神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.10.6

定期試験（前期）解説

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

問1－1

- 次の文章中の空欄(a～d)に当てはまる適切な語句を下の選択肢から選び、記号で答えよ。(各2点)
  - 関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ において n 階微分可能であるとき、$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}$ を満たす $c\ (a < c < b)$ が存在するという定理を「(a) ウ. テイラーの定理 」という。$n = 1$ のとき、この式は「(b) イ. 平均値の定理 」と等しいので、「(a) 」は「(b) 」の一般化に相当する。この「(a) 」を根拠として、関数 $f(x)$ を多項式 $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + f^{(n)}(c)\frac{(x-a)^n}{n!}$ で表すことを「(c) カ. テイラー展開 」という。$a = 0$ のときの「(c) 」を特に「(d) ク. マクローリン展開 」という。

ア. 中間値の定理	イ. 平均値の定理	ウ. テイラーの定理	エ. ロルの定理	オ. マクローリンの定理
カ. テイラー展開	キ. ロル展開	ク. マクローリン展開		

問１－２

- 次の関数をマクローリン級数で3次項(n=4)まで表せ。剰余項は書かなくてもよい。(各4点)
  - (a) e^{2x}　(b) $\frac{1}{1+x}$　(c) $\sin 2x$
- 3次項までのマクローリン展開:　$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{6}$
- (a) $1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$
- (b) $1 - x + x^2 - x^3$
- (c) $2x - \frac{4}{3}x^3$

問1－3

- $f(x)=\sqrt{1+2x}$について、3次項までマクローリン展開を行い、$\sqrt{2}\approx 1.4142$に対する誤差を有効数字3桁で示せ。途中の計算式も書くこと。（8点）
- 3次項までのマクローリン展開： $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+f'''(0)\frac{x^3}{6}$
- $f(0)=1, f'(0)=2\cdot\frac{1}{2}(1+2\cdot 0)^{-1/2}=1$
- $f''(0)=2\cdot -\frac{1}{2}(1+2\cdot 0)^{-3/2}=-1, f'''(0)=-2\cdot -\frac{3}{2}(1+2\cdot 0)^{-5/2}=3$
- $f(x)=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}$
- $\sqrt{2}$への近似は$f\left(\frac{1}{2}\right)$なので、$f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}=\frac{23}{16}=1.4375$
- $1.4375-1.4142=2.33\times 10^{-2}$

問2－1

- 次の文章中の空欄(a～i)に当てはまる適切な語句を下の選択肢から選び、記号で答えよ。(各2点)
  - 周期Lの任意の周期関数$f(x)$は、$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right)$というように表せる。この右辺を「(a) ア. フーリエ級数 」という。ここで、a_0, a_n, b_nは「(b) エ. フーリエ係数 」であり、$a_n =$「(c) ケ. $\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2\pi nx}{L}dx$ 」, $b_n =$「(d) ク. $\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}dx$ 」である。オイラーの恒等式を用いると、「(a) 」は$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right)$という式に変換でき、これを「(e) イ. 複素フーリエ級数 」という。このとき、$c_n =$「(f) サ. $\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right)dx$ 」であり、「(g) オ. 複素フーリエ係数 」という。関数$f(x)$上のN個の点が与えられたとき、LをΔx間隔でN等分し、m番目のxの位置$x_m = m\Delta x = \frac{mL}{N}$とおくと、積分を総和の形で近似することができるので、$f(m\Delta x) = f_m$として、$F_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp\left(-\frac{2\pi imn}{N}\right)$とおける。この$F_n$を求めることを「(h) カ. 離散フーリエ変換 」といい、逆にF_nを用いて関数$f(x)$を、$f(x) \approx \sum_{n=-N/2}^{N/2} F_n \exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right)$と近似することを「(i) キ. 逆離散フーリエ変換 」という。

ア．フーリエ級数　イ．複素フーリエ級数　ウ．離散フーリエ級数　エ．フーリエ係数　オ．複素フーリエ係数　カ．離散フーリエ変換　キ．逆離散フーリエ変換　ク．$\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}dx$　ケ．$\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2\pi nx}{L}dx$　コ．$\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\tan\frac{2\pi nx}{L}dx$　サ．$\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\exp\left(-\frac{2\pi inx}{L}\right)dx$　シ．$\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\exp\left(\frac{2\pi inx}{L}\right)dx$

