N-test probléma

1. Feladat.

Készítsünk egy **N_test** *nevű (Matlab) függvényt, amivel meghatározható Naprendszerünk bolygóinak (és a Holdnak) a mozgása az n-test probléma mozgásegyenleteinek numerikus integrálásával. A kezdeti értékek ($T_0 = 0$-ra) a planets.txt állományban találhatók. A kapott, $[T_0, T_0 + e * 365,25]$ időintervallumra vonatkozó eredményeket mentsük ki egy állományba. Ekliptikai baricentrikus derékszögű koordinátákat használunk. A numerikus integrálást beépített integrátorral végezzük (pl. ode45).*

Az égitestek kódja a bemeneti állományban:

10 – Nap;

199 – Merkúr;

299 – Vénusz;

301 – Hold;

399 – Föld;

499 – Mars;

599 – Jupiter;

699 – Szaturnusz;

799 – Uránusz;

899 – Neptunusz;

999 – Pluto.

Bemenet:

e — *évek száma;*

kn — *bolygók kódjainak tömbje;*

all_nev — *az eredményeket tartalmazó állomány neve.*

Eredmények:

T — *az integrálási időpontok sorozatát tartalmazó tömb;*

X — *a kiválasztott bolygók köördinátáