神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.12.15

中間試験（後期）解説

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

問1－1

- 次の文章中の空欄（a～k）に当てはまる適切な語句を右の選択肢から選び、<u>**記号で答えよ**</u>。（各2点）

- 独立変数、従属変数、および従属変数の導関数を含む方程式を微分方程式というが、このうち独立変数が1つだけのものを「 (a) **（ウ）常微分方程式**」という。例として、$y' = f(t, y)$ という独立変数tおよび任意の関数fによる微分方程式を考える。微分方程式の解を1つに定めるには、制約条件を加える必要がある。ここで、y$(t = 0) = a$（aは定数）という制約条件を加える。このように、あるtの値でのyの値を定める制約条件を、tを時刻と見立てて「 (b) **（オ）初期条件**」といい、この微分方程式を解く問題を「 (c) **（キ）初期値問題**」という。実際に微分方程式を計算機で解くには、微分係数を近似して「 (d) **（エ）差分方程式**」という式に置き換えてやる必要がある。任意の関数$f(x)$に対し$D = \frac{1}{h}\{f(a+h) - f(a)\}$の値が一定範囲で$f'(a)$に近似できるとき、このDを差分商という。また格子点の幅をΔxとして$h = \Delta x$と置くと、この差分商は「 (e) **（ケ）前進差分商**」と呼ばれ、$h = -\Delta x$と置くと、この差分商は「 (f) **（コ）後退差分商**」と呼ばれる。さらに「 (e) 」と「 (f) 」の平均は「 (g) **（サ）中心差分商**」と呼ばれ、近似の精度は良くなる。$y' = f(t, y)$の微分係数を「 (e) 」で近似すると、$\{y(t + \Delta t) - y(t)\}/\Delta t = f(t, y)$となる。この式は格子点上のyを$Y(n\Delta t) = Y_n$とし、$t_n = n\Delta t$とすると、$Y_{n+1} = Y_n + \Delta t f(t_n, Y_n)$とおけるので、ある時刻$t_n$での$Y_n$の値が分かれば、$\Delta t$後の$Y_{n+1}$の値を決めることができる。このようにして微分方程式の解を数値的に推定する方法を差分法といい、上に挙げた例は「 (h) **（シ）オイラー法**」と呼ばれる差分法である。元の微分方程式の解とこの差分法の解との誤差の大きさは「 (i) **（ソ）$\boldsymbol{O(\Delta t)}$**」である。また、$Y_{n+1} = Y_n + \Delta t(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, k_1 = f(t_n, Y_n), k_2 = f(t_n + \Delta t/2, Y_n + \Delta t k_1/2), k_3 = f(t_n + \Delta t/2, Y_n + \Delta t k_2/2), k_4 = f(t_n + \Delta t, Y_n + \Delta t k_3)$として計算する差分法は「 (j) **（セ）ルンゲクッタ法**」と呼ばれ、誤差の大きさは「 (k) **（ツ）$\boldsymbol{O(\Delta t^4)}$** 」と精度が高く、よく使われる差分法である。

（ア）偏微分方程式
（イ）積分方程式
（ウ）常微分方程式
（エ）差分方程式
（オ）初期条件
（カ）境界条件
（キ）初期値問題
（ク）境界値問題
（ケ）前進差分商
（コ）後退差分商
（サ）中心差分商
（シ）オイラー法
（ス）ホイン法
（セ）ルンゲクッタ法
（ソ）$O(\Delta t)$
（タ）$O(\Delta t^2)$
（チ）$O(\Delta t^3)$
（ツ）$O(\Delta t^4)$

問1－2

- $y' = y, y(0) = 1$という1階常微分方程式について、この差分方程式の解Y_nをオイラー法によってnとΔtで表せ。また、$\Delta t = \frac{1}{N}$としたとき、Y_Nの値は$N \to \infty$でどのような値に近づくか答えよ。途中の式も書くこと。（6点）
- **差分方程式：** $\boldsymbol{Y_{n+1} = Y_n + \Delta t\, Y_n = (1 + \Delta t)Y_n,\ \ Y_0 = 1}$
  - $\boldsymbol{Y_0 = 1,\ \ Y_1 = (1 + \Delta t),\ \ Y_2 = (1 + \Delta t)^2,\ \ Y_3 = (1 + \Delta t)^3, \ldots}$
- **差分解は**$\boldsymbol{Y_n = (1 + \Delta t)^n}$
- $\boldsymbol{N \to \infty}$**のとき、**$\boldsymbol{Y_N = \lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e}$

