5. Precesszió

2021. március 25.

Gyakorlatok

1. Feladat. *Készítsük el azt a* ***PrecMatrix_Ecl***(T1, T2) *MATLAB-függvényt, amely megadja a T1 epochára adott ekliptikai koordinátáknak a T2 epochára való precessziós transzformációs mátrixát!*

2. Feladat. *Készítsük el azt a* ***PrecMatrix_Equ***(T1, T2) *MATLAB-függvényt, amely megadja a T1 epochára adott ekvatoriális koordinátáknak a T2 epochára való precessziós transzformációs mátrixát!*

3. Feladat. *Készítsünk tesztelő programot az előbbi két fügvény tesztelésére!*

Precesszió

A Nap, Hold és bolygók zavaró hatása következtében a Föld forgástengelye, valamint az ekliptika síkja lassan változtatja egymáshoz viszonyított térbeli helyzetét. Ennek a jelenségnek a neve: *precesszió*. A precesszió következtében nem csak az ekliptika és egyenlítő ε hajlásszögének mértéke változik lassan, hanem a tavaszpont is lassan elmozdul az éggömbön. Az elmozdulás mértéke évszézadonként mintegy $1\overset{\circ}{,}5$ (évente mintegy $1'$). Következésképpen, pontos számítások esetén a használt koordináta-rendszer *tavaszpontját* meg kell adni. A leggyakrabban használt tavaszpontok:

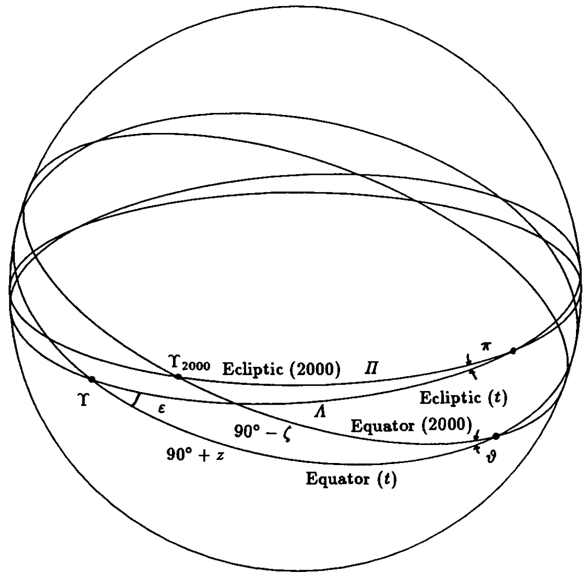
- az *aktuális dátumhoz tartozó tavaszpont*;
- a *J2000 tavaszpont*;
- a *B1950 tavaszpont*.

Az „aktuális dátum tavaszpontja” azt jelenti, hogy az egyenlítőre, ekliptikára és tavaszpontra vonatkozó adatok az éppen vizsgált dátumnak megfelelő adatok.

A koordináta-rendszerek ilyen napi módosulása fontos lehet, ha például bolygók pontos koordinátáit akarjuk meghatározni, valamely ekvatoriális távcső alapsíkjaihoz viszonyítva, mivel a Föld forgástengelyének irányváltoztatása befolyásolja a távcső alapsíkjainak helyzetét is. Másfelől viszont, ha egy bolygó térbeli mozgását akarjuk vizsgálni, akkor előnyösebb valamely rögzített tavaszpont használata, mint amilyen a:

- *J2000 Julián epocha* (2000. január 1.5 = JD 2451545.0), aminek általános használatát 1984-ben vezették be.
- *B1950 Bessel epocha* (1950. január 0.923 = JD 2433282.423), ami eltér a J1950 = JD 2433282.5 epochától, de amit sokáig használtak például több csillagkatalógus összeállításánál.

Ha valamely epochára vett tavaszpontra adott koordinátákat akarunk transzformálni egy másik epochához tartozó koordináta-rendszerbe, akkor az ekvatoriális és ekliptikai koordináták transzformációjánál használt eljáráshoz hasonlóan forgatásokat használunk. Ha eredetileg elegendő volt egyetlen x-tengely körüli forgatás használata, most a két koordináta-rendszer egymásba való elforgatásához három forgatás szükséges, amelyeknek sorrendje: z-tenhely, x-tengely, majd újból z-tengely körül.



