神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.10.13

常微分方程式2

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

微分係数の近似

- 関数$f(x)$の$x=a$における微分係数は次のように表される。
  - $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(a+h)-f(a)\}$
- 微分係数の近似値Dを考える。関数$f(x)=\sin x$として、誤差を$|D-f'(1)|$とおく。
  - $D=\frac{1}{h}\{\sin(1+h)-\sin 1\}$　　$f'(1)=\cos 1=0.54030230586\ldots$

h	D	$\lvert D-f'(1)\rvert$	h	D	$\lvert D-f'(1)\rvert$
1	0.067826	4.7×10^{-1}	-1	0.841470	3.0×10^{-1}
0.1	0.497363	4.3×10^{-2}	-0.1	0.581440	4.1×10^{-2}
0.01	0.536085	4.2×10^{-3}	-0.01	0.544500	4.2×10^{-3}
0.001	0.539881	4.2×10^{-4}	-0.001	0.540722	4.2×10^{-4}
0.0001	0.540260	4.2×10^{-5}	-0.0001	0.540344	4.2×10^{-5}

微分係数の近似値の誤差

- 任意の関数$f(x)$に対し$D = \frac{1}{h}\{f(a+h) - f(a)\}$の値が一定範囲で$f'(a)$に近似できる
- テイラー展開により、
  - $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(\xi) \quad (a < \xi < a+h)$
  - $\frac{1}{h}\{f(a+h) - f(a)\} - f'(a) = D - f'(a) = \frac{h}{2}f''(\xi)$
- これはhが十分小さければ、誤差$|D - f'(a)|$がhに比例して小さくなることを示す。
- 関数のいくつかの点における値の差を用いて、微分値を近似することを**差分近似**といい、Dのような量を**差分商**という。

差分商の種類

- **前進差分商**$(h = \Delta x)$
  - $\frac{1}{\Delta x}\{f(a+\Delta x) - f(a)\}$
- **後退差分商**$(h = -\Delta x)$
  - $\frac{1}{\Delta x}\{f(a) - f(a-\Delta x)\}$
- **中心差分商**
  - $\frac{1}{2\Delta x}\{f(a+\Delta x) - f(a-\Delta x)\}$
  - $= f'(a) + \frac{\Delta x^2}{48}\{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\}$
  - 中心差分商の誤差はΔx^2に比例して小さくなる

$f'(1) = \cos 1 = 0.54030230586 \ldots$

Δx	D	$\lvert D - f'(1)\rvert$
1	0.51806944799	2.2×10^{-2}
0.1	0.54007720804	2.3×10^{-4}
0.01	0.54030005461	2.3×10^{-6}
0.001	0.54030228335	2.3×10^{-8}
0.0001	0.54030230564	2.2×10^{-10}

差分方程式

- 差分近似を用いて、1階常微分方程式の初期値問題を考える。
  - $y' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\{y(t+\Delta t) - y(t)\} = f\big(t, y(t)\big) \qquad (y(0) = a)$
- 求めたいものは、$t > 0$における$y(t)$である。
- 前進差分商の形で置き換えてみる（**差分方程式**）。
  - $\frac{1}{\Delta t}\{Y(t+\Delta t) - Y(t)\} = f\big(t, Y(t)\big)$
- 微分方程式の解$y(t)$を**微分解**、差分方程式の解$Y(t)$を**差分解**と略称する。

差分方程式の解き方

- 初期条件$Y(0)=a$の下で、差分方程式を解く。
  - $Y(t+\Delta t)=Y(t)+\Delta t\, f\big(t,Y(t)\big)$
- $t=0$のとき、$Y(\Delta t)=Y(0)+\Delta t\, f\big(0,Y(0)\big)=a+\Delta t\, f(0,a)$
- この式の右辺はすぐに計算可能。以下、Δt毎の値を計算していく。
  - $Y(2\Delta t)=Y(\Delta t)+\Delta t\, f\big(\Delta t,Y(\Delta t)\big)$
  - $Y(3\Delta t)=Y(2\Delta t)+\Delta t\, f\big(2\Delta t,Y(2\Delta t)\big)$
- $Y\big((j+1)\Delta t\big)$を$Y(j\Delta t)$から容易に計算できる。
  - ただし$t=j\Delta t$以外の値は計算できないので、離散的な時刻のYのみ決まる。この時刻を**格子点**という。
- $t_j=j\Delta t,\ Y_j=Y(j\Delta t)$として、常微分方程式の解を求める＝$Y_j$に関する漸化式を解く(**差分法**)。
  - $\frac{1}{\Delta t}\{Y_{j+1}-Y_j\}=f\big(t_j,Y_j\big)\quad (Y_0=a)$　(**オイラー法**)

