

# Bevezetés a csillagászatba

Javított szöveg

Szenkovits Ferenc

Kolozsvár, 2016



# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1. A csillagászat és tárgya . . . . .	1
1.2. A csillagászat problémái . . . . .	2
1.3. A csillagászat módszerei . . . . .	3
1.4. A csillagászat szakterületei . . . . .	3
1.5. A csillagászati mértékegységek . . . . .	5
1.6. A belátható világ (Metagalaxis) . . . . .	6
1.6.1. Anyagformák a Metagalaxisban . . . . .	7
1.6.2. A barionos anyag szerveződése . . . . .	9
1.7. A csillagászat jelentősége . . . . .	12
<b>2. Szférikus csillagászat</b>	<b>17</b>
2.1. Az égitestek látszólagos helyzete . . . . .	17
2.2. Az éggömb és látszólagos napi mozgása . . . . .	21
2.3. Földrajzi koordináták . . . . .	23
2.4. Égi koordináták . . . . .	25
2.4.1. A horizontális koordináta-rendszer . . . . .	25
2.4.2. Az első egyenlítői koordináta-rendszer (órakoordináták)	26
2.4.3. A második egyenlítői koordináta-rendszer (ekvatoriális koordináták) . . . . .	28
2.5. A földrajzi és égi koordináták kapcsolata . . . . .	29
2.6. A Nap évi látszólagos mozgása . . . . .	31
2.6.1. A Nap évi látszólagos mozgása . . . . .	31
2.6.2. A Nap évi látszólagos mozgásának következményei . .	32
2.6.3. Az ekliptikai koordináta-rendszer . . . . .	34
2.7. Koordináta-transzformációk . . . . .	34
2.7.1. Gömbháromszögtani alapismeretek . . . . .	34
2.7.2. Távolságok kiszámítása a Föld felszínén . . . . .	42
2.7.3. Két csillag szögtávolsága . . . . .	43

2.7.4.	Átszámítás a horizontális és az egyenlítői koordináta-rendszer között . . . . .	44
2.7.5.	Átszámítás az egyenlítői és az ekliptikai koordináta-rendszer között . . . . .	48
2.7.6.	Égitestek keltének és nyugtának helye és ideje . . . . .	49
<b>3.</b>	<b>Az idő mérése</b>	<b>53</b>
3.1.	Az inerciaidő . . . . .	53
3.2.	Helyi idők . . . . .	54
3.2.1.	A csillagidő . . . . .	54
3.2.2.	A valódi szoláris idő . . . . .	56
3.2.3.	A közép szoláris idő . . . . .	58
3.2.4.	A közép szoláris idő és a csillagidő közötti összefüggés . . . . .	60
3.2.5.	Időrendszerek és földrajzi hosszúság . . . . .	62
3.3.	Világidő, zónaidők, hivatalos idő . . . . .	63
3.3.1.	A világidő . . . . .	63
3.3.2.	A pontos idő csillagászati meghatározása . . . . .	65
3.3.3.	Az efemerisz idő . . . . .	67
3.3.4.	Az atomidő . . . . .	68
3.3.5.	A koordinált világidő . . . . .	69
3.3.6.	A zónaidő . . . . .	70
3.3.7.	Az időszolgálat . . . . .	73
3.4.	Naptárkészítés . . . . .	74
3.4.1.	A naptárkészítés alapproblémája, naptártípusok . . . . .	74
3.4.2.	A régi római naptár . . . . .	77
3.4.3.	A julianusi naptár . . . . .	78
3.4.4.	A Gergely-féle naptár . . . . .	80
3.4.5.	A Julián Dátum . . . . .	81
3.4.6.	A különféle évek és hónapok hossza . . . . .	83
<b>4.</b>	<b>A csillagászati észlelések redukciója</b>	<b>85</b>
4.1.	A csillagászati refrakció . . . . .	85
4.1.1.	Értelmezések . . . . .	85
4.1.2.	A csillagászati refrakció közelítő formulája . . . . .	87
4.1.3.	A csillagászati refrakció következményei . . . . .	88
4.2.	Az aberráció . . . . .	89
4.2.1.	A fény sebességének meghatározása . . . . .	89
4.2.2.	Az aberráció és annak korpuszkuláris magyarázata . . . . .	90
4.3.	A parallaxis . . . . .	93
4.3.1.	A napi parallaxis . . . . .	94

4.3.2.	A Hold parallaxisa . . . . .	95
4.3.3.	A Nap parallaxisa . . . . .	96
4.3.4.	A Naprendszerben található égitestek méretei . . . . .	98
4.3.5.	Napi parallaxis korrekciók . . . . .	99
4.3.6.	Az évi parallaxis és a csillagok távolsága . . . . .	99
4.3.7.	Csillagászati hossz mértékegységek . . . . .	101
<b>5.</b>	<b>A Föld mint égitest</b>	<b>103</b>
5.1.	A Föld mozgásai . . . . .	103
5.1.1.	A Föld keringése a Nap körül . . . . .	103
5.1.2.	A Föld tengely körüli forgása . . . . .	106
5.1.3.	A pólusingadozás . . . . .	111
5.1.4.	A precesszió és a nutáció . . . . .	111
5.2.	A Föld alakja és méretei . . . . .	113
5.2.1.	A gömb alakú Föld . . . . .	114
5.2.2.	Az ellipszoid alakú Föld . . . . .	117
5.2.3.	A föld alakja a geoid . . . . .	118
5.2.4.	Szélességek . . . . .	119
<b>6.</b>	<b>A bolygók látszólagos mozgása</b>	<b>121</b>
6.1.	A bolygók látszólagos mozgása az éggömbön . . . . .	121
6.2.	A ptolemaioszi geocentrikus világrendszer . . . . .	123
6.3.	A kopernikuszi heliocentrikus rendszer . . . . .	125
6.4.	A látszólagos mozgások magyarázata . . . . .	126
6.4.1.	Sziderikus és szinodikus keringés . . . . .	128
6.5.	A heliocentrikus koncepció fejlődése . . . . .	129
6.5.1.	Tycho Brache . . . . .	129
6.5.2.	Giordano Bruno . . . . .	129
6.5.3.	Johannes Kepler . . . . .	130
6.5.4.	Galileo Galilei . . . . .	131
6.5.5.	A bolygók és a Hold fázisai . . . . .	134
6.6.	Fogyatkozások és fedések . . . . .	136
6.6.1.	Holdfogyatkozások . . . . .	136
6.6.2.	Napfogyatkozások . . . . .	139
6.6.3.	A fogyatkozások ismétlődése és jelentősége . . . . .	141
<b>7.</b>	<b>Égi mechanika</b>	<b>143</b>
7.1.	Az $n$ -test probléma . . . . .	144
7.1.1.	Mozgásegyenletek és első integrálok . . . . .	144
7.1.2.	Az $n$ -test probléma első integráljai . . . . .	147

7.2.	A kéttest-probléma . . . . .	152
7.2.1.	Abszolút mozgásegyenletek és első integrálok . . . . .	152
7.2.2.	Relatív mozgás és az egycentrum-probléma . . . . .	153
7.2.3.	A relatív mozgás első integráljai . . . . .	155
7.2.4.	A pályasík helyzetének meghatározása . . . . .	159
7.2.5.	A relatív mozgás pályája . . . . .	161
7.2.6.	Az elliptikus mozgás . . . . .	166
<b>8.</b>	<b>Űrhajózási alapfogalmak</b>	<b>173</b>
8.1.	A hordozórakéta . . . . .	174
8.1.1.	A rakéta hajtóműve . . . . .	174
8.1.2.	A rakétatechnika rövid történeti áttekintése . . . . .	176
8.2.	Mozgás a pálya aktív szakaszán . . . . .	177
8.3.	Mozgás a pálya passzív szakaszán . . . . .	181
8.3.1.	Mesterséges égitestek pályaelemeinek meghatározása . . . . .	182
8.3.2.	A műholdak és űrszondák pályájának osztályozása . . . . .	184
<b>9.</b>	<b>A sugárzás alaptörvényei</b>	<b>187</b>
9.1.	A sugárzás energiáját jellemző mennyiségek . . . . .	188
9.1.1.	A sugárzás (specifikus) intenzitása . . . . .	188
9.1.2.	A sugárzási áram . . . . .	189
9.1.3.	Közepes intenzitás a csillag látszólagos korongján . . . . .	190
9.1.4.	Integrális mennyiségek . . . . .	192
9.2.	Luminozitása és látszó fényesség . . . . .	192
9.2.1.	Az égitestek luminozitása . . . . .	192
9.2.2.	Az égitestek látszó fényessége . . . . .	193
9.2.3.	Az égitestek standard látszó fényessége . . . . .	194
9.3.	Az fekete test sugárzási törvényei . . . . .	194
9.3.1.	A Planck-féle sugárzási törvény . . . . .	195
9.3.2.	A Stefan–Boltzmann-féle sugárzási törvény . . . . .	196
9.3.3.	A Wien-féle eltolódási törvény . . . . .	196
<b>10.</b>	<b>Csillagászati fotometria</b>	<b>197</b>
10.1.	Látszó magnitúdó . . . . .	197
10.2.	Abszolút magnitúdó . . . . .	200
<b>11.</b>	<b>Színképelemzés az asztrofizikában</b>	<b>203</b>
11.1.	A csillagok színképe . . . . .	203
11.2.	A színképvonalak eltolódása . . . . .	204
11.2.1.	A Doppler-Fizeau effektus . . . . .	204

11.2.2. A Zeemann-effektus . . . . .	205
11.2.3. A Stark-effektus . . . . .	205
11.2.4. A forgási effektus . . . . .	205
11.2.5. A csillagok színeképe és a Harward-féle spektrálkasszi- fikáció . . . . .	206
<b>12. A csillagok jellemzői</b>	<b>209</b>
12.1. A csillagok jellemzői (állapothatározói) . . . . .	209
12.2. A csillagok tömege . . . . .	211
12.3. A csillagok hőmérséklete . . . . .	214
12.3.1. Effektív hőmérséklet . . . . .	214
12.3.2. A Wien-féle hőmérséklet . . . . .	215
12.3.3. A színhőmérséklet . . . . .	215
12.4. A csillagok sugara . . . . .	216
12.5. A csillagok luminozitása . . . . .	219
12.5.1. A Hertzsprung—Russell-diagram . . . . .	220





# Ábrák jegyzéke

1.1. A parszek értelmezése . . . . .	6
1.2. Földünk kozmikus környezete . . . . .	11
2.1. Az éggömb és az égitestek szférikus helye . . . . .	21
2.2. Az éggömb nevezetes pontjai és vonalai . . . . .	22
2.3. Földrajzi koordináták . . . . .	24
2.4. Horizontális koordináták . . . . .	26
2.5. Az első egyenlítői koordináta-rendszer . . . . .	27
2.6. A második egyenlítői koordináta-rendszer . . . . .	28
2.7. A földrajzi szélesség és pólusmagasság kapcsolata (balról); A cirkumpolaritás feltétele (jobbról) . . . . .	29
2.8. Összefüggések egy csillag delelésekor (balra); Órakoordináták és földrajzi hosszúságok kapcsolata (jobbra) . . . . .	30
2.9. Az ekliptika — a Nap évi látszólagos útja az éggömbön . . . . .	31
2.10. Ekliptikai koordináta-rendszer . . . . .	34
2.11. A gömbháromszög elemei . . . . .	35
2.12. Főkörök pólusai . . . . .	36
2.13. A gömbháromszög elemei . . . . .	38
2.14. Két pont közti távolság kiszámítása a Föld felszínén . . . . .	43
2.15. A horizontális és egyenlítői koordináták kapcsolata – transz- formációs háromszög . . . . .	44
2.16. Az egyenlítői és ekliptikai koordináták kapcsolata . . . . .	48
3.1. A csillagidő, óraszög és rektaszcenzió kapcsolata . . . . .	55
3.2. Ekliptikai ívek egyenlítői vetülete . . . . .	57
3.3. A csillagnap és középnap hosszának különbsége . . . . .	61
3.4. Az időzónák . . . . .	71
3.5. A mozgó és az álló dátumválasztó vonal kölcsönös helyzete . . . . .	73
4.1. A csillagászati refrakció . . . . .	86

4.2.	A csillagászati refrakció közelítő modellje . . . . .	87
4.3.	A fény sebességének meghatározása . . . . .	89
4.4.	Az aberráció klaszszikus magyarázata . . . . .	90
4.5.	Az aberrációs ellipszis . . . . .	92
4.6.	A napi parallaxis . . . . .	94
4.7.	A Hold parallaxisának meghatározása . . . . .	96
4.8.	A Nap parallaxisa . . . . .	97
4.9.	A Naprendszerben található égitestek méretének meghatározása . . . . .	99
4.10.	A csillagok évi parallaxisa . . . . .	100
5.1.	A csillagok parallaktikus ellipszise . . . . .	104
5.2.	A tavaszpont precessziója . . . . .	112
5.3.	A Föld sugarának a meghatározása . . . . .	115
5.4.	A geoidunduláció változása . . . . .	120
6.1.	A bolygók bonyolult látszólagos mozgásának magyarázata a geocentrikus rendszerben . . . . .	123
6.2.	A Vénusz (balra) és a Jupiter (jobbra) bolygók konstellációi . . . . .	126
6.3.	A Mars és a Föld kölcsönös helyzete a 2008. év folyamán . . . . .	127
6.4.	A szinodikus és sziderikus periódusok kapcsolata . . . . .	128
6.5.	Kepler II. törvénye . . . . .	131
6.6.	Ilyen megfontolással határozta meg Galilei egy hegy magasságát a Holdon. . . . .	132
6.7.	A fázis mértékének meghatározása . . . . .	134
6.8.	A Hold fázisai . . . . .	135
6.9.	A Föld árnyékkúpja . . . . .	137
6.10.	A Föld árnyékkúpjának hossza . . . . .	138
6.11.	A holdfogyatkozás bekövetkeztének feltétele . . . . .	138
6.12.	A napfogyatkozások kialakulása . . . . .	140
7.1.	Az $n$ -test probléma . . . . .	144
7.2.	A kéttest probléma . . . . .	152
7.3.	A pályasík térbeli helyzete . . . . .	161
7.4.	Polárkoordináták a pálya síkjában . . . . .	162
7.5.	A relatív pálya elemei . . . . .	165
7.6.	Az excentrikus anomália értelmezése . . . . .	167
8.1.	A folyékony anyagú rakétahajtómű vázlatos szerkezete: 1 – tüzelőanyag; 2 – oxidálóanyag; 3 – táprendszer; 4 – tüzelőtér; 5 – fúvócső; (4–5 hajtóház). . . . .	175
8.2.	Műhold pályája . . . . .	181

9.1. A $\Delta\omega$ nyílásszögű kúp . . . . .	188
9.2. Közepes intenzitás a csillag látszólagos korongján . . . . .	191
9.3. A $d\sigma'$ felületelem $d\sigma$ felületelem általi megvilágítása . . . . .	193
9.4. A Planck-féle függvény . . . . .	195
12.1. Kettőscsilag távolsága . . . . .	212
12.2. Kettős rendszer mozgása a tömegközéppont körül . . . . .	212
12.3. Az empirikus tömeg-fényerő reláció . . . . .	213
12.4. A Hertzsprung—Russell-diagram (HRD): az abszolút fényes- ség (magnitúdó) és hőmérséklet (színindex) kapcsolata . . . . .	221
12.5. A luminozitási osztályok a Hertzsprung—Russell-diagramon . . . . .	223



# 1. fejezet

## Bevezetés

### 1.1. A csillagászat és tárgya

*A csillagászat vagy asztronómia a világűrben levő anyag felépítését, mozgását, eredetét és fejlődését tanulmányozó természettudomány.*

A csillagászat — akárcsak a földtudományok vagy a biológia — elsősorban *leíró jellegű természettudomány*. Míg a fizika és kémia az anyagi világ legáltalánosabb törvényszerűségeinek feltárásával és az e törvények alapján felépülő legegyszerűbb anyagi rendszerek (atommagok, atomok, molekulák, gázok, szilárdtestek stb.) szerkezetének vizsgálatával foglalkozik, addig a leíró tudományok tárgyát az ezen egyszerűbb rendszerekből felépülő magasabbrendű struktúrák (ásványok, kőzetek, égitestek, élőlények) képezik. Mivel az egyszerűbb alkotóelemekből felépülő összetettebb rendszerek sokfélesége az összetettségével együtt nő, és létrejöttükben a véletlen (vagy „Teremtői akarat”) is komoly szerephez jut, lehetetlen vállalkozás volna az összes lehetséges bonyolult anyagi struktúra tisztán deduktív úton való vizsgálata; így e tudományok *érdeklődése* szükségképpen *a természetben ténylegesen megvalósuló rendszerekre korlátozódik*. (Valójában gyakran még ezek felépítésének az általános fizikai törvények alapján való értelmezése is igen nehéz.) Bármilyen érdekes is lenne mondjuk egy griffmadár vagy egy hétfejű sárkány anatómiája, a csak fizikailag létező vagy létezett élőlényeket vizsgáló biológia körén e tárgy kívül esik. Ezen önkorlátozás kritériuma az *empíria*, amely tehát az ilyen tudományokban még hangsúlyozottabb szerepet kap: ez az alapja a „leíró” jelző használatának.

A többi leíró tudománytól a csillagászat tárgya és vizsgálati módszerei tekintetében különbözik. *A csillagászat tárgya a Földön kívüli világ.*

## 1.2. A csillagászat problémái

A csillagászati vizsgálódások a következő fontosabb *problémakörök*be sorolhatók:

- az égitestek látszólagos és valódi mozgásának tanulmányozása;
- tehetetlenségi vonatkoztatási rendszer kijelölése;
- egyenletes idő (efemeriszidő) meghatározása;
- égitestek alakjának, méreteinek és tömegének meghatározása;
- az égitestek fizikai szerkezetének és kémiai összetételének tanulmányozása;
- az égitestek gravitációs-, radiatív-, mágneses- és egyéb kölcsönhatásának tanulmányozása;
- az égitestek és égitest-rendszerek eredetének és fejlődésének tanulmányozása.

Ezek a csillagászat nagyobb problémái, amelyekből számos *gyakorlati alkalmazás* következik:

- az idő mérése (pontos idő, naptárkészítés);
- természeti jelenségek (mint a holdfázisok, fogyatkozások, árapály-jelenség) előrejelzése;
- a Nap-jelenségek és földi jelenségek közti kapcsolatteremtés;
- a tengeri hajózás;
- az űrhajózás és alkalmazásai (távközlésben, meteorológiában, teledektációban, stb.).

A csillagászati vizsgálódások jó néhány problémája az évszázadok során elvesztette fontosságát, mivel gyakran más tudományágak keretében, a műszaki fejlődés eredményeként találtak jobb megoldásokat (pl. időmérés, földi tájékozódás stb.). Ugyanakkor számos új probléma, alkalmazási terület nyílt meg az űrkorszak megjelenésével, a csillagászati műszerek és vizsgálódási módszerek tökéletesedésével. Ilyen például a Naprendszerünk égitesteinek helyszíni vizsgálata, neutrínócsillagászat, elméleti asztrofizika, stb. Megállapítható, hogy míg néhány évtizeddel ezelőtt az átlagember számára a csillagászat gyakran kissé elavult, haszontalan dolgokkal való bíbelődésnek számított, amelynek semmi köze nincs a konkrét, mindennapi élethez, addig ma, az űrszondák és műholdak korában — öröndetes módon — a nagyközönség nagyobbik része ráébredt e tudományág jelentőségére.

### 1.3. A csillagászat módszerei

a) *Az analízis módszere.* Mivel a csillagok világa számunkra a húszadik század közepéig nem volt közvetlenül hozzáférhető, tárgyának vizsgálatához *a csillagászat hagyományosan kialakult módszere az égitestekről érkező elektromágneses és egyéb sugárzások analízise*; a csillagász általában észlelése tárgyán kísérleteket nem végezhet, alapvetően passzív szemlélő. A különböző sugárzások analízisében három munkafázis különíthető el:

- a sugárzási források *megfigyelése*, nagy pontosságú mérések végzése;
- *a mérési adatok feldolgozása* (ami általában igen körülményes számításokat igényel);
- *a mérési eredmények elméleti értelmezése.*

b) *A kísérleti módszer.* Tárgy és módszer fennebb vázolt kapcsolata az utóbbi évtizedekben, a bolygók és holdjaik közvetlen elérésével némileg megváltozott: a bolygók és kisebb égitestek vizsgálatával foglalkozó tudományág, a planetológia mára a csillagászat és a földtudományok közötti interdiszciplináris területté vált. Egyre inkább bekerül a kísérleti módszer is a csillagászok eszköztárába. A kísérleti módszer első alkalmazásai a csillagászatban még az úrkorszak előtti időkre tehető, ezek a meteoritok tanulmányozása valamint a rádiólokációs távolságmérések voltak. Ez a módszer szélesebb körben a XX. század második felében az ún. úrkorszakban vált használatossá, a mesterséges égitestek létrehozásával, a Hold és Mars felszínén végzett kísérletekkel, az űrállomások, űrrepülőgépek fedélzetén végzett kísérletekkel, stb.

c) *A modellezés.* A természettudományok keretében, és így a csillagászatban is jelentős szerepe van a vizsgált jelenségek *matematikai modellezésének*. A csillagászatban az előző két módszer eredményeire támaszkodva megállapított alaptörvények (axiómák) elfogadásával különböző elméleti modellek konstruálhatók, amely modellek érvényességét az észlelési, kísérleti eredményekkel való összevetés adja. A matematikai modellezés hatékonyságát igazolják azok az új eredmények, amelyek a csillagászat területén is ezen módszer eredményeként kerültek napvilágra. Ilyen téren korszakalkotó eredmények: a Neptunusz, majd a Plútó felfedezése a perturbációszámítás eredményei alapján, a csillagok felépítésével kapcsolatos eredmények, a neutroncsillagok, fekete lyukak előrejelzése.

### 1.4. A csillagászat szakterületei

A csillagászat felosztása szakterületekre többféle szempont szerint történhet. Egy lehetséges, viszonylag egyszerű és mégis átfogó felosztás a következő:

## A. KLASSZIKUS CSILLAGÁSZAT

A csillagászat klasszikus ágazatain értjük azokat a részterületeket és kutatásokat, amelyeket égitestek pozíciómeghatározásai alapján és gravitációs elmélet alkalmazásával lehet művelni. A „klasszikus” jelzőt nem úgy kell érteni, mintha ezeknek az ágazatoknak ma már nem volna jelentősége. A fejlődés ezeken a területeken is folyamatos, teljesen nélkülözhetetlen alapot jelentenek sok jelenkori csillagászati kutatás számára is, viszont ezek voltak a korábban megalapozott szakterületek. Ide sorolhatók:

1. **Asztrometria** — az égitestek helyzetének, távolságának és méreteinek meghatározásával, valamint az idő mérésével foglalkozik;
  - (a) *Szférikus csillagászat* — az égitestek látszólagos helyzetének és látszólagos mozgásának meghatározásához szükséges matematikai módszerek kidolgozása;
  - (b) *Gyakorlati csillagászat* — műszertechnika, asztrometriai mérési módszerek, hibaszámítás;
  - (c) *Csillagkatalógusok* (vonatkoztatási rendszer) összeállítása.
2. **Égi mechanika** — a kevéstest rendszerek valódi mozgását tanulmányozza a gravitációs vonzóerő figyelembevételével.

## B. MODERN CSILLAGÁSZAT (ASZTROFIZIKA)

A tágabb értelemben vett *asztrofizika* a csillagászat azon ága, amely az égitestek természetét, vegyi összetételét, struktúráját és fejlődését tanulmányozza fizikai módszerekkel. Az asztrofizika viszonylag fiatal tudományág, születése 1859-re tehető, amikor R. W. Bunsen és G.R. Kirchhoff laboratóriumi kísérletekkel lefektette a színeképelemzés alapjait.

1. **Asztrofizika** (szűkebb értelemben) — az égitestek szerkezetét, fizikai tulajdonságait és kémiai összetételét tanulmányozza. Alágai:
  - (a) *Gyakorlati asztrofizika* — műszerek és módszerek;
  - (b) *Elméleti asztrofizika* — az észlelt jelenségek elméleti értelmezése, modellezése;
2. **Sztellárasztronómia** — csillagok, csillagrendszerek és a csillagközi anyag eloszlásának és mozgásainak törvényeit tanulmányozza;
3. **Kozmogónia** — az égitestek keletkezésének és fejlődésének tana;
4. **Kozmológia** — a világegyetem egészének szerkezetét és fejlődését vizsgálja.



Az eddigi felosztástól teljesen függetlenül a *felhasznált sugárzás jellege szerint* beszélünk *gamma-, röntgen-, ultraibolya, optikai, infravörös, rádió- és neutrínócsillagászat*ról. A *kozmosz sugarak* (nagyenergiájú, többé-kevésbé izotrop töltött-részecske-sugárzás) és a *napszél* (a Napból eredő töltött-részecske-sugárzás) *fizikája* a csillagászat és a részecskefizika határterületét képezi.

Szokás beszélni *földfelszíni és légkörön kívüli* (mesterséges holdakról, űrrepülőgépekről, űrszondákról, űrállomásokról végzett) csillagászatról is.

Végül a *vizsgálat tárgya szerint* beszélhetünk pl. *napfizikáról, planetológiai*ról, a *Naprendszer csillagászatáról*, az *intersztelláris anyag fizikájáról*, a *Tejútrendszer csillagászatáról*, *extragalaktikus csillagászat*ról stb.

## 1.5. A csillagászati mértékegységek

A *Nemzetközi Csillagászati Unió* (International Astronomical Union, IAU) 1976-ban hozott döntése értelmében, 1984 jan. 1-től a csillagászatban az általánosan elfogadott és használatban levő *SI-egységek* (nemzetközi rendszer) *méter* (m), *kilogramm* (kg), *másodperc* (s) mellett az alábbi sajátos mértékegységeket használják:<sup>1</sup>

### A. Időegységek

1. *Standard középnap*: 1 standard középnap = 86 400 SI másodperc (s) — atomidő másodperc;

1 *középnap* =  $1^{\text{d}} \approx 1$  standard középnap. Lényegében a középnap a Nap két egymást követő delelése között eltelt átlagos időtartamot méri. A standard középnaphoz viszonyított relatív eltérése csak  $10^{-8}$  nagyságrendű.

2. *Julián-év*: 1 Julián-év =  $365^{\text{d}},25$  (középnap);

„Napon” és „éven” a továbbiakban — ha külön nem jelezzük — ezeket az értékeket értjük.

1 *Julián évszázad* =  $36\,525^{\text{d}}$ .

### B. Tömegegységek

1. A *Nap tömege*, amelynek SI-egységben kifejezett ma ismert legpontosabb értéke:

$$1\mathcal{M}_{\odot} \approx 1,989\,1 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 2 \cdot 10^{33} \text{ g}.$$

<sup>1</sup>Részletesebb ismertetés a megfelelő fejezetekben olvasható.

2. A *Föld tömege*, legjobb értéke:

$$1\mathcal{M}_{\oplus} \approx 5,974\,24 \cdot 10^{24} \text{ kg} \approx 6 \cdot 10^{27} \text{ g}.$$

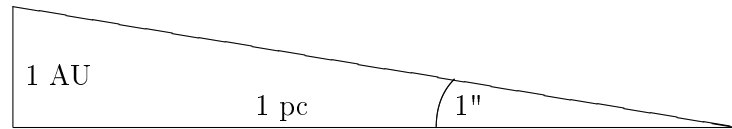
### C. Távolságegységek

1. A *csillagászati egység* (*astronomical unit*, AU) definíció szerint olyan  $1/354\,710 \mathcal{M}_{\odot}$  tömegű tömegpont  $1 \mathcal{M}_{\odot}$  tömegpont körüli pályájának fél nagytengelye, amelynek keringési ideje  $365^{\text{d}}\,256\,383\,5$ ; azaz körülbelül (de nem pontosan) egyenlő a Föld és a Nap átlagos távolságával; SI-egyenértéke:

$$1 \text{ AU} = 1,495\,978\,70 \cdot 10^{11} \text{ m} \approx 1,496\,0 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

azaz mintegy 150 millió kilométer.

2. *Fényév*:  $1 \text{ fényév} = c \cdot 365^{\text{d}}\,25 \approx 9,460\,73 \cdot 10^{15} \text{ m} \approx 63\,241,07 \text{ AU}$ .
3. *Parszek*:  $1 \text{ parszek} = 1 \text{ pc} = 1 \text{ AU} \text{ ctg } 1'' \approx 3,085\,687\,5 \cdot 10^{16} \text{ m} \approx 206\,264,8 \text{ AU} \approx 3,259 \text{ fényév}$  (1.1. ábra).



1.1. ábra. A parszek értelmezése

A parszek megengedett decimális többszörösei közül a *kiloparszek* (kpc) és a *megaparszek* (Mpc) használatos.

## 1.6. A belátható világ (Metagalaxis)

A ma ismert legtávolabbi égitestek tőlünk mért távolsága  $3\,200 \pm 500 \text{ Mpc}$  ( $11,5 \pm 1,5$  milliárd fényév). Nem szabad elfelejteni, hogy a fény véges terjedési sebessége miatt ez egyben azt is jelenti, hogy a távoli égitesteket több milliárd évvel ezelőtti állapotukban látjuk<sup>2</sup>. A világegyetem számunkra ismert része (a Metagalaxis) tehát a téridő egy igen keskeny szelete: múltbeli

<sup>2</sup>A legújabb (2003-as) mérési eredmények szerint a Világegyetem kora  $13,7 \pm 0,2$  milliárd évre tehető.

fénykúpunk egy vékony felszíni rétege. Sajnos e szeletről birtokolt ismereteink is igen szegények. Ezek az ismereteink arra utalnak, hogy:

- igen nagy (kb. 1000 Mpc-es) léptékeken az Univerzum valószínűleg homogén (legalábbis semmi sem szól e feltevés ellen); emellett tágul, azaz részei egymástól folytonosan távolodnak;
- az Univerzum állapota időben változik; ez a változás azonban az általunk belátott tértartományban nem jelent döntő minőségi változást. (Alapvetően mindenütt ugyanolyan jellegű az anyag szerveződése, csak pl. az egyes égitesttípusok relatív hányada változik némileg.)

Térbeli és időbeli viselkedés ilyen szétválasztása a speciális relativitás elve miatt önkényesnek hathat: rögtön látni fogjuk azonban, hogy bár a fizika törvényei minden inerciarendszerben azonosak, mégis kitűzhető az Univerzumban egy kitüntetett abszolút inerciarendszer. E rendszerhez képest a megfigyelő sebessége mindenkor kicsi —  $v/c \ll 1$  —, így a fenti szétválasztás az abszolút rendszerhez hasonlóan a megfigyelőében is megtehető.

A Metagalaxisban uralkodó viszonyok e helytől és időtől kevésbé függő minőségi azonossága lehetővé teszi, hogy a világ belátható részéről és mai állapotáról általános megállapításokat tegyünk.

### 1.6.1. Anyagformák a Metagalaxisban

A mai fizikában uralkodó kvantumelméleti szemlélet az anyagi rendszereket egymással kölcsönhatásban levő alapvető entitások, „részecskék” összességének tekinti; az egyes részecskefajtákat egy sor paraméter (nyugalmi tömeg, spin stb.) különbözteti meg. Ezzel összhangban a Metagalaxist is részecskék sokaságának tekintjük, amelyek típusai szerint különböző anyagformákról beszélhetünk. Az egyes részecsketípusok relatív súlyát számuknál (számsűrűségüknél) jobban jellemzi az általuk képviselt energiasűrűség. A tapasztalat szerint az Univerzumban nagyobb mennyiségben a következő anyagformák vannak (lehetnek) jelen:

**Barionos anyag** (nukleonok és elektronok). Az Univerzum mai állapotában (esetleg egészen ritka körülmények kivételével) az alapvető részecskék egyik fő csoportját képező kvarkok huzamosabb ideig csak három kvarkból álló kötött rendszerek (barionok), azok közül is inkább csak a *nukleonok* (protonok és neutronok) formájában maradhatnak fenn. A pozitív töltésű protonok mellett az egyedüli nagyobb számban jelenlevő töltött részek a negatív *elektronok*: mivel az észlelt anyag mindenütt elektromosan semleges, az elektronok száma legalább hozzávetőleg meg kell egyezzen a protonokéval, és így célszerű együtt kezelni őket. A nukleonok és elektronok képviselte energiasűrűség túlnyomórészt nyugalmi energiájukból adódik, ez pedig az

elektronok esetében kb. kétszer kisebb, mint a protonoknál. Jogos tehát a „barionos anyag” elnevezés annak ellenére, hogy az elektron nem barion (lepton). A barionos anyag átlagos számsűrűsége kb. 1 nukleon / m<sup>3</sup>, energiasűrűsége  $\sim 1 \text{ GeV/m}^3 \approx 10^{-10} \text{ J / m}^3$ .

**Elektromágneses sugárzás.** A Metagalaxist egy egyenletes, gyenge, termikus jellegű spektrális energiaeloszlást ( $T = 2,73 \pm 0.05 \text{ K}$ ) mutató *rádió háttérsugárzás* tölt ki. Az ún.  *kozmikus mikrohullámú háttér* (cosmic microwave background, *CMB*). Van olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a sugárzás tökéletesen *izotrop* (pusztán véletlen fluktuációkkal): ez jelöli ki a fentebb már említett abszolút inerciarendszert. Az egyéb (pl. csillagokból származó) sugárzás energiasűrűsége földi körülmények között persze jócskán meghaladja a háttérsugárzásét, a Föld azonban nagyon is kivételes hely a Metagalaxisban, ahol a „legtípusosabb” helyen, minden galaxistól távol, kormosótét uralkodik. A háttérsugárzás viszont itt is éppúgy jelen van, mint bárhol másutt: így az elektromágneses sugárzás átlagos energiasűrűségét az Univerzumban gyakorlatilag kizárólag a háttérsugárzás adja. Számsűrűsége  $\approx 10^9 \text{ foton/m}^3$ , energiasűrűsége  $\approx 100 \text{ keV/m}^3 \approx 10^{-14} \text{ J/m}^3$ .

**Neutrínók.** A neutrínóháttér közvetlenül nem észlelhető, de elméleti megfontolások alapján léteznie kell; számsűrűsége kb.  $10^8 \text{ neutrínó/m}^3$  lehet. Energiasűrűsége attól függ, van-e a neutrínóknak nyugalmi tömegük. Ha nincs, akkor az energiasűrűség a fotonokéhoz hasonlóan elhanyagolható a barionokéhoz képest. Ha viszont, mint sokan vélik, van egy 0,1 és 10 keV közötti átlagos neutrínótömeg, az energiasűrűség akár egy nagyságrenddel meghaladhatja a barionokét; ez esetben térbeli eloszlásuk sem lesz egyenletes. A *WMAP*<sup>3</sup> 2003-ban közzétett eredményei szerint a neutrínók nem adhatják az Univerzum anyagának és energiájának több mint 0,76 százalékát, ami azt is jelenti, hogy a neutrínók tömege nem lehet több mint 0,23 eV.

**Fekete lyukak.** A *fekete lyuk* a tér olyan korlátos tartománya, ahonnan a téridő erős görbülete miatt idődilatációs effektus következtében (ha a kvantumhatásoktól eltekintünk) semmiféle jel sem juthat ki, így környezetére csak erős gravitációs terén keresztül gyakorol hatást. Határa az ún. eseményhorizont: az a felület, ahol a szökési sebesség a fénysebességgel egyezik meg. Bár lényegüknél fogva közvetlenül nem észlelhetők, a fekete lyukak létezése gyakorlatilag bizonyosra vehető, és több nagyon valószínű feketelyuk-jelöltet ismerünk. Az egyes fekete lyukak tömege igen nagy is lehet, összességükben tömegük mégis elenyésző a barionos anyagéhoz képest.

<sup>3</sup>A *WMAP*, vagy teljes nevén *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (Wilkinson Mikrohullámú Anizotrópia Ellenőr) a *NASA* által 2001 júniusában útjára indított mesterséges hold, amelynek feladata az Univerzumból érkező mikrohullámú kozmikus háttérsugárzás minél pontosabb feltérképezése.

**Kozmikus „zárványok”?** Nem véletlenül használtuk már több ízben „az Univerzum mai állapota” kifejezést. Az Univerzum mai állapotát vizsgálva szinte elkerülhetetlenül arra a következtetésre jutunk, hogy korábbi időszakokban a Világegyetem állapota lényegesen különbözött a jelenlegitől. Egyes elképzelések szerint elszigetelt „zárványokban” a mai napig fennmaradtak igen ősi viszonyok. Az ilyen hipotetikus tartományok (legismertebbek közülük az ún. *kozmosz szálak*) viszonylag kis térfogatúak, de igen nagy tömegűek lennének; belsejükben pedig az anyag a fentebb felsoroltaktól teljesen eltérő formában létezhet. Nagyobb számban való előfordulásuk az átlagos energiasűrűséget ugyan nem növelné jelentősen, de komoly hatást gyakorolhat a Világegyetem fejlődésére. Létezésükre azonban jelenleg bizonyíték nincsen.

**Észlelhető és sötét anyag.** Az eddigi felosztás mellett a Metagalaxis anyagát tisztán szubjektív alapon két részre bonthatjuk: a jelenlegi technikai eszközeinkkel (legalább elvben) detektálható *észlelhető anyagra*, és a többi, „*sötét anyagra*. A sötét anyag jelenlétéről csak az észlelhető anyagformákra kifejtett gravitációs hatása tanúskodik. Az észlelések alapján ma úgy tűnik, hogy az ilyen *rejtett tömeg* talán egy nagyságrenddel is meghaladja az észlelhető. Mibenléte tisztázatlan. A két leggyakrabban tárgyalt alternatíva:

- a barionos anyag valamilyen nehezen észlelhető formája;
- gyengén kölcsönható részecskék, azaz neutrínók vagy wimp-ek. Az újabb kvantumtérelméletek egy sor ilyen részecske létezését jósolják, bár kísérletileg még egyet sem találtak. Gyengén kölcsönható természetük miatt az ilyen részecskék nagy száma is létezhet anélkül, hogy detektálnánk őket.

A korábban már említett *WMAP* mérései alapján 2003-ban közzétett eredmények szerint az Univerzumot alkotó anyagformák részaránya:

- $4,4 \pm 0,4\%$  közönséges barionos anyag (azaz atomokból álló anyag);
- $23 \pm 4\%$  nembarionos sötét anyag (valószínűleg a fizikusok számára még ismeretlen részecskék). Ez lenne a *hideg sötét anyag* (cold dark matter, *CDM*);
- $73 \pm 4\%$  „*sötét energia*” (amelyről jelenleg még senkinek sincs semmiféle elképzelése).

### 1.6.2. A barionos anyag szerveződése

A csillagászat számára az anyag barionos formája kiemelkedő jelentőségű. Ennek egyik oka az, hogy mint láttuk, az észlelhető anyag domináns (legna-

gyobb energiasűrűséget képviselő) formája a barionos. Ennél azonban sokkal lényegesebb és mélyebb ok, hogy ez az egyetlen olyan anyagforma, amely mind a négy ismert alapvető kölcsönhatásban<sup>4</sup> részt vesz. Ez a tény a barionos anyagnak páratlan formagazdagságot kölcsönöz, amivel a gyengén kölcsönható részecskék mégoly nagytömegű diffúz felhői sem versenyezhetnek semmi esetre sem. Ha a barionos komponens mennyiségileg nem is domináns, mindenképpen a világ legjellemzőbb, legösszetettebb struktúrákat képező alkotórésze.

A barionos anyag szerveződésének alapvető egysége a *galaxis*: 1 – 100 kpc méretű,  $10^6 - 10^{13} \mathcal{M}_\odot$  tömegű gravitációsan kötött anyaghalmoz. Igen ritka barionos anyag a galaxisok közötti térben is van. A galaxisok térbeli eloszlása nem egyenletes: *csoportokba, halmazokba* tömörülnek, ezek viszont még magasabb egységeket, *szuperhalmazokat* képeznek. Ennél is nagyobb léptékeken az anyag eloszlását a mintegy 100 Mpc méretű hatalmas *üreg*ek jellemzik. Az üreg<sup>ek</sup> nem teljesen üresek, szintén tartalmaznak galaxishalmazokat, de az anyag sűrűsége itt jóval alacsonyabb, mint közöttük.

A mi galaxisunk a kb. 50 kpc méretű,  $2 \cdot 10^{11} \mathcal{M}_\odot$  látható (és esetleg  $10^{12} \mathcal{M}_\odot$  rejtett) tömegű *Tejútrendszer*. Tejútunk a kis *Lokális Csoport* tagja (méret  $\approx 1$  Mpc), amely viszont a *Lokális* vagy *Virgo Szuperhalmaz* periferiáján foglal helyet. A szuperhalmaz magját képező Virgo halmaz tőlünk  $19 \pm 3$  Mpc távolságra van.

Mind a galaxisokban, mind azokon kívül a *barionos anyag két élesen elkülönülő fázisra bomlik*. A ritka ( $\rho < 10^{-15} \text{ g/cm}^3$ ) *diffúz anyag*ba legfeljebb néhány AU méretű szigetekként ágyazódnak be a *sűrűbb fázis* ( $\rho > 10^{-10} \text{ g/cm}^3$ ) különféle diszkrét tartományai.

A *diffúz anyag* részaránya a galaxisok látható barionos anyagában kb. 15 %-ra becsülhető, de helyről-helyre erősen változó. A Tejútunkban található diffúz anyag egy síkban, az ún. fősíkbán összpontosul, ahol átlagos sűrűsége kb.  $10^{-23} \text{ g/cm}^3$ , 99 %-a gáz, 1 %-a por (azaz kb. 0,1 mm-nél kisebb ásványi szemcsék). (Tömegszázalékokról van szó.) Az intergalaktikus diffúz anyag ennél sokkal ritkább ( $\rho \approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3$ ), de hatalmas térfogata miatt össztömege messze meghaladhatja a galaxisokét. Alacsony sűrűsége és rendkívüli forrósága miatt azonban igen nehezen észlelhető, inkább csak a galaxishalmazokon belüli aránylag sűrűbb anyag mutatható ki.

A sűrűbb fázisú anyag „szigeteinek” különböző típusai közül a *csillagok* olyan égitestek, amelyek igen nagy ( $\geq 10^{21} \text{ W}$ ) teljesítménnyel energiát sugároznak ki. A kisugárzás főleg elektromágneses hullámok formájában történik,

<sup>4</sup>A négy alapvető kölcsönhatás: a gravitációs, az elektromágneses, a gyenge és az erős kölcsönhatás.



1.2. ábra. Földünk kozmikus környezete

és a csillag magjában végbemenő fúziós folyamatok energiatermelése, vagy néha átmenetileg a csillag egyes részeinek összehúzódása által felszabaduló gravitációs potenciális energia fedezi. „Pazarló” életmódjuk folytán a csillagok élettartama véges, bár több milliárd év is lehet. Tömegük 0,08-tól közel száz naptömegig terjed, de a túlnyomó többség az alsó tömeghatár közelében van. (Az átlagos csillagtömeg  $0,5 \mathcal{M}_{\odot}$ , a leggyakoribb  $0,3 \mathcal{M}_{\odot}$ .) A csillagok gyakran két vagy több csillagból álló kötött rendszerekben fordulnak elő (*kettős* ill. *többszörös csillagok*).

A *planetáris testek* 0,12 naptömegnél kisebb, de porszemnél nagyobb égitestek. Méreteik 0,1 mm-től több százezer km-ig terjednek. Saját sugárzásuk nincs vagy csekély; magreakciók nem folynak bennük. Mai tudásunk szerint a planetáris testek többnyire egyes csillagok környezetében, azok körül *bolygórendszereket* képezve fordulnak elő. A mi bolygórendszerünk, a *Naprendszer* ismert planetáris testeinek össztömege kisebb, mint a központi csillag, a Nap tömegének két ezrede. Naprendszerünk egyik nagybolygója a Föld, kozmikus otthonunk (1.2. ábra).

A *barna törpék* a planetáris testek és csillagok közötti tömegű, néhány százezer km méretű égitestek. Belsejükben a fúziós folyamatok, a kezdeti kis tömeg miatt, csak egy igen rövid ideig tartó deutériumégésre korlátozódnak. Az ezáltal, valamint kontrakciójuk során felszabaduló potenciális energiát a csillagoknál jóval kisebb luminozitással,<sup>5</sup> de ugyancsak évmilliárdokig su-

<sup>5</sup>Luminozitás = sugárzási teljesítmény, pontosabb definíciója a 9.2.1. paragrafusban olvasható.

gározhatják szét, főleg az infravörös tartományban (innen a „barna” jelző). Noha elvben a barionos anyag fő formáját is képezhetik, tömeges előfordulásuk, legalábbis a Naprendszer környezetében, egyre valószínűtlenebbnek látszik.

A *kompakt objektumok* tömege csillagokra jellemző vagy annál nagyobb, méretük viszont a planetáris testekhez hasonló: sűrűségük ebből következően igen nagy ( $\bar{\rho} \geq 10^5 \text{ g/cm}^3$ ). E kategória részben átfedi a csillagokét: a közös részt a *fehér törpék* és *neutroncsillagok* képezik. A kompakt objektumok közé számítják gyakran a *fekete lyukakat* is. A legsűrűbb ( $\bar{\rho} \geq 10^{14} \text{ g/cm}^3$ ) égitestek a *szuperkompakt objektumok*; a *neutroncsillagok*, a *fekete lyukak*, valamint a hipotetikus *kvarkcsillagok* tartoznak ide. Számos közvetett bizonyíték alapján nagy biztonsággal állíthatjuk, hogy a galaxisok középpontjában  $10^6 - 10^8$  naptömegű fekete lyukak találhatók.

A felsorolt égitesttípusok az Univerzum komplex evolúciós folyamatának láncszemei: a diffúz anyag helyi csomósodásai instabillá válnak és csillagokká tömörülnek; a folyamat melléktermékei a planetáris testek. A csillagok az anyag csomósodási folyamatában olyan metastabil állapotot jelentenek, amely több milliárd évig is fennmaradhat. Élete során a csillag anyagának jelentős részét (megváltozott kémiai összetétellel) visszaadja a diffúz közegnek, a maradék pedig kompakt objektumként marad hátra.

## 1.7. A csillagászat jelentősége

**Történeti jelentőség.** A csillagászat a legrégebbi egzakt (azaz matematikailag formalizált) természettudomány. Ez nem véletlen, hiszen az ellenőrizhetetlen zavaró hatásoknak csak minimális mértékben kitett, súrlódásmentes térben lejátszódó égi mozgások felelnek meg legjobban a minden elmélet alapját képező ideális esetnek, és tükrözik legnyilvánvalóbban azt, hogy a természetet irányító törvények kifejezhetők a matematika nyelvén. E törvényekről már a történelem előtti népek is fogalmat alkottak, és az égitestek mozgástörvényeiről fogalmazott ismereteiket kultikus célból meghatározott szisztéma szerint szerkesztett mítoszokba, ábrákba és építményekbe sűrítették (legismertebb közülük az angliai Stonehenge, míg Romániában ismert a Sarmisegetuza melletti építmény). Mai értelemben vett egzakt tudománnyá a csillagászat Mezopotámiában fejlődött, ismereteink szerint az óbabiloni korban (Kr.e. XVI. sz.).

**Gyakorlati jelentősége és kapcsolata az asztrológiával.** A csillagászat már fejlődésének legkorábbi időszakában sem volt csupán szemlélődő és a gyakorlati élet számára használhatatlan elfoglaltság. Megjelenése egyfelől



az embernek a térben és időben való tájékozódási szükségletéből, másfelől pedig misztikus hitéből ered. A régi pásztornépek valamint hajósok számára szükséges volt ismerni az égitestek mozgását, ami a térbeli tájékozódást segítette. A mezőgazdaság fejlődése szükségessé tette a természeti jelenségek (főként az évszakok) periodikus váltakozásának ismeretét, ami arra készítette az embereket, hogy az égi jelenségek szabályosságában időbeli vonatkoztatási rendszert keressenek.

Az első kultúrnépek: a babilóniaiak, egyiptomiak, kínaiak, indiaiak, májak, aztékok csillagászati megfigyeléseit másfelől az ösztönözte, hogy a fényes égitesteket vagy istenként tisztelték, vagy mozgásukat isteni akarat következményének vélték. Az ókori elképzelések szerint az egész természetet istenek, szellemek és démonok népesítették be. Bár semmiféle ismeretük nem volt a végbemenő mozgások fizikai jellegére vonatkozóan, a hosszú évszázadok során felgyűlt megfigyelési anyag alapján olyan tapasztalati szabályszerűségeket szűrtek le, hogy a Nap, Hold és szabad szemmel látható öt bolygó (Merkúr, Vénusz, Mars, Jupiter és Szaturnusz) égi helyzetét közelítőleg előre meg tudták mondani. Ezen pusztán formális tudásuk azonban misztikus elképzeléseik egyenes folyományaként sajnos odavezetett, hogy az égitestek helyzetének prognózisából egyúttal az istenek kegyének vagy haragjának megjósolását vélték lehetségesnek, meggyőződésük szerint az égitestek istenségei közvetlenül hatnak a földön bekövetkező eseményekre (szárazságok, áradások, járványok, háborúk, kormányválságok stb.); így fejlődött ki a csillagjóslás vagy asztrológia.

Az asztronómia és asztrológia az ókorban Ptolemaioszig szinte teljesen összemosódott. A kapcsolat szoros maradt egészen a XVII. század végéig, amikor a tudományos akadémiák megalapítása után, minden európai fővárosban kizárták az asztrológiát az egyetemi tantervekből. Ehhez az is hozzájárult, hogy sokan visszaéltek a csillagjóslással és felelőtlenül kihasználták a tudatlanok hiszékenységet. Az asztronómusok számára sok évszázadon át a csillagjóslás biztosította a megélhetést, asztronómiai kutatásaikat is részben ennek érdekében végezték. A nagy Kepler szerint: „Az asztrológia hóbortos leány; de Istenemre, nélküle hol lenne az anya, a nagyon okos asztronómia. A csillagászok fizetése olyan kevés, hogy az anya bizonyára éhen halna a leánya keresete nélkül.” Így nem tagadható az asztrológia indirekt hatása az asztronómia fejlődésére. A mai tudományos ismeretek birtokában viszont megállapítható, hogy nem ismerünk még semmi olyan bizonyosságot, amire alapozva az égitestek állapotai (helyzet, sugárzás stb.) alapján meg tudnánk határozni azok hatásának következményeit az emberi életre vagy a földi eseményekre vonatkozóan. Ezen hatások szerepe nem zárható ki egészen (lásd például a naptevékenység vagy a Hold hatását), viszont ismereteink ezen a

téren még túl kezdetlegesek ahhoz, hogy messzemenő következtetéseket vonjunk le belőlük.

**Jelentősége az egyetemes emberi kultúra szempontjából.** Az emberiség tárgyi és szellemi kultúrája szervesen összefüggő egész, melynek szépségét és erejét elsősorban egysége és a részletek egymásra való hatása adja. A csillagászat mutatta és mutatja a legmesszebbmenően azt, hogy a tudomány lényegében egy és oszthatatlan, azaz csak a külvilág összetettsége és értelmi képességeink korlátozott volta az oka annak, hogy az Univerzum tanulmányozását speciális területekre bontjuk fel: matematikáról, fizikáról, kémiáról stb. beszélünk. A csillagászat tárja fel talán legvilágosabban azt, hogy bármely tudományágban érjünk is el új eredményt, az többé-kevésbé visszahat a többi tudományterületre is.

**A csillagászat és a matematika kapcsolata.** Mint a legrégebbi egzakt tudomány, a csillagászat komoly jelentőségű a matematika általános fejlődése szempontjából, hiszen minden időben ideális területe volt a matematika alkalmazásainak. Gyakran viszont a csillagászat bábáskodott az új matematikai módszerek és fogalmak megszületésénél.

A trigonometriai ismeretek a csillagászat segédeszközeiként jöttek létre. Kezdetben nem is tekintették önálló matematikai diszciplínának. A XVI. században a mind nagyobb pontosságot igénylő hely- és időmeghatározás a csillagászatnak nagy lendületet adott. Ekkor a csillagászat már nem élhetett a trigonometria és az ide tartozó számításokat megkönnyítő táblázatok és más segédeszközök nélkül.

Ugyancsak a körülményes csillagászati és pénzügyi számítások megkönnyítésére dolgozták ki a logaritmustáblázatokat: Napier (1550–1617), Briggs (1561–1630) és mások.

Johannes Kepler (1571–1630) német csillagász és matematikus használta csillagászati számításaiban először a tizedesvesszőt, Napier pedig a tizedes-pontot. Kepler munkatársa, Bürgi az 1592-ben megjelent „Arithmetika” című könyvében használta először a tizedes törtek mai írásmódját.

Galileivel az élen, a XVII. század természettudósainak működése nyomán megszületett a ma is korszerű tudományos szellem: a megfigyelés és a kísérlet során felfedezett törvényt fogalmazzuk meg a matematika nyelvén és az elméleti következtetéseket ellenőrizzük a gyakorlattal.

A differenciál és integrálszámítás alapjainak kidolgozását a csillagászati és mechanikai problémák megoldása tette szükségessé. A differenciálegyenletek elméletének egyik legfontosabb alkalmazási területe az égi mechanika volt és maradt mind a mai napig.

A XVIII. század közepéig a matematika szinte teljesen csak a mechanika és csillagászat segédtudományaként tekinthető.

**Jelentősége a fizika számára.** A klasszikus mechanika, melynek eredete egészen Galileiig nyúlik vissza, eszményi területét az égi mechanikában találta meg. A mechanika alaptörvényeit és az általános gravitációt Newton csillagászati ismeretein keresztül fedezte fel. A mesterséges égitestek pályájának kiszámításával kapcsolatos feladatok részben új mechanikai módszerek kifejlesztését követelték meg. (Az égi mechanika magas fokú fejlettsége egyébként előfeltétele volt a mesterséges égitestek felbocsátásának.)

A csillagászat már a múltban is komoly hatást gyakorolt a fizika egyéb területeire. Olaf Römer dán csillagász határozta meg először a Jupiter bolygó egyik holdjának megfigyelése alapján a fény terjedési sebességét (1676), mely később az egyik legfontosabb természeti állandónak bizonyult. Az általános relativitáselmélet megalkotása után negyven éven át csak csillagászati mérések képezték az elmélet empirikus ellenőrzését (a Merkúr perihéliummozgása, a Nap mellett elhaladó fény eltérülése és a csillagok színképvonalainak gravitációs eltolódása).

A csillagászati megfigyelések sokszor extrém fizikai viszonyokról tudósítanak. A Világmindenség legnagyobb részén az anyag egészen különleges, laboratóriumokban ma még megvalósíthatatlan állapotban van. A csillagok belsejében több millió fokos hőmérséklet és több gigapascal nyomás uralkodik. Az anyag hőmérséklete igen széles skálán mozog, a neutroncsillagok belsejétől az intergalaktikus anyagig. Gyakran olyan anyag sugárzási folyamataival találkozunk, melynek sűrűsége sokkal kisebb a legnagyobb fokú laboratóriumi vákuuménál. Ilyen körülmények között már felléphetnek az ún. „tiltott” színképvonalak, ahogyan az az atomos hidrogéngáz 21 cm-es rádiósugárzása esetében is fényesen beigazolódt. A kozmikus anyag színképében előforduló különleges jelenségek értelmezése új fejlődést hozott a spektroszkópia alapjainak tisztázásában.

A csillagászat szolgáltatta a szupersűrű elfajult anyag gyakorlati példáját (a fehér törpék belsejében) és a lényegében neutronokból álló csillagtömegű „atommagokat” (neutroncsillagok). Az elfajult állapotban levő anyag vizsgálata a kutatókat az elméleti fizika egész sor részterületének tökéletesítésére ösztönözte. Tudjuk, hogy a csillagok természetes fúziós reaktoroknak bizonyultak.

Az idő- és mérettényező is rendkívül fontos. A hatalmas térbeli és időbeli távolságban, földi viszonyainkhoz képest esetleg rendkívül nagy méretben lejátszódó jelenségek megfigyelésének szinte páratlan elvi jelentősége van, mivel csupán ilyen úton kaphatunk képet a Földön és a Naprendszeren belül megállapított törvényszerűségek érvényességének térbeli és időbeli korlátjairól.

**A csillagászat aktualitása.** A csillagászat — amellet, hogy nagyon

régi tudomány —, egyike a legmodernebb, legaktuálisabb tudományoknak, amint az a számos felsorolt modern problémából, alkalmazási területből is kitűnik. Napjainkban mindinkább nyilvánvalóbbá válik a csillagászat összefonódása más rokontudományokkal, mint pl. részecskefizika, meteorológia, geotudományok, űrtechnika stb.

## 2. fejezet

# Szférikus csillagászat

### 2.1. Az égitestek látszólagos helyzete

Ha egy felhőtlen éjszakán a városok és falvak fényeitől távol feltekintünk az égboltra, apró fénypontok sokasága tűnik a szemünkbe. A sötét háttér előtt tündöklő milliányi égitest többsége egymáshoz viszonyítva nem változtatja helyzetét, ezek az ún. *állócsillagok*, míg néhány fényesebb égitest bolyong az álló csillagok között, ezek a *bolygók* és a Hold. Nappal a légkörben szóródott napfény miatt csak a legfényesebb égitestek láthatók, mint a Nap és a Hold, vagy olykor a népiesen Esthajnalcsillag néven ismert Vénusz. Habár látszólag a csillagok száma megszámlálhatatlan, egy adott helyről egyszerre, nagyon jó látási viszonyok mellett sem látható szabad szemmel több mint 2 500–3 000 csillag. Ez azt is jelenti, hogy a teljes égbolton szabad szemmel látható csillagok száma mintegy 5–6 000.

A csillagok nem egyenletesen borítják be az eget, hanem látszólag különböző alakzatokba rendeződnek. Már az ókori Mezopotámia népei is az egyes alakzatokat képzeletbeli vonalakkal kötötték össze. Ezeket a vázakat a fantázia és esetleges hasonlóság alapján kiegészítve, a csillagcsoportokat legendáik alakjairól nevezték el. Így alakultak ki az első csillagképek. A csillagképek meghatározása és elnevezése különböző népeknél nem volt azonos. A bizonytalanságnak a Nemzetközi Csillagászati Unió 1925-ben vetett véget, amikor az égboltot körívvel 88 tartományra osztotta, és ezek mindegyike a benne lévő csillagkép nevét viseli. A csillagképek nevei között találunk:

- állatneveket (Nagy Medve, Nagy Kutya, Hattyú stb.);
- görög mitológiai neveket (Herkules, Andromeda, Perzeusz stb.);
- használati tárgyak vagy geometriai alakzatok nevét (Mérleg, Lant, Nyíl, Pajzs, Kemence, Véső, Háromszög stb.).

Az általánosan elfogadott csillagképek latin és magyar neve az 2.1. táblázatban található. A táblázatban \*-gal jelzett csillagképek azok, amelyek nálunk is láthatók valamikor egy év folyamán.

2.1. táblázat: A csillagképek latin és magyar neve, genitivusa és rövidítése

Sor-szám	Latin név nominativus (genitivus)	Rövidítés	Magyar név
1.	Andromeda (-ae)	And*	Andromeda
2.	Antlia (-ae)	Ant	Légszivattyú
3.	Apus (-odis)	Aps	Paradicsommadár
4.	Aquarius (-i)	Aqr*	Vízöntő
5.	Aquila (-ae)	Aql*	Sas
6.	Ara (-ae)	Ara	Oltár
7.	Aries (-tis)	Ari*	Kos
8.	Auriga (-ae)	Aur*	Szekeres
9.	Bootes (-is)	Boo*	Ökörhajcsár
10.	Caelum (-i)	Cae	Véső
11.	Camelopardalis (-)	Cam*	Zsiráf
12.	Cancer (-ri)	Cnc*	Rák
13.	Canes (-um) Venatici (-corum)	CVn*	Vadászebek
14.	Canis (-) Major (-is)	CMa*	Nagy Kutya
15.	Canis (-) Minor (-is)	CMi*	Kis Kutya
16.	Capricornus (-i)	Cap*	Bak
17.	Carina (-ae)	Car	Hajógerinc
18.	Cassiopeia (-ae)	Cas*	Kassziopeia
19.	Centaurus (-i)	Cen*	Kentaur
20.	Cepheus (-i)	Cep*	Cefeusz
21.	Cetus (-i)	Cet*	Cet (Cethal)
22.	Chamaeleon (-tis)	Cha	Kaméleon
23.	Circinus (-i)	Cir	Körző
24.	Columba (-ae)	Col	Galamb
25.	Coma (-ae) Berenices	Com*	Bereniké Haja
26.	Corona (-ae) Australis	CrA	Déli Korona
27.	Corona (-ae) Borealis	CrB*	Északi Korona
28.	Corvus (-i)	Crv*	Holló
29.	Crater (-is)	Crt*	Serleg
30.	CruX (-cis)	Cru	Kereszt (Dél Keresztje)

2.1. táblázat (folytatás)

Sor- szám	Latin név nominativus (genitivus)	Rövidítés	Magyar név
31.	<i>Cygnus (-i)</i>	Cyg*	Hattyú
32.	<i>Delphinus (-i)</i>	Del*	Delfin
33.	<i>Dorado (-us)</i>	Dor	Aranyhal
34.	<i>Draco (-nis)</i>	Dra*	Sárkány
35.	<i>Equuleus (-i)</i>	Equ*	Csikó
36.	<i>Eridanus (-i)</i>	Eri*	Eridánusz
37.	<i>Fornax (-cis)</i>	For	Kemence
38.	<i>Gemini (-orum)</i>	Gem*	Ikrek
39.	<i>Grus (-is)</i>	Gru	Daru
40.	<i>Hercules (-is)</i>	Her*	Herkules
41.	<i>Horologium (-i)</i>	Hor	Ingaóra
42.	<i>Hydra (-ae)</i>	Hya*	Észki Vízikígyó
43.	<i>Hydrus (-i)</i>	Hyi	Déli Vízikígyó
44.	<i>Indus (-i)</i>	Ind	Hindu
45.	<i>Lacerta (-ae)</i>	Lac*	Gyík
46.	<i>Leo (-nis)</i>	Leo*	Oroszlán
47.	<i>Leo (-nis) Minor (-is)</i>	LMi*	Kis Oroszlán
48.	<i>Lepus (-oris)</i>	Lep*	Nyúl
49.	<i>Libra (-ae)</i>	Lib*	Mérleg
50.	<i>Lupus (-i)</i>	Lup*	Farkas
51.	<i>Lynx (-cis)</i>	Lyn*	Hiúz
52.	<i>Lyra (-ae)</i>	Lyr*	Lant
53.	<i>Mensa (-ae)</i>	Men	Táblahegy
54.	<i>Microscopium (-i)</i>	Mic	Mikroszkóp
55.	<i>Monoceros (-tis)</i>	Mon*	Egyszarvú
56.	<i>Musca (-ae)</i>	Mus	Légy
57.	<i>Norma (-ae)</i>	Nor	Szögmérő
58.	<i>Octans (-tis)</i>	Oct	Oktáns (Nyolcadkör)
59.	<i>Ophiuchus (-i)</i>	Oph*	Kígyótartó
60.	<i>Orion (-is)</i>	Ori*	Orion
61.	<i>Pavo (-nis)</i>	Pav	Páva
62.	<i>Pegasus (-i)</i>	Peg*	Pegazus
63.	<i>Perseus (-i)</i>	Per*	Perzeusz
64.	<i>Phoenix (-cis)</i>	Phe	Főnix
65.	<i>Pictor (-is)</i>	Pic	Festő
66.	<i>Pisces (-ium)</i>	Psc*	Halak

2.1. táblázat (folytatás)

Sor-szám	Latin név nominativus (genitivus)	Rövidítés	Magyar név
67.	Piscis Austrinus (-i)	PsA*	Déli Halak
68.	Puppis (-)	Pup	Hajófar
69.	Pyxis (-idis)	Pyx	Tájoló
70.	Reticulum (-i)	Ret	Háló
71.	Sagitta (-ae)	Sge*	Nyíl
72.	Sagittarius (-i)	Sgr*	Nyilas
73.	Scorpius (-i)	Sco*	Skorpió
74.	Sculptor (-is)	Scl*	Szobrász
75.	Scutum (-i)	Sct*	Pajzs
76.	Serpens (-tis)	Ser*	Kígyó
77.	Sextans (-tis)	Sex*	Szeksztáns
78.	Taurus (-i)	Tau*	Bika
79.	Telescopium (-i)	Tel	Távcső
80.	Triangulum (-i)	Tri*	Háromszög
81.	Triangulum (-i) Australe (-is)	TrA	Déli Háromszög
82.	Tucana (-ae)	Tuc	Tukán (madár)
83.	Ursa (-ae) Major (-is)	UMa*	Nagy Medve
84.	Ursa (-ae) Minor (-is)	UMi*	Kis Medve
85.	Vela (-orum)	Vel	Hajóvitorla (Vitorla)
86.	Virgo (-inis)	Vir*	Szűz
87.	Volans (-tis)	Vol	Repülőhal
88.	Vulpecula (-ae)	Vul*	(Kis) Róka

Az egyes csillagképeken belül a csillagokat még külön betűjelzéssel is ellátjuk. A csillagkép legfényesebb csillagát  $\alpha$ -val, a következőt  $\beta$ -val stb. jelöljük, ami után a csillagkép nevének rövidítését tesszük. Például az egyik legismertebb csillagkép, a Kis Göncöl (Kis Medve, Ursa Minor) legfényesebb csillaga a Sarkcsillag (Polaris), amelynek betűjele  $\alpha$ UMi ( $\alpha$  Ursae Minoris, azaz a Kis Medve  $\alpha$ -ja). Mivel a csillagképekben több csillag van, mint amennyi betű a görög ábécében, az egyes csillagokat a latin ábécé betűivel is szoktuk jelölni, sőt kettős betűkombinációkat is használunk (pl. AC Andromedae). A változó csillagokat általában az ábécé utolsó betűivel szoktuk jelölni (pl. RR Lyrae). A csillagokat számokkal is szokták jelölni (pl. 61 Cygni). Ez a jelölésrendszer — bár ma is használatos — elég bonyolult, ezért tudományos munkákban általában nem ezt használjuk. A csillagok egy



részét pontos helyük és fényességük (néha más jellemzőjük) feltüntetésével katalógusokban sorolják fel. A Henry Draper (röviden HD) katalógus például 255 ezer csillag adatait tartalmazza.

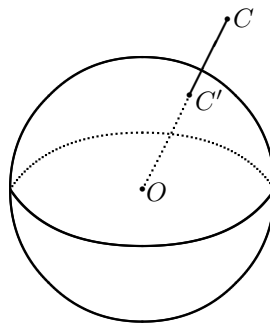
Természetesen (általában távcsővel) nemcsak csillagok, hanem ködfoltok és csillagrendszerek is megfigyelhetők az égbolton. Ezek katalógusát először Messier francia csillagász állította össze. Ez a Messier, röviden M-katalógus. Az M31 például a Messier-katalógus 31-ik objektuma, vagy közismert nevén az Androméda-köd. Újabb keletű a New General Catalogue (Új Általános Katalógus), melynek rövidítése NGC. Az M31 jelű Androméda-köd például ebben a katalógusban a 224-es sorszámot viseli, tehát jele: NGC 224.

## 2.2. Az éggömb és látszólagos napi mozgása

Az égitestek távolsága szabad szemmel nem határozható meg. Ennek következtében az égitestek távolsága azonosnak tűnik, mintha látszólag az összes égitest egy hatalmas gömbön foglalna helyet, amelynek a középpontjában a megfigyelő található. Ez a látszat vezette el már az ókori görögöket is az „égi szférák” gondolatához.

Az égitestek látszólagos helyzetének, valamint látszólagos mozgásának meghatározásához nem szükséges ismernünk azok Földtől mért távolságát, hanem elegendő megadnunk azok irányát.

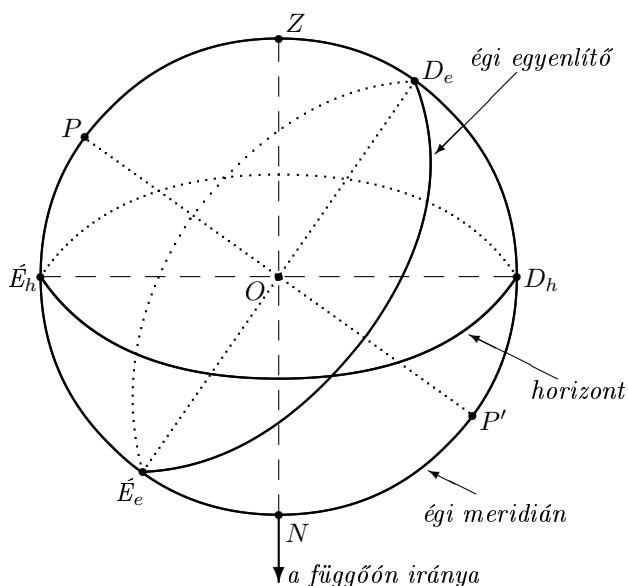
Ilyen mérések esetében célszerű a tér pontjait egy gömb pontjaira leképezni. Erre a célra szolgál az *éggömb*, amely a gömb alakúnak látszó égbolt matematikai absztrakciója (2.1. ábra). Ennek sugara tetszőleges (általában egységnyi), középpontja ugyancsak tetszés szerint választható (megfigyelő, Föld középpontja stb.). Az  $O$  középpontot valamely  $C$  égitesttel összekötő félegyenesnek az éggömbbel való  $C'$  metszéspontját a  $C$  pont *szférikus helyének* (megfelelőjének) nevezzük.



2.1. ábra. Az éggömb és az égitestek szférikus helye

Mivel az éggömb sugara tetszőlegesen nagynak tekinthető, számos alkalmazás esetén a Föld méretei elhanyagolhatók az éggömb sugarához képest, azaz a megfigyelő és a Föld középpontja egybeesnek az éggömb középpontjával. Ez a megközelítés nem helytálló, ha a Naprendszer égitesteit figyeljük meg és különösen a Földünk mesterséges holdjai esetén.

Több órán át folyamatosan figyelve az eget, az a benyomásunk támad, hogy az egész éggömb (merev testként) körbefordul egy rögzített tengely körül. Ez a mozgás az *éggömb napi látszólagos forgása* (vagy egyszerűen napi látszólagos mozgás), ami rögzített tengely körül 24 órás periódussal kelet felől nyugat felé (retrográd) irányban megy végbe. Ez a mozgás érzékelhető szabad szemmel, de jól rögzíthető fényképezéssel, ha a Sarkcsillagra (Polaris,  $\alpha$ UMi) irányított rögzített fényképezőgéppel hosszú expozíciós idővel készítünk felvételt. Ma már közismert, hogy ez a mozgás egy látszólagos mozgás, ami a Föld direkt irányú tengelyforgásának következménye.



2.2. ábra. Az éggömb nevezetes pontjai és vonalai

Az éggömb néhány pontjának és főkörének különleges jelentősége van a tájékozódás szempontjából (2.2. ábra). Az éggömb képzeletbeli rögzített forgástengelye a  $P$  és  $P'$  északi- illetve déli póluspontokban metszi az éggömböt. Az éggömb  $PP'$  átmérőjének neve *világtengely*, amelyre az éggömb középpontjában emelt merőleges sík az *égi egyenlítő síkja*. Az égi egyenlítő síkja az éggömböt az *égi egyenlítőben* metszi, ami az éggömb egyik főköre. Ha az éggömb középpontján keresztül a függőőn irányával párhuzamos egyenest húzunk, ez az egyenes a *zenit-* ( $Z$ ) és *nadírpon*tban ( $N$ ) dőfi át az éggömböt. A két pont közül az a zenit, amely a megfigyelő fölött helyezkedik el. A  $ZN$  egyenest az *adott hely vertikálisának* nevezzük. Állítsunk az éggömb

középpontján keresztül a  $ZN$  egyenesre merőleges síkot: ez a *horizont síkja*. A horizont síkja az éggömböt szintén egy főkörben metszi, amelynek neve: *horizont*. A  $P$ ,  $Z$ ,  $P'$ ,  $N$  pontokon áthaladó főkör neve: *égi meridián*, ennek a főkörnek a síkja pedig az *égi meridián síkja*. (Az egyszerűség kedvéért az „égi” jelzőt gyakran elhagyjuk.) Tartózkodjék a megfigyelő (azaz az éggömb középpontja) a Föld északi féltékén. Ha a meridiánon a  $P$  pontból a  $Z$  pont irányában indulunk el, akkor a meridián rendre a *horizont délpontjában* ( $D_h$ ) és a *horizont északpontjában* ( $E_h$ ) metszi a horizontot, illetve az égi egyenlítő *felső* (*déli*,  $D_e$ ) és *alsó* (*északi*,  $E_e$ ) pontjában metszi az égi egyenlítőt.

