}$が算出できる。

ガウスの消去法の計算量

- ガウスの消去法を計算するにはどのくらいの計算量が要るのか？
  - 前進代入：　jループは$N-k$回発生し、1回乗算を行う。iループは$N-k$回発生し、途中αとy_iの計算に1回ずつ乗除算を行う。kループは$N-1$回発生する。よって、
    - $\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)(N-k+2)=\sum_{k=1}^{N-1}(N^2+2N+k^2-2Nk-2k)=(N^2+2N)\sum_{k=1}^{N-1}(1)+\sum_{k=1}^{N-1}(k^2)-2(N+1)\sum_{k=1}^{N-1}(k)$
    - $=(N^2+2N)(N-1)+\frac{(2N-1)(N-1)N}{6}-2(N+1)\frac{(N-1)N}{2}=(N^3+N^2-2N)+\left(\frac{N^3}{3}-\frac{N^2}{2}+\frac{N}{6}\right)-(N^3-N)=\frac{N^3}{3}+\frac{N^2}{2}-\frac{5N}{6}$
  - 後退代入：　始めに1回除算を行う。総和計算では$N-i$回の乗算を行う。iループは$N-1$回発生し、除算を1回行う。よって、
    - $\sum_{i=1}^{N-1}(N-i+1)+1=(N+1)\sum_{i=1}^{N-1}(1)-\sum_{i=1}^{N-1}(i)+1=(N+1)(N-1)-\frac{(N-1)N}{2}+1=\frac{N^2}{2}+\frac{N}{2}$
  - ガウスの消去法のアルゴリズム全体では、Nが十分大きい場合、約$N^3/3$回の乗除算が発生する。
    - これはNの増大に伴い、急激に計算量が増える。$N=3$で9回、$N=30$で9000回、$N=300$で900万回の演算を要する。

アルゴリズムの問題点

- 前頁までのガウスの消去法のアルゴリズムには、1点、問題点がある。次のような連立1次方程式を与えられた場合に、ガウスの消去法を使って解くことを考える。
  - $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 & \ldots ① \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 & \ldots ② \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 & \ldots ③ \end{cases}$$
- ①式を用いて②式から変数x_1を消去しようとすると、x_2も同時に消去される。
  - $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 & \ldots ① \\ \quad -3x_3 = -9 & \ldots ②' \\ \quad 4x_2 + 2x_3 = 14 & \ldots ③' \end{cases}$$
- アルゴリズムにそのまま従って計算を進めるとゼロで割るという数学的にあり得ない操作が発生してしまうので、改良する必要がある。また、係数が完全にゼロにならなくとも、ゼロに近い場合は丸め誤差により同様の問題が発生することがある。
- この問題をどう回避すればよいか？
  - 式の順序を入れ替えて計算すればよい。（式の順序を入れ替えても連立1次方程式は等価）

部分ピボット選択による改良

- 問題点を整理： 前進消去のアルゴリズム中、$a_{k,k}$の値がゼロまたはゼロに近い場合、ガウスの消去法が失敗する可能性が高い。
- 今、前進消去途中で、変数x_{k-1}まで消去されたとする。このとき連立方程式は、
  - $$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \quad \ldots \quad + \quad a_{1,N}x_N = y_1 \\ a_{2,2}x_2 + \quad \ldots \quad + \quad a_{2,N}x_N = y_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ {\color{red}a_{k,k}}x_k + \cdots + \quad a_{k,N}x_N = y_k \\ {\color{red}a_{k+1,k}}x_k + \cdots + a_{k+1,N}x_N = y_{k+1} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ {\color{red}a_{N,k}}x_k + \cdots + a_{N,N}x_N = y_N \end{cases}$$
- この次に式を入れ替えるとすれば、$a_{i,k}(i = k, k+1, \ldots, N)$の中でゼロから最も離れているもの＝絶対値が最大であるものを選択すればよい。
- このような式の入れ替え操作を各変数の消去で毎回行う。変数x_kの消去を行うための$a_{k,k}$を**ピボット**と呼び、上記のようにピボットを選ぶ作業を**部分ピボット選択**という。

改良されたガウスの消去法

- $N, a_{i,j}, y_i$を設定 $\Rightarrow$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$の問題設定

- $k \coloneqq 1,2,\ldots,N-1$の順に
  - （部分ピボット選択）
    $|a_{i,k}|\,(i = k, k+1, \ldots, N)$のうち、
    最大値を$|a_{l,k}|$とする。$l \neq k$ならば、
    係数$a_{i,k}$およびy_kを入れ替える。
  - $i \coloneqq k+1, k+2, \ldots, N$の順に
    - $\alpha \coloneqq a_{i,k}/a_{k,k}$
    - $j \coloneqq k+1, k+2, \ldots, N$の順に
      - $a_{i,j} \coloneqq a_{i,j} - \alpha a_{k,j}$

      を繰り返す
    - $y_i \coloneqq y_i - \alpha y_k$

    を繰り返す

  を繰り返す

- $x_N \coloneqq y_N / a_{N,N}$
  - $i \coloneqq N-1, N-2, \ldots, 1$の順に
    - $x_i \coloneqq \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{N} a_{i,k} x_k\right)/a_{i,i}$

    を繰り返す

- 最終的に求めたい解$\boldsymbol{x}$が算出できる。

練習問題

- ガウスの消去法を用いて、以下の連立1次方程式を解け。
  - $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$
  - $$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$
  - $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

回答例1

- ガウスの消去法を用いて、以下の連立1次方程式を解け。
  - $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
- 前進消去
  - $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 後退代入
  - $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- ゆえに$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2$となる。

回答例2

- ガウスの消去法を用いて、以下の連立1次方程式を解け。
  - $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$
- 前進消去

  部分ピボット選択
  - $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}, \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ \frac{15}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ \frac{15}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
- 後退代入
  - $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ゆえに$x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 1$となる。

回答例3

- ガウスの消去法を用いて、以下の連立1次方程式を解け。
  - $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$
- 前進消去
  - $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & -2 & -7 \\ 0 & 5 & -2 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -11 & -1 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ -44 \\ -11 \\ -59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{5} & -1 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ -25 \\ 8 \\ -\frac{181}{5} \end{pmatrix}$$
  - $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{51}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{129}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ -25 \\ -\frac{93}{4} \\ -\frac{399}{20} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{51}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{696}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ -25 \\ -\frac{93}{4} \\ -\frac{2088}{100} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{51}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ -25 \\ -\frac{93}{4} \\ 3 \end{pmatrix}$$

回答例3（続き）

- ガウスの消去法を用いて、以下の連立1次方程式を解け。
  - $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$
- 後退代入
  - $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -19 \\ -4 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -19 \\ -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
  - $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- ゆえに$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2, x_5 = 3$となる。