問１－３

- 差分方程式の安定性を判断するために考慮することとして、次の4つの文章のうち、<u>正しいものを2つ選び、記号で答えよ</u>。（各3点）
- **（ア）（ウ）（順不同）**
- **（イ）は、数値として出力されても異常振動などの不適切な解がありうるので不適。**
- **（エ）は、Δtが細かすぎると丸め誤差の影響や計算量増大の問題があるので不適。**

(ア) 計算結果が得られたら、解の数値を見るだけでなく、グラフにして概要を把握するのが望ましい。
(イ) 計算不安定が発生すると途中で計算が破綻するので、計算結果が数値として出ていれば問題ない。
(ウ) 微分方程式の解が分かっていれば、差分方程式の解と比較して両者の解の性質を確認するのがよい。
(エ) Δtが小さいほど微分方程式の解に近づくので、とにかく小さなΔtで計算すればよい。

問1－4

- ある差分方程式の解が$Y_n = (1 - 20\Delta t)^n - (1 - 50\Delta t)^n$ であるとする。この差分方程式の計算を安定に進めるために、Δtが満たすべき条件を答えよ。条件を示すための判断過程も書くこと。（5点）

- **計算が安定に進むために$\boldsymbol{\Delta t}$が満たすべき条件は、次を満たす$\boldsymbol{\Delta t}$となる。**
  - $\boldsymbol{|1 - 20\Delta t| < 1}$ **かつ** $\boldsymbol{|1 - 50\Delta t| < 1}$
  - **一番目の式から、$\boldsymbol{\Delta t < \frac{1}{10}}$で不等式を満たす。さらに、$\boldsymbol{\Delta t < \frac{1}{20}}$で$\boldsymbol{(1 - 20\Delta t)}$は常に正。**
  - **二番目の式から、$\boldsymbol{\Delta t < \frac{1}{25}}$で不等式を満たす。さらに、$\boldsymbol{\Delta t < \frac{1}{50}}$で$\boldsymbol{(1 - 50\Delta t)}$は常に正。**

- **両方の条件を満たし、かつ安定に計算が進むのは、$\boldsymbol{\Delta t < \frac{1}{50}}$ という条件となる。**

問1－5

- $\frac{dy}{dt} = y(5-y),\ \ y(0) = 1$という微分方程式の初期値問題を考える。$\Delta t = 0.5$の場合において、次の表を参考に、$t = 1$の差分方程式の解を、ルンゲクッタ法を用いて有効数字3桁まで求めよ。（8点）

t	0	0.5	1
Y_j	1	**3.6757813**	**4.4567944**
k_1	4	**4.8675385**	
k_2	6	**0.5251501**	
k_3	6.25	**4.5415712**	
k_4	3.609375	**−5.6288232**	

問１－６

- 次のFortranソースコードは、2階常微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2} + 10\frac{dy}{dt} + 16y = 0, y(0) = 1, \frac{d}{dt}y(0) = 0$ について、ルンゲクッタ法を用いて差分方程式の解を求めるプログラムである。ソースコードの空欄（a～e）を、右の選択肢から正しいものを選び、<u>記号で答えよ</u>。（各2点）
- （エ）（オ）（ウ）（ク）（サ）

```
program runge_kutta
  implicit none
  integer, parameter :: N = 20
  real(8), parameter :: tmax = 2.0d0
  integer :: i
  real(8) :: dt = tmax/N
  real(8) :: t, y1, y2
  real(8) :: k11, k12, k21, k22
  real(8) :: k31, k32, k41, k42

  t = 0.0d0
  y1 = 1.0d0
  y2 = 0.0d0

  do i = 0, N
    write(*,'(i6,1x,3(f18.12,1x))') i, t, y1, y2
    t = t + dt
    k11 = y2
    k12 = −16.0d0 * y1 − 10.0d0 * y2
    k21 = y2 + dt / 2.0d0 * k12
    k22 = 「（a）」
    k31 = y2 + dt / 2.0d0 * k22
    k32 = 「（b）」
    k41 = y2 + dt * k32
    k42 = 「（c）」
    y1 = y1 + dt / 6.0d0 * (「（d）」)
    y2 = y2 + dt / 6.0d0 * (「（e）」)
  end do
end program
```