Rögzített helyzetű megfigyelőhöz viszonyítva az égitestek részt vesznek az éggömb napi forgásában, párhuzamos köröket írva le az égi egyenlítővel. A Föld Északi- és Déli-sarkain ezek a körök párhuzamosak a helyi horizonttal is, így az egyes égitestek (a Nap, a Hold és a bolygók kivételével, amelyek változtatják éggömbi helyzetüket) mindig a horizont fölött találhatók. A sarkoktól eltérő földrajzi helyen lévő megfigyelő számára az égitestek útjának három típusa lehetséges: *cirkumpoláris csillagok* — az általuk leírt kör teljesen a horizont fölött van, ezek soha sem nyugszanak le; *naponta felkelő és lenyugvó csillagok* — ezek által leírt kör két pontban a felkelési és lenyugvási pontban metszi a horizontot, amely pontok rögzítettek; illetve olyan *csillagok, amelyek soha sem kelnek fel* — ezek útja mindvégig a horizont alatt található.

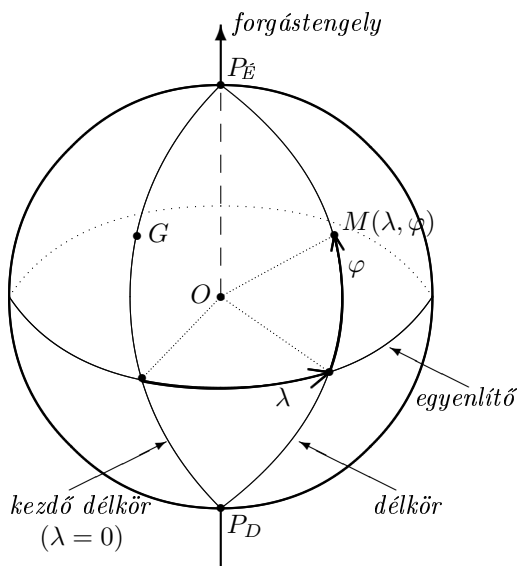
A földi egyenlítőn elhelyezkedő megfigyelő számára minden égitest naponta felkel és lenyugszik, a horizont síkjára merőleges köröket írva le.

## 2.3. Földrajzi koordináták

Az égitestek helyzetének meghatározása — kevés kivételtől eltekintve — a Föld felszínéről történik. Ezért fontos pontosan ismerni a megfigyelőhely koordinátáit, azaz a *földrajzi koordinátákat*. A csillagászati mérések túlnyomó többségénél a Föld méretei kicsik a mért objektum távolságához képest, ezért a Földet gömb alakúnak tekinthetjük. Néhány esetben azonban nem tekinthetünk el a Föld alakjának a gömbtől való eltérésétől. Ilyenkor a Földet vagy forgási ellipszoiddal, vagy pedig a geoiddal közelítjük (lásd a Föld mint égitest c. fejezetben).

A továbbiakban a Földet általában gömbnek vagy forgási ellipszoidnak fogjuk tekinteni, mert a legtöbb csillagászati megfigyelés esetében ez a közelítés elegendő. A gömb alakú Föld felszínén, akárcsak tetszőleges gömb felszínén, egy pont helyzete két szög segítségével adható meg. A szögek értelmezéséhez szükséges egy *alapsíkot* és egy *alapírányt* definiálni. A földrajzi

koordináták értelmezéséhez használt alapsík a  $P_E$ ,  $P_D$  északi és déli sarkokon áthaladó forgástengelyre merőleges *földi egyenlítő* síkja, amelyben az alapírányt a *kezdeti* (a greenwichi csillagvizsgáló meghatározott  $G$  pontján áthaladó) *meridián* jelöli ki. Az egyenlítő síkja a Föld felszínét *északi* és *déli féltékére* osztja.



2.3. ábra. Földrajzi koordináták

Az egyenlítővel párhuzamos síkoknak a Föld felszínével való metszésvonalait *szélességi köröknek* nevezzük, a forgástengelyen áthaladó síkok pedig a hosszúsági köröket (délköröket, földi meridiánokat) határozzák meg.

Például a Kolozsvári Egyetemi Csillagvizsgáló földrajzi koordinátái:

$$\lambda = 23^\circ 35' 7''.5 = 23,5854, \quad \varphi = 46^\circ 45' 47'' = 46,763.$$

Tetszőleges  $M$  megfigyelési hely földrajzi koordinátái (2.3. ábra):

— a *földrajzi hosszúság* ( $\lambda$ ), értelmezés szerint a megfigyelési helyhez tartozó földi meridián és a greenwichi kezdő meridián síkjának hajlásszöge, amit keleti illetve nyugati irányban mérünk,  $0^\circ$ -tól  $180^\circ$ -ig, és keleti illetve nyugati hosszúságról beszélünk;

— és a *földrajzi szélesség* ( $\varphi$ ), ami nem más mint a megfigyelési helyhez tartozó földugárnak ( $OM$ ) a földi egyenlítő ( $e$ ) síkjával bezárt szöge. Általában északi és déli szélességről beszélünk, és ezeket  $0^\circ$ -tól  $90^\circ$ -ig mérjük.

## 2.4. Égi koordináták

A *szférikus csillagászat* az égitestek szférikus helyeivel, illetve azok meghatározásaival foglalkozik. Egy (pontszerűnek tekintett) égitest szférikus helyének megadásához meg kell adjunk az éggömbhöz egy a középpontján átmenő *alapsíkot*, azon egy *kiindulási irányt*, továbbá egy *körüljárási irányt*. Ezek segítségével egy égitest szférikus helyét két szöggel adhatjuk meg, amelyek a megfelelő gömbi, vagy szférikus koordináták. Attól függően, hogy az éggömbön az alapsíkot és azon az alapírányt hogyan adjuk meg, különböző *csillagászati koordináta-rendszerekről* beszélhetünk.

Az éggömb középpontjának és egyben a koordináta-rendszer kezdőpontjának a megválasztása szerint egy koordináta-rendszer lehet: *topocentrikus*, azaz megfigyelőhely középpontú; *geocentrikus*, ha a kezdőpont a Föld középpontjában van; *heliocentrikus*, ha a kezdőpont a Nap középpontjában található; *baricentrikus*, ha a kezdőpont valamely rendszer tömegközéppontjával esik egybe; *galaktocentrikus*, ha a kezdőpont galaxisunk, a Tejútrendszer középpontjában van.

Az alapsík megválasztása szerint léteznek: *horizontális*, *egyenlítői*, *ekliptikai* és *galaktikai* koordináta-rendszerek.

### 2.4.1. A horizontális koordináta-rendszer

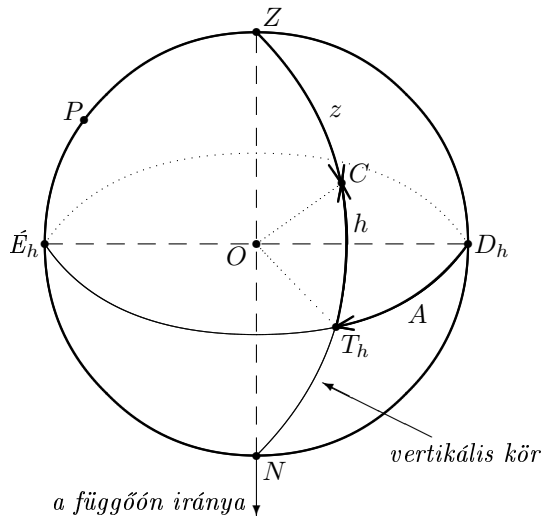
A horizontális koordináta-rendszer fontosabb jellemzői (2.4. ábra):

- *kezdőpontja* a Föld középpontja, amit egybeesőnek tekintünk a megfigyelési ponttal;
- *alapsíkja* a horizont síkja;
- *alapíránya* az  $O$  kezdőponttól a horizont délponja felé mutató ( $OD_h$  félegyenes iránya;
- körüljárási iránya retrográd (délről nyugat felé).

Ha  $C$  egy égitest szférikus helye, akkor a  $ZN$  átmérőre szerkesztett,  $C$ -n áthaladó félkör a horizont körét a  $T_h$  *horizontális talppont*ban metszi.

A horizontális koordináták:  $(A, h)$  vagy  $(A, z)$ , ahol

- \*  $A = m(\widehat{D_h O T_h})$  az *azimut*, amit a déli iránytól nyugat felé, retrográd irányba mérünk,  $0^\circ \leq A < 360^\circ$ ;
- \*  $h = m(\widehat{T_h O C})$  a horizont fölötti *magasság*, amelyre  $-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$ . A magasság helyett gyakran annak pótszögét, a  $z = m(\widehat{Z O C}) = 90^\circ - h$  *zenittávolságot* használják.



2.4. ábra. Horizontális koordináták

A kezdőpont megválasztása szerint használnak *topocentrikus* és *geocentrikus horizontális koordinátákat*. Nagy távolságra levő égitestek esetén az eltérés nem nagyobb  $10'$ -nél. Kényelmesebb geocentrikus rendszerben dolgozni.

A horizontális koordináták használata kézenfekvő egy adott megfigyelési helyen, mert segítségükkel kényelmes az égtájak szerinti tájékozódás, viszont kevésbé alkalmas az észlelési adatok közzétételére, katalógusok összeállítására, mert *függenek a megfigyelés helyétől és idejétől* (helyi koordináták).

A horizonttal párhuzamos köröket (arab szóval) *almukantarátoknak* nevezzük. Az amerikai használatban az azimut mérésének kiindulási iránya a déli irány helyett az északi irány.

### 2.4.2. Az első egyenlítői koordináta-rendszer (órakoordináták)

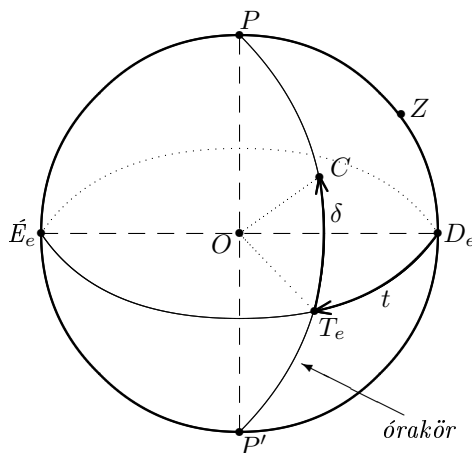
A középpont megválasztása szerint az első egyenlítői koordináta-rendszer lehet topocentrikus vagy geocentrikus. Vizsgáljuk itt is a geocentrikus esetet, amikor a kezdőpont a Föld középpontjában van, amit a megfigyelési ponttal egybeesőnek tekintünk.

Ezen koordináta-rendszer jellegzetes elemei a következők (2.5. ábra):

- alapsíkja az égi egyenlítő síkja, az  $O$  kezdőpontban a világtengelyre, vagy a Föld forgástengelyére merőlegesen állított sík;
- alapiránya a kezdőponttól az egyenlítői délpont irányába mutató ( $OD_e$  félegyenes iránya);
- $C$  a vizsgált égitest szférikus helye;
- a  $PP'$  világtengelyen, valamint a  $C$  égitesten áthaladó sík az égitest *órásíkja*, amely az éggömböt a  $C$  égitest órákörében metszi.
- az órákör az égi egyenlítőt a  $T_e$  *egyenlítői talppontban* metszi.

Az első egyenlítői koordináták, vagy órakoordináták jelölése  $(t, \delta)$ , ahol:

- \* A  $t = m(\widehat{D_e O T_e})$  óraszöget a déli kiindulási iránytól retrográd irányban mérjük az egyenlítő mentén az egyenlítői talppontig. Az óraszöget, mivel az idővel arányosan változik, hagyományosan óra – perc – másodpercben mérjük (h, m, s), és a  $0^h \leq t < 24^h$  határok között változik. Mivel az éggömb 24 óra alatt tesz meg egy teljes látszólagos fordulatot, így a  $360^\circ$ -nak megfelelő  $24^h$  óra alapösszefüggés alapján az órákban, illetve fokokban mért szögek között az alábbi átalakítási összefüggések érvényesek:



2.5. ábra. Az első egyenlítői koordináta-rendszer

$(^\circ, ', ")$	$360^\circ$	$180^\circ$	$90^\circ$	$15^\circ$	$1^\circ$	$15'$	$1'$	$15''$	$1''$
(h, m, s)	$24^h$	$12^h$	$6^h$	$1^h$	$4^m$	$1^m$	$4^s$	$1^s$	$0,7^s$

- \* A  $\delta = m(\widehat{T_e O C})$  deklináció az egyenlítő síkjától mért szögtávolságot fejezi ki. Értéke a  $-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$  határok között változik. A deklináció helyettesíthető annak pótszögével, a  $p$  pólustávolsággal, amelyre  $p = m(\widehat{P O C}) = 90^\circ - \delta$ .

Az egyenlítővel párhuzamos égi köröket *deklinációs köröknek* nevezzük. A  $\delta$  deklináció távoli égitestek esetén — eltekintve a földi egyenlítő síkjának lassú változásától — állandó, nem függ a megfigyelés helyétől és idejétől, míg a  $t$  óraszög az idő múlásával arányosan változik. Minden csillag 24 óra alatt körbejárja a deklinációs körét. Ezen koordináták, az óraszög révén, részben még mindig függenek a megfigyelő helyétől és idejétől.





A tavaszpont ( $\Upsilon$ ) óraszögét *csillagidőnek* nevezzük és  $s$ -sel jelöljük. A csillagidő kiszámítható tetszőleges égitest  $\alpha$  egyenes emelkedésének és  $t$  óraszögének összegeként:

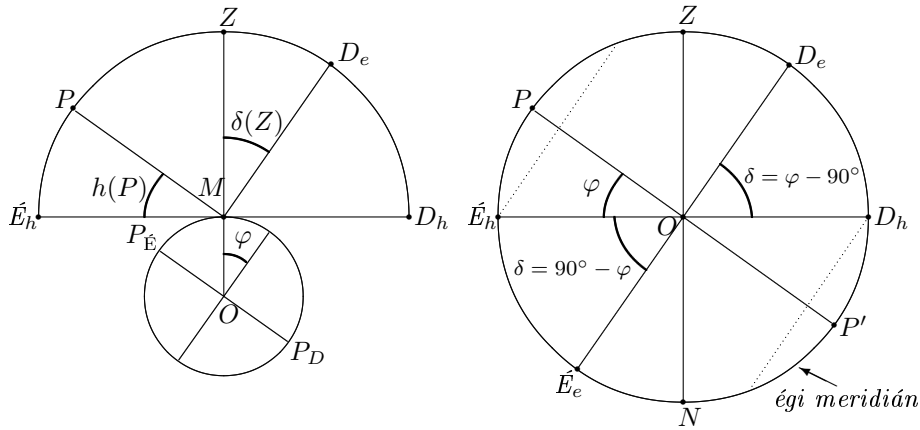
$$s = \alpha + t. \quad (2.1)$$

## 2.5. A földrajzi és égi koordináták kapcsolata

Ebben a részben ismertetjük a megfigyelő földrajzi koordinátái, az éggömb nevezetes pontjainak koordinátái és egy megfigyelt égitest égi koordinátái közti összefüggéseket.

**2.5.1. Tétel.** *Egy megfigyelő földrajzi szélessége megegyezik a pólus horizont feletti magasságával és a zenitpont deklinációjával:*

$$\varphi = h(P) = \delta(Z). \quad (2.2)$$



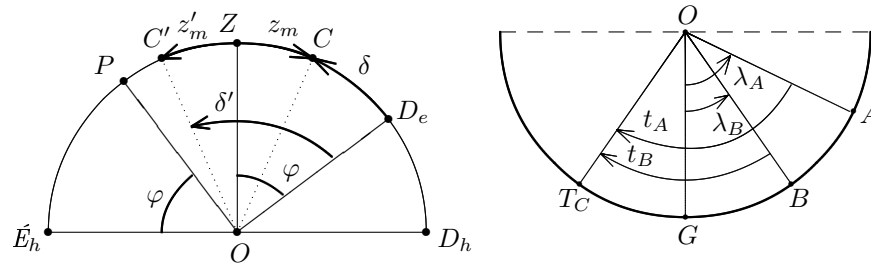
2.7. ábra. A földrajzi szélesség és pólusmagasság kapcsolata (balról);  
A cirkumpolaritás feltétele (jobbról)

**Bizonyítás.** Topocentrikus koordinátákban vizsgáljuk az  $M$  megfigyelési hely meridián-metszetét (2.7. első ábra). Az égitesteknek a Föld sugarához viszonyított nagy távolsága miatt az  $MP$  pólusirány párhuzamosnak vehető a Föld  $P_E P_D$  forgástengelyének irányával. A merőleges, illetve párhuzamos szárú szögek tulajdonságai alapján azonnal következnek a kijelentésben szereplő egyenlőségek.  $\square$

Megjegyezzük, hogy az éggömb hatalmas sugara miatt a legtöbb alkalmazás esetén az  $M$  és  $O$  pontok egybeesőnek tekinthetők.

Az égitesteknek a meridiánon való áthaladását *kulmináció*nak nevezzük. A két kulmináció közül azt, amelyik közelebb van a zenithez *felső kulmináció*nak vagy *delelés*nek; a zenittől távolabbat pedig *alsó kulmináció*nak nevezzük. Könnyen belátható, hogy a *cirkumpoláris* csillagok azok, amelyeknek alsó kulminációja is a horizont fölött van (2.7. második ábra). Ezen észrevétel alapján azonnal levezethető, hogy egy  $\delta$  deklinációjú csillag valamely  $\varphi$  földrajzi szélességű helyen:

- cirkumpoláris, ha  $\delta \geq 90^\circ - \varphi$ ;
- naponta felkel és lenyugszik, ha  $\varphi - 90^\circ < \delta < 90^\circ - \varphi$ ;
- soha nem látható, ha  $\delta \leq \varphi - 90^\circ$ .



2.8. ábra. Összefüggések egy csillag delelésekor (balra);  
Órakoordináták és földrajzi hosszúságok kapcsolata (jobbra)

**2.5.2. Tétel.** Egy csillag delelésekor érvényes a következő összefüggés:

$$\varphi = \delta \pm z_m, \quad (2.3)$$

ahol  $\varphi$  a megfigyelő földrajzi szélessége,  $\delta$  a megfigyelt csillag deklinációja,  $z_m$  a csillag zenittávolsága a meridiánon; a „+” előjel akkor használatos, ha a csillag a zenittől délre delel, a „–” előjel pedig akkor, ha a zenittől északra.

**Bizonyítás.** Vizsgáljuk az értelmezés szerint a szereplő szögeket a meridián (délkör) síkjában (2.8. első ábra). A felírt összefüggések azonnal következnek.  $\square$

**2.5.3. Tétel.** Tetszőleges  $C$  égitest két ( $A$  és  $B$ ) megfigyelő által egy időben mért  $t_A, t_B$  óraszögeinek fokokban kifejezett különbsége valamint a megfigyelők  $\lambda_A, \lambda_B$  földrajzi hosszúságának különbsége közti eltérés a  $360^\circ$  többszöröse ( $A$  nyugati földrajzi hosszúságokat negatív előjellel kell venni.):

$$t_A - t_B \equiv \lambda_A - \lambda_B \pmod{360^\circ}. \quad (2.4)$$

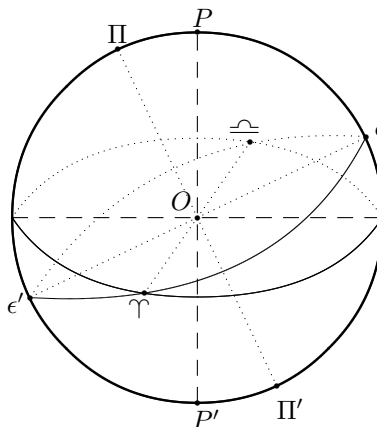
**Bizonyítás.** Vizsgáljuk az értelmezés szerint a szereplő szögeket az egyenlítő síkjában (2.8. második ábra). Az értelmezések alapján azonnal következik a megállapított összefüggés.  $\square$

## 2.6. A Nap évi látszólagos mozgása és következményei

### 2.6.1. A Nap évi látszólagos mozgása

Huzamosabb ideig végzett megfigyelések azt mutatják, hogy a Nap felkelési és lenyugvási helye folyamatosan vándorol a horizonton, a Nap delelési magassága a meridiánon napról-napra változik, az éjszakai égbolt képe hónapról-hónapra módosul — minden hónapban más-más csillagkép delel éjfélkor.

Ha a Nap egyenlítői koordinátáit naponta meghatározzuk, s a Nap helyét be-rajzoljuk egy térképre, azt tapasztaljuk, hogy a Nap egy év alatt az éggömbön leír egy főkört, amelyet *ekliptikának* nevezünk (2.9. ábra). Az ekliptika síkja az égi egyenlítő síkjával mintegy  $\epsilon = 23^\circ 27'$ -es szöget határoz meg. Az ekliptika 12 csillagképen halad át, a Nap megközelítőleg egy-egy hónapot tartózkodva az egyes csillagképekben. Ezen csillagképek a következők: Kos, Bika, Ikrek, Rák, Oroszlán, Szűz, Mérleg, Skorpió, Nyilas, Bak, Vízöntő és Halak. Mivel jelentős részük állatokról kapta a nevét, ezért ezeket állatövi csillagképeknek is nevezzük. Az *átlatöv* az ekliptika mentén a  $\pm 9^\circ$  ekliptikai szélességek között húzódik. Az ekliptika síkjára merőleges tengely az éggömböt az ekliptikai pólusban ( $\Pi$ ), illetve antipólusban ( $\Pi'$ ) metszi. A pólusból nézve, a Nap évi útját az ekliptika mentén direkt irányban járja be. Az ekliptika az égi egyenlítőt két pontban, a *tavaszpontban* ( $\Upsilon$ ) és *őszpontban* ( $\cap$ ) metszi, amelyeket *ekvinokcium-pontoknak* (*napéjgyenlőség-pontok*) nevezünk. A tavaszpont azon metszéspont, amelyen át a Nap az égi egyenlítő „alól” az égi egyenlítő „fölé”, azaz a  $P$  pólust tartalmazó féltérbe kerül. Ezen a ponton



2.9. ábra. Az ekliptika — a Nap évi látszólagos útja az éggömbön

minden évben március 21-e körül halad át csillagunk. Jelenleg a tavaszpont a Halak csillagképben található, de igen lassan vándorol az egyenlítőn. Mintegy 4 – 6 ezer évvel ezelőtt a Kos csillagképben volt. Mai napig is ennek emlékét őrzi az, hogy jelölésére a Kos jelét ( $\Upsilon$ ) használjuk. Az ekliptikának az égi egyenlítőtől legtávolabb fekvő két pontját *szolsztícium-pontoknak* vagy *napforduló-pontoknak* nevezzük és  $\varepsilon$ -nal, illetve  $\varepsilon'$ -vel jelöljük.

### 2.6.2. A Nap évi látszólagos mozgásának következményei

#### Az éghajlati övezetek kialakulása

A Föld felszínén a Nap maximális delelési magassága szerint különböző övezetek különíthetők el. Mivel ezekben az övezetekben a Naptól kapott energiamennyiség is különböző, így ezen övezetek belsejében az éghajlati viszonyok is különböznek. Az így kialakult *éghajlati övezetek* (*égövek*) a következők:

- *Forró égöv* — az egyenlítő mentén kialakult övezet. Határai a déli és északi féltekék  $23^\circ 27'$ -es földrajzi szélességén húzódó Rák-, illetve Baktérítő. Ezen övezetben lévő földi pontokban a Nap évente kerül a zenitre is, delevélve a zenittől északra is. A magasan álló Napból itt jut az egységnyi felületre a legtöbb hőenergia, ezért alakul ki itt a legmelegebb égöv. Itt két évszak különböztethető meg, egy szárazabb és egy csapadékosabb. A hóingadozás ezek között nem jelentős.
- *Mérsékelt égövek* — az északi és déli féltekéken a térítők és a  $\varphi = 66^\circ 33'$  ( $= 90^\circ - 23^\circ 27'$ ) szélességeken elhelyezkedő *sarkkörök* közötti övezetek. Ezek átmenetet képeznek az egyenlítő menti forró övezet, illetve a sarkok körüli hideg övezetek között. Itt négy évszak váltja egymást. Ezen övezetekben a Nap horizont fölötti maximális magassága fokozatosan csökken a földrajzi szélességgel, a következő összefüggés szerint:

$$(\delta_\odot)_{\max} = 90^\circ + 23^\circ 27' - \varphi.$$

- *Sarki égövek* — az északi és déli féltekéken a sarkköröktől a sarkokig húzódó övezetek. A Nap alacsony állása miatt ide jut a legkevesebb meleg csillagunktól, ezért itt jóval hidegebb van mint a forró égövben.

#### Az évszakok váltakozása

A Nap deklinációjának változásával egy adott földrajzi szélességen az év folyamán a változó napmagasság következtében változik az egységnyi felületre

jutó napenergia mennyiség. Így, fél évig, míg a Nap az egyenlítő fölött tartózkodik, az északi félteke melegszik jobban, majd a következő félév folyamán a déli félteke kap több meleget a Naptól. Ezen változások következtében alakulnak ki az *évszakok*, amelyeknek csillagászati határai az északi féltekén a következők:

- *tavas*, március 21. – június 22., mintegy 93 nap, a Nap a  $\Upsilon\varepsilon$  köríven;
- *nyár*, június 22. – szeptember 23., közelítőleg 93 nap, a Nap az  $\varepsilon\cap$  köríven;
- *ősz*, szeptember 23. – december 22., kb. 90 nap, a Nap az  $\cap\varepsilon'$  köríven;
- *tél*, december 22. – március 21., mintegy 89 nap, a Nap az  $\varepsilon'\Upsilon$  köríven.

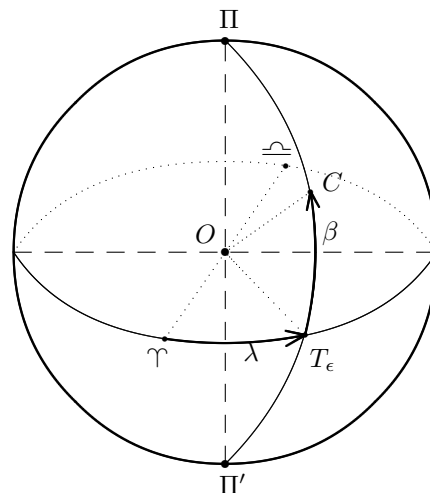
A déli féltekén akkor van nyár, amikor az északin tél, az ősz pedig az északi félteke tavaszával esik egybe.

### A nappalok és éjszakák hosszának egyenlőtlensége

Csillagászati szempontból a Föld valamely pontján addig beszélünk nappalról, míg a Nap a horizont fölött van. Mivel a Nap nem tartózkodik az egyenlítőn csupán az év két napján, így csak ezekben az esetekben a tavaszi (március 21.) és őszi (szept. 23) napéjegyenlőségek idején egyenlő a nappalok hossza az éjszaka hosszával. Tavasszal és nyáron, míg a Nap az egyenlítő fölött tartózkodik, napi mozgása során hosszabb ívet ír le a horizont fölött, mint az alatt, így a nappalok hosszabbak, mint az éjszakák. A sarkkörökön túl az is megesik, hogy a Nap le sem megy egyáltalán napokig a horizont alá, s így több napig nappal van. Ugyanígy lesz egy félév múlva több napig éjszaka is. Földünk északi és déli sarkain fél évig nappal, és fél évig éjszaka van, azaz a Nap fél évig a horizont felett tartózkodik, majd fél évre eltűnik alatta. Az egyenlítő mentén a nappalok és éjszakák hossza egész évben egyenlő, ugyanis itt a Nap a horizontra merőleges köröket ír le, és így napi útjának horizont fölötti és horizont alatti íve azonos hosszúságú.

### 2.6.3. Az ekliptikai koordináta-rendszer

Számos csillagászati probléma vizsgálatánál, mint például a bolygók, kisbolygók, vagy üstökösök mozgásának tanulmányozása, célszerű olyan koordináta-rendszert használni, amelynek alapsíkja az ekliptika síkja, vagy azzal párhuzamos sík. Az ilyen rendszerek esetében *ekliptikai koordinátákról* beszélünk. Az ekliptikai rendszerek kezdőpontja lehet a Nap középpontjában (heliocentrikus), a Föld középpontjában (geocentrikus), illetve a megfigyelési pontban (topocentrikus). Az alapsíkban az *ekliptikai hosszúságnak* nevezett ( $\lambda$ ) hosszúsági szög mérése a tavaszpont irányától történik direkt csillagászati irányban. Az ekliptikától északra és délre mért szögtávolság az *ekliptikai szélesség* ( $\beta$ ) (2.10. ábra). Ha  $T_\epsilon$  a  $C$  égitest ekliptikai vetülete, akkor:



2.10. ábra. Ekliptikai koordináta-rendszer

$$\lambda = m(\widehat{\Upsilon OT_\epsilon}) \in [0^\circ, 360^\circ],$$

$$\beta = m(\widehat{COT_\epsilon}) \in [-90^\circ, 90^\circ].$$

Naprendszerünk bolygói és más, az ekliptika síkja közelében keringő égitestek esetén a  $\beta$  ekliptikai szélesség sok esetben annyira kicsi, hogy elhanyagolható ( $\beta = 0$ ).

Az ekliptikai koordinátákat nem tudjuk közvetlenül megmérni, de könnyen kiszámíthatjuk az egyenlítői koordináták ismeretében.

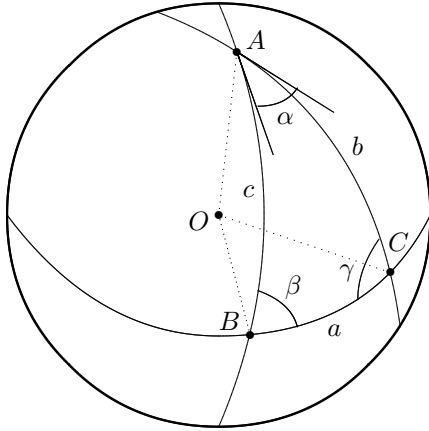
## 2.7. Koordináta-transzformációk

### 2.7.1. Gömbháromszögtani alapismeretek

A gömbháromszögtani vizsgálódásokat egy gömb felületén végezzük. A gömb sugarának hossza nem játszik szerepet, így az egyszerűség kedvéért azt egységnyi hosszúságúnak választjuk. Tehát a továbbiakban — hacsak azt külön nem jelezzük —, akkor *egység sugarú gömböt* használunk.

Ismeretes, hogy egy síknak és egy gömbnek ha van közös pontja, akkor a metszet egy pont (érintő sík esetén), vagy egy kör.

**2.7.1. Definíció.** A gömb középpontján átmenő síkok által meghatározott metszatköröket gömbi főköröknek nevezzük.



2.11. ábra. A gömbháromszög elemei

A főkörök egyben a gömb felületén húzódó legnagyobb sugarú körök is, ezért szokás ezeket *legnagyobb gömbi köröknek* is nevezni.

Egy gömb két nem átmérősen ellentett pontján pontosan egy főkör halad keresztül, mivel három nem egy egyenesen fekvő ponton keresztül pontosan egy sík fektethető.

A gömb felületének két pontja közti legkisebb távolságot a két ponton átmenő főkör (geodetikus vonal) megfelelő ívének hossza adja.

**2.7.2. Definíció.** Az  $O$  középpontú, egység sugarú gömbön vegyük fel a páronként nem átmérősen ellentett  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokat. Kössük össze  $A$ -t  $B$ -vel,  $B$ -t  $C$ -vel és  $C$ -t  $A$ -val, a megfelelő főkörökhöz tartozó körívek segítségével. Az így keletkezett  $ABC$  idomot gömbháromszögnek nevezzük.

Jelölések: A gömbháromszög  $A$ ,  $B$ , illetve  $C$  csúcsával szemközi  $BC$ ,  $CA$  és  $AB$  oldalának hosszát  $a$ ,  $b$ , illetve  $c$ -vel jelöljük. A gömb  $A$  pontjában az  $AB$  és  $AC$  körívekhez húzott érintők szögét a gömbháromszög szögének tekintjük, mértékét  $\alpha$ -val jelöljük. Hasonlóan értelmezzük a  $B$  és  $C$  szögek  $\beta$  és  $\gamma$  mértékét (2.11. ábra).

**2.7.3. Megjegyzés.** Egy  $ABC$  gömbháromszög  $A$  szögének  $\alpha$  mértéke egyenlő az  $(AOB)$  és  $(AOC)$  síkok által meghatározott lapszög mértékével.

A következőkben olyan gömbháromszögekkel foglalkozunk, amelyek mindhárom oldalának mértéke kisebb mint  $\pi$  radián (vagy  $180^\circ$ ).

**2.7.4. Tétel.** Egy gömbháromszög oldalaira érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

$$a < b + c, \quad a - b < c, \quad 0 < a + b + c < 2\pi. \quad (2.5)$$

**Bizonyítás.** Az egyenlőtlenségek azonnal következnek a triéder szögeire érvényes hasonló tulajdonságok alapján, ha figyelembe vesszük, hogy a gömbháromszög oldalainak mértékei megegyeznek a középpontban felvett megfelelő triéder szögeinek mértékével.  $\square$

**2.7.5. Definíciók.** Egy gömbi főkör síkjára merőleges átmérő végpontjait a főkör pólusainak nevezzük.

Egy  $ABC$  gömbháromszög poláris háromszöge azon  $A'B'C'$  háromszög, amely esetén az  $A, B, C$  pontok a  $B'C', A'C',$  illetve  $A'B'$  főkörök pólusai (2.12. ábra).

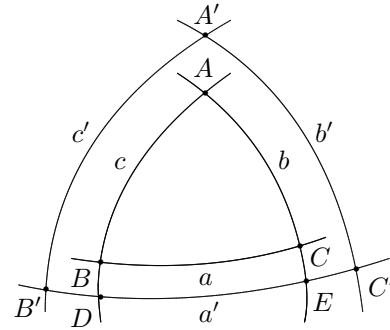
**2.7.6. Tétel.** Az  $ABC$  gömbháromszög  $A'B'C'$  poláris háromszögének poláris háromszöge az  $ABC$  háromszög.

**Bizonyítás.** Például a  $B'$  pont  $A$ -tól és  $C$ -től is  $\pi/2$  távolságra van, tehát az  $AC$  körív pólusa. A másik két csúcsra hasonló tulajdonság érvényes.  $\square$

**2.7.7. Tétel.** Egy háromszög poláris háromszögének oldalai és az adott háromszög megfelelő szögei kiegészítik egymást és fordítva, azaz:

$$a' = \pi - \alpha, \quad b' = \pi - \beta, \quad c' = \pi - \gamma; \quad (2.6)$$

$$a = \pi - \alpha', \quad b = \pi - \beta', \quad c = \pi - \gamma'. \quad (2.7)$$



2.12. ábra. Főkörök pólusai

**Bizonyítás.** A 2.7.6. tétel felhasználásával, a 2.12. ábra jelöléseit használva írhatjuk, hogy:

$$a' = B'E + DC' - DE = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha.$$

A másik két oldalra az ellenőrzés ugyanígy történik. Felcserélve az adott háromszög és poláris háromszögének szerepét, megkapjuk a második sorban szereplő összefüggéseket. Itt felhasználtuk még azt a tulajdonságot, hogy ha egy gömbháromszögben két szög derékszög, akkor a harmadik szög mértéke egyenlő a vele szemben fekvő oldal mértékével ( $DE = \alpha$ ).  $\square$



**2.7.8. Tétel.** *Egy gömbháromszög szögeire érvényesek a következő egyenlőtlenségek:*

$$\begin{aligned}\beta + \gamma - \alpha &< \pi, \\ \pi &< \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.\end{aligned}$$

**Bizonyítás.** Felhasználva a 2.7.7. tételben szereplő tulajdonságokat, az oldalakra érvényes (2.5) egyenlőtlenségeket alkalmazva a poláris háromszögre a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned}\beta + \gamma - \alpha &= (\pi - b') + (\pi - c') - (\pi - a') \\ &= \pi - (b' + c' - a') < \pi,\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= (\pi - a') + (\pi - b') + (\pi - c') \\ &= 3\pi - (a' + b' + c') \in (\pi, 3\pi). \quad \square\end{aligned}$$

**2.7.9. Definíció.** *Ha  $\alpha, \beta, \gamma$  egy gömbháromszög szögeinek mértékei, az  $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$  mennyiséget a háromszög gömbi feleslegének (szférikus excesszus) nevezzük.*

**2.7.10. Tétel.** *Az egységnyi sugarú gömbön felvett  $ABC$  gömbháromszög területe egyenlő a háromszög radiánban kifejezett gömbi feleslegével:*

$$T_{ABC} = \varepsilon = \frac{\pi \cdot \varepsilon^\circ}{180^\circ} \quad (2.8)$$

( $\varepsilon^\circ$  a radiánban kifejezett  $\varepsilon$  gömbi felesleg megfelelője fokokban kifejezve).

**Bizonyítás.** Az  $ABC$  gömbháromszög területe kiszámítható, ha felhasználjuk azt a tulajdonságot, hogy egy gömbháromszög  $\alpha, \beta$  illetve  $\gamma$  mértékű szögei által alkotott gömbkétszögek területének összege egyenlő egy félgömb területének és a háromszög területe kétszeresének összegével (a gömb felületén bármely idom területe megegyezik a középpontra vonatkozó szimmetrikusának területével), valamint azt a tulajdonságot, hogy az  $\alpha$  mértékű kétszög területe  $2\alpha$ . Ennek alapján

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi + 2T_{ABC},$$

ahonnan

$$T_{ABC} = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \varepsilon. \quad \square$$

**2.7.11. Következmény.** Az  $R$  sugarú gömb felszínén felvett gömbháromszög területe:

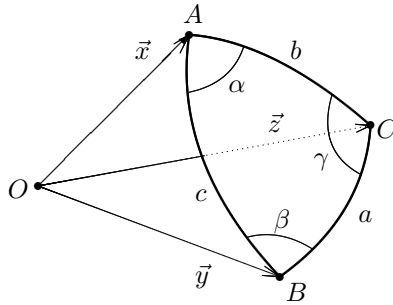
$$T_{ABC} = R^2 \cdot \varepsilon = \pi R^2 \frac{\varepsilon^\circ}{180^\circ},$$

ahol  $\varepsilon$ , illetve  $\varepsilon^\circ$  a háromszög gömbi feleslege radiánban, illetve fokban kifejezve.

A gömbháromszög elemeire vonatkozóan egy sor trigonometriai összefüggés vezethető le, amelyek a gömbtrigonometria alapjait képezik<sup>1</sup>.

**2.7.12. Lemma.** Az  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  és  $\vec{OC}$  egységvektorokat  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  illetve  $\vec{z}$ -vel jelölve (2.13. ábra), érvényesek a következő összefüggések:

- i)  $\vec{y} \cdot \vec{z} = \cos a$ ,  $\vec{z} \cdot \vec{x} = \cos b$ ,  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \cos c$ ;
- ii)  $m(\widehat{\vec{x} \times \vec{z}, \vec{x} \times \vec{y}}) = \alpha$ ,  $m(\widehat{\vec{y} \times \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z}}) = \beta$ ,  $m(\widehat{\vec{z} \times \vec{y}, \vec{z} \times \vec{x}}) = \gamma$ .



**Bizonyítás.** i) Az itt szereplő összefüggések azonnal következnek a skaláris szorzat értelmezéséből.

ii) Az első összefüggés például azt fejezi ki, hogy a  $b$  és  $c$  oldalak által közrezárt  $\alpha$  szög mértéke megegyezik az ezen íveket tartalmazó síkokra merőleges  $\vec{x} \times \vec{z}$  illetve  $\vec{x} \times \vec{y}$  vektorok által meghatározott  $\vec{x} \times \vec{z}, \vec{x} \times \vec{y}$  szög mértékével.  $\square$

2.13. ábra. A gömbháromszög elemei

összefüggéseket:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha, \quad (2.9)$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta, \quad (2.10)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

<sup>1</sup>Az első írásos emlék, amelyben trigonometriát találunk, Ptolemaiosz 150 körül írt „Almagest” (Nagy gyűjtemény) című könyve. Ennek érdekessége, hogy főleg csillagászati munka. Ebben a könyvben Ptolemaiosz vázolta a gömb trigonometriájának alapjait is. Tételeit természetesen nem a mai jelölésekkel közölte.

<sup>2</sup>A feljegyzések szerint a kiváló arab csillagász Al-Battani (858–929) ismerte már a gömbháromszögek koszinusztételét.

**Bizonyítás.** A vektorok vegyes szorzata, valamint a kettős vektori szorzatra vonatkozó  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$  (Gibbs-formula) alapján az alábbi összefüggések írhatók:

$$(\vec{x} \times \vec{z}) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \cdot [\vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y})] = \vec{x} \cdot [(\vec{z} \cdot \vec{y})\vec{x} - (\vec{z} \cdot \vec{x})\vec{y}]. \quad (2.11)$$

A (2.11) összefüggés, valamint a 2.7.12. segédteétel i) pontjának figyelembevételével

$$\begin{aligned} (\vec{x} \times \vec{z}) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) &= \vec{x} \cdot [(\vec{z} \cdot \vec{y})\vec{x} - (\vec{z} \cdot \vec{x})\vec{y}] = \\ &= \vec{x} \cdot [\cos a \cdot \vec{x} - \cos b \cdot \vec{y}] = \\ &= \cos a - \cos b \cos c. \end{aligned}$$

Másfelől viszont a skaláris szorzat értelmezése szerint

$$(\vec{x} \times \vec{z}) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = \|\vec{x} \times \vec{z}\| \cdot \|\vec{x} \times \vec{y}\| \cos \alpha = \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Az utóbbi két összefüggés összehasonlításával azonnal következik a kijelentésben szereplő (2.9) összefüggés. A másik két összefüggés bizonyítása ugyanígy történik, a megfelelő elemek szerepének felcserélésével.  $\square$

**2.7.14. Tétel.** *(A gömbháromszögtani öt elemre vonatkozó összefüggés.) Egy gömbháromszög oldalai és szögei kielégítik a következő összefüggéseket:*

$$\begin{aligned} \sin a \cos \beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha, \\ \sin b \cos \gamma &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta, \\ \sin c \cos \alpha &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \sin a \cos \gamma &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha, \\ \sin b \cos \alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta, \\ \sin c \cos \beta &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos \gamma. \end{aligned}$$

**Bizonyítás.** A koszinusztétel (2.9) összefüggésének mindkét oldalát beszorozva  $\cos c$ -vel, majd az így kapott összefüggést oldalanként hozzáadva a koszinusztétel (2.10)-es kifejezéséhez, a szükséges átalakítások és  $\sin c$ -vel való egyszerűsítés után a (2.12) összefüggéscsoport első képletét kapjuk.  $\square$

**2.7.15. Tétel.** *(A gömbháromszögtan szinusztétele<sup>3</sup>.) Egy gömbháromszög szögei és oldalai kielégítik a következő összefüggéseket:*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}. \quad (2.13)$$

**Bizonyítás.** Két vektor vektoriális szorzatának hosszára vonatkozó összefüggés szerint írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|(\vec{x} \times \vec{z}) \times (\vec{x} \times \vec{y})\| &= \|(\vec{x} \times \vec{z})\| \|(\vec{x} \times \vec{y})\| \sin \alpha = \sin b \sin c \sin \alpha, \\ \|(\vec{y} \times \vec{x}) \times (\vec{y} \times \vec{z})\| &= \|(\vec{y} \times \vec{x})\| \|(\vec{y} \times \vec{z})\| \sin \beta = \sin c \sin a \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Az előző összefüggések bal oldalán álló kifejezéseket átalakítva a Gibbs-formula segítségével és figyelembe véve a vegyes szorzat tulajdonságait:

$$\begin{aligned} \|(\vec{x} \times \vec{z}) \times (\vec{x} \times \vec{y})\| &= \|[(\vec{x} \times \vec{z}) \cdot \vec{y}] \vec{x} - [(\vec{x} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}] \vec{y}\| \\ &= \|[(\vec{x} \times \vec{z}) \cdot \vec{y}] \vec{x}\| = \|(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y})\|, \end{aligned} \quad (2.15)$$

illetve

$$\begin{aligned} \|(\vec{y} \times \vec{x}) \times (\vec{y} \times \vec{z})\| &= \|[(\vec{y} \times \vec{x}) \cdot \vec{z}] \vec{y} - [(\vec{y} \times \vec{x}) \cdot \vec{y}] \vec{z}\| \\ &= \|[(\vec{y} \times \vec{x}) \cdot \vec{z}] \vec{y}\| = \|(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z})\|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A vegyes szorzat tulajdonságai szerint mindkét eredmény ugyanaz, így a (2.14–2.16) összefüggések szerint

$$\sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta,$$

ahonnan azonnal következik a szinusztétel első összefüggése.  $\square$

A 2.7.13, 2.7.14 és 2.7.15. tételben szereplő összefüggéseket *Gauss-féle összefüggések*nek is nevezzük.

**2.7.16. Következmény.** *Egy gömbháromszög elemei kielégítik a következő összefüggéseket:*

$$\cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma \cos a - \cos \beta \cos \gamma, \quad (2.17)$$

$$\sin \alpha \cos b = \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a. \quad (2.18)$$

*Az elemek cseréjével további analóg összefüggések állíthatók elő.*

<sup>3</sup>A gömbháromszögekre vonatkozó szinusztétel felfedezője Abul-l-Wafa (940–997), arab matematikus és csillagász volt, aki jelentősen közreműködött a Nap-pálya adatainak meghatározásában.

**Bizonyítás.** A megfelelő Gauss-féle összefüggéseket felírva az  $A'B'C'$  poláris háromszögre és figyelembe véve a két háromszög elemei közötti (2.6, 2.7) összefüggéseket, a  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$  és  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$  alapján a felírt (2.17, 2.18) összefüggések azonnal következnek.  $\square$

**2.7.17. Következmény.**  $A$

$$\tan M = \tan b \cos \alpha,$$

illetve

$$m = \frac{\cos b}{\cos M} = \frac{\sin b \cos \alpha}{\sin M}$$

összefüggésekkel értelmezett  $M$  és  $m$  segédelemek segítségével a koszinusztételben és következményeiben szereplő összefüggések a következő, egyszerűbb alakra hozhatók:

$$\begin{aligned}\cos a &= m \cos(c - M), \\ \sin a \cos \beta &= m \sin(c - M).\end{aligned}$$

**2.7.18. Következmény.** Egy derékszögű háromszögben ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) a Gauss-féle összefüggések megfelelő alakja:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c = \cot \beta \cot \gamma, \\ \sin b &= \sin a \sin \beta = \tan c \cot \gamma, \\ \sin c &= \sin a \sin \gamma = \tan b \cot \beta, \\ \cos \beta &= \cos b \sin \gamma = \tan c \cot a, \\ \cos \gamma &= \cos c \sin \beta = \tan b \cot a.\end{aligned}$$

**2.7.19. Következmény.** Ha egy gömbháromszög egyik oldala derékszögű ( $a = \frac{\pi}{2}$ ), akkor a Gauss-féle összefüggések megfelelő alakja:

$$\begin{aligned}\cos a &= -\cos \beta \cos \gamma = -\cot b \cot c, \\ \sin \beta &= \sin \alpha \sin b = \tan \gamma \cot c, \\ \sin \gamma &= \sin \alpha \sin c = \tan \beta \cot b, \\ \cos b &= \cos \beta \sin c = -\tan \gamma \cot \alpha, \\ \cos c &= \cos \alpha \cos \gamma = -\tan \beta \cot \alpha.\end{aligned}$$

**2.7.20. Következmény.** *Bevezetve egy gömbháromszög félkerületére a  $2p = a + b + c$  jelölést, érvényesek az ún. Dalembre-formulák:*

$$\begin{aligned}\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} &= \frac{\sin p}{\sin c} \sin \frac{\gamma}{2}, & \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} &= \frac{\sin(p-c)}{\sin c} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{c}{2} &= \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, & \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{c}{2} &= \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{c}{2} &= \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, & \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{c}{2} &= \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

**2.7.21. Következmény.** *Egy gömbháromszögben érvényesek a Neper-féle formulák:*

$$\begin{aligned}\tan \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{a+b}{2} &= \sin \frac{a-b}{2} \cot \frac{\gamma}{2}, \\ \tan \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{a+b}{2} &= \cos \frac{a-b}{2} \cot \frac{\gamma}{2}, \\ \tan \frac{a-b}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} &= \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \tan \frac{c}{2}, \\ \tan \frac{a+b}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} &= \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \tan \frac{c}{2}.\end{aligned}$$

**2.7.22. Következmény.** *A gömbi felesleg kifejezhető a gömbháromszög elemeivel a L'Huillier-formula segítségével:*

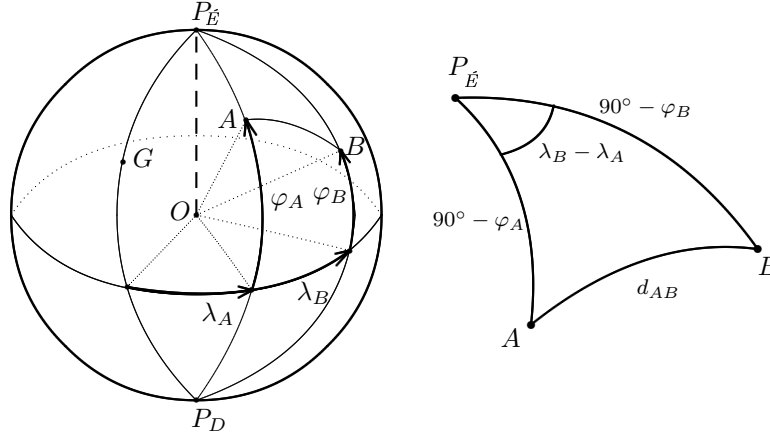
$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\tan \frac{p}{2} \tan \frac{p-a}{2} \tan \frac{p-b}{2} \tan \frac{p-c}{2}}.$$

### 2.7.2. Távolságok kiszámítása a Föld felszínén

A Föld felszínén felvett  $A$  és  $B$  pontok földrajzi koordinátái legyenek  $(\lambda_A, \varphi_A)$ , illetve  $(\lambda_B, \varphi_B)$ . Célunk meghatározni az  $R_\oplus$  sugarú, gömb alakúnak tekintett Föld felszínén a két pont közti minimális  $l_{AB}$  távolságot. Ha a két pont nem átmérősen ellentett pont, akkor pontosan egy főkör illeszkedik a két ponthoz. A két pont közötti távolság ( $l_{AB}$ ) pedig ezen főkör  $A$  és  $B$  pontok közé eső rövidebb ívének hossza (2.14. ábra).

A távolság a  $P_{\dot{E}}AB$  gömbi háromszögben határozható meg. A háromszögben — a földrajzi koordináták értelmezése szerint — ismertek a következő elemek:

$$P_{\dot{E}}A = 90^\circ - \varphi_A, \quad P_{\dot{E}}B = 90^\circ - \varphi_B, \quad m(\widehat{AP_{\dot{E}}B}) = \lambda_B - \lambda_A.$$



2.14. ábra. Két pont közti távolság kiszámítása a Föld felszínén

Alkalmazva a háromszögre a koszinusztételt, az egységnyi sugarú gömbre,  $d_{AB}$ -vel jelölve a megfelelő távolságot:

$$\begin{aligned} \cos d_{AB} = & \cos(90^\circ - \varphi_A) \cos(90^\circ - \varphi_B) + \\ & + \sin(90^\circ - \varphi_A) \sin(90^\circ - \varphi_B) \cos(\lambda_B - \lambda_A), \end{aligned}$$

azaz

$$\cos d_{AB} = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos(\lambda_B - \lambda_A). \quad (2.19)$$

Az  $R_\oplus$  sugarú Föld felszínén a megfelelő ív hossza

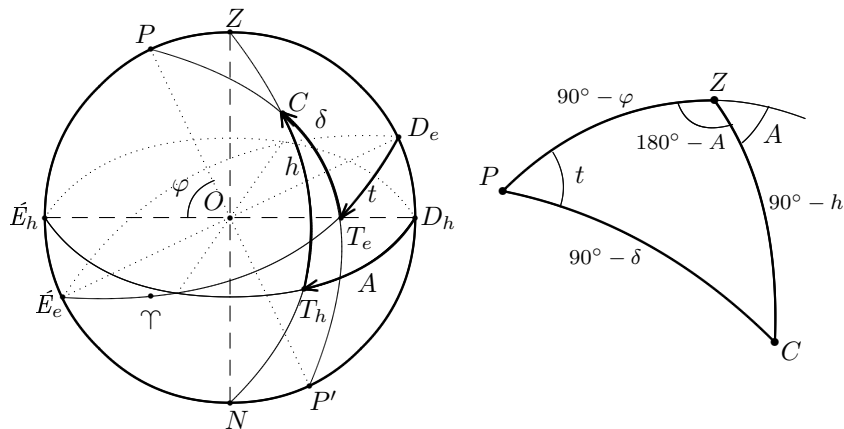
$$l_{AB} = R_\oplus \cdot d_{AB}. \quad (2.20)$$

### 2.7.3. Két csillag szögtávolsága

Határozzuk meg két ismert egyenlítői koordinátájú csillag szögtávolságát, azaz annak a szögnek a mértékét, amely alatt az  $O$  középpontból az ismert egyenlítői koordinátájú  $A(\alpha_A, \delta_A)$ , illetve  $B(\alpha_B, \delta_B)$  csillag látszik.

Az előző paragrafusban ismertetett módszer alkalmazható az égi koordináták esetében is. A megfelelő szögtávolságra érvényes összefüggés:

$$\cos d_{AB} = \cos \widehat{AOB} = \sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B \cos(\alpha_B - \alpha_A). \quad (2.21)$$



2.15. ábra. A horizontális és egyenlítői koordináták kapcsolata – transzformációs háromszög

#### 2.7.4. Átszámítás a horizontális és az egyenlítői koordináta-rendszer között

Valamely  $\varphi$  földrajzi szélességű megfigyelési helyen  $s$  csillagidőkor észlelt horizontális koordináták —  $(A, h)$  azimut és magasság —, valamint a megfelelő órákoordináták (első egyenlítői koordináták) —  $(t, \delta)$  óraszög és deklináció — közötti összefüggések megállapításához vizsgáljuk az éggömbön az egyes koordináták értelmezését (2.15. ábra).

Ha  $C$  a megfigyelt égitest éggömbi helye, a  $PCZ$  gömbháromszögben a következő elemek azonosíthatók:

$$PZ = 90^\circ - \varphi, \text{ – a (2.2) összefüggés alapján,}$$

$$PC = PT_e - CT_e = 90^\circ - \delta,$$

$$ZC = ZT_h - CT_h = 90^\circ - h = z,$$

valamint

$$m(\widehat{ZPC}) = D_e T_e = t,$$

$$m(\widehat{PZC}) = 180^\circ - A.$$

A  $PZC$  háromszögre felírva az alkalmas Gauss-féle összefüggéseket, és figyelembe véve a felírt elemekre vonatkozó összefüggéseket, az alábbi átalakítások végezhetők:



- A szinusztétel értelmében:

$$\frac{\sin(90^\circ - h)}{\sin t} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(180^\circ - A)},$$

ahonnan

$$\cos \delta \sin t = \cos h \sin A. \quad (2.22)$$

- A koszinusztételt alkalmazva az ismert két szögre:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - h) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \\ &\quad + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cos t, \\ \cos(90^\circ - \delta) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - h) + \\ &\quad + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - h) \cos(180^\circ - A), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t, \quad (2.23)$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A. \quad (2.24)$$

- Az öt elemre vonatkozó összefüggések alkalmazható alakjait felírva:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - h) \cos(180^\circ - A) &= \cos(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \varphi) \\ &\quad - \sin(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \varphi) \cos t, \\ \sin(90^\circ - \delta) \cos t &= \cos(90^\circ - h) \sin(90^\circ - \varphi) \\ &\quad - \sin(90^\circ - h) \cos(90^\circ - \varphi) \cos(180^\circ - A), \end{aligned}$$

ahonnan

$$-\cos h \cos A = \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos t. \quad (2.25)$$

$$\cos \delta \cos t = \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos A, \quad (2.26)$$

A választott égitest  $t = s - \alpha$  óraszögének — ahol  $s$  az észlelés csillagideje a megfigyelési pontban és  $\alpha$  a rektaszcenzió — és  $\delta$  deklinációjának ismeretében a (2.22, 2.23 és 2.25) összefüggések alapján meghatározhatók a  $\varphi$  földrajzi szélességen az égitest  $(A, h)$  horizontális koordinátái:

$$\begin{aligned} \cos h \sin A &= \cos \delta \sin t, \\ \cos h \cos A &= \sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta, \\ \sin h &= \cos \varphi \cos \delta \cos t + \sin \varphi \sin \delta. \end{aligned} \quad (2.27)$$

A harmadik összefüggésből meghatározható a  $h \in [-90^\circ, 90^\circ]$  horizont fölötti magasság, majd az első és második összefüggésekből a  $\sin A$ , és  $\cos A$  ismeretében egyértelműen meghatározható az  $A \in [0^\circ, 360^\circ]$  azimut. A (2.27) transzformációs összefüggések felírhatók mátrixok segítségével is a

$$\begin{pmatrix} \cos h \sin A \\ \cos h \cos A \\ \sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \sin t \\ \cos \delta \cos t \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

alakban, ami pontosan azt fejezi ki, hogy a horizontális rendszerről az első egyenlítői koordináta-rendszerre a meridián síkra merőleges tengely körüli  $90^\circ - \varphi$  mértékű szöggel való forgatással térhetünk át.

A (2.22, 2.24 és 2.26) összefüggések alapján felírhatjuk az  $(A, h) \rightarrow (t, \delta)$  transzformáció összefüggéseit:

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin t &= \cos h \sin A, \\ \cos \delta \cos t &= \sin \varphi \cos h \cos A + \sin h \cos \varphi, \\ \sin \delta &= -\cos \varphi \cos h \cos A + \sin \varphi \sin h. \end{aligned} \quad (2.29)$$

A (2.29) transzformáció mátrix alakja:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \sin t \\ \cos \delta \cos t \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h \sin A \\ \cos h \cos A \\ \sin h \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

ami nem más, mint a  $\varphi - 90^\circ$ -os szöggel való forgatás a meridián síkra merőleges tengely körül, azaz pontosan a (2.28) transzformáció inverze.

A levezetett összefüggésekben a  $h$  horizont fölötti magasság helyettesíthető a  $z = 90^\circ - h$  összefüggés szerint a  $z$  zenittávolsággal, ami azt jelenti, hogy  $\sin h \cos z$ -re,  $\cos h$  pedig  $\sin z$ -re cserélhető.

A  $t$  óraszög a (2.1) összefüggés alapján helyettesíthető az  $\alpha$  rektaszcenzióval, a

$$t = s - \alpha \quad (2.31)$$

összefüggés szerint, ahol  $s$  a csillagidő azaz a tavaszpont óraszöge. A (2.28) összefüggésekbe elvégezve a helyettesítést (2.31) szerint, a következő ösz-

szefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \cos h \sin A \\ \cos h \cos A \\ \sin h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \sin(s - \alpha) \\ \cos \delta \cos(s - \alpha) \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \sin s \cos \alpha - \cos \delta \cos s \sin \alpha \\ \cos \delta \cos s \cos \alpha + \cos \delta \sin s \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin s & -\cos s & 0 \\ \cos s & \sin s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \\
 &\quad \begin{pmatrix} \sin s & -\cos s & 0 \\ \cos s \sin \varphi & \sin s \sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos s \cos \varphi & \sin s \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}. \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

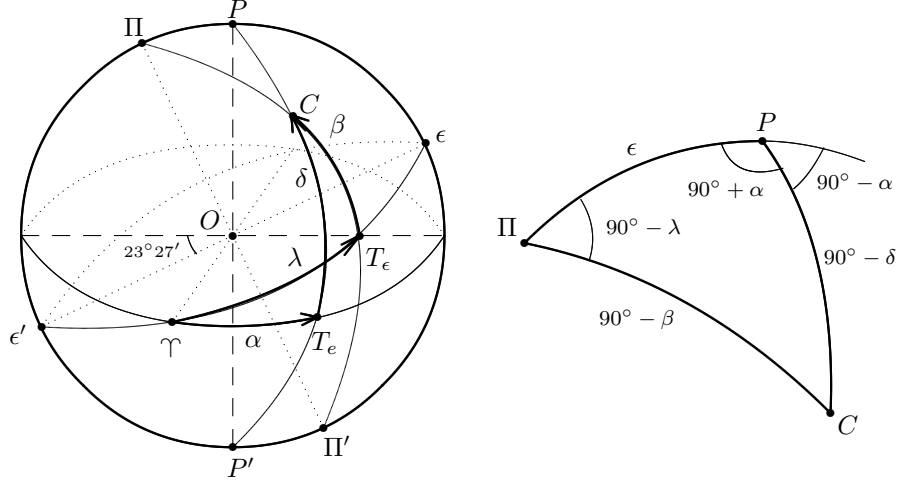
A (2.32) összefüggésben megjelenő

$$\begin{pmatrix} \sin s & -\cos s & 0 \\ \cos s & \sin s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ - s) & -\sin(90^\circ - s) & 0 \\ \sin(90^\circ - s) & \cos(90^\circ - s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix azt fejezi ki, hogy az órakoordináta-rendszerről (első egyenlítői koordináta-rendszer) az ekvatoriális (második egyenlítői) koordináta-rendszerre való át-térés egy  $(90^\circ - s)$  mértékű szöggel való forgatással valósítható meg. Ez könnyen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy az  $x$  tengely iránya az egyik rendszerben a meridiánra merőleges irány, a másikkban pedig a tavaszpont iránya, amely tengelyek hajlásszöge éppen  $(90^\circ - s)$ .

Az ekvatoriális, vagy második egyenlítői koordinátákat a horizontális koordináták függvényében megadó összefüggések azonnal felírhatók a (2.32) transzformáció inverzeként:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} &= \\
 &= \begin{pmatrix} \sin s & \cos s & 0 \\ -\cos s & \sin s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h \sin A \\ \cos h \cos A \\ \sin h \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \sin s & \cos s \sin \varphi & \cos s \cos \varphi \\ -\cos s & \sin s \sin \varphi & \sin s \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h \sin A \\ \cos h \cos A \\ \sin h \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$



2.16. ábra. Az egyenlítői és ekliptikai koordináták kapcsolata

### 2.7.5. Átszámítás az egyenlítői és az ekliptikai koordináta-rendszer között

Az  $(\alpha, \delta)$  egyenlítői és  $(\lambda, \beta)$  ekliptikai koordináták közti összefüggések levezethetők például — az előző paragrafusban látottak szerint — a Gauss-féle formulák segítségével, figyelembe véve a két rendszer koordinátáinak értelmezését (2.16. ábra).

Itt most egy másik eljárást mutatunk be, amely azon alapul, hogy az egyenlítői koordináta-rendszer átvihető az ekliptikai koordináta-rendszerbe az  $\epsilon = 23^\circ 27'$  mértékű szöggel való forgatással a tavaszpont felé irányított tengely körül. Ha a két jobbsodrású derékszögű koordináta-rendszer  $x$  tengelyét a tavaszpont felé irányítjuk, a  $z$  tengelyeket pedig a  $P$  északi pólus, illetve  $\Pi$  ekliptikai pólus felé, akkor a  $C$  pont koordinátái a két rendszerben  $(\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta)$ , illetve  $(\cos \beta \cos \lambda, \cos \beta \sin \lambda, \sin \beta)$ . A forgatást leíró mátrix segítségével az összefüggések így alakulnak:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ 0 & \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

azaz

$$\begin{aligned}\cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha &= \cos \epsilon \cos \beta \sin \lambda - \sin \epsilon \sin \beta, \\ \sin \delta &= \sin \epsilon \cos \beta \sin \lambda + \cos \epsilon \sin \beta.\end{aligned}\tag{2.34}$$

A (2.33) illetve (2.34) összefüggések segítségével meghatározhatók az egyenlítői koordináták az ekliptikai koordináták ismeretében.

A megfelelő inverz transzformációk, amelyekkel az ekliptikai koordináták határozhatók meg az egyenlítői koordináták alapján, előállíthatók a  $-\epsilon$  mértékű szöggel való forgatással:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix},\tag{2.35}$$

vagy

$$\begin{aligned}\cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha + \sin \epsilon \sin \delta, \\ \sin \beta &= -\sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha + \cos \epsilon \sin \delta.\end{aligned}\tag{2.36}$$

### 2.7.6. Égitestek keltének és nyugtának helye és ideje

Egy égitest felkelésekor és lenyugvásakor első közelítésben a horizonton található. Ez a közelítés akkor érvényes, ha eltekintünk a csillagászati refrakciótól, ami módosítja az égitestek felkeltének és lenyugvásának helyét. Tehát feltételünk azzal ekvivalens, hogy az égitest horizont fölötti magassága nulla ( $h = 0$ ).

Egy ismert  $(\alpha, \delta)$  egyenlítői koordinátájú égitestre felírva a horizontális és egyenlítői koordináták közti (2.32) összefüggéseket, a

$$\begin{aligned}\cos h \sin A &= \sin s \cos \delta \cos \alpha - \cos s \cos \delta \sin \alpha, \\ \cos h \cos A &= \cos s \sin \varphi \cos \delta \cos \alpha + \sin s \sin \varphi \cos \delta \sin \alpha - \cos \varphi \sin \delta, \\ \sin h &= \cos s \cos \varphi \cos \delta \cos \alpha + \sin s \cos \varphi \cos \delta \sin \alpha + \sin \varphi \sin \delta,\end{aligned}$$

egyenleteket kapjuk. A  $h = 0$  feltétellel, ismert  $\alpha$ ,  $\delta$  és  $\varphi$  esetén meghatározhatók az adott égitest felkelési és lenyugvási helyének  $A$  azimutját, valamint a megfelelő  $s$  csillagidőt adó

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin s \cos \delta \cos \alpha - \cos s \cos \delta \sin \alpha, \\ \cos A &= \cos s \sin \varphi \cos \delta \cos \alpha + \sin s \sin \varphi \cos \delta \sin \alpha - \cos \varphi \sin \delta, \\ 0 &= \cos s \cos \varphi \cos \delta \cos \alpha + \sin s \cos \varphi \cos \delta \sin \alpha + \sin \varphi \sin \delta\end{aligned}\tag{2.37}$$

egyenletek. A harmadik egyenletből meghatározható az  $s$  csillagidő, majd azt az első két egyenletbe helyettesítve,  $\sin A$  és  $\cos A$  ismeretében meghatározható az  $A$  azimut.

A vizsgált égitest naponta ismétlődő felkeltének és lenyugvásának feltétele az, hogy a harmadik egyenletnek legyen megoldása. Ha  $\varphi$  és  $\delta$  nem  $90^\circ$ , a harmadik egyenlet a

$$\cos s \cos \alpha + \sin s \sin \alpha + \tan \varphi \tan \delta = 0$$

alakban írható, vagy még egyszerűbben

$$\cos(s - \alpha) = -\tan \varphi \tan \delta. \quad (2.38)$$

Ezen utóbbi egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha

$$\begin{aligned} |\tan \varphi \tan \delta| &\leq 1 \Leftrightarrow \\ -\cos \varphi \cos \delta &\leq \sin \varphi \sin \delta \leq \cos \varphi \cos \delta \Leftrightarrow \\ \cos(\varphi - \delta) &\geq 0 \text{ és } \cos(\varphi + \delta) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \varphi - \delta &\leq 90^\circ \text{ és } \varphi + \delta \leq 90^\circ \end{aligned}$$

azaz egy  $\delta$  deklinációjú égitest a  $\varphi$  földrajzi szélességen akkor és csak akkor kel és nyugszik naponta, ha teljesülnek a

$$\varphi - 90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ - \varphi \quad (2.39)$$

feltételek. Természetesen, a levezetett feltételek megegyeznek a 2.5. megjegyzésben geometriai megfontolások alapján felírt feltételekkel.

A (2.39) feltételek teljesülése esetén az adott égitest keltének és lenyugvásának csillagidejét a (2.38) egyenlet

$$s_{1,2} = \alpha \pm \arccos(-\tan \varphi \tan \delta) \quad (2.40)$$

megoldásai adják.

Az égitest keltének és nyugtának azimutja meghatározható közvetlenül, a csillagidő kiszámítása nélkül is. A (2.37) egyenletek a

$$\begin{aligned} \sin A &= \cos \delta \sin(s - \alpha), \\ \cos A &= \sin \varphi \cos \delta \cos(s - \alpha) - \cos \varphi \sin \delta, \\ \cos(s - \alpha) &= -\tan \varphi \tan \delta. \end{aligned}$$

ekvivalens alakra hozhatók, ahonnan a második és harmadik egyenlet alapján

$$\cos A = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}, \quad (2.41)$$

ahonnan az égitest keltének és nyugtának azimutja

$$A_1 = \arccos\left(-\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}\right), \quad A_2 = 2\pi - A_1. \quad (2.42)$$

Az égitest naponta történő keltének és nyugtának feltételei innen is felírhatók, a

$$-1 \leq \frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \leq 1$$

alakban, ami a

$$-\cos \varphi \leq \cos(90^\circ - \delta) \leq \cos \varphi$$

alakra hozható, ahonnan a már korábban levezetett (2.39) feltételek következnek.

Ha az égitestek felkelésének és lenyugvásának pontos helyét és idejét akarjuk meghatározni, akkor figyelembe kell vennünk azt is, hogy a csillagászati refrakció módosítja az égitestek látszólagos helyét (megnövelve azok horizont fölötti magasságát). A Nap és Hold esetében még arra is figyelni kell, hogy ezek az égitestek korong szerűnek látszanak és részben már akkor megjelennek a horizont fölött, amikor középpontjuk még jóval a horizont alatt tartózkodik — a koordináták viszont az égitestek látszó korongjának középpontjára vonatkoznak. A Naprendszerünk égitestjeire vonatkozó pontos számítások esetében még azok parallaxisát is figyelembe kell venni, ami a megfigyelési helynek a Föld középpontjától való távolságából ered. A refrakcióra és parallaxisra vonatkozó ismereteket egy későbbi fejezetben tárgyaljuk.





## 3. fejezet

# Az idő mérése

### 3.1. Az inerciaidő

Az idő filozófiai kategória, absztrakció eredménye. A dolgok, események és folyamatok időbeliségét tükrözi vissza. Egyike a filozófia és a szaktudományok legalapvetőbb fogalmainak (az anyag, tér és mozgás fogalmakkal együtt). A dolgok időbeliségén egy formai jegyüket, egymásutániségük rendjét értjük. Állapotok egymásutániséga különösen tisztán szemlélhető kauzális kapcsolatok esetén. Amikor valamely szaktudományban — és a hétköznapi életben is — úgy fogalmazunk, hogy az időt mérjük, az mindig azt jelenti, hogy dolgok változási ritmusait hasonlítjuk össze, nem pedig azt, hogy az *időt* mérjük, mivel az, mint olyan, konkrétan nem létező, absztrakció. De, hogy ez az absztrakció létrejött, annak objektív alapja van: az időbeliség.

Az emberiség a ködös őskortól kezdve napjainkig igen nagy erőfeszítést tett és tesz annak érdekében, hogy az idő mérését szükségleteinek megfelelően a lehető legnagyobb pontossáig fokozza. A pontosság az élet, a műszaki- és természettudományok legkülönbözőbb területein és különösen a csillagászatban igen fontos.

