神戸市立工業高等専門学校
電気工学科／電子工学科
専門科目「数値解析」

2017.5.12

曲線の推定1

山浦 剛（tyamaura@riken.jp）

講義資料ページ

- http://climate.aics.riken.jp/members/yamaura/numerical_analysis.html

曲線の推定

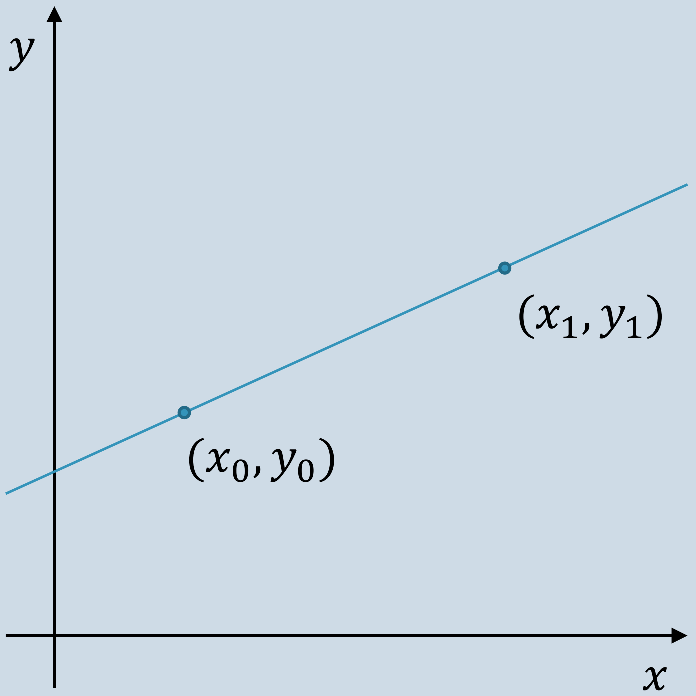
- 少ない点の情報から、元の関数や曲線を推定する
  - 点の分布がある程度与えられれば、グラフの形を想像することもできる
  - 数値計算では、この「想像」を一定のアルゴリズムに従って決定する
- 曲線の推定には2種類の曲線のあてはめ（curve-fitting）がある
  - 与えられた点を全て通るような曲線
    - ラグランジュ補間
    - スプライン補間
  - 誤差を考慮し、最も理論式に近くなるような曲線
    - 最小2乗法
- 補間
  - 曲線を推定する　⇒　与えられた点以外の曲線上の点を推定する

ラグランジュ補間

- XY平面内にN+1個の点$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ が与えられたとき、これらの点を全て通る曲線をxのN次の多項式を用いて、曲線 $y = p_N(x)$ の形で生成する。
  - ただし、$i \neq j$ のとき $x_i \neq x_j$ とする　⇒　あるx に対応する$p_N(x)$ の値は一意に決められる
- この多項式は次のように表される。
  - $p_N(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$
- このとき、$p_N(x)$ は与えられたN+1個の点を通らなければならないので、次の要件を満たさなければならない。
  - $p_N(x_j) = y_j \, (j = 0,1,2, \ldots, N)$

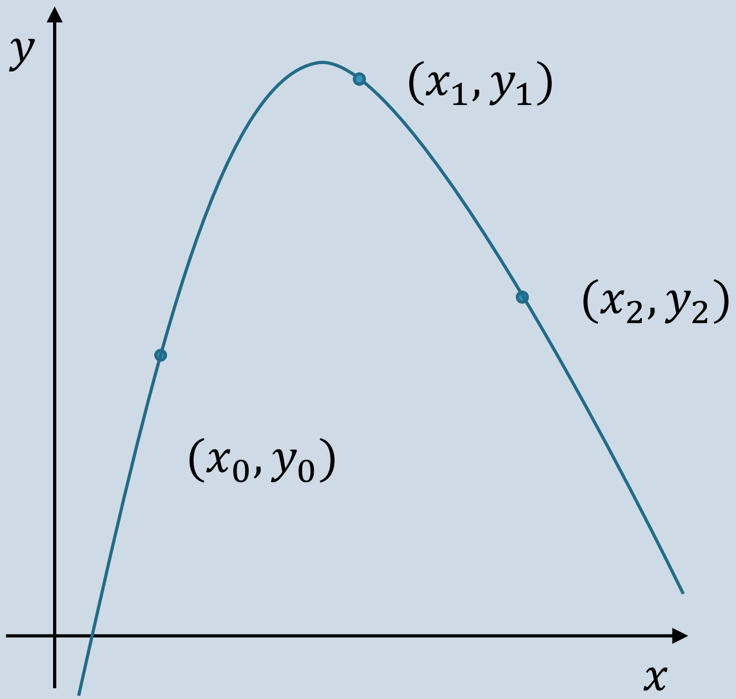
ラグランジュ補間

- 最も簡単な例：1次（N=1）
  - ２点(x_0, y_0), (x_1, y_1) が与えられる場合を考える
  - $p_1(x) = a_0 + a_1 x$
    - $\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{cases}$
  - $y = p_1(x)$ は直線である
    - 1次のラグランジュ補間は直線
  - 連立方程式をa_0, a_1 について解く
    - $a_0 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$, $a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
  - ゆえに $p_1(x) = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$