問2－2

- 次のFortranソースコードは、離散フーリエ変換、逆離散フーリエ変換を順次実行し、ノコギリ波$f(x) = x\ (-1 \le x \le 1)$ を近似させたものである。（ソースコードは左列→右列に続いている）
  - ソースコードの空欄（a～e）を、次の選択肢から正しいものを選び、記号で答えよ。（各2点）

```
program DFT_IDFT
  implicit none

  integer, parameter :: num = 「 (a) ア. 40 」
  real(8), parameter :: pi = 3.141592653589793d0
  complex(8), parameter :: i = ( 0.0d0, 1.0d0 )

  integer :: j, n, m
  real(8) :: p( 0:num−1 )
  real(8) :: x( 0:100 ), f( 0:100 )
  complex(8) :: DFT( −num/2:num/2 )

  p( 0:num−1 ) = (/ (j*0.05d0−1.0d0, j=0,39) /)
  x( 0:100 ) = (/ (j*0.02d0, j=0,100) /)
  f( 0:100 ) = 0.0d0
  DFT( −num/2:num/2 ) = 0.0d0
```

```
  do n = 「 (b) カ. –num/2, num/2 」
    do m = 「 (c) エ. 0, num–1 」
      DFT(n) = DFT(n) &
      + p(m) / dble(num) * 「 (d) ケ. exp( –2.0d0
* pi * i * dble(m*n) / dble(num) ) 」
    end do
  end do

  do m = 0, 100
    do n = 「 (b) 」
      f(m) = f(m) + DFT(n) * 「 (e) コ. exp( 2.0d0
* pi * i * dble(n) * x(m) / 2.0d0 ) 」
    end do

    write(*,*) x(m) − 1.0d0, f(m)
  end do
```

ア. 40　イ. 70　ウ. 100　エ. 0, num–1　オ. 0, 100　カ. –num/2, num/2　キ. –num, num　ク. exp(2.0d0 * pi * i * dble(m*n) / dble(num))
ケ. exp(–2.0d0 * pi * i * dble(m*n) / dble(num))　コ. exp(2.0d0 * pi * i * dble(n) * x(m) / 2.0d0)　サ. exp(–2.0d0 * pi * i * dble(n) * x(m) / 2.0d0)

問２－３

- 上記プログラムにおいて、関数$f(x)$はその両端$(x = 1, x = -1)$で不連続である。このような不連続点を含む関数をフーリエ変換した場合に起きる現象の名前を答えよ。(2点)
- ギブス現象

問2−4

- $f(x)$ が以下のように与えられる場合に、フーリエ係数$b_{n=1\ldots4}$を求めよ。（6点）
  - $f(x) = \begin{cases} -1\ (0 < x \leq 1) \\ 1\ (1 < x \leq 2) \end{cases}$
- $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}dx,\ L = 2$
- $b_n = \int_0^1 (-1)\sin(n\pi x)\,dx + \int_1^2 (+1)\sin(n\pi x)\,dx$

$$= -\left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{n\pi}(-1\,)^n - \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}(-1)^n = \frac{2}{n\pi}\{(-1)^n - 1\}$$

- $b_1 = -\frac{4}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = -\frac{4}{3\pi}, b_4 = 0$

問２－５

- 次のようなデータが与えられているとき、離散フーリエ係数$F_0, F_{\pm1}, F_{\pm2}$を求めよ。（6点）

m	0	1	2	3
x	0	0.5	1.0	1.5
f(x)	0	0.5	-1.0	-0.5

- $F_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp\left(-\frac{2\pi imn}{N}\right), N = 4$

$$= \frac{1}{4}(f(0)\exp(0)) + \frac{1}{4}\left(f(1)\exp\left(-\frac{i}{2}n\pi\right)\right) + \frac{1}{4}(f(2)\exp(-in\pi)) + \frac{1}{4}\left(f(3)\exp\left(-\frac{3i}{2}n\pi\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\exp\left(-\frac{i}{2}n\pi\right) - \frac{1}{4}\exp(-in\pi) - \frac{1}{8}\exp\left(-\frac{3i}{2}n\pi\right)$$

- $F_0 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}, F_{\pm1} = -\frac{i}{8} + \frac{1}{4} - \frac{i}{8} = \frac{1}{4}(1 \mp i), F_{\pm2} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$