Az idő mérésére kétféle módszert ismerünk. Az egyik az idő múlását egy önkényesen kiválasztott időpillanattól kiindulva, a másik két vagy több esemény között eltelt időtartamok hosszát méri. A mindennapi életben és a csillagászatban egyaránt nagy szerep jut mindkettőnek.

Az idő múlásának érzékelésére és mérésére az emberiség a lehetőséghez képest egyenletes hosszúságú időtartamokat, periodikusan megismétlődő eseményeket választott, és ezek megszámlálásával tette kifejezhetővé, mérhetővé az idő múlását.

A csillagászat nem foglalkozik az idő filozófiai természetével, hanem csu-

pán annak mérésével. Az idő mérésére ún. *időrendszereket* (*időskálákat*) használunk, ami valamely folytonos, állandó és stabil jelenség lehet. Időrendszerként alkalmas lenne minden periodikus folyamat, de célszerű olyan időrendszert választani, amellyel a mozgástörvények lehető legegyszerűbb (lineáris) alakot öltenek. A gyakorlatban jól használható és jól reprodukálható konkrét időrendszerek kialakítására törekszenek.

Köztudott, hogy a klasszikus mechanikában az időt a tértől függetlennek tekinthetjük. Ezen modellben, Newton első axiómája szerint egy olyan mozgásban levő test, amelyre külső erők nem hatnak, egyenlő idők alatt egyenlő utakat tesz meg. Ezen rendszerben értelmezhető az inerciaidő. Az *inerciaidő* (vagy *tehetetlenségi idő*) az az idő, amelynek használata esetén egy inerciarendszerben teljesen magára hagyott mozgó test egyenlő idők alatt egyenlő utakat tesz meg. Az inerciaidő elméletileg mérhető lenne a megtett úttal. A gyakorlatban viszont ez nem kivitelezhető, mert környezetünkben nem találunk olyan testeket, amelyekre semmilyen erő nem hat. Egy időrendszer annál jobban közelíti az inerciaidőt minél kevesebb a külső erők hatása. Erre jó példákat a különböző égitestek mozgásai szolgáltatnak. Ilyen mozgások például a Föld tengelyforgása, a Föld keringése a Nap körül, vagy a Hold keringése a Föld körül.

Ahányféle konkrét idődefiníciónk van annyiféle időrendszerrel rendelkezünk. Külön problémát jelent ezen időrendszerek közötti kapcsolatok megállapítása.

## 3.2. Helyi idők

### 3.2.1. A csillagidő

A Föld tengelyforgását használva alapul különböző időrendszerek értelmezhetők annak függvényében, hogy ezt a forgást az éggömbhöz (vagyis a csillagokhoz), vagy a Naphoz viszonyítjuk. Az éggömb egy kiválasztott pontjához, a tavaszponthoz viszonyított forgás segítségével értelmezhető a csillagidő. Mivel a tavaszpont egy képzeletbeli pont, a gyakorlatban a végtelen távolinak tekinthető csillagokhoz viszonyítjuk a Föld forgásidejét.

A *csillagidő* (*sziderikus idő*) egyenlő a tavaszpont óraszögével. A csillagidő jele  $s$ :

$$s = t\gamma. \quad (3.1)$$

A csillagidő mérésére használt időegység a *csillagnap*, amely a tavaszpont két egymást követő delelése között eltelt időtartam. A csillagnap törtrészei

a *csillag-óra*, *csillag-perc* és *csillag-másodperc*, amelyekre szokásosan

$$1 \text{ csillagnap} = 24 \text{ óra (h)} = 1\,440 \text{ perc (m)} = 86\,400 \text{ másodperc (s)}.$$

Az első, illetve második egyenlítői koordinátáknál bevezetett óraszög és delkináció értelmezése szerint azonnal következik az alábbi alapösszefüggés:

*Tetszőleges megfigyelő esetében bármely égitest  $t$  óraszöge és  $\alpha$  rektaszczenziója esetén azok összege minden pillanatban a megfigyelési ponthoz tartozó  $s$  csillagidőt adja, azaz minden pillanatban érvényes az*

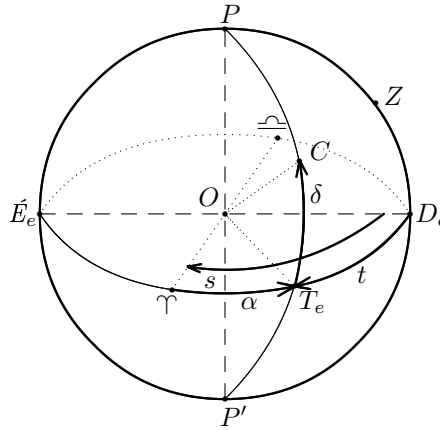
$$s = t + \alpha \quad (3.2)$$

*összefüggés.*

A csillagidő meghatározása egy ismert rektaszczenziójú csillag óraszögének megméréseével történhet.

Amikor a  $C$  égitest delel ( $t = 0$ ), a csillagidő megegyezik az illető égitest rektaszczenziójával:

$$s = \alpha. \quad (3.3)$$



3.1. ábra. A csillagidő, óraszög és rektaszczenzió kapcsolata

A csillagidő gyakorlati meghatározása is a (3.3) összefüggés alapján történik. Olyan műszert használnak, amelynek függőleges fonálkeresztje éppen a meridiánba van beállítva (passzázműszer). Amikor az ismert rektaszczenziójú csillag áthalad a fonálkeresztten — vagyis óraszöge nulla —, akkor a csillagidő pontosan a csillag rektaszczenziójával egyezik meg.

A csillagidő helyi idő, mert mindig az aktuális megfigyelő meridiánjától mérjük. Így a Föld különböző hosszúsági körein, ugyanabban az időpillanatban mért csillagidők egymástól különböznek.

A csillagnap 0,008 s-mal rövidebb a Föld forgási periódusánál amiatt, hogy a tavaszpont a Föld tengelyének lassú elmozdulása miatt mozog az álló csillagok mozdulatlan háttéréhez képest. (Erről részletesebben olvashatunk a precesszióról szóló 5.1.4. paragrafusban.)

Első közelítésben a csillagidő egyenletesnek tekinthető. Pontosabb mérések viszont a csillagidő egyenetlenségeit mutatják. Ennek több oka is van. Az egyik ok abban keresendő, hogy a tavaszpont az éggömbön, inerciaidőben mérve nem egyenletes sebességgel mozog. Ezért a csillagidő nem állandó gyorsasággal múlik. De ez az eltérés olyan csekély, hogy elhanyagolható.

Mivel a Föld forgási sebességében szezonális és szabálytalan ingadozások is vannak, a csillagidő az inerciaidőhöz viszonyítva nem múlik egyenletesen. Pontos számításoknál megkülönböztetünk valódi és közép csillagidőt. A valódi csillagidő megegyezik a valódi tavaszpont óraszögével, a közép csillagidő a közép tavaszpont óraszögével. A közép tavaszpont alatt azt a pontot értjük, amelynek mozgásából a nutációból (lásd a 5.1.4. paragrafusban) eredő periodikus tagokat kiküszöböltük. A közép csillagidő és a valódi csillagidő közötti különbséget *tavaszpont egyenletnek* nevezzük. Ennek számszerű értéke ritkán haladja meg az 1 másodpercet.

A csillagidő használata elsősorban a csillagászatban terjedt el, mert ennek segítségével lehet meghatározni egy ismert rektaszccenziójú csillag óraszögét, és ezáltal a távcsövet úgy beállítani, hogy az a csillag irányába mutasson. Csillagászati obszervatóriumokban szokás olyan órákat használni amelyek csillagidőben járnak; ezek a *csillagórák*.

A csillagidő a mindennapi élet követelményeit nem elégíti ki, mivel az emberek életritmusa nem a tavaszpont napi látszólagos mozgásához kapcsolódik.

### 3.2.2. A valódi szoláris idő

A mindennapi életben használatos időmérésre olyan rendszer szükséges, amelynek alapritmusa, az ember biológiai ritmusának megfelelően a Nap mozgásához igazodik.

A *valódi szoláris idő* ( $m_{\odot}$ ) a napkorong középpontjának óraszöge + 12 óra, azaz

$$m_{\odot} = t_{\odot} + 12^{\text{h}}. \quad (3.4)$$

A valódi szoláris idő egysége a *valódi szoláris nap*, ami a napkorong középpontjának két egymást követő delelése között eltelt időtartam.

Valódi szoláris időben a Nap (pontosan a napkorong középpontja) mindig 12<sup>h</sup>-kor delel. A valódi szoláris idő is helyi idő, mert a megfigyelő meridiánjától mérjük.

A napkorong középpontjára vonatkozóan is felírhatjuk a csillagidő tárgyalásánál bemutatott

$$s = t_{\odot} + \alpha_{\odot}$$

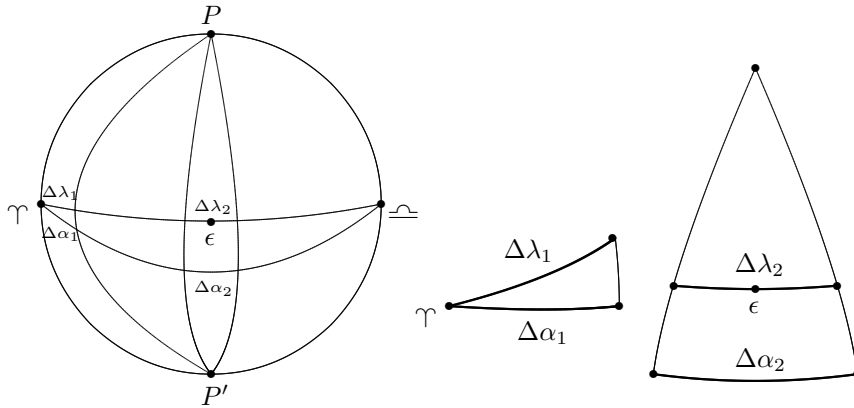
összefüggést, amely a (3.4) definícióval együttesen az

$$m_{\odot} = s - \alpha_{\odot} + 12^{\text{h}} \quad (3.5)$$

összefüggést eredményezi.

Így, bár a valódi szoláris idő kényelmes abból a szempontból, hogy a Nap mindig pontosan délben delel, mindennapi használata mégsem célszerű, mert (csillagidőben mérve) nem múlik egyenletesen. Az  $s$  csillagidőről már mondtuk, hogy apró egyenetlenségektől eltekintve egyenletesen múlik. Az, hogy az  $m_{\odot}$  valódi szoláris idő egyenletesen múlik-e vagy sem, azon áll vagy bukik, hogy a Nap rektaszcenziója egyenletesen változik-e. Sajnos az év folyamán a Nap rektaszcenziója nem fejezhető ki a csillagidő lineáris kifejezéseként, azaz nem változik egyenletesen. Ennek két fő oka van:

a) A Föld a Nap körül ellipszispályán kering. Kepler második törvényének megfelelően, amikor a Naphoz közelebb van gyorsabban, amikor a Naptól távolabb van lassabban mozog. Ennek következtében a Nap az ekliptikán az év folyamán nem egyenletes szögsebességgel megy körbe, azaz a Nap ekliptikai hosszúságának változásában egy 1 éves periódusú, (tehát nem lineáris) tag is kimutatható, ami befolyásolja a rektaszcenzió változását. (Perihéliumban a Nap szögsebessége  $61,2/\text{nap}$ , míg aféliumban  $57,2/\text{nap}$ .)



3.2. ábra. Ekliptikai ívek egyenlítői vetülete

b) Ha a Nap az ekliptikán egyenletes szögsebességgel menne is körbe az év folyamán, rektaszcenziója még abban az esetben sem változna egyenletesen, ugyanis míg a rektaszcenziót az egyenlítő mentén mérjük, addig a Nap évi látszólagos útját az ekliptikán járja be, s az ekliptika azonos hosszúságú íveinek egyenlítői vetületei nem egyenlő hosszúak. Ez könnyen belátható a következő megfontolások alapján. Tegyen meg a Nap az ekliptikán a tavasz-ponton való áthaladása után egy  $\Delta\lambda_1$  hosszúságú ívet, amely ív egyenlítői

vetületének hossza legyen  $\Delta\alpha_1$  (3.2. ábra). Ugyanakkora  $\Delta\lambda_2 = \Delta\lambda_1$  ekliptikai hosszúságkülönbséget fusson be a nyári szolsztícium környezetében is, és a megfelelő vetület hossza legyen  $\Delta\alpha_2$ . Geometriai megfontolások alapján következik, hogy a tavaszpont környékén a  $\Delta\lambda_1$  szakasznak megfelelő  $\Delta\alpha_1$  rektaszccenzióváltozásra igaz, hogy  $\Delta\alpha_1 < \Delta\lambda_1$ , míg a nyári szolsztícium pontjának környezetében való  $\Delta\alpha_2$  rektaszccenzióváltozásra viszont a  $\Delta\alpha_2 > \Delta\lambda_2$  összefüggés érvényes. Így módon a Nap ekliptikai mozgása során ugyanolyan nagyságú ekliptikai hosszúságváltozásoknak az egyenlítőn különböző  $\Delta\alpha$  rektaszccenzióváltozások felelnek meg:

$$\Delta\alpha_1 < \Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2 < \Delta\alpha_2.$$

Látjuk tehát, hogy a valódi szoláris idő nem múlik egyenletesen. Igen bonyolult olyan órákat készíteni, amelyek a valódi szoláris időt mutatják, ezért a valódi szoláris idő használata a mindennapi életben nem valósítható meg.

### 3.2.3. A közép szoláris idő

Mivel a Nap rektaszccenziója nem fejezhető ki a csillagidő lineáris kifejezéséként így a valódi szoláris idő csillagidőben mérve nem múlik egyenletesen. Ezért célszerű definiálni egy olyan fiktív égitestet, amelynek a rektaszccenziója csillagidőben egyenletesen változik és amely nem távolodik el a valódi Naptól.

*Fiktív Ekliptikai Középnappnak* nevezzük azt az égi pontot, amely egyenletes szögsebességgel megy körbe az ekliptikán, az ekliptikát ugyanannyi idő alatt futja be mint a valódi Nap, és a valódi Nappal a perihéliumpontban (napközelpontban, január 3. körül) találkozik. A Fiktív Ekliptikai Középnapp évente még egyszer, afélium idején újból találkozik a valódi Nappal (július 4. körül).

*Fiktív Egyenlítői Középnappnak (FEK)* azt a pontot nevezzük, amely egyenletes szögsebességgel megy körbe az égi egyenlítőn, az egyenlítő befutásához pontosan annyi időre van szüksége, mint a Fiktív Ekliptikai Középnappnak az ekliptika befutásához, és a Fiktív Ekliptikai Középnappal a tavaszpontban találkozik.

A Fiktív Egyenlítői Középnapp rektaszccenziója már egyenletesen változik azonban nem egyezik meg a valódi Nap rektaszccenziójával. A valódi Nap az év folyamán hol késik, hol siet a Fiktív Egyenlítői Középnaphoz képest.

A Fiktív Egyenlítői Középnapp helye az éggömbön természetesen nincsen megjelölve, ezért koordinátáit közvetlenül nem lehet mérni, csak számolni. A rektaszccenziójának kiszámítására S. Newcomb naptáblázatait használjuk,

amely szerint a Fiktív Egyenlítői Középnapi rektaszccenziója a következő közelítő formulával adható meg:

$$\alpha_u = 24\,110^s,548\,41 + 8\,640\,184^s,812\,866 \cdot T_u + 0^s,093\,104 \cdot T_u^2, \quad (3.6)$$

ahol  $T_u$  a 2000. jan. 1<sup>d</sup> 12<sup>h</sup> világidőtől eltelt Julián évszázadokat jelenti. Egy Julián évszázad — mint azt a 3.4.5. részben is fogjuk látni — 36 525 világidőben mért közép szoláris napot jelent.

Az alkalmazásokban Fiktív Egyenlítői Középnapi alatt azt az egyenlítőn tartózkodó fiktív pontot értjük, amelynek rektaszccenzióját a (3.6) formula adja meg.

Annak érdekében, hogy a valódi szoláris időnél ismertetett nehézségeket kiküszöböljék, bevezették a közép szoláris időt.

A Fiktív Egyenlítői Középnapi  $t_{FEK}$  óraszöge segítségével definiált

$$m = t_{FEK} + 12^h \quad (3.7)$$

menntiséget *közép szoláris idő*nek nevezzük.

A közép szoláris idő egyenletesen múlik, tehát választhatjuk az időszámításunk alapjául. Meg kell azonban jegyezni, hogy a közép szoláris idő is helyi idő, hiszen az óraszöget mindig a megfigyelő helyéhez tartozó meridiántól mérjük. Ez azt jelenti, hogy a közép szoláris idő a Föld különböző hosszúsági körei mentén egyazon időpillanatban más és más.

A közép szoláris idő alapegysége a *középnapi*, ami az az időtartam, amely a Fiktív Egyenlítői Középnapi két egymást követő delelése között eltelik. Törtérszei a középpóra, középperc és közép másodperc, a szokásos többszörösök szerint.

Nyilvánvaló, hogy a középnapiok hossza nem változik.

Praktikus okok miatt a közép szoláris időt a gyakorlatban másképp határozzák meg. Ha nem törekszünk 0,001-nél nagyobb pontosságú időmérésre, akkor az (3.7) kifejezéssel definiált eredeti közép szoláris idő, azonosnak vehető a (hivatalosan használt) közép szoláris idővel.

A közép szoláris idő bevezetésével elértük, hogy az így definiált idő egyenletesen múlik, van azonban egy hátránya is. A közép szoláris idő a Fiktív Egyenlítői Középnapi mozgásához igazodik és nem a valódi Naphoz. Így például, amikor a Fiktív Egyenlítői Középnapi delel, azaz a közép szoláris idő éppen 12<sup>h</sup>, akkor a valódi Nap delelés előtt vagy után van.

Az  $m_\odot$  valódi szoláris idő és az  $m$  közép szoláris idő

$$E = m_\odot - m \quad (3.8)$$

különbséget *időegyenlet*nek (vagy *időegyenlítés*nek) nevezzük (jele  $E$ ).

A valódi szoláris idő és a közép szoláris idő definíciójából következik (a valódi Nap ekliptikai hosszúságát  $\lambda_{\odot}$ -pal jelölve), hogy:

$$E = t_{\odot} - t = -(\alpha_{\odot} - \alpha_u) = -(\alpha_{\odot} - \lambda_{\odot} + \lambda_{\odot} - \alpha_u) = -(\alpha_{\odot} - \lambda_{\odot} + \lambda_{\odot} - L), \quad (3.9)$$

ahol  $L$  a Fiktív Ekliptikai Nap ekliptikai hosszúsága, amely értelemszerűen megegyezik a Fiktív Egyenlítői Középnapi  $\alpha_u$  rektaszcenziójával. A (3.9) képletben az  $\alpha_{\odot} - \lambda_{\odot}$  különbséget könnyen kiszámíthatjuk, hiszen az  $\alpha_{\odot}$  rektaszcenzió a  $\lambda_{\odot}$  ekliptikai hosszúság egyszerű vetülete az egyenlítőre. Ennek értéke ívmásodpercben mérve :

$$\alpha_{\odot} - \lambda_{\odot} = -206\,265 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\lambda_{\odot},$$

ahol  $\varepsilon$  az ekliptika és az egyenlítő által bezárt szög. Ha megelégszünk tizedperces pontossággal, akkor

$$\alpha_{\odot} - \lambda_{\odot} \approx -9^{\text{m}},5 \sin 2\alpha_u. \quad (3.10)$$

A  $\lambda_{\odot} - L$  kifejezést égi mechanikai úton számolhatjuk ki, figyelembe véve, hogy a perihéliumpont  $\lambda = 282^{\circ}$ -nál van. Így ismét 0,1 perces pontossággal:

$$\lambda_{\odot} - L = 7^{\text{m}},7 \sin (L - 282^{\circ}) = 7^{\text{m}},7 \sin (L + 78^{\circ}). \quad (3.11)$$

Így a használt 0,1 perces pontossággal az  $E$  időegyenletet a következőképpen írhatjuk fel:

$$E = -7^{\text{m}},7 \sin (L + 78^{\circ}) + 9,5 \sin 2L. \quad (3.12)$$

Az időegyenlítés értéke az év folyamán változik. Az  $E$  értéke pl. november 1. környékén  $16^{\text{m}}$  értéket vesz fel. Ez annyit jelent, hogy amikor (november 1-én) a közép szoláris idő éppen  $12^{\text{h}}$ , akkor a valódi Nap már a delelés után van 16 perccel.

Hozzávetőleges méréseknél az északi irányt egy függőlegesen felállított pálca vagy függőön árnyéka irányával jelöljük ki a valódi Nap delelésének időpontjában. A valódi Nap azonban a közép szoláris idő szerint nem pontosan 12 órakor delel. November elsején például a valódi Nap  $11^{\text{h}}\,44^{\text{m}}$ -kor delel közép szoláris időben. Ha tehát az északi irányt a pálca árnyékával akarjuk kijelölni akkor az árnyék november 1-én  $11^{\text{h}}\,44^{\text{m}}$  közép szoláris időkor mutat az északi irányba.

#### 3.2.4. A közép szoláris idő és a csillagidő közötti összefüggés

A közép szoláris idő és a csillagidő közötti összefüggés levezetéséhez induljunk ki a Fiktív Egyenlítői Középnapi is érvényes (3.2) összefüggésből, amely



szerint

$$s = \alpha_{FEK} + t_{FEK},$$

ahol  $s$  a csillagidőt,  $\alpha_{FEK}$  és  $t_{FEK}$  a Fiktív Egyenlítői Középnap rektasz-cenzióját és óraszögét jelöli. A (3.7) képlet szerint a közép szoláris idő

$$m = t_{FEK} + 12^h.$$

Ezek alapján a csillagidő felírható a következőképpen is:

$$s = \alpha_{FEK} + m - 12^h. \quad (3.13)$$

A Fiktív Egyenlítői Középnap egy év alatt körbemegegy az egyenlítőn, tehát rektasz-cenziója egy év alatt  $24^h$ -t változik. Egy középnap alatt a változása a  $24^h$ -nak annyiad része, ahány középnap van egy évben. Megfigyelések szerint egy *tropikus évben* — ami a Napnak a tavaszponton való két egymást követő áthaladása közötti időtartam — 365,242 20 középnap van. Így  $\alpha_{FEK}$ -nek az egy középnapra eső változása:

$$\Delta\alpha_{FEK} = \frac{24^h}{365,24220}. \quad (3.14)$$

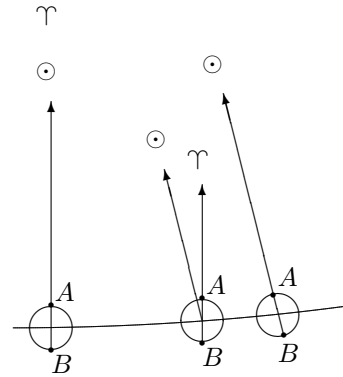
A közép szoláris idő egy középnap alatt nyilván  $24^h$ -t változik, tehát a csillagidő egy középnapra eső megváltozása:

$$\Delta s = \Delta m + \Delta\alpha_{FEK}. \quad (3.15)$$

Ebből látszik, hogy egy középnap alatt a csillagidő több mint  $24^h$ -t múlik. Egy csillagnap tehát rövidebb, mint egy középnap. Ezt a tényt a 3.3. ábra is szemlélteti.

Deleljen az  $AB$  földi meridiánon a Nap és egy csillag (esetleg a tavaszpont) az év valamely napján egyidőben. Egy nap alatt a Föld elmozdul Nap körüli pályáján. Ahhoz, hogy a csillag ismét deleljen, a Földnek  $360^\circ$ -ot kell elfordulnia, de ahhoz hogy a Napot a megfigyelő ismét delelni lássa valamivel többet. Mivel egy tropikus évben egygyel kevesebb a középnapok száma a csillagnapok számánál, a csillagnap és középnap közti többletforduláshoz szükséges idő a  $24^h$  középórának annyiad része, ahány középnap van egy évben, tehát:

$$\frac{24^h}{365,24220} = 3^m 56^s, 55 \text{ (középidő egységeiben).}$$



3.3. ábra. A csillagnap és középnap hosszának különbsége

Könnyen kiszámítható, hogy egy csillagnap (24 csillagóra) alatt a közép szoláris idő megváltozása:

$$\Delta m = 23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 4^{\text{s}}.$$

### 3.2.5. Időrendszerek és földrajzi hosszúság

A bevezetett időrendszerek: csillagidő ( $s$ ), valódi szoláris idő ( $m_{\odot}$ ) és közép szoláris idő ( $m$ ) a megfigyelő meridiánjától mért óraszögek segítségével értelmezett *helyi idők*. Mivel tetszőleges égitest két megfigyelő által azonos időpontban mért  $t$ , illetve  $t^*$  óraszögére a (2.4) összefüggés értelmében érvényes a

$$t - t^* = \lambda - \lambda^*$$

összefüggés, ez alkalmazható tetszőleges éggömbi pont óraszögére (tavaszpont, napkorong középpontja, Fiktív Egyenlítői Középnapi), s így a (2.1, 3.4, 3.7) összefüggések alapján azonnal következnek az alábbi összefüggések:

$$s - s^* = m_{\odot} - m_{\odot}^* = m - m^* = \lambda - \lambda^*. \quad (3.16)$$

Ha az egyik megfigyelési pont a greenwichi kezdő délkörön található ( $\lambda^* = \lambda_G = 0$ ), akkor

$$s = s_G + \lambda, \quad m_{\odot} = m_{\odot G} + \lambda, \quad m = m_G + \lambda. \quad (3.17)$$

A fenti összefüggések alapján levezethető a  $\lambda$  földrajzi hosszúságon mért valódi Nap  $t_{\odot}$  óraszögének függvényeként a greenwichi közép szoláris idő a megfigyelés pillanatára:

$$m_G \stackrel{(3.17)}{=} m - \lambda \stackrel{(3.8)}{=} m_{\odot} - E - \lambda \stackrel{(3.4)}{=} t_{\odot} + 12^{\text{h}} - E - \lambda,$$

tehát

$$m_G = t_{\odot} + 12^{\text{h}} - E - \lambda.$$

Csillagászati évkönyvekben megadják az év minden napjára a greenwichi megfigyelőre érvényes  $s_{G0}$  éjfél csillagidőt, azaz a tavaszpont óraszögét éjfélnél a greenwichi kezdő meridiánon. Ennek felhasználásával a  $\lambda$  földrajzi hosszúságon elhelyezkedő megfigyelő kiszámíthatja a saját éjfél csillagidejét az

$$s_0 = s_{G0} - 9^{\text{s}}856 \cdot \lambda$$

összefüggés segítségével. Itt a  $\lambda$  földrajzi hosszúság órákban kifejezett értéke kerül behelyettesítésre, ugyanis a csillagidő pontosan  $9^{\text{s}}856$ -mal előzi meg óránként a középidejét (1 középórának megfelel 1 csillagóra +  $9^{\text{s}}856$  csillagmásodperc).

### 3.3. Világidő, zónaidők, hivatalos idő

#### 3.3.1. A világidő

Mint már láttuk a közép szoláris idő helyi idő, tehát függ az észlelő helyének földrajzi hosszúságától. A közép szoláris időt sem használhatjuk mindennapi életünkben, mert ugyanazon időpillanatban ennek értéke például Kolozsváron és Brassóban különbözik egymástól. Képzeljük el milyen bonyodalmakat okozna ha Kolozsvárról Brassóba utazva minden lépésnél igazítani kellene az óránkat. Annak érdekében, hogy az ilyen és ehhez hasonló nehézségeket elkerüljék definiálták a világidőt.

Az *UT* (Universal Time) *világidő* alatt a Fiktív Egyenlítői Középnaphnak a greenwichi meridiánon mért  $t$  óraszögét értjük, amelyhez praktikus okokból 12 órát hozzáadunk.

$$UT = (t_{FEK})_G + 12^h. \quad (3.18)$$

A Fiktív Egyenlítői Középnaph helye az éggömbön nincs megjelölve ezért az óraszöget közvetlenül nem tudjuk mérni, hanem csak számítani. Számításainknál a (3.6) formulát használjuk.

A Fiktív Egyenlítői Középnaphra is érvényes az (3.2) összefüggés, tehát  $S = \alpha_u + t_{FEK}$ , vagy (3.18) szerint

$$UT = S - \alpha_u + 12^h, \quad (3.19)$$

ahol  $S$ -el a greenwichi közép csillagidőt jelöltük.

A (3.19) összefüggés az *UT* világidő számszerű értékének kiszámítására hivatalosan elfogadott formula. A világidőt tehát a greenwichi  $S$  közép csillagidő mérésével és a Fiktív Egyenlítői Középnaph rektaszcenziójának kiszámításával kaphatjuk meg.

A világidő és csillagidő között szoros összefüggés van, a világidőt a csillagidő mérésével határozzuk meg. Tekintettel arra, hogy a csillagidő (a középcsillagidő is) a Föld forgásában mutatkozó szabálytalan változásokat is magában foglalja a világidő az inerciaidőhöz képest nem múlik egyenletesen. A világidőt tehát éppen úgy mint a csillagidőt, a Föld egy pontjának szögelfordulásával mérjük.

A világidő mérésének a (3.19) definíciója elvi problémákat is felvet. A Fiktív Egyenlítői Középnaph óraszögét világidőben mért egységek (Julián Évszázadok) függvényében adjuk meg. Tekintettel arra, hogy a világidő tartalmazza a Föld forgásából adódó rendellenességeket és a (3.6) formula sem tökéletesen pontos, a Fiktív Egyenlítői Középnaph az évszázadok folyamán eltávolodhat a valódi naptól. A különbség jelenleg még nem haladja meg

a  $0,1$ -ot, tehát a világidő definíciójának emiatti megváltoztatására még jó ideig nem kell gondolni.

A világidő meghatározása elvileg csak egy iterációs eljárás elvégzésével lehetséges. A világidő megméréséhez először meg kell mérni az  $S$  csillagidőt, majd a világidő függvényében ki kell számítanunk a Fiktív Egyenlítői Középnapi  $\alpha_u$  rektaszcenzióját. A (3.6) formulában levő  $T_u$  értékét csak közelítőleg, extrapolációval adhatjuk meg, például világidőben járó óra segítségével. A közelítő értékkel először  $\alpha_u$ -t kiszámítva, majd a (3.19) formulát felhasználva kaphatjuk meg az  $UT$  világidő közelítő értékét. A kapott  $UT$  értékkel  $T_u$ -t ismét meghatározva és az előbbi eljárást többször ismételve juthatunk el  $UT$  „pontos” értékéhez. Az iménti iterációs eljárásnak azonban csak elvi jelentősége van, mert a világidő nem pontos értékének használatából  $\alpha_u$  értékében adódó hiba általában elhanyagolhatóan kicsiny.

Attól függően, hogy a (3.19) formulában szereplő közép csillagidőt milyen meridiánra vonatkoztatva mérjük, a világidőnek több különböző időrendszerét különböztetjük meg. Ezeket rendre  $UT0$ -val,  $UT1$ -gyel és  $UT2$ -vel jelöljük.

Az  $UT0$  világidő az a világidő, amelyet a csillagok napi mozgásának közvetlen csillagászati megfigyeléséből kapunk, azaz az  $UT0$  világidő a Föld pillanatnyi pólusain áthaladó greenwichi meridiánra vonatkoztatott világidő.

Az  $UT1$  világidő a közép greenwichi meridiánra vonatkoztatott világidő. A közép greenwichi meridián a Föld közepes pólusain halad keresztül, tehát az  $UT1$  világidő értékéből a Föld pólusainak periódikus ingadozásaiból eredő hiba ki van küszöbölve.  $UT1 = UT0 + \Delta\lambda$ , ahol  $\Delta\lambda$  a földrajzi pólusok átlagától való kitérése.

Az  $UT2$  világidőt is a közép greenwichi meridiánra vonatkoztatjuk, de számszerű értékének kiszámításakor tekintetbe vesszük a Föld tengely körüli forgásában levő szezonális ingadozásokat.

$$UT2 = UT1 + \Delta T_s, \text{ ahol } \Delta T_s \text{ szezonális korrekció.}$$

Az  $UT0$ ,  $UT1$ ,  $UT2$  világidők közötti különbség sohasem haladja meg a  $0,05$ -öt. Ha ennél kisebb pontossággal adjuk meg a világidőt, akkor ezt egyszerűen  $UT$  -vel jelöljük.

A világidő tartalmazza a Föld forgásában mutatkozó, előre nem jelezhető egyenletlenségeket is. Ezért egy jövőbeni csillagászati esemény bekövetkezésének pontos időpontját világidőben előre nem lehet megadni. A csillagászati évkönyvekben egyes égitestek helyzetét mégis — praktikus okokból — világidőben adjuk meg. Ilyenkor úgynevezett előzetes ( $UT2$ ) világidőt használnak, amelynek értékét extrapolációval határozzák meg egy formula segítségével.

A világidő ismeretében, megadhatjuk a közép szoláris idő egy másik de-

finicióját:

Az  $\lambda$  földrajzi hosszúságon tartózkodó megfigyelő  $m$  közép szoláris ideje a következő formulával adható meg:

$$m = UT + \lambda, \quad (3.20)$$

ahol  $UT$  világidő és a  $\lambda$  előjelét pozitívnak vesszük, ha a megfigyelő Greenwich-től keletre, negatívnak ha nyugatra helyezkedik el.

Mint már említettük a közép szoláris idő helyi idő, mert az ezt definiáló (3.20) formulában szerepel a megfigyelési hely  $\lambda$  földrajzi hosszúsága is. Így a közép szoláris idő ugyanazon időpontban különböző földrajzi hosszúságú helyek mentén más és más.

A középnap alatt értjük azt az időtartamot ami  $UT2$  időben ugyanazon napon  $0^h$  és  $24^h$  óra között eltelik.

A középnap és a csillagnap közötti összefüggést a (3.19) formula alapján számíthatjuk ki. Változzék meg az  $UT$  világidő  $24^h$ -val, azaz teljen el pontosan egy középnap. Ez alatt az idő alatt a közép csillagidő változzék  $\Delta s$ -sel. Hogy  $\Delta s$ -set kiszámítsuk meg kell határozzuk, hogy a (3.19) képletben szereplő  $\alpha_u$  értéke 1 középnap alatt mennyit változik. A (3.6) képletből nyerjük, hogy:

$$\Delta\alpha_u = 8\,640\,184^s,813 * \Delta T_u + 0^s,093\,1 \cdot 2 \cdot T_u \cdot \Delta T_u. \quad (3.21)$$

$\Delta T_u$  helyébe most helyettesíthetünk 1 középnapot Julián Évszázadokban:

$$\Delta T_u = \frac{1}{36\,525}.$$

Ekkor azt nyerjük, hogy:

$$\Delta\alpha_u = 236,555\,367\,9 + 0,000\,005\,098 \cdot T_u. \quad (3.22)$$

A (3.22) képletben szereplő második tagot ( $T_u$  kisebb mint 1) el lehet hanyagolni. Így (3.19)-ből kapjuk, hogy a középcsillagidő egy középnap alatti megváltozása:

$$\Delta S = 24^h + 236^s,555\,36 = 24^h\,3^m\,56^s,555\,36.$$

### 3.3.2. A pontos idő csillagászati meghatározása

A nap mindenképpen a Föld tengelyforgása adta időköz. Ennek legtisztább visszatükröződése a csillagok látszólagos napi útjának ideje, a csillagnap. Ha

a csillagok segítségével meghatároztuk a csillagidőt, ebből bármikor könnyen kiszámítható a világidő.

A pozíciós csillagászat legfontosabb műszere a meridiánkör vagy a pasz-százsműszer. Ezeknek a műszereknek pontosan vízszintes és kelet-nyugat irányú forgástengelyük van, az erre merőleges távcső tehát mindig pontosan a meridián síkjában mozog. Ezekkel tehát az égitesteket akkor láthatjuk, midőn azok alsó vagy felső kulminációs pontjukban — ez utóbbi esetben delelési pontjukban tartózkodnak. Minden megfigyelőhely csillagideje azonos az akkor delelő csillag egyik koordinátájával, a rektaszcenzióval. Minthogy ez utóbbit a csillagászati évkönyvek minden fényesebb csillagra, az év minden napjára megadják, a csillag rektaszcenziója ismeretében a delelése időpillanatát megfigyelve megkapjuk a csillagidőt.

A meridiánműszerek látómezejében általában több párhuzamos (függőleges) fonál képe látható, vagyis egy csillag delelése előtt és után is több szálát metsz — a középső fő szálon kívül. Ezeket mind megfigyelve és az átmenet-időket mérve, egy csillagra vonatkozva a delelés idejének meghatározási pontossága fokozható. A megfigyelések pontosságát ilyen esetben a megfigyelő személye is befolyásolja. Egy esemény időpontját ugyanis minden megfigyelő általában más és más (rövid) idővel az esemény beállta után tudja tudtul adni (például „top” hangjelzéssel vagy elektromos érintkező lenyomásával). Ez a megfigyelőre jellemző eltérés az úgynevezett személyi hiba, amelyet az ilyen természetű megfigyeléseknél mindenkor figyelembe kell venni. Ez a személyi hiba azonban más körülményektől, például pillanatnyi idegállapottól, egészségi állapotától erősen függ. Ezt a hibaforrást jelentősen csökkenti az úgynevezett személytelen mikrométer. Ennek lényege egy mikrométercsavarral vízszintes irányban a látómezőben egy üveglemezen elcsúsztatható szál vagy karc. Amint a delelés előtt álló csillag feltűnik a meridiántávcső látómezejében, a megfigyelő ráállítja a fonalat, és ahogy halad a csillag gondosan követi a mikrométercsavarral. Amikor az egyenletes sebességgel mozgatott szál fedésbe kerül a középső fő szállal, vagyis amelyik pillanatban a csillag delel, egy elektromos kontaktust ad, amely egy időjeleket is tartalmazó regisztráló szalagon jól kimérhető helyzetű jelet rajzol.

Igen sok ilyen időadat összegyűjtése és összevetése meglehetősen pontos időadatot ad. A csillagászati intézetekben és időközpontokban járó precíz órák által mutatott időt összehasonlítják, és az így ellenőrzött időt rádiójelekkel szétsugározzák a megfigyelőállomásokhoz.

A pontosságot fokozni lehet az úgynevezett Danjon-féle prizmás teodolit, illetve ennek tökéletesített változata a fényképező zenittávcső segítségével. Ennek segítségével a csillagok delelését a zeniten lehet megfigyelni és fényképezni, ahol legkevésbé zavaró a légkör hatása.

Ezekkel az eljárásokkal mérve a csillagok járásában különös egyenetlenség volt tapasztalható: sok ezer pontos óra télen és tavasszal siet, nyáron és ősszel késik. Az eltérés csak néhány századmásodpercet tesz ki. Arra lehetne gondolni, hogy az időközpontok ingaórái valamilyen módon mégiscsak változtatják járásukat az évszakok szerint.

Amint az atom és molekula órákat is bevonták a pontosidő szolgálatba, kiderült, hogy ezek még határozottabban mutatják ezt az évszakonkénti változást. Ezért csak egyetlen magyarázat van a különös jelenségre: a Föld forgása változik oly módon, hogy a Föld május végétől október elsejéig lassabban, október és május között viszont gyorsabban forog. Az előző időszakban a napok hosszabbak, az utóbbiban viszont rövidebbek az átlagosnál. A céziumórák által mutatott, illetve a csillagok deleléséből adódó idő között a legnagyobb eltérés maximálisan  $0,04$ . Ez pontosan kimutatható, hiszen a csillagászati időmérés pontossága eléri a  $0,01$  másodpercet.

Az évszakai földforgás egyenetlenségei bizonyára meteorológiai és geofizikai okokra vezethetők vissza. Ha nagyobb légtömegek vándorolnak a sarkoktól az egyenlítő felé, így a forgás sebessége lassul. Ugyanez vonatkozik a sarkvidéki eredetű jéghegyek egyenlítő felé úszására. Az egyenlítő vidékéről származó levegőnedvesség lecsapódása a sarkvidékeken viszont növeli a Föld forgósebességét. Ugyanilyen alkalmasszerű, váratlan változásokat okoznak a Föld belsejében lejátszódó tömegátrendeződések.

### 3.3.3. Az efemerisz idő

Az elmondottakból következik, hogy a Föld forgása semmiképpen nem egyenletes. Így a csillagnap — vagy ennek  $1/86\,400$ -ad része, a csillagidő másodperc épp úgy nem tekinthető változatlan etalonnak, mint a középnap vagy a középido másodperc. Más időegységet kell választani.

1956-ban új időetalont választottak. Nyilvánvaló volt ugyanis, hogy a Föld keringési ideje lényegesen megbízhatóbb időegység. Bár hosszabb idő alatt egy kissé ez is változik, de ezek a változások számíthatók. Így 1956 októberében azt a tropikus évet választották alapul amely az 1900-as év elejéhez tartozik. Ez a pontosan megállapítható időtartam  $365,242\,198\,762$  középnap, illetve  $31\,556\,925,974\,74$  középido másodperc. Ez a másodperc lett az új, megbízható időetalon. 1960 óta a Nap, a Hold és a bolygók pozícióit nem világidőben, hanem efemerisz időben adják meg a táblázatok. Az efemerisz idő az égi mechanika törvényeire épül.

Az *efemerisz idő* egysége az az időtartam, amely a Nap két egymást követő tavaszpontáthaladása között eltelt az 1900-as év elejétől a végéig. Az 1900-as év  $1/31\,556\,925,974\,74$ -ed része az *efemerisz másodperc*.

Az efemerisz idő gyakorlati meghatározása azt a célt igyekszik kielégíteni, hogy a naprendszerbeli gravitációs mozgások megfigyelésével egy kezdeti időponttól kiindulva efemerisz másodpercben adja meg az egyes időpontokat. Az efemerisz időt 1900. január 0-án 12<sup>h</sup> világidőtől mérjük, azaz attól az időponttól, amikor az 1900-as év elején a Fiktív Egyenlítői Középnap hosszúsága pontosan

$$\lambda = 279^\circ 41' 48''.04$$

volt.

Az  $ET$  efemerisz idő számszerű értékét a következő összefüggéssel határozzuk meg:

$$ET = UT2 + \Delta T, \quad (3.23)$$

ahol  $\Delta T$  kiszámítására az alábbi összefüggést használják:

$$\Delta T = 24^s.349 + 72^d.318 T + 29^d.950 T^2 + 1,821\,44 B'', \quad (3.24)$$

ahol  $T$  értéke az 1900. január 0, 12<sup>h</sup> világidőtől eltelt idő Julián évszázadokban és  $B''$  a Hold ekliptikai hosszúságának fluktuációja, másodpercben mérve. A  $B''$  mérésével lehet kikorigálni a Föld forgásában mutatkozó rendellenességeket.

A csillagászati évkönyvekben a fontosabb csillagászati események bekövetkezésének időpontját a Nemzetközi Csillagászati Unió (IAU) 1952. évi határozata értelmében 1960-tól 1983-ig efemerisz időben adták meg.

### 3.3.4. Az atomidő

Korábban már utaltunk arra, hogy 1956-ban az efemerisz másodpercet választották időetalonnak. Ez az 1900-as évhez tartozó tropikus év megadott hányada, s mint ilyen, igen pontosan definiálható időtartam. Azonban az etalonnak rekonstruálhatónak is kell lennie, már pedig az 1900-as tropikus év csak egyszer volt, és soha ugyanúgy meg nem ismétlődött. Ezért 1969 óta nem a megadott definíciót, hanem ennek a cézium atom rezgéseivel kifejezett alakját használják.

A Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatal XIII. Kongresszusán 1967-ben általánosan elfogadta az atomidő bevezetését, amelyet aztán az SI-mértékrendszer is átvett. Ezt az tette lehetővé, hogy a 60-as években nagy pontossággal működő atomórákat sikerült előállítani. Az atomóra úgy működik, hogy egy kvarcórát atomi rezonátorral kötnek össze és a kvarckristály rezgésének frekvenciáját úgy szabályozzák, hogy az megegyezzen az atomi rezonátor megfelelően leosztott frekvenciájával.



Az *atommásodperc* definíciója a következő: A cézium-133-izotóp ( $^{133}\text{Cs}$ )  $^2\text{S}$  állapotának ( $F = 4, M = 0$ ) és ( $F = 3, M = 0$ ) hiperfinom állapota közötti elektronátmenetkor keletkező elektromágneses sugárzás egy periódusának 9 129 631 770-szerese. Az *atomidő* (AT vagy ATI) az 1918. jan. 0-án 0<sup>h</sup> UT2 időtől mért atommásodpercek, vagy ezek többszöröseinek számát adja meg. Az atomidőt nagy pontosságú atomórák láncolatával mérik, nemzetközi megállapodás alapján.

Az atomidő és efemerisz idő közötti különbség :

$$ET - AT = 32^s,184. \quad (3.25)$$

Mérésekkel az efemerisz idő és az atomidő között szekuláris (tehát az időtől függő) eltérést mind ez ideig nem sikerült kimutatni. Mindez azonban nem jelenti azt, hogy az előbbi két időrendszer elvileg ugyanazt az időt mutatja, hiszen ha például P. A. M. Dirac nyomán feltesszük, hogy a gravitációs állandó időben változik, akkor az efemerisz időnek el kell tolódnia az atomidőtől. Az efemerisz idő és az atomidő egymáshoz képesti évi eltolódása kisebb mint  $10^{-12}$ . A két időrendszer ilyen nagy pontosságú egybeesése (az elvi konzekvenciákon kívül) azt is jelenti, hogy gyakorlati feladatok esetében a csillagászatban hivatalosan használt efemerisz idő helyett a (3.25) formula felhasználásával az atomidő is jól használható. Ennek megfelelően az atomidő és a világidő közötti különbség megadására a csillagászati évkönyvekben a

$$\Delta T(A) = AT + 32^s,18 - UT1 \quad (3.26)$$

formulát szokták megadni.

Tekintettel az efemerisz idő és az atomidő közötti különbség állandóságára, 1984 január 1-től a csillagászatban hivatalosan használt idő a *dinamikus idő* (*TDT*), amelynek definíciója a következő:

$$TDT = AT + 32^s,184.$$

A *TDT* idő gyakorlatilag megegyezik az efemerisz idővel.

### 3.3.5. A koordinált világidő

Mivel a világidő tartalmazza a Föld forgásaiban mutatkozó rendellenességeket, ezért ugyanolyan hosszúságú időtartamok világidőben mérve különböző időpontokban nem lesznek azonosak. Ezen, mint láttuk, úgy segíthetünk, ha atomidőt (vagy dinamikus időt) használunk. Ennek hátránya, hogy az atomidő „nem jár együtt” a világidővel, ezért az idők folyamán elcsúszhat a világidőtől azaz a Nap járásától. Ennek kiküszöbölésére vezették be az *UTC*

*koordinált világidőt.* Az *UTC* koordinált világidő 1972. január 1-én  $0^h 0^m 10^s$  atomidőtől kezdve atomidőegységekben méri az időt. Így 1972 január 1-én

$$AT - UTC = 10^s \quad (3.27)$$

volt. Ezenkívül valahányszor az *UTC* koordinált világidő az *UT1* világidőtől  $0,7$ -nél nagyobb értékkel eltér, az *UTC* időben  $1^s$ -es korrekciót hajtanak végre, általában december 31 és január 1 között. A korrekciót úgy végzik, hogy például december 31-én  $23^h 59^m 58^s$  után közvetlenül a január 1.  $0^h 0^m 0^s$  következik. Az *AT* és az *UTC* idő közötti különbséget  $\Delta AT$ -vel jelöljük. A  $\Delta AT$  értékét és a (3.25) figyelembe vételével a  $\Delta ET = ET - UTC = AT + 32^s,18 - UTC$  különbségeket táblázatokban adják meg.

A táblázat segítségével bármilyen múltbeli időpontra kiszámíthatjuk az *UTC* koordinált világidő ismeretében az *AT* atomidőt, s így lehetővé válik az *UTC* időben mért időintervallumok hosszának összehasonlítása az inerciaidőt jelenleg legjobban megközelítő időrendszerben, az atomidőben. Az *UTC* idő és az *UT* világidő közötti különbségeket a csillagászati évkönyvekben találhatjuk meg.

A jelenleg nemzetközi megegyezéssel elfogadott időrendszer a koordinált világidő. A pontos időt sugárzó rádióadók is a koordinált világidőt adják meg. Ha egy csillagászati esemény időpontját efemerisz időben kívánjuk megadni, akkor az *UTC* idő ismertetésében a  $\Delta ET$  pillanatnyi értékének figyelembevételével számíthatjuk ki az efemerisz időt.

### 3.3.6. A zónaidő

Az *UTC* koordinált világidő a világidőtől  $0,7$ -nél kisebb értékkel tér el. Az *UT* világidő pedig a Fiktív Egyenlítői Középnapi óraszöge  $+12^h$ , a greenwichi meridiánra vonatkoztatva. Greenwichben tehát a valódi Nap közel  $12^h$ -kor delel és közel  $0^h$ -kor van alsó kulminációban. Az *UTC* koordinált világidő általános használata amiatt nem célszerű, mert nehezen lehet hozzászokni egy olyan időszámítás használatához, amelyben van ahol pl. „éjfél körül delel a Nap”. E hiányosságot természetesen úgy is fel lehetne oldani, ha mindenütt a helyi közép szoláris időt használnánk. Ez utóbbi viszont azért kellemtelen, mert akkor minden hosszúsági körre más időszámítás volna érvényes egy országon belül is, ami például a vasúti menetrend készítését igencsak megnehezítené.

Ezért a Föld felszínét  $15^\circ$ -os szélességű szeletekre osztották, úgy, hogy  $-7,5^\circ$  és  $+7,5^\circ$  között van a 0. zóna,  $7,5^\circ$  és  $22,5^\circ$  között az első keleti zóna,  $-7,5^\circ$  és  $-22,5^\circ$  között az első nyugati zóna. Így a Föld felszínét összesen 24 zónára osztották, úgy, hogy a 0. zónán kívül van 11 keleti és 11 nyugati

zóna, a  $-172,5$  és  $+172,5$  közötti zónát akár keletinek akár nyugatinak is lehet venni. A zónahatárok nem pontosan követik a hosszúsági köröket, hanem igazodnak az országhatárokhöz.

Az egyes zónákon belül *zónaidőt* használnak:

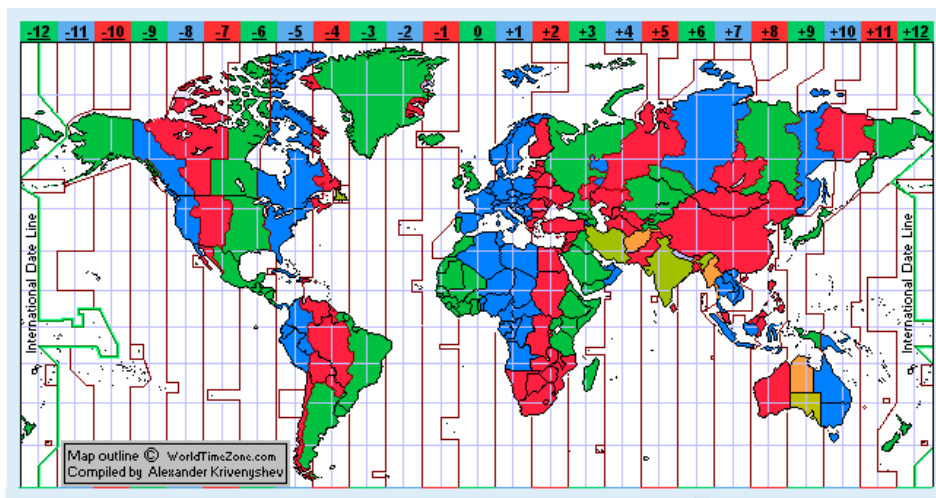
$$Z = UTC \pm k^h \quad (3.28)$$

ahol  $k$  a zóna számát jelentő természetes szám. Az előjel pozitív, ha a zóna keleti, negatív, ha nyugati.

Románia a második keleti időzónában van, tehát hazánkban a zónaidő:

$$Z = UTC + 2^h.$$

A zónaidő természetesen csak a zóna középvonalánál egyezik meg a közép szoláris idővel. Amikor egy zóna határt átlépjük, akkor óránkat egy órával előre vagy hátra kell állítanunk, attól függően, hogy nyugatról keleti vagy keletről nyugati irányba lépjük át a zónahatárt.



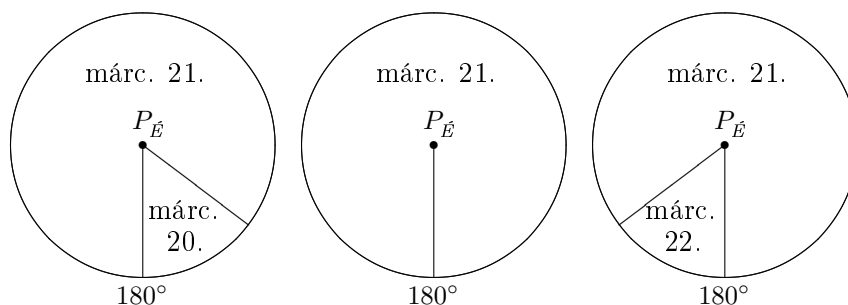
3.4. ábra. Az időzónák

Egy-egy államban gyakorlati okokból, például energiatakarékosság, a zónaidőt rendeletekkel (dekrétumokkal) egy vagy két órával megváltoztathatják. Ez a *dekrétális idő*. Példa lehet erre a *nyári időszámítás*, amit hazánkban is használunk minden évben a március–október időszakban. Vagy a volt Szovjetunió európai részén például egységesen a moszkvai zónaidőt használják függetlenül attól, hogy itt több zónahatár is keresztülhalad.

Végezzünk most el egy érdekes gondolkísérletet. Szálljunk fel a  $0^\circ$ -os hosszúsági körnél (pl. Londonban) egy olyan repülőgépre, amely egy óra alatt éppen  $15^\circ$ -nak megfelelő távolságot tesz meg. A repülőgép induljon el kedd déli  $12^h$ -kor nyugati irányba. A  $7,5^\circ$ -os nyugati hosszúsági kört  $12^h 30$  perckor érjük el. Itt mivel áthaladtunk egy zónahatáron óránkat egy órával vissza kell állítanunk, tehát itt az óra  $11^h 30^m$ -et mutat. A következő zónahatár elérésekor ( $22,5^\circ$ ) az óránk ismét  $12^h 30^m$ -et mutat, de itt ismét egy órával vissza kell állítsuk, vagyis az óra megint  $11^h 30^m$ -et fog mutatni. A Föld körberepülése folyamán az óránk  $11^h 30^m$ -et és  $12^h 30^m$ -et közötti időket mutat, és amikor leszállunk Londonban a mi időszámításunk szerint kedd  $12^h$  van holott a londoni órák szerda  $12^h$ -t mutatnak. Könnyen látható, hogy ha nyugat-keleti irányban repülnénk körbe egy ugyanilyen repülőgéppel a Földet, akkor a leszálláskor szerda helyett már csütörtök  $12^h$  volna a repülőgép órái szerint. Ha tehát keletről nyugati irányba utazzuk körül a Földet, akkor egy napot „nyerünk”, ha pedig nyugatról keletre haladunk, akkor egy napot „veszítünk”. Ezt az érdekes jelenséget a Föld első körülhajózoí, a Magellán-féle expedíció tagjai is tapasztalták. Azért hogy ezt a zavaró körülményt kiküszöböljék, bevezették a *dátumválasztó vonalat*, amely közelítőleg a  $180$  fokos hosszúsági kör mentén húzódik. Ha ezt a vonalat keletről nyugati irányba lépjük át, akkor a naptárt egy nappal előre, ha pedig nyugatról keleti irányban, akkor egy nappal vissza kell lapozni. Ha pl. keleti irányba haladva a dátumválasztó vonalat hétfő hajnalban egy órakor lépjük át, akkor a másik oldalon még vasárnap egy óra van, tehát egymásután két vasárnapi pihenőnapunk van. Ez az álló dátumválasztó vonal, lefutását nemzetközi megállapodással határozták meg, úgy hogy lakott településen ne haladjon keresztül.

Az álló dátumválasztó vonal mellett létezik egy *mozgó dátumválasztó vonal* is, amely mindig ott húzódik, ahol éppen  $0^h$  van. Ha zónaidőben számolunk akkor a mozgó dátumválasztó vonal mindig valamelyik zónahatáron helyezkedik el. Ilyen módon (zónaidőben) a Föld felszínén mindig két szomszédos dátum fordul elő (3.5. ábra)

Érdekességképpen, ha nem zónaidőben, hanem közép szoláris időben számolunk, akkor abban az esetben amikor a mozgó dátumválasztó vonal átszeli az álló dátumválasztó vonalat, rövid időre egyszerre három dátum is előfordul a Föld felszínén.



3.5. ábra. A mozgó és az álló dátumválasztó vonal kölcsönös helyzete

### 3.3.7. Az időszolgálat

Az *UTC* koordinált világidő és az ebből származó zónaidő pontos értékének meghatározása, mint láttuk, bonyolult feladat és ezért csak kevés helyen végezhető el. Ezért az *UTC* idő mindenkori értéke bizonyos központi rádióadók, illetve televíziós állomások adásának vétele útján rekonstruálható. Az időjeleket sugárzó rádióadóknak több típusát különböztetjük meg.

1. Az adó  $0,1$  hosszúságú jeleket ad úgy, hogy minden egyes jel kezdete egybeesik az *UTC* koordinált világidő egy egész másodpercével. Az egész percek vagy kihagyással vagy jelduplázással jelzik.
2. Az adó a perc 60 másodperce alatt 61 jelet sugároz. Az óra járását ezen jelek segítségével a noniusz elv alapján úgy állapítjuk meg, hogy figyeljük, mikor esik egybe a rádiójel kezdete a vizsgálandó óra egész másodpercével.
3. Az adó öt (vagy hat) jelet sugároz, melyek kezdete egy egész óra előtti (55.), 56., 57., 58., 59. és 60 másodperccel esik egybe. Ilyen időjelet sugároz pl. a Magyar Rádió is.

Az előbbi időjelek főképpen arra alkalmasak, hogy saját óránk járását velük megállapítsuk. Újabban olyan rádióadók is működésbe léptek, amelyek segítségével közvetlenül vezérelhető saját atomóránk, így elérhető, hogy helyi óránk a központi atomóra pontosságával járjon. Ehhez ismernünk kell az adóállomás távolságát és a rádióhullám terjedési viszonyait, hiszen a hullámok terjedése miatti időkülönbségeket is tekintetbe kell vennünk. Ilyen modern időjeleket sugárzó rádióadó működik például a Németországban levő Meinfilingben. Az adó vevőjele  $2 \cdot 10^{-13}$  relatív pontossággal stabilizált alaphérfkvenciájának amplitudóját a másodpercek kezdetekor  $1/4$ -ére csökkentik.

Ez azzal az előnnyel jár, hogy nem marad ki a sugárzás és így a stabilizált frekvenciával a saját óránk a másodpercjel alatt is vezérelhető. A percek kezdetét az előző (59.) másodperc jelzésének kihagyásával jelzik. A másodpercek kezdetét jelző amplitudócsökkenés időtartama 0,1 és 0,2 másodperc lehet. A 0,1 másodperces csökkenés a kettes számrendszerbeli 0-nak, a 0,2 másodperces pedig az 1-es számjegynek felel meg. Így az adó minden egyes percben egy kettes számrendszerbeli számot is sugároz. Ebből a számból kiolvasható az év, a hónap, a nap, a hét napja, az óra és a perc, továbbá az  $UT - UTC$  különbség aktuális értéke is.

Az utóbbi években a televízióadásokat is felhasználják pontos időjelek sugárzására. Ez kétféleképpen lehetséges.

Az első mód az, hogy óránk járását egy televízióadó sorszinkronjelének időpontja és a saját óránk másodpercjele közötti különbségével mérjük. Ugyanezt a különbséget mérik egy etalonóra esetében is. A két órajárás közötti különbséget véve kiszámítható a saját óránk járása a központi atomórához képest.

A televízió felhasználásának másik módszere az, amikor az adás képszinkron jeleit az atomóra megfelelően leosztott frekvenciájával vezérlik. Ebben az esetben elvileg egy televíziókészülék játszhatja a pontos óra szerepét. Természetesen mindkét módszer esetében tekintetbe kell venni azt az időkülönbséget, amelyet a televíziójel az adó és a vevő között befut.

### 3.4. Naptárkészítés

#### 3.4.1. A naptárkészítés alapproblémája, naptártípusok

Az idő múlásának érzékelésére és mérésére az emberiség ismétlődő jelenségek ritmusát (periódusát) használja ősidők óta. Hosszabb időtartamok mérésére célszerű időközöket kínálnak egyes csillagászati vonatkozású természeti jelenségek, mint:

- a sötétség és világosság életritmust megszabó periódusa, a nappalok és éjszakák váltakozása;
- a Hold feltűnő és könnyen megfigyelhető látszólagos alakváltozásai, s ezáltal világítóképességének változása, a holdfázisok;
- az évszakok, a növényvilág hosszabb megújulási ritmusa, ami a Nap égi útjának ismétlődő szabályosságát követi. Azt a ciklust követi a Nap delelési magasságának váltakozása, a napfordulók ciklusa, a fehér éjszakák megjelenése nagy földrajzi szélességeken;

- a bolygók mozgásához kapcsolható ciklusok, fogyatkozások, együttállások, ...

Az időben való tájékozódás problémája, a naptárkészítés a csillagászat egyik hagyományos *alappeladata* volt. Az évszázadok során nagy mértékben ösztönözve a csillagászat fejlődését. Különböző időbeni támpontok, látványos jelenségek (pl. fogyatkozások) meghatározása, pontos előrejelzése igen fontos volt.

Az emberi életritmus szempontjából legfontosabb a nappalok és éjszakák váltakozása által meghatározott ciklus, amelynek periódusa, egysége a nap. Ez, mint most már lassan 400 éve tudjuk, a Föld tengelyforgási periódusával egyezik meg.

A legfontosabb hosszabb időtartamú periódusok:

- a holdciklus (holdhónap) = 29,530 5879 nap;
- napév (tropikus év) = 365,242 198 762 nap.

Ezeket kívül további ciklusok sora említhető, amelyek jelentősége az ember időbeosztása szempontjából nyilván nem ugyanakkora. Ilyenek például:

- Vénusz-ciklus = 584 nap,
- Jupiter-ciklus = 11,9 év,
- Szíriusz-ciklus = 1460 év.

Ezekből kellett ősainknak megalkotniuk az időmérés rendszerét. Attól függően, hogy naptárkészítésre milyen ciklusokat választunk több lehetőség kínálkozik, s ennek megfelelően különböző kultúrák különböző naptárakat használtak és használnak napjainkig. A maja időszámításban meghatározó volt a Vénusz bolygó, Indiában és Kínában a Jupiter, míg a Nílus parti Egyiptomban a Szíriusz.

Ezen naptárak összeállításának alapproblémája, hogy a napév, illetve holdhónap nem összemérhetők, azaz egymásnak nem egész számú többszöröse, ugyanis egy napévben mintegy 12,39 holdhónap van ( $365,25 : 29,5 = 12,39$ ). Így a naptárkészítés feladata egyáltalán nem volt egyszerű, és tökéletes megoldása nem is lehetséges. Később egy negyedik, ezúttal mesterséges időkör is kialakult és szerepet kapott az időbeosztás rendszerében: a hét, és még bonyolultabbá tette azt, mivel a hét sincs meg egész számszor sem a holdhónapban (4,2187), sem a napévben (52,1774). Bevezetése az ókori babiloniaiaktól ered, akik a hét bolyongó égitestről nevezték el a napokat, és ezeket az égitesteket a hét különböző napjain felváltva imádták. Az ókorból ismert, az állócsillagok közt vándorló égitestek a következők voltak (a

nekik szentelt napok sorrendjében): Nap, Hold, Mars, Merkúr, Jupiter, Vénusz és Szaturnusz. A hét napjainak az égitestekről való elnevezése mind a mai napig fellelhető az egyes európai nyelvekben, mint pl. a románban (luni (Luna), marți (Marte), ...), angolban, németben, franciában, olaszban, vagy a latinban is.

Az első naptárakban fontos szerepet kapott a *holdhónap*, melynek kezdetét általában arra a napra tették, amelyen első ízben látszott a vékony holdsarló napnyugta után. Így a holdhónapok hosszát hol 29, hol 30 naposnak jelölték.

Bizonyára 12 ilyen holdhónapot vehettek egy évnek. 12 holdhónap csak körülbelül 354 napot tesz ki, vagyis ilyen *holdévekkel* számolva a naptár éve gyorsan elcsúszott az évszakokhoz, a természet évéhez képest. Nyilván ezért hosszabították meg a régiek az évet, és egy ideig a kerek 360 napos évet használták. Ennek is fennmaradt a nyoma a fokbeosztás területén. De egy-két évtizeden belül ennek az évhossznak a hibája is észrevehető.

Az ókori kultúrnépek útja itt szétágazott. A csillagászati megfigyelésekkel és naptárkérdéssel foglalkozó papság rájött arra, hogy a három nagy természetes naptáralkotó időkör közül egy naptáron belül alapvetően csak kettőt lehet figyelembevenni. Tehát ha megmarad a holdhónap, nem maradhat meg a napév, vagy annak használata esetén el kell felejteni a holdhónapot.

A tiszta holdév a mohamedán naptárban valósult meg. Ennek egy éve 12 holdhónapból áll, a hónapok hossza felváltva 29 illetve 30 nap. Az utolsó hónap azonban 30 holdéven belül csak 19 esetben 29 napos, egyébként 30 napot számlál. Így a mohamedán naptár összhangban van a holdváltozásokkal, hibája csupán 2500 év alatt nő fel egy teljes napra. Viszont ez a holdév rövidebb az évszakok événél, és újéve évről évre 11–12 nappal eltolódik az évszakokhoz és a mi naptárunkhoz képest: 34 mohamedán év ad ki 33 napévet.

Az öntözéses földművelő kultúrában élő ókori mezopotámiai népeknek ragaszkodniuk kellett a napévhez — csillagászati nevén tropikus évhez — viszont nem akarták elejteni a szubtropikus éghajlatú, jobbára felhőtlen egű hazájukból könnyen figyelemmel kísérhető holdváltozások adta holdhónapokat sem. Ezért már a Kr. e. 18–17 században élt óbabiloni király, Hammurabi rendeletben adott utasítást arra, hogy ha a holdhónapokkal való időszámítás észrevehetően elcsúszik a természet évétől, egy szökőnappal meg kell hosszabítani az évet. Nem adott azonban kötött szabályt arra nézve, hogy ez a kiigazítás hány évenként szükséges. Ez volt mégis az első komoly lépés az úgynevezett *luniszoláris naptárak* felé, amelyekben a holdhónapot a napévvel — több-kevesebb sikerrel — összhangban tudták tartani. A fejlettebb luniszoláris naptárakban már meghatározott számú évekből álló ciklusokat



találunk, amelyekben meghatározott számú szökőhónapok szerepelnek. Mint már jeleztük, a napév nem fejezhető ki egész számú holdhónapokkal, így a feladat nemcsak igen nehéz, de matematikai szigorúsággal nézve megoldhatatlan. Ilyen ciklusok voltak: Oktaeterisz, Meton, Kalliposz, Hipparkhosz, Victorius féle ciklus.

A régi egyiptomiak a másik utat választották: ők szakítottak a sok gondot okozó holdhónapok használatával, és kerek 30 napos hónapokból építették fel éveiket. A naptár alakulásában Egyiptomban a rendkívüli természeti viszonyok szóltak bele. Az esőtlen Nílus-völgy termőföldjének egyetlen megöntözője ugyanis a Nílus, évenként csaknem napra pontosan jelentkező nagymérvű áradása. A tavaszi közép-afrikai esőzések árhulláma július közepe táján érkezett Egyiptom déli határvidékére, egyidőben a Sirius heliákus keltével (kb. július 19.). Ezért az egyiptomi csillagász papok igen gondosan figyelték ennek a legfényesebb csillagnak a helyzetét, s ebből előre tudták jelezni az áradás közeledtét. Újévük is a Sirius heliákus keltének napja volt az ünnepi naptárokban. A Sirius-év hossza Egyiptom egész ókori történelmében idején csaknem pontosan 365,25 nap volt. Az egyiptomi polgári év 12, évenként 30 napos hónapot számlált, amelyekhez az év végén még 5 napot csatoltak. Ebben a nép által használt 365 napos évben a hónapok nem hetekre, hanem 10 napos dekádokra oszlottak.

A már említett Sirius-év azonban hosszabb 365 napnál és a Sirius heliákus keltét figyelő papok négyévenként még egy napot adtak az ötnapos csonka szökőhónaphoz. Ezt a 365,25 napos évet azonban kizárólag a papság használta. A kétfajta év tehát négyévenként egy nappal eltolódott egymástól. Az eltérés 120 év múlva már egy teljes hónapot tett ki és a két fajta év újév ünnepe csak 1460 évenként esett egybe. Ezt az időt nagy ünnepek keretében ülték meg a régi egyiptomiak. Ilyenre már a Kr. e. 2773 körüli évekből tudomásunk van. Ezt a nagy naptári időkört nagy Szóthisz-periódusnak nevezték.

A távol keleti népek egy része a luniszoláris naptárt használja 12, illetve 13 holdhónapból álló évekként számolva. Így újévük a mi naptárunk szerint január vagy február hó újholdjának idejére esik.

### 3.4.2. A régi római naptár

A ma is elterjedten használt naptár ősének a régi *római naptár* tekinthető. Ennek első formájáról csupán hézagos ismereteink vannak. A királyok korában valószínűleg egy 10 hónapos naptárat használtak, amely március hónappal kezdődött és decemberrel végződött. Jellegzetes „parasztkalendárium” volt ez, amely minden bizonnyal jobban alkalmazkodott a mezőgazda-

sági munkákhoz, mint a Nap, vagy a Hold járásához. Hónapjainak hossza — és valószínűleg maga az év hossza is — az időjárásnak és a mezeti munkáknak megfelelően változott. A mezőgazdaság szempontjából holt időnek számító téli időszakot egyszerűen kihagyták a naptárból.

Az első naptárreformot a legendás Numa Pompilius király (Kr. e. VII. sz.) vagy a decemvriek (Kr. e. 451) testülete rendelte el. A hónapok sorát ekkor 12-re egészítették ki (januárral és februárral), de az évkezdő hónap a Kr. e. II. századig a március maradt. Ez a luniszoláris naptár a hónapok hosszát a Hold fényváltozásai alapján váltakozva 29 és 30 napban határozta meg, az év tartalmát azonban a Nap járásához igazította. A 12 holdhónap hossza (kb. 354 nap) és a napév közötti különbségből eredő problémák megoldására minden második évben egy 22 napos csonka szökőhónapot (mercedonis) iktattak be február 23-a és 24-e közé. (Máig is ennek emlékét őrzi jelenlegi naptárunk február 24-i szökőnapja.)

A naptár rendeltetésszerű használatát mindjobban megnehezítette, hogy a szökőhónapok beiktatásán őrködő papi testület (a pontifexek) politikai és hatalmi okokból gyakran visszaélt jogával, és az év hosszát önkényesen megváltoztatta (pl. „jó” konzul esetén indokolatlanul is szökőhónapot rendelt el). Így a polgárháborúk idején a naptár és a napév között már mintegy 3 hónap eltérés volt, s a rómaiak pl. „tavasszal” szüreteltek.

### 3.4.3. A julianusi naptár

A bemutatott rendellenességek mindinkább szükségessé tették a naptár korrekcióját. Így került sor Kr. e. 46-ban Julius Caesar naptárreformjára. A megfelelő számításokat Sosigenes egyiptomi csillagász végezte, s a tropikus év hosszát 365,25 napban határozta meg, bár annak időtartamát már akkor is pontosabban ismerték. Ennek alapján az új naptár (*julianusi naptár*, vagy *Julián-naptár*) éveit 365 naposnak vették, de a fennmaradó 1/4 napok eltüntetésére minden negyedik év 366 napos szökőév lett. Caesar rendeletére a naptár és a napév közötti eltérést úgy szüntették meg, hogy a 46. évet 455 napra hosszabbították.