ラグランジュ補間

- 例：2次(N=2)
  - ３点(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) が与えられる場合を考える
  - $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
    - $\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}$
  - $y = p_2(x)$ は、$a_2 = 0$ を除き、放物線である
  - $p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$



ラグランジュ補間

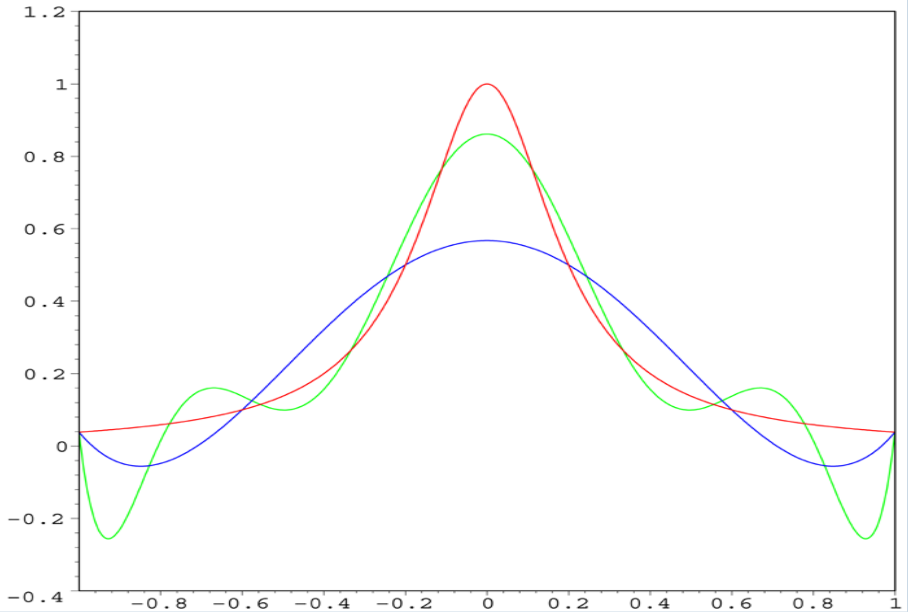
- 一般的な場合: N次
  - 関数$l_j(x)$ を考える
    - $l_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_N)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_N)} \qquad (j = 0,1,2,\ldots,N)$
    - 分子の$(x - x_j)$ の項が、分母の$(x_j - x_j)$ の項がないことに注意
  - このとき、$l_j(x)$ はN次多項式で、次の条件を満たす
    - $l_j(x_i) = \begin{cases} 1 \ (i = j) \\ 0 \ (i \neq j) \end{cases}$
  - そこで、$p_N(x)$ を次のように定義する
    - $p_N(x) = \sum_{j=0}^{N} y_j \, l_j(x)$
  - このとき、$p_N(x)$ はN次多項式で、x_j について次の要件を満たしている
    - $p_N(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,2,\ldots,N)$
  - この$p_N(x)$ を「ラグランジュの補間多項式」と呼ぶ

ラグランジュ補間

- ラグランジュ補間の誤差
  - 関数$f(x)$と、ラグランジュの補間多項式$p_N(x)$の間の誤差
    - $f(x) - p_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_N) \qquad (x_0 < x < x_N)$
    - ただし、$f^{(N+1)}(x)$は$f(x)$のN+1階導関数
  - 例: 1次の補間多項式でsin(29.5°)を計算
    - $\mathrm{p}_1(29.5°) = \frac{1}{2}(\sin(29°) + \sin(30°)) \approx 0.492405$
    - $|\sin(29.5°) - p_1(29.5°)| = \frac{|\sin\xi|}{2}\left(\frac{\pi}{180°}\right)^2 |(29.5° - 29°)(29.5° - 30°)|$
      $\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180°}\right)^2 |(29.5° - 29°)(29.5° - 30°)| \approx 3.81 \times 10^{-5}$
  - おおむね小数点4桁程度までは正しそう
    - $\sin(29.5°) = 0.4924235\ldots$

ラグランジュ補間

- ラグランジュ補間の性質
  - ルンゲ（Runge）現象
    - $N \to \infty$ のとき、$x = \pm 1$ 付近の有限領域で$|f(x) - p_N(x)|$が発散する
  - ラグランジュ補間は与えられた点が多い場合、質の悪いふるまいをすることがある
    - 高次導関数のほうが誤差が大きくなる
      - $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$
      - $f'(x) = -\frac{50x}{(1+25x^2)^2}$
        - $|f'(1)| \approx 0.07396449704$
      - $f''(x) = \frac{5000x^2(1+25x^2)-50(1+25x^2)^2}{(1+25x^2)^4}$
        - $|f''(1)| \approx 0.21051433773$
    - ラグランジュ補間は低次の補間にとどめておくべき



赤はルンゲ関数（$y = \frac{1}{1+25x^2}$）。青は5次の補間多項式。緑は9次の補間多項式。補間点と補間点の間（特に 1 や -1 に近い部分）では、補間多項式を高次にした方が誤差が大きくなる。

（出典：https://ja.wikipedia.org/wiki/ルンゲ現象）