問3－1

- 次の文章中の空欄(a～h)に当てはまる適切な言葉を下の選択肢から選び、記号で答えよ。(各2点)
  - 数値計算により、$I=\int_a^b f(x)dx$の値を近似的に得る方法を考える。この方法を「(a) イ. 数値積分 」という。積分の近似値を求めるには、微小区間の面積の総和を考えればよい。「(a)」の手法として、面積を台形で近似する「(b) カ. 台形則 」が挙げられる。関数$f(x)$について、積分の始点をa、終点をb、分割数を$N=2^n$、台形の幅を$h=(b-a)/2^n$で等間隔に刻んでいくとすると、積分近似値T_nはT_n=「(c) ス. $\frac{b-a}{2^n}\left\{\frac{f(a)}{2}+f\left(a+1\cdot\frac{b-a}{2^n}\right)+f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{2^n}\right)+\cdots+\frac{f(b)}{2}\right\}$ 」で表される。T_nを用いてT_{n+1}を表すと、T_{n+1}=「(d) ソ. $\frac{T_n}{2}+\frac{b-a}{2^{n+1}}\left\{f\left(a+1\cdot\frac{b-a}{2^{n+1}}\right)+f\left(a+3\cdot\frac{b-a}{2^{n+1}}\right)+\cdots+f\left(b-\frac{b-a}{2^{n+1}}\right)\right\}$ 」という漸化式を作ることができる。ただし、$T_0=\frac{b-a}{2}\{f(a)+f(b)\}$である。この「(b)」による積分近似値の誤差は、おおよそ「(e) コ. $1/\mathrm{N}^2$ 」に比例する。「(b)」は1次のラグランジュ補間多項式による積分値を求めることに等しいので、近似精度を上げるには高次のラグランジュ補間多項式を使えばよい。2次のラグランジュ補間多項式を用いて積分近似値を求める方法を「(f) ケ. シンプソン則 」という。この積分近似値S_nはT_nを用いて、S_n=「(g) テ. $\frac{4}{3}T_n-\frac{1}{3}T_{n-1}$ 」と表され、その誤差はおおよそ「(h) シ. $1/\mathrm{N}^4$ 」に比例する。このように、「(b)」の積分近似値に適当な係数をかけて「(e)」を得られる手法を一般化したものを「(i) ク. ロンバーグ積分法 」という。

ア. 数値解　イ. 数値積分　ウ. 常微分　エ. ガウス求積法　オ. 区分求積法　カ. 台形則　キ. 合成積分法　ク. ロンバーグ積分法　ケ. シンプソン則　コ. $1/\mathrm{N}^2$　サ. $1/\mathrm{N}^3$　シ. $1/\mathrm{N}^4$　ス. $\frac{b-a}{2^n}\left\{\frac{f(a)}{2}+f\left(a+1\cdot\frac{b-a}{2^n}\right)+f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{2^n}\right)+\cdots+\frac{f(b)}{2}\right\}$
セ. $\frac{b-a}{2^n}\left\{f(a)+\frac{f\left(a+1\cdot\frac{b-a}{2^n}\right)}{2}+\frac{f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{2^n}\right)}{2}+\cdots+f(b)\right\}$　ソ. $\frac{T_n}{2}+\frac{b-a}{2^{n+1}}\left\{f\left(a+1\cdot\frac{b-a}{2^{n+1}}\right)+f\left(a+3\cdot\frac{b-a}{2^{n+1}}\right)+\cdots+f\left(b-\frac{b-a}{2^{n+1}}\right)\right\}$
タ. $\frac{T_n}{2}+\frac{b-a}{2^{n+1}}\left\{f(a)+f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{2^{n+1}}\right)+f\left(a+4\cdot\frac{b-a}{2^{n+1}}\right)+\cdots+f(b)\right\}$　チ. $\frac{1}{2}T_n+\frac{1}{2}T_{n-1}$　ツ. $\frac{3}{4}T_n-\frac{1}{4}T_{n-1}$　テ. $\frac{4}{3}T_n-\frac{1}{3}T_{n-1}$

問3－2

- 関数$f(x)=2^x$について、$x=0\sim 2$の範囲で定積分を行うと、その値は

$$\int_0^2 2^x dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2=\frac{1}{\ln 2}(4-1)\approx 4.328085122$$

- となる。この関数$f(x)$について、各問いに答えよ。（各6点）
- (a) 台形則を用いて分割数N=4の積分近似値を計算し、絶対誤差を有効数字3桁で答えよ。
- $T_0=5, T_1=\frac{9}{2}, T_2=\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\left(2^{1/2}+2^{3/2}\right)\approx 4.371320344$
- $|4.328085122-4.37132034344|=0.04323522156\approx 4.32\times 10^{-2}$

問３－２（続）

- 関数$f(x) = 2^x$について、$x = 0 \sim 2$の範囲で定積分を行うと、その値は
$$\int_0^2 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2 = \frac{1}{\ln 2}(4-1) \approx 4.328085122$$
- となる。この関数$f(x)$について、各問いに答えよ。（各6点）
- (b) シンプソン則を用いて分割数N=4の積分近似値を計算し、絶対誤差を有効数字3桁で求めよ。
- $S_n = \frac{4}{3}T_n - \frac{1}{3}T_{n-1}$
- $S_2 = \frac{4}{3} \cdot T_2 - \frac{1}{3} \cdot T_1 = \frac{4}{3} \cdot \left\{\frac{9}{4} + \frac{1}{2}\left(2^{1/2} + 2^{3/2}\right)\right\} - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}\left(2^{1/2} + 2^{3/2}\right) \approx 4.328427124$
- $|4.328427124 - 4.328085122| \approx 3.42 \times 10^{-4}$