A julianusi naptár éveiben a hónapok felváltva 31 illetve 30 naposak voltak a februárt kivéve amelynek hossza csak 29 nap volt, de szökőévben ez is 30 napot számlált. Tehát a julianus évek minden páratlan hónapja 31, minden páros hónapja 30 napból állt. Ez az eredeti julianus naptár tehát hasonlított a mi naptárunkhoz, csak szabályosabb volt.

Kr. e. 44 márciusban Caesart meggyilkolták. Az ő tiszteletére és emlékére nevezték el a quintilis (ötödik – márciustól számozva) hónapot júliusnak. A szökőévszabályt a papok helytelenül értelmezték és minden negyedik he-

lyett minden harmadik évet vették szökőévné. Ennélfogva a julianus naptár éve „késett” a napévhez képest, mert a Caesar meggyilkolását követő 36 év folyamán kilenc helyett tizenkét szökőnapot iktattak az évekbe.

A hibát Augustus császár rendeletére úgy küszöbölték ki, hogy a Kr. e. 8-tól kezdődő tizenkét évben nem volt szökőhónap. Ezt követőleg már a caesari rendelet szerint minden negyedik év volt szökőév.

Augustus annyira büszke volt naptárkiigazítási rendelkezéseire, hogy a sextilis (hatodik) hónapot magáról neveztetette el, s minthogy ennek hossza az eredeti julianusi naptárban csak 30 nap volt, kiegészítette 31 napra, a júliushoz hasonlóan. Az egy napot az amúgy is rövidebb februártól vette el. Minthogy három 31 napos hónap került volna egymás mellé, Augustus az év második felében megcserélte a hónapok hosszának sorrendjét, és így alakult ki a ma is használt naptári évünk.

Egy kis összefoglalás jól szemlélteti, hogy e kétfajta évben hogyan alakul a hónapok hossza. Nézzük elsőnek a Julián-naptár éveinek hónapjait, csak a hónap utolsó napjait feltüntetve:

Jan.	Febr.	Márc.	Ápr.	Máj.	Jún.	Júl.	Aug.	Szept.	Okt.	Nov.	Dec
29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29
30	(30)	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
31		31		31		31		31		31	

Jól látható, hogy csaknem — szökőévekben pedig teljesen — szabályosan váltakozó hónaposszúságokkal milyen kitűnően oldotta meg feladatát Caesar tanácsadója, Szoszigenész.

És most lássuk az Augustus által megváltoztatott jelenlegi helyzetet:

Jan.	Febr.	Márc.	Ápr.	Máj.	Jún.	Júl.	Aug.	Szept.	Okt.	Nov.	Dec
29	(29)	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29
30		30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
31		31		31		31	31		31		31

A szabálytalanságot különösen februárban, továbbá a két egymás mellé került 31 napos hónapban lehet észrevenni.

A julianusi év hossza 365,25 nap, vagyis eltér a napév hosszától. Ez a 11 perc 14 másodperc különbség 128 évenként nő fel egy teljes napra. Ezt az elcsuszást már az Első Niceai Zsinat alkalmával észrevették (325), mert a tavaszi napéjegyenlőség már nem március 24–25-re esett, mint Caesar korában, hanem 21-re. A zsinat elrendelte, hogy azontúl március 21-e legyen a húsvét kiszámítására vonatkozó kiindulónap (vagyis a húsvétot (pészahot) a tavaszi napéjegyenlőséget követő első telihold utáni első vasárnap ünnepeljék). A hiba okát viszont nem szüntették meg. Így a napéjegyenlőség napja tovább tolódott előre.

A XV. században az eltérés már egyre zavaróbb lett, s így az újabb naptárreform egyre inkább szükségessé vált.

#### 3.4.4. A Gergely-féle naptár

A naptári évnek a tavaszi napéjegyenlőségtől való egyre növekvő elcsúszása miatt a XV. században a pápaság elhatározta a naptár megreformálását. 1474-ben VI. Sixtus Európa legnevesebb akkori csillagászt, Regiomontanust — aki Magyarországon tevékenykedett — Rómába hívatta, hogy dolgozza ki a naptár megjavítására vonatkozó terveit. Regiomontanus azonban, röviddel megérkezése után, Rómában pestis járvány áldozata lett, így nem tudott eleget tenni a nemes felkérésnek.

A XVI. század vége felé a julianusi naptár hibája már tíz napra nőtt: a tavaszi napéjegyenlőség március 11-re esett. Több korábbi javaslat után végül XIII. Gergely pápa a Lilius Aloysius perugiai csillagász professzor vezette naptárreform-bizottság indítványát fogadta el. Ennek kidolgozásában jelentős szerepe volt Clavius matematikusnak is. A pápa 1582. október 4-én elrendelte az új naptár bevezetését. Az új (*Gergely-féle*, vagy *gregorián*) *naptár* lényegében egyetlen alapvető dologban különbözik a régitől. Egy szellemes és egyszerű elgondolással a naptári évek hosszát sok év átlagában kissé megrövidítette (365,242 5 napra), s így jelentősen közelítette azt a tropikus év valódi időtartamához. Mivel az eddigi naptár 128 évenként késett egy napot — tehát körülbelül 400 év alatt hármat —, ezért 400 évenként 3 szökőévet el kellett hagyni ahhoz, hogy a késés megszűnjék. Ezt a naptárkészítők úgy érték el, hogy kimondták: a kerek százas esztendők (pl. 1600, 1700) közül ezután csupán csak a 400-zal oszthatók lesznek szökőévek. A régi naptár felgyülemlett késését pedig úgy tüntették el, hogy az új naptárt bevezető országokban 1582. október 4-e után — tíz napot kihagyva — rögtön október 15-ét írtak.

A Gergely-féle naptárt először a katolikus országok fogadták el. Magyarországon 1588-ban tették kötelezővé használatát a pozsonyi országgyűlés határozatát követően. Az 1590. évi erdélyi országgyűlés is hozzájárult az új naptár bevezetéséhez, ennek ellenére az 1591. évi nagykárolyi protestáns zsinat visszatért az ó-naptárhoz, s egyes területeken még a XVII. században is előfordult használata. A protestáns államok eleinte általában tiltakoztak. Csak 1700-ban fogadta el Svájc, Dánia és Hollandia, 1752-ben Anglia, 1753-ban Svédország, 1775-ben Poroszország. Oroszország pedig csak a XX. század elején, a Nagy Októberi Szocialista Forradalom után, 1918. januárjában vezette be. Ezért ünnepelték később sokáig a forradalmat november 7-én. Romániában a Gergely-naptár használatát 1924. október 14-én vezették be.

A Gergely-naptár csillagászati tekintetben nem szorul további javításra, hiszen éveinek hossza csak 26,027 másodperccel tér el a tropikus évtől. Ez az eltérés pedig 3 319,63 év alatt nő egy teljes napi késéssé. Így a naptár

megreformálásának csillagászati része befejezettnek tekinthető, hiszen a szökőszabály igen hosszú időig biztosítja a naptári év és a napév együttfutását.

Más vonatkozásban azonban — minthogy a naptárt a mindennapi élet céljaira használja az egész társadalom —, e naptárnak is van néhány fogyatékossága, kényelmetlensége, s ezért érthető, hogy naptárreform-törekvések korunkban is ismeretesek. Melyek a főbb fogyatékosságok?

a) Változik a naptárban a gazdasági tevékenység szempontjából fontos fél- és negyedévek, valamint a hónapok hossza. Az egyes hónapok munkanapjai között kedvezőtlen esetben 19%-os különbség is lehet.

b) A hét napjai évről évre eltolódnak a hónap napjaihoz viszonyítva. Így a fix dátumú ünnepek mindig a hét más napjára esnek, a naphoz kötött események dátuma pedig állandóan változik.

c) Problémát jelentenek az ún. mozgó ünnepek is. Pl. ilyen a húsvét, amelynek számos egyéb ünnep időpontját befolyásoló naptári helye — amint azt korábban már jeleztük —, a tavaszi napéjegyenlőséget követő első holdtölte utáni első vasárnapon van. Fejben is kiszámítható, hogy a legkorábbi húsvátvasárnap eszerint március 22-én, a legkésőbbi április 25-én lehet.

Ezen szabálytalanságok zavarokat okozhatnak az iskoláztatás, a törvénykezés, a kereskedelem, a pénzügyi elszámolások, a közforgalom, a sportélet és turisztika, sőt a ruházati ipar területén is.

Évszázadok óta igen sok naptártervezetet dolgoztak ki, amelyek megtartanak a Gergely naptár szökőszabályát, időbeosztási rendszer tekintetében alkalmasabbak, kényelmesebbek lennének a ma használt naptárnál. A többszáz naptártervezet között szép számmal akadtak úgynevezett öröknaptárak is, amelyek beosztása minden további évben is érvényes lenne.

### 3.4.5. A Julián Dátum

Az elmúlt évezredekben több naptárreformot hajtottak végre, továbbá a hónapok és az évek hossza sem azonos. Ezért egymástól távol eső időpontok összevetése bonyolult feladat. Ennek kiküszöbölésére a csillagászatban saját időszámítást vezettek be, ez a *Julián Dátum*.

A Julián Dátum bevezetésének gondolata még *Joseph Scaliger*<sup>1</sup> francia történésztől származik 1582-ből, de általánosan csak a múlt században terjedt el. Alapötlete az volt, hogy válasszunk ki egy olyan távoli múltban levő napot, amely előtt már valószínűleg semmilyen történelmi esemény nem volt, és ettől a naptól folyamatosan számláljuk a napokat — függetlenül a hetektől, hónapoktól, sőt, az évektől. Az elfogadott távoli epocha Kr. e. 4713. január

<sup>1</sup>Scaliger, Joseph Justus (1540–1609), francia történész, a modern kronológia egyik megalapozója.

1-e. Scaliger időrendszerét apjának, Julius Scaligernek tiszteletére nevezte el Julián Dátumnak. A távoli kezdőpont megválasztása nem volt véletlenszerű. A húsvétszámítás szempontjából létezik három fontos ciklus (a napciklus, a római indictió ciklusa valamint az aranyszám ciklusa), amelyek periódusa rendre 28, 15 és 19 év. Ezen ciklusok — mivel periódusaik relatív prímek —, 7980 évenként, az ún. Julianus periódus elteltével ismétlődnek egyidőben. A periódus első éveként azért esett a választás a Kr. e. 4713. esztendőre mert ennek napciklusa, római indictiója és aranyszáma mind 1-gyel egyenlő.

Definíció szerint tehát *Julián Dátum* alatt az időszámításunk előtti 4713. év január 1-ének greenwichi időben vett delétől eltelt napok számát értjük.

Így amikor a világidő éppen  $0^h$ , akkor a Julián Dátum (JD) értéke egy egész szám + 0,5. A Julián Dátumot tehát világidőben mérjük. Szokás néha efemerisz időben vett Julián Dátumot is használni, ilyenkor viszont a JED jelet használjuk.

A Julián Dátumot világidőben és a nap törtrészeiben adjuk meg. Így például időszámításunk kezdeti napjának (Kr. sz. 1. január 1.  $12^h$ ) megfelelő Julián Dátum 1 721 424; 2004. január elseje déli 12 óra Julián Dátuma pedig 2 453 006.

Scaliger még déli 12 órától számította a napokat, viszont 1925 óta minden időszámítás kiinduló pillanata az éjfél. Ezért az 1925 utáni minden Julián Dátumból le kell vonnunk 0,5 napot, és a 0,5 utáni tört napok már a következő nap délelőttjére vonatkoznak. Ezek szerint pl. 2004. március 15-én  $0^h$  világidőkor a Julián Dátum 2 453 079,5; 2004. június 8-án  $11^h 23^m$  budapesti zónaidőkor a világidő  $9^h 23^m$ , így a kérdéses időpontban:

$$JD = 2\,453\,164,5 + \frac{9^h 23^m}{24^h} = 2\,453\,164,890\,972.$$

A romániai helyi időben kifejezett 2001. október 11.  $23^h 44^m 39^s$  időpontnak megfelelő Julián Dátum: 2 452 194,364 340. Az átszámításnál figyelembe kell venni, hogy a nyári időszámítás miatt a megadott zónaidőnek  $20^h 44^m 39^s$  UT felel meg.

A JD értékét az 1600 és 2100 közötti évszázadok kezdetén az alábbi táblázatban adjuk meg:

Év (jan. 1. $0^h$ )	1 700	1 800	1 900	2 000	2 100
JD	2 341 972,5	2 378 496,5	2 415 020,5	2 451 544,5	2 488 069,5

Az utóbbi években elterjedt a *Módosított Julián Dátum* (MJD) használata:

$$MJD = JD - 2\,400\,000,5.$$

A MJD értéke 2004. jan. 1-én  $0^h$  világidőkor:  $MJD = 53\,005,0$ .

A *Julián Évszázad* 36 525 középnapból áll. Szokás néha az időt valamilyen időpontból kiindulva Julián Évszázadokban mérni.

A Julián napok használatának sok előnye van. Ha 7-tel elosztjuk az adott nap Julián-számát, a maradékból megállapíthatjuk, hogy a hétnek melyik napja az. Ha a maradék 0, a nap hétfő, ha 6, az vasárnap stb. Az évkönyvek megadják minden nap Julián-számát a greenwichi éjféltre vonatkoztatva, így két időpont közötti időtartamot egyetlen kivonással megkapunk.

Egy közönséges naptári dátumot alakít Módosított Julián Dátummá az alábbi Pascal nyelven leírt eljárás, amely érvényes tetszőleges Kr. e. 4713 utáni dátumra. Itt 1582. október 4-ig a julianusi-naptárat, míg 1582. október 15. után pedig a Gergely-féle naptárat használjuk.

```
Function MJD(Day, Month, Year: Integer; Hour: Real):Real;
Var A: Real; B: Integer;
Begin
  A:=10000.0*Year+100.0*Month+Day;
  If (Month < =2) Then Begin Month:=Month+12;
                        Year:=Year-1 End;
  If (A <= 15821004.1)
    Then B:=-2 + Trunc((Year + 4716)/4)-1179
           {Julian calendar}
    Else B:=Trunc(Year/400)-Trunc(Year/100)+Trunc(Year/4);
           {Gregorian calendar}
  A:=365.0*Year-679004.0;
  MJD:=A+B+Trunc(30.6001*(Month+1))+Day+Hour/24.0;
End;
```

### 3.4.6. A különféle évek és hónapok hossza

Az évet nemcsak a Fiktív Egyenlítői Középnapi két egymást követő tavaszponti áthaladása közti időintervallumként lehet meghatározni, hanem más módon is. Az alábbiakban megadjuk a különböző évek hosszát:

*tropikus év* (ekvinokciumtól ekvinokciumig):

$$365^d 242\,198\,79 - 0^d 000\,006\,14\,T,$$

*sziderikus év* (az állócsillagokhoz képest):

$$365^d 256\,360\,42 + 0^d 000\,000\,11\,T,$$

*anomalisztikus év* (perigeumtól perigeumig):

$$365^d 259\,641\,34 + 0^d 000\,003\,04\,T,$$

*fogyatkozási év*: (a Hold felszálló csomójától a felszálló csomóig)

$$346^{\text{d}}620\,031 + 0^{\text{d}}000\,032\,T,$$

ahol  $T$ -t Julián Évszázadokban mérjük,  $\text{JD} = 2\,415\,020,0$  -tól.

Hasonlóképpen értelmezhetünk többféle hónapot is. Íme a különböző hónapok hossza:

<i>szinodikus hónap</i> (újholdtól újholdig):	$29^{\text{d}}530\,589,$
<i>tropikus hónap</i> (ekvinokciumtól ekvinokciumig):	$27^{\text{d}}321\,582,$
<i>sziderikus hónap</i> (az állócsillagokhoz képest):	$27^{\text{d}}321\,662,$
<i>anomalisztikus hónap</i> (perigeumtól perigeumig):	$27^{\text{d}}554\,550,$
<i>drakonikus hónap</i> (felszálló csomótól felszálló csomóig):	$27^{\text{d}}212\,221.$



## 4. fejezet

# A csillagászati észlelések redukciója

Az égitestek pontos csillagászati koordinátáinak meghatározását néhány jelenség megnehezíti, és észleléseinket meghamisítja. Ezeket a zavaró jelenségeket a koordináták megadásakor tekintetbe kell venni, és ki kell küszöbölni, azaz redukálni kell az észleléseket. Ilyen jelenségek:

- a) a földi légkör fénytörő hatásából adódó refrakció;
- b) a fény véges terjedési sebessége és a Föld mozgási sebességének összeadódása miatt fellépő aberráció;
- c) az égitestek véges távolságából eredő parallaxis;
- d) a csillagászati koordináta-rendszerek tengelyeinek időbeli változásával kapcsolatos precesszió és nutáció;
- e) a Naprendszer és az égitestek egymáshoz viszonyított mozgásából adódó sajátmozgás.

### 4.1. A csillagászati refrakció

#### 4.1.1. Értelmezések

A fénysugarak csak homogén sűrűségű közegben terjednek egyenes vonal mentén. Ha a fénysugár olyan felületen halad át, ahol a közeg sűrűsége ugrásszerűen változik, iránya törést szenved. Ez a *fénytörés* jelensége, vagy *refrakció*.

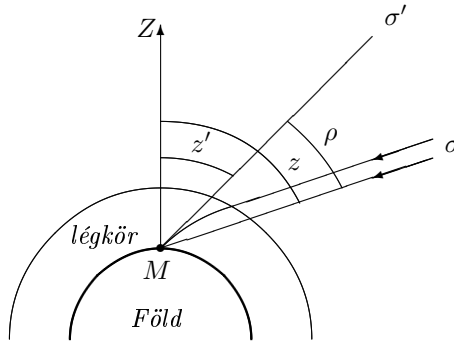
A különböző égitestektől jövő fénysugarak mielőtt a földi megfigyelőhöz érkeznek, áthaladnak a Földet burkoló légkörön. Mivel a légkör sűrűsége a Föld felszíne felé fokozatosan nő, azaz a légkör nem homogén, így a fénysuga-

ak a refrakció következtében eltérnek valódi irányuktól, és a megfigyelőhöz egy görbe mentén érkeznek. Ez a jelenség — az égitestek fényének a légkörben történő irányváltoztatása — a *csillagászati refrakció*. A csillagászati refrakció  $\rho$  értéke definíció szerint:

$$\rho = z - z', \quad (4.1)$$

ahol:

- $z$  a  $\sigma$  égitest valódi zenittávolsága;
- $z'$  a  $\sigma$  égitest refrakció által módosított látszólagos  $\sigma'$  helyzetének zenittávolsága (4.1. ábra).



4.1. ábra. A csillagászati refrakció

vel a fénytörés törvénye szerint a fénysugár irányának módosulása a normális iránya ( $MZ$ ) és az eredeti fénysugár iránya által meghatározott függőleges síkban megy végbe.

3. A refrakció nem jelentkezik a zeniten lévő égitesteknél.

4. A tapasztalat szerint a refrakció nagysága függ az égitest horizont fölötti magasságától (zenittávolságától), valamint a légkör állapotátározó paramétereitől (sűrűség, nyomás, hőmérséklet).

5. A refrakció pontos értékét határozott integrál segítségével, a refrakció általános elméletét használva határozzák meg és táblázatokba foglalják, a csillagászok munkájának megkönnyítése érdekében.

**Megjegyzések.** 1. Megmérve az égitestek látszólagos zenittávolságát ( $z'$ ) és ismerve a megfelelő refrakcióértéket ( $\rho$ ), a valódi zenittávolság ( $z$ ):

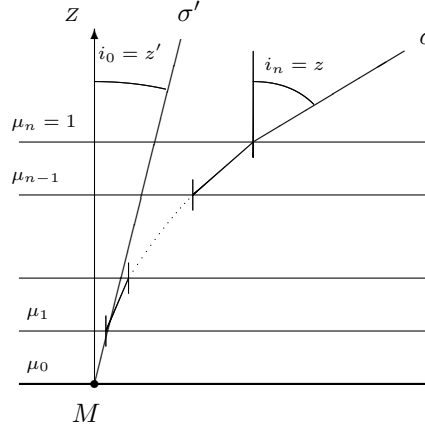
$$z = z' + \rho, \quad (4.2)$$

tehát a refrakció következtében az égitestek zenittávolsága csökken, horizont fölötti magasságuk nő. Látszólag a légkör „megemeli” az égitesteket.

2. A refrakció nem módosítja az égitestek azimut-szögét ( $A$ ), mivel

## 4.1.2. A csillagászati refrakció közelítő formulája

Ha a refrakció számszerű értékét nem kívánjuk  $1''$ -nél pontosabban megadni, és megelégszünk annak a  $z < 70^\circ$ -os zenittávolságok esetén való kiszámításával, akkor elegendő a refrakció közelítő formuláját használni. A refrakció közelítő formulájának levezetésében a Föld felszínét helyileg laposnak tekintjük és a légkört a horizont síkjával párhuzamosan elhelyezkedő homogén rétegekből állónak vesszük (4.2. ábra). Az egyes légköri rétegek törésmutatóját  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ -nel ( $\mu_n = 1$  a légüres tér törésmutatója), a fénysugárnak a függőleges egyenessel bezárt szögeit az egyes rétegek belsejében  $i_0, i_1, \dots, i_n$ -nel jelölve ( $i_0 = z', i_n = z$ ), a Snellius–Descartes-féle törvény alapján:



4.2. ábra. A csillagászati refrakció közelítő modellje

$$\mu_n \sin i_n = \mu_{n-1} \sin i_{n-1} = \mu_{n-2} \sin i_{n-2} = \dots = \mu_1 \sin i_1 = \mu_0 \sin i_0. \quad (4.3)$$

Tehát (4.3) szerint

$$\mu_n \sin i_n = \mu_0 \sin i_0,$$

vagyis

$$\sin z = \mu_0 \sin z'. \quad (4.4)$$

A (4.2) összefüggés figyelembevételével (4.4) alapján a

$$\frac{\sin(z' + \rho)}{\sin z'} = \mu_0 \quad (4.5)$$

összefüggés következik, ahol  $\mu_0$  a felszíni rétegben végzett mérések alapján határozható meg,  $z'$  értéke pedig észlelések alapján mérhető.

Mivel  $0 \leq z \leq 70^\circ$  esetén a tapasztalatok szerint  $\rho < 3'$ , és így használhatók a  $\cos \rho \approx 1$  és  $\sin \rho \approx \rho$  közelítések, amelyek alapján

$$\frac{\sin z' \cos \rho + \cos z' \sin \rho}{\sin z'} = \mu_0 \Leftrightarrow 1 + \cot z' \sin \rho = \mu_0 \Leftrightarrow \sin \rho = (\mu_0 - 1) \tan z',$$

ahonnan a közelítő formula végső alakja:

$$\rho = (\mu_0 - 1) \tan z'. \quad (4.6)$$

A fizikából ismert kísérleti eredmények alapján  $\mu_0 - 1$  értékét kifejezve, a refrakció közelítő formulája — ívmásodpercekben kifejezve — a következő alakú:

$$\rho'' = 60'', 3 \frac{p \text{ mmHg}}{760 \text{ mmHg}} \frac{273^\circ\text{C}}{273^\circ\text{C} + t^\circ\text{C}} \tan z', \quad (4.7)$$

ahol  $p$  a felszíni légköri nyomás,  $t$  pedig a hőmérséklet.

Sajátos esetben, például  $t = 10^\circ\text{C}$  hőmérsékleten és  $p = 760 \text{ mmHg}$  felszíni légköri nyomás esetén

$$\rho = 58'', 3 \cdot \tan z'.$$

A horizont közelében viszont a refrakció értéke majdnem  $35'$ , ami csak a refrakció általános elmélete segítségével vezethető le.

#### 4.1.3. A csillagászati refrakció következményei

A csillagászati refrakció a következő jelenségekben nyilvánul meg:

1. Módosítja az égitestek helyzetét az éggömbön, megváltoztatva azok különböző koordinátáit.
2. Módosítja az égitestek felkelésének és lenyugvásának időpontját. A Nap például korábban kel és későbbben nyugszik, így a refrakció megnöveli a nappalok hosszát.
3. Deformálja az égitestek látszólagos alakját a horizont közelében. A Nap és a Hold ellipszis alakúnak látszik, mivel a refrakció jobban megemeli a korongok alját, mint a felső részét.
4. A csillagok *sziporkázása* (szcintillációja), ami főleg a horizont közelében az állandó légmozgásban keveredő különböző nyomású és hőmérsékletű légtömegek okozta refrakció valamint az interferencia következtében fellépő jelenség. Ennek eredményeként a csillagok táncolnak és a szivárvány színeiben sziporkáznak.

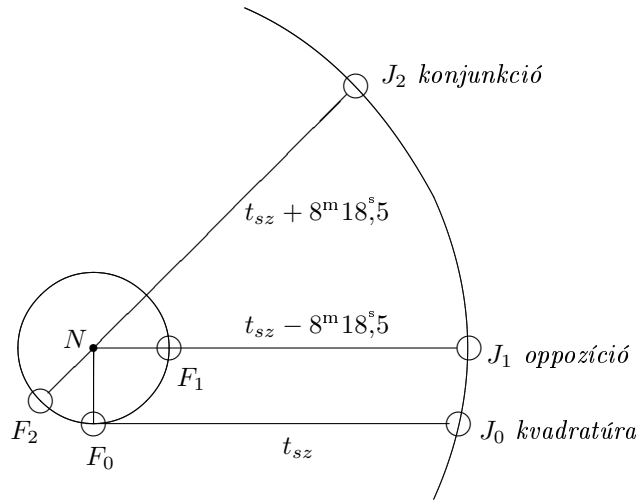
Habár nem a fénytörés következménye, de ugyancsak a légkörrel kapcsolatos jelenség a *szürkület*. A földi légkör fényt szóró hatása következtében napnyugtakor nem következik be a teljes (sötét) éjszaka, mint pl. a légkör

nélküli Holdon, hanem a nappal és az éjszaka fokozatosan váltja fel egymást. Amikor a Nap  $6^\circ$ -kal van a horizont alatt, ekkor végződik a *polgári szürkület*, felhőtlen égen ilyenkor ismerhetők fel a legfényesebb csillagok. Amikor a Nap  $12^\circ$ -kal kerül a horizont alá, elértük a *navigációs* vagy *közepes szürkület* végét. Ekkor már közepes fényességű (3. magnitúdójú) csillagok is látszanak, úgyhogy a legmarkánsabb csillagképek körvonalai már jól kivehetők. A *csillagászati szürkület* végén a Nap  $18^\circ$ -kal van a horizont alatt. Most már teljesen éjszaka van, és minden csillag látszik. A szürkület hossza (a napkeltére és napnyugtára vonatkoztatva) az évszakokkal változik. A polgári szürkület időtartama  $50^\circ$ -os szélességen 35 – 45 perc között változik, míg a csillagászati szürkület időtartama 120 perctől egész éjszakán át tarthat, ekkor jelentkeznek az ún. *fehér éjszakák*.

## 4.2. Az aberráció

### 4.2.1. A fény sebességének meghatározása

O. Römer<sup>1</sup> dán csillagász 1676-ban megállapította, hogy a Jupiter bolygó holdjai fogyatkozásának időpontja (amikor a hold bekerül a bolygó árnyékába) eltér a Cassini<sup>2</sup> által előre kiszámított időpontoktól. Azt találta, hogy amikor a Jupiter oppozícióban van a Nappal, azaz legközelebb a Földhöz, akkor a fogyatkozások  $8^m18^s,5$ -cel korábban következnek be, együttállás-



4.3. ábra. A fény sebességének meghatározása

kor pedig, amikor a Föld maximálisan eltávolodik a Jupitertől,  $8^m18^s,5$ -cel

<sup>1</sup>Olaf Römer (1644 – 1710) — Párizsban is tevékenykedő dán csillagász, a Francia Természettudományos Akadémia tagja, a koppenhágai csillagvizsgáló megalapítója.

<sup>2</sup>Cassini, Giovanni Domenico (1625–1712) — olasz matematikus és csillagász.

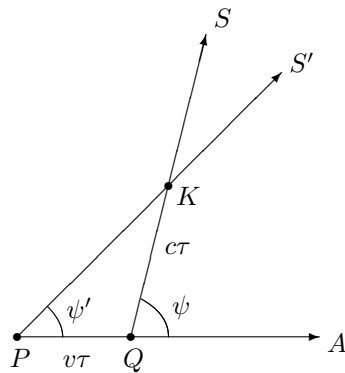
később következnek be, mint azt a számítások alapján várták. Römer az időkülönbséget a 2 AU (a földpálya átmérője) útkülönbséggel magyarázza, amit a fénynek plusszba be kell járni a második esetben (4.3. ábra). Így kiszámítható a fény sebessége:

$$c = \frac{2 \text{ AU}}{16^{\text{m}}37^{\text{s}}} = 300\,000 \text{ km/s}.$$

A Römer által számított érték 214 300 km/s volt. A fénysebesség pontos értékét később fizikai mérési módszerekkel határozták meg. A ma elfogadott érték  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ .

#### 4.2.2. Az aberráció és annak korpuszkuláris magyarázata

Az aberrációt 1725-ben J. Bradley<sup>3</sup> fedezte fel az égitestek évi parallaxisának kutatása közben. A jelenség magyarázatát ugyancsak ő adta meg 1729-ben. A jelenség onnan ered, hogy az észlelő a fényforráshoz képest mozgást végez, a fény sebessége pedig véges. Így a két véges sebesség vektoriális összegeződése következtében a mozgó megfigyelő nem ugyanabban az irányban látja a megfigyelt égitestet, mintha ahhoz képest nyugalomban lenne.



4.4. ábra. Az aberráció klasszikus magyarázata

Az aberráció jelenségének klasszikus, a fény korpuszkuláris elméletén alapuló magyarázata a következő: Tegyük fel, hogy a  $P$  megfigyelő pillanatnyi sebességének iránya,  $\psi$  mértékű szöget zár be egy végtelen távolinak feltételezett fényforrás (pl. csillag) irányával. Ha távcsövünk pontosan a csillag irányába lenne beállítva, nem a szemlencse középpontját jelző fonálkeresztben látnánk a csillagot, hanem tőle a megfigyelő pillanatnyi sebességével ellenkező irányban a  $\psi$  szögtől függően kissé elmozdulva, mert míg egy foton befutja a távcső objektívje és okulárja közötti utat, addig a távcső elmozdul. Ha pedig a csillag pontosan a fonálkeresztben látszik, akkor a távcső nem mutat szigorúan a

csillag felé, hanem a sebesség pillanatnyi irányában kissé előre van döntve. Az előredöntés szögét az *aberráció szögének* hívjuk.

A 4.4. ábrán  $QS$  a csillag valódi iránya,  $PS'$  pedig az aberráció miatti látszólagos iránya. Legyen  $\tau$  az az idő, amelyre a fénynek a távcsőhossz

<sup>3</sup>James Bradley (1693–1762) — angol csillagász.

befutásához szüksége van,  $v$  pedig a megfigyelő sebessége az  $S$  csillaghoz képest. A  $QPK$  háromszögre felírva a szinusztételt —  $m(\widehat{PKQ}) = \psi - \psi'$ :

$$\frac{\sin(\psi - \psi')}{\sin \psi'} = \frac{QP}{QK} = \frac{\tau v}{\tau c},$$

ahonnan, bevezetve a

$$\Delta\psi = \psi - \psi'$$

jelölést az *aberráció mértékére*, a

$$\sin \Delta\psi = \frac{v}{c} \sin \psi' \quad (4.8)$$

összefüggést vezethetjük le.

Mivel egy Földi megfigyelő  $v$  sebessége sokszorosán kisebb, mint a fény sebessége, így  $\Delta\psi$  igen kis szög, amelynek szinuszja jól közelíthető radiánokban kifejezett mértékével. Ezek alapján az aberráció közelítő értéke a

$$\Delta\psi_{\text{rad}} = \frac{v}{c} \sin \psi',$$

vagy

$$\Delta\psi'' = k \cdot \sin \psi', \quad (4.9)$$

kifejezésekkel fejezhető ki, ahol

$$k = 206\,265'' \cdot \frac{v}{c} \quad (4.10)$$

az ún. *aberrációs állandó*.

Attól függően, hogy a földi megfigyelő sebességének melyik összetevőjét vesszük figyelembe, különböző aberrációs elmozdulásról beszélhetünk. Három számottevő sebességösszetevővel kell számolnunk, amelyek a megfelelő aberrációs elmozdulásokat eredményezik, ezek a következők:

1. Az egész Naprendszer elmozdulása a környező csillagokhoz képest. Ez eredményezi az *évszázados aberrációt*.

Naprendszerünk a környezetében lévő csillagokhoz képest  $v = 19,5$  km/s sebességgel mozog a  $\lambda = 270^\circ,5$ ,  $\beta = 34^\circ,3$  ekliptikai koordinátákkal megadott pont, az *apex* irányába. Ez a mozgási irány majdnem pontosan a Lant (Lyra) csillagkép legfényesebb csillaga, a Vega felé mutat. Az évszázados aberráció értéke így

$$\Delta\psi_0'' = 206\,265'' \cdot \frac{19,5}{299\,792,458} \cdot \sin \psi',$$

azaz

$$\Delta\psi_0'' = 13'',4165 \cdot \sin \psi' \approx 13'' \sin \psi',$$

ahol  $\psi'$  a csillag látszólagos szögtávolsága az apex irányától.

Tekintettel arra, hogy a Naprendszer sebessége gyakorlatilag évszázadokon át változatlan, az évszázados aberráció is állandó marad. Ennek következtében megmérése nem lehetséges. Tehát, mivel az évszázados aberráció értéke időben nem változik, más mérések eredményét nem befolyásolja, ezért nem szokás figyelembe venni.

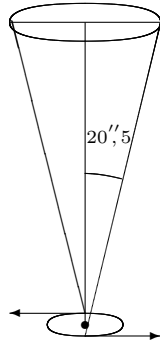
## 2. A Föld Nap körüli keringésének következményeként fellépő évi aberráció.

Tekintsük először a Föld pályáját 1 AU = 149 597 870 km-es sugarú körnek, amely mentén a Föld egyenletes sebességgel megy körbe évi mozgása során. Ezen közelítésekkel a Föld (átlagos) pályamenti sebessége

$$v = \frac{2\pi \cdot 149\,597\,870}{365,2563835 \cdot 24 \cdot 3600} \frac{\text{km}}{\text{s}} = 29,785 \frac{\text{km}}{\text{s}},$$

és így az évi aberráció állandója:

$$k = 206\,265'' \cdot \frac{v}{c} = 206\,265'' \cdot \frac{29,785}{299\,792,458} = 20'',496 \approx 20'',50.$$



4.5. ábra. Az aberrációs ellipszis

Habár a Föld sebességének nagysága egy év folyamán nem változik jelentősen, folyamatosan változva  $360^\circ$ -kal módosul a sebesség iránya. Ennek következtében az évi aberráció kimutatható ugyanazon objektum féléves időközökkel történő ismételt megfigyelése alapján. A félévénként megváltozott irányítású földi sebesség következményeként a távcső megdőlése is ellentétes lesz (4.5. ábra).

Ezt a változást észlelte Bradley, akinek mérései szerint a csillagok aberrációs elmozdulása  $41''$ . Ez az érték minden csillag esetén azonos, hiszen a jelenség nem az égitestek távolságától, hanem a Föld mozgási sebességétől függ. Olyannyira, hogy az eltolódás mértékéből a Föld pálya menti sebessége is meghatározható.

Az aberrációs elmozdulás következtében egy év alatt a csillagok éggömbi helye az ekliptika pólusaiban levő csillagoknál egy kört ír le. A  $\beta$  ekliptikai szélességen lévő csillag minden évben egy  $41''$ -es nagytengelyű és  $41'' \cdot \sin \beta$  kistengelyű aberrációs ellipszist ír le. Az ekliptika síkjához közeledve az aberrációs



ellipszis egyre elnyúltabb, az ekliptika síkjában a csillagok egy  $41''$  hosszúságú szakasz mentén oszcillálnak. Az aberrációs ellipszisek a Föld keringésével megegyező körüljárási iránnyal rajzolódnak ki az égre.

**3.** A Föld tengely körüli forgásának következménye a *napi aberráció*.

A napi aberráció állandójának értéke

$$k_n = 206\,265'' \frac{2\pi R_{\oplus} \cos \varphi}{24 \cdot 3\,600 \cdot c} = 206\,265'' \frac{2\pi \cdot 6\,370 \cdot \cos \varphi}{24 \cdot 3\,600 \cdot 299\,792\,458},$$

azaz

$$k_n = 0'',319 \cdot \cos \varphi,$$

ahol  $\varphi$  a földi megfigyelő földrajzi szélessége. Így a napi aberráció nagysága

$$\Delta\psi_n'' = 0'',319 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi'.$$

**Megjegyzések.** i. Az aberráció elméletének precíz levezetése relativisztikus tárgyalásmódot igényel. Ha a  $v$  mozgási sebesség a fény  $c$  sebességéhez képest kicsi, akkor használható az aberráció itt bemutatott egyszerű elmélete.

ii. Az égitestek valódi éggömbi helyének meghatározásakor a korrekciókat a következő sorrendben hajtják végre:

1. a refrakció korrekciója;
2. a napi aberráció korrekciója;
3. az évi aberráció korrekciója.

iii. A refrakció és napi aberráció korrekciója után kapott  $\alpha_L, \delta_L$  koordinátákat *látszó koordinátáknak* nevezzük. Az évi aberráció kiküszöbölése után kapott  $\alpha_v, \delta_v$  koordináták az ún. *valódi koordináták*. Ilyen értelemben szokás beszélni az égitest látszó és valódi helyéről.

### 4.3. A parallaxis

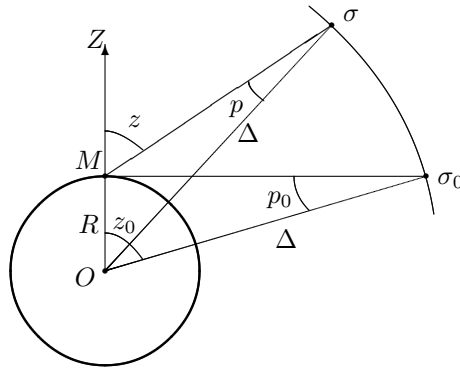
A megfigyelő elmozdulásának következtében egy égitest elmozdulni látszik környezetéhez képest. Ezt a látszólagos elmozdulást *parallaktikus elmozdulásnak* nevezzük. Azt a szöget, amely alatt a megfigyelt égitesten elhelyezkedő képzeletbeli megfigyelő látná a tényleges megfigyelő lehetséges elmozdulásának megfelelő alapszakaszt (bázist) a *parallaxis szögének* nevezzük. A

földi megfigyelő különböző lehetséges elmozdulásai szerint az égitestek különböző parallaktikus elmozdulásáról — és a megfelelő parallaxisokról — beszélhetünk.

1. A Föld forgásának, vagy a Föld felszínén történő elmozdulásnak megfelelő — *napi parallaxis*;
2. Földünk Nap körüli keringésének megfelelő évi parallaktikus elmozdulás — és az ennek megfelelő *évi parallaxis*;
3. A Nappal együtt való haladó mozgásunk eredménye az *évszázados* (szekuláris) *parallaktikus elmozdulás*.

#### 4.3.1. A napi parallaxis

A *napi parallaxis* jelensége azért lép fel, mert a Föld különböző pontjaiban elhelyezkedő megfigyelők a nem túlságosan távoli égi objektumokat más és más irányban látják. Egy  $\sigma$  égitest *magassági napi parallaxis szöge* az az  $\widehat{M\sigma O}$  szög, amely alatt az égitesten elhelyezkedő képzeletbeli megfigyelő látná az  $OM$  alapvonalat, ahol  $M$  a földi megfigyelő,  $O$  pedig a Föld középpontja. A magassági napi parallaxis szögének  $p = m(\widehat{M\sigma O})$  mértéke a *magassági napi parallaxis* (4.6. ábra).



4.6. ábra. A napi parallaxis

ahonnan

Ha  $R = OM$  jelöli a gömb alakúnak tekintett föld sugarát,  $\Delta = \sigma O$  az égitest távolságát a Föld középpontjától,  $z = m(\widehat{ZM\sigma})$  az égitest topocentrikus zenittávolságát, akkor az  $MO\sigma$  háromszögre felírt szinusztétel értelmében

$$\sin p = \frac{R}{\Delta} \sin z. \quad (4.11)$$

**Megjegyzések 1.** Mivel az égitestek  $\Delta$  távolsága sokszorosan nagyobb a Föld  $R$  sugaránál, így  $\sin p \ll 1$ , ami lehetővé teszi a  $\sin p \approx p$  közelítést,

$$p = \frac{R}{\Delta} \sin z. \quad (4.12)$$

2. A  $p$  értéke akkor maximális, amikor  $z = 90^\circ$ . Az ennek megfelelő

$$p_0 = \frac{R}{\Delta} \quad (4.13)$$

értéket az égitest *horizontális napi parallaxisának* nevezzük. A (4.12) és (4.13) összefüggések alapján a magassági és horizontális napi parallaxisok közti összefüggés:

$$p = p_0 \sin z. \quad (4.14)$$

3. Mivel a Föld nem gömb alakú, nagy pontosságot igénylő mérések esetében az előző összefüggésekben  $R$ -et  $\rho_{geo}$ -val, a megfigyelési pontnak megfelelő geocentrikus sugárral kell helyettesíteni. Így a  $\Delta$  távolságú égitest horizontális napi parallaxisa  $\rho_{geo}$  függvényében változik a Föld egyik pontjáról a másikra. A  $p_0$  maximális értékét  $\rho_{geo} = a_e$  egyenlítői fűldsugár esetén kapjuk. A megfelelő

$$\pi_e = \frac{a_e}{\Delta} \quad (4.15)$$

értéket *egyenlítői horizontális napi parallaxisnak* nevezzük.

4. A parallaxisok kis mértékű szögek, amelyek gyakorlatilag ívmásodpercekben ( $\pi_e''$ ) fejezhetők ki.

5. A (4.15) összefüggés, valamint a radiánok és ívmásodpercek közötti átalakítás figyelembevételével egy égitest távolsága meghatározható a

$$\Delta = \frac{206\,265''}{\pi_e''} a_e \quad (4.16)$$

összefüggéssel. A levezetett összefüggés segítségével meghatározhatjuk a Naprendszerünkben lévő égitestek távolságát, ismerve azok  $\pi_e''$  egyenlítői horizontális napi parallaxisát. Ezeket a távolságokat kilométerekben vagy egyenlítői fűldsugarakban kapjuk, attól függően, hogy  $a_e$ -t kilométerekben adjuk meg, vagy az  $a_e = 1$  értéket használjuk.

#### 4.3.2. A Hold parallaxisa

A Földhöz viszonyítva a Hold a legközelebbi égitest, így a Hold horizontális napi parallaxisa a legnagyobb. A Hold egyenlítői horizontális napi parallaxisa a következő módszerrel határozható meg:

Helyezkedjen el a Föld felszínén, ugyanazon hosszúsági körön a  $\varphi_1$ , illetve  $\varphi_2$  földrajzi szélességű  $M_1$ , illetve  $M_2$  megfigyelő. Legyen pl.  $M_1$  az északi,  $M_2$  pedig a déli féltekén (4.7. ábra).

Az egyidőben megfigyelt Hold zenittávolsága a két megfigyelési pontban legyen  $z_1$  és  $z_2$ . Ha  $p_1$  és  $p_2$  jelöli az  $M_1$  és  $M_2$  megfigyelési pontoknak megfelelő magassági parallaxisokat, akkor az  $OM_1HM_2$  négyszög szögeit összegezve:

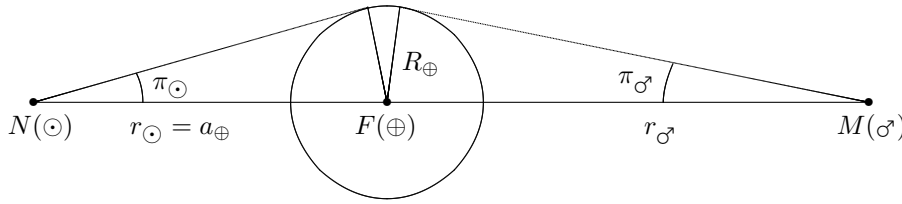
$$p_1 + p_2 + (180^\circ - z_1) + (180^\circ - z_2) + \varphi_1 + \varphi_2 = 360^\circ. \quad (4.17)$$



Feltételezzük, hogy az  $N(\odot)$  nap, az  $F(\oplus)$  Föld és az  $M(\sigma)$  Mars egyvonalban találhatók, a megadott sorrendben (szembenllás). Legyen  $\pi_{\odot}$  és  $\pi_{\sigma}$  a Nap, illetve a Mars egyenlítői horizontális napi parallaxisa. Legyen  $a_{\oplus}$  a (kör alakúnak tekintett) földpálya sugara és  $a_{\sigma}$  az (ellipszis alakú) Mars-pálya fél nagytengelye. A 4.8. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy

$$NF = r_{\odot} = a_{\oplus}, \quad FM = r_{\sigma} = NM - NF = a_{\sigma} (1 - e_{\sigma}) - a_{\oplus}, \quad (4.19)$$

ahol  $e_{\sigma}$  a Mars bolygó pályájának excentricitása, míg  $a_{\sigma} (1 - e_{\sigma})$  a bolygó Naptól mért távolsága napközelen.



4.8. ábra. A Nap parallaxisa

Ugyancsak a 4.8. ábra szerint, a gömb alakúnak tekintett Föld  $R_{\oplus}$  sugara

$$R_{\oplus} = r_{\odot} \sin \pi_{\odot} = r_{\sigma} \sin \pi_{\sigma}. \quad (4.20)$$

Mivel a parallaxisok kis szögek ( $\sin \pi_{\odot} \approx \pi_{\odot}$ ,  $\sin \pi_{\sigma} \approx \pi_{\sigma}$ ), az (4.20) összefüggésből (4.19) alapján az

$$a_{\oplus} \cdot \pi_{\odot} = [a_{\sigma} (1 - e_{\sigma}) - a_{\oplus}] \pi_{\sigma}$$

összefüggés következik, ahonnan

$$\pi_{\odot} = \left[ \frac{a_{\sigma}}{a_{\oplus}} (1 - e_{\sigma}) - 1 \right] \pi_{\sigma}. \quad (4.21)$$

A (4.21) összefüggésben szereplő  $a_{\sigma}/a_{\oplus}$  arány Kepler III. törvénye (7.77) alapján határozható meg:

$$\frac{a_{\sigma}}{a_{\oplus}} = \left( \frac{P_{\sigma}}{P_{\oplus}} \right)^{\frac{2}{3}},$$

ahol  $P_{\sigma}$  és  $P_{\oplus}$  a Mars és a Föld sziderikus keringési periódusa.

A XX. században a Nap parallaxisának meghatározása az Eros kisbolygó segítségével történt, amely jobban megközelíti a Földet és így a mérések nagyobb pontosságát biztosítja. Az így kapott parallaxis érték  $\pi_{\odot} = 8'',790$ , ahonnan  $r_{\odot} = 149\,674\,000$  km.

A Föld-Nap közepes távolságot a csillagászatban *csillagászati egység* (AU) néven távolság-mértékegységként használják. Ennek értékét rádió-mérések segítségével pontosították. Az 1961–1963 időszakban például a Szovjetúnióban és az Amerikai Egyesült Államokban végeztek rádiólokációs méréseket, amikor a Merkúr és a Vénusz bolygókat vették célba. Ez a módszer nagy pontosságot biztosít a távolságmérésekben. Alapjául az

$$r = \frac{c \cdot \Delta t}{2}$$

összefüggés szolgál, ahol  $\Delta t$  az az idő, ami a jel küldésétől visszatéréséig telik el,  $c = 299\,792\,458$  km/s — az elektromágneses hullámok (fény) terjedési sebessége. Ezen mérések eredményeként  $1 \text{ AU} = 149\,598\,500$  km, ahol a mérési hiba csupán  $\pm 500$  km.

Így, 1970-től a Nemzetközi Csillagászati Unió (International Astronomical Union, IAU), a csillagászati egységre az

$$1 \text{ AU } 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$$

értéket fogadta el, ami a  $\pi_{\odot} = 8'',794$  parallaxisnak felel meg.

Az IAU ezt az értéket pontosította 1976-ban. Az új érték, amelynek használatát 1984-től tette általánossá

$$1 \text{ AU } 1,495\,978\,70 \times 10^{11} \text{ m},$$

ami a  $\pi_{\odot} = 8'',794\,184$  parallaxisnak felel meg.

#### 4.3.4. A Naprendszerben található égitestek méretei

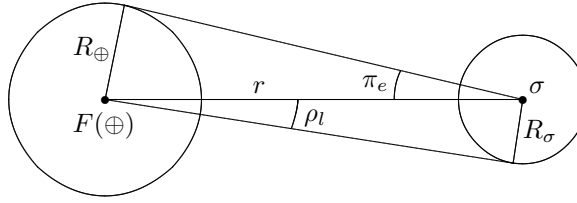
Megfigyelések alapján meghatározható egy égitest *látszó átmérője* (vagy *szög-átmérője*) — vagyis az a szög, amely alatt látszik az illető égitest korongja a Földről nézve. A látszó átmérő felét az égitest *látszó sugarának* (vagy *szögsugarának*) nevezzük, és  $\rho_l$ -vel jelöljük.

Legyen  $R_{\oplus}$  a Föld sugara,  $R_{\sigma}$  a  $\sigma$  égitest (lineáris) sugarának hossza,  $r$  a Föld középpontja és az illető égitest középpontja közötti távolság és  $\pi_e$  az illető égitest egyenlítői horizontális napi parallaxisa (4.9. ábra).

Az ábrán feltüntetett derékszögű háromszögekben

$$R_{\oplus} = r \sin \pi_e,$$

$$R_{\sigma} = r \sin \rho_l,$$



ahonnan

$$R_{\sigma} = \frac{\sin \rho_l}{\sin \pi_e} R_{\oplus} \approx \frac{\rho_l}{\pi_e} R_{\oplus},$$

4.9. ábra. A Naprendszerben található égitestek méretének meghatározása

ahol a közelítésnél azt használtuk, hogy általában úgy a látszó sugarak, mint az egyenlítői parallaxisok kis szögek.

Ezzel a módszerrel határozták meg a Hold sugarát  $R_{\text{H}} = 0,27 R_{\oplus}$ , a Nap sugarát  $R_{\odot} = 109 R_{\oplus}$  stb.

#### 4.3.5. Napi parallaxis korrekciók

Megfigyelések alapján meghatározhatók a Naprendszer égitestjeinek topocentrikus koordinátái, amelyek függenek a megfigyelő földfelszíni helyzetétől. Katalógusokban azok geocentrikus koordinátáit adják meg, amelyeket a topocentrikus koordinátákból az ún. *napi parallaxis korrekciók* segítségével kapjuk meg.

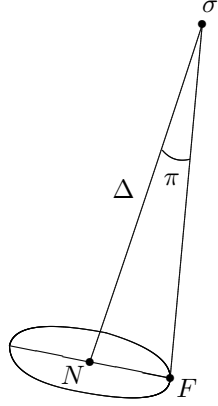
#### 4.3.6. Az évi parallaxis és a csillagok távolsága

A Naprendszeren kívüli égitestek esetén ezen égitestek nagy távolsága miatt a napi parallaxis értéke nem mérhető. A legközelebbi csillagok esetén is ez 0,00004-nél kisebb érték. Így a csillagok távolságának meghatározásánál a Föld sugara már nem alkalmas parallaxisméréshez alapvonalként. Ekkor már egy lényegesen nagyobb parallaktikus elmozdulásra van szükség, amit a Föld Nap körüli keringése biztosít.

Egy csillag *évi parallaxis szögének* azt a szöget nevezzük, ami alatt a megfigyelt csillag középpontjában elhelyezkedő képzeletbeli megfigyelő látná a Nap–Föld közepes távolságot merőleges rálátás esetén. E szög mértékét  $\pi$ -vel jelöljük és a csillag parallaxisának nevezzük.

A 4.10. ábra jelölései szerint a  $\sigma$  csillag  $\pi = m(\widehat{N\sigma F})$  parallaxisára — mivel  $m(\widehat{\sigma N F}) = 90^\circ$  — felírhatjuk, hogy

$$\tan \pi = \frac{a}{\Delta},$$



4.10. ábra. A csillagok évi parallaxisa

ahol  $a = NF = 1$  AU a közepes Nap–Föld távolság,  $\Delta = N\sigma$  pedig a csillag távolsága a Naptól. Tekintettel a csillagok nagy távolságára,  $\pi$  mindig kisebb mint  $1''$ , és ekkor a  $\tan \pi \approx \pi$  közelítéssel a csillag parallaxisa a

$$\pi = \frac{a}{\Delta} \quad (4.22)$$

összefüggés következik, ahol  $\pi$  a parallaxis radiánba vett mértéke. Ha a parallaxist radián helyett ívmásodpercekben fejezzük ki, akkor

$$\pi'' = 206\,265 \frac{a}{\Delta}. \quad (4.23)$$

A (4.22), illetve (4.23) összefüggésekből azonnal következnek a csillagok távolságát — ismert parallaxisuk függvényében megadó —

$$\Delta = \frac{a}{\pi}, \quad \text{illetve} \quad \Delta = \frac{206\,265 \cdot a}{\pi''} \quad (4.24)$$

kifejezések. Ha a fenti képletekben az  $a$  csillagászati egységet kilométerben fejezzük ki, akkor a csillagok távolságát is kilométerben kapjuk, ha csillagászati egységben ( $a = 1$ ), akkor a csillagtávolságokat AU-ban adó képletek:

$$\Delta = \frac{1}{\pi}, \quad \text{illetve} \quad \Delta = \frac{206\,265}{\pi''}. \quad (4.25)$$

**Megjegyzések.** 1. A Föld évi Nap körüli keringése következtében egy csillag iránya egy kúp felületét írja le. Ennek a kúpnak az éggömbbel való metszészvonala egy ellipszis, az ún. *parallaktikus ellipszis*. Ezen ellipszis fél nagytengelye megegyezik a csillag  $\pi$  évi parallaxiséval (lásd a 5.1.1. részben).

2. A közeli csillagok esetében a csillag évi parallaktikus elmozdulását — az év folyamán a távoli csillagok mozdulatlan háttéréhez képest — végig lehet követni, és a parallaktikus ellipszis fél nagytengelyét meg lehet határozni. A  $\pi$  parallaxis ismeretében, a (4.24) (4.25) összefüggések valamelyikével meghatározható az illető csillag távolsága. Ezt a távolságmérési módszert *trigonometrikus parallaxisnak* nevezzük.

3. A legnagyobb évi parallaxisú csillag a Proxima Centauri, amelyre

$$\pi = 0,76''.$$



4. A Föld felszínéről a légköri nyugtalanságok miatt éggömbi szögtávolságokat  $0,01$ -nél pontosabban nem mérhetünk. Így a legnagyobb távolság, ami ezzel a módszerrel meghatározható:  $20\,626\,500$  AU.

5. Az első sikeres parallaxisméréseket 1838-ban végezte egymástól függetlenül Bessel<sup>7</sup>, Henderson<sup>8</sup> és Struve<sup>9</sup>.

#### 4.3.7. Csillagászati hosszsmértékegységek

A csillagok távolságának méterben vagy kilométerben való kifejezése nagyon kényelmetlen, mivel óriási számok használatát teszi szükségessé. Ennek a kellemetlenségnek az elkerülésére a csillagászatban sajátos hosszsmértékegységeket használnak.

A Naprendszer belsejében mért távolságokat *csillagászati egységekben* (AU) fejezzük ki. A csillagtávolságok kifejezésére használt egység a *parsec*.

Egy *parszek* (*parsec*) (pc) távolságra van a Naptól az az égitest, amelyből nézve a földpálya közepes sugara — merőleges rálátás esetén — pontosan  $1''$  nagyságú szög alatt látszik.

**Megjegyzések.** 1. Egy csillag távolsága pontosan akkor 1 parszek, ha évi parallaxisa  $1''$ .

2. Könnyen belátható az

$$1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ AU}$$

összefüggés.

3. A  $\pi''$  évi parallaxisú csillag távolsága parszekben kifejezve

$$\Delta \text{ (pc)} = \frac{1}{\pi''}. \quad (4.26)$$

4. Óriási távolságok esetében a parszek többszörösei is használatosak:

$$\begin{array}{llll} \textit{kiloparszek} & \text{kpc} & \text{galaktikus távolságok esetén} & 1 \text{ kpc} = 10^3 \text{ pc;} \\ \textit{megaparszek} & \text{Mpc} & \text{extragalaktikus távolságok esetén} & 1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc.} \end{array}$$

A csillagászatban gyakran használt egység a távolságok kifejezésére a *fényév*, ami a fénysugár (elektromágneses sugárzás) által  $c = 299\,792\,458$  km/s sebességgel a légüres térben egy év alatt megtett út hossza.

A bemutatott csillagászati hosszsmértékegységek között a következő összefüggések érvényesek:

<sup>7</sup>Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) — német csillagász matematikus.

<sup>8</sup>Thomas Henderson (1798–1844) — skót csillagász.

<sup>9</sup>Friedrich Georg Wilhelm von Struve (1793–1864) — német csillagász.

	km	AU	fényév	pc
km	1	$6,684\,587 \times 10^{-9}$	$1,057\,023 \times 10^{-13}$	$3,233\,002 \times 10^{-14}$
AU	149\,597\,870	1	$1,581\,265 \times 10^{-5}$	$4,848\,132 \times 10^{-6}$
fényév	$9,460\,528 \times 10^{12}$	63\,240,5	1	0,306\,598\,9
pc	$3,093\,10 \times 10^{13}$	206\,265	3,261\,59	1

**Példák.** 1. Napunkhoz legközelebb található csillag a Proxima Centauri ( $\alpha$  Cen C,  $\alpha_{2000,0} = 14^{\text{h}} 29^{\text{m}} 7^{\text{s}}$ ;  $\delta_{2000,0} = -62^{\circ} 41'$ , látszó és abszolút magnitúdója  $m = 11,05$ ;  $M = 15,5$ ), amelynek évi parallaxisa  $0,772''$ , távolsága  $1,30 \text{ pc} = 4,26 \text{ fényév}$ .

2. A látszólag legfényesebb csillag, a Szíriusz ( $\alpha$  CMa A) évi parallaxisa  $0,377''$ , távolsága  $2,65 \text{ pc} = 8,6 \text{ fényév}$ .

## 5. fejezet

# A Föld mint égitest

### 5.1. A Föld mozgásai

#### 5.1.1. A Föld keringése a Nap körül

A Föld a Nap körül ellipszis alakú pályán kering, amely ellipszis egyik gyújtópontjában van a Nap. A keringési periódusa az állócsillagokhoz viszonyítva a *sziderikus év*

$$T = 1 \text{ sziderikus év} = 365,256\,360\,4 \text{ középnap} = 365^{\text{d}}\,6^{\text{h}}\,9^{\text{m}}\,9^{\text{s}}53.$$

A földpálya adatai: fél nagytengely  $a = 1 \text{ AU} = 149\,597\,870 \text{ km}$ ; numerikus excentricitás  $e = 0,0167$ ; perihéliumtávolság  $a(1 - e) = 147\,099\,585 \text{ km}$ , aféliumtávolság  $a(1 + e) = 152\,096\,154 \text{ km}$ , (majdnem kör alakú pálya, táblarajz esetén a körtől való eltérés nem haladja meg a krétanyom vastagságát).

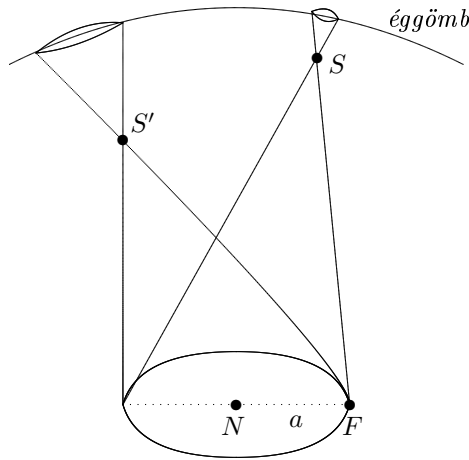
A keringő mozgás a Föld tömegközéppontjának Nap körüli translációs mozgását jelenti. A Nap évi látszólagos mozgása az éggömbön az ekliptika mentén a Föld valódi keringési mozgásának következménye.

#### **A Föld keringésének bizonyítékai:**

a) *A csillagok parallaktikus ellipszise.* Egy év folyamán a Föld-csillag egyenes egy kúpfelületet generál, amely kúpfelület az éggömböt egy ellipszisben metszi. Ezt az ellipszist a csillag *parallaktikus ellipszisének* nevezzük. A parallaktikus ellipszis megegyezik a csillag geocentrikus égi helyzetének mértani helyével.

A csillagok látszólagos parallaktikus ellipszise a Föld Nap körüli valódi keringését tükrözi (5.1. ábra). Már Kopernikusz is tudta, és zseniálisan mutatott rá, hogy a Föld Nap körüli keringésének tükörképeként a csilla-

goknak az égbolti háttérhez képest egy év alatt egy kört vagy ellipszist kellene az égre rajzolniuk, (ő még a Föld pályáját kör alakúnak gondolta). Egy csillag parallaktikus ellipszisének alakja függ a csillagnak az ekliptika síkjához viszonyított helyzetétől, azaz a csillag ekliptikus szélességétől ( $\beta$ ). Az ekliptikai pólusok irányában elhelyezkedő csillagok parallaktikus ellip-



5.1. ábra. A csillagok parallaktikus ellipszise

szise gyakorlatilag kör alakú. Ha egy csillag ekliptikai szélessége  $\beta$ ,  $\beta \in (-90^\circ, 90^\circ) \setminus \{0^\circ\}$ , akkor a parallaktikus ellipszis fél nagytengelyének hossza  $\pi$  (a csillag évi parallaxisa), excentricitása pedig  $|\cos \beta|$ . Az ekliptika síkjában elhelyezkedő csillagok esetén ( $\beta = 0^\circ$ ) a parallaktikus ellipszis egy  $\pi$  mértékű nagykörívre redukálódik,  $\beta = \pm 90^\circ$  esetén  $\pi$  sugarú kör.

Az első sikeres parallaxismérést 1838-ban végezték — egymástól függetlenül — Bessel, Henderson és Struve.

b) *A csillagok aberrációs ellipszise.*

Az aberráció következtében egy  $\sigma$  csillag nem a valódi irányban, hanem egy látszólagos  $\sigma'$  irányban látszik. Egy csillag látszólagos  $\sigma'$  éggömbi helyei-

nek egy év során elfoglalt mértani helye egy ellipszis, az ún. *aberrációs ellipszis*, amelynek átmérője  $41''$  minden csillag esetén és a Föld Nap körüli 29,785 890 km/s-os átlagos keringési sebességének következménye.

c) *A színeképvonalak eltolódása.* Ma már az is megfigyelhető jelenség, hogy a Nap körüli keringés miatt az ekliptika síkjához közeli csillagok színeképében a színeképvonalak éves periódusban eltolódnak. A Föld ugyanis mintegy fél éven át közeledik valamely csillaghoz, és a Doppler-elv értelmében ilyenkor a színeképvonalak az ibolya felé csúnszak, majd a távolodás időszakában a vörös irányába. Bár a Föld keringési sebessége csak 10 000-ed része a fény sebességének, s így az eltolódás mértéke kicsi, azért pontos mérésekkel mégis észlelhető.

A Föld Nap körüli keringésének következményei a szoláris éghajlati övek kialakulása valamint az évszakok váltakozása. Ezek a jelenségek kapcsolatban vannak azzal a ténnyel is, hogy a Föld forgástengelye az ekliptika síkjához viszonyítva  $90^\circ - \varepsilon$  mértékű szöggel el van dőlve.

Vizsgáljuk meg, hogy miként változik a Naptól kapott energiamennyiség a Nap magasságával. Legyen  $E$  a Naptól 1 AU távolságra, a Nap sugárzási irányára merőlegesen elhelyezkedő egységnyi felületre egységnyi idő alatt érkező energiamennyiség. Ha a Nap sugarai egy adott hely vertikálisát adó zenitiránnyal  $z_{\odot}$  szöget zárnak be — azaz a Nap zenitávolsága  $z_{\odot}$  —, akkor a megfigyelési helyen egységnyi idő alatt egységnyi felületre érkező energiamennyiség:

$$E(z_{\odot}) = E \cos z_{\odot}.$$

Ez könnyen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy a sugárzási irányra merőleges egységnyi felületre érkező  $E$  energiamennyiség az  $\frac{E}{\cos z_{\odot}}$  nagyságú nagyobb felületre oszlik el.

Egy bizonyos napon, amikor a Nap deklinációja  $\delta_{\odot} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ , a  $\varphi$  földrajzi szélességű megfigyelő számára délben (a Nap delelésekor) a Nap  $z_{\odot}$  zenitávolsága a meridiánon — a (2.3) összefüggés értelmében

$$\pm z_{\odot} = \varphi - \delta_{\odot}.$$

Így a Föld északi féltekéjén egy  $\varphi$  földrajzi szélességű megfigyelő esetén az egységnyi felületre érkező energia értéke délben az

$$E_t = E \cos(\varphi + \varepsilon) \quad \text{és} \quad E_{ny} = E \cos(\varphi - \varepsilon)$$

értékek között változik, ahol  $\varphi + \varepsilon$  és  $\varphi - \varepsilon$  a Nap delelési zenitávolsága a téli, illetve nyári napfordulók idején.

Például Kolozsvár esetében, ahol  $\varphi \approx 46^\circ 45'$ , a Napból egységnyi felületre érkező maximális és minimális energiamennyiségek aránya:

$$\frac{E_{ny}}{E_t} = \frac{E \cos(46^\circ 45' - 23^\circ 27')}{E \cos(46^\circ 45' + 23^\circ 27')} = \frac{\cos(23^\circ 18')}{\cos(70^\circ 12')} = \frac{0,91845}{0,33874} = 2,7114.$$

Ez azt jelenti tehát, hogy Kolozsvárott nyári napfordulókor délben 2,71-szer több energia érkezik a Napból, mint a téli napfordulókor.

A gyakorlatban az arány a Föld felszínén még ennél is nagyobb, mivel a légkör napsugárzást gyengítő hatása a zenitávolsággal együtt nő, így télen — amikor a Nap alacsonyabban jár — nagyobb, mint nyáron. Ha figyelembe vesszük azt is, hogy nyáron a nappalok jóval hosszabbak, mint télen, így nyilvánvalóvá válik, hogy miért érkezik több napenergia a Föld felszínére nyáron, mint télen.

Így tavasszal és nyáron (március 21-től szeptember 23-ig) a Föld északi féltekéje több energiát kap a Naptól, mint ősszel és télen. A déli féltekén az évszakok fordítottak az északihoz képest.

A földpálya excentricitása miatt a Föld felszínére érkező  $E$  energiameennyiség változása csak mintegy 3,5 %-os, azaz míg a Föld a perihéliumtól az aféliumig megy, csupán 3,5 %-kal nő. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha figyelembe vesszük az energia terjedésének azon alaptörvényét, hogy a távolság négyzetével arányosan csökken. Így

$$\frac{E_{peri}}{E_{af}} = \left( \frac{d_{af}}{d_{peri}} \right)^2 = \left[ \frac{a(1+e)}{a(1-e)} \right]^2 = \left[ \frac{(1+e)}{(1-e)} \right]^2.$$

A földpálya excentricitásának  $e = 0,0167$  értékét a fenti arányba helyettesítve:

$$E_{peri} = \left( \frac{1+0,0167}{1-0,0167} \right)^2 E_{af} \quad \implies \quad E_{peri} = 1,0691 E_{af}.$$

Ez a változás magyarázza azt, hogy miért enyhébbek a telek és kevésbé forrók a nyarak az északi féltekén, mint a délin.

### 5.1.2. A Föld tengely körüli forgása

#### A mozgás jellemzése

A Föld képzelt tengelye körül nem egészen 24 óránként ( $P_{for} = 86\,164,098 = 23^h 56^m 04,098$  középidegységekben) tesz meg egy teljes fordulatot. A forgástengely felszíni metszéspontjai a *földrajzi pólusok*. A Föld az északi pólus felől nézve az óramutató járásával ellentétes irányban, tehát nyugatról keletre forog. Ezt a csillagászatban *direkt forgási irány*nak nevezzük.

Mivel a Föld jó közelítéssel szilárd testtel modellezhető, ezért a felszín pontjai azonos szögsebességgel forognak

$$\omega = \frac{2\pi}{P_{for}} = 0,000\,072\,92 \text{ rad/s}.$$

Az azonos szögsebesség azonban nem jelent egyszersmind egyforma kerületi sebességet is. A kerületi sebesség a forgástengelytől való távolságtól (avagy a földrajzi szélességtől) függ

$$v_{ker} = \omega d = \omega R_e \cos \varphi,$$

ahol  $R_e = 6\,378,137$  km az egyenlítői fűdsugár,  $\varphi$  pedig a földrajzi szélesség. A kerületi sebesség az egyenlítőn a legnagyobb ( $\cos \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0$ )  $v_e = \omega R_e = 465$  m/s és  $60^\circ$ -nál már csak fele az egyenlítőn mérhetőnek, míg a pólusokon nulla. Kolozsváron például a kerületi sebesség  $(v_{ker})_{Kv} = \omega R_e \cos(46^\circ 46') = 318,5$  m/s.

Az időmérő eszközök utóbbi évtizedekben végbement tökéletesítése (kvarc-órák, atomórák kifejlesztése) többek között azzal az eredménnyel járt, hogy sikerült kimutatni a Föld forgásában mutatható egyenetlenségeket. Ezeknek két fő csoportja van: a forgási sebesség egyirányú változása és a sebesség ingadozásai.

a) Az *egyirányú változás lassulást* jelent. Értéke nem nagy, mindössze évi  $0,0029$ -ra tehető. A lassulást először a Holddal kapcsolatos jelenségeknél tapasztalták. A fogyatkozások pl. a számítotttnál mindig valamivel hamarabb következnek be. Később ezt az eltérést más jelenségeknél is sikerült kimutatni, s így nyilvánvaló lett, hogy a tengelyforgás ideje növekszik. Ez a jelenség földtörténetileg hosszabb idő alatt igen tekintélyes változást eredményez. Olyan mezozoikumi mészvázás állatok esetében, amelyeknél a mészlerakódás éves és napi ritmusa is megállapítható, az évi ritmuson belül több mint 400 napot lehetett megszámolni. Az év hosszának változatlanságát feltételezve, ez csak úgy magyarázható, hogy az akkori napok jóval rövidebbek voltak a jelenleginél.

A tengelyforgás lassulásának legfőbb oka az, hogy a Hold és a Nap által keltett dagályhullám a forgási iránnyal szemben fut végig a Földön, s így állandó fékezőerőt jelent. Ezen az elég általánosan elismert okon kívül más tényezők is felléphetnek. A Föld fokozatos tágulásával számoló geofizikai elméletek pl. a tágulást is sebességcsökkentő erőnek tekintik.

b) A *sebességingadozásoknak* két típusa van. A nagyobb ingadozások *szabályosak* és éves periódusuk van. A Föld forgása május végétől október elejéig lassul, azután gyorsul. A maximális kilengés  $0,04$ , tehát viszonylag könnyen mérhető.

A szabályos ingadozásokat a Földön bekövetkező tömegáthelyeződésekkel magyarázzák (pl. víz, hó, jég vagy légtömegek helyváltoztatása az évszakok szerint).

A *szabálytalan ingadozások* csak néhány százvezred másodperc nagyságrendűek, s feltehetően a pólusingadozással (lásd a 5.1.3. részben) kapcsolatosak.

### A Föld forgásának bizonyítékai és következményei

A csillagos ég naponkénti látszólagos körbefordulása ősidők óta ismert jelenség. A Föld forgásának ezt a legmesszetűnőbb és legközönségesebb bizonyítékát azonban az emberiség évezredekken át helytelenül értelmezte. A látszólagos mozgást valóságosnak gondolta, s abból éppen a Föld mozdulatlanságára következtetett. A Föld forgására vonatkozó szorványos felvetéseknek a fizika számos alapvető törvényének ismerete hiányában nem volt meggyőző erejük.

A középkori elme számára semmivel sem tűnt nagyobb képtelenségnek az a feltételezés, hogy a mozdulatlan Föld körül azonos szögsebességgel kering (és tesz meg naponta egy kört) valamennyi éggömbi objektum, mint az a nézet, hogy a Föld forog, de nagy sebességű forgása ellenére sem törik darabokra.