（ア） −16.0d0 * (y1 + dt * k11) − 10.0d0 * (y2 + dt * k12)
（イ） −16.0d0 * (y1 + dt * k21) − 10.0d0 * (y2 + dt * k22)
（ウ） −16.0d0 * (y1 + dt * k31) − 10.0d0 * (y2 + dt * k32)
（エ） −16.0d0 * (y1 + dt / 2.0d0 * k11) − 10.0d0 * (y2 + dt / 2.0d0 * k12)
（オ） −16.0d0 * (y1 + dt / 2.0d0 * k21) − 10.0d0 * (y2 + dt / 2.0d0 * k22)
（カ） −16.0d0 * (y1 + dt / 2.0d0 * k31) − 10.0d0 * (y2 + dt / 2.0d0 * k32)
（キ） k11 + k21 + k31 + k41
（ク） k11 + 2.0d0 * k21 + 2.0d0 * k31 + k41
（ケ） 2.0d0 * k11 + k21 + k31 + 2.0d0 * k41
（コ） k12 + k22 + k32 + k42
（サ） k12 + 2.0d0 * k22 + 2.0d0 * k32 + k42
（シ） 2.0d0 * k12 + k22 + k32 + 2.0d0 * k42

問2－1

- 次の文章中の空欄(a～g)に当てはまる適切な語句を右の選択肢から選び、**記号で答えよ**。(各2点)
- 微分方程式のうち、独立変数が2つ以上のものを「 (a) **(ア)偏微分方程式**」という。このうち2階線形「 (a) 」という式には決まった形があり、大きく3つに分けて「 (b) **(オ)拡散方程式**」、「 (c) **(ウ)波動方程式**」、ポアソン方程式(ラプラス方程式)という。「 (b) 」の一般的な形は、$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ というように書くことができ、κを「 (c) **(キ)拡散係数**」という。この式は、時間微分項に前進差分商を、空間微分項に2階中心差分商を用いて、従属変数uを格子点の位置での変数U_j^nで代表させると、$U_j^{n+1} = \alpha U_{j+1}^n + (1-2\alpha)U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$という差分方程式に近似させることができる。ただし、$\alpha =$「 (d) **(ケ)$\kappa\Delta t/\Delta x^2$**」で、独立変数$(x,t)$に対する格子点を$x_j = j\Delta x,\ t_n = n\Delta t$とする。このように、直前の時刻$t_n$から次の時刻$t_{n+1}$を計算できる差分方程式を「 (e) **(シ)陽公式**」という。一方で、この手法は計算が不安定になる場合がある。計算不安定を回避するために、2階中心差分商のU_j^nをU_j^{n+1}で代表させる差分方程式を「 (f) **(サ)陰公式**」という。これは連立方程式を解く必要があるため計算の手間は増えるが、ΔxやΔtに依存せず安定に計算を行うことができるので、「 (g) **(ス)無条件安定**」である。

(ア) 偏微分方程式
(イ) 常微分方程式
(ウ) 波動方程式
(エ) 積分方程式
(オ) 拡散方程式
(カ) 放射係数
(キ) 拡散係数
(ク) $\kappa\Delta t/\Delta x$
(ケ) $\kappa\Delta t/\Delta x^2$
(コ) $\kappa\Delta t^2/\Delta x^2$
(サ) 陰公式
(シ) 陽公式
(ス) 無条件安定
(セ) 絶対安定

問２－２

- 波動方程式における安定性の条件を、特に何というか、答えよ。（3点）
- CFL条件（クーラン条件、クーラン・フリードリッヒ・ルーイの条件、など）

問2－3

- $\kappa > 0, \Delta x > 0, \Delta t > 0$のとき、次の差分方程式が無条件安定であることを示せ。ここで、差分方程式の特解の形は$U_j^n = f(n)e^{ijk\Delta x}$（iは虚数単位、kは任意の実数、fは時間振幅に対する関数）と置いて考えてもよい。（8点）

$$\frac{1}{\Delta t}\left\{U_j^{n+1} - U_j^n\right\} = \frac{\kappa}{\Delta x^2}\left\{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}\right\} \quad (j = 1,2,\dots,N-1, n = 0,1,\dots)$$