1. ábra. A precesszió hatásai

Ha teküntjük az ekliptikát egy T_0, illetve a $T = T_0 + dT$ időpontban, akkor a két sík hajlásszöge:

$$\begin{aligned}\pi &= \left(47^{\prime\prime}\!.0029 - 0^{\prime\prime}\!.06603 \cdot T_0 + 0^{\prime\prime}\!.000598 \cdot T_0^2\right) \cdot dT \\ &+ \left(-0^{\prime\prime}\!.03302 + 0^{\prime\prime}\!.000598 \cdot T_0\right) \cdot dT^2 + 0^{\prime\prime}\!.000060 \cdot dT^3\end{aligned}$$

A T_0 epochában adott (x_0, y_0, z_0) derékszögű ekliptikai koordinátáknak a T időpontban megfelelő (x, y, z) ekliptikai koordináták három forgatással állíthatók elő:

- z-tengely körüli forgatás Π szöggel, a megfelelő $R_z(\Pi)$ rotációs mátrixszal;
- z-tengely körüli forgatás π szöggel, a megfelelő $R_x(\pi)$ rotációs mátrixszal;
- z-tengely körüli forgatás $-\Lambda$ szöggel, a megfelelő $R_z(-\Lambda)$ rotációs mátrixszal.

Az $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^t$, illetve $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$ oszlopmátrixok segítségével a megfelelő kkordináta-transzformáció az

$$\mathbf{r} = P \cdot \mathbf{r}_0$$

összefüggéssel írható le, vagyis az ekliptikai koordináták precessziós transzformációs mátrixa

$$P = R_z(-\Lambda)\, R_x(\pi)\, R_z(\Pi)$$

ahol

$$\Lambda = \Pi + p.$$

A fenti forgatásokban megjelenő Π, és p szögek értéke a T_0, T időadatok függvényében:

$$\begin{aligned}\Pi &= \left(174^{\circ}\!.876383889 + 3289^{\prime\prime}\!.4789 \cdot T_0 + 0^{\prime\prime}\!.60622 \cdot T_0^2\right) \\ &+ \left(-869^{\prime\prime}\!.8089 - 0^{\prime\prime}\!.50491 \cdot T_0\right) \cdot dT + 0^{\prime\prime}\!.03536 \cdot dT^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p &= \left(5029^{\prime\prime}\!.0966 + 2^{\prime\prime}\!.22226 \cdot T_0 - 0^{\prime\prime}\!.000042 \cdot T_0^2\right) \cdot dT \\ &+ \left(1^{\prime\prime}\!.11113 - 0^{\prime\prime}\!.000042 \cdot T_0\right) \cdot dT^2 - 0^{\prime\prime}\!.000006 \cdot dT^3\end{aligned}$$

Ekvatoriális koordináták precessziós transzformációja esetén a π, Π, Λ szögeknek megfelelő $90^\circ - \zeta, \theta$, illetve $90^\circ + z$ transzformációs szögek kifejezései:

$$\begin{aligned}\zeta &= \left(2306''.2181 + 1''.39656 \cdot T_0 - 0''.000139 \cdot T_0^2\right) \cdot dT \\ &\quad + \left(0''.30188 - 0''.000345 \cdot T_0\right) \cdot dT^2 + 0''.017998 \cdot dT^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= \left(2004''.3109 - 0''.85330 \cdot T_0 - 0''.000217 \cdot T_0^2\right) \cdot dT \\ &\quad + \left(-0''.42665 - 0''.000217 \cdot T_0\right) \cdot dT^2 - 0''.041833 \cdot dT^3\end{aligned}$$

$$z = \zeta + \left(0''.79280 + 0''.000411 \cdot T_0\right) \cdot dT^2 + 0''.000205 \cdot dT^3$$

és az ekvatoriális koordináták precessziós transzformációs mátrixa:

$$P = R_z\left(-z\right) R_y\left(\theta\right) R_z\left(-\zeta\right)$$

Megjegyzések

1. A precessziós mátrixok teszteléséhez használhatók az előző gyakorlatban elkészített koordináta-transzformációk. Például, bemenetként induljunk egy T_0 epochához tartozó (λ_0, β_0) ekliptikai koordinátákból, és számítsuk ki az illető pont (α, δ) ekvatoriális koordinátáit egy T epochára. A transzformációk két módon is elvégezhetők, és az eredményeknek meg kell egyezni! Pontosabban, például a két eljárás eredményeként kapott derékszögű koordináták között az eltérés kisebb, mint 10^{-10}.

   A két lehetséges út: koordináta-transzformáció, majd megfelelő precessziós transzformáció, illetve precessziós transzformációt követő koordináta-transzformáció.

2. Ellenőrzésre használható példák:

   » Prec_Matrix_Equ(0,1)

   ans =

$$\begin{matrix} 0.999702648389963 & -0.0223662749642553 & -0.00971414156362424 \\ 0.0223662747828315 & 0.999749837681056 & -0.000108669409736501 \\ 0.0097141419813425 & -0.00010863206277879 & 0.999952810708906 \end{matrix}$$

   » Prec_Matrix_Ecl(0,1)

   ans =

$$\begin{matrix} 0.999702648387259 & -0.0243847197892344 & -1.57576017735717e-05 \\ 0.0243847155844524 & 0.999702622803039 & -0.000227170839524976 \\ 2.12924130882271e-05 & 0.000226719045271934 & 0.999999974072553 \end{matrix}$$