A Föld forgásának bizonyítására olyan földi fizikai jelenségeket kellett találni, amelyek csakis e forgás következményeiként magyarázhatók. *Ezért a Föld forgásának legismertebb és leggyakrabban emlegetett bizonyítékai (pl. az inga elfordulása vagy a leeső testek eltérülése) egyben a forgás következménye is.* Napjainkban e jelenségeknek (mint bizonyítékoknak) már főleg csak történeti értéke és érdekessége van.

Ma már a Föld forgásának közvetlen megfigyelésére is mód van (a világűrből vagy a Holdról) ezért annak közvetett bizonyítása szükségtelen.

### A forgó Földön fellépő erők és hatásaik

A forgó Földön olyan erőhatások lépnek fel, amelyek mozdulatlan égitesten nem hatnának. Ezek a relatív mozgást leíró

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + m\vec{a}_T + m\omega^2\vec{d} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

dinamikai alapegyenlet értelmében a pontra ható  $\vec{F}$  *szabadereőn*, valamint az  $m\vec{a}_T$  *gravitációs vonzóerőn* kívül látszólagos, ún. *tehetetlenségi erők*, amelyek a következők:

i.) A forgástengelyre merőleges  $m\omega^2\vec{d}$  *centrifugális erő*, (itt  $\vec{d}$  a forgástengelytől a mozgó pontig mutató, a tengelyre merőleges vektor), ami a Földet az egyenlítő mentén széthúzni törekszik, így azt lapulttá teszi. A Föld lapultságának igazolása ezért egyúttal a forgásának bizonyítéka is. Ezt a bizonyítékot az emberiségnek már a XVIII. századi földmérésekkel (Peru, Lappföld) sikerült megszereznie.

A Föld felszínének közelében mozgó pontra ható centrifugális erő az  $m\vec{a}_T$  gravitációs vonzóerővel összegződve az

$$m\vec{g} = m\vec{a}_T + m\omega^2\vec{d}$$

nehézségi erőt eredményezi, ahol  $\vec{g} = \vec{a}_T + \omega^2\vec{d}$  a *nehézségi gyorsulás*, amelynek iránya és értéke függ a földrajzi szélességtől.



### Az Eötvös effektus

Miután a Föld nyugatról kelet felé forog, egy a Föld felszínén kelet felé mozgó testre nagyobb centrifugális erő hat, mint egy nyugat felé haladóra. Következésképpen egy kelet felé mozgó test súlya csökken, a nyugat felé mozgóé pedig növekszik. Ezt — a később Eötvös-hatás néven emlegetett — érdekes felismerést *Eötvös Loránd*<sup>1</sup> 1904-ben tette közzé, majd a jelenség kimutatására 1915-ben speciális eszközt is szerkesztett.

ii.) A  $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$  eltérítő erőt tanulmányozójáról *Coriolis*<sup>2</sup>-erőnek nevezzük. A Coriolis-erő a forgó rendszerekben mozgó testekre hat, azokat eredeti mozgási irányuktól eltéríteni igyekszik. A vízszintes síkban mozgó testeket az északi féltekén a mozgási iránytól jobbra téríti el (a déli féltekén balra). A függőlegesen mozgó testek kitérnek a függőleges iránytól keletre. A Coriolis-erő néhány fontosabb, a Föld felszínén érzékelhető következménye a következő:

#### a) A szabadon eső testek kitérése

A Coriolis-erő eltérítő hatása kimutatható a kerületi sebességek vizsgálatával. Ezen az alapon igazolta kísérletileg a Föld forgását *Benzenberg*<sup>3</sup> 1804-ben. Több kísérlete azt mutatta, hogy a hamburgi Mihály-toronyból, 76 m magasból leejtett golyó a helyi függőlegetől átlagosan 0,9 cm-rel keletre érkezik le. (A kísérletet 1831-ben *Reich*<sup>4</sup> is megismételte egy freibergi bánya 158 m mély aknájában. Reich kísérletei a nagyobb ejtési magasság és a kevesebb zavaró körülmény miatt még egyértelműbb eredményt adtak.)

A jelenség könnyen megérthető, ha figyelembe vesszük, hogy a lehulló golyó tehetetlensége miatt „magával viszi” a fent kapott nagyobb sebességet, s a Föld forgásának irányában megelőzi az alatta lassabban mozgó felszíni pontot, tehát *kelet felé tér el*.

Vizsgáljuk egy tömegpont szabad esését a Föld felszínének közelében egy olyan, a Földdel együtt forgó rendszerben, amely rendszer  $z$  tengelye függőleges irányú,  $x$  tengelye dél felé,  $y$  tengelye pedig kelet felé mutat. Ha légköri ellenállástól eltekintünk, akkor a mozgást leíró összefüggések, első közelítésben

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{1}{3}\omega g \cos \varphi t^3, \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

<sup>1</sup>Eötvös Loránd (1848–1919), korának nemzetközileg is elismert magyar fizikusa. Eötvös mutatta ki 1909-ben igen nagy (egymilliárdodrésznyi) pontossággal a tehetetlen és a súlyos tömeg arányosságát az Eötvös-ingával, ami *Einstein* általános relativitáselméletének egyik kiindulópontja.

<sup>2</sup>G. Coriolis (1792–1843), francia fizikus.

<sup>3</sup>Friedrich Benzenberg (1777–1846), düsseldorfi matematikatanár.

<sup>4</sup>Ferdinand Reich (1799–1882), világhírű német fizikus, geofizikus és vegyész.

alakúak. Ezeknek megfelelően a  $h$  magasságból eső test esésideje

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

és a megfelelő — keleti irányú — kitérés nagysága:

$$\Delta y = \frac{2}{3}\omega\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\cos\varphi.$$

### b) Az inga lengési síkjának elfordulása

A Coriolis-erő egyik legismertebb következményét *Foucault*<sup>5</sup> mutatta ki híres ingakísérletével (1851). Foucault a párizsi Pantheonban 67 m hosszú, 28 kg tömegű ingát állított fel. Lengése során az inga vonalakat rajzolt a templom padlózatára hintett homokba. Az inga által hagyott nyomok már 1–2 óra elteltével jól láthatóan keresztezték egymást. A jelenség könnyen megérthető, ha figyelembe vesszük, hogy az inga lengési síkja megtartja térbeli helyzetét valamely, az álló csillagokhoz kapcsolt inerciarendszerhez viszonyítva, miközben a Föld elfordul ehhez viszonyítva.

A Föld felszínén a különböző földrajzi szélességeken az inga lengési síkjának körülfordulási ideje:

$$T_\varphi = \frac{24^h}{\sin\varphi},$$

ami a pólusokon pontosan  $24^h$ , míg az egyenlítőn  $\infty$ , ami azt mutatja, hogy ott a lengési sík helyzete változatlan.

A Föld forgásának következtében fellépő eltérítő erő bemutatott hatásainak további érdekes következményei is ismertek. Ilyenek:

– *A Föld forgásának tükröződése a nagy földi légkörzésben.* A trópusi magas nyomású területről az egyenlítő felé tartó passzát szelek irányában jelen levő keleties összetevő annak a következménye, hogy a pásszátáramlás levegője kisebb kerületi sebességű övezetből a nagyobb sebességű felé tart.

– A Föld forgása miatt jön létre az *örvények meghatározott sodrási iránya*.

– A megfigyelések szerint ugyancsak a Föld forgásával magyarázható, hogy *az északi féltekén a folyók jobb partjukat alámoszák és meredekké formálják*.

<sup>5</sup>Jean Bernard Leon Foucault (1819–1868), francia fizikus.

### 5.1.3. A pólusingadozás

A Föld forgásával kapcsolatos jelenség a pólusingadozás is. A *pólusingadozás* azt jelenti, hogy a Föld forgástengelye kismértékben ingadozik a tehetetlenségi vagy szimmetriatengelyhez képest.

Először *Euler* (1765) — elméleti mechanikai megfontolások alapján —, vetette fel azt a gondolatot, hogy ha a Föld merev test, akkor forgástengelyének mintegy 305 nap alatt egy kúpot kell leírnia a tehetetlenségi tengelye körül.

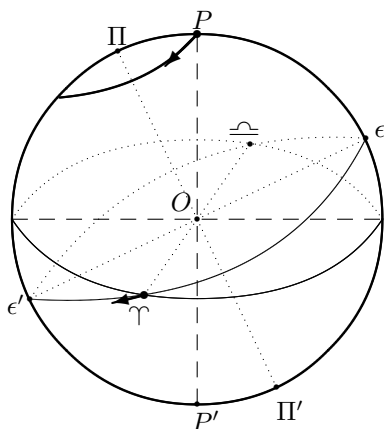
A jelenséget 1884-ben *Küstner* bizonyította, aki mérései során periodikus változást észlelt Potsdam földrajzi szélességének értékében. 1891-ben Potsdamban és Waikikiben végzett összekapcsolt megfigyelések is azt mutatták, hogy a sarki tengely valóban végez kis periódusú mozgást, amely a földrajzi szélességek rendkívül kis mértékű ingadozását okozza. Ugyanebben az évben *Chandler* megállapította, hogy a pólusingadozást két fontos ritmusos mozgásra lehet visszavezetni, amelyek periódusai 12, illetve 14 hónaposak. A két periódus amplitúdója nem állandó, de átlaguk a 14 hónapos esetben  $0''2$ , míg a 12 hónaposé  $0''1$ . Az *Euler* feltételezte 10 hónapos mozgás merev Földre vonatkozik, de bolygónk rugalmassága megnyújtja azt 14 hónapra. Ezt az ingadozást *Chandler-periódus*nak nevezték el. A 12 hónapos ritmust általában meteorológiai tényezőkkel hozzák kapcsolatba.

A forgástengely pillanatnyi földfelszíni metszéspontjait *földrajzi pólusok*-nak, míg a tehetetlenségi tengely dőféspontjait — ami körül a földrajzi pólusok mozognak *csillagászati pólus*nak nevezzük. A földrajzi pólus nem pontosan kört ír le a csillagászati pólus körül, hanem szabálytalan spirálist, amely általában egy 20 m-es oldalú négyzetben belül marad. A pólus mozgásának iránya a Föld forgásának irányával egyezik meg.

### 5.1.4. A precesszió és a nutáció

A Föld mozgásával kapcsolatos jelenségek a precesszió és nutáció. A *precesszió* jelenségét *Hipparkhosz*<sup>6</sup> fedezte fel a Kr. e. második században. Észrevette, hogy az általa készített csillagkatalógusban a csillagok ekliptikai hosszúsága szisztematikusan 1;5-kal nagyobbak, mint a 150 évvel korábban készített *Arisztüllosz*- és *Timokharisz*-féle katalógusban. Hipparkhosz ezt — nagyon helyesen — úgy értelmezte, hogy a tavaszpont az állócsillagok mozdulatlan háttéréhez viszonyítva elmozdul, retrográd irányban. Tehát a tavaszpont mintegy elébe megy a Napnak (szembe megy vele) az ekliptikán, innen a *precesszió* (precedere – lat. megelőzés) elnevezés.

<sup>6</sup>Hipparkhosz (Kr. e. 190–125), sokak szerint az ókor legjelentősebb csillagásza.



5.2. ábra. A tavaszpont precessziója

A precesszió szögsebességének nagyságát később *Ptolemaiosz*<sup>7</sup>, *Al-Battani*<sup>8</sup> (879), *Bradley*<sup>9</sup> és mások észlelések segítségével határozták meg. A modern mérési eredmények alapján megállapított *precessziós szögsebesség*  $50'',27/\text{év}$ , ami azt jelenti, hogy a precessziós mozgás periódusa mintegy 26 000 év.

A precesszió jelensége úgy is felfogható, mint a különböző égi koordináta-rendszerek alapsíkjának egymáshoz viszonyított elmozdulása. Első megközelítésben az ekliptika síkja rögzítettnek tekinthető. Ekkor a tavaszpont (♈) ekliptikai vándorlása az egyenlítő síkjának elmozdulását jelenti, 26 000 éves periódussal. Ez azt jelenti, hogy az északi pólus  $P$  (és így a világtengely) ugyanazzal a periódussal elmozdul, egy  $\varepsilon$  sugarú kört írva le a  $\Pi$  ekliptikai pólus körül (5.2. ábra). A precesszió itt leírt ún. *luniszoláris* komponensének oka azzal magyarázható, hogy mivel a Föld nem tökéletesen gömbszimmetrikus szerkezetű, így az *egyenletlenségekre kifejtett vonzóerő a Nap és a Hold részéről módosítja a Föld tengelyforgásának periódusát és a tengely irányát is*.

Kitartó megfigyelések és kutatások kimutatták, hogy a precesszió jóval bonyolultabb jelenség, mint azt előbb vázoltuk, mivelhogy az ekliptika síkja is változó, azaz az ekliptika és egyenlítő  $\varepsilon$  hajlásszöge is változik lassan. Ennek a változásnak az oka a bolygók zavaró hatásában (perturbációjában) keresendő, ezért neve *planetáris precesszió*. A *bolygók* ugyanis távolságuk miatt nem befolyásolják érzékelhetően a Föld tengelyforgását, viszont *zavarják a Nap körüli keringését, módosítva az ekliptika síkjának helyzetét* ami planetáris precesszióként jelentkezik.

A precessziós mozgás fontosabb következményei a következők:

1. *Az északi pólus vándorlása az éggömbön.* A  $P$  pólus helyzete ma az  $\alpha$ -ja ( $UMi$  (a Kiscgöncöl  $\alpha$ -ja, Polaris vagy Sarkcsillag) közelében van, mint-

<sup>7</sup>Klaudiosz Ptolemaiosz (87–160), a hellenizmus utolsó nagy tudósa, csillagásza.

<sup>8</sup>Al-Battani (858?–929), teljes nevén Abu Abdallah Mohammad ibn Jabir ibn Sinan al-Raqqi al-Harrani al-Sabi al-Battani, a leghíresebb arab csillagász.

<sup>9</sup>James Bradley (1693–1762), angol királyi csillagász, az aberráció felfedezője.

egy 4000 évvel ezelőtt az  $\alpha$  *Draconis* (Sarkány  $\alpha$ -ja) közelében volt és mintegy 12 000 év múlva a Vega ( $\alpha$  *Lyrae*) közelében lesz, ekkor majd a Lant csillagképben ragyogó Vega lesz a „Sarkcsillag”.

2. *Az égitestek különböző égi koordinátáinak változása az időben.* Ez a változás kiküszöbölhető, ha a mért koordinátákat a precessziós korrekciókkal módosítjuk. A csillagkatalógusok egy adott napéjegyenlőséghez viszonyított ekvatoriális koordinátákat ún. *közép koordinátákat* adják. Ilyen közép-koordinátákat egy-egy század kezdetére vagy közepére határoznak meg, pl. 1950, 2000, 2050, stb.
3. *A sziderikus és tropikus év közötti különbségek.* A *sziderikus év* (vagy *csillagév*) a Föld Nap körüli keringési periódusa egy rögzített koordináta-rendszerhez (állócsillagokhoz) viszonyítva. A precesszió következtében a csillagév mintegy 20 perccel hosszabb, mint a tropikus év, ami a tavaszponttól tavaszpontig való keringéshez szükséges idő.

### A nutáció

A Hold tömegvonzása — a Naptól eltérően — nem egyenletes forgatónyomatékokat fejt ki a Föld tömegére és forgástengelyére. A holdpálya ugyanis a földpálya síkjával mintegy  $5^\circ$ -os szöget zár be. A két sík metszésvonala a Nap gravitációs zavaró hatására 18,6 év alatt körbefordul. E mozgás a Hold Földre gyakorolt forgatónyomatékának periodikus változását is jelenti, amely az égi pólus mozgásában 18,5 éves ritmusos ingadozást okoz. Ez a *nutáció*, amelynek következtében a Föld tengelye nem egyszerű, hanem hullámvonalakkal tarkított kúpszerű pályát ír le. A precesszió 26 000 éves periódusán belül 1 400 nutációs ritmus van.

## 5.2. A Föld alakja és méretei

Bolygónk alakjának meghatározása több ezer éve foglalkoztatja a különböző korok laikus embereit és tudósait egyaránt. Bizonyos időszakokban (középkor) a tudomány központi problémájává vált és a Föld alakjával kapcsolatos állásfoglalás, a tudományos világnézet alapja lett.

Az ókorban különböző elképzelések léteztek. *Homérosz* Iliászában (Kr. e. 800 körül) a korong alakú Földet a világóceán veszi körül. A milétoszi iskola legjelesebb képviselője *Thalész* ugyancsak korong alakúnak képzelte el a Földünket. *Anaximandrosz* (Kr. e. 611–547) és *Hérakleitosz* (Kr. e. 500–480) térképet is készítettek az akkor ismert világról. E térképek Földünket kör alakúnak ábrázolják.

Vizsgálódásunkban továbbá a *föld alakját* fizikailag és matematikailag pontosan meghatározhatónak tekintjük, a felszíni domborzati változatosságok elhanyagolásával. Az évezredek során felhalmozódott ismeretek bővülésével a Föld alakjára vonatkozóan is különböző megközelítések alakultak ki, mint a *gömb*, *forgásellipszoid*, vagy *geoid*, a továbbiakban csupán a három felsorolt, matematikailag és fizikailag is pontosan leírható közelítéssel foglalkozunk.

### 5.2.1. A gömb alakú Föld

A Föld alakjának első, tudományos szempontból is elfogadható és számos alkalmazás esetén jó közelítésként használható modellje a *gömb alak*.

Már az ókorban felfedeztek olyan jelenségeket, amelyek a Föld felületének görbültségére utaltak. A legkézenfekvőbb ilyen, könnyen megfigyelhető jelenség az, hogy a parthoz közeledő hajó fokozatosan emelkedik a horizont fölé, először az árbocrúd hegyét pillantjuk meg, majd fokozatosan „emelkedik ki a tengerből” a hajótest is.

*Pithagorász*<sup>10</sup> és tanítványai szerint Földünk tökéletes mértani test, s mint ilyen csak gömb alakú lehet. Meggyőződésüket csillagászati megfigyeléssel is alátámasztották: látva, hogy a Hold megvilágított felületének határa körívszerű következtettek kísérőnk, és ebből analógia alapján a Föld gömb alakjára.

*Arisztotelész*<sup>11</sup> már jóval meggyőzőbb megfigyeléseket is végzett. Megállapította, hogy holdfogyatkozásakor a Föld árnyéka a Holdon kör alakú, a sarkcsillag magassága észak felé haladva nő.

Később azt is tapasztalták, hogy nyugat-kelet irányban haladva a csillagok delelési ideje is változik a megtett úttal arányosan.

A két utóbbi észrevétel arra utal, hogy a Föld felszíne bármely pontján két merőleges irány (észak-dél, kelet-nyugat) mentén egyenletesen görbült. *Az egyetlen olyan felület viszont, amely ezzel a tulajdonsággal bír, a gömb.*

A középkoron is végighúzódo tudományos vita eldöntéséhez jelentősen hozzájárult az a tény, hogy a XVI. század elején *Magellán* és *del Cano* állandóan nyugat felé hajózva megkerülték a Földet, visszatérve a kiindulási pontba.

Napjaink embere számára, az úrkorszak beköszöntésével, mi sem természetesebb, mint az, hogy űrhajósaink körülrepülik a gömbölyű Földet, felvételeket készítenek róla.

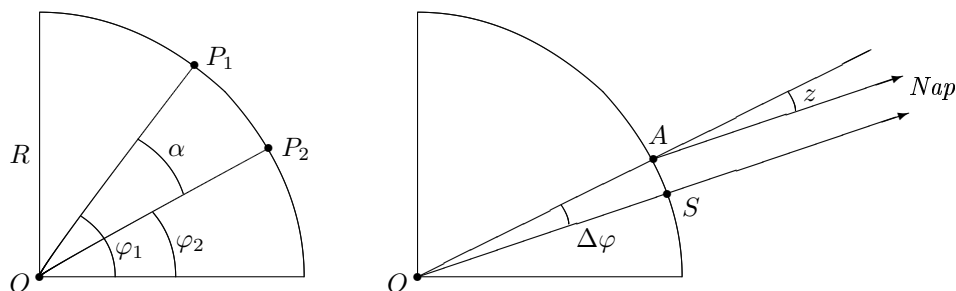
<sup>10</sup>Pithagorász (Kr. e. VI. század) görög matematikus, filozófus, csillagász.

<sup>11</sup>Arisztotelész (Kr. e. 384–322), az ókor egyik legnagyobb görög filozófusa, tudósa.

Az alak ismeretében már régen megkísérelték a *Föld méreteinek meghatározását*. Időszámításunk előtt a III. sz. végén *Eratoszthenész*<sup>12</sup> végezte az első méréseket és számításokat. Elgondolásának lényege az volt, hogy meghatározza valamely legnagyobb gömbi kör ívdarabjának hosszát ( $s$ ), és az ehhez tartozó  $\alpha$  középponti szög radiánban vett mértékét (5.3. ábra, első rajz). Ezekből az adatokból ugyanis a gömb sugara az

$$R = \frac{s}{\alpha}$$

összefüggésből kiszámítható. Az  $\alpha$  szög, ha a gömbi főkör meridián irányú, tulajdonképpen nem más, mint a meridiánon felvett két hely földrajzi szélességének különbsége ( $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$ ).



5.3. ábra. A Föld sugarának a meghatározása

Eratoszthenész a szélességi különbséget abból a régi megfigyelésből határozta meg, hogy a Nílus menti Syene (ma Asszuán) városában a nyári napforduló idején a delelő Nap sugarai a nilométereknek nevezett vízállásmérő kutakba merőlegesen világítanak be, a kútba nincsen árnyék. Tehát a Nap Syenében ekkor a zenitben delel. Ugyanezen a napon Eratoszthenész gnomon segítségével megmérte a Nap delelési magasságát Alexandriában, és azt észlelte, hogy az a kör  $1/50$  részével ( $7^\circ 12'$ -cel) eltér a zenittől. Amint a 5.3. ábra második rajzán láthatjuk, ez a szög éppen a két észlelési pont földrajzi szélességkülönbségével egyenlő.

A görög tudós úgy tudta, hogy a két város ugyanazon a délkörön fekszik, így a köztük levő távolság a Föld kerületének  $1/50$  része. Az Alexandria és Syene közti távolságot nem közvetlenül mérte, hanem az utazó kereskedők adatai alapján határozta meg ötezer stadionban.

<sup>12</sup>Eratoszthenész (Kr. e. 276–195), a hellenizálódott Alexandria tudós könyvtárosa.

Eratoszthenész szerint a meridián hossza  $50 \times 5\,000 = 250\,000$  stadion, azaz 46 242,5 km, ha az átalakításhoz az akkoriban általánosan használt olimpiai stadiont (184,97 m) használjuk. Ha egyiptomi stadionnal számolunk (157,5 m), akkor még pontosabb értéket kapunk. Eratoszthenész eredménye viszonylag pontos, annak ellenére, hogy több mérési hiba is terheli számítását. Például Alexandria és Syene valódi szélességkülönbsége  $7^\circ 7'$ , és a két település nem ugyanazon hosszúsági kör mentén fekszik. A mérési hibák ellenére az eljárás alapötlete mindenképpen tökéletes.

Az ókortól kezdve a XX. századig számos mérést végeztek a Föld sugarának minél pontosabb meghatározására. Itt csupán néhány nevezetesebb mérés felsorolására vállalkozunk.

Poszidoniusz<sup>13</sup> például Rhodosz és Alexandria szélességkülönbségét a Canopus ( $\alpha$  Carinae) csillag észleléséből határozta meg, míg az ívhosszat a hajóút időtartamából becsülte meg. Az általa számolt érték a Föld sugarára 7066,5 km.

Az antik kultúrát átmentő arab világban a legfontosabb fokmérést 827-ben végeztette Al Manum<sup>14</sup> kalifa a Bagdadtól ÉNY-ra levő Szindsár sivatagban. Az ívhosszat ő már közvetlenül mérte meg mérőláncok segítségével, míg a szélességkülönbséget a Sarkcsillag magasságának különbségeként számolták ki. A Föld sugara Al Mamun mérései alapján 7013 km.

Évszázadokkal később 1525-ben egy párizsi orvos J. Fernel<sup>15</sup> határozta el, hogy Eratoszthenész ötlete alapján megméri a Föld sugarát. Ő a Párizs és Amiens közötti ívdarab hosszát egy koci kerekének fordulatszámával határozta meg, a két város közötti, nagyjából É–D irányú országúton. A földrajzi szélességeket ő is a sarkcsillag alapján mérte meg. A Föld sugara az ő eredményei szerint 6373,2 km, ami már elég közel áll a ma ismert értékhez.

A távolságmérésre igen jelentős új módszert Snellius<sup>16</sup> dolgozott ki 1615-ben. A *háromszögelés* néven ismert távolságmérés lényege abban áll, hogy két pont közti távolság meghatározását egy rövidebb, pontosan mérhető hosszúságú alapvonal hosszának valamint szögek mértékének a megmérésére vezeti vissza, amelyek alapján a keresett távolság kiszámolható. Snellius a Földgömb sugarát a második, 1622-ben végzett mérése alapján 6378,7 km-ben állapította meg.

A XVII. században megsokasodtak a Föld méreteinek meghatározására

<sup>13</sup>Poszidoniusz (Kr. e. 135–51) – görög filozófus, politikus, csillagász, geográfus és történész, korának legnagyobb polihisztorja.

<sup>14</sup>Al Mamun (786–833) – a filozófia és tudományok nagy patrónusaként ismert kalifa.

<sup>15</sup>Jean Fernel (1497–1558) – francia orvos.

<sup>16</sup>Snell, Willebrord (1591–1626) – Snellius néven közismert holland matematikus és csillagász.



irányuló mérések. A cél *egy fok nagyságú meridiánív hosszának meghatározása* volt, ezért kapták ezek a munkálatok a *fokmérés* elnevezést. A J. Picard<sup>17</sup> által 1669-ben kezdett méréseknél a szögmérésekhez már fonalkeresztes távcsövet, míg az alapvonal hosszának méréséhez fémvégű ütközővel ellátott mérőrudat használtak.

1683 és 1756 között G. D. Cassini<sup>18</sup>, majd később fia, Jacques Cassini<sup>19</sup> a mérések sorozatát végezte el különböző vidékeken. A mérési eredmények alapján arra következtettek, hogy  $1^\circ$  középponti szögnek nem ugyanaz az ívhossz felel meg mindenütt, ami azt jelenti, hogy a Föld nem pontosan gömb alakú. Érdekességként jegyezzük meg, hogy Cassini arra következtetett, hogy a Föld sarkainál kicsúcsosodó, azaz citrom alakú.

### 5.2.2. Az ellipszoid alakú Föld

A fokmérésekkel szinte egy időben elméleti elgondolások alapján is arra a következtetésre jutottak, hogy még ha a belső anyageloszlás homogén lenne is, csak abban az esetben lehetne a Föld szabályos gömb alakú, ha nem forogna a tengelye körül. Ugyanis a forgás következtében ható centrifugális erő az egyenlítő mentén megnyújtotta a bizonyos mértékig képlékeny anyagú Földet. Ezt az alakot nevezzük *forgási ellipszoid*-nak. A tömegvonzás iránya a Föld középpontja felé mutat. A centrifugális erő és a tömegvonzás eredője — a helyi nehézségi erő — a gömb esetében csak a pólusokon és az egyenlítőn mutat a középpont irányába, és nagysága a pólustól az egyenlítőig fokozatosan csökken. A forgási ellipszoid felületére viszont a nehézségi erő (homogén anyageloszlás esetén) minden pontban merőleges, vagyis ez a tengelye körül forgó, egyenletes anyageloszlású, bizonyos mértékig folyadékszerű tömeg egyensúlyi alakja, amelynek a gömbtől való eltérése a forgássebesség és a tömegvonzás függvénye.

A XVIII. században az elméleti megfontolások alapján bizonyossá vált, hogy a *Föld alakját legjobban megközelítő szabályos matematikai felület nem a gömb, hanem a forgási ellipszoid*.

A forgásellipszoidot úgy származtathatjuk, hogy egy ellipszist a kistengelye körül megforgatunk. Így az ellipszoidnak is, akárcsak az azt generáló ellipszisnek, van kis- és nagytengelye. Jellemző adata a *lapultság*. Egy ellipszoidot is megadhatunk két féltengelyével:  $a$ -val (fél nagytengelyével) és  $b$ -vel (fél kistengelyével). De jellemezhető pl. egy mérettel és az alakot jellemző lapultsággal. A lapultság mértéke:  $\alpha = \frac{a-b}{a}$ . A Föld lapultságának

<sup>17</sup>Piccard, Jean (1620–1682) – francia csillagász.

<sup>18</sup>Cassini, Gian Domenico (1625–1712) – francia csillagász.

<sup>19</sup>Cassini, Jacques (1677–1756) – francia csillagász.

mértéke a műholdas mérések alapján  $\frac{1}{298,257}$ .

Az ellipszoid alakú Földön a földrajzi szélességi körökkel szemben a meridiánok nem körök, hanem ellipszisek.

Azt az ellipszoidot, amelynek középpontja egybeesik a Föld középpontjával és kistengelye a Föld forgástengelyével azonos, *földi ellipszoid*nak nevezik. Ennek meridián irányú metszete a földi vagy *meridiánellipszis*.

A korábban említett Cassini-féle citrom alak ellentmondásba került az elméleti megfontolások alapján levezetett forgásellipszoid alakkal, amelynek lapultságára Newton pl. mechanikai megfontolások alapján  $1/230$  értéket számolt. A XVIII. század tudományos világában igen élénk vita alakult ki a citrom, illetve ellipszoid alak hívei között. A kérdés eldöntésére a Francia Akadémia expedíciókat szervezett 1735-ben Peruban és 1736-ban Lappföldön, hogy fokméréseket végezzenek. Ezek a mérések már a pólusainál lapult ellipszoidalakot igazolták.

A nagy francia forradalom idején a mértékek egységesítése és racionálisabb meghatározása is terítékre került. A Francia Akadémia megbízást kapott olyan hosszúsági mérték meghatározására, amelynek természetes alapja van, így bármikor újból előállítható és ellenőrizhető. *Az Akadémia egy földi meridián negyedének* — a pólustól az egyenlítőig tartó szakasz — *tizedmilliomod részét választotta egységül, és ezt méternek nevezte el.* A mérési pontatlanságok kiküszöbölése érdekében ma már nem ez az egyezményesen elfogadott méter-definíció. (A méter annak az útnak a hosszúsága, amelyet a fény vákuumban a másodperc 299 792 458-ad része alatt megtesz.)

A későbbi — egyre pontosabb — fokmérések eredményeként arra a következtetésre jutottak, hogy a Föld valódi alakja a forgásellipszoidtól eltérő.

### 5.2.3. A föld alakja a geoid

A Föld egyenlőtlen, inhomogén tömegeloszlásának megállapítása vezetett új eredményre, a *geoid* felismerésére, valamint arra, hogy a Föld valódi alakja geofizikailag meghatározható szintfelület.

A Föld alakja a tömegvonzás következtében fellépő gravitációs erő, valamint a Föld forgásának következtében fellépő centrifugális erő eredőjeként ható nehézségi erő segítségével értelmezhető egzakt módon. Azon pontok halmazát, amelyekben a nehézségi erő változó nagysága egy bizonyos értéket vesz fel *szintfelületek*nek nevezzük. A szintfelületek azt is jelentik, hogy a föld középpontjából kiindulva a szintfelület bármely pontjáig haladva a tömegvonzás és centrifugális erő ellenében ugyanakkora munkát kell végezni. A szintfelületek vagy ekvipotenciális felületek másik jellemző tulajdonsága, hogy azok minden pontjában a nehézségi erő normális irányú. A nehézségi

erő nagysága a Föld középpontjától távolodva változik. Különböző nehézségi erő értékekhez különböző, a Föld középpontja körül zárt, gömbszerű felületet alkotó szintfelületek rendelhetők. Ezek a szintfelületek egymás alatt helyezkednek el, nem metszve egymást. Homogén eloszlású, nem forgó testek esetén ezek a szintfelületek gömb alakúak lennének. Ha egy homogén anyageloszlású test forgásban van, akkor a megfelelő szintfelületek egymásra rétegződő forgási ellipszoidok. Ezért hasonlít jó közelítéssel a Föld alakja egy forgási ellipszoidhoz. Mivel a Föld tömegeloszlása nem homogén, a Földünk nehézségi erejének szintfelületei enyhén eltérnek a forgási ellipszoid alaktól. Ezen szintfelületek közül kiválasztva azt, amely a legjobban simul a Föld felszínéhez, értelmezhető a Földünk geofizikai alakja.

*A Föld valódi geofizikai alakja — a geoid — a ténylegesen fellépő, szabálytalan térbeli eloszlású nehézségi erőnek a hullámzástól eltekintett átlagos tengerszinttel egy magasságú szintfelülete.*

Összefoglalva az eddigieket, elmondhatjuk, hogy Földünk alakja a gömb alaknál pontosabb közelítésben matematikailag leírható forgási ellipszoiddal, amelyet a Föld *normál alakjának* nevezünk. Ennek jellemző paraméterei: fél nagytengely  $a = 6\,378\,173$  m, lapultság  $\alpha = \frac{1}{298,257}$  (ahonnan a fél kistengely  $b = a(1 - \alpha) = 6\,356\,752$  m).

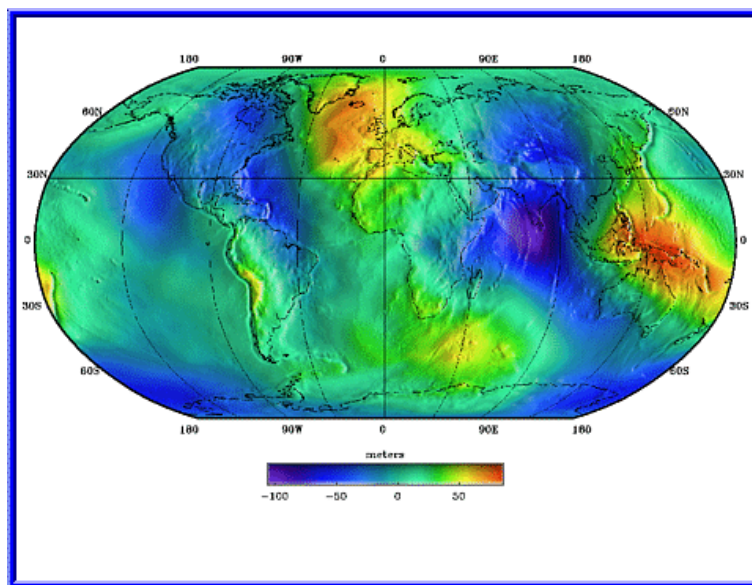
A pontosabb közelítés a geoid alak, a föld *geofizikai alakja*. Ennek meghatározása a normál alakhoz, az ellipszoidhoz viszonyítva történik. A két felület eltérését a középpontból kiinduló félegyenes mentén *geoidundulációnak* nevezzük ( $N$ ). Egy 1974-ben készült részletes műholdas méréssorozat alapján megállapítható, hogy ez az eltérés a Föld különböző pontjain  $-106$  és  $+85$  méter között változik. A legnagyobb pozitív irányú eltérések az óceáni területeken találhatók, pl. Ny-Európa és É-Amerika között ( $68$  m), Új-Guinea vidékén ( $78$  m). Negatív geoidundulációt mértek például Közép-Ázsiában ( $-56$  m), vagy az Indiai-óceánban ( $-106$  m). Az unduláció értéke az É-i póluson  $+18,9$  m, míg a D-i póluson  $-25,8$  m.

#### 5.2.4. Szélességek

A Föld különböző alakjainak megfelelően különböző földrajzi szélességek értelmezhetők:

*Csillagászati szélesség* ( $\varphi$ ) — a függőön irányának az egyenlítő síkjával bezárt szöge;

*Geocentrikus szélesség* ( $\phi$ ) — a megfigyelő helyét a Föld (geometriai) középpontjával összekötő egyenesnek az egyenlítővel bezárt szöge;



5.4. ábra. A geoidunduláció változása

*Geodéziai szélesség* ( $\psi$ ) — a forgási ellipszoid normálisának az egyenlítővel bezárt szöge.

A mérések azt mutatják, hogy a geodéziai és csillagászati szélességek különbsége nem haladja meg a  $3''$  ( $|\psi - \varphi| < 3''$ ). Így a csillagásztban a geodéziai szélesség jól közelíthető a csillagászati szélességgel.

## 6. fejezet

# A bolygók és holdjaik látszólagos mozgása

### 6.1. A bolygók látszólagos mozgása az éggömbön

Már az ókorban megfigyelték, hogy látszólagos mozgásuk szerint az égitestek két csoportba sorolhatók:

- „*álló csillagok*” — a szabad szemmel látható égitestek legnagyobb hányada, amelyek egymáshoz viszonyítva nem változtatják helyzetüket, csak az éggömb napi látszólagos mozgásában vesznek részt;
- *bolygók (planéták)* — azon égitestek, amelyek bolyonganak az állócsillagok között, az ekliptikát övező állatövi csillagképekben.

Az ókorban „hét bolygóról” beszéltek, ugyanis a szabad szemmel látható öt bolygóval (Merkúr, Vénusz, Mars, Jupiter és Szaturnusz) egy családba sorolták a hozzájuk hasonlóan bolyongó Napot és Holdat. A hét napjainak elnevezései révén több nyelv is őrzi ennek emlékét. A latin nyelvben ugyanis ezen égitestek nevei alapján (Sol, Luna, Mars, Mercur, Jovi, Veneri és Saturn) a hét napjait dies Solis, dies Lunae, dies Martis, dies Mercurii, dies Jovi, dies Veneri, illetve dies Saturni-nak nevezték. A román nyelvben használt elnevezések — a vasárnap kivételével (luni, marți, miercuri, joi, vineri, sâmbătă) — teljesen visszaadják ezt a hagyományt. Hasonló elemek találhatók például az angol (Sunday, Monday, Saturday), német (Sonntag, Montag) vagy francia (lundi, mercredi, jeudi, vendredi) nyelvekben.

A szabad szemmel nem látható bolygókat jóval később fedezték fel, a távcsövek megjelenése és fejlődése, valamint az égi mechanika kialakulása-

nak köszönhetően: Uránusz (W. Herschel<sup>1</sup>, 1781), Neptunusz (J. G. Galle<sup>2</sup>, 1846) és a Plútó (1930, C. W. Tombaugh<sup>3</sup>). 2006 augusztusában a Nemzetközi Csillagászati Unió prágai közgyűlésén a bolygók definícióját pontosították és ennek következtében attól az időponttól a Plútót a kisbolygók családjába soroljuk, a Neptunusz pályán túl keringő számos kisméretű égitesthez hasonlóan.

A bolygók a maguk során a Földről megfigyelt látszólagos mozgásuk szerint ugyancsak két csoportba sorolhatók:

- *belső* vagy *alsó bolygók*: Merkúr (☿) és Vénusz (♀), és
- *külső* vagy *felső bolygók*: Mars (♂), Jupiter (♃), Szaturnusz (♄), Uránusz (♅) és Neptunusz (♆).

A belső bolygók csoportját alkotó Merkúr és Vénusz közös jellemzője, hogy ezek látszólag mindig a Nap közelében tartózkodnak, azzal azonos, vagy szomszédos állatövi csillagképben. Ezek vagy kora este, naplemente után láthatók a nyugati égbolton, a Naphoz viszonyított *keleti elongációban* (*kitérésben*), vagy hajnalban, napfelkelte előtt a keleti égen *nyugati elongációban*. A Vénusz népies neve éppen ezért „*Esthajnalcsillag*”. A Nap környékén hol direkt, hol retrográd irányban mozognak az égbolton. Az irányváltoztatáskor elért *maximális elongáció*  $18^\circ - 28^\circ$  között változik a Merkúr és  $45^\circ - 48^\circ$  között a Vénusz esetében. Amikor ezen bolygók látszólagos iránya a Nap irányához közeledik (*konjunkció* = *együttállás*), olyankor ezen égitestek szabad szemmel több napig nem láthatók. A Merkúr a Naphoz való közelsége miatt igen ritkán távolodik el annyira, hogy szabad szemmel is jól látható legyen.

A felső (külső) bolygók látszólagos mozgása igen összetett. Amikor egy külső bolygó naplemente után a nyugati égen látható, akkor direkt irányban halad, mint a Nap, de annál kisebb szögsebességgel, így a köztük lévő szögeltérés az *együttállásig* (amikor a bolygó és Nap ekliptikai hosszúsága megegyezik) csökken. Együttállás környékén a bolygó nyilvánvalóan „elvész” (nem látható) a Nap fényében. Majd a Nap eltávolodik a bolygótól és az hajnalban lesz újból látható, napkelte előtt. A direkt mozgási sebesség fokozatosan csökken, míg teljesen megszűnik (*stáció*) és a bolygó retrográd irányú látszólagos mozgásba kezd. Az *oppozíció* idején a bolygó a Nappal átellenes állatövi csillagképben jelenik meg (az ekliptikai hosszúságok különbsége

<sup>1</sup>Herschel, William (1738–1822) — angol csillagász.

<sup>2</sup>Galle, Gottfried (1812–1910) — német csillagász.

<sup>3</sup>Tombaugh, Clyde William (1906–1997) — amerikai csillagász.

180°). Ezt követően a retrográd irányú mozgás sebessége is csökken, egy újabb stáció következik, majd a direkt irányú mozgás újratekintésével újra indul a ciklus. Minden szembenállás körül a bolygó egy-egy hurkot ír le az éggömbön. Amikor a bolygó Naphoz viszonyított ekliptikai kitérése  $\pm 90^\circ$  kvadraturáról beszélünk, ami lehet keleti, vagy nyugati, attól függően, hogy a bolygó keletre vagy nyugatra van a Naptól.

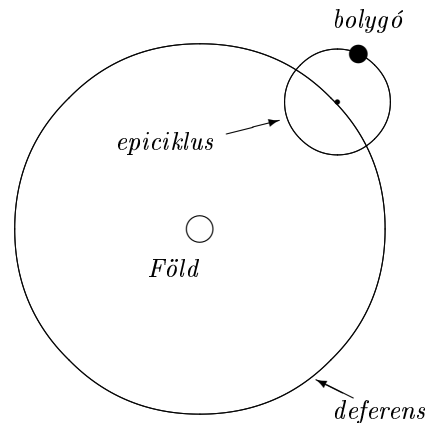
Tehát míg a Nap és a Hold látszólag egy-egy nagy kört ír le az éggömbön, addig a bolygók látszólagos mozgása nagyon komplikált. Ezen mozgások magyarázatára a tudomány különböző fejlődési szintjein különböző elméleteket dolgoztak ki.

## 6.2. A ptolemaioszi geocentrikus világrendszer

Az Univerzum szerkezetére vonatkozóan több geocentrikus elmélet is létezett az ókorban. Ezen elméletek alapelveit a görög természettudomány és filozófia örököse, Klaudiosz Ptolemaiosz<sup>4</sup> foglalta össze *Megale syntaxis* című művében, amely arab fordításban *Almagest* címen maradt ránk. Ptolemaiosz műve a görög csillagászati ismeretek és csillagászati megfigyelési eszközök leírása mellett tartalmazza a síkháromszögtan teljes kifejtését is.

A ptolemaioszi, geocentrikus világrendszer négy alapfeltevésre épül, amelyek a következők:

1. Az Univerzum középpontjában a Föld található.
2. A Föld mozdulatlan.
3. A Föld körül forognak az égi gömbök, közös középpontjuk körül, ezen mozog rendre a Hold, a Nap és a bolygók.
4. Az égitestek körpályákon mozognak egyenletesen.



6.1. ábra. A bolygók bonyolult látszólagos mozgásának magyarázata a geocentrikus rendszerben

<sup>4</sup>Ptolemaiosz, Klaudiosz (kb. 87–165) — görög csillagász.

A bolygókat hordozó gömbök (szférák) sorát a nyolcadik zárja, erre vannak felrögzítve az állócsillagok.

A bolygók látszólagos mozgása az *epiciklusok* és az ún. *deferensek* kombinációjával magyarázható, amelynek alapötlete még Apollóniosztól<sup>5</sup> származik. Minden bolygó a feltevés szerint egyenletesen mozog állandóan előre, ugyanabban az irányban egy kis kört, az epiciklust téve meg, melynek a középpontja azonban egy sokkal nagyobb körön, a deferensen mozog (6.1. ábra). A mozdulatlan Föld a bolygókhoz tartozó deferensek közös középpontjában található. Az összes deferens és epiciklus az állócsillagokat tartalmazó gömb belsejében van.

Az égitestek (éggömb) napi mozgását az egész Univerzumnak mint egységes egésznek a rögzített Föld körüli forgó mozgásával magyarázta.

Az epiciklusokra és deferensekre vonatkozó keringésidők megfelelő megválasztásával a bolygók tényleges viselkedése, és különösen pályájuk huroképzése jól magyarázható volt, segítségével igen megbízhatóan előre jelezhető volt egyes bolygók várható pozíciója (*efemerisze*).

Ez a bonyolult rendszer, amely a csillagászok egész seregének az erőfeszítését tükrözi, nem állítja, hogy a valóságot írja le, csupán a mozgások geometriai leírásának egy olyan lehetséges változatát adja, amely a kor megfigyeléseivel és Arisztotelész fizikájának elveivel összhangban áll. A modell kielégítette a kor szabadszemes észleléseinek pontossági igényét.

A csillagászati észlelések pontosságának növekedésével viszont egyre nagyobb eltérések jelentkeztek a geocentrikus modell és az észlelések között. Az eltérések kiküszöbölésére Ptolemaiosz elméletét tovább tökéletesítették, újabb epiciklusokat vezetve be az egyes bolygók számára. A bolygók látszólagos mozgásának minél pontosabb megközelítésére törekedve az egyes bolygókhoz rendelt epiciklusok száma meghaladhatta a hetvenet is, igen bonyolult számolásokat téve szükségessé.

A XVI. század elején a ptolemaioszi rendszer nem felelt már meg a gyakorlati élet támasztotta követelményeknek, főként a tengeri hajózások lendületes fejlődése által egyre növekvő helymeghatározási igényeknek. Egyre inkább nyilvánvalóvá vált, hogy a geocentrikus rendszer egy természetellenes konstrukció, ami ellentmond a fizikai valóságnak. Szükségessé vált egy újabb világrendszer-modell kidolgozása.

Az a tény, hogy a ptolemaioszi rendszer majdnem másfél évezredig maradt fenn, nem csak a középkori tudományok nem túl magas színvonalának, hanem főleg az arisztotelészi skolasztikus filozófia nagy támogatásának kö-

<sup>5</sup>Apollóniosz (Kr. e. 262?–190?) — az alexandriai iskola nagy görög matematikusa és csillagásza.



szönhető, valamint a középkori teológiai tanításokkal való jó összeférhetőségének.

### 6.3. A kopernikuszi heliocentrikus rendszer

Nikolausz Kopernikusz<sup>6</sup> a *heliocentrikus rendszer* bevezetésével tekinthető az új csillagászat tulajdonképpeni reformátorának. Művében megvalósítja az átmenetet az Univerzum geometriai leírásáról annak fizikai értelmezésére. Kopernikusz új világrendszerét — a heliocentrikus rendszert — a halála évében megjelentetett *De revolutionibus orbium coelestium* (Az égi pályák körforgásairól) című főművében teszi közzé. A kopernikuszi heliocentrikus rendszer fontosabb alapelvei:

1. *Az Univerzum középpontjában a Nap található, és nem a Föld.*
2. *A gömb alakú Föld és a hozzá hasonló többi bolygó a Nap körül kering, ugyanabban az irányban, és egy-egy átmérőjük körül forognak is.*
3. *A bolygók pályája kör.*
4. *A bolygók mozgása egyenletes. Pályamenti lineáris sebességük annál nagyobb, minél közelebb vannak a bolygók a Naphoz és fordítva.*
5. *Kopernikusz szerint a Hold, és csak az, a Föld körül kering, mintegy kísérelje annak, és a Földdel együtt a Nap körül is kering.*

A megfigyelések alapján Kopernikusz arra következtet, hogy az összes bolygó pályája (a Földével együtt) megközelítőleg ugyanabban a síkban található. Rámutat arra, hogy a Merkúr és a Vénusz — látszólagos éggömbi mozgásuk során — nem távolodik el nagyon a Naptól, mivel a Föld pályáján belül elhelyezkedő pályával rendelkeznek, míg a Mars, Jupiter és Szaturnusz pályája a Föld pályáján kívül van, ami lehetővé teszi, hogy ezek a bolygók szembe is álljanak a Nappal.

A heliocentrikus rendszer keretében Kopernikusz adta meg először a Naprendszer szerkezetének pontos leírását, meghatározva a bolygók Naptól való távolságát a Nap–Föld távolsággal összehasonlítva.

Az égitestek és az éggömb napi mozgása az új rendszerben látszólagos mozgásként jelennek meg, ami a Föld tengely körüli valóságos forgásával magyarázható. Ugyanígy a Nap évi mozgása az ekliptikán szintén látszólagos,

---

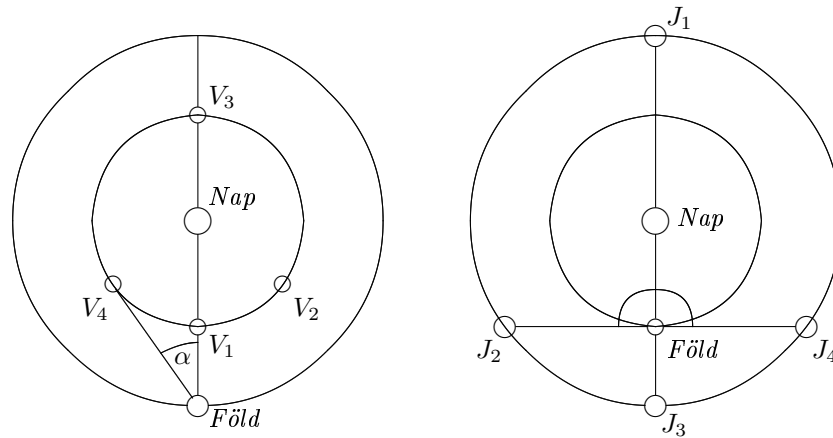
<sup>6</sup>Kopernikusz, Nikolausz (1473–1543) — lengyel csillagász, a heliocentrikus világrendszer megalapozója.

a Föld Nap körüli valódi keringésének következménye. A Föld Nap körüli elmozdulásának hatásaként a Nap látszólagos helyzete változik az éggömbön az ekliptika mentén, a Föld mozgási irányának megfelelő irányban.

A világ (Univerzum) szerkezete Kopernikusz szerint a következő: a Nap van a középpontban, körülötte körpályákon keringenek a bolygók, a Merkúr, Vénusz, Föld, Mars, Jupiter és Szaturnusz sorrendben, a Föld is bolygó. A Hold a Föld kísérője (mellékbolygója, kísérőholdja), a Föld körül körpályán kering. A csillagok rögzítettek a rendszert bezáró rögzített gömbön.

Tehát Kopernikusznak nem sikerült túlhaladnia az állócsillagok rögzített gömbjének modelljét, és a harmadik és negyedik alapfeltevései sem pontosak. A második alapelv bevezetése — ami később a fizikai valósággal pontosan egyezőnek bizonyult —, lehetővé tette Kopernikusz számára a bolygók komplikált látszólagos mozgásának természetes és helyes magyarázatát. Ezek a mozgások a bolygók és a Föld Nap körüli valódi mozgásának összetételeként magyarázhatók. A látszólagos bolygómozgások magyarázatának kopernikusi elve a mai napig is helytálló maradt.

#### 6.4. A bolygók látszólagos mozgásának magyarázata



6.2. ábra. A Vénusz (balra) és a Jupiter (jobbra) bolygók konstellációi

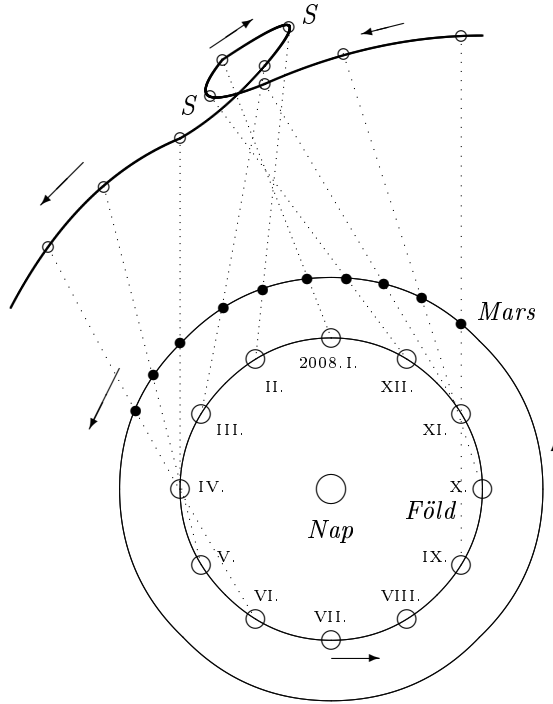
Az egyes bolygók Földről látható speciális helyzetét *konstellációknak* nevezzük. A belső bolygók (Merkúr és Vénusz) konstellációira példaképpen vizsgáljuk meg a Földhöz képest a Vénusz bolygó helyzetét (6.2. ábra

(balra)). Amikor a Vénusz a  $V_1$  pontban van, *alsó együttállásról* (*konjunkcióról*), amikor a  $V_3$  pontban van, *felső együttállásról* beszélünk ( $\lambda_{\odot} - \lambda_{\odot} = 0^\circ$ ). Azokat a helyzeteket, amikor az  $\alpha$  szög maximális, *maximális keleti* ( $V_4$ ), illetve *maximális nyugati* ( $V_2$ ) *elongációnak* nevezzük. Könnyen belátható, hogy ezek az értékek nem haladhatnak meg bizonyos határokat. A belső bolygók ezért nem távolodhatnak el bármennyire a Naptól.

Egy külső bolygó (például a Jupiter) konstellációit a 6.2. ábrán (jobbra) tüntettük fel. a  $J_1$  helyzetben ismét együttállásról ( $\lambda_{\text{J}} - \lambda_{\odot} = 0^\circ$ ), a  $J_3$  helyzetben viszont *szembenállásról* (*oppozícióról*) beszélünk ( $\lambda_{\text{J}} - \lambda_{\odot} = 180^\circ$ ). A  $J_2$  és  $J_4$  helyzetben *kvadraturáról* beszélünk ( $\lambda_{\text{J}} - \lambda_{\odot} = \pm 90^\circ$ ).

A bolygóknak az éggömbön leírt pályája bonyolult görbe, mert a bolygó mozgását a szintén mozgó Földről figyeljük meg. A 6.3. ábrán például a Mars bolygó direkt és retrográd irányú mozgását, illetve hurokképződését szemléltetjük. Több hónapig követve a bolygó mozgását láthatjuk, hogy olykor a direkt mozgás lelassul, szinte megáll a bolygó, majd a *stációt* követve retrográd irányba mozdul el egy újabb stációig, ahonnan újból direkt irányban folytatja mozgását, miközben pályája egy hurkot rajzol az éggömbre.

A bolygók éggömbön leírt pályáiban mutatkozó ilyen hurkok miatt kellett az ókori csillagászoknak a szférák bonyolult rendszerét bevezetniük, amikor geocentrikus rendszerben kívánták megmagyarázni a bolygómozgásokat. A heliocentrikus rendszerben — amint azt láthatjuk —, viszont egyszerű a bolygók látszólagos mozgásával kapcsolatos jelenségek szemléltetése és magyarázata.



6.3. ábra. A Mars és a Föld kölcsönös helyzete a 2008. év folyamán

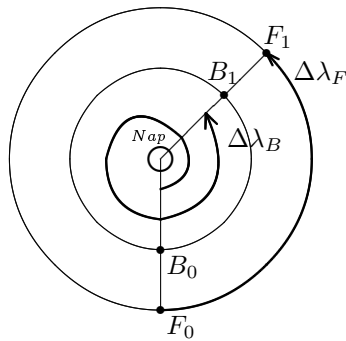
### 6.4.1. Sziderikus és szinodikus keringés

Azt az időtartamot, ami alatt egy bolygó befutja pályáját az állócsillagokhoz képest, a bolygó *sziderikus keringési periódusának* nevezzük. A föld sziderikus keringési periódusa a *sziderikus év* ( $P_{\oplus}$ ). Egy bolygó két egymást követő azonos konfigurációja (pl. együttállása) közötti időtartam a bolygó *szinodikus keringési periódusa*.

Ha  $P$  és  $S$  egy bolygó sziderikus és szinodikus keringési periódusa, akkor

$$\frac{1}{P} - \frac{1}{P_{\oplus}} = \frac{1}{S}, \quad \text{— belső bolygó esetén,} \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{P_{\oplus}} - \frac{1}{P} = \frac{1}{S}, \quad \text{— külső bolygó esetén.} \quad (6.2)$$



6.4. ábra. A szinodikus és sziderikus periódusok kapcsolata

**Bizonyítás.** Legyen például egy belső ( $B_0$ ) bolygó alsó együttállásban a Nappal (6.4. ábra). A Föld megfelelő helyzete  $F_0$ . Az illető bolygó  $S$  idő múlva — egy szinodikus periódus elteltével — lesz újra alsó együttállásban, amikor a bolygó és a Föld ekliptikai heliocentrikus hosszúsága újból ugyanannyi lesz. A bolygó és a Föld keringésének szögsebessége  $\frac{2\pi}{P}$ , illetve  $\frac{2\pi}{P_{\oplus}}$ . Mivel  $P < P_{\oplus}$ , a belső bolygó szögsebessége nagyobb, mint a Föld szögsebessége. A következő alsó együttállás feltétele az, hogy az  $S$  szinodikus periódus alatt a belső bolygó a Nap körül éppen egy teljes fordulatnál ( $2\pi$ -vel) több utat tegyen meg, mint a Föld ( $\Delta\lambda_B = \Delta\lambda_F + 2\pi$ ), azaz:

$$S \cdot \frac{2\pi}{P} = S \cdot \frac{2\pi}{P_{\oplus}} + 2\pi,$$

ahonnan

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_{\oplus}} + \frac{1}{S},$$

ami pontosan (6.1) helyességét mutatja. Külső bolygó esetén a Föld és a bolygó szerepe felcserélődik az előző gondolatmenetben, és így (6.1) alapján (6.2) azonnali.

Közvetlen észlelések alapján meghatározható a sziderikus év ( $P_{\oplus}$ ) és a bolygók  $S$  szinodikus keringési periódusa. Az (6.1), vagy (6.2) összefüggés segítségével — attól függően, hogy belső, vagy külső bolygóról van szó —, meghatározható a megfigyelt bolygó sziderikus keringési periódusa ( $P$ ).

## 6.5. A heliocentrikus koncepció fejlődése

A kopernikuszi elmélet fontosságát az adja, hogy szoros kapcsolatban van a Föld és egyben az ember Univerzumbeli helyével és szerepével. Kopernikusz előtt mintegy 15 évszázadig a mozdulatlan Földet képzelték a világmindenség közepének — „legfontosabb részének”. A heliocentrikus rendszerben a Föld az összes többi bolygó sorába kerül, mozogva a térben mint más testek. Ebben a rendszerben tehát eltűnik a „földi” és „égi” közti különbség.

A heliocentrikus rendszer nehezen hódított teret, úgy az egyház ellenszegülése, mint a megnyugtató bizonyítékok hiánya miatt. Amint azt korábban már tárgyaltuk, az első sikeres parallaxismérésre csupán 1838-ban került sor, majdnem három évszázaddal Kopernikusz elméletének megjelenése után. A Kopernikuszt követő évszázadokban több kiemelkedő csillagász járult hozzá a heliocentrikus rendszer népszerűsítéséhez és pontosításához. Ezek közül a legjelentősebbekkel foglalkozunk röviden a következőkben.

### 6.5.1. Tycho Brache

A dán Tycho Brache (1546–1601) az első modern csillagda megteremtőjeként tartjuk számon. Hveen (ma Ven) nevű szigetén felépített csillagdájában valamennyi elődjénél nagyobb pontossággal végezte észleléseit. Korához viszonyítva igen pontos csillagkatalógust és bolygótáblázatokat állított össze, amelyekben a hiba nem haladta meg a 4 másodpercet. Észlelései segítségével a geocentrikus vagy a heliocentrikus rendszer helyességét vizsgálta. Elképzelései szerint a két rendszer közötti átmeneti, kompromisszumos modell az igazi, amelyben a bolygók a Nap körül keringenek, míg a Nap a bolygókkal együtt a Föld körül. Brahe életének utolsó éveit Prágában töltötte Rudolf császár udvari csillagászként. Itt lesz munkatársa 1600-ban a már ismert csillagász, Kepler, azzal a céllal, hogy segítse Brahet a hatalmas észlelési anyag feldolgozásában.

### 6.5.2. Giordano Bruno

Giordano Bruno (1548–1600), olasz származású teológus, gondolkodó. Igen kritikus szelleme és forrófejű természete miatt élete során több egyház is kiközösítette soraiból, míg végül, visszatérve Itáliába, eretneknek számító elképzelései miatt életét az inkvizíció máglyáján végzi Rómában.

A XVI. század második felében hirdeti a heliocentrikus tanokat, amelyeket még ki is egésszít saját elképzelésekkel. Ezek szerint:

— *az Univerzum végtelen és nincsen középpontja;*

- a Nap egyike a számtalan sok csillagnak;
- más csillagok körül is léteznek bolygók (400 évvel később igazolt feltevés);
- végtelen számú lakott világ létezik (erről még nem szereztünk bizonyosságot).

### 6.5.3. Johannes Kepler

A német Johannes Kepler (1571–1630) Tübingenben tanult matematikát és csillagászatot. Itt megismerte a ptolemaioszi geocentrikus rendszer mellett a Kopernikusz-féle heliocentrikus modellt is. Később matematikát tanít Grazban. Ezekben az években írja a *Mysterium Cosmographicum* című, 1596-ban Tübingenben kiadott művét. Ennek előszavában írja: „... felfedeztem a kopernikuszi rendszer matematikai előnyeit a ptolemaiosziéval szemben”. Kepler arra törekedett, hogy a két rendszer matematikai leírásának egyszerűsítésével olyan rendszert kapjon, amellyel megértse a fizikai világ lényegét.

Kepler és a tudományos ismeretek fejlődése szempontjából igen jelentős Rudolf császár meghívása, aki Keplert Prágába invitálja, ahol 1600. január első napjától segíti Tycho Brahe munkáját. Brahe felhívja figyelmét, hogy a Mars mozgását a kopernikuszi rendszer igen pontatlanul írja le, így Keplernek ez lesz az egyik fő vizsgálati iránya. Kepler megrajzolja a Mars pályáját a kopernikuszi rendszer szerint és az így nyert adatokat összehasonlította Brahe észlelési adataival. A két adatsor között 8'-es eltérések mutatkoztak. Ezek az eltérések Ptolemaiosznál vagy Kopernikusznál nem lettek volna jelentősek, de Tycho Brahe észlelési pontossága mellett már megengedhetetlenek voltak. „Ezt a 8'-et nem szabad elhanyagolnunk — írta egykoron Kepler —, mert kezünkbe adhatja az egész csillagászat reformjának kulcsát.” És nem is hanyagolta el, de több év kellett ahhoz, amíg az eltérés okára fényt deríthetett.

1605-ben egyik barátjának már beszámolt eredményeiről: „a bolygópálya tökéletes ellipszis”. És ez lett az egyik *Kepler-törvény*. A másik, korai törvényéhez így jutott: „Mivel a pálya végtelen sok pontból áll és ennek megfelelően végtelen sok Naptól való távolságot kellene figyelembe vennem, az jutott eszembe, hogy ezeknek a távolságoknak az összegét egyenlőnek veszem a bolygó által súrolt egész területtel.” (E területmérési módszert Arkhimédész alkalmazta először, de nem bolygókra.)

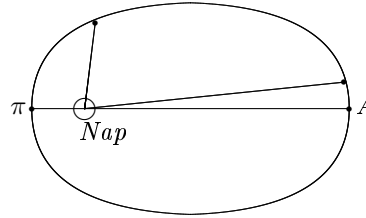
Az ellipszispályára vonatkozó felismerést és a felületi sebesség elvét 1609-ben közölte Kepler az *Új csillagászat (Astronomia nova)* c. művében. Ebben a műben Kepler azt állítja, hogy a bolygókhoz nem tartoznak merev égi szférák, mint amilyenekben még Kopernikusz is hitt (Brahe és Bruno vi-

szont már nem hitt); az ókor által kitalált tökéletes körmozgás az égitestekre nem áll, tehát ennek megmentése érdekében sem epiciklusokra, sem más „trükkre” nincs szükség; az egész bolygórendszer geometriája így jóval egyszerűbb, mint korábban hitték — és két alaptörvénybe sűríthető:

I. *A bolygók napfókuszú ellipszispályákon keringenek.*

II. *A bolygók felületi sebessége állandó, azaz a bolygót a Nappal összekötő vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol.*

A II. Kepler-törvényből azonnal adódik, hogy a bolygók napközeli gyorsabban, naptávolban lassabban haladnak pályájukon.



Kepler harmadik törvényének végleges megfogalmazásához további tíz év kellett, habár alapjait már 1605-ben kidolgozta.

A végső forma az 1619-ben megjelentetett *Harminices Mundi (A világ harmóniája)* című munkájában szerepel és a következőket tartalmazza:

III. *A bolygók  $P_i$  sziderikus keringési periódusának négyzete és az ellipszis alakú pályájuk fél nagytengelyének ( $a_i$ ) köbe arányos:*

$$\frac{P_1^2}{a_1^3} = \frac{P_2^2}{a_2^3} = \dots$$

#### 6.5.4. Galileo Galilei

Galileo Galilei (1564–1642) olasz fizikus is jelentősen hozzájárult a kopernikuszi rendszer népszerűsítéséhez és bizonyításához. 1610-ben megjelenik a *Sidereus Nuncius*, a *Csillaghírnök* című publikációja, amelyben tudósít távcsöves megfigyeléseiről. Úgy tűnik, hogy Galilei volt az első, aki távcsövét az ég felé fordította, vagy legalábbis először írta le, hogy mi látható vele az égbolton. Galilei egy holland minta után készítette távcsöveit 1609-ben (az első 9-szeres, a második 30-szoros nagyítású volt), de amit meglátott vele, azok csodálatosan újak. Vegyük sorra Galilei távcsöves csillagászati felfedezéseit:

— *A Jupiter körül holdak keringenek.* Az általa felfedezett ún. Galilei-féle holdak: *Io*, *Europa*, *Ganymede* és *Callisto*. Ennek a felfedezésének még elvi jelentősége is volt: íme a kopernikuszi rendszer modellje az égbolton, de a pragmatikus Galilei gondolt ezen jelenség gyakorlati felhasználására is: a holdak táblázatba foglalt mozgástörvényén keresztül a nyílt óceánon a hajók navigációs segédeszköze lehetne.

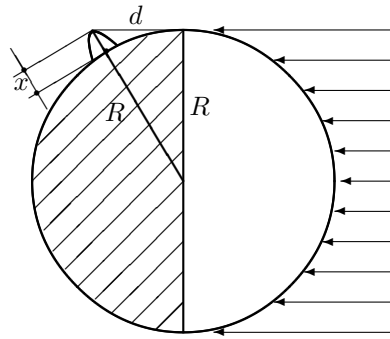
— A Tejútról Galilei megállapítja, hogy az csillagok halmaza.

— A Vénuszról pedig, hogy ugyanolyan fázisai vannak, mint a Holdnak.

Ezt a felfedezését Galilei egy anagrammában kódolta, amelynek megfejtése: *Cynthiae figuras aemulatur mater amorum*. Cynthia (vagyis a Hold) alakját utánozza a szerelem anyja, vagyis a Vénusz.

— Távcsoveivel Galilei jól látta a Hold hegyeit, krátereit, síkságait, de Galilei ezen túlmenően azt is meg tudta állapítani, hogy milyen magasak ezek a hegyek. Kiindulópontja egy jelenség zseniális értelmezése. Észrevette, hogy félhold idején, amikor tehát a sötét és a megvilágított részeket egy átmérő választja el, az átmérő közelében a sötét részben néhány fénylő pont látható. Ezt nagyon helyesen úgy értelmezte, hogy ezek kiemelkedő hegycsúcsok, amelyeket a Nap még megvilágít, annak ellenére, hogy a Hold azon oldala már sötét. Azt könnyen meg tudta állapítani, hogy ezek a pontok milyen messze vannak a sötét és világos részeket elválasztó átmérőtől

— természetesen a Hold-átmérő hányadában kifejezve. Most már csak egy kis geometriai megfontolás, és kiadódik a hegy magassága, ismét csak a Hold-átmérő hányadában. De ez az átmérő már ismert volt, így a hegyek magasságát össze lehetett hasonlítani az Appennini-hegyek magasságával. Galilei zsenialitása a jelenség helyes értelmezésében mutatkozik meg (6.6. ábra). A felírható  $R^2 + d^2 = (R + x)^2$  pithagoraszai összefüggésből (figyelembe véve, hogy  $d \ll R$ ), a hegy magasságára az



6.6. ábra. Ilyen megfontolással határozta meg Galilei egy hegy magasságát a Holdon.

$$x = \frac{d^2}{\sqrt{R^2 + d^2} + R} \approx \frac{d^2}{2R}$$

közelítő érték adódik.

Galilei a heliocentrikus tanokat hirdeti, tanítja. Ezzel kivívja a Szent Inkvizíció megkülönböztetett figyelmét is. 1616-ban a római Inkvizíció meg is tiltja neki a heliocentrikus rendszer melletti állásfoglalást.

Mindezek ellenére Galilei 1632-ben megjelenteti a Szent Inkvizíciót még jobban ingerlő *Dialogo*, vagy teljes nevén *Párbeszéd a két világrendszerről, a ptolemaioszi és a kopernikuszi rendszerről* című főművét. Ebben a könyvben négy napon keresztül hárman beszélgetnek: egy Arisztotelész-hívő, ő védi a ptolemaioszi rendszert, amely szerint a mozdulatlan Föld a világ közepe, és körülötte keringenek a bolygók, sőt a Nap is; egy másik a kopernikuszi



rendszer mellett érvel, hogy tehát a mozdulatlan Nap van középen, és a Föld egy a keringő hat bolygó közül, míg a harmadik egy józan, elfogulatlan vitapartner.

A könyv meglepő érdekessége, hogy nem latinul, a tudomány nyelvén, hanem olaszul íródott, olyan nyelvezettel, mint ahogy az emberek a társaságban, utcán, piacon beszélnek: világos fogalmak, minden gondolatmenet megérthető, végigkövethető — szinte szájba rágó. A könyv azt a látszatot kelti, hogy egyforma súlyú érvek hangzanak el az egyik, ill. a másik rendszer ellen és mellett, és az olvasóra van bízva, hogy melyiket fogadja el. A valóságban azonban — ezt természetesen a Szent Inkvizíció is helyesen látta meg — a Dialogo egyértelmű kiállítás a kopernikuszi rendszer mellett.

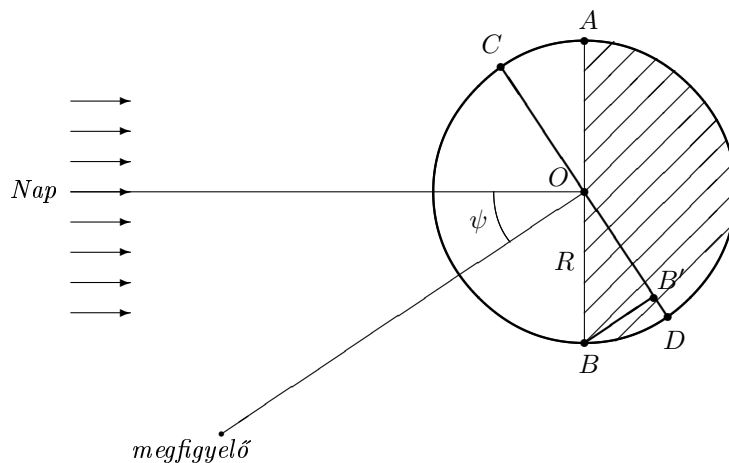
Ha Galilei semmi mást nem alkotott volna, mint ezt a csodálatos olasz prózában megírt tudományos és tudomány-népszerűsítő könyvet, már akkor beírta volna nevét a tudománytörténet legnagyobbjai közé. Nem csoda, hogy Galilei ezen műve hatásában — elsősorban filozófiai és társadalmi hatására gondolunk — túlszárnyalta minden egyéb művét, hozzá kell tenni, másokét is. A hatáshoz természetesen hozzájárult Galilei tragikus sorsa (könyvét az Inkvizíció betiltotta, őt magát pedig háziőrizetre ítélték), a kialakuló Galilei-mítosz és így Galilei neve lassan a formálódó modern tudomány szinonímája lett: modern természettudomány = Galilei, ez volt az egyszerű és — ez sokszor döntő fontosságú — könnyen memorizálható képlet, évszázadokon át.