- **特解を差分方程式に代入すると、$\alpha = \kappa\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$とおいて、**
  - $-\alpha f(n+1)e^{ik(j+1)\Delta x} + (1+2\alpha)f(n+1)e^{ikj\Delta x} - \alpha f(n+1)e^{ik(j-1)\Delta x} = f(n)e^{ikj\Delta x}$
  - $f(n) = f(n+1)\left\{-\alpha e^{ik\Delta x} + (1+2\alpha) - \alpha e^{-ik\Delta x}\right\} = f(n+1)(1+2\alpha-2\alpha\cos k\Delta x) = f(n+1)\left(1+4\alpha\sin^2\frac{k\Delta x}{2}\right)$
- **$f(0) = 1$とすると、$f(n) = \left(1+4\alpha\sin^2\frac{k\Delta x}{2}\right)^{-n}$なので、$U_j^n = \left(1+4\alpha\sin^2\frac{k\Delta x}{2}\right)^{-n}e^{ikj\Delta x}$はこの差分方程式の特解となる。**
- **任意のk,αについて$1+4\alpha\sin^2\frac{k\Delta x}{2} \geq 1$なので、時間経過で$U_j^n$が発散することはない。ゆえにこの差分方程式は無条件安定。**

問2－4

- 次ページのFortranソースコードは、移流方程式$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$について、$\Delta t = 10^{-3}, \Delta x = 10^{-2}, c = 0.5, N = 100, u(x,0) = \begin{cases} 1 \quad (0.45 \le x \le 0.55) \\ 0 \quad (0 \le x < 0.45, 0.55 < x \le 1) \end{cases}, U_0^n = U_{N-1}^n, U_N^n = U_1^n$ （周期境界条件）とした時の初期時刻から2秒後までを計算するプログラムである。ソースコードの空欄（a～e）を、右の選択肢から正しいものを選び、<u>**記号で答えよ**</u>。（各2点）
- **（セ）（タ）（テ）（ハ）（ヌ）**

```
program advection
   implicit none

   integer, parameter :: xmax = 100
   real(8), parameter :: tmax = 2.0d0
   real(8), parameter :: dt = 1.0d-3
   real(8), parameter :: dx = 1.0d-2
   real(8), parameter :: c   = 5.0d-1

   integer :: n, x
   real(8) :: u0(0:xmax)
   real(8) :: u1(0:xmax)
   real(8) :: a

   a = 「 (a) 」

   do x = 0, xmax
      if( 「 (b) 」 ) then
         u0(x) = 1.0d0
      else
         u0(x) = 0.0d0
      end if
   end do

   do n = 1, int( tmax / dt )
      write(*,'(101(f18.12,1x))') u0(:)

      do x = 1, xmax-1
         u1(x) = u0(x) + a * ( 「 (c) 」 )
      end do

      u1(0) = 「 (d) 」
      u1(xmax) = 「 (e) 」

      u0(:) = u1(:)
   end do
end program
```

（ス） -c * dt / dx
（セ） -c * dt / dx / 2.0d0
（ソ） -c * dt / dx * 2.0d0
（タ） x >= 45 .and. x <= 55
（チ） x <= 45 .and. x >= 55
（ツ） u0(x+1) + u0(x-1)
（テ） u0(x+1) - u0(x-1)
（ト） u0(x+1) + u0(x)
（ナ） u0(x+1) - u0(x)
（ニ） u0(0)
（ヌ） u0(1)
（ネ） u0(2)
（ノ） u0(xmax)
（ハ） u0(xmax-1)
（ヒ） u0(xmax-2)

問2－5

- 前問（4）のように移流方程式を差分近似したものは、計算が不安定であり、微分方程式の解とは異なる数値振動が発生する。これに対して数値拡散項を導入すれば、振動を抑えることができる。このような差分方程式を何というか、答えよ。また、その差分方程式の解はどのような問題が発生するか、答えよ。（各4点）
- **風上差分方程式**
- **数値拡散項によって解の形が徐々に鈍っていく**