例1：オイラー法による差分解

- 次の初期値問題をオイラー法で解き、$t=1$の値を推定する
  - 常微分方程式：　$y' = \sin t, \quad y(0) = 1$
  - 差分方程式：　$\frac{1}{\Delta t}\left(Y_{j+1} - Y_j\right) = \sin t_j, \quad Y_0 = 1$
- 差分方程式を変形
  - $Y_{j+1} = Y_j + \Delta t \sin t_j$
- 適当なΔtを決め、$t=1$に到達するまで漸化式を解く

$y(1) = 2 - \cos 1 = 1.459697 \ldots$

N	Δt	Y_N
10	0.1	1.417240
100	0.01	1.455486
1000	0.001	1.459276
10000	0.0001	1.459655

連立1階・2階常微分方程式の関係

- 連立1階・2階常微分方程式の初期値問題は、次のように表される。
  - $\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2) \end{cases}$ $\quad y_1(0) = a_1, y_2(0) = a_2$
  - $y'' = f(t, y, y')$ $\quad y(0) = a_1, y'(0) = a_2$
- ２階常微分方程式は、連立１階常微分方程式に書き換えることができる。
  - $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(t, y_1, y_2) \end{cases}$ $\quad y_1(0) = a_1, y_2(0) = a_2$
- ２階常微分方程式の初期値問題は、連立１階常微分方程式の初期値問題の特殊ケース。
  - 連立１階常微分方程式の初期値問題の解法で解くことができる。
- 連立１階常微分方程式の初期値問題をオイラー法で近似。
  - $\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}\left(Y_{j+1}^{(1)} - Y_j^{(1)}\right) = f_1\left(t, Y_j^{(1)}, Y_j^{(2)}\right) \\ \frac{1}{\Delta t}\left(Y_{j+1}^{(2)} - Y_j^{(2)}\right) = f_2\left(t, Y_j^{(1)}, Y_j^{(2)}\right) \end{cases}$ $\quad Y_0^{(1)} = a_1,\ \ Y_0^{(2)} = a_2$

例2：連立1階常微分方程式の差分解

- ２階常微分方程式の初期値問題をオイラー法で解くことを考える。
  - $y'' + 10y' + 16y = 0 \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$
- 連立1階常微分方程式に変形
  - $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -16y_1 - 10y_2 \end{cases} \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$
- この微分解は次の通り（解法は連立方程式の知識を要するので割愛）。
  - $y(t) = \frac{1}{3}(4e^{-2t} - e^{-8t})$
- 一方、この差分解は、Δtの大きさによって、3つに分類できる
  - $\begin{cases} \Delta t \leq 0.125 & \dots (a) \\ 0.125 < \Delta t \leq 0.25 & \dots (b) \\ 0.125 < \Delta t & \dots (c) \end{cases}$ (a)は安定な結果を、(b)(c)は不安定な結果を得る

計算不安定性

- 前頁のような不安定な解が発生するのはなぜか？
  - 差分方程式: $\begin{cases} Y_{j+1}^{(1)} = Y_j^{(1)} + \Delta t\, Y_j^{(2)} \\ Y_{j+1}^{(2)} = -16\Delta t\, Y_j^{(1)} + (1 - 10\Delta t) Y_j^{(2)} \end{cases}$ $\quad Y_0^{(1)} = 1, Y_0^{(2)} = 0$
- この連立1階微分方程式の差分解は次の通り。
  - $Y_j^{(1)} = \frac{1}{3}\left\{4(1-2\Delta t)^j - (1-8\Delta t)^j\right\}$
- $\Delta t \to 0$の極限で微分解に収束するかどうかで、差分解の妥当性を確認できる。
  - $\lim_{\Delta t \to 0}(1-2\Delta t)^j = \lim_{\Delta t \to 0}(1-2\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{nt} = e^{-2t}, \lim_{\Delta t\to 0}(1-8\Delta t)^j = e^{-8t} \quad \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x\right)$
- 有限のΔtに対し、jの増加に伴いべき乗項が0に近づくには、$|1-2\Delta t| < 1$ かつ $|1-8\Delta t| < 1$ を満たす必要がある。 ⇒ これが前頁の3つの差分解が存在する理由
  - $\Delta t > 0.25$のときの解は、$(1-8\Delta t)^j$が正負の符号を変えながら、絶対値が大きくなっていく
  - $\Delta t > 0.125$のときの解は、$(1-8\Delta t)^j$が正負の符号を変えながら、絶対値が小さくなっていく

差分法の安定性を判断するには

- 計算結果が得られたら、解の数値を見るだけでなく、グラフにして概要を把握する
- 微分解の性質を調べ、差分解がその性質を満足しているかを確かめる
  - 微分解は$t \to \infty$で0に収束するのに、差分解がそうならない場合は要検討
- 計算不安定が発生している場合、計算が途中で発散したり、解が異常振動することが多い
- Δtの値を変え、差分解がどのように変化するかを検討する
- Δtを極端に小さくし過ぎると、計算結果が丸め誤差の影響を受けやすくなる

練習問題

- $f(x) = e^x \cos x$とする。$f'(1)$の近似値を、前進、後退、中心差分商を用いて、$\Delta x = 0.001$の場合について計算せよ。
- $y' = y, y(0) = 1$という1階常微分方程式の初期値問題について、差分解Y_jをjとΔtで表せ。また、$\Delta t = \frac{1}{N}$としたとき、Y_Nの値は$N \to \infty$でどのような値に近づくか答えよ。
- 差分解が$Y_j^{(1)} = \frac{9}{8}(1 - 10\Delta t)^j - \frac{1}{8}(1 - 90\Delta t)^j$のように与えられる。計算が安定に進むために、$\Delta t$が満たすべき条件を答えよ。

回答例1

- $f(x) = e^x \cos x$とする。$f'(1)$の近似値を、前進、後退、中心差分商を用いて、$\Delta x = 0.001$の場合について計算せよ。
- 真値：　$f'(1) = e^1 \cos 1 - e^1 \sin 1 = -0.81866134726$
- 前進差分商：　$\frac{1}{\Delta x}\{f(x+\Delta x) - f(x)\} = \frac{1}{10^{-3}}\left(e^{(1+10^{-3})}\cos(1+10^{-3}) - e^1 \cos 1\right) = -0.82094995 \ldots$
- 後退差分商：　$\frac{1}{\Delta x}\{f(x) - f(x-\Delta x)\} = \frac{1}{10^{-3}}\left(e^1 \cos 1 - e^{(1-10^{-3})}\cos(1-10^{-3})\right) = -0.81637524 \ldots$
- 中心差分商：　$\frac{1}{2\Delta x}\{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)\} = \frac{1}{2\times 10^{-3}}\left(e^{(1+10^{-3})}\cos(1+10^{-3}) - e^{(1-10^{-3})}\cos(1-10^{-3})\right) = -0.818662599 \ldots$

回答例2

- $y' = y, y(0) = 1$という1階常微分方程式の初期値問題について、差分解Y_jをjとΔtで表せ。また、$\Delta t = \frac{1}{N}$としたとき、Y_Nの値は$N \to \infty$でどのような値に近づくか答えよ。
- 差分方程式： $Y_{j+1} = Y_j + \Delta t\, Y_j = (1 + \Delta t)Y_j, \quad Y_0 = 1$
  - $Y_0 = 1,\ \ Y_1 = (1 + \Delta t),\ \ Y_2 = (1 + \Delta t)^2,\ \ Y_3 = (1 + \Delta t)^3, \ldots$
- 差分解は$Y_j = (1 + \Delta t)^j$
- $N \to \infty$のとき、$Y_N = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e$

回答例3

- 差分解が$Y_j^{(1)} = \frac{9}{8}(1 - 10\Delta t)^j - \frac{1}{8}(1 - 90\Delta t)^j$のように与えられる。計算が安定に進むために、$\Delta t$が満たすべき条件を答えよ。
- 計算が安定に進むためにΔtが満たすべき条件は、次を満たすΔtとなる。
  - $|1 - 10\Delta t| < 1$　かつ　$|1 - 90\Delta t| < 1$
  - 一番目の式から、$\Delta t < \frac{1}{5}$で不等式を満たす。さらに、$\Delta t < \frac{1}{10}$で$(1 - 10\Delta t)$は常に正。
  - 二番目の式から、$\Delta t < \frac{1}{45}$で不等式を満たす。さらに、$\Delta t < \frac{1}{90}$で$(1 - 90\Delta t)$は常に正。
- 両方の条件を満たし、かつ安定に計算が進むのは、$\Delta t < \frac{1}{90}$という条件となる。