Napjainkra már több Galileinek tulajdonított felfedezésről is kiderült, hogy azokat korábban, mások ismerték fel. Ellentétben még a legújabb tudománytörténeti könyvek megállapításával Galilei nem találta fel a teleszkópot, sem a mikroszkópot, sem a hőmérőt, sem az ingaórát. Nem fedezte fel az inerciatörvényt, még kevésbé az erő vagy sebesség paralelogrammáit, sem a napfoltokat. Nem járult hozzá semmivel az elméleti asztronómiához. Nem dobott le köveket a pisai ferde toronyból és nem bizonyította be a kopernikuszi rendszer igazságát. Nem kínoztta meg az inkvizíció, nem sínylődött annak kazamatáiban és sohasem mondta: eppur si muove. És végül nem volt a tudomány mártírja.

Mindezek ellenére abban minden tudománytörténész még ma is egyetért, hogy Galileinek centrális szerepe van a modern tudomány és világnézet kialakításában és ezt leginkább távcsöves felfedezéseivel és a Dialogo megírásával érte el.

### 6.5.5. A bolygók és a Hold fázisai

Pályájuk menti mozgásuk során a bolygók, a Hold, valamint a többi bolygó kísérőholdja is különböző pozíciót foglal el térben a Naphoz és a Földhöz viszonyítva. Ezek az égitestek nem rendelkeznek saját fénnel, a Nap fényét verik vissza. A Nap felőli félgömbjük mindig a Nap fényétől megvilágítva ragyog, míg az ellentétes félgömb sötét, árnyékba burkolódik. A földi (de nem feltétlenül csak a földi) megfigyelő egy adott pillanatban az égitest megvilágított felének csupán egy bizonyos részét látja. A megvilágított rész mérete és alakja — az égitestek térbeli helyzetének módosulásával — időben folyamatosan változik. Ezt a jelenséget nevezzük *fényváltozásnak* vagy *fázisnak*.



6.7. ábra. A fázis mértékének meghatározása

Vizsgáljuk a jelenség geometriáját a 6.7. ábrán látható metszeten. A megfigyelő az  $AB$  átmérőjű megvilágított félgömből csupán a  $CB$  fényes ívet és ezen kívül a  $BD$  árnyékos részt látja. Legyen  $CB'$  a  $CB$  ív vetülete a látási irányra merőleges  $CD$  átmérőre. Értelmezés szerint a bolygó (v. hold) *fázisának mértéke* a

$$\Phi = \frac{CB'}{CD}$$

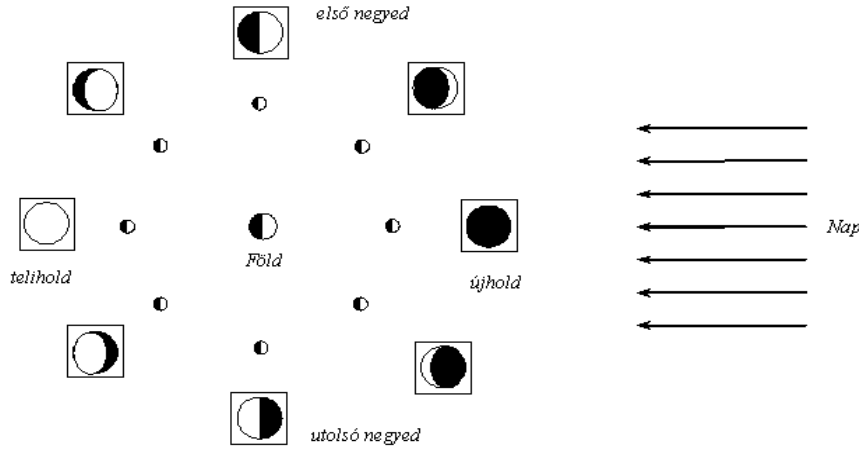
arány. Az  $OBB'$  derékszögű háromszögben  $OB' = R \cos \psi$ , és így

$$\Phi = \frac{CB'}{CD} = \frac{R + R \cos \psi}{2R} = \cos^2 \frac{\psi}{2}.$$

A Hold és külső bolygók esetén  $\psi \in [0, \pi]$ , ahonnan  $\Phi \in [0, 1]$ .

### A Hold fázisai

Egy hónap folyamán a Föld körül keringő Hold megvilágított felének különböző hányadát látjuk, azaz, a Hold „arca” hétről hétre változik (6.8. ábra). Amikor a Hold együttállásban van a Nappal ( $\Phi = 0$ ) *újholdról* beszélünk. Ilyenkor a Hold néhány napra teljesen eltűnik a földi megfigyelő elől. Ezt követően cérnavékony megvilágított sarló formájában lesz látható az újból megjelenő kísérőnk. A Naptól távolodva fokozatosan dagad a D betűhöz hasonló fényes holdsarló az *első negyeden* át ( $\Phi = 0,5$ ), amikor a Hold kvadraturában van a Nappal. A dagadás egészen a *teliholdig* ( $\Phi = 1$ ) tart, amikor a Hold szembenáll a Nappal és egész látszó korongja fényes. A szembenállást követően a Naphoz az éggömbön újból közeledő Hold látható megvilágított hányada napról-napra csökken. Az újabb kvadraturakor *utolsó negyedről* beszélünk. Ekkor a Hold korongjából újból egy félholdnyi megvilágított rész látszik, ami C betűhöz hasonlít ( $\Phi = 0,5$ ). Ezt követően a Naphoz közeledő holdsarló tovább „fogy”, míg egészen eltűnik a földi megfigyelő elől a Nap közelében, és a következő újholddal újra indul a Hold fázisainak ciklusa.



6.8. ábra. A Hold fázisai

A Hold két egymást követő azonos fázisa (pl két újhold) közötti időtartamot *szinodikus hónap*nak nevezzük. A szinodikus hónap hossza  $29,530\,589$  középnap, azaz  $29^d\,12^h\,44^m02^s,8$ , ami közvetlenül, mérések segítségével határozható meg. A szinodikus hónap ( $S_{\mathcal{C}}$ ) és sziderikus év ( $P_{\oplus} = 365^d256\,360\,42$ )

ismeretében a bolygóknál bemutatottakhoz hasonló módon levezethető

$$\frac{1}{P_{\zeta}} = \frac{1}{P_{\oplus}} + \frac{1}{S_{\zeta}}$$

összefüggés alapján meghatározható a  $P_{\zeta} = 27^{\text{d}}321\,662 = 27^{\text{d}}07^{\text{h}}43^{\text{m}}11^{\text{s}}56$  *sziderikus hónap*, ami a Hold keringési periódusa az állócsillagokhoz viszonyítva.

## 6.6. Fogatkozások és fedések

Azt a jelenséget, amikor valamely — saját fénnel nem rendelkező — égitest pályáján haladva egy bolygó árnyékkúpjába kerül *fogatkozásnak* nevezzük. Földünk természetes kísérője a Hold, valamint a többi bolygó egész sor kísérőholdja esetében is lehetséges a fogatkozás. Az ilyen valódi fogatkozás esetében az illető kísérőhold az árnyékkúpba érve elsötétül és teljesen el is tűnhet a megfigyelő számára.

Azt a jelenséget, amikor a megfigyelő nézőpontjához viszonyítva egy égitest egy másik, közelebbi égitest mögé kerül és emiatt nem látszik, *csillagfedésnek*, vagy *okkultációnak* nevezzük. Az okkultáció létrejötté természetesen szorosan függ a megfigyelő helyétől.

Azt a jelenséget, amikor a Hold elfedi a Napot egy földi megfigyelő számára, hagyományosan *napfogatkozásnak* nevezzük. Az okkultáció fogalmát főleg a csillagfedések esetében használjuk, amikor a Hold, vagy valamelyik bolygó elfedi azokat.

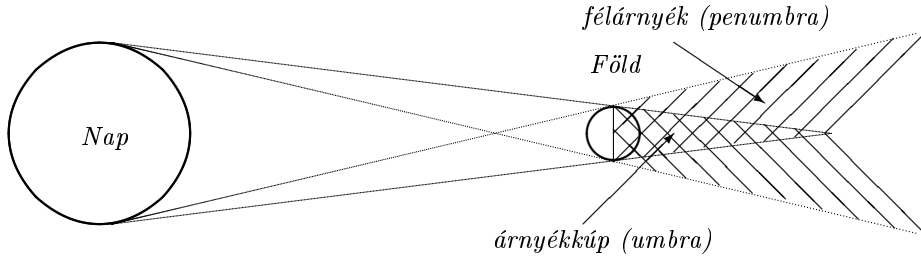
A fogatkozási és fedési jelenségek közül a leglátványosabbak a nap- és holdfogatkozások. A csillagászok számára viszont nem kevésbé jelentősek a belső bolygók napkorong előtti átvonulásai. A Vénusz-átvonulások észlelésével sikerült a Nap parallaxisát és a csillagászati egység értékét már a XVII. században viszonylag pontosan meghatározni. A fénysebesség csillagászati meghatározásánál láttuk már a Jupiter-holdak fogatkozásának fontosságát. Ezek a jelenségek már egy kisebb távcsővel is követhetők. Szabad szemmel is látványosan észlelhetők a csillagoknak és a bolygóknak a Hold általi fedései.

### 6.6.1. Holdfogatkozások

*Holdfogatkozás* akkor jön létre, amikor a bolygónk körül keringő Hold bekerül a Föld árnyékkúpjába (6.9. ábra).

A holdfogatkozás lehet:

— *teljes*, ha a Hold teljesen bekerül a Föld árnyékkúpjába;



6.9. ábra. A Föld árnyékkúpja

— *részleges*, ha csupán a Hold egy része kerül az árnyékkúpba.

Mivel a Föld árnyékkúpját (*umbra*) körülveszi a félárnyék (*penumbra*), ami az átmenetet jelenti a teljesen sötét és maximálisan megvilágított tértartomány között, mindkét típusú fogyatkozást megelőzi a penumbrában történő fogyatkozás. Megtörténhet, hogy egy penumbrai fogyatkozást nem követ umbrában történő fogyatkozás.

A holdfogyatkozások létrejöttének alapfeltétele, hogy a Holdnak a Földtől mért távolsága ne haladja meg a Föld árnyékkúpjának hosszát. A Föld árnyékkúpjának  $l = FC$  hossza a 6.10. ábra szerint az  $FQC$  és  $NGF$  háromszögek hasonlóságából határozható meg, ahonnan

$$l = \frac{r_{\odot} R_{\oplus}}{R_{\odot} - R_{\oplus}} = \frac{R_{\oplus}}{\frac{R_{\odot}}{r_{\odot}} - \frac{R_{\oplus}}{r_{\odot}}}. \quad (6.3)$$

A fenti képletbe a következő helyettesítések végezhetők:

$$\frac{R_{\odot}}{r_{\odot}} = \rho_{\odot}, \quad \frac{R_{\oplus}}{r_{\odot}} = \pi_{\odot},$$

ahol a Nap látszólagos sugara  $\rho_{\odot} \approx 16' = \frac{16 \times 60}{206265} = 4,6542 \times 10^{-3}$  (rad), míg a Nap parallaxisa  $\pi_{\odot} \approx 9'' = \frac{9}{206265} = 4,3633 \times 10^{-5}$  (rad). A közelítő értékeket behelyettesítve a (6.3) képletbe:  $l = 217R_{\oplus}$ .

Mivel a Hold átlagos távolsága a Földtől mintegy  $60,27 R_{\oplus}$ , amint azt a Hold parallaxisánál láttuk (lásd 4.3.2 rész), és maximális távolsága sem több, mint  $(1 + e_{\mathcal{C}}) a_{\mathcal{C}} = (1 + 0,06) 60,27 R_{\oplus} < 64 R_{\oplus}$ , így a holdfogyatkozások létrejöttének e feltétele mindig teljesül.

Könnnyen kiszámítható, hogy a Hold távolságában a Föld árnyékkúpjának sugara  $41' 29''$  ( $1^{\circ} 13' 29''$  a penumbráé), amely értékek jóval meghaladják a Hold látszólagos sugarát, ami  $15' 37''$ . Ebből is látható, hogy a Hold teljes



zás feltétele pedig

$$\beta_{\mathcal{L}} \leq \alpha + \rho_{\mathcal{L}}. \quad (6.5)$$

Másfelől pedig az  $ABF$  háromszög szögei mértékére vonatkozó összefüggések alapján  $\alpha + \rho_{\odot} = \pi_{\odot} + \pi_{\mathcal{L}}$ , ahonnan

$$\alpha = \pi_{\mathcal{L}} + \pi_{\odot} - \rho_{\odot}.$$

Ezt az  $\alpha$  értéket helyettesítve a (6.4), illetve (6.5) összefüggésekbe, a teljes holdfogyatkozás bekövetkeztének feltétele:

$$\beta_{\mathcal{L}} \leq \pi_{\mathcal{L}} + \pi_{\odot} - \rho_{\mathcal{L}} - \rho_{\odot}, \quad (6.6)$$

míg a részleges fogyatkozás bekövetkeztének feltétele:

$$\beta_{\mathcal{L}} \leq \pi_{\mathcal{L}} + \pi_{\odot} + \rho_{\mathcal{L}} - \rho_{\odot}. \quad (6.7)$$

A Hold és a Nap esetében ismert parallaxis ( $\pi_{\mathcal{L}} = 57' 02'' 50$ ,  $\pi_{\odot} = 08'' 795$ ) és látszó sugár ( $\rho_{\mathcal{L}} = 15' 33'' 6$ ,  $\rho_{\odot} = 15' 59'' 63$ ) értékeket a fenti feltételekbe helyettesítve, a teljes-, illetve részleges holdfogyatkozás akkor következik be, ha a Hold geocentrikus ekliptikai szélessége teljesíti a

$$\beta_{\mathcal{L}} \leq 25' 38'', \quad \text{illetve} \quad \beta_{\mathcal{L}} \leq 57'$$

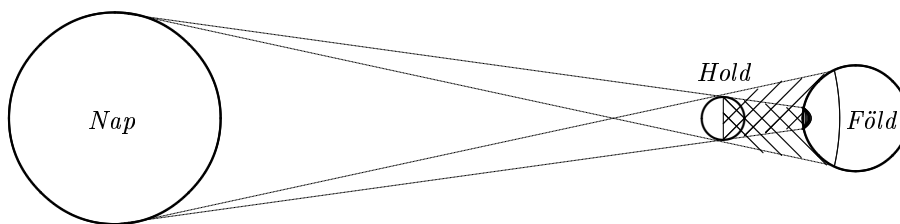
feltételt.

Mivel a Hold pályája mentén keringve a Föld körül olykor több mint  $5^\circ$ -ra is eltávolodik az ekliptikától, így a holdfogyatkozások csupán akkor következnek be, amikor teliholdkor a Hold pályája mentén éppen a holdpálya és ekliptika metszéspontja (csomópont) közelében halad át.

### 6.6.2. Napfogyatkozások

A Napnak a Hold általi fedését *napfogyatkozásnak* nevezzük. Egy napfogyatkozás különböző földi megfigyelők számára másként jelentkezik, mivel a Hold árnyékkúpja nem borítja el az egész Földet (6.12. ábra). A Hold által a Földre vetett árnyékolt maximális átmérője nem haladja meg a 270 kilométert, ami azt jelenti, hogy egy adott pillanatban a Föld felszínének igen kis térségében látható egy napfogyatkozás. A Hold árnyékkúpja körül is megjelenik a részlegesen megvilágított félárnyékos tartomány.

Ha egy földi megfigyelő a teljes árnyékban van, akkor *teljes napfogyatkozást* észlel. Ilyenkor a Hold elfedi a megfigyelő előtt a teljes napkorongot. Ha csupán az árnyékoltot övező félárnyék halad át a megfigyelési helyen, akkor



6.12. ábra. A napfogyatkozások kialakulása

ott csupán *részleges fogyatkozás* következik be. Ekkor a Hold korongja csupán a napkorong bizonyos hányadát fedi el a megfigyelő előtt. A félárnyékon kívül eső pontokból nem figyelhető meg a fogyatkozás.

Mivel Kepler I. törvénye értelmében a Hold is elliptikus pályán kering a Föld körül, így a Föld–Hold és Nap–Föld távolságok változásával változó a Hold árnyékkúpjának hossza is. A természet csodás játéka következtében az árnyékkúp hegye olykor — amikor a Hold perigeum (földtávol pont) közelében van — el sem éri a Föld felszínét. Ilyenkor az árnyékkúp tengelye közelében *gyűrűs napfogyatkozás* észlelhető. A megfigyelő a Hold korongja körül látja az alig nagyobb napkorong vékony gyűrűjét.

A Földnek a Nap körüli keringése, valamint a Holdnak a Föld körüli mozgása következtében a Hold árnyéka viszonylag gyorsan mozog a térben. A Föld felszínére eső árnyékolt egy adott megfigyelési ponton legkedvezőbb esetben is maximum mintegy 7 percnyi idő alatt vonul át, tehát a teljes napfogyatkozás egy adott pontban nem tart többet 7 percnél. A napfogyatkozásokkal ellentétben a teljes holdfogyatkozások több mint egy órát is tarthatnak, mindenhol, ahol észlelhetők. A teljes napfogyatkozások a Föld felszínén egy keskeny sávban észlelhetők, ahol végigvonul a teljes árnyék. A teljességi sáv két oldalán húzódó övezetben észlelhető a részleges napfogyatkozás. Olykor az is megtörik, hogy a teljesség sávja nem is éri el a Föld felszínét, csupán a félárnyék vetül bolygónkra. Ilyenkor csupán részleges napfogyatkozás észlelhető. Minden teljes fogyatkozás előtt és azt követően észlelhető a fokozatosan növekedő, majd csökkenő mértékű részleges fogyatkozás. A megfigyelő azt érzékeli, hogy a Hold fokozatosan fedi el a napkorong mind nagyobb és nagyobb hányadát, majd fokozatosan történik a kitakarás is. Ez a jelenség is összességében több óráig eltarthat.

Napfogyatkozás újhold közelében következhet be, ha

$$\beta_{\mathcal{Q}} < \rho_{\mathcal{Q}} + \rho_{\odot} + \pi_{\mathcal{Q}} - \pi_{\odot},$$

ami átlagosan a  $\beta_{\mathcal{Q}} < 88',7$  feltételhez vezet. Ilyenkor a Hold középpontjának



valamely csomótól való távolsága nem haladhatja meg a  $16^{\circ}5$ -öt.

### 6.6.3. A fogyatkozások ismétlődése és jelentősége

A fogyatkozási feltételek tanulmányozása alapján ki lehet mutatni, hogy egy év folyamán összesen legfeljebb 7 fogyatkozás következhet be, amelyek közül 2 hold- és 5 napfogyatkozás, vagy 3 hold- és 4 napfogyatkozás; de legalább két fogyatkozás bekövetkezik, mindkettő napfogyatkozás.

A nap- és holdfogyatkozások ugyanolyan sorrendben 18 év 11,3 napos periódussal, az ún. *Saros-ciklus* szerint ismétlődnek. Ebben a ciklusban 70 (41 nap- és 29 hold-) fogyatkozás van.

A fogyatkozások észlelése jelentős a Hold mozgásának tanulmányozása szempontjából. Igen fontos a teljes napfogyatkozások észlelése, amikor megfigyelhető a Nap légköre. Ugyancsak a napfogyatkozások teszik lehetővé a csillagoktól érkező fénysugarak Nap közeli relativisztikus elhajlásának kimutatását.



## 7. fejezet

# Égi mechanika

Az *égi mechanika* a csillagászat azon ága, amely a bolygók mozgásának vizsgálatából fejlődött ki. Az utólagos fejlődés alapján ma általában *dinamikus csillagászat*ról beszélhetünk. Ez a következő kutatási területeket foglalja magába:

- *égi mechanika* – a Naprendszer alkotó természetes égitestek mozgásának vizsgálata;
- *aszteroidinamika* – tárgya a mesterséges égitestek mozgása;
- *sztellárdinamika* – a csillagok mozgásának vizsgálatával foglalkozik.

Történetileg elsőként az égi mechanika alakult ki. Ennek módszerei a többi területen is alkalmazhatók. Az égi mechanika sem szűkíthető le az egyes bolygók, holdjaik stb. mozgásának tanulmányozására. Ide tartoznak azok a problémák is, melyeket a konkrét feladatok általánosításaként fogalmaztak meg (pl. *n*-test probléma), és azok a módszerek, melyeket ezek vizsgálatára kidolgoztak.

Az égi mechanika kezdetét *Isaac Newton*<sup>1</sup>: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* című alapvető munkájának megjelenésétől (1687) számítjuk. Newton ebben fogalmazta meg — a mechanika axiómái mellett — az *általános tömegvonzás törvényét*, mely az égi mechanika alapjául szolgál. Newton az égi mechanika alapfeladataként felállította az *n*-test problémát, megoldotta a *kéttest-problémát*, és módszert dolgozott ki a *perturbált mozgások* vizsgálatára. Alkalmazásként levezette a Hold mozgásának fő perturbációit.

A newtoni mechanika alapján az égi mechanika kifejlődése *L. Euler*<sup>2</sup>,

---

<sup>1</sup>Newton, Isaac (1643–1727) — angol matematikus, fizikus, csillagász.

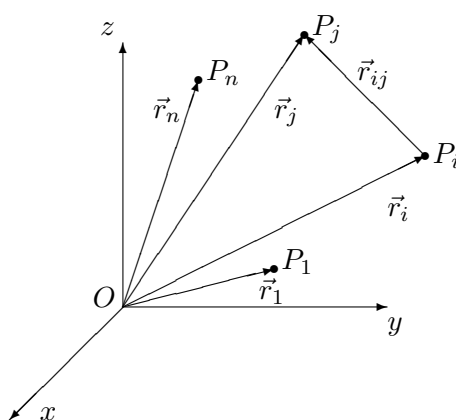
<sup>2</sup>Euler, Leonhard (1707–1783) — svájci matematikus és fizikus.

*J.L. d'Alembert*<sup>3</sup> és *P.S. Laplace*<sup>4</sup> tevékenysége nyomán indult meg.

Különösen jelentős *Laplace* munkássága, mely az égi mechanika legtöbb területére kiterjedt. Nagy összefoglaló műve a *Traité de Mécanique Céleste* (I–IV. kötet 1798–1805, V. kötet 1825) az égi mechanika problémáinak első rendszeres tárgyalását adja. Joggal tekintik Laplace-t az égi mechanika megalapítójának. Az *égi mechanika* elnevezés is tőle származik.

## 7.1. Az $n$ -test probléma

### 7.1.1. Mozgásegyenletek és első integrálok



Az égi mechanika alapfeladata általánosan mint az  $n$ -test probléma fogalmazható meg a következőképpen:

*Határozzuk meg az  $n$  számú ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ) pontszerű test mozgását, ha rájuk csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerők hatnak.*

7.1. ábra. Az  $n$ -test probléma

Jelölje az  $n$ -test problémában a tömegpontokat  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , tömegüket  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Legyen  $P_i$  helyvektora az  $Oxyz$  inerciarendszerben  $\vec{r}_i$ , derékszögű koordinátái  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  (7.1. ábra). A  $P_i$  tömegpontra a  $P_j$  ( $j \neq i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) által kifejtett gravitációs vonzóerő a Newton féle általános tömegvonzási törvény alapján

$$\vec{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad (7.1)$$

<sup>3</sup>d'Alembert, Jean le Rond (1717–1783) — francia matematikus, mérnök, fizikus és filozófus.

<sup>4</sup>Laplace, Pierre-Simon (1749–1827) — francia matematikus és csillagász.

ahol  $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  a Newton-féle gravitációs állandó<sup>5</sup>,

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i, \quad (7.2)$$

$$r_{ij} = \|\vec{r}_{ij}\| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}, \quad (7.3)$$

és az erő irányát a  $P_i$ -ből a  $P_j$ -be mutató  $\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$  egységvektor adja. Az égi mechanikában a Nemzetközi mértékrendszerben (SI) használt (kg, m, s) egységek helyett sajátos egységeket használnak, amelyek a következők: tömeg egység a *Nap tömege*, hosszúság egység a *csillagászati egység*, idő egység pedig a *középnap*. Ebben a mértékrendszerben a tömegvonzási törvényben szereplő gravitációs állandót hagyományosan  $k^2$ -tel jelöljük, ahol a  $k$  *Gauss-féle gravitációs állandó* értéke:

$$k = 0,017\,202\,098\,95.$$

Így a tömegvonzási erő kifejezésére az

$$\vec{F}_{ij} = k^2 \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad j \neq i, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (7.4)$$

kifejezéseket használjuk.

A  $P_i$ -re ható  $\vec{F}_i$  eredő erő az  $\vec{F}_{ij}$ -k összegzésével adódik:

$$\vec{F}_i = k^2 \sum_{\substack{j=1, n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Az erőknek a derékszögű koordináta-rendszer tengelyeire eső vetületei:

$$F_{ix} = k^2 \sum_{\substack{j=1, n \\ j \neq i}} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \quad F_{iy} = k^2 \sum_{\substack{j=1, n \\ j \neq i}} m_i m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3},$$

$$F_{iz} = k^2 \sum_{\substack{j=1, n \\ j \neq i}} m_i m_j \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

<sup>5</sup>A Seattle-i Washington Egyetem kutatói 2000-ben torziós ingával végzett nagy pontosságú mérései szerint

$$G = (6,674\,215 \pm 0,000\,092) \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}.$$

Az  $n$ -test probléma Newton-féle mozgásegyenletei így

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = k^2 \sum_{\substack{j=1, n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.5)$$

alakban írhatók, ahol az  $\ddot{\vec{r}}_i$  gyorsulások az idő függvényeként változó  $\vec{r}_i : [t_0, t_v] \rightarrow \mathbb{R}^3$  helyzetvektorok  $t$  idő szerinti másodrendű deriváltjai. A (7.5) közönséges másodrendű differenciálegyenletek az

$$\vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{i0}, \quad \dot{\vec{r}}_i(t_0) = \dot{\vec{r}}_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.6)$$

kezdeti feltételekkel egy kezdetiérték-feladatot alkotnak, amely megoldásai az

$$\vec{r}_{ij} = \vec{0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j$$

ütközéseken kívül egyértelműen meghatározottak.

**Megjegyzés.** Az égi mechanikában szokásos

$$V = -\frac{k^2}{2} \sum_{\substack{i, j=1, n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = -k^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (7.7)$$

*potenciális energiát* bevezetve az  $n$ -test probléma (7.5) mozgásegyenletei az

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\text{grad}_i V, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

alakban írhatók, amely egyenletek komponensekben az

$$m_i x_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i y_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i z_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.8)$$

egyenletekkel ekvivalensek.

**Bizonyítás.** Például az  $x$  koordináta esetén, ha  $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x_l} &= \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{k^2}{2} \sum_{\substack{j=1, n \\ j \neq l}} \frac{m_l m_j}{r_{lj}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{k^2}{2} \sum_{\substack{i=1, n \\ i \neq l}} \frac{m_i m_l}{r_{il}} \right) = \\ &= \frac{k^2}{2} \left( \sum_{\substack{j=1, n \\ j \neq l}} m_l m_j \frac{x_j - x_l}{r_{lj}^3} + \sum_{\substack{i=1, n \\ i \neq l}} m_i m_l \frac{x_i - x_l}{r_{il}^3} \right) = \\ &= k^2 \sum_{\substack{i=1, n \\ i \neq l}} m_l m_i \frac{x_i - x_l}{r_{li}^3} = F_{lx}, \end{aligned}$$

ami éppen a  $P_l$ -re ható erő  $x$  komponense. Az összegek deriválásánál azt tartottuk szem előtt, hogy csak azon tagok deriváltja nem zérus, amelyekben megjelenik  $x_l$ ,  $l = i$  vagy  $l = j$  esetén.

Az  $n$ -test problémát leíró (7.8) egyenletek  $3n$  számú közöséges másodrendű differenciálegyenletet jelentenek a meghatározandó  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ ,  $z_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , függvények számára, ahol a független változó a  $t$  idő, amelyre  $0 \leq t_0 \leq t \leq t_v \leq \infty$ . Így a (7.8) differenciálegyenlet-rendszer rendje  $6n$ .

### 7.1.2. Az $n$ -test probléma első integráljai

Az  $n$ -test probléma mozgásegyenleteiből álló differenciálegyenlet-rendszer megoldásának legkézenfekvőbb módja első integrálok keresése.

**Definíciók.** Valamely  $f : M \times \mathbb{R}^{3n} \times [t_0, t_v] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^{3n}$  függvényt az  $n$ -test probléma *mozgásállandójának* nevezzük, ha a (7.5) mozgásegyenletek bármely  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$  megoldásához létezik olyan  $c \in \mathbb{R}$  állandó, amelyre

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) = c, \quad \forall t \in [t_0, t_v]. \quad (7.9)$$

A (7.9) összefüggést a (7.5) mozgásegyenletek *első integráljának* nevezzük.

A (7.5) mozgásegyenletek integrálásához  $6n$  független első integrálra lenne szükség, mely összesen  $6n$  tetszőleges állandót tartalmaz. Az  $n$ -test probléma általános megoldása ezen integrálokból lenne kifejezhető a  $t$  idő és a  $6n$  tetszőleges állandó függvényeként. Az egyes megoldásokhoz tartozó integrációs állandók a (7.6) kezdeti feltételek alapján határozhatók meg.

Az  $n$ -test problémára irányuló kutatások középpontjában hosszú időn keresztül a megfelelő számú független első integrál keresése állott. A következőkben az ismert első integrálokat mutatjuk be.

**7.1.1. Tétel.** (A tömegközéppont-integrálok.) Az  $n$ -test probléma bármely megoldása esetén léteznek az  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  állandó vektorok, amelyekre

$$m\dot{\vec{r}}_C = \vec{a} \quad \text{és} \quad m\vec{r}_C = \vec{a}t + \vec{b}, \quad \forall t \in [t_0, t_v], \quad (7.10)$$

ahol

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (7.11)$$

a pontrendszer össztömege és

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (7.12)$$

a rendszer  $C$  tömegközéppontjának helyzetvektora.

**Bizonyítás.** A (7.5) mozgásegyenleteket összegezve minden  $i$ -re:

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \left( k^2 \sum_{\substack{j=1, n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \right) = \vec{0}, \quad (7.13)$$

ugyanis a kettős összegben az  $\vec{r}_{ij}$  és  $\vec{r}_{ji}$  kiejti egymást. Így, idő szerinti kétszeri integrálással kapjuk, hogy léteznek az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  állandó vektorok, amelyekre

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{a} \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{a}t + \vec{b}.$$

Ezen utóbbi összefüggések (7.11) és (7.12) figyelembevételével a kijelentésben szereplő (7.10) tömegközéppont-integrálokhoz vezetnek.

**Megjegyzések.** 1. Az  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  integrációs állandók értéke a kezdeti feltételek alapján

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_{i0} \quad \text{és} \quad \vec{b} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{i0} - \vec{a}t_0.$$

2. A (7.10) tömegközéppont integrálok komponensekben felírva az (7.5) rendszer hat első integrálját jelentik.

**Következmények.** 1. (*Az impulzusmegmaradás tétele.*) Az  $n$ -test probléma esetén a pontrendszer  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i$  impulzusa állandó:  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{a}$ . Tehát az  $\vec{a}$  nem más mint a rendszer összimpulzusa, teljes lendülete.

2. (*A tömegközéppont tétele.*) A rendszer  $C$  tömegközéppontja vagy nyugalomban van ( $\vec{a} = \vec{0}$ ) vagy egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez ( $\vec{a} \neq \vec{0}$ ).

**7.1.2. Tétel.** (*Az impulzusmomentum-integrál.*) Az  $n$ -test probléma bármely megoldása esetén létezik olyan  $\vec{c}$  állandó vektor, amelyre

$$\sum_{i=1}^n \left( \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \right) = \vec{c}, \quad \forall t \in [t_0, t_v]. \quad (7.14)$$

**Bizonyítás.** A (7.5) mozgásegyenletek mindkét oldalát megszorozva



vektoriálisan balról  $\vec{r}_i$ -vel, majd minden  $i$ -re összegezve adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^n \left( \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( k^2 \sum_{\substack{j=1, n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij}) \right) = \vec{0}, \quad (7.15)$$

ugyanis az  $\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij}$  és  $\vec{r}_j \times \vec{r}_{ji}$  vektorok összege zérusvektor:

$$\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{r}_{ji} = \vec{r}_i \times (\vec{r}_j - \vec{r}_i) + \vec{r}_j \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{r}_i \times \vec{r}_j + \vec{r}_j \times \vec{r}_i = \vec{0}.$$

A (7.15) összefüggésből idő szerinti integrálással kapjuk, hogy létezik olyan  $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ , amelyre teljesül a (7.14) összefüggés.

**Megjegyzések.** 1. A (7.14) impulzusmomentum-integrál bal oldalán a pontrendszer impulzusmomentuma van. Így az impulzusmomentum-integrál az impulzus-momentum (perdület) állandóságát fejezi ki.

2. Az impulzusmomentum-integrál komponensekben felírva az  $n$ -test probléma újabb három első integrálját adja.

**7.1.3. Tétel.** (Az energiaintegrál.) Az  $n$ -test probléma bármely megoldása esetén létezik olyan  $h \in \mathbb{R}$  állandó, amelyre

$$T + V = h, \quad \forall t \in [t_0, t_v], \quad (7.16)$$

ahol

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^2 \quad (7.17)$$

a rendszer kinetikus energiája,  $V$  pedig a (7.7)-ben értelmezett potenciális energia.

**Bizonyítás.** A (7.5) mozgásegyenletek beszorozva rendre skalárisan a  $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$  sebességekkel, majd összegezve  $i$  szerint:

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = k^2 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\substack{j=1, n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_{ij} \right), \quad (7.18)$$

ahol a bal oldalon levő kifejezés nem más, mint a kinetikus energia idő szerinti deriváltja

$$b_o = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \frac{dT}{dt}, \quad (7.19)$$

míg a jobb oldalon szereplő összeg az alábbi módon alakítható:

$$\begin{aligned}
 j_o &= k^2 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\substack{j=1,n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_{ij} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} k^2 \left( \sum_{\substack{i,j=1,n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_{\substack{i,j=1,n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_j \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} k^2 \sum_{\substack{i,j=1,n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_i) = -\frac{1}{2} k^2 \sum_{\substack{i,j=1,n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij} = \\
 &= -\frac{1}{2} k^2 \sum_{\substack{i,j=1,n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} r_{ij} \dot{r}_{ij} = -\frac{1}{2} k^2 \sum_{\substack{i,j=1,n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \dot{r}_{ij} = -\frac{dV}{dt}. \quad (7.20)
 \end{aligned}$$

A (7.18), (7.19) és (7.20) összefüggések alapján a

$$\frac{d(T + V)}{dt} = 0$$

összefüggés következik, ahonnan a (7.16) azonnali.

**Megjegyzések.** 1. Az energiaintegrál a mechanikai energia (a mozgási és potenciális energiák összegének) állandóságát, vagyis az energia megmaradásának elvét fejezi ki.

2. A (7.10), (7.14) és (7.16) egyenletek a (7.5) mozgásegyenletek tíz  $(6 + 3 + 1)$  skaláris első integrálját jelentik. Ezek az ún. *klasszikus első integrálok*. Az  $n$ -test problémára  $n \geq 3$  esetén további első integrálok nem ismeretesek. A bemutatott tíz első integrál felhasználásával a (7.5) egyenletek egy  $(6n - 10)$ -ed rendű differenciál-egyenletrendszerre transzformálhatók.

3.  $n = 2$  esetén az új rendszer másodrendű, mely egyszerűen integrálható (lásd a következő részben).

4.  $n = 3$  esetén a redukált rendszer 8-ad rendű, melynek integrálásához további első integrálok lennének szükségesek. Sokáig próbálkoztak újabb első integrálok keresésével, mígnem *H. Burns* bebizonyította (1887), hogy *a háromtest-probléma esetében nem létezik a tíz klasszikus első integráltól független algebrai első integrál* (mely a koordináták és sebességek algebrai függvénye lenne). *Poincaré*<sup>6</sup> kimutatta (1889), hogy a háromtest-problé-

<sup>6</sup>Poincaré, Jules Henri (1854–1912) — francia matematikus, elméleti fizikus és tudományfilozófus.

mára olyan transzcendens első integrálok sem léteznek, melyek a változók egyértékű függvényei lennének. Bruns és Poincaré eredményeit *P. Painlevé*<sup>7</sup> általánosította (1898) az  $n$ -test problémára. Ezek az eredmények véget vetettek az  $n$ -test probléma integrálására irányuló próbálkozásoknak. Ha ugyanis találnánk további első integrálokat, azok olyan bonyolultak lennének, hogy a mozgásegyenletek redukálására nem lennének alkalmazhatók.

Az első integrálok két alkalmazását említhetjük a Naprendszer esetében.

1. Feltéve, hogy a Naprendszer zárt pontrendszer, melynek tagjaira csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerők hatnak, a tömegközéppont integrálok értelmében a Naprendszer tömegközéppontja egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez. A környező csillagok rendszerének tömegközéppontjához képest a mozgás sebessége 20 km/sec, iránya a Herkules csillagkép felé mutat.

Figyelembe véve azonban a Tejútrendszer csillagainak gravitációs hatását, a Naprendszer tömegközéppontjának mozgása már nem egyenesvonalú, hanem a Tejútrendszer centruma körüli körmozgás, kb. 250 km/sec-os sebességgel.

2. A pontrendszer  $C$  tömegközéppontján átmenő, és a  $\vec{c}$  impulzusmomentum vektorra merőleges sík az ún. *Laplace-féle invariábilis sík*. A  $\vec{c}$  állandósága miatt ez a sík a térben állandó helyzetű. A pontrendszer hosszú idő alatt lejátszódó dinamikai fejlődését célszerű az invariábilis síkhoz viszonyítva vizsgálni.

A Naprendszer Laplace-féle invariábilis síkjának szögkoordinátái  $G$ . *Burkhardt* (1982) számításai szerint:

$$i = 1^\circ 35' 13'',86, \quad \Omega = 107^\circ 36' 30'',8,$$

ahol  $i$  a *pályahajlás*,  $\Omega$  a *felszálló csomó hossza* (lásd a 7.2.4 részben). Az adatok a J 2000,0 epochához tartozó ekliptikai koordináta-rendszerre vonatkoznak. A Naprendszer dinamikai fejlődését célszerű az invariábilis síkhoz viszonyítani.

Az  $n$ -test probléma megoldását — a kívánt pontossággal — numerikus integrálás segítségével közelíthetjük meg.

---

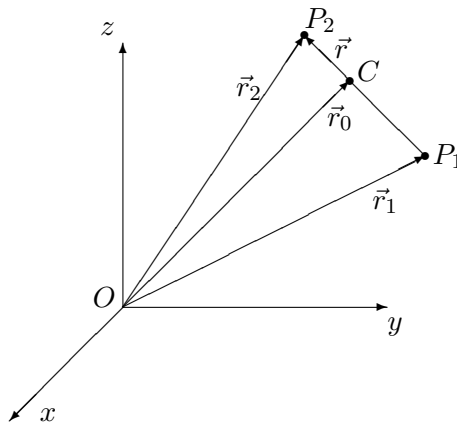
<sup>7</sup>Painlevé, Paul (1863–1933) — francia matematikus és politikus.

## 7.2. A kéttest-probléma

### 7.2.1. Abszolút mozgásegyenletek és első integrálok

A *kéttest-probléma* igen fontos szerepet játszik az égi mechanikában. A bolygók és holdak mozgása ugyanis első közelítésben a kéttest-probléma alapján vizsgálható. A kéttest-probléma egzaktul megoldható, s a megoldás egyszerű összefüggései alkalmazhatók a bolygók és a holdak mozgásának közelítő leírására. A mozgások pontos meghatározásakor is a kéttest-probléma összefüggései szolgálnak kiindulásul. A perturbációszámítás ugyancsak a kéttest-probléma formalizmusán alapul.

*A kéttest-probléma: Határozzuk meg két pontszerű test mozgását, ha rájuk csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerő hat.*



7.2. ábra. A kéttest probléma

Jelölje a tömegpontokat  $P_1$  és  $P_2$ , tömegüket  $m_1$  és  $m_2$ . Az  $Oxyz$  inerciarendszerben legyenek a helyvektorok  $\vec{r}_1$  és  $\vec{r}_2$ . Legyen továbbá  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ,  $r = \|\vec{r}\|$   $P_2$ -nek  $P_1$ -hez viszonyított relatív helyzetvektora, illetve a két pont közti távolság. Az  $n$ -test problémánál bemutatott (7.5) egyenleteknek megfelelően a két pont mozgásegyenletei:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \end{cases} \quad (7.21)$$

ahol  $t \in [t_0, t_v]$ .

**Megjegyzések.** 1. A (7.21) mozgásegyenletek komponensekben hat közöséges másodrendű differenciálegyenletet jelentenek a meghatározandó

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= (x_1(t), y_1(t), z_1(t)), \\ \vec{r}_2(t) &= (x_2(t), y_2(t), z_2(t)), \quad t \in [t_0, t_v] \end{aligned}$$

függvényekben.

2. A (7.21) differenciálegyenletek az

$$\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_{10}, \quad \vec{r}_2(t_0) = \vec{r}_{20}, \quad \dot{\vec{r}}_1(t_0) = \vec{v}_{10}, \quad \dot{\vec{r}}_2(t_0) = \vec{v}_{20} \quad (7.22)$$

kezdeti feltételekkel egy kezdetiérték-feladatot alkot, amelynek a kezdeti feltételektől folytonosan függő egyértelmű megoldása létezik tetszőleges kezdeti feltételek esetén (nyilván, ha kizárjuk az ütközéseket).

A kétttest-probléma mozgását leíró differenciálegyenlet-rendszer tehát 12-ed rendű. Megoldásához a klasszikus első integrálokat használjuk.

**7.2.1. Tétel.** *A (7.21) rendszerrel modellezett kétttest-probléma klasszikus tíz első integrálja:*

i) *a tömegközéppont integrálok: léteznek az  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  állandó vektorok, amelyekre*

$$m\dot{\vec{r}}_C = \vec{a} \quad \text{és} \quad m\vec{r}_C = \vec{a}t + \vec{b}, \quad \forall t \in [t_0, t_v], \quad (7.23)$$

ahol  $m = m_1 + m_2$  az össztömeg és  $\vec{r}_C = \frac{1}{m}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$  a  $C$  tömegközéppont helyzetvektora;

ii) *az impulzusmomentum-integrál:*

$$\vec{r}_1 \times (m_1\dot{\vec{r}}_1) + \vec{r}_2 \times (m_2\dot{\vec{r}}_2) = \vec{c}, \quad \forall t \in [t_0, t_v], \quad (7.24)$$

ahol  $\vec{c}$  állandó vektor;

iii) *az energiaintegrál:*

$$T + V = h \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{m_1 \left(\dot{\vec{r}}_1\right)^2}{2} + \frac{m_2 \left(\dot{\vec{r}}_2\right)^2}{2} - k^2 \frac{m_1 m_2}{r} = h, \quad (7.25)$$

ahol  $h \in \mathbb{R}$ , az ún. energiaállandó.

A fenti tétel kijelentései a 7.1.2. részben bizonyított tételek sajátos esetei, így azonnal következnek azokból, de közvetlen úton is könnyen ellenőrizhetők.

### 7.2.2. Relatív mozgás és az egycentrum-probléma

A tömegközéppont integrálok szerint a  $C$  tömegközéppont vagy nyugalomban van, vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. Mindkét esetben a Galilei-féle relativitási elv értelmében  $C$  egy inerciarendszer kezdőpontjának tekinthető. A  $P_1$  és  $P_2$  pontok mozgását ebben a  $C$  kezdőpontú inerciarendszerben is vizsgálhatjuk.

Jelölje  $P_1$  és  $P_2$  helyvektorát  $C$ -re vonatkoztatva  $\vec{s}_1$ , illetve  $\vec{s}_2$ . Mivel

$$\ddot{\vec{r}}_C = \vec{0} \quad \text{és} \quad \vec{s}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_C, \quad \vec{s}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_C, \quad (7.26)$$

így

$$\ddot{\vec{s}}_1 = \ddot{\vec{r}}_1 \quad \text{és} \quad \ddot{\vec{s}}_2 = \ddot{\vec{r}}_2. \quad (7.27)$$

Ezek alapján a (7.21) mozgásegyenletek az

$$m_1 \ddot{\vec{s}}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad m_2 \ddot{\vec{s}}_2 = -k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (7.28)$$

alakban is felírhatók.

A tömegközéppont értelmezését használva:

$$\vec{s}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_C = \vec{r}_1 - \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (7.29)$$

$$\vec{s}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_C = \vec{r}_2 - \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (7.30)$$

A bemutatottakból azonnal adódik a következő tétel:

**7.2.2. Tétel.** *A tömegközéppont körüli mozgást leíró (7.28) mozgásegyenletek az*

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (7.31)$$

*mozgásegyenlettel ekvivalensek, ahol*

$$\mu = k^2 (m_1 + m_2). \quad (7.32)$$

**Bizonyítás.** A (7.28) egyenletekbe (7.29) illetve (7.30) alapján helyettesítve, valamint (7.32) figyelembevételével a következő ekvivalens átalakítások végezhetők:

$$\begin{aligned} m_1 \left( -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \ddot{\vec{r}} &= k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} = -k^2 \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r}, \\ m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} &= -k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} = -k^2 \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r}, \end{aligned}$$

ahonnan látszik hogy mindkét egyenlet a (7.31) alakra hozható.

**Megjegyzés.** A (7.31) mozgásegyenlet a  $P_2$  pont  $P_1$  körüli relatív mozgását írja le, ami a (7.21) mozgásegyenletek egymásból való kivonásával is levezethető.

A mechanikában klasszikusnak számító ún. *Newton-probléma*, vagy *egy-centrum-probléma*:

*határozzuk meg egy  $m$  tömegű tömegpont mozgását egy rögzített helyzetű  $m'$  tömegű pontszerű test körül a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerő hatására;*

az

$$\ddot{\vec{r}} = -k^2 \frac{m'}{r^3} \vec{r} \quad (7.33)$$

mozgásegyenlettel írható le, ahol  $\vec{r} = \overrightarrow{P_1 P_2}$ . Észrevehető, hogy  $P_2$ -nek  $P_1$  körüli relatív mozgását leíró (7.31) egyenlet formailag megegyezik a rögzített centrum körüli mozgást leíró (7.33) egyenlettel, az  $m' = m_1 + m_2$  megfeleltetéssel. Ez azt mutatja, hogy a  $P_2$  tömegpont a  $P_1$  körül tehát úgy mozog, mint ahogy egy tetszőleges tömegű pontszerű test kering egy rögzített helyzetű  $m_1 + m_2$  tömegű vonzó centrum körül.

A tömegközéppont mozgását meghatározó  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  vektorok, valamint a (7.31) relatív mozgásegyenlet  $\vec{r}(t)$  megoldásának ismeretében a (7.21) abszolút mozgásegyenletek megoldása (7.26), (7.23) valamint (7.29) és (7.30) alapján:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{1}{m_1 + m_2} (\vec{a}t + \vec{b}) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \frac{1}{m_1 + m_2} (\vec{a}t + \vec{b}) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \end{aligned}$$

Az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  állandó vektorok a (7.22) kezdeti feltételek alapján:

$$\vec{a} = m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20}, \quad \vec{b} = m_1 \vec{r}_{10} + m_2 \vec{r}_{20} - t_0 (m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20}).$$

A látottak szerint a tömegközéppont-integrálok segítségével a kétttest-probléma visszavezethető az egycentrum problémára, vagyis az ezzel ekvivalens relatív mozgás vizsgálatára.

### 7.2.3. A relatív mozgás első integráljai

A 7.2.2. részben bemutatottak szerint az  $m_1$ , illetve  $m_2$  tömegű  $P_1$  és  $P_2$  pontoknak a kölcsönös gravitációs vonzás hatására végzett mozgása esetén a  $P_2$  pont  $P_1$  körüli mozgását (7.31) szerint az

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$$

egyenlet írja le, ahol  $\mu = k^2 (m_1 + m_2)$ . Mint láttuk, a relatív mozgás ekvivalens az egycentrum-problémával, s így a  $P_2$  tömegpont  $P_1$  körüli mozgása centrális mozgás. Ez a (7.31) mozgásegyenlet jobb oldalán szereplő erő kifejezéséből is látszik, mivel az erő iránya mindvégig azonos az  $\vec{r}$  helyvektor irányával. Ezek szerint a relatív mozgás kielégíti a centrális mozgás tulajdonságait, amelyek a következők:

**7.2.3. Tétel.** (*Impulzusmomentum-integrál.*) A relatív mozgást leíró (7.31) egyenlet bármely  $\vec{r}: [t_0, t_v] \rightarrow \mathbb{R}^3$  megoldása esetén létezik olyan  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$  állandó vektor, amelyre

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c} \quad \forall t \in [t_0, t_v]. \quad (7.34)$$

**Bizonyítás.** Az (7.31) mozgásegyenlet mindkét oldalát beszorozva vektoriálisan  $\vec{r}$ -rel, a következő átalakítások végezhetők:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \vec{c} \in \mathbb{R}^3 : \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}.$$

**Megjegyzések.** 1. Derékszögű koordináta-rendszerben az  $\vec{r}(x, y, z)$ ,  $\dot{\vec{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  koordinátákat használva, az

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_1, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = c_3 \quad (7.35)$$

első integrálokat kapjuk.

2. A  $\vec{c}$  impulzusmomentum-állandó értéke a (7.22) kezdeti feltételek alapján ( $m = 1$ )

$$\vec{c} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0, \quad (7.36)$$

ahol

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{20} - \vec{r}_{10} \quad \text{és} \quad \vec{v}_0 = \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}. \quad (7.37)$$

**Következmények.** 1. A (7.31) egyenlettel leírt relatív mozgás:

- i) egyenesvonalú mozgás, ha  $\vec{c} = \vec{0}$ , azaz  $(\vec{r}_0 = \vec{0} \vee \vec{v}_0 = \vec{0} \vee \vec{r}_0 \parallel \vec{v}_0)$ ;
- ii) síkmozgás, ha  $\vec{c} \neq \vec{0}$ , azaz  $(\vec{r}_0 \neq \vec{0} \wedge \vec{v}_0 \neq \vec{0} \wedge \vec{r}_0 \nparallel \vec{v}_0)$  és a pályasík egyenlete:

$$\vec{c} \cdot \vec{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0. \quad (7.38)$$

2. (*Kepler második általánosított törvénye.*) Az  $m_2$  tömegű  $P_2$  tömegpontnak az  $m_1$  tömegű  $P_1$  körüli relatív mozgása a kölcsönös tömegvonzás hatására a felületi törvény szerint zajlik, azaz az  $\vec{r} = \overrightarrow{P_1 P_2}$  vezérsugár által súrolt terület arányos az idővel.

**Bizonyítás.** 1. i) Ha  $\vec{c} = \vec{0}$ , akkor ha  $\vec{v} \neq \vec{0}$  és  $\vec{r} \neq \vec{0}$ , az  $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{0}$  összefüggés alapján  $\vec{v} = \lambda \vec{r}$ , ahol  $\lambda : [t_0, t_v] \rightarrow \mathbb{R}$ . A  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda \vec{r}$  egyenlet megoldása  $\vec{r} = \vec{r}_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau}$ , ami azt mutatja, hogy a pálya egy egyenes. ii) Ha  $\vec{c} \neq \vec{0}$ , a (7.34) egyenlet mindkét oldalát beszorozva skalárisan  $\vec{r}$ -rel, a



vegyes szorzat tulajdonsága alapján a (7.38) összefüggés következik, ami azt mutatja, hogy a mozgás síkmozgás.

2. Ha  $S$ -sel jelöljük a vezérsugar által súrolt területet egy kiindulási iránytól, akkor a felületi sebesség értelmezése szerint

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\|\vec{r} \times \vec{v}\|}{2}, \quad (7.39)$$

de az impulzusmomentum-integrál szerint  $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{c}$ , így

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c}{2},$$

ahol

$$c = \|\vec{c}\|, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2, \quad (7.40)$$

ahonnan

$$S - S_0 = \frac{c}{2}(t - t_0).$$

**7.2.4. Tétel.** *(Az energiaintegrál.) A relatív mozgás bármely megoldása esetén létezik olyan  $h \in \mathbb{R}$  állandó, amelyre*

$$\frac{1}{2} \left( \dot{\vec{r}} \right)^2 - \frac{\mu}{r} = h, \quad \forall t \in [t_0, t_v]. \quad (7.41)$$

**Bizonyítás.** A (7.31) egyenlet mindkét oldalát skalárisan megszorozva az  $\dot{\vec{r}}$ -val, majd elvégezve a megfelelő átalakításokat és integrálást:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} &= -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \Leftrightarrow \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d\left(\frac{\mu}{r}\right)}{dr} \frac{dr}{dt} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{\left(\dot{\vec{r}}\right)^2}{2} \right] - \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{r} \right) = 0 \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R} : \frac{\left(\dot{\vec{r}}\right)^2}{2} - \frac{\mu}{r} = h, \end{aligned}$$

ahol az  $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r \dot{r}$  egyenlőséget is használtuk.

**Megjegyzések.** 1. A (7.41) energiaintegrál bal oldalán szereplő  $\frac{1}{2} \left( \dot{\vec{r}} \right)^2$  mennyiség az egységnyi tömegűnek tekintett  $P_2$  tömegpont kinetikus energiája,  $-\frac{\mu}{r}$  pedig a potenciális energia, így a tömegegységre vonatkozó (7.41) energiaintegrál az energia állandóságát fejezi ki.

2. A  $h$  energiaállandó értéke a (7.37) kezdeti feltételek alapján ( $m = 1$ ):

$$h = \frac{\left(\dot{\vec{r}}_0\right)^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}. \quad (7.42)$$

A bemutatott integrálokon kívül a relatív mozgás esetében ismert még egy további első integrál, a Laplace-integrál, amely viszont már nem független a tárgyalt klasszikus első integráloktól.

**7.2.5. Tétel.** *(A Laplace-integrál.) A relatív mozgás bármely megoldásához létezik olyan  $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^3$  állandó vektor (ún. Laplace-vektor), amelyre:*

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{c} - \frac{\mu}{r} \vec{r} = \vec{\lambda}, \quad \forall t \in [t_0, t_v], \quad (7.43)$$

ahol a  $\vec{c}$  állandó vektor az impulzusmomentum.

**Bizonyítás.** Ha a (7.31) relatív mozgásegyenlet mindkét oldalát megszorozzuk vektoriálisan a  $\vec{c} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  vektorral, a következő ekvivalens átalakítások végezhetők:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} \times \vec{c} &= -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{c}) \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} \times \vec{c} = -\frac{\mu}{r^3} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})] \Leftrightarrow \\ \ddot{\vec{r}} \times \vec{c} &= -\frac{\mu}{r^3} [(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} - r^2 \dot{\vec{r}}] \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} \times \vec{c} = \frac{\mu}{r} \dot{\vec{r}} - \frac{\mu}{r^2} \dot{r} \vec{r} \Leftrightarrow \\ \frac{d(\dot{\vec{r}} \times \vec{c})}{dt} &= \frac{\mu}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d(\frac{\mu}{r})}{dr} \frac{dr}{dt} \vec{r} \Leftrightarrow \frac{d(\dot{\vec{r}} \times \vec{c})}{dt} = \frac{\mu}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d(\frac{\mu}{r})}{dt} \vec{r} \Leftrightarrow \\ \frac{d(\dot{\vec{r}} \times \vec{c})}{dt} - \frac{d(\frac{\mu}{r} \vec{r})}{dt} &= \vec{0} \Leftrightarrow \exists \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^3 : \dot{\vec{r}} \times \vec{c} - \frac{\mu}{r} \vec{r} = \vec{\lambda}. \end{aligned}$$

A levezetett első integrálok komponensekben hét — impulzusmomentum (3), energia (1) és Laplace- (3) — skaláris integrálját adják a relatív mozgást leíró (7.31) hatodrendű rendszernek. Így ezek nem lehetnek függetlenek. A hét integrálási állandó —  $(c_1, c_2, c_3)$ ,  $h$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  — között összefüggések léteznek. Az alábbiakban ilyen összefüggéseket mutatunk be.

**7.2.6. Tétel.** *A relatív mozgás tetszőleges megoldását jellemző  $\vec{c}$ ,  $h$ ,  $\vec{\lambda}$  integrálási állandók teljesítik a következő összefüggéseket:*

$$\begin{aligned} i) \quad \vec{\lambda} \cdot \vec{c} &= \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0; \\ ii) \quad \lambda^2 &= \mu^2 + 2hc^2, \text{ ahol } \lambda = \|\vec{\lambda}\| \text{ és } c = \|\vec{c}\|. \end{aligned}$$

**Bizonyítás.** i) A (7.43) Laplace-integrált skalárisan megszorozva a  $\vec{c} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  vektorral

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{c} = (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} - \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0.$$

ii) A kettős vektori szorzat tulajdonságát (Gibbs-formula) használva:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{c} = \dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 \vec{r} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}},$$

így a Laplace-vektor a

$$\vec{\lambda} = \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 \vec{r} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}} - \frac{\mu}{r} \vec{r}$$

alakra hozható. Ezen utolsó összefüggés mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \mu^2 + (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 + \left(\dot{\vec{r}}\right)^4 r^2 - 2\frac{\mu}{r} \vec{r} \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 \vec{r} + \\ &\quad + 2\frac{\mu}{r} \vec{r} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}} - 2 \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 \vec{r} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}} \Rightarrow \\ \lambda^2 &= \mu^2 + (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 + \left(\dot{\vec{r}}\right)^4 r^2 - 2\mu r \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 + \\ &\quad + 2\frac{\mu}{r} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 - 2 \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \Rightarrow \\ \lambda^2 &= \mu^2 + \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 \cdot \left[ r^2 \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \right] - \frac{2\mu}{r} \left[ r^2 \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \right] \Rightarrow \\ \lambda^2 &= \mu^2 + \left[ r^2 \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 \right] \left[ \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} \right] \Rightarrow \\ \lambda^2 &= \mu^2 + 2hc^2 \end{aligned}$$

Az utolsó implikációnál azt használtuk, hogy a (7.41) szerint  $\left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2h$ , másfelől pedig a (7.34) szerint  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}$ , és így:

$$\begin{aligned} r^2 \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 &= (\vec{r})^2 \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) = \\ &= \vec{r} \cdot \left[ \vec{r} \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - \dot{\vec{r}} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \right] = \vec{r} \cdot \left[ \dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \right] = \\ &= \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{c} = c^2. \end{aligned}$$

#### 7.2.4. A pályasík helyzetének meghatározása

Amint a 7.2.3. Tétel utáni Következmény 1. pontja mutatja, ha a  $\vec{c}$  impulzusmomentum nem zérus, akkor a  $P_2$  tömegpont  $P_1$  körüli mozgása síkmozgás, a  $c_1x + c_2y + c_3z = 0$  egyenletű,  $\vec{c}$ -re merőleges pályasíkkal. Határozzuk meg ezen  $P_1$ -en áthaladó pályasíknak az inerciarendszerként választott  $P_1xyz$  jobbsodrású derékszögű koordináta-rendszerhez viszonyított helyzetét.

Gyakorlati alkalmazásokban például, ha  $P_1$  a Nap és  $P_2$  egy bolygó, a  $P_1xy$  sík az ekliptika síkja, amelyben a  $P_1x$  tengely a tavaszpont ( $\Upsilon$ ) felé mutat (ekliptikai koordináta-rendszer).

A  $P_1xyz$  rendszerben a  $P_1x_1y_1$  pályasík helyzetét két szög segítségével adhatjuk meg egyértelműen (7.3. ábra). Ezek közül az első:

– az  $i \in [0^\circ, 180^\circ]$  *pályahajlás* (*inklináció*), amely értelmezés szerint a  $P_1x_1y_1$  pályasíknak a  $P_1xy$  síkkal bezárt szöge. Ha  $i \in [0^\circ, 90^\circ)$  *direkt mozgásról*, ha  $i \in (90^\circ, 180^\circ]$  *retrográd mozgásról* beszélünk. Az  $i$  pályahajlás megegyezik a  $\vec{c}$  vektornak a  $P_1z$  tengellyel bezárt szögével.

Ha a pályasík nem esik egybe a  $P_1xy$  síkkal, akkor a két sík közös egyenesét *csomóvonalnak* nevezzük. A  $P_2$  pont pályája (pályájának egy hurka) a csomóvonalat a *felszálló*- ( $\Omega$ ) és *leszálló csomóban* ( $\mathcal{O}$ ) metszi. A felszálló csomón áthaladva a mozgó  $P_2$  pont  $z$  koordinátája negatívból pozitívvá válik. A pályasík helyzetét megadó második szög:

–  $\Omega \in [0^\circ, 360^\circ)$  a *felszálló csomó hossza*, ami a felszálló csomó szögtávolsága a  $P_1x$  tengelytől (ekliptikai hosszúság), és amelyet a  $P_1z$  tengely irányából nézve az óramutató járásával ellentétes irányba mérünk (direkt csillagászati irány).

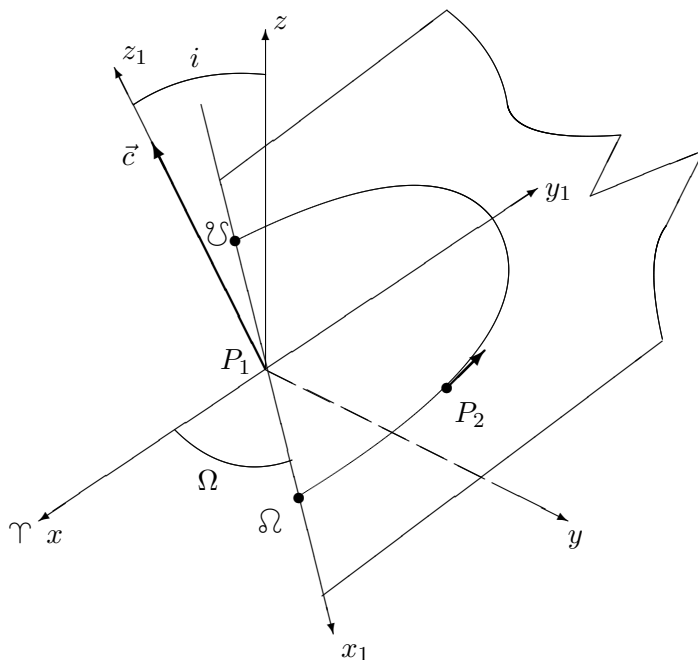
A pályasík térbeli helyzete egyértelműen meghatározható az  $i, \Omega$  szögek segítségével. Legyen  $P_1x_1y_1z_1$  az a derékszögű koordináta-rendszer, amelynek  $P_1x_1$  tengelye a felszálló csomó felé mutat, a pályasíkra merőleges  $P_1z_1$  tengelye pedig  $\vec{c}$ -vel azonos irányítású.

**7.2.7. Tétel.** *Ha  $(x, y, z)$ , illetve  $(x_1, y_1, z_1)$  egy tetszőleges  $P$  pontnak a két koordináta-rendszerben vett koordinátái, akkor ezek kapcsolata a következő összefüggéssel adható meg:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (7.44)$$

**Bizonyítás.** A tételben szereplő (7.44) összefüggés könnyen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy a  $P_1xyz$  rendszer két forgatással vihető át a  $P_1x_1y_1z_1$  rendszerre. Először a  $P_1xyz$  rendszert elforgatjuk a  $P_1z$  tengely körül az  $\Omega$  szöggel, majd az így kapott rendszert a  $P_1x_1$  körül forgatjuk  $i$  szöggel. A két koordináta-rendszer közti transzformáció összefüggései a két forgatásnak megfelelően:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad (7.45)$$



7.3. ábra. A pályasík térbeli helyzete

ahonnan a (7.44) összefüggés azonnal következik.

**7.2.8. Tétel.** *A pályasík helyzetét megadó  $i$  és  $\Omega$  szögeket a  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ,  $c = \|\vec{c}\|$  impulzusmomentum függvényében az alábbi összefüggések adják:*

$$\begin{cases} c_1 = c \sin i \sin \Omega, \\ c_2 = -c \sin i \cos \Omega, \\ c_3 = c \cos i. \end{cases} \quad (7.46)$$

**Bizonyítás.** A  $\vec{c}$  impulzusmomentum-vektor komponensei a két rendszerben  $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ , illetve  $\vec{c}(0, 0, c)$ . Ezen koordinátákat a (7.44) transzformációs képletekbe helyettesítve azonnal következnek a (7.46) összefüggések.

### 7.2.5. A relatív mozgás pályája

A 7.2.2. részben tárgyaltak szerint az  $m_2$  tömegű  $P_2$  pontnak az  $m_1$  tömegű  $P_1$  körüli relatív mozgása az

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$$

egyenlettel írható le, ahol  $\mu = k^2(m_1 + m_2)$ . Vizsgáljuk az alábbiakban a relatív mozgást a mozgás síkjában, azaz a  $P_1x_1y_1$  síkban. A mozgó pont ebben a rendszerben az  $\vec{r}(x_1, y_1, 0)$  helyzetvektorral jellemezhető. A vektori mozgásegyenletet vetítve a koordináta-tengelyekre, az

$$\ddot{x}_1 = -\frac{\mu}{r^3}x_1, \quad \ddot{y}_1 = -\frac{\mu}{r^3}y_1, \quad (7.47)$$

egyenleteket kapjuk, ahol

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2. \quad (7.48)$$

A levezetett (7.34) és (7.41) első integrálok megfelelő alakja:

$$x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = c, \quad (\text{impulzuszmomentum-integrál}), \quad (7.49)$$

illetve

$$\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) - \frac{\mu}{r} = h, \quad (\text{energiaintegrál}). \quad (7.50)$$

A (7.49), (7.50) első integrálokból meghatározható a pálya egyenlete. Ezt célszerű a pályasíkban bevezetett  $(r, u)$  polárkoordinátákban végezni, amelyekre

$$x_1 = r \cos u, \quad y_1 = r \sin u. \quad (7.51)$$

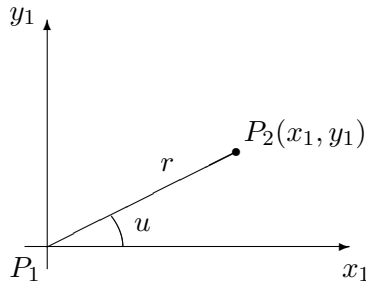
**Megjegyzés.** A (7.49) és (7.50) első integrálok polárkoordinátákban kifejezve:

$$r^2\dot{u} = c, \quad (7.52)$$

illetve

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{u}^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h. \quad (7.53)$$

7.4. ábra. Polárkoordináták a pálya síkjában



**Bizonyítás.** A (7.49) integrál bal oldalán lévő kifejezésbe elvégezve a (7.51) helyettesítéseket, a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 &= r \cos u (\dot{r} \sin u + r \cos u \dot{u}) - r \sin u (\dot{r} \cos u - r \sin u \dot{u}) = \\ &= r\dot{r} \sin u \cos u + r^2 \cos^2 u \dot{u} - r\dot{r} \sin u \cos u + r^2 \sin^2 u \dot{u} = \\ &= r^2\dot{u} (\cos^2 u + \sin^2 u) = r^2\dot{u}, \end{aligned}$$

ami (7.52) helyességét mutatja.

Hasonlóan végezzük el a helyettesítéseket a (7.50) energiaintegrál esetében is. Mivel

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = (\dot{r} \cos u - r \sin u \dot{u})^2 + (\dot{r} \sin u + r \cos u \dot{u})^2 = \\ &= \dot{r}^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) + r^2 \dot{u}^2 (\sin^2 u + \cos^2 u) - 2r\dot{r}\dot{u} \sin u \cos u + \\ &\quad + 2r\dot{r}\dot{u} \sin u \cos u = \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{u}^2, \end{aligned}$$

így (7.53) azonnal következik.

**Megjegyzés.** A  $P_2$  pont  $(r, u)$  polárkoordinátáinak ismeretében a  $P_2$  Descartes-féle koordinátái a  $P_1xyz$  rendszerben a következő összefüggésekkel határozhatók meg:

$$\begin{cases} x = r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = r \sin u \sin i. \end{cases} \quad (7.54)$$

**Bizonyítás.** A koordináta-transzformációt leíró (7.44) összefüggésekbe behelyettesítve az  $x_1$  és  $y_1$  koordináták (7.51) kifejezését a polárkoordináták segítségével, a következő összefüggést kapjuk:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos u \\ r \sin u \\ 0 \end{pmatrix},$$

ahonnan a kijelentésben szereplő (7.54) összefüggések azonnaliak.

**7.2.9. Tétel.** (Kepler I. általánosított tétele.) A kétttest-probléma esetén a  $P_2$  pontnak  $P_1$  körüli relatív pályája egy  $P_1$  fókuszú kúpszelet.

**Bizonyítás.** A pálya meghatározásához a (7.52) felületi-, és (7.53) energiaintegrált használjuk, kiküszöbölve a két összefüggésből az időt. A (7.52) felületi integrál szerint

$$\dot{u} = \frac{c}{r^2},$$

és

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{du}.$$

Ezeket a kifejezéseket behelyettesítve a (7.53) energiaintegrálba, a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\left( \frac{c}{r^2} \frac{dr}{du} \right)^2 + r^2 \left( \frac{c}{r^2} \right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h.$$

A fenti egyenlet a

$$\frac{c}{r^2} \frac{dr}{du} = + \sqrt{-\frac{c^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + 2h} \quad (7.55)$$

alakra hozható, ahol a  $+$  előjel azt mutatja, hogy a pályának azon az ívén tartózkodunk, ahol  $\frac{dr}{du} > 0$ , azaz az  $r$  vezérsugár nő a poláris szöggel. A (7.55) egyenlet a négyzetgyök alatti kifejezés megfelelő átalakításával a

$$\frac{c}{r^2} \frac{dr}{du} = + \sqrt{\frac{\mu^2}{c^2} + 2h - \left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}\right)^2} \quad (7.56)$$

alakra hozható, ahonnan

$$\begin{aligned} du &= \frac{-d\left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}\right)}{\sqrt{\frac{\mu^2}{c^2} + 2h - \left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}\right)^2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u - \omega &= \arccos \frac{\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{c^2} + 2h}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{c}{r} - \frac{\mu}{c} &= \sqrt{\frac{\mu^2}{c^2} + 2h} \cos(u - \omega) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + 2h \frac{c^2}{\mu^2}} \cos(u - \omega)}. \end{aligned}$$

Bevezetve a

$$p = \frac{c^2}{\mu} \quad (7.57)$$

és

$$e = \sqrt{1 + 2h \frac{c^2}{\mu^2}} \quad (7.58)$$

jelöléseket, az

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)} \quad (7.59)$$

pályaegyenletet kapjuk, ami egy kúpszeletet ír le.

**Megjegyzések.** 1. A

$$v = u - \omega \quad (7.60)$$

valódi anomáliát használva, a (7.59) pályaegyenlet az

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (7.61)$$



alakban is felírható.

2. A (7.58) összefüggéssel értelmezett  $e$  *numerikus excentricitás* értékei szerint a pálya típusa a következő:

i) *ellipszis*, ha  $e \in [0, 1)$   $\iff h \in [-\frac{\mu}{2c^2}, 0)$ . A  $h = -\frac{\mu}{2c^2}$  sajátos esetben, amikor  $e = 0$  a pálya kör alakú;

ii) *parabola*, ha  $e = 1$   $\iff h = 0$ ;

iii) *hiperbola*, ha  $e > 1$   $\iff h > 0$ .

3. Az  $r$  poláris sugár hossza minimális, ha  $v = 0$ , vagy  $u = \omega$ , ami azt mutatja, hogy az  $\omega$  integrációs állandó a  $\Pi$  pericentrum szögtávolsága a  $P_1 x_1$  tengelytől, ezért  $\omega$ -t a *pericentrum argumentumának* nevezzük. Az  $r$  vezérsugár minimális értéke

$$r_{\min} = P_1 \Pi = \frac{p}{1+e}. \quad (7.62)$$

4. A  $v$  valódi anomália az  $r$  rádiusznak a kúpszelet  $P_1 \Pi$  szimmetriatengelyével bezárt szöge, amit a  $\Pi$  pericentrum irányától kiindulva direkt csillagászati (trigonometriai) irányba mérnek (7.5. ábra).

5. A (7.57) összefüggéssel bevezetett  $p$  állandót a *pálya paraméterének* nevezzük. Ennek fizikai jelentését a  $p = r(u - \omega = \frac{\pi}{2})$  összefüggés mutatja, azaz  $p$  a  $P_2$  pontnak  $P_1$ -től mért távolsága amikor  $v = \frac{\pi}{2}$ .

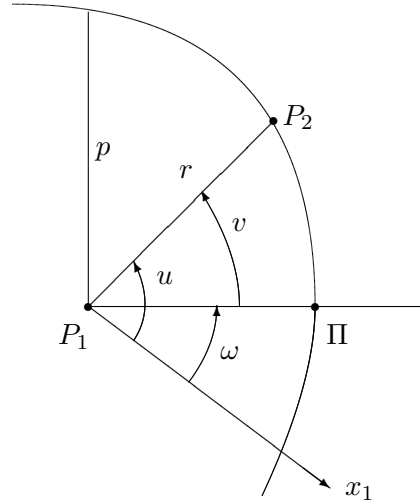
6. A (7.55) egyenlet azt is mutatja, hogy a mozgás csak a  $\mu^2 + 2hc^2 \geq 0$  esetben lehetséges és a  $P_2$  pont az

i)  $r \geq \frac{c^2}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2hc^2}}$  tartományban tartózkodik, ha  $h \geq 0$ , és a

ii)  $\frac{c^2}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2hc^2}} \leq r \leq \frac{c^2}{\mu - \sqrt{\mu^2 + 2hc^2}}$  tartományban, ha  $-\frac{\mu}{2c^2} \leq h < 0$ , ( $c \neq 0$ ).

Az  $r$  minimális értéke

$$r_{\min} = \frac{c^2}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2hc^2}} = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + 2h\frac{c^2}{\mu^2}}} = \frac{p}{1+e}$$



7.5. ábra. A relatív pálya elemei

pontosan visszaadja a (7.62)-ben megadott pericentrum-távolságot.

### 7.2.6. Az elliptikus mozgás

A kéttest-probléma esetében ismerve a pályát, ami általában a (7.61) egyenlettel meghatározott kúpszelet (ellipszis, parabola vagy hiperbola), felmerül a mozgó pont pálya menti helyzetének meghatározása az idő függvényében. Ehhez a (7.52) összefüggéssel ekvivalens ( $v = u - \omega$ , ahol  $\omega$  állandó)

$$r^2 \dot{v} = c \quad (7.63)$$

impulzusmomentum-integrált használjuk.

Ebben a részben a gyakorlati alkalmazások szempontjából talán legfontosabb elliptikus mozgást vizsgáljuk, amikor az előző paragrafusban látottak szerint  $e < 1$  és  $h < 0$ .

A (7.61)-ben felírt  $r = \frac{p}{1+e \cos v}$ , valamint a (7.63) egyenlet alapján a valódi anomáliát az idő függvényében a

$$c dt = \frac{p^2}{(1 + e \cos v)^2} dv \quad (7.64)$$

differenciálegyenlet alapján határozhatjuk meg. A (7.64) egyenlet jobb oldalán szereplő kifejezés integrálása egy segédváltozó bevezetésével egyszerűsíthető.

Mint ismeretes, az  $e < 1$  esetben a (7.61) pályaequation egy ellipszist ír le. Az ellipszis fél nagytengelye  $a$ , amelynek kapcsolatát a pálya (7.57)-ban megadott  $p = \frac{c^2}{\mu}$  paraméterével a

$$p = a(1 - e^2) \quad (7.65)$$

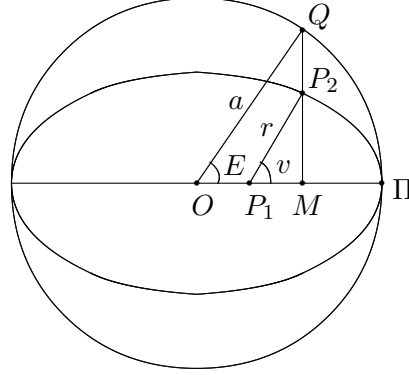
összefüggés adja. Ez azonnal következik, ha figyelembe vesszük, hogy a nagytengely hossza a pericentrum és apocentrum távolságok összege, azaz

$$2a = r(0) + r(\pi) = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}.$$

A (7.57), (7.58) és (7.65) összefüggések alapján a fél nagytengely kifejezése a  $h$  energiaállandó és  $\mu$  tömegparaméter függvényében:

$$a = -\frac{\mu}{2h}. \quad (7.66)$$

A (7.64) differenciálegyenlet integrálásához vegyük fel a mozgás síkjában a pályaellipszist és a köré írható  $O$  középpontú  $a$  sugarú kört (7.6. ábra). Legyen  $P_1$  az ellipszis azon fókusza, amelyben az egyik tömegpont van, míg a  $P_2$  tömegpont  $e$  pont körül kering az ellipszisen. Ha  $\Pi$  az ellipszispálya pericentrum pontja, akkor  $P_1P_2 = r$  és  $m(\widehat{P_2P_1\Pi}) = v$ . Legyen  $P_2M$  merőleges az ellipszis nagytengelyére és  $Q$  a  $P_2M$  merőlegesnek az ellipszis köré írt körrel való metszéspontja, amely a nagytengelyhez viszonyítva  $P_2$ -vel azonos félsíkban van.



7.6. ábra. Az excentrikus anomália értelmezése

A  $\widehat{QO\Pi}$  szög mértékét  $E$ -vel jelöljük és *excentrikus anomáliának* nevezzük. Az excentrikus anomália kapcsolatát az  $r$ ,  $v$  koordinátákkal az alábbi segédállításban foglalhatjuk össze.

**7.2.10. Lemma.** *Az elliptikus mozgás esetén az  $E$  excentrikus anomália kielégíti a következő összefüggéseket:*

$$\begin{aligned}
 i. \quad & r \cos v = a (\cos E - e), \\
 ii. \quad & r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\
 iii. \quad & r = a (1 - e \cos E), \\
 iv. \quad & \tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}, \\
 v. \quad & \frac{dv}{dE} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E}.
 \end{aligned} \tag{7.67}$$

**Bizonyítás.** i. A  $P_2P_1M$  derékszögű háromszögben  $P_1M = r \cos v$ . A  $QOM$  háromszögben  $OM = a \cos E$ . Az ellipszis egyik alaptulajdonsága szerint  $OP_1 = ae$ , és így

$$P_1M = OM - OP_1 = a \cos E - ae = a (\cos E - e).$$

A  $P_1M$  hosszát adó két kifejezést összevetve (7.67. i.) következik.

ii. Jelölje  $\xi$  és  $\eta$  a  $P_2$  pont derékszögű koordinátáit az  $O$  kezdőpontú derékszögű koordináta-rendszerben, amelynek a tengelyei az ellipszis szim-

metriatengelyei. Ebben a rendszerben az ellipszis egyenlete

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad \text{ahol} \quad b^2 = a^2 (1 - e^2).$$

Innen a  $\xi = a \cos E$  összefüggés alapján az

$$\eta^2 = a^2 (1 - e^2) (1 - \cos^2 E) = a^2 (1 - e^2) \sin^2 E$$

adódik. Másfelől viszont  $\eta = P_2 M = r \sin v$ , és így a (7.67. ii.) összefüggés azonnali. Az összefüggés tetszőleges szögek esetén érvényes, mivel  $\sin v$  és  $\sin E$  egy időben vált előjelet.

iii. A (7.67. i.) és (7.67. ii.) összefüggéseket négyzetreemelve és a megfelelő oldalakat összeadva, az

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 (\cos^2 E - 2e \cos E + e^2 + \sin^2 E - e^2 \sin^2 E) && \Longleftrightarrow \\ r^2 &= a^2 [1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E + e^2 - e^2 (\sin^2 E + \cos^2 E)] && \Longleftrightarrow \\ r^2 &= a^2 (1 - e \cos E)^2 \end{aligned}$$

összefüggést kapjuk, ahonnan  $e < 1 \implies 1 - e \cos E \geq 0$  alapján a (7.67. iii.) összefüggés következik.

iv. A következő ekvivalens átalakítások végezhetők:

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{v}{2} &= \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\cos^2 \frac{v}{2}} = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} = \frac{r - r \cos v}{r + r \cos v} \quad (7.67. \text{ i, ii, iii.}) \\ &= \frac{a [(1 - e \cos E) - (\cos E - e)]}{a [(1 - e \cos E) + (\cos E - e)]} = \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{(1 - e)(1 + \cos E)} = \\ &= \frac{(1 + e) \sin^2 \frac{E}{2}}{(1 - e) \cos^2 \frac{E}{2}} = \frac{(1 + e)}{(1 - e)} \tan^2 \frac{E}{2}, \end{aligned}$$

ahonnan (7.67. iv.) azonnali, mivel  $\tan \frac{v}{2}$  és  $\tan \frac{E}{2}$  soha sem negatív, ha  $v, E \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$ .

v. A (7.67. ii.) és (7.67. iii.) összefüggések mindkét oldalát deriválva  $E$  szerint, a

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dE} \sin v + r \cos v \frac{dv}{dE} &= a \sqrt{1 - e^2} \cos E, \\ \frac{dr}{dE} &= ae \sin E \end{aligned}$$

összefüggéseket kapjuk, amelyek (7.67. i.) felhasználásával az

$$a (\cos E - e) \frac{dv}{dE} = a \sqrt{1 - e^2} \cos E - ae \sin E \sin v$$

összefüggéshez vezetnek, amely a  $\sin v = \frac{r \sin E}{r}$  alapján, a (7.67. i.) és (7.67. iii.) figyelembe vételével az alábbi módon alakítható tovább:

$$\begin{aligned} (\cos E - e) \frac{dv}{dE} &= \sqrt{1 - e^2} \cos E - e \sin E \frac{a \sqrt{1 - e^2} \sin E}{a(1 - e \cos E)} && \Longleftrightarrow \\ (\cos E - e) \frac{dv}{dE} &= \frac{\sqrt{1 - e^2} (\cos E - e \cos^2 E - e \sin^2 E)}{1 - e \cos E} && \Longleftrightarrow \\ \frac{dv}{dE} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E}. \end{aligned}$$

**Megjegyzések.** 1. A (7.67. ii.) összefüggés, ami az

$$\eta = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

alakban is írható, azt a mértani összefüggést fejezi ki, hogy az ellipszis fel-fogható mint az  $a$  sugarú kör vetülete arra a síkra, amely a kör síkjával a  $\cos \psi = \sqrt{1 - e^2}$  összefüggéssel adott  $\psi$  szöget zárja be, ahol a két sík metszévonal a  $OP_1$  egyenes.

2. A (7.67. iv.) összefüggés azt mutatja, hogy az  $E$  excentrikus és  $v$  valódi anomália közötti kapcsolat csak az  $e$  excentricitástól függ.

**7.2.11. Tétel.** Az  $E$  excentrikus anomália a  $t$  időpont ismeretében az

$$E - e \sin E = n(t - \tau) \quad (7.68)$$

Kepler-egyenletből határozható meg, ahol az

$$n = \mu^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} \quad (7.69)$$

állandó az ún. középmozgás és  $\tau$  a pericentrum-átmenet időpontja.

**Bizonyítás.** A (7.64)-ben megadott

$$cdt = \frac{p^2}{(1 + e \cos v)^2} dv$$

differenciálegyenletet integráljuk, jobb oldalán segédváltozóként az  $E$  excentrikus anomáliát használva. Az integrálást a  $t = \tau$  pericentrum-átmenet pillanatától végezzük, amikor  $v = E = 0$ , egy tetszőleges  $t$  időpontban felvett

$E$  értékig:

$$\begin{aligned} c(t - \tau) &= \int_0^v r^2 dv \stackrel{(7.67, \text{iii}, \text{v.})}{\Leftrightarrow} \\ c(t - \tau) &= \int_0^E a^2 (1 - e \cos E)^2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} dE \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \int_0^E (1 - e \cos E) dE = a^2 \sqrt{1 - e^2} (E - e \sin E), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\frac{c}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} (t - \tau) = E - e \sin E. \quad (7.70)$$

Bevezetve az

$$n = \frac{c}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} \quad (7.71)$$

jelölést, a (7.70) összefüggés a (7.68) Kepler-egyenletet eredményezi. A (7.71) összefüggésbe az  $e$  excentricitás (7.58) kifejezését helyettesítve, (7.66) figyelembevételével az

$$n = \frac{c}{a^2 \sqrt{-2h_{\frac{c}{\mu}}}} = \frac{c}{a^2 \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{c}{\mu}}} = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$$

összefüggést kapjuk, ami (7.69)-et igazolja.

**Következmény.** A  $P$  sziderikus keringés és  $n$  közepmozgás kapcsolata:

$$n = \frac{2\pi}{P}. \quad (7.72)$$

**Bizonyítás.** A  $P$  sziderikus keringési periódusnak megfelelő idő alatt — míg  $t$  értéke  $\tau$ -tól  $\tau + P$ -ig változik —  $E$  értéke 0-ról  $2\pi$ -re nő. A (7.68) Kepler-egyenletet felírva a  $t = \tau + P \Leftrightarrow E = 2\pi$  értékekre

$$2\pi - e \sin 2\pi = n(\tau + P - \tau) \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi = nP, \quad \text{q. e. d.}$$

**Megjegyzések.** 1. Az előző Következmény bizonyítása elvégezhető tetszőleges  $t$  és  $t + P$  pillanatokra felírva a (7.68) Kepler-egyenletet.

2. A (7.72) összefüggés megadja az  $n$  közepmozgás fizikai jelentését is, mint *közepes szögsebesség*.

3. Az

$$M = n(t - \tau) \quad (7.73)$$

mennyiséget *középanomáliának* nevezzük. Segítségével a (7.68) Kepler-egyenlet az

$$E - e \sin E = M \quad (7.74)$$

alakra hozható.

**7.2.12. Tétel.** *(Kepler III. általános törvénye.) Elliptikus mozgás esetén a  $P$  sziderikus keringési periódus négyzetének és a pálya a fél nagytengelye köbének arányára érvényes a következő összefüggés:*

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}. \quad (7.75)$$

**Bizonyítás.** A felületi sebesség polárkoordinátákban való

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$$

kifejezése, valamint a (7.60)-ból következő  $\dot{u} = \dot{v}$  és (7.63) összefüggések szerint

$$dS = \frac{c}{2} dt.$$

A kapott összefüggést  $\tau$ -tól  $\tau + P$ -ig integrálva, míg a vezérsugár pontosan egy fordulatot tesz meg, és így az általa súrolt terület  $\pi ab$ , vagyis az ellipszis területével egyenlő, a

$$2\pi ab = cP$$

összefüggést kapjuk. A fenti összefüggést négyzetre emelve, majd a (7.57)-ben látott  $p = \frac{c^2}{\mu}$  és a (7.65) szerinti  $p = a(1 - e^2)$  összefüggések alapján felírható

$$c^2 = \mu a (1 - e^2),$$

valamint az ellipszist jellemző  $b^2 = a^2 (1 - e^2)$  összefüggést használva

$$4\pi^2 a^2 b^2 = c^2 P^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 4\pi^2 a^2 a^2 (1 - e^2) = \mu a (1 - e^2) P^2,$$

ahonnan

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu},$$

amit bizonyítani akartunk.

**Megjegyzések.** 1. Mivel (7.32) szerint  $\mu = k^2 (m_1 + m_2)$ , így Kepler III. általános törvénye a

$$\frac{P^2 (m_1 + m_2)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k^2} \quad (\text{állandó}) \quad (7.76)$$

alakban is felírható.

2. A (7.76) összefüggés segítségével meghatározható ismert periódusú, elhanyagolható tömegű kísérővel rendelkező égitest tömege. Illusztrációként

írjuk fel a (7.76) összefüggést például a Nap–Föld ( $\odot - \oplus$ ) és bolygó–kísérő ( $B - K$ ) rendszerekre:

$$\frac{P_{\oplus}^2 (m_{\odot} + m_{\oplus})}{a_{\oplus}^3} = \frac{P_K^2 (m_B + m_K)}{a_K^3},$$

ahol  $P_{\oplus} = 1$  sziderikus év,  $a_{\oplus} = 1$  csillagászati egység (AU). Ezen utóbbi összefüggést  $m_{\odot}$ -pal végigosztva  $\left(\frac{m_{\oplus}}{m_{\odot}} = \frac{1}{328\,900.5}, \frac{m_K}{m_{\odot}} \approx 0\right)$ , a kísérőre vonatkozó  $P_K$  és  $a_K$  ismeretében

$$\frac{m_B}{m_{\odot}} = \frac{a_K^3}{T_K^2} \left(1 + \frac{m_{\oplus}}{m_{\odot}}\right) = \frac{328\,9001,5}{328\,900,5} \frac{a_K^3}{T_K^2}.$$

3. A Naprendszer bolygói esetében a Kepler III. törvényét kifejező (7.76) alapján felírható

$$\frac{P^2 (m_{\odot} + m_B)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k^2}$$

összefüggésben az  $m_{\odot} + m_B$  össztömeg jól közelíthető az  $m_{\odot} = 1$  naptömeggel. Innen adódik Kepler III. törvényének sajátos, közelítő alakja:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k^2} \quad (\text{állandó}). \quad (7.77)$$

**Következmény.** Elliptikus mozgás esetén a mozgó pont  $v$  sebességére érvényes a

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (7.78)$$

összefüggés.

**Bizonyítás.** A (7.66) összefüggés szerint  $h = -\frac{\mu}{2a}$ , másfelől viszont, a (7.41) energiaintegrál szerint

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r},$$

és így

$$-\frac{\mu}{2a} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r},$$

ahonnan

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$



## 8. fejezet

# Űrhajózási alapfogalmak

Napjainkban tanúi lehetünk miként válik valóra az ember egyik évezredes álma, az emberi űrutazás. A húszadik század második felének embere, egy egészen új tudomány megjelenését, az *űrtan* megszületését követhette végig.

Az *űrtan* a világűr kutatásának és hasznosításának tudománya és technikája. Az űrtan kutatással foglalkozó része az *űrkutatás*.

Az *űrhajózás*, vagy idegen eredetű szavakkal *asztronautika* (*kozmonautika*), tágabb értelemben a világűrben legalább az első kozmikus sebességgel végrehajtott mozgás összes problémáját tárgyaló tudomány. Szűkebb értelemben, csak *a világűrbe hatoló emberrel kapcsolatban használjuk*. *Űrrepülésnek* nevezünk minden űrhajózást, amelyek során az emberek Föld körüli pályára kerülnek. Az űrrepülést végző személy az *űrhajós* (*asztronauta*, *kozmonauta*). Az embert szállító űrjármű hagyományos neve *űrhajó*. *Űrrepülőgépnek* akkor nevezzük, ha többször felhasználható az űrjármű, vagyis a repülőgép és az űrhajó kombinációja. Ezt nevezik még *űrsiklónak*, vagy *űrkompnak* is.

Az űrutazás álmának megvalósulása a *kozmosz sebesség* elérését lehetővé tevő műszaki eszközök megszületésének köszönhető. Ezen eszközök között kitüntetett szerepe van a *hordozórakétának*, amely találmány elméleti megalapozásában valamint gyakorlati kivitelezésében jelentős *K. E. Ciolkovszkij* (1857-1935, a rakétatechnika és az űrhajózás elméleti megalapozója), *R. H. Goddard* (1882-1945, a korszerű rakétatechnika úttörője, 1926-ban a világon elsőként röptet fel folyékony hajtóanyagú rakétát), *Kármán Tódor* (1881-1963), *Hermann Obert* (1894-1992, nagyszebeni születésű német fizikus), *Sz. P. Koroljov* (1907 - 1966), *W. von Braun* (1912 - 1977) és mások munkássága.

## 8.1. A hordozórakéta

Egy űrutazás célja általában valamely *hasznos teher* — aminek legáltalánosabb neve *űreszköz* — felbocsátása. A meghatározott céllal felbocsátott űreszköz, bizonyos ideig aktivitást fejt ki, méréseket végez, vagy információkat továbbít. A hasznos terhet *hordozórakéta* juttatja a világűrbe, ezt általában *űrközpont űrrepülőteréről* indítják, de újabban előfordul a sztratoszférában haladó, rakétahordozó repülőgépekről történő indítás is.

Egy hordozórakéta a következő főbb részekből tevődik össze:

(a) *tulajdonképpen rakéta*, ami magába foglalja a *rakéta törzsét* az azt borító *védőburkolattal*, az *üzemanyagtartályokat*, a *táprendszert*, a *rakétahajtóműveket*, a *fedélzeti irányítórendszert* és a *kormányrendszert*;

(b) *hajtóanyag-komponensek* (hagyományosan *tüzelőanyagok* és *oxidálóanyagok*), amelyek elégeése révén keletkező nagy nyomású és nagy hőmérsékletű égéstermék hőenergiája alakul a *fúvócsőben* mozgási energiává.

### 8.1.1. A rakéta hajtóműve

A *rakétahajtómű* vek a különféle rendeltetésű űreszközöket pályára állító hordozórakéták kizárólagos hajtóművei, hasonlóképpen rakétahajtóművek szolgálnak az űreszközök mozgásirányítására, pályamódosítására, továbbá visszatérési manőverükhöz is. A rakétahajtóművek a sugárhajtóművek sajátos változatai.

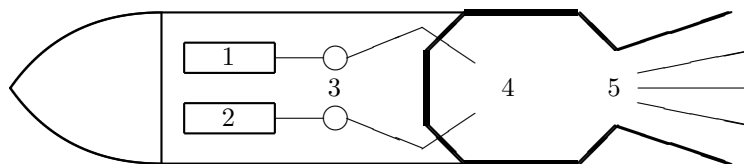
A rakétahajtómű olyan különleges *sugárhajtómű*, amelynek működése a környezetétől teljesen független, mert az üzemeltetéséhez szükséges összes anyagot a repülőeszköz fedélzetén helyezik el, ezért bárhol, tehát a légüres térben is működőképes. A rakétahajtómű a nagy sebességre felgyorsított munkaközeg — rendszerint gázok — hajtóerejével ellentétes irányú tolóerőt használja fel a hordozórakéta és egyben az űreszköz mozgatására.

A jelenleg széleskörben használt rakétahajtóművek szinte kizárólag *kémiai rakétahajtóművek*, azaz a kémiai energiát mozgási energiává alakító sajátos szerkezetek, amelyeknek két fő típusa ismert:

(a) *Folyékony anyagú rakétahajtómű*. Ez napjaink űrkutatásának alapvető hajtóműtípusa (8.1. ábra).

E hajtóművek által előállított tolóerő a hajtómű méretétől függően néhány N-től több ezer MN-ig terjed. Rendeltetésüktől függően folyamatos vagy szakaszos üzeműek lehetnek. Méretük néhány cm-től néhány m-ig terjed, tömegük pedig néhány g-tól néhány t-ig.

A kétkomponensű hajtóanyag oxidálóanyagaként leggyakrabban folyékony oxigént ( $O_2$ ), salétromsavat ( $HNO_3$ ), nitrogén-tetroxidot ( $N_2O_4$ ) hasz-



8.1. ábra. A folyékony anyagú rakétahajtómű vázlatos szerkezete: 1 – tüzelőanyag; 2 – oxidálóanyag; 3 – táprendszer; 4 – tüzelőtér; 5 – fúvócső; (4–5 hajtóház).

nálnak. Folyékony tüzelőanyagként leggyakrabban a szénhidrogének (finomított petróleum, kerazin stb.), a metilalkohol, a különféle hidrazin vegyületek (dimetil-hidrazin, aszimmetrikus dimetil-hidrazin), továbbá folyékony hidrogén ( $H_2$ ) szerepel.

Manapság a legnagyobb gázkiáramlási sebességet a cseppfolyós oxigén és hidrogén komponens keverékével lehet elérni. Kezelés szempontjából viszont a salétromsavas oxidálóanyag és a kerazin keveréke tekinthető optimálisnak.

(b) *Szilárd anyagú rakétahajtómű.* Ezen hajtóművek előnye egyszerű szerkezetükben rejlik, ugyanis a szilárd hajtóanyag töltet formájában magában a tüzelőtérben helyezkedik el. Ugyancsak előnyös, hogy indításhoz való előkészítésük rendkívül gyors folyamat. Hátrányos tulajdonságuk a nagyméretű tüzelőtér, a folyékony hajtóanyagú rakétahajtóműveknél kisebb fajlagos tolóerő. Ugyancsak hátrányos az, hogy nehezen megoldható a tolóerő állandó értéken tartása, a hajtómű gyors és pontos leállítása, ami a megbízható irányítás alapfeltétele. Inkább csak a hordozórakéták első fokozatának teljesítménynövelésére (gyorsítóarakétaként) használják.

Szilárd hajtóanyagként régebben préselt *feketelőport* használtak. A korszerű szilárd hajtóanyagok *homogének* vagy *heterogének*. A homogén szilárd hajtóanyag vegyileg kötött formában tartalmazza az oxigént (pl. oldószerrel zselatinszerűvé tett nitrocellulóz stb.), a heterogén szilárd hajtóanyagban a tüzelőanyaghoz kristályos szervesetlen só (pl. ammónium-nitrát ( $NH_4NO_3$ ), kálium-perklorát ( $KClO_4$ ) stb.) formájában keverik az oxigénhordozó anyagot, amelyet valamilyen kötőanyagba (pl. poliuretánba) ágyaznak. A nagy teljesítményű egységek anyaga az ammónium perklorát és polibutadién keverék, amelyet alumínium-porral dúsítanak.

A hordozórakéták hajtóműve fajlagos teljesítményének lényeges javítása a jövőben újabb meghajtási típusok kidolgozásától várható, mint:

— *nukleáris hajtóművek*, amelyek esetén a hidrogén tüzelőanyag magreakciója során keletkezett égéstermékeket áramoltatják ki a fúvócsöveken.

— *ionrakéták* működési alapelve ioncsóvák elektromos vagy elektromágneses térben történő felgyorsítása. A kiáramló higany, cézium vagy nemesgáz ion-csóva szolgáltatja a szükséges hajtóerőt. Az ionrakéták az ún. elektromos hajtóművek családjába tartoznak.

— *fotonrakéták* lényege az lenne, hogy a kiáramló közeg fénykvantumokból álljon.

### 8.1.2. A rakétatechnika rövid történeti áttekintése

A XX. század első felének rakétakísérletei Németországban vezettek az első komoly eredményre, ahol *W. von Braun* a hadsereg megbízásából megalkotta a század első, nagy sorozatban gyártott rakétáját az A-4-et. Az első sikeres start 1942. október 3-án volt. Az A-4 rakéta V2 néven 1944-től a II. világháború rettegett fegyverévé vált.

Az első műholdat 1957. október 4-én indították útjára az oroszok az A-4-ből kifejlesztett nagyrakétájukkal az, R-7-tel.

W. von Braun és a német rakétafejlesztés vezetői 1945 októberétől már az amerikaiaknak dolgoztak. A katonai ballisztikus rakéták fejlesztésével alakítják ki az űrkutatási célokra kifejlesztett *Delta*, *Atlas* és *Titan* rakétacsaládokat, amelyekkel sok műholdat, űrhajót (Mercury, Gemini) és űrszondát (Ranger, Surveyor, Pioneer, Mariner, Helios, Viking) indítottak. A kis, kutató és katonai holdak (Explorer, Secor, San Marco, Oscar stb.) pályára állítására 1960-tól a szilárd hajtóanyagú Scout hordozórakétát használták.

A Szovjetunióban a nagy sorozatban készített műholdak indítására 1962-től a katonai rakétákból kialakított *Kozmosz*, majd 1977-től a *Ciklon* hordozórakétákat alkalmazták. A nagy űreszközök indítására fejlesztették ki a *Proton* hordozórakétát, amellyel nehéz műholdakat (Proton, GLONASS, Kozmosz, Raduga, Ekran, Gorizont, Asztron stb.) űrhajókat (Zond), űrszondákat (Luna-15-24, Marsz-2-7, Venyera-9-19, VEGA, Fobosz) valamint űrállomásokat (Szaljut-1-7, Mir) és űrállomás modulokat (Kvant, Krisztall, Szpektr, Priroda) juttatattak pályára.

Az ESA (European Space Agency) 1979-től sikerrel alkalmazza a francia *Ariane* rakétát. Az *Ariane-4* 1990-től sorozatban gyártott kereskedelmi hordozórakétává vált.

Az USA-ban W. von Braun vezetésével 1967-re létrehozták a *Saturn* családot, amelyet a holdexpedíciókhoz és űrállomásokhoz (Skylab, ASTP) használtak. Az amerikai űrhajókat a Föld legnagyobb hordozórakétája, a *Saturn-V* indította a Holdra. A Saturn-5 hossza 108 m, alapátmérője 10 m, össztömege 3000 t, amiből 91% az üzemanyag.

1970-től indítja saját hordozórakétáit Japán (*Lambda, Mu, Osumi, Tansei, Kiku* stb.) és Kína ( *CZ Csang Zeng* = Hosszú Menetelés = Long March LM).

India 1980-tól használ saját hordozórakétát (*SLV-3*), melynek megnövelt teljesítményű (*ASLV*) változatát 1992-ben próbálták ki műhold (SROSS-C) indítására.

1981-től az amerikaiak a rendszeres űrszállítás megoldására egy új típusú, nagy teljesítményű szállítórendszert (*STS*) használnak, amellyel 107 t-s űrrepülőgépeket (ebből 30 t a hasznos teher) juttatnak Föld körüli pályára.

1985-ben mintegy tízéves fejlesztés eredményeként a szovjetek sikerrel próbáltak ki egy új, közepes teljesítményű hordozórakétát a *Zenyitet*. Ennek oldalsó fokozatként való felhasználásával 1987-re létrehozták az *Enyergija* nagyrakétát, amely a XX. század végének elvben legnagyobb teljesítményű szállítóeszköze lett volna. Föld körüli pályára mintegy 130 tonna hasznos terhet vihetne. Második startján 1988-ban a Szovjetunió is kipróbálta 105 tonnás űrrepülőgépét a *Buránt*, de űrhajósok nélkül. A Szovjetunió szétesése és Oroszország súlyos gazdasági problémái nem tették lehetővé az Enyergija óriásrakéta programjának folytatását.

Izrael 1989-ben indított saját hordozórakétával (*Shavit*) műholdat (*Ofefeq*).

## 8.2. Mozgás a pálya aktív szakaszán

Annak érdekében, hogy egy űreszközt (műholdat, űrállomást, űrsíklót, űrszondát) pályára helyezzenek, az illető hasznos tehernek megfelelő kezdeti feltételeket kell biztosítani. Ez azt jelenti, hogy az illető űreszköznek (elegendő nagyságú)  $v_0$  kezdeti sebességet kell kölcsönözni, a Föld felszíne fölött jól meghatározott  $H$  magasságban. Általában a pályára helyezési magasság  $H$  több mint 150–200 km, hogy ezáltal elkerüljék az alacsonyan elhelyezkedő sűrű légköri rétegekkel való súrlódást, ami az űreszköz meggyúlását is eredményezhetné.

Az űreszközök szállítása a földi űrrepülőtérrel a pályára helyezési pontig, ugyanakkor felgyorsítása nyugalmi állapotából  $v_0$  nagyságú kezdősebességre hordozórakéta segítségével történik. A hordozórakéta pályájának az űrrepülőtér, illetve a hasznos teher pályára helyezési pontja közé eső részét a *pálya aktív szakaszának* nevezzük. Az űreszköz pályájának ezen a szakaszán együtt mozog a hordozórakétával, amit a magával vitt *üzemanyag elégetéséből származó égéstermék gyors kiáramoltatása következtében fellépő reakcióerő hajt*.

A hordozórakéta–hasznos teher rendszer mozgása a pálya aktív szakaszán

a *változó tömegű anyagi pont* mechanikai modelljével tanulmányozható. Erre vonatkozó tanulmányokat a XX. század elején egymástól függetlenül I. V. Meszcserszkij és T. Levi-Civita végzett, eredményük a következő:

**8.2.1. Tétel.** (*Meszcserszkij–Levi-Civita*) *Egy változó tömegű anyagi pont mozgásegyenlete (a rakéta egyenlete):*

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u}, \quad (8.1)$$

ahol:

$$\begin{aligned} m = m(t) & \quad \text{— a pont (rakéta) időben változó tömege;} \\ \vec{v} = \vec{v}(t) & \quad \text{— a pont (rakéta) sebessége a } t \text{ időpontban;} \\ \vec{F} & \quad \text{— a pontra (rakétára) ható külső erők eredője;} \\ \vec{u} & \quad \text{— a kiáramló részecskék (állandó) relatív sebessége.} \end{aligned}$$

**Bizonyítás.** A tétel bizonyításához a rendszerre vonatkozó

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (8.2)$$

impulzustételt alkalmazzuk. Vizsgáljuk a rendszer teljes impulzusának megváltozását egy  $t$ , valamint az azt követő  $t + \Delta t$  időpontok között. A rendszer  $t$  időpontban  $\vec{v}(t)$  sebességgel rendelkező  $m(t)$  tömege felbomlik a  $t + \Delta t$  pillanatra az  $\vec{v}(t + \Delta t)$  sebességgű  $m(t + \Delta t) = m(t) - \Delta m$  tömegű rakétára, valamint a  $\vec{v}(t + \Delta t) + \vec{u}$  abszolút sebességgű kiáramlott égéstermékre. Így a rendszer összimpulzusának megváltozása a  $\Delta t$  idő alatt:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{P} &= \vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t) \\ &= m(t + \Delta t) \vec{v}(t + \Delta t) + \Delta m [\vec{v}(t + \Delta t) + \vec{u}] - m(t) \vec{v}(t) \\ &= m(t + \Delta t) \vec{v}(t + \Delta t) + [m(t) - m(t + \Delta t)] [\vec{v}(t + \Delta t) + \vec{u}] \\ &\quad - m(t) \vec{v}(t) \\ &= m(t) [\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)] + \Delta m \cdot \vec{u} \\ &= m(t) [\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)] - [m(t + \Delta t) - m(t)] \vec{u}(t + \Delta t). \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \\ &= m(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} \vec{u}(t + \Delta t), \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \vec{u}.$$

A kapott összefüggést behelyettesítve a (8.2) impulzustételbe, a kijelentett tételben szereplő *Meszcerszkij-Levi-Civita egyenlethez* jutunk.  $\square$

**Megjegyzések.** 1. A levezetett (8.1) mozgásegyenlet jobb oldalán a rendszerre ható külső erők mellett megjelenő  $\vec{R} = \frac{dm}{dt} \vec{u}$ , erő dimenziójú mennyiséget *reakcióerőnek* nevezzük. Mivel a kiáramló égéstermékek révén a rakéta tömege csökkenő, így a tömeg deriváltja negatív, ami azt eredményezi, hogy a reakcióerő az  $\vec{u}$  kiáramlási sebességgel ellentétes irányítású. Ez tulajdonképpen a *rakéta tolóereje*.

2. Az időegység alatt kiáramló égéstermék  $\mu = -\frac{dm}{dt}$  tömege valamint annak, a rakétához viszonyított relatív kiáramlási sebessége ( $\vec{u}$ ) a rakétát jellemző adott mennyiségek. Ezen paraméterek szabályozásával lehet a hajtóerőt módosítani.

3. A rakétára ható  $\vec{F}$  külső erő rendszerint a  $\vec{G} = m\vec{g}$  nehézségi erő és a légellenállás eredője.

**Következmény.** A nehézségi erőtől eltérő külső erőktől (pl. légellenállás) eltekintve, egy függőleges egyenes mentén felemelkedő rakéta sebessége az indulástól számított  $t$  idő múlva (amíg még üzemel a rakéta):

$$v(t) = -gt + u \ln \frac{m_0}{m(t)},$$

ahol:

- $u$  — a kiáramló gáz relatív sebességének állandó nagysága;
- $m_0$  — az induló rakéta össztömege;
- $m(t)$  — a rakéta össztömege az indulástól számított  $t$  idő múlva;
- $g$  — az állandónak tekintett nehézségi gyorsulás nagysága.

**Bizonyítás.** A (8.1) Meszcerszkij-Levi-Civita egyenletet a függőleges egyenesre vetítve az állandónak tekintett nehézségi erőterben:

$$dv = -gdt - u \frac{dm}{m}$$

mozgásegyenletet kapjuk. Integrálva az egyenletet a kezdeti  $t_0 = 0$  időponttól —  $m(t_0) = m_0$ ,  $v(t_0) = 0$  — a  $t$  időpontig, azonnal a kijelentésben szereplő összefüggéshez jutunk.  $\square$

**Következmény.** (Ciolkovszkij-egyenlet, 1898) Speciálisan, ha a nehézségi erőtől is eltekintünk a rakéta elméletileg elérhető legnagyobb sebessége

$$v_{\max} = u \ln \frac{m_0}{m_v},$$

tehát csak  $u$ -tól és  $\frac{m_0}{m_v}$ -tól, a rakéta *tömegarányától* (*Ciolkovszkij-szám*) függ, ahol  $m_v$  a rakéta tömege a teljes hajtóanyag elégetése után, az égésvégi pontban.

A *Ciolkovszkij-szám* értéke a rakéta szerkezeti kialakításától függ, legkedvezőbb esetben sem haladja meg azonban a 10-et. Mivel  $\ln 10 = 2,3$ ; végsebességként legfeljebb az  $u$  kiáramlási sebesség kb. kétszerese érhető el. Napjainkban a kiáramlási sebesség nem haladja meg a 3,5 km/s-ot. Az arányon a rakéta függőleges emelkedése és a szállított hasznos teher ront, így az egylépcsős rakéta a körpályára való állításhoz szükséges *első kozmikus sebességre* (7,9 km/s) sem gyorsítható gyakorlatilag.

A jelenleg használatos hajtóanyagokkal, illetve ezek égéstermékeinek kiáramlási sebességével nagyobb végsebességek csak úgy érhetők el, ha *többlépcsős rakétát* építünk. Ennél a már kiégett rakétafokozatot leválasztják, ami lezuhan a Földre, vagy a légkörben megsemmisül. A ledobott fokozatok tömege miatt a második illetve harmadik fokozatok hajtóműveinek már csak a kisebb terhet kell a magasba emelniük. Ezzel a tömegarányt megjavítottuk, ami lehetővé teszi a nagyobb végsebesség, legalább az első kozmikus sebesség elérését, a rakéta hasznos terhének Föld körüli pályára állítását.

**8.2.2. Tétel.** *Egy  $n$ -lépcsős rakéta esetén, ha az  $i$ -edik fokozat üzemeltetés előtti tömege (tehát üzemanyaggal együtt)  $m_i$ , a kiégés utáni tömege pedig  $m'_i$ , az elérhető maximális sebesség*

$$v_{\max} = u \ln m_{eff},$$

ahol az  $n$ -lépcsős rakéta effektív tömegaránya:

$$m_{eff} = \prod_{i=1}^n \frac{\sum_{j=i}^n m_j}{m'_i + \sum_{j=i+1}^n m_j}.$$

**Bizonyítás.** Legyen  $t_i$  az  $i+1$ -edik fokozat beindításának időpontja, ami megegyezik az  $i$ -edik fokozat üzemanyagának kiégésével és a fölöslegessé vált lépcső leválasztásával,  $i = 0, \dots, n-1$ ;  $t_0 = 0$ ,  $v(t_n) = v_{\max}$ . A *Ciolkovszkij-egyenletet* alkalmazva az egyes fozatokra:

$$v(t_i) - v(t_{i-1}) = u \ln \frac{m_i + m_{i+1} + \dots + m_n}{m'_i + m_{i+1} + \dots + m_n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

A fenti összefüggéseket összegezve, amikor  $i = 0, \dots, n-1$  a kívánt eredményhez jutunk.  $\square$



**Megjegyzés.** A többlépcsős megoldás hatékonyságát a

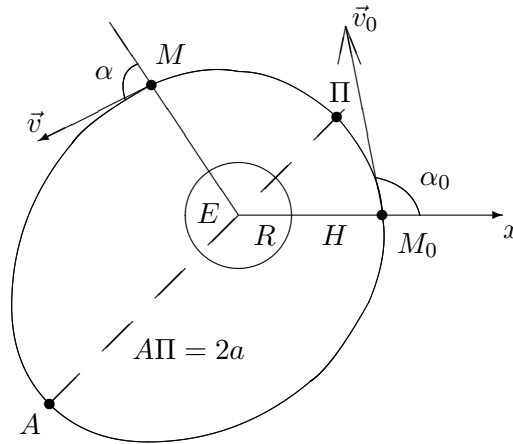
$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=1}^n m'_i} < \prod_{i=1}^n \frac{\sum_{j=i}^n m_j}{m'_i + \sum_{j=i+1}^n m_j}$$

egyenlőtlenség biztosítja, ami minden  $0 < m'_i < m_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  számok esetén teljesül. (Az egyenlőtlenség pl. a matematikai indukció módszerével is bizonyítható.)

Legújabban ígéretes kísérletek folynak vízszintesen felszálló rakétákkal, illetve függőlegesen felemelkedő, egylépcsős rakétákkal.

### 8.3. A mesterséges égitestek passzív mozgása

Amikor a többlépcsős hordozórakéta utolsó fokozata is kiég, ekkor a magasba emelt űreszköz a Föld felszíne fölött  $H$  magasságban, a függőlegessel  $\alpha_0$  szöget bezáró  $v_0$  nagyságú sebességgel magára marad és ettől kezdve csupán a Föld, vagy esetleg más égitestek tömegvonzásának hatására mozog (8.2. ábra). Ez a pillanat a pályáraállítás pillanata és ettől kezdődően az űreszköz *passzív életéről* beszélünk. A pályára helyezett űreszköz lehet *műhold* (*mesterséges hold*) ami a Föld körül kering, vagy a Föld környezetét elhagyó *űrszonda* (*bolygóközi szonda*).



8.2. ábra. Műhold pályája

### 8.3.1. Mesterséges égitestek pályaelemeinek meghatározása

Mivel első közelítésben a Föld körüli pályára állított űreszköz ún. perturbálatlan mozgása a Föld gravitációs mozgásának hatására centrális mozgásnak tekinthető, így az síkmozgás, és mint azt a kéttest-probléma esetén láttuk, Kepler általános törvényei szerint zajlik. Az első törvény értelmében pályája (7.59) szerint

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)} \quad (8.3)$$

egyenletű kúpszelet. Vizsgáljuk meg, hogy a kezdeti feltételek ismeretében hogyan határozhatók meg az (8.3) összefüggésben szereplő  $p, e, \omega$  pályaelemek.

**8.3.1. Tétel.** *A  $H, v_0, \alpha_0$  kezdeti paraméterek függvényében a mesterséges égitest  $p, e, \omega$  perturbálatlan pályaelemei a következő összefüggésekkel számíthatók ki:*

$$p = \frac{(R + H)^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{a_T R^2}, \quad (8.4)$$

$$e = \sqrt{1 + \left( v_0^2 - \frac{2a_T R^2}{R + H} \right) \frac{(R + H)^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{a_T^2 R^4}}, \quad (8.5)$$

$$\tan \omega = \frac{(R + H) v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{a_T R^2 - (R + H) v_0^2 \sin^2 \alpha_0}, \quad (8.6)$$

ahol  $R$  a gömb alakúnak tekintett Föld sugara  $a_T$  pedig a felszíni gravitációs gyorsulás.

**Bizonyítás.** A pályaelemek levezetésénél megállapított (7.57) összefüggés szerint

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad (8.7)$$

ahol a  $c$  felületi állandó:

$$c = \|\vec{c}\| = \|\vec{r} \times \vec{v}\| = \|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\| = r_0 v_0 \sin \alpha_0 = (R + H) v_0 \sin \alpha_0 \quad (8.8)$$

és

$$\mu = k^2 (M_\oplus + m) \approx k^2 M_\oplus \quad (m \ll M_\oplus), \quad (8.9)$$

mivel a mesterséges égitest  $m$  tömege elhanyagolható a Föld ( $M_\oplus$ ) tömegéhez viszonyítva.

Ugyanakkor felhasználva a gravitációs erő értelmezése alapján a földfelszín közelében felírható

$$ma_T = k^2 \frac{M_\oplus m}{R^2}$$

összefüggést, innen az  $a_T$  felszíni gravitációs gyorsulásra az

$$a_T = k^2 \frac{M_\oplus}{R^2}$$

összefüggést kapjuk, ahonnan  $k^2 M_\oplus = R^2 a_T$ , és így (8.9)-be helyettesítve

$$\mu = R^2 a_T. \quad (8.10)$$

A (8.8) és (8.10) figyelembevételével (8.7) alapján (8.4) azonnali.

Az  $e$  numerikus excentricitás értéke az integrációs állandók segítségével — (7.58) szerint — az

$$e = \sqrt{1 + 2h \frac{c^2}{\mu^2}} \quad (8.11)$$

összefüggés alapján határozható meg. A  $h$  energiaállandó viszont (7.42) szerint

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{a_T R^2}{R + H}. \quad (8.12)$$

Így a (8.11), (8.8), (8.9) és (8.12) figyelembevételével

$$e = \sqrt{1 + \left( v_0^2 - \frac{2a_T R^2}{R + H} \right) \frac{(R + H)^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{a_T^2 R^4}},$$

ami pontosan a keresett (8.5) összefüggés.

A perigeum irányát megadó  $\omega$  (amit ebben az esetben a pályára állítási pont irányától mérünk), a (8.3) pályaeqyenlet alapján

$$\cos(u - \omega) = \frac{p}{er} - \frac{1}{e}. \quad (8.13)$$

Ezen utóbbi összefüggést  $u$  szerint deriválva

$$-\sin(u - \omega) = -\frac{p}{r^2 e} \frac{dr}{du}, \quad (8.14)$$

de az

$$\dot{r} = v \cos \alpha, \quad r\dot{u} = v \sin \alpha$$

összefüggések alapján — ahol  $\alpha$  az  $\vec{r}$  helyzetvektor és  $\vec{v}$  sebességvektor hajlásszöge —

$$\frac{dr}{du} = r \cot \alpha,$$

így (8.14)-be helyettesítve

$$\sin(u - \omega) = \frac{p}{er} \cot \alpha. \quad (8.15)$$

A (8.13) és (8.15) összefüggések alapján

$$\tan(u - \omega) = \frac{p \cot \alpha}{p - r}. \quad (8.16)$$

A pályára való állítás pillanatában viszont  $u = 0$ ,  $r = r_0 = R + H$  és  $\alpha = \alpha_0$ , így

$$\tan \omega = \frac{p \cot \alpha_0}{r_0 - p} = \frac{(R + H) v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{a_T R^2 - (R + H) v_0^2 \sin^2 \alpha_0}. \quad \square$$

### 8.3.2. A műholdak és űrszondák pályájának osztályozása

A mesterséges égitestek pályájának típusa az  $e$  numerikus excentricitás (8.11) értékétől függ. Az  $M_0$  pontból való —  $H, \alpha_0, v_0$  paraméterekkel jellemzett — pályarahelyezés esetén a következő esetek lehetségesek:

a) *Körpálya*. A körpálya jellemzői

$$e = 0, \quad \alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{2},$$

így a (8.11)-ben megadott

$$e = \sqrt{1 + \left( v_0^2 - \frac{2a_T R^2}{R + H} \right) \frac{(R + H)^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{a_T^2 R^4}}$$

összefüggés alapján

$$\begin{aligned} \left( v_0^2 - \frac{2a_T R^2}{R + H} \right) \frac{(R + H)^2 v_0^2}{a_T^2 R^4} = -1 &\Leftrightarrow \frac{(R + H)^2}{a_T^2 R^4} v_0^4 - 2 \frac{(R + H)}{a_T R^2} v_0^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{(R + H)}{a_T R^2} v_0^2 - 1 \right)^2 = 0 \Leftrightarrow v_0 = R \sqrt{\frac{a_T}{R + H}}. \end{aligned}$$

Az utóbbi összefüggésben az  $a_T$  gravitációs gyorsulást  $g$  nehézségi gyorsulással közelítve, a körpályának megfelelő állandó *körsebesség*:

$$v_{\text{kör}} = v_0 \left( e = 0, \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \right) = R \sqrt{\frac{g}{R + H}}. \quad (8.17)$$

A Föld felszínének ( $H = 0$ ) megfelelő, az  $R = 6\,378$  km,  $g = 9,81$  m/s értékekkel kiszámolható

$$v_{01} = v_{\text{kör}}(H = 0) = \sqrt{Rg} \approx 7,91 \text{ km/s}$$

körsebességet *első kozmikus sebesség*nek nevezzük.

A körsebesség nagysága nyilván csökken a földfelszín fölötti magasság növekedésével. Íme néhány példa különböző magasságoknak megfelelő körsebességekre:

Sebesség- / pályatípus	$H$ [km]	körsebesség [km/s]
Első kozmikus sebesség	0	7,91
	200	7,78
Geostacionárius pálya	35 786	3,07
A Hold távolságánál	377 622	1,02

b) *Elliptikus pálya*. A Föld körüli elliptikus pálya feltételei  $0 < e < 1$ , valamint

$$r_{\text{II}} = \frac{p}{1+e} > R,$$

ahol a második feltétel azt fejezi ki, hogy a műhold perigeuma a földfelszín fölött van, azaz a mesterséges hold nem csapódik a földfelszínbe.

c) *Parabolikus pálya*. Ha  $e = 1$  (tetszőleges  $\alpha_0 \neq \pi$  esetében) az űrszonda pályája parabolikus. A szükséges kezdeti sebesség, az (8.11) összefüggés alapján, az  $a_T = g$  közelítéssel, a

$$v_{\text{parab}} = v_0(e = 1) = R\sqrt{\frac{2g}{R+H}} = \sqrt{2}v_{\text{kör}}$$

ún. *parabolikus sebesség*.

A földfelszín magasságának ( $H = 0$ ) megfelelő parabolikus sebesség

$$v_{02} = v_{\text{par}}(H = 0) = \sqrt{2Rg} = 11,2 \text{ km/s},$$

amit a Földhöz viszonyított *második kozmikus sebesség*nek (v. *szökési sebesség*nek) nevezzük.

d) *Hiperbolikus pálya*. A hiperbolikus pálya feltétele  $e > 1$ , aminek feltétele

$$v_0 > v_{\text{parab}}.$$

A Föld körül kör-, illetve elliptikus pályákat leíró űreszközök a *műholdak* (*mesterséges holdak*),  $v_{\text{kör}} \leq v_0 \leq v_{\text{par}}$ . Ha  $v_0 \geq v_{\text{parab}}$ , az űreszköz elhagyja a Föld környezetét, parabolikus vagy hiperbolikus pályán mozogva. Ekkor

űrszondáról beszélünk. Ahhoz, hogy egy, a Földről felbocsájtott űrszonda elhagyja a Naprendszerünket (A Nap környezetét), a szükséges kezdeti feltétel:

$$v_0 \geq v_{03} = 16,6 \text{ km/s},$$

ahol  $v_{03}$  a *harmadik kozmikus sebesség*, a Napra vonatkozó parabolikus sebesség a Föld távolságában. A Galaxisunk elhagyásához szükséges kezdeti sebesség a *negyedik kozmikus sebesség*  $v_{04} = 290 \text{ km/s}$ .

## 9. fejezet

# A sugárzás alaptörvényei

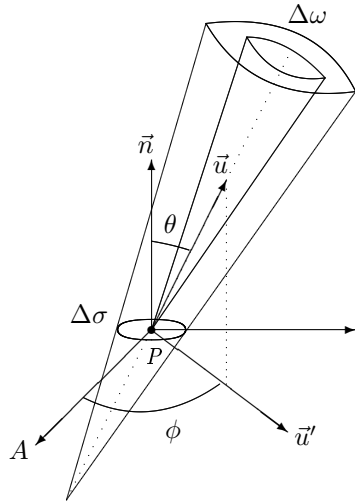
A csillag belsejében keletkező energia a csillag középpontja felől a csillag felszíne felé áramlik. Az energiatranszportnak több formája lehetséges: a sugárzás, a vezetés és a konvekció. A vezetés csak a fehér törpecsillagok esetében jelentős, a konvekció azonban a csillagok jelentős részénél egy-egy rétegben jelentős szerephez jut. A legfontosabb szerepe kétségtelenül a sugárzásnak van. Csekély számú kivételtől eltekintve a hideg külső térbe kiáramló energia sugárzás formájában hagyja el a csillagot.

A csillag mélyebb rétegeiben reemittálódó sugárzás nem hagyja el a csillagot, mert a fölötte lévő rétegben abszorbálódik. A csillag légkörének külső tartományai már olyan kis sűrűségűek, hogy az itt reemittálódó sugárzás már elhanyagolható a csillag egész sugárzásához képest. Van tehát a csillagon egy olyan réteg, amelyben a csillagot elhagyó sugárzás túlnyomóan nagy része (pl. 90%) reemittálódik. Ezt a réteget nevezzük a csillag *fotoszférájának*. A fősorozatbeli csillagok fotoszférája a csillagok méretéhez képest elhanyagolhatóan vékony (a Nap esetében mintegy 400 km). Ezért szokás a csillag fotoszféráját a csillag felszínének is nevezni. A vörös óriáscsillagok fotoszférája már nem elhanyagolhatóan vékony, ezért ezeknél a csillagoknál a fotoszférára kapott eredmények csak átlagértéknek tekinthetők.

Mivel a csillagról jövő fény gyakorlatilag a csillag fotoszférájában keletkezik, a csillagfotoszférák szerkezetének és fizikai alaptulajdonságainak ismerete elengedhetetlenül szükséges.

## 9.1. A sugárzás energiáját jellemző mennyiségek

### 9.1.1. A sugárzás (specifikus) intenzitása



9.1. ábra. A  $\Delta\omega$  nyílásszögű kúp

Tekintsünk a csillag fotoszférájában (vagy belsejében) egy  $\Delta\sigma$  nagyságú felületelemet (9.1. ábra), amelynek  $P$  pontjában felvett normális vektora  $\vec{n}$ . Tekintsünk továbbá egy  $\Delta\omega$  nyílásszögű kúpot, mely tengelyének irányát az  $\vec{u}$  egységvektor adja. Az  $\vec{u}$  vektor az  $\vec{n}$  normálissal  $\theta$  szöget zár be, a felszínelem érintősíkjára eső vetületének irányát mutató  $\vec{u}'$  vektor pedig egy kijelölt  $\vec{PA}$  iránnyal  $\phi$  szöget zár be.

A  $\Delta\sigma$  felületelemen minden irányba és minden hullámhosszon sugárzási energia halad keresztül. Jelölje  $\Delta\mathcal{E}_\nu$  a  $\Delta\sigma$  felületelemen áthaladó sugárzási energiamennyiséget az  $\vec{u}$  tengelyű  $\Delta\omega$  nyílásszögű kúp belsejében,  $\Delta t$  idő alatt, a  $(\nu, \nu + \Delta\nu)$  frekvencia-intervallumban.

Ekkor az adott pontban és adott  $\vec{u}$  irányban a sugárzás  $I_\nu$  intenzitása értelmezés szerint

$$I_\nu = \lim_{\Delta\sigma, \Delta t, \Delta\nu, \Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathcal{E}_\nu}{\cos\theta \Delta\sigma \Delta t \Delta\nu \Delta\omega},$$

ahonnan

$$d\mathcal{E}_\nu = I_\nu \cos\theta d\sigma dt d\nu d\omega. \quad (9.1)$$

Mivel  $I_\nu$  függ a frekvenciától, ezt a sugárzás *specifikus intenzitásának* is szokták nevezni.

**Megjegyzések.** 1. A sugárzás specifikus intenzitása egy adott pontban és adott irányban megegyezik az adott irányra merőleges egységnyi nagyságú felületelemen, egységnyi méretű térszög belsejében, egységnyi hosszúságú frekvencia intervallumban a sugárzás által egységnyi idő alatt szállított energiamennyiséggel.

2. A specifikus intenzitás mértékegysége:  $[I_\nu] = \text{Wm}^{-2}\text{sr Hz}$  (sr = steradián, a térszög mértékegysége).

3. A sugárzás intenzitása a sugárzó anyag fizikai tulajdonságaitól függ.

4. Általában az  $I_\nu$  intenzitás értéke függ a  $P(x, y, z)$  pont térbeli helyzetétől és a felvett  $\vec{u}(\theta, \phi)$  iránytól, azaz  $I_\nu = I_\nu(x, y, z, \theta, \phi)$ .



5. Egy sugárzási forrás, (pl. egy csillag) maga körül egy *sugárzási mezőt* hoz létre, amelynek minden pontjában és minden irányban meghatározott a sugárzás intenzitásának  $I_\nu$  értéke.

Az  $I_\nu$  intenzitású sugárzási mező *homogén*, ha a sugárzás intenzitása nem függ a  $P$  pont helyzetétől. A csillag felszínén felvett pontban a homogén sugárzási mező intenzitása  $I_\nu = I_\nu(\theta, \phi)$  alakú. A sugárzási mező izotrop ha nem függ az  $\vec{u}(\theta, \phi)$  iránytól.

A Nap és egymást fedő kettőscsillagok megfigyelése, valamint a csillag-léggörökre vonatkozó elméletek alapján arra a következtetésre jutottak, hogy a sugárzás intenzitása általában nem függ  $\phi$ -től, csak  $\theta$ -tól (*szélsőtétel*). Így a továbbiakban az  $I_\nu = I_\nu(\theta)$  intenzitású sugárzásokat tanulmányozunk.

A frekvencia függvényében értelmezett specifikus intenzitáshoz hasonlóan értelmezhető a sugárzás  $\lambda$  hullámhosszától függő  $I_\lambda$  specifikus sugárzási intenzitás, amelyre

$$d\mathcal{E}_\lambda = I_\lambda \cos \theta d\sigma dt d\lambda d\omega. \quad (9.2)$$

A továbbiakban inkább a hullámhossztól függő mennyiségeket használjuk.

### 9.1.2. A sugárzási áram

Egy csillagfelszín egységnyi felületelemén, egységnyi idő alatt, egységnyi hosszúságú hullámhossz-intervallumban, adott irányú  $d\omega$  elemi térszögű kúp belsejében a sugárzás által szállított

$$dF_\lambda = \frac{d\mathcal{E}_\lambda}{d\sigma dt d\lambda} \quad (9.3)$$

energiamennyiséget *elemi specifikus sugárzási áramnak* (fluxus) nevezzük.

A (9.2) és (9.3) összefüggések alapján azonnal következik az elemi sugárzási áramra vonatkozó

$$dF_\lambda = I_\lambda \cos \theta d\omega \quad (9.4)$$

összefüggés. A fenti mennyiség integrálösszegét véve egy  $\Omega$  térszögre megkapjuk az  $\Omega$  térszögben szállított *specifikus sugárzási áramot*, amelynek kifejezése

$$F_\lambda(\Omega) = \int_{\Omega} I_\lambda(\theta) \cos \theta d\omega. \quad (9.5)$$

A  $d\sigma$  felületelemhez viszonyított

$$\Omega_{\text{külső}} = \left\{ (\theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi \right\}$$

térszögben szállított  $H_\lambda = F_\lambda(\Omega_{\text{külső}})$  energiamennyiséget *kisugárzott specifikus áramnak* nevezzük.

**Tulajdonság.** A kisugárzott specifikus áramra érvényesek a következő kifejezések:

$$H_\lambda = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\lambda(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad (9.6)$$

$I_\lambda = I_\lambda(\theta)$  intenzitású homogén sugárzás esetén;

$$H_\lambda = \pi I_\lambda \quad (9.7)$$

$I_\lambda$  = konstans, állandó intenzitású homogén és izotrop sugárzás esetén.

**Bizonyítás.** A kisugárzott specifikus áram az értelmezés és a (9.5) összefüggés szerint

$$\begin{aligned} H_\lambda &= F_\lambda(\Omega_{\text{külső}}) = \int_{\Omega_{\text{külső}}} I_\lambda(\theta) \cos \theta d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\lambda(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\lambda(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

ahol figyelembe vettük a külső féltér értelmezését, valamint az elemi térszög  $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$  kifejezését.

Homogén és izotrop sugárzás esetén az előző összefüggésbe  $I_\lambda(\theta) = I_\lambda$  állandót helyettesítve

$$H_\lambda = 2\pi I_\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi I_\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \pi I_\lambda.$$

### 9.1.3. Közepes intenzitás a csillag látszólagos korongján

Legyen az  $Oxyz$  derékszögű koordináta-rendszer  $O$  kezdőpontja a csillag középpontjában, az  $Oz$  tengely pedig mutasson a megfigyelő irányába (9.2. ábra). A csillagfelszín  $\vec{n}$  normálisú  $d\sigma$  felületelemének vetülete a megfigyelő irányára merőleges  $Oxy$  síkra  $d\sigma \cos \theta$ .

Ha  $\Sigma$  a gömb alakúnak tekintett csillagnak a megfigyelő felé eső félgömbje, az

$$\bar{I}_\lambda = \frac{\int_\Sigma I_\lambda(\theta) \cos \theta d\sigma}{\int_\Sigma \cos \theta d\sigma} \quad (9.8)$$

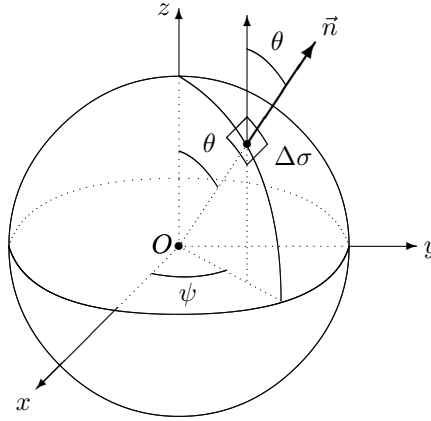
középértéket a *csillag látszólagos korongján vett közepes intenzitás*nak nevezzük.

**Tulajdonság.** A csillag látszólagos korongján vett közepes intenzitás kifejezhető a következő integrállal:

$$\bar{I}_\lambda = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\lambda(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (9.9)$$

**Bizonyítás.** Mivel  $d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\psi$ , ahol  $R$  a csillag sugara, közvetlen számítással a közepes intenzitás értelmezésében szereplő tört nevezőjére és számlálójára a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \cos \theta d\sigma &= \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi = \\ &= \pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \pi R^2, \end{aligned}$$



(ami számítás nélkül is azonnali, mivel a félgömb vetületének területe a kör-lap területe), és

9.2. ábra. Közepes intenzitás a csillag látszólagos korongján

$$\begin{aligned} \int_\Sigma I_\lambda(\theta) \cos \theta d\sigma &= R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\lambda(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi \\ &= 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\lambda(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

A két kifejezés aránya pontosan megadja a keresett eredményt.

**Következmény.** A fluxusra vonatkozó (9.6), valamint a közepes intenzitás kifejezését adó (9.9) összefüggések alapján megállapítható a kisugárzott specifikus áram és közepes intenzitás közötti egyszerű összefüggés:

$$H_\lambda = \pi \cdot \bar{I}_\lambda. \quad (9.10)$$

### 9.1.4. Integrális mennyiségek

A  $\lambda$  hullámhossznak megfelelő specifikus mennyiségek integrálásával értelmezhetők a teljes spektrumot betöltő sugárzás jellemző mennyiségei, mint

- a sugárzás *integrális intenzitása*:

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda; \quad (9.11)$$

- a *kiáramló integrális sugárzási áram*:

$$H = \int_0^\infty H_\lambda d\lambda = \pi \int_0^\infty \bar{I}_\lambda d\lambda = \pi \bar{I}; \quad (9.12)$$

ahol

$$\bar{I} = \int_0^\infty \bar{I}_\lambda d\lambda \quad (9.13)$$

a sugárzásnak a *csillag látszólagos korongján vett integrális közepes intenzitása*.

Az integrális mennyiségeket *bolometrikus mennyiségek*nek is nevezik, mivel azok bolométer segítségével határozhatók meg.

## 9.2. A csillagok luminozitása és látszó fényessége

### 9.2.1. Az égitestek luminozitása

Mint láttuk, a csillag egységnyi felületeleme által kisugárzott specifikus energiaáram  $H_\lambda = \pi \bar{I}_\lambda$ . Így a csillag *specifikus luminozitása* vagy *fényereje*, ami értelmezés szerint az  $R$  sugarú gömb alakú csillag teljes ( $S$ ) felszíne által kisugárzott  $L_\lambda$  specifikus energiaáram, homogén sugárzási mezejű csillag esetén:

$$L_\lambda = \int_S H_\lambda d\sigma = 4\pi R^2 H_\lambda = 4\pi R^2 \cdot \pi \bar{I}_\lambda. \quad (9.14)$$

Hasonlóan értelmezzük egy csillag  $L$  integrális luminozitását (fényerejét), amely

$$L = 4\pi R^2 H = 4\pi R^2 \cdot \pi \bar{I}. \quad (9.15)$$

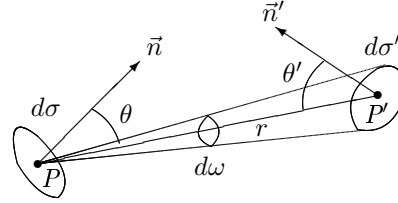
a csillag felületéről egységnyi idő alatt kisugárzott energia.

Az integrális luminozitást bolometrikus luminozitásnak is nevezik. Ez a csillag teljes felszíne által, egységnyi idő alatt (minden hullámhosszon és minden irányba) kisugárzott teljes energiamennyiség mértéke. Fizikai szempontból teljesítmény dimenziójú, mértékegysége watt [W].

### 9.2.2. Az égitestek látszó fényessége

Vizsgáljuk meg, miként jut el a (9.2) összefüggésben megadott  $d\mathcal{E}_\lambda$  energiamennyiség egyik felületelemről a másikra.

Legyen  $d\sigma$  egy égitest  $P$  pontja körüli  $\vec{n}$  normálisú felületelem, amely a  $d\mathcal{E}_\lambda$  energiamennyiséget sugározza ki. Legyen  $d\sigma'$  a tér egy  $P'$  pontja körüli  $\vec{n}'$  normálisú felületelem, amelyet a  $d\sigma$  felületelem világít meg. Legyen továbbá  $r$  a  $P$  és  $P'$  pontok közötti távolság  $\theta$ , illetve  $\theta'$  a  $PP'$  egyenesnek az  $\vec{n}$ , illetve  $\vec{n}'$  vektorokkal bezárt szöge,  $d\omega$  azon elemi térszög mértéke, ami alatt a  $d\sigma'$  felületelem látszik a  $P$  pontból (9.3. ábra).



9.3. ábra. A  $d\sigma'$  felületelem  $d\sigma$  felületelem általi megvilágítása

Ennek mértéke:

$$d\omega = \frac{d\sigma' \cos \theta'}{r^2}. \quad (9.16)$$

A (9.2) és (9.16) összefüggések alapján a  $d\sigma$  felületelemről  $d\sigma'$  felületelemre jutó energiamennyiség

$$d\mathcal{E}_\lambda = I_\lambda \frac{\cos \theta d\sigma \cos \theta' d\sigma'}{r^2} d\lambda dt. \quad (9.17)$$

Észrevehetjük, hogy a kapott összefüggés szimmetrikus a  $d\sigma$  és  $d\sigma'$  mennyiségekben.

Egy égitest  $E_\lambda$  *specifikus látszó fényessége* értelmezés szerint a csillagtól, annak irányára merőlegesen elhelyezkedő egységnyi felületre, egységnyi idő alatt, egységnyi hullámhossz-intervallumban érkező energiamennyiség. Felhasználva a (9.17) összefüggést, az elemi látszó fényesség

$$dE_\lambda = I_\lambda \frac{\cos \theta d\sigma}{r^2}. \quad (9.18)$$

**Tulajdonság.** Egy égitest specifikus látszó fényessége a következő összefüggésekkel számítható ki:

$$E_\lambda = \frac{R^2}{r^2} \cdot \pi \bar{I}_\lambda = \frac{R^2}{r^2} H_\lambda = \frac{L_\lambda}{4\pi r^2}. \quad (9.19)$$

**Bizonyítás.** A (9.18) összefüggésben megadott elemi energiát integráljuk az égitest látszó félgömbjén, figyelembe véve, hogy a csillagok nagy

távolsága miatt ( $R \ll r$ )  $r$  állandónak tekinthető. Ekkor

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \int_\Sigma dE_\lambda = \frac{R^2}{r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\lambda(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi \\ &= \frac{2\pi R^2}{r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\lambda(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

majd a (9.9), (9.10) és (9.14) összefüggések figyelembevételével a (9.19) összefüggések következnek.

Az égitestek *integrális látszó fényessége*:

$$E = \int_0^\theta E_\lambda d\lambda = \frac{R^2}{r^2} \cdot \pi \bar{I} = \frac{R^2}{r^2} H = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (9.20)$$

az égitesttől  $r$  távolságra elhelyezkedő egységnyi felületre jutó teljes energiameennyiséget jelenti, ami nyilván négyzetesen csökken a távolsággal és egyenlő azzal az energiameennyiséggel ami az égitest luminozitásából jut az  $r$  sugarú gömbfelület egységnyi részére.

### 9.2.3. Az égitestek standard látszó fényessége

Mivel az égitestek látszó fényessége függ azok távolságától, így azok összehasonlításából nem igazán lehet következtetést levonni a csillagok luminozitását illetően. Ez csupán akkor lehetséges, ha ismerjük a csillag megfigyelőtől mért távolságát. Annak érdekében, hogy a fényességek összehasonlításából a luminozitások viszonyára is lehessen következtetni, a fotometriai mérések eredményeit a 10 pc *standard távolságra* redukálják.

Egy adott égitest *standard látszó fényessége* (specifikus vagy integrális,  $(E_{st})_\lambda$  illetve  $E_{st}$ ) definíció szerint az a látszó fényesség, amivel a csillag 10 pc standard távolságban rendelkezne.

## 9.3. Az abszolút fekete test sugárzási törvényei

Azokat a testeket, amelyek minden beeső sugárzást elnyelnek (azaz abszorpció együtthatójuk 1), *abszolút fekete testeknek* nevezzük. Az abszolút fekete testek tökéletes elnyelő képességük mellett tökéletes sugárforrások is, abban az értelemben, hogy ha környezetükkel termikus egyensúlyban vannak ( $T = \text{állandó}$ ), akkor ugyanannyi energiát sugároznak ki, mint amennyit elnyelnek. Az esetek nagy részében az égitestek energiasugárzása jó megközelítéssel leírható az abszolút fekete testekre vonatkozó sugárzási törvényekkel.

### 9.3.1. A Planck-féle sugárzási törvény

A sugárzás kvantumelméleti megalapozásakor Planck kimutatta, hogy egy adott hőmérsékletű abszolút fekete test sugárzási áramának a hullámhossztól való függését a következő, ún. *Planck<sup>1</sup>-féle függvény* adja meg:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}, \quad (9.21)$$

ahol  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J·s a Planck-féle állandó,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/s a Boltzmann<sup>2</sup>-féle konstans,  $c$  pedig a fény sebessége. A Planck-féle függvény grafikonja különböző  $T$  abszolút hőmérséklet értékekre a 9.4. ábrán látható.

A Planck-féle függvény két ága — növekvő, illetve csökkenő íve — aszimptotikusan jól megközelíthető az alábbi függvényekkel:

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{hc}{k\lambda T}}, \quad (9.22)$$

*Wien<sup>3</sup>-féle függvénnyel*, ha  $\lambda T < 3 \cdot 10^{-3}$  mK, illetve a

$$B_\lambda(T) \approx 2ck\lambda^{-4}T, \quad (9.23)$$

Rayleigh–Jeans-féle függvénnyel,  $\lambda T > 0,77$  mK.

Elfogadva, hogy a csillag anyaga fekete testként viselkedik, a csillag (égitest) látszólagos korongján vett specifikus közepes intenzitása a Planck-féle függvénnyel adható meg, azaz

$$\bar{I}_\lambda = B_\lambda(T), \quad (9.24)$$

és a kisugárzott specifikus áram

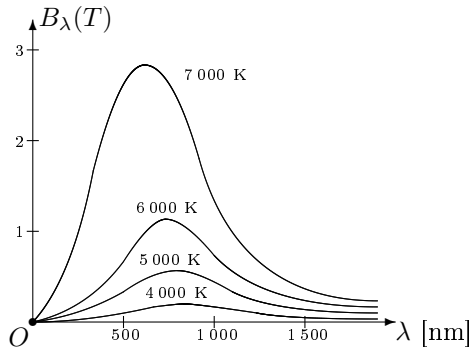
$$H_\lambda = \pi \cdot \bar{I}_\lambda = \pi \cdot B_\lambda(T). \quad (9.25)$$

Az integrális sugárzásra ugyanilyen összefüggések érvényesek:

$$\bar{I} = B, \quad H = \pi B, \quad (9.26)$$

ahol

$$B = \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda. \quad (9.27)$$



9.4. ábra. A Planck-féle függvény

<sup>1</sup>Max Planck (1858-1947) — Nobel-díjas német fizikus, a kvantummechanika megalapítója.

<sup>2</sup>Ludwig Boltzmann (1844-1906) — osztrák fizikus.

<sup>3</sup>Wilhelm Wien (1868-1928) — német fizikus.

### 9.3.2. A Stefan–Boltzmann-féle sugárzási törvény

A Planck-féle függvény (9.21)-ben megadott kifejezését a (9.27) összefüggésbe helyettesítve, az integrálást elvégezve a

$$H = \sigma T^4 \quad (9.28)$$

egyenletet kapjuk, amelyben  $\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15h^3 c^2 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ . A (9.28) egyenlettel leírt *Stefan<sup>4</sup>–Boltzmann-féle sugárzási törvény* szerint: *az abszolút fekete test egységyi felületeleme által kisugárzott integrális energia-áram arányos a test abszolút hőmérsékletének negyedik hatványával.*

A Stefan–Boltzmann-törvény levezetéséhez szükséges (9.27) integrál kiszámításánál a  $\frac{hc}{k\lambda T} = x$  változócsere<sup>4</sup>t használjuk, ami az  $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$  improprius integrálhoz vezet, amelyről kimutatható, hogy konvergens és értéke  $\frac{\pi^4}{15}$ .

### 9.3.3. A Wien-féle eltolódási törvény

Vizsgáljuk meg, hogy a  $B_\lambda(T)$  Planck-függvénynek milyen hullámhossznál van maximuma. A Planck-féle függvénybe vezessük be a következő segédváltozót:

$$\frac{hc}{k\lambda T} = x. \quad (9.29)$$

Ekkor

$$B(x) = 2 \frac{k^5 T^5}{h^4 c^3} \cdot \frac{x^5}{e^x - 1}.$$

$B(x)$ -nek nyilván ott van maximuma, ahol

$$\frac{d}{dx} \frac{x^5}{e^x - 1} = 0. \quad (9.30)$$

Elvégezve a deriválást, (9.30)-ból  $(x - 5)e^x + 5 = 0$ , ahonnan megközelítő számítással  $x = 4,965114$ .

A (9.29) összefüggés szerint

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{kx} = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{ m K}. \quad (9.31)$$

Megfogalmazható ezek alapján a *Wien-féle eltolódási törvény*, amelynek értelmében a *legnagyobb energiával kisugárzott fény hullámhossza és az abszolút hőmérséklet szorzata állandó*, és ez  $2,897 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$ , a Wien-féle állandó.

<sup>4</sup>Josef Stefan (1835–1893) — osztrák-szlovén matematikus és fizikus.



## 10. fejezet

# Csillagászati fotometria

A csillagászati fotometria (fényességmérés) az égitesteket látszólagos fényességük mérése alapján tanulmányozza.

### 10.1. Látszó magnitúdó

A csillagászatban ma is használatos csillagfényességi skála az alapjaiban Hipparkhoszra vezethető vissza. Hipparkhosz<sup>1</sup> a csillagokat hat nagyságrend osztályba (fényrendbe) osztotta. Ezeket ma  $1^m$ ,  $2^m$ , . . . ,  $6^m$ -val jelöljük. Itt az  $m$  = magnitúdó (latinul: nagyság) jele. Fontos megjegyezni, hogy ennek semmi köze a csillagok tényleges nagyságához. Hipparkhosz szerint az 1. nagyságrend csillagai voltak a legfényesebbek, míg a 6. nagyságrend csillagai pusztán szemmel még éppen hogy észrevehetők. Ez a felosztás szubjektív jellegű.

Később az egyes osztályok között közbeeső nagyságrend-osztályokat állapítottak meg és a fényességi skálát a csak távcsővel látszó csillagok számára  $6^m$ -n túl is kiterjesztették:  $6^m$ ,  $7^m$  stb. A fényesebb csillagok, bolygók valamint a Nap és a Hold számára a skálát másik irányba is kiterjesztették:  $0^m$ ,  $-1^m$ ,  $-2^m$  stb. A magnitúdó törtrészei decimálisak. Az emberi szem 0,1 magnitúdó különbséget még éppen képes megkülönböztetni.

A XIX. század közepén a csillagok fényességének mérésére objektív módszereket kezdtek bevezetni. Bebizonyítódott, hogy a Hipparkhosz által bevezetett nagyságrend-osztályok magyarázhatók a Weber–Fechner-féle pszichofiziológiai törvény alapján, amely szerint: *Egy fizikai inger által kiváltott érzet változása arányos az inger változása és az eredeti intenzitásérték arányával.*

---

<sup>1</sup>Hipparkhosz (kb. Kr. e. 190–125)

Ha  $E$  a csillag látszó fényessége (nem feltétlenül integrális, lehet specifikus, monokromatikus, vagy heterokromatikus),  $dE$  a látszó fényesség változása, a  $\frac{dE}{E}$  aránynak megfelelő  $dm$  magnitúdó változás a Weber–Fechner törvény alapján

$$dm = K \frac{dE}{E}, \quad (10.1)$$

ahol  $K$  egy arányossági tényező. Integrálva a fenti összefüggést, az

$$m = K \ln E + C \quad (10.2)$$

összefüggéshez jutunk, ahol  $C$  egy integrálási állandó. Tíz alapú logaritmusra térve és a  $K \ln 10 = \chi$  jelölés bevezetésével

$$m = \chi \lg E + C. \quad (10.3)$$

N. R. Pogson<sup>2</sup> 1856-ban végzett fényességmérések alapján megállapította, hogy az  $1^m$  illetve  $6^m$  fényességosztályokba sorolt csillagok látszó (vizuális) fényességének aránya megközelítőleg 100. A számítások könnyebbége érdekében azt javasolta, hogy ezt az arányt pontosan 100-nak fogadják el, azaz

$$\frac{E_1}{E_6} = 100 \quad (10.4)$$

legyen. A (10.3) összefüggést felírva az 1 és 6 fényrendekre, majd figyelembe véve a (10.4) arányt, a  $\chi = -2,5$  állandóértéket kapjuk. Tehát a csillag  $m$  látszó magnitúdója (fényrendje) és  $E$  látszó fényessége közötti összefüggést adó *Pogson-féle formula*

$$m = C - 2,5 \lg E, \quad (10.5)$$

amelyben a *nagyságrend-rendszer nullpontjának* nevezett  $C$  konstans értéke különböző nagyságrend-rendszerekben különböző. A látszó magnitúdót nevezik még *látszólagos magnitúdónak* is.

A Pogson-féle összefüggés több ekvivalens alakban is felírható. Legyen  $E$ , illetve  $E_0$  két csillag látszó fényessége, amelyeknek megfelelő fényrendek  $m$ , illetve  $m_0$ . A (10.5) Pogson-féle összefüggést felírva mindkét csillagra és egymásból kivonva a két egyenletet, a következő összefüggést kapjuk:

$$m - m_0 = -2,5 \lg \frac{E}{E_0}. \quad (10.6)$$

Ezen utóbbi összefüggés a következő ekvivalens alakokra hozható

$$\frac{E}{E_0} = 10^{0,4(m_0 - m)} \Leftrightarrow \frac{E}{E_0} = 2,512^{m_0 - m}, \quad (10.7)$$

---

<sup>2</sup>Norman Robert Pogson (1829–1891) — angol csillagász.

ahol figyelembe vettük, hogy  $10^{0,4} \approx 2,512$ .

Egy ismeretlen nagyságrendű csillag  $m$  magnitúdójának meghatározását úgy végzik, hogy a csillag mérhető  $E$  látszó fényességét összehasonlítják egy ismert  $m_0$  fényrendű csillag  $E_0$  látszó fényességével. A csillagok fényességének mérésére először J. K. F. Zöllner<sup>3</sup> készített *fotométer*nek nevezett berendezést 1861-ben. A Zöllner-féle fotométerben egy mesterséges fényforrás fényét Nikol-prizma elforgatásával addig kellett csökkenteni, míg az egyenlő fényes nem lett a valódi csillag fényességével. A csillag fényességét a forgatás mértéke adta meg.

Történelmileg először *hitelesítőpont*ként a Sarkcsillagot vették alapul, ki-  
mondva, hogy ennek látszó magnitúdója

$$m = 2^m,12.$$

Sajnos a választás nem bizonyult megfelelőnek, mivel később a Sarkcsillag kisebb fényváltozásait mutatták ki. Ugyanakkor a többi fényességi tartományban is elegendő hitelesítőpontra volt szükség. Ezért 1922-ben a Sarkcsillag környezetében választottak ki egy sor etaloncsillagot, melyeknek magnitúdója  $2^m$  és  $17^m$  között van, ez a *nemzetközi pólusszekvencia* (IPS). Ma inkább egyes nyílthalmazok csillagai közül választanak ki etaloncsillagokat. A Hyadok és a Plejádok (a Bika csillagképben lévő legismertebb nyílt halmazok) standardcsillagainak magnitúdója  $\pm 0^m,01$  pontossággal van megadva.

Érdekességgént megjegyezhető, hogy a  $0^m,8$  nagyságrendű csillagot a zenitben olyan fényesnek látjuk, mint az 1 km távolságra égő gyertyát, a  $6^m$  nagyságrendű csillagot pedig mint a 11 km-re levő gyertyát. A csillagászati fényességi skála néhány fontosabb értéke követhető az alábbi táblázatban:

Magnitúdó	Égitest	Magnitúdó	Égitest
$-26^m,7$	Nap	$2^m,12$	Sarkcsillag (Polaris, a UMi)
$-14^m$	telihold	$5^m,5$	Uránusz (max.)
$-4^m,5$	Vénusz (max.)	$6^m$	szabad szemes határmagnitúdó
$-3^m$	Mars, Jupiter (max.)	$7^m,5$	Neptunusz (max.)
$-1^m,6$	Szíriusz (Sirius, a Cma A)	$14^m$	Coudé távcső észlelési határa
$-1^m$	Merkúr, Szaturnusz (max.)	$14^m,5$	Plútó (max)
$0^m$	Vega (a Lyr A)	$26^m$	földfelszíni távcsövek határa
$1^m,1$	Aldebaran (a Tau A)	$30^m$	Hubble-űrtávcső határa

A Föld felszínéről végzett eddigi mérések rekordere a 10 méteres Keck II teleszkóp, amellyel 1989-ben a kutatók egy  $26^m$ -s távoli galaxist észleltek a Triangulum csillagképben.

<sup>3</sup>Zöllner, Johann Karl Friedrich (1834–1882) — német asztrofizikus.

## 10.2. Abszolút magnitúdó

A csillagok látszó magnitúdója nem jellemzi közvetlenül a csillag luminozitását, mivel értéke függ a csillag távolságától. Ezért használjuk az *M abszolút magnitúdót*, amely definíció szerint megegyezik az *illető csillaggal fizikai és kémiai állapotában tökéletesen megegyező csillag látszó magnitúdójával 10 pc távolságból mérve*. Nyilván az abszolút magnitúdó a csillag  $E_{\text{st}}$  standard látszó fényességének megfelelő fényrend.

Természetesen egy csillag abszolút magnitúdója nem mérhető közvetlen módon, csak a csillag távolsága és látszó magnitúdójának ismeretében számítható ki. A (10.6) összefüggést felírva az  $E$  látszó és  $E_{\text{st}}$  standard fényességre, valamint a megfelelő  $m$  és  $M$  látszó- és abszolút magnitúdókra, a következő ekvivalens átalakítások végezhetők:

$$M = m - 2,5 \lg \frac{E_{\text{st}}}{E} = m - 2,5 \lg \frac{\frac{L}{4\pi 10^2}}{\frac{L}{4\pi r^2}} = m - 2,5 \lg \left( \frac{r}{10} \right)^2 = m + 5 - 5 \lg r,$$

ahol felhasználtuk a fényesség és luminozítás közötti (9.20) összefüggést. Ha figyelembe vesszük, hogy egy csillag parszekekben kifejezett  $r$  távolsága és ívmásodpercekben megadott  $\pi$  parallaxisa között felírható az  $r = \frac{1}{\pi}$  összefüggés, az abszolút magnitúdó kifejezésére a következő összefüggéseket kapjuk:

$$M = m + 5 - 5 \lg r, \quad (10.8)$$

illetve

$$M = m + 5 + 5 \lg \pi. \quad (10.9)$$

A fenti összefüggések alapján egy csillag (látszó és abszolút) magnitúdóinak ismeretében meghatározható a csillag távolsága a

$$\lg r = 1 + 0,2(m - M) \quad (10.10)$$

képlettel. A (10.10) összefüggésben szereplő  $m - M$  különbséget *távolsági modulus*-nak nevezzük.

A különböző típusú csillagok abszolút magnitúdója egészen tág határok közötti érték lehet. A legfényesebb óriáscsillagok abszolút fényrendje eléri a  $-10^{\text{m}}$ -t, míg a leghalványabb csillagok abszolút fényrendje  $+15^{\text{m}}$  körül van. A Nap bolometrikus abszolút magnitúdója  $(M_{\odot})_{\text{bol}} = 4^{\text{m}},72$ , míg látszó magnitúdója  $(m_{\odot})_{\text{bol}} = -26^{\text{m}},85$ .

Attól függően, hogy a fotometriai mérést milyen hullámhosszon, hullámhossz intervallumon végzik különböző fényrendekről beszélhetünk, mint:

a) *monokromatikus magnitúdó* ( $m_{\lambda}$ ,  $M_{\lambda}$ ), specifikus fényesség esetén;

b) *heterokromatikus magnitúdó* ( $m_{\text{het}}, M_{\text{het}}$ ), valamely  $\Delta\lambda$  hullámhossz intervallumon mért fényerősség esetén (ami az érzékelőrendszer spektrális érzékenységtől függ), és ami lehet pl.:

- *vizuális magnitúdó* ( $m_{\text{viz}}, M_{\text{viz}}$ );
- *fotografikus magnitúdó* ( $m_{\text{pg}}, M_{\text{pg}}$ );
- *fotoelektromos magnitúdó* ( $m_{\text{pe}}, M_{\text{pe}}$ );

attól függően, hogy az érzékelő műszerünk az emberi szem, a fotolemez, vagy a foto-elektronsokszorozó cső.

c) *bolometrikus magnitúdó* ( $m_{\text{bol}}, M_{\text{bol}}$ ), a csillagoknak a földi légkör abszorpciója és az érzékelő rendszer által nem torzított integrális magnitúdója.

Az égitestek fényességi adatai erősen függnak a mérés módszerétől. Pl. a fotolemezek a fény vörös tartományában általában kevésbé érzékenyek mint az emberi szem. Ezáltal a vörös csillagok  $m_{\text{pg}}$  fotografikus fényrendjei kisebbek, mint az  $m_{\text{viz}}$  vizuális fényrendek. A kék tartományban a helyzet fordított. Az  $m_{\text{pg}} - m_{\text{viz}}$  különbséget *színindex*nek nevezzük.

A vizuális ( $m_{\text{viz}}$ ) magnitúdó és a bolometrikus ( $m_{\text{bol}}$ ) magnitúdó különbségét *bolometrikus korrekciónak* nevezzük és  $BC$ -vel jelöljük:

$$BC = m_{\text{bol}} - m_{\text{viz}}.$$

Mivel a csillag fizikai állapotára leginkább a bolometrikus magnitúdó jellemző, célszerű minden csillagot a bolometrikus magnitúdóval jellemezni, amihez a Föld légkörén kívül végzett mérések szükségesek. Amint azt később látni fogjuk, a bolometrikus magnitúdó kiszámítható a csillag effektív hőmérsékletének ismeretében. A Nap esetében  $BC = -0^m,07$ .



## 11. fejezet

# A színeképelemzés asztrofizikai alkalmazásai

### 11.1. A csillagok színeképe

Asztrofizikai értelemben egy égitest *spektruma* az égitest összes elektromágneses sugárzásainak eloszlása a sugárzás hullámhossza vagy frekvenciája szerint. Egy égitest spektrumát vagy *színeképét* gyakorlatilag egy *spektroszkóppal* vizuálisan meg lehet tekinteni, spektrográf segítségével pedig a színeképek felvételeit lehet elkészíteni.

A *színeképelemzés* alapjait 1859-ben fektette le R. W. Bunsen<sup>1</sup> és G. R. Kirchhoff<sup>2</sup> laboratóriumi kísérletek alapján. A színeképek képződésének alapelvei:

1. Egy izzó szilárd, vagy folyékony test, valamint magas hőmérsékletű és nagynyomású gázok összefüggő, vonalak nélküli *folytonos színeképet* adnak (*kontinuum*).
2. Világító gázok kisebb nyomás és alacsony hőmérséklet mellett különálló, világos *emissziós vonalakat* mutatnak. Minden kémiai elem előállítja saját *vonalsorozatát*. Tehát valamely világító gáz emissziós színeképe elárulja kémiai összetételét.
3. Ha az önmagában folytonos színeképet adó anyag fénye egy hűvösebb gázon halad keresztül, akkor a kontinuumon azoknál a hullámhosszaknál jelentkeznek fekete vonalak (*abszorpciós vonalak*, *Fraunhofer*<sup>3</sup>-vo-

---

<sup>1</sup>Bunsen, Robert Wilhelm (1811–1899) — német kémikus.

<sup>2</sup>Kirchhoff, Gustav Robert (1827–1887) — német fizikus.

<sup>3</sup>Fraunhofer, Joseph (1787–1826) német fizikus, optikus, csillagász.

*nalak*, 1814), amelyeknél az átvilágított gáz emissziós vonalakat adna, ha saját maga világítana.

Ez érvényes a legtöbb csillagra és a Napra is, ahol a mélyebb zónákból származó fénysugarak a hűvösebb, külső rétegeken haladnak keresztül, és így ezekben a „megfordító rétegekben” Fraunhofer-vonalak keletkeznek.

A csillagszínképek abszorpciós vonalainak azonosításával a csillaglégkörök *kvalitatív kémiai elemzését* végezhetjük el. Nehezebben alakul a *kvantitatív analízis*, amelynél a jelenlevő kémiai elemek százalékos arányát is meg kell határozni. Az abszorpciós vonalak intenzitása ugyanis nem csak az abszorbaló atomok számától függ, hanem más feltételektől is, mint pl. a hőmérséklet, nyomás stb.

A Nap, mely magas hőmérsékletű, sűrű izzó gáztömeg, így folytonos spektrumot ad le, de ebből saját légköre, valamint a földi légkör sokféle hullámhosszúságú sugarat elnyel, és ennek következtében a színképben nagyszámú sötét vonal (mintegy 22 ezer) jelentkezik. Ha ezeket a vonalakat földi elemek spektrumaival összehasonlítjuk, megkapjuk a Nap légkörének kémiai kvantitatív összetételét. Ilyen módon fedezték fel először a Napon a héliumot (1868), utólag pedig megtalálták a Földön is. A legfeltűnőbb sötét vonalakat 1802-ben első ízben W. H. Wollaston<sup>4</sup> fedezte fel a Nap színképében, és ezeket 1814-ben J. Fraunhofer latin betűkkel jelölte meg.

## 11.2. A színképvonalak eltolódásával kapcsolatos effektusok

Egy csillag színképét összehasonlítva egy rögzített földi forrásból származó spektrummal, a *színképvonalak eltolódása* észlelhető, aminek különböző okai lehetnek.

### 11.2.1. A Doppler-Fizeau effektus

A színképelemzés felvilágosítást adhat egy égitestnek a látóvonal menti mozgásáról, a *radiális sebességről* is. Ha valamely égitest  $v_r$  sebességgel közeledik a megfigyelőhöz, a színképvonalak  $\lambda$  hullámhossza csökken, tehát az ibolya szín felé tolódnak el; a fényforrás távolodásával pedig a színképvonalak a vörös felé tolódnak el. Ha  $\lambda$  az eredeti és  $\lambda'$  a módosult hullámhossz, a

<sup>4</sup>Wollaston, William H. (1766–1828) — angol csillagász.



$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  eltolódás mértéke a *Doppler*<sup>5</sup>-*Fizeau*<sup>6</sup> effektus szerint

$$\Delta\lambda = \frac{v_r}{c}\lambda.$$

A színeképvonalak  $\Delta\lambda$  eltolódásának ismeretében meghatározható a csillag  $v_r$  radiális sebessége. Ez a formula csak olyan sebességek esetén érvényes, amelyek jóval kisebbek  $c$ -nél. A fénysebességhez közeli sebességek esetén a sebesség kiszámításához relativisztikus összefüggés szükséges.

A galaxisok spektrumában észlelt vöröseltolódás a világegyetem tágulására utaló jelenség.

### 11.2.2. A Zeemann-effektus

Ha egy fényforrás mágneses térben van, színeképében a vonaloknak két vagy három komponensre való hasadását lehet megfigyelni. A vonal felhasadásának mértékéből megállapítható a mágneses tér erőssége, sőt még a mágneses tér szerkezete is meghatározható. Ha a fénysugarak a mágneses tér erővonalaira merőlegesen, akkor egy triplettet lehet megfigyelni, vagyis a vonalak 3 komponensre hasadnak, miközben az egyik vonal az eredeti hullámhossznál marad, a másik kettő pedig ehhez képest szimmetrikusan helyezkedik el (*transzverzális Zeeman*<sup>7</sup>-*effektus*). Ha viszont a fény a mágneses erővonalakkal párhuzamosan halad, akkor egy dublett keletkezik, vagyis a vonal két komponensre hasad.

### 11.2.3. A Stark-effektus

Elektromos erőterek jelenlétében a Zeemann-effektusnak megfelelő *Stark*<sup>8</sup>-*effektus* lép fel.

### 11.2.4. A forgási effektus

Gyorsan forgó csillagok esetében a forgási sebességre következtethetünk a csillag színeképében látható Fraunhofer-féle vonalak forgási kiszélesedéséből, hiszen a csillag egyik része a forgás miatt közeledik, a másik része pedig távolodik. Mivel a színeképelemző készülékbe egyaránt jut fény a közeledő és távolodó részekről, így a fellépő Doppler-hatás kiszélesíti a vonalakat. A vonalak Doppler-kiszélesedésének mértéke jellemző a forgási sebességre.

<sup>5</sup>Doppler, Christian (1803–1853) — osztrák fizikus és matematikus.

<sup>6</sup>Fizeau, Armand Hippolyte Louis (1819–1896) — francia fizikus.

<sup>7</sup>Zeeman, Pieter (1865–1943) — Nobel-díjas (1902) holland fizikus.

<sup>8</sup>Stark, Johannes (1874–1957) — Nobel-díjas (1919) német fizikus.

Hozzá kell tenni, hogy a valódi egyenlítői forgási sebességet így csak abban az esetben kapjuk meg, ha a csillag forgástengelye merőleges a látóirányra. Mivel ez a feltétel nyilván csak a legritkábban teljesül, ezért általában a mérés során a tényleges forgási sebességnél kisebb értéket kapunk. Sőt, ha történetesen egy csillagot pontosan a forgástengely irányából látunk, akkor egyáltalán nem fogunk Doppler-kiszéledést tapasztalni, akár mint ha nem is forogna a csillag. Mivel sajnos nincs elvi lehetőség a forgástengely  $i$  hajlásszögének meghatározására, ezért csak alsó korlátot állapíthatunk meg a csillagok forgási sebességére. A kapott forgási sebességek a tényleges forgási sebességek  $\sin i$ -szeresei.

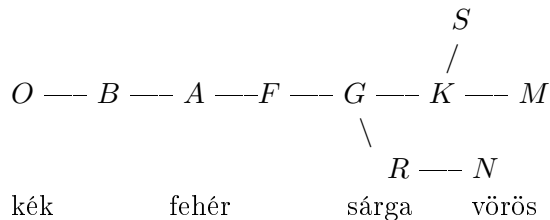
### 11.2.5. A csillagok színe és a Harward-féle spektrálklasszifikáció

A csillagok színe általában folytonos színkép, amelyben sötét (Fraunhofer-féle abszorpciós), ritkábban világos (emissziós) vonalak, néha sávok figyelhetők meg.

A csillagok színe osztályokba való sorolásának ma is használatos módszerét 1914-ben a *Harvard Observatory*-ban dolgozta ki E. Pickering<sup>9</sup>, A. Maury<sup>10</sup> és A. Cannon<sup>11</sup>. Ez az empirikus osztályozás minden színképosztályhoz megadott felületi hőmérsékletet és az abszorpciós színképvonalak meghatározott rendszerét rendeli hozzá.

A csillagokat tradicionálisan 7 fő- és 3 mellék színképosztályba soroljuk. A fő színképosztályok a felületi hőmérséklet csökkenő sorrendjében a következők:  $O$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $K$ ,  $M$ . A mellék színképosztályok:  $R$ ,  $N$  és  $S$ .

A színképosztályok a következő sémába sorolhatók:



A betűkkel jelzett színképosztályokat 0–9-ig terjedő számozással tovább finomították. Így pl. a következő osztályok jöttek létre  $B0$ ,  $B1$ , ...,  $B9$ , kivéve az,  $O$  típusú csillagokat, ahol csak az  $O5$ ,  $O6$ , ...,  $O9$  alosztályok léteznek.

<sup>9</sup>Pickering, Edward (1846–1919) — amerikai csillagász.

<sup>10</sup>Maury, Antonia (1866–1952) — amerikai csillagász.

<sup>11</sup>Cannon, Annie (1863–1941) — amerikai csillagász.

A csillagok vizsgálata azt mutatja, hogy a  $8^m$ -nál fényesebb csillagok közül 99,78% tartozik a *B*, *A*, *F*, *G*, *K* és *M* színeképosztályokba, 0,17% *O* típusú, míg az összes többi csillag csak 0,05%-ot tesz ki.

Az egyes színeképosztályok fontosabb jellemzői a 11.1. táblázatba foglalhatók össze.

11.1. táblázat. Színeképosztályok fontosabb jellemzői

Osz-tály	Hőmérséklet (K)	Szín (elnevezés)	Jellegzetes színeképvonalak	Szín-index	Jellemző csillag
<i>O</i>	>25 000	kék, forró csillagok	He+, He-, Si++++	—	—
<i>B</i>	11 000 – 25 000	kék, héliumos csillagok	semleges He, Si++++	–0,3	Spica, Riegel
<i>A</i>	7 500–11 000	fehér, hidrogén csill.	H és ionizált fémvonalak	–0,2	Szűrűsz, Vega
<i>F</i>	6 000 – 7 500	sárgásfehér csillagok	ionizált fémvonalak főleg a Ca ún. H- és K-vonalai	0,0	Procyon
<i>G</i>	5 000 – 6 000	sárga, Nap-típusú csillagok	semleges fémvonalak, az ionizált Ca H- és K-vonalai, CN- és CH-molekulák	0,4	Nap, Capella
<i>K</i>	3 500 – 5 000	narancssárga csillagok	semleges fémvonalak, erős molekulásávok, TiO molekula sávja K5-től	0,6	Arcturus, Aldebaran
<i>M</i>	2 200 – 3 500	vörös, titánoxidos csillagok	semleges Ca, fém-oxid molekulák sávjai, amelyek közül a TiO a legerősebb	1,0	Betelgeuze
<i>S</i>	3 300	óriás változócsillagok	M-hez hasonló, de erősek benne a ZrO, YO és LaO sávok	1,5	—
<i>R</i>	3 300	sötétebb narancssárga szénecsillagok	K típusra hasonló, CN- és CH-molekulák	1,5	—
<i>N</i>	3 300	rubinvörös szénecsillagok	az M típusra hasonlít, C2-molekula sávja, szénecsillagok	1,5	—

Az extrém magas hőmérsékletű (50 000–100 000 K), egyébként *O* típusú, *Wolf—Rayet-csillagokat*, amelyeknek egyes vonalai emisszióban mutatkoznak, *W* típusú csillagoknak is szokás nevezni.

Hagyományosan az *O* és *B* típusú csillagokat korai típusú csillagoknak,

míg a  $K$  és  $M$  osztályba tartozókat késői típusú csillagoknak nevezzük. Ez nincs kapcsolatba a csillag valódi korával, mindkét csoportban léteznek mind fiatal, mind idős csillagok.

Létezik több paramétert — nem csak a hőmérsékletet — figyelembe vevő spektrál-klasszifikáció is.

## 12. fejezet

# A csillagok jellemzői

Az Univerzum ismert barionos anyagának túlnyomó része körülbelül Nap-tömegnyi, magas hőmérsékletű gázgömbök formájában található. Ezen — *csillagoknak* nevezett — égitestek *atommag-reakcióikkal*, vagy fejlődésük bizonyos szakaszában *összehúzódásukkal* tetemes mennyiségű energiát termelnek és nagy teljesítménnyel sugároznak.

A Napnál nagyságrenddel nagyobb tömegű testek olyan gyorsan felhasználják energiakészletüket, hogy gyakorlatilag születésük előtt már elpusztulnak. A Napnál 10-szer kisebb égitestek belsejében pedig már olyan kicsi a nyomás és a hőmérséklet, hogy ezek már alig pislákolnak. Habár a Jupiter bolygónak is van elenyésző energiatermelése, téves azt csillagnak nevezni. (Olyan, mintha egy lepkéről mondanánk, hogy madár.)

Ugyancsak megjegyezhetjük, hogy léteznek *igen nagytömegű sugárzó objektumok* is (pl. *kvazárok*), amelyek tömege 8–11 nagyságrenddel múlja felül a közönséges csillagok tömegét, vagy a Nappal nagyságrendileg megegyező tömegű, *nem sugárzó* égitestek is, a *fekete törpék*, (ezekről jóformán semmit sem tudunk), amely objektumok nem sorolhatók a közönséges csillagok közé. Megállapítható, hogy az *Univerzum barionos anyagának igen jelentős hányada csillagok formájában fordul elő*.

### 12.1. A csillagok jellemzői (állapothatározói)

A csillagok tulajdonságai jellemezhetők bizonyos paraméterek segítségével, amely *állapothatározók* lehetővé teszik a csillagok más égitestektől való megkülönböztetését. A csillagok fontosabb jellemzői a következők:

1. *A csillag tömege* ( $\mathcal{M}$ ) — amit általában  $\mathcal{M}_{\odot}$  naptömegben fejezzük ki,  $1 \mathcal{M}_{\odot} = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .

2. *A csillag kémiai összetétele* — ami a kilogrammnyi tömegben megjelenő *hidrogén aránya* ( $X$ ), *hélium aránya* ( $Y$ ) illetve *egyéb elemek aránya*  $Z = 1 - X - Y$ . A csillag légkörének összetétele a színeképből határozható meg, míg belsejének kvantitatív jellemzése elméleti úton csillagbelső-modellek alapján vezethető le.
3. *A csillag ( $R$ ) sugara* — általában Nap-sugarakban ( $R_{\odot} = 6,9626 \cdot 10^8$  m) fejezzük ki.
4. *A csillag fényereje (luminozitása,  $L$ )* — a Nap fényerejével összehasonlítva szoktuk kifejezni,  $L_{\odot} = 3,845 \cdot 10^{26}$  W. Az integrális vagy bolometrikus fényerő nem más, mint a csillag által egységnyi idő alatt kibocsátott energiamennyiség.
5. *A csillag effektív hőmérséklete ( $T_{eff}$ )* — azon abszolút fekete test hőmérséklete, ami a csillaggal megegyező energiamennyiséget bocsát ki egységnyi felületen egységnyi idő alatt, mértékegysége a Kelvin (K),  $0^{\circ}\text{C} = 273,16$  K. A csillagokat fekete testtel megközelítve effektív hőmérsékletük meghatározható a  $H = \sigma T_{eff}^4$  Stefan-Boltzmann-féle sugárzási törvény alapján, ahol  $H$  a csillag felületegysége által egységnyi idő alatt kibocsátott energiamennyiség,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Joule  $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{K}^{-4}$  a Boltzmann-féle állandó.
6. *A csillag színeképe (spektruma)* — például a Harward-féle spektrálklasszifikáció szerint, amelyben Napunk  $G2V$  típusú.
7. *A csillag közepes sűrűsége* ( $\rho$  [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]) —  $\rho = 3\mathcal{M}/(4\pi R^3)$ ,  $\rho_{\odot} = 1,4069 \cdot 10^3$   $\text{kg m}^{-3}$ .
8. *A nehézségi gyorsulás a csillag felszínén* ( $g$  [ $\text{m s}^{-2}$ ]) —  $g = GM/R^2$ , ahol  $G = 6,674 \cdot 10^{-11}$   $\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  a gravitációs állandó,  $g_{\odot} = 274$   $\text{m s}^{-2}$ .
9. *A csillag 1 kg-nyi tömegére eső másodpercenkénti energiatermelés* ( $\varepsilon$  [ $\text{W / kg}$ ]) —  $\varepsilon = L/\mathcal{M}$ ,  $\varepsilon_{\odot} = 1,923 \cdot 10^{-4}$  W / kg.
10. *A csillag forgási periódusa* ( $P$ ) —  $P_{\odot} = 25,38$  középnap az egyenlítő mentén.

Az asztrofizika egyik fontos problémája a csillagok felsorolt állapotathatározó paramétereinek meghatározása megfigyelések alapján. A felsorolt különböző jellemzők között, amint azt láttuk összefüggések léteznek, így néhány

alapvető paraméter (tömeg, vegyi összetétel, sugár és luminozítás) ismeretében a többi már meghatározható. Ugyanakkor megfigyelések alapján az asztrofizikusoknak az alapvető paraméterek közti tömeg — luminozítás illetve tömeg — sugár összefüggéseket sikerült megállapítani. Tehát a csillagok alapvető állapothatározó paraméterei végső soron a tömeg és a vegyi összetétel.

## 12.2. A csillagok tömege

A csillagtömegek legpontosabb meghatározása kettőscsillagok esetén lehetséges, Kepler harmadik általános törvénye alapján (7.76), amely szerint:

$$\frac{P^2 (m_1 + m_2)}{a^3} = \frac{(P')^2 (m'_1 + m'_2)}{(a')^3} = \text{konstans}.$$

Az összefüggésbe a gravitációs kapcsolatban levő kettőscsillag rendszer adatait, valamint a Nap–Föld rendszer adatait helyettesítve:

$m_1 = \mathcal{M}_1$ ,  $m_2 = \mathcal{M}_2$  — a kettős rendszer komponenseinek tömege (Nap-tömegekben kifejezve);

$P$  —  $\mathcal{M}_2$ -nek  $\mathcal{M}_1$  körüli sziderikus keringési periódusa (sziderikus években kifejezve);

$a$  — az  $\mathcal{M}_2$  tömegű csillag  $\mathcal{M}_1$  tömegű komponens körüli elliptikus pályájának fél nagytengelye (csillagászati egységekben (AU) kifejezve);

$m'_1 = \mathcal{M}_\odot = 1$ ,  $m'_2 = \mathcal{M}_\oplus \approx 0$ ,  $P' = 1$  sziderikus év,  $a' = 1$  AU.

Ezen égi mechanikai egységrendszerben a komponensek tömegének összege:

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \frac{a^3}{P^2}.$$

A pálya  $a$  fél nagytengelye *vizuális kettőscsillagok* esetén meghatározható észlelések alapján, megmérve a

- pálya fél nagytengelyének  $a''$  *szögátmérőjét*, valamint a
- kettőscsillag  $\pi''$  parallaxisát, mindkettőt ívmásodpercekben kifejezve.

A keresett fél nagytengely:

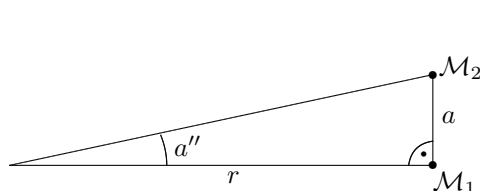
$$a = \frac{a''}{\pi''} \text{ AU}.$$

A fenti összefüggés azonnal belátható, ha figyelembe vesszük a csillagok távolságára vonatkozó  $r = 1/\pi''$  (pc), vagy  $r = 206\,265/\pi''$  (CSE) képletet, valamint a 12.1. ábra alapján felírható következő összefüggéseket:

$$\frac{a}{r} = \operatorname{tg} A \approx m(A)_{\text{rad}} = \frac{a''}{206265},$$

ahonnan, CSE-ben számolva:

$$a = \frac{r \cdot a''}{206\,265} = \frac{a''}{\pi''}.$$

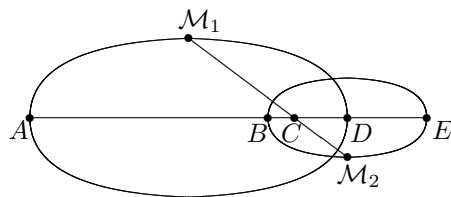


12.1. ábra. Kettőscsillag távolsága

Tehát, ha egy vizuális kettős rendszer esetén észlelések alapján sikerült meghatározni a kettőscsillag  $a''$  szögátmérőjét,  $\pi''$  parallaxisát, valamint a  $P$  sziderikus keringési periódust, akkor a kettőscsillag össztömege, Nap-tömegekben kifejezve:

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \frac{(a'')^3}{(\pi'')^3 P^2}.$$

A komponensek tömege külön-külön is meghatározható a tömegközéppont helyzetének ismeretében, azaz, ha ismert az egyes komponensek tömegközéppont körüli elliptikus pályájának  $a_1$ ,  $a_2$  fél nagytengelye.



12.2. ábra. Kettős rendszer mozgása a tömegközéppont körül

Ez akkor valósítható meg, ha a komponensek tömegközéppont körüli pályája külön-külön is megrajzolható. Ekkor a tömegek meghatározására a következő összefüggések használhatók:

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2} = \frac{a_2}{a_1}, \quad a_1 + a_2 = a.$$

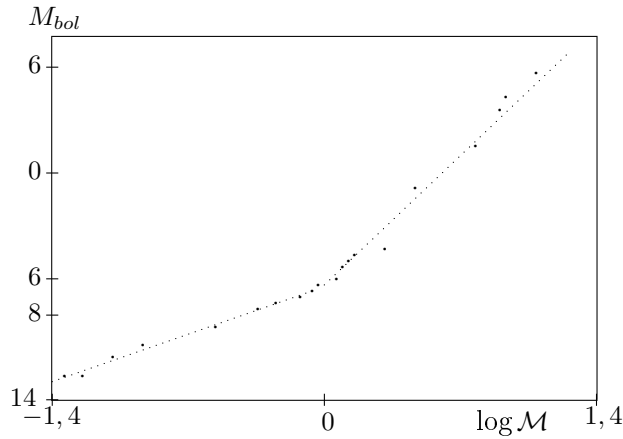
A fenti összefüggés belátható, ha figyelembe vesszük, hogy a 12.2. ábrán látható jelölések alapján a két csillag mozgására a  $C$  tömegközéppont körül érvényesek a következő összefüggések:

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{EC}{AC} = \frac{BC}{DC} = \frac{EC + CB}{AC + CD} = \frac{BE}{AD} = \frac{2a_2}{2a_1} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Ha egy vizuális kettőscsillag egyben spektroszkópikus kettős is, a radiális sebességek arányából következtethetünk az  $\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2$  tömegarányra.



A Naprendszer körüli 20 pc sugarú gömbben mintegy 70 ismert távolságú vizuális kettőscsillagot ismerünk, amelyeknek a pályájából a komponensek tömegét kiszámíthatjuk. Ezek közül kb. 25 olyan van, amelynél a tömegek néhány százalékos hibával kaphatók, ami mintegy 50 csillagtömeget jelent. Ha a csillagok bolometrikus abszolút magnitúdóját a kapott tömeg logaritmusának függvényében ábrázoljuk, akkor 10.3. ábrán levő grafikont kapjuk. A grafikonon elhelyezkedő pontok viszonylag jól illeszkednek a szaggatott-



12.3. ábra. Az empirikus tömeg-fényerő reláció

tan kihúzott görbére, amely két egyenes szakaszból áll. Ezt nevezzük empirikus tömeg-fényesség relációnak. Az empirikus tömeg-fényesség (tömeg-luminozítás, tömeg-sugárzási teljesítmény) relációból megállapíthatjuk, hogy a vizsgált csillagok tömegei viszonylag szűk határok között változnak. A csillagok tömegére igaz az

$$\frac{1}{25} \mathcal{M}_{\odot} < \mathcal{M} < 25 \mathcal{M}_{\odot}$$

összefüggés. A csillagok túlnyomó többségére azt is kimondhatjuk, hogy tömegük 0,4 és 4 Nap-tömeg között van.

Az empirikus tömeg-luminozítás reláció a következő alakot ölti:

$$L \sim \mathcal{M}^4, \text{ ha } 0^{\text{m}} < M_{\text{bol}} < 7^{\text{m}}$$

és

$$L \sim \mathcal{M}^{1,5}, \text{ ha } M_{\text{bol}} > 7^{\text{m}}.$$

Megjegyzendő, hogy az empirikus tömeg-luminozitás reláció fenti alakja csak az úgynevezett fősorozatbeli csillagokra érvényes. (A fősorozatbeli csillagokról majd a fejezet végén, a Hertzsprung–Russel diagramról szóló részben fogunk szólni.)

Bizonyos egyedülálló csillagok esetén is meghatározható a tömeg az ún. Einstein-féle effektus alapján, amelynek értelmében nagyon erős gravitációs mező jelenléte a színeképvonalak vörös felé történő eltolódását eredményezi. Az effektus hatalmas tömegű vagy kis sugarú csillagok (fehér törpék, pulzárok) esetén érzékelhető.

Az eddig meghatározott csillagtömegek a következő határok között változnak:

$$0,04 \mathcal{M}_{\odot} < \mathcal{M} < 100 \mathcal{M}_{\odot}.$$

### 12.3. A csillagok hőmérséklete

Megfigyelések és mérések alapján a csillagok felületi hőmérséklete határozható meg, ami a csillag fotoszférájának<sup>1</sup> átlagos hőmérséklete. A felszíni hőmérséklet a csillagok színekéből határozható meg. A mérési eljárástól függően a fotoszféra hőmérsékletére különböző értékeket kapunk, ami egyfelől azzal magyarázható, hogy a csillagok nem pontosan az abszolút fekete test sugárzási törvényei szerint sugároznak, mert ahhoz termodinamikai egyensúly szükséges, másfelől pedig a hőmérséklet változik a mélységgel és így a különböző hőmérséklet arra a mélységre jellemző, ahonnan a sugárzás indult. A különböző mérési eljárások szerint a következő hőmérsékletek ismertek: *effektív hőmérséklet*, *Wien-féle hőmérséklet*, *színhőmérséklet*, *sugárzási hőmérséklet*, *kinetikus hőmérséklet*, *ionizációs hőmérséklet*, *gerjesztési hőmérséklet*.

#### 12.3.1. Effektív hőmérséklet

Egy csillag  $T_{eff}$  *effektív hőmérséklete* megegyezik annak az abszolút fekete testnek a hőmérsékletével, amely felületegységenként és másodpercenként ugyanannyi energiát sugároz ki, mint a csillag. A  $H = \sigma \cdot T_{eff}^4$  *Stefan–Boltzmann-féle sugárzási törvény* alapján, ahol  $H$  a csillag felületegysége által egységnyi idő alatt kibocsátott energiamennyiség,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Joule·m<sup>-2</sup>s<sup>-1</sup>K<sup>-4</sup> a Boltzmann-féle állandó,

$$T_{eff} = \sqrt[4]{\frac{r^2 E}{R^2 \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{E}{\sigma \sin^2 \frac{d}{2}}} \text{ (K)}, \quad (12.1)$$

<sup>1</sup>Fotoszféra (fénygömb), gr. — a csillag azon felszíni rétege amelyben a csillagtól hozzánk érkező sugárzás túlnyomó hányada — mintegy 90 % — keletkezik.

ahol a

$$\sin \frac{d}{2} = \frac{R}{r}$$

összefüggéssel bevezetett  $d$  a csillag *látszólagos szögátmérője*. A (12.1) összefüggés levezetésénél az integrális luminozítás és fluxus közti  $L = 4\pi R^2 H$  (9.15), valamint a fényesség és luminozítás közti  $E = \frac{L}{4\pi r^2}$  (9.20) összefüggéseket használtuk.

Megmérve a csillag  $E$  látszó fényességét és  $d$  szögátmérőjét (vagy  $r$  távolságát és  $R$  sugarát) kiszámítható a csillag effektív hőmérséklete. Sajnos alig néhány óriás csillag esetén mérhető az  $E$  látszó fényesség bolométerrel<sup>2</sup> és a  $d$  szögátmérő interferométerrel<sup>3</sup> (pl. Antares, Betelgeuse stb.).

Minden nehézség nélkül a Nap effektív hőmérséklete határozható meg. Ennek értéke:

$$T_{eff} = 5\,785 \pm 5 \text{ K.}$$

A csillagok effektív hőmérséklete megközelítőleg 2000 K és 100 000 K közötti értéket vesz fel.

### 12.3.2. A Wien-féle hőmérséklet

Hőméréskleteket elvileg, amint már említettük, főleg a csillagok felszínére vonatkozóan lehet megállapítani a színeképből. Erre szolgál a *Wien-féle eltolódási törvény*, amely szerint a kontinuum intenzitási maximuma függ a hőmérséklettől, mégpedig a következő formula szerint:

$$T \cdot \lambda_{max} = 2897 \quad ([T] = \text{K}, [\lambda_{max}] = \mu \text{ m} = 10^{-6} \text{ m}).$$

A Wien-féle hőmérséklet meghatározása a fenti összefüggés alapján a következőképpen történik: megállapítjuk, hogy a csillag spektrumában milyen  $\lambda_{max}$  hullámhossznál maximális a sugárzási áram, és az eltolódási törvényből kiszámítjuk a hozzá tartozó  $T_W$  *Wien-féle hőmérsékletet*. A Nap esetében például  $\lambda_{max} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  és így

$$(T_W)_\odot = 2897/0,5 = 5\,794 \text{ K.}$$

### 12.3.3. A színhőmérséklet

A *színhőmérséklet* olyan abszolút fekete test hőmérséklete, amelynek sugárzási árama a megfigyelési színeképtartományban ugyanolyan eloszlást mutat,

<sup>2</sup>Bolométer — a kisugárzott összenergia mérésére szolgáló műszer.

<sup>3</sup>Interferométer — igen kis szögtávolságok mérésére szolgáló berendezés.

mint a csillag sugárzási árama. A színhőmérséklet a leggyakrabban használt hőmérséklet, mert meghatározása igen egyszerű.

Egy adott  $T$  hőmérsékletű abszolút fekete test sugárzási áramának a  $\lambda$  hullámhossztól való függését a *Planck-függvény* adja meg:

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1},$$

ahol  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Js a *Planck-féle állandó*,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/s a *Boltzmann-féle állandó*,  $c$  pedig a fény sebessége légüres térben. Különböző  $T$  hőmérséklet mellett  $B_{\lambda}(T)$ -t grafikusán ábrázolva a Planck-féle görbéket kapjuk (9.4. ábra). Ha a csillag abszolút fekete testként sugározna, akkor kiválasztva a csillag színekének megfelelő Planck-görbét, meghatározható lenne a csillag hőmérséklete.

A színhőmérséklet mérésének az elve a következő. Megmérve egy csillag  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  hullámhosszaknak megfelelő  $E_{\lambda_1}$  és  $E_{\lambda_2}$  specifikus sugárzási áramát, az  $(\lambda_1, E_{\lambda_1})$  és  $(\lambda_2, E_{\lambda_2})$  pontokon áthaladó Planck-görbéhez tartozó hőmérsékletet nevezzük színhőmérsékletnek.

## 12.4. A csillagok sugara

Egy, a Napéval megegyező csillag sugara 1 pc távolságból

$$\alpha = R_{\odot} / (1 \text{ pc}) \approx 2 \cdot 10^{-8}$$

radián nagyságú szög alatt látszik, ami 0,005-et tesz ki. Egy 1 m átmérőjű távcső elméleti felbontóképessége mintegy 0,1. Ha tekintetbe vesszük a légköri nyugtalanságot, akkor ez az érték 0,5-ig is felmehet. Így az elhajlási korong átmérője minden esetben nagyobb a csillag átmérőjének látószögénél. Így — a Napon kívül — minden csillag gyakorlatilag pontszerűnek látszik minden földi távcsőben<sup>4</sup>.

A csillagok sugarának megmérésére többnyire indirekt módszereket használnak, mint az interferometrikus módszerek, a sugárzásenergetikai módszer a fedési kettősök módszere, és a holdfedéses módszer. A továbbiakban röviden ismertetjük ezeket a módszereket.

<sup>4</sup>Az égbolt egyik legnagyobb látszó méretű csillaga — a Napot kivéve — egy vörös óriás, a Betelgeuse ( $\alpha$  Ori). Ennek korongját először a Hubble űrteleszkóppal sikerült megörökíteni. A mintegy 520 fényévnire levő csillag szögátmérője 0,034 és 0,054 közötti (más módszerrel mért érték 0,047). Ezen mérések szerint a Betelgeuse sugara  $1\,164R_{\odot}$  —  $1\,849 R_{\odot}$  közötti.

A *fényinterferencia jelenségét* felhasználva a XX. század elején sikerült olyan csillag-interferométert szerkeszteni, amelynek segítségével közelebbi csillagok szögátmérőjét sikerült meghatározni. A Wilson Hegyi Csillagvizsgáló (Mount Wilson Observatory) 2,5 m átmérőjű tükörteleszkópjára egymástól 6 m-re szerelt segédtükrök segítségével 1920-ban sikerült először hét csillag szögátmérőjét megmérni. Ismerve a csillag  $d''$  szögátmérőjét és  $\pi''$  parallaxisát ívmásodpercekben kifejezve, a csillag sugara

$$R = \frac{d''}{2\pi''} \text{ (CSE).} \quad (12.2)$$

A *sugárzásenergetikai módszer* alapjául egy csillag  $M_{bol}$  bolometrikus abszolút magnitúdója,  $T_{eff}$  effektív hőmérséklete és  $R$  sugara között fennálló

$$M_{bol} = 42,3 - 5 \lg R - 10 \lg T_{eff} \quad (12.3)$$

összefüggés szolgál.

**Bizonyítás.** A Pogson-formulát az  $m - m_0 = -2,5 \lg \frac{E}{E_0}$  (10.6) alakban alkalmazva a csillag és a Nap esetén a standard fényességeknek megfelelő abszolút magnitúdókra  $M_{bol} - (M_{bol})_{\odot} = -2,5 \lg \frac{E_{st}}{(E_{st})_{\odot}}$ . A logaritmus alatt szereplő tört a következőképpen fejezhető ki:

$$\frac{E_{st}}{(E_{st})_{\odot}} = \frac{L_{bol}}{(L_{bol})_{\odot}} = \frac{4\pi R^2 H}{4\pi R_{\odot}^2 H_{\odot}} = \frac{R^2 \sigma T_{eff}^4}{R_{\odot}^2 \sigma (T_{eff})_{\odot}^4}.$$

Így a csillag bolometrikus abszolút magnitúdója:

$$M_{bol} = (M_{bol})_{\odot} - 5 \lg R + 5 \lg R_{\odot} - 10 \lg T_{eff} + 10 \lg (T_{eff})_{\odot}.$$

A Nap sugarát egységnek tekintve ( $R_{\odot} = 1$ ), és figyelembe véve a Napra ismert  $(M_{bol})_{\odot} = 4,72$  és  $(T_{eff})_{\odot} = 5785$  K értékeket, a csillag  $R$  sugara, Nap sugarakban kifejezve az

$$M_{bol} = 42,3 - 5 \lg R - 10 \lg T_{eff}$$

összefüggésből határozható meg.

Hasonló összefüggés érvényes adott  $\lambda$  hullámhosszon, vagy bizonyos hullámhossz-tartományban fotometriai úton mért  $M_{\lambda}$  monokromatikus abszolút magnitúdó esetében is.

Különösen nagy pontossággal határozhatók meg a csillagátmérők a fedések kettőscsillagok esetében, annak a fényességcsökkenésnek a segítségével, amit akkor mérhetünk, amikor a két csillag (a Földről nézve) eltakarja egymást.

Egyes csillagoknál (pl. az Antares esetén) abból is meghatározható a csillag átmérője, hogy a Hold (a Föld körüli pályán haladva) eltakarja a csillagot. Ezt nevezzük *holdfedéses módszernek*.

A csillagok sugaraí igen tág határok között változnak. Az óriáscsillagok sugara általában a Nap sugarának mintegy 100-szorosa, a fehér törpék sugara a Nap sugarának körülbelül 100-ad része,

$$\frac{1}{100} R_{\odot} < R < 100 R_{\odot}.$$

Természetesen vannak különlegesen kis és nagy méretű csillagok is. A neutroncsillagok átmérője néhányszor 10 km csupán, míg a legnagyobb vörös óriások sugara a Nap sugarának 1 000-szeresét is eléri. (A jelenleg ismert legnagyobb méretű csillag a VV Cephei nevű változócsillag. Átmérője 2 400-szorosa a Napénak.)

Megjegyezhetjük, hogy míg a csillagok tömege aránylag szűk határok között mozog ( $0,04 \mathcal{M}_{\odot}$ ,  $50 \mathcal{M}_{\odot}$ ), addig sugaruk nagyon széles határok közötti változatosságot mutat. Így  $\rho = 3\mathcal{M}/(4\pi R^3)$  közepes sűrűségük is nagyon tág határok között változik, ami magyarázatot ad arra a tényre, hogy a különböző csillagtípusok miért mutatnak olyan nagy eltérést belső fizikai tulajdonságaikat illetően.

M. Schwarzschild<sup>5</sup> a csillagokat sűrűségük szerint négy osztályba sorolta:

- „*Közönséges*” *csillagok*, amelyek közepes sűrűsége  $10^{-4} - 10^5 \text{ kg/m}^3$  értékek között van. Ezen csillagok fizikai tulajdonságaikban nem különböznek lényegesen a Naptól.
- *Fehér törpe csillagok*, amelyek közepes sűrűsége  $10^8 - 10^{12} \text{ kg/m}^3$  ( $10^{10} \text{ kg/m}^3$ -es sűrűségű anyagból egy köbcentinyi 10 tonnát nyom). Ezen csillagok esetén a csillagplazmában — amelyben a csillaggáz teljesen ionizált, nem létező atomok, csak atommagok és elektronok keveréke — az elektrongáz degenerált.
- A *neutroncsillagok* közepes sűrűsége  $10^{14} - 10^{18} \text{ kg/m}^3$ . Ezen csillagok csupán neutronokból épülnek fel, középpontjukban a sűrűség elérheti az 1 milliárd tonnát köbcentinként. A neutrongáz itt is degenerált.
- A *fekete lyukak*, korlátlan gravitációs kontrakcióban levő csillagok, melyek sűrűsége — elméletileg — a végtelenségig nő.

<sup>5</sup>Schwarzschild, Martin (1912–1997) — német-amerikai csillagász.

## 12.5. A csillagok luminozitása

Ismerve észlelésekből egy csillag  $R$  sugarát és  $T_{eff}$  effektív hőmérsékletét, integrális (bolometrikus) luminozitása kiszámítható értelmezése alapján, valamint a Stefan—Boltzmann-féle sugárzási törvényt használva:

$$L = 4\pi R^2 \sigma \cdot T_{eff}^4,$$

ahol  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Joule} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-4}$  a Boltzmann-féle állandó.

Ha egy csillag  $M_{bol}$  bolometrikus abszolút magnitúdója ismert, akkor luminozitása a következő összefüggéssel számítható ki:

$$\frac{L_{bol}}{(L_{bol})_{\odot}} = 10^{\frac{2}{5}((M_{bol})_{\odot} - M_{bol})} = 2,512^{(M_{bol})_{\odot} - M_{bol}}.$$

A bolometrikus abszolút magnitúdó pedig a sugár és effektív hőmérséklet függvényében

$$M_{bol} = 42,3 - 5 \lg R - 10 \lg T_{eff}.$$

Sajnos általában  $R$  és  $T_{eff}$  nem ismertek, (mint azt korábban láttuk,  $R$  meghatározása kevés csillag esetén végezhető el eredményesen). Így a csillagok luminozitásának meghatározására leggyakrabban indirekt módszert alkalmaznak.

A módszer alapjául a  $T_{eff}$  effektív hőmérséklet és a  $BC = m_{bol} - m_{viz}$  bolometrikus korrekció között megállapítható összefüggés szolgál, ami első megközelítésben

$$BC = 42,5 - 28\,400/T_{eff} - 10 \lg T_{eff}$$

alakban írható fel. Nagy pontosságú meghatározások esetén figyelembe kell venni, hogy a csillagok sugárzása némileg eltér a fekete test sugárzási törvényeitől. A bolometrikus korrekció értéke az effektív hőmérséklet függvényében táblázatokba foglalva található meg.

Ismerve egy csillag bolometrikus korrekcióját, meghatározható annak bolometrikus abszolút magnitúdója, az

$$M_{bol} = M_{viz} + BC(T_{eff})$$

összefüggés alapján ( $M_{bol} - M_{viz} = m_{bol} - m_{viz} = BC$ ), ahol a vizuális abszolút magnitúdó meghatározására az

$$M_{viz} = m_{viz} + 5 + 5 \lg \pi''$$

12.1. táblázat. Reprezentatív csillagok fizikai jellemzői

Csillag	Színkép-típus	$T_{eff}$ (K)	$L/L_{\odot}$	$R/R_{\odot}$	$\mathcal{M}/\mathcal{M}_{\odot}$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Megjegyzések
$\alpha$ Sco A (Antares)	M0 Ib	3 300	34 000	530	19	$1,7 \cdot 10^{-4}$	Szuperóriás-csillag
$\alpha$ Boo (Arcturus)	K2 III	3 970	130	26	4,2	$3,2 \cdot 10^{-1}$	Óriáscsillag
$\gamma$ Ori	B1 V	23 000	13 000	7,2	13,7	52	Fősorozati (törpe)
$\sigma$ CMa A (Sirius)	A1 V	9 700	61	2,4	3,3	810	Fősorozati (törpe)
Nap	G2 V	5 770	1	1	1	1 410	Fősorozati (törpe)
Barnard csillag	M5 V	3 000	0,015	0,50	0,38	4 300	Fősorozati (törpe)
$\alpha$ CMa B (Sirius B)	A5 VII	8 200	0,0026	0,026	0,96	$7,7 \cdot 10^7$	Fehér törpe

összefüggést használjuk, ismerve a csillag  $m_{viz}$  vizuális látszó magnitúdóját és  $\pi''$  parallaxisát, amelyek könnyebben meghatározhatók.

A csillagok luminozitása nagyon tág határok közötti értékeket vesz fel,  $10^{-6} L_{\odot}$ -tól  $10^6 L_{\odot}$ -ig.

A 10.1 táblázatban megtalálható néhány jellegzetes csillag fontosabb fizikai paramétere.

### 12.5.1. A Hertzsprung—Russell-diagram

A csillagok jellemzői, amint azt már láttuk a tömeg és luminozitás esetén is, nem függetlenek egymástól, közöttük különböző empirikus összefüggések léteznek. Az utóbbi évtizedekben nagy jelentőségre tett szert a csillagokkal foglalkozó kutatások és különösen a csillagfejlődés kutatása területén az a diagram, amelyet E. Hertzsprung<sup>6</sup> és H. N. Russel<sup>7</sup> 1905 és 1913 között állított fel.

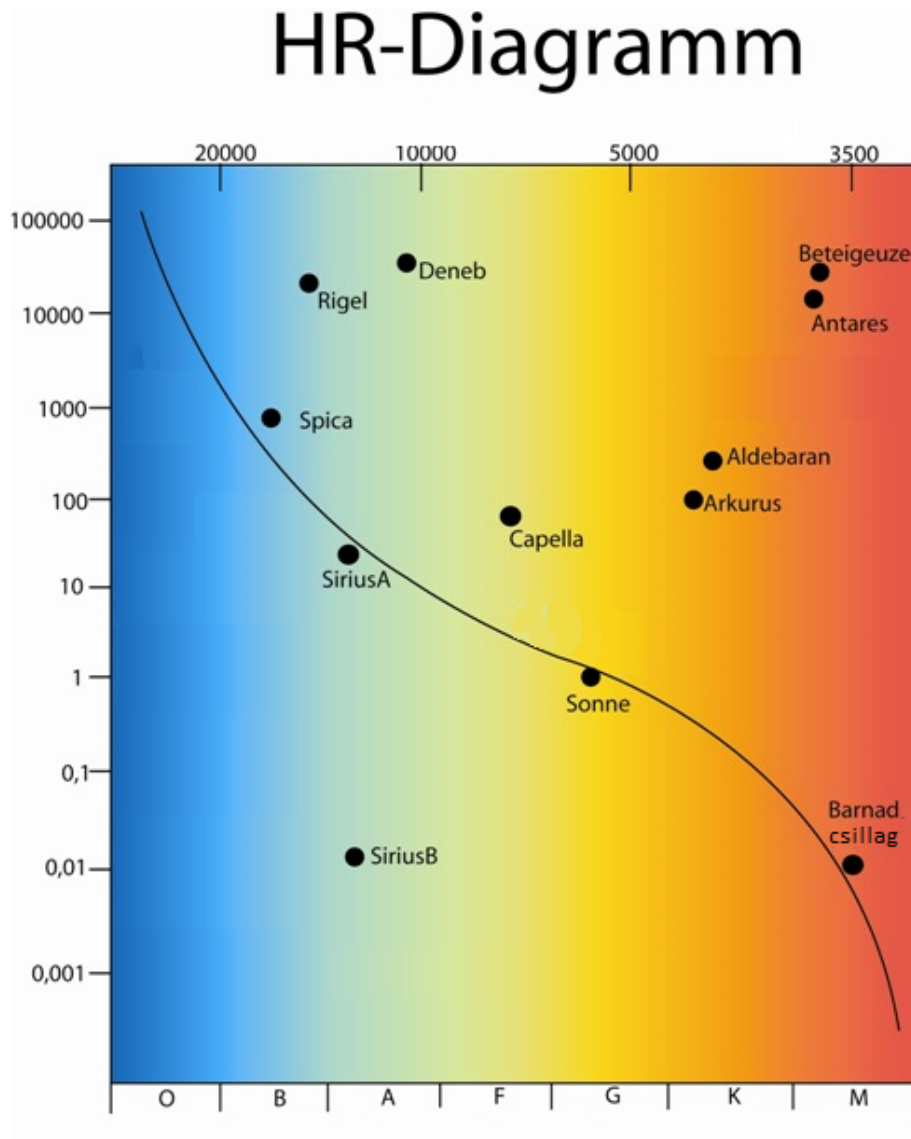
A függőleges tengelyen az abszolút fényességet tüntetik fel magnitúdóban. A vízszintes tengelyen a színképosztályt, illetve az ezzel összefüggésben levő felszíni hőmérsékletet, vagy színindexet mutatja. Ezért nevezik ezt *szín-fényesség diagram*nak is, vagy pedig megalkotóikról Hertzsprung—Russell-diagramnak (HRD, 12.4. ábra).

A diagramon (ahol minden csillagot egy pont jelez) a csillagok nagy többsége (95%) egy balra föntről jobbra lefelé tartó ún. *fősorozat* mentén helyezkedik el. Balra fönt a nagytömegű igen fényes kékesfehér csillagok, középtájon a Naphoz hasonló sárga csillagok, míg lent a vörös törpék találhatók. A HRD jobb felső részén vannak a vörös óriáscsillagok (óriáság), fölöttük a szuperóriásokkal, alattuk a szubóriásokkal. Balra lent van még néhány fehér

<sup>6</sup>Hertzsprung, Ejnar (1873–1967) — dán csillagász.

<sup>7</sup>Russel, Henry Norris (1877–1957) — amerikai csillagász.





12.4. ábra. A Hertzsprung—Russell-diagram (HRD): az abszolút fényesség (magnitúdó) és hőmérséklet (színindex) kapcsolata

törpecsillag is. A diagram többi része úgyszólván üres. Az egyes csillagtípusok tényleges gyakoriságáról akkor kaphatunk képet, ha egy meghatározott maximális távolságig az összes csillagot felrajzoljuk a diagramba, egyébként ugyanis a nagy fényerejű és ezért messzire látszó csillagokból viszonylag többet vennénk figyelembe a halvány csillagokkal szemben. Valójában például a vörös óriások ritkábbak, mint a fehér törpék, és magán a főágon a leg-halványabb csillagok, tehát a vörös törpék alkotják messze a legnépesebb csoportot.

Ismerve egy tetszőleges csillag spektrumát, a diagram alapján meghatározható abszolút vizuális magnitúdója és ebből luminozitása.

Az

$$M_{viz} = m_{viz} + 5 + 5 \lg \pi''$$

összefüggés alapján a csillag parallaxisa és így távolsága is meghatározható az  $m_{viz}$  vizuális látszó magnitúdót megmérve.

A csillagok fejlődésük folyamán vándorolnak a H—R diagramon. Az éppen keletkező csillag jobbra (1) jelenik meg, ez a gravitációs kontrakció szakasza, majd eléri a főágot (2), ahol hosszabb ideig „megtelepszik”. Amikor a csillag magjában elfogy a hidrogén, a csillag megindul az óriáság felé (3), majd ismét hosszabb időre megtelepszik az óriáságon (4). Ezután a csillag fejlődése során újból bal fele mozog a HRD-n (5). Az, hogy a csillag evolúciós útja a HRD-n milyen magasságban (abszolút magnitúdónál) zajlik, a csillag tömegétől függ.

A fősorozat és az óriáscsillagok ága azért rajzolódik ki, mert itt a csillagok nagyságrendekkel hosszabb időt töltenek el, mint az ágak között.

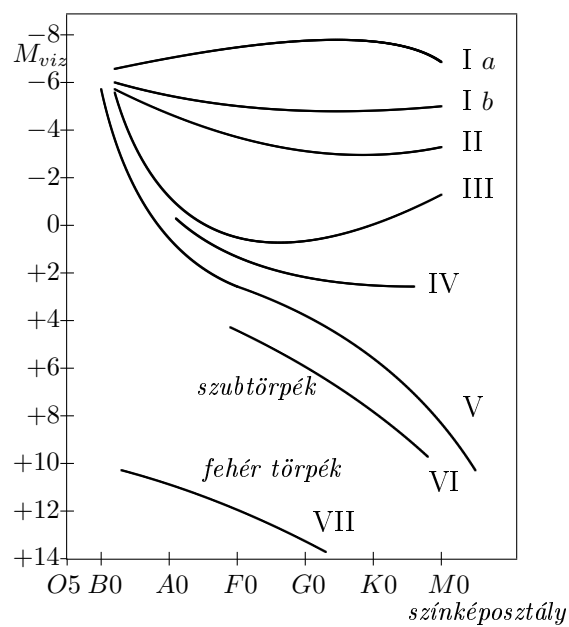
Mivel a csillagok jellemzésére nem elegendő pusztán egy paraméter (a színképtípus, vagy színindex), mert azonos paraméterérték esetén is több ág lehetséges, így szükséges még egy jellemző bevezetése, ami a csillag abszolút fényességéről ad információt.

Egy ilyen osztályozást végeztek el a Yerkes Observatórium kutatói W. W. Morgan<sup>8</sup>, P. C. Keenan<sup>9</sup> és E. Kellman<sup>10</sup>, akik a csillagokat abszolút fényességük szerint luminozitási osztályokba sorolták (Yerkes-rendszer, MKK-rendszer, vagy csak egyszerűen MK-rendszer). A megállapított osztályok jelölése és megnevezése a következő:

<sup>8</sup>Morgan, William Wilson (1906–1994) — amerikai csillagász.

<sup>9</sup>Keenan, Philip Childs (1908–) — amerikai csillagász.

<sup>10</sup>Kellman, Edith () — amerikai csillagásznő.



12.5. ábra. A luminozitási osztályok a Hertzsprung—Russell-diagramon

Ia-0	szuper-szuperóriások
Ia, Ib	szuperóriások
IIa, IIb	fényes óriások
IIIa, IIIb	óriások
IVa, IVb	szubóriások
Va, Vb	fősorozatbeli csillagok (törpék)
VI	szubtörpék
VII	fehér törpék

A csillagokat így színképtípusukkal együtt megadott luminozitási osztályuk jellemez egyértelműen. Napunk MK-típusa például G2V, ahol a római V-ös azt jelenti, hogy a Nap fősorozatbeli csillag.



# Irodalomjegyzék

- [1] *A TÁVCSŐ VILÁGA*. Szerk.: KULIN GYÖRGY—RÓKA Gedeon, 2. bővített kiadás, Gondolat Kiadó, Budapest, 1980.
- [2] BALÁZS Béla—MARIK Miklós: *A csillagászat elemei*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
- [3] BARTA György—BALÁZS Béla: *Kozmikus fizika*, Kézirat. Változatlan utánnyomás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.
- [4] CHIȘ, Gheorghe—PÁL Árpád: *Astronomie*. Curs de inițiere. Fascicula I. Astrometrie, mecanică cerească și cosmonautică. Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică, Cluj-Napoca, 1975.
- [5] CHIȘ, Gheorghe—PÁL Árpád: *Astronomie*. Curs de inițiere. Fascicula II. Astrofizică, astronomie stelară, cosmologie și cosmogonie. Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică, Cluj-Napoca, 1975.
- [6] CHIȘ, Gheorghe: *Csillagászat*. Tankönyv a XII. osztály számára. Fordította dr. Pál Árpád egyetemi tanár, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.
- [7] CSEREPES László—PETROVAY Kristóf: *Kozmikus fizika*, Egyetemi jegyzet fizikushallgatók számára (Kézirat), ELTE Természettudományi Kar, Budapest, 1993.
- [8] *CSILLAGÁSZAT*. Szerkesztette MARIK Miklós, Akadémia Kiadó, Budapest, 1989.
- [9] ÉRDI Bálint—TIHANYI László—SZÉCSÉNYI-NAGY Gábor: *Csillagászati feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

- [10] ÉRDI Bálint: *Égi mechanika*, Kézirat, 2. változatlan kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.
- [11] GÁBRIS Gyula—MARIK Miklós—SZABÓ József: *Csillagászati földrajz*, Harmadik kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- [12] GAZDA István—MARIK Miklós: *Csillagásztörténeti ABC*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.
- [13] KARTTUNEN, Hannu: *Fundamental Astronomy*. Berlin, Heidelberg, Paris, London, New York, 1994.
- [14] MARIK Miklós: *Fejezetek az elméleti asztrofizikából*, Kézirat. 2. változatlan utánnyomás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [15] MENZEL, Donald H.: *Csillagászat*. Gondolat, Budapest, 1980.
- [16] OPROIU, Tiberiu—PÁL Árpád—POP, Vasile—URECHE, Vasile: *Astronomie. Culegere de exerciții, probleme și programe de calcul*. Ediția a II-a, Universitatea din Cluj, Cluj, 1989.
- [17] PÁL Árpád—URECHE, Vasile: *Astronomie*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.
- [18] URECHE, Vasile: *Universul. Vol. I. Astronomie*. Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1982.
- [19] URECHE, Vasile: *Universul. Vol. II. Astrofizică*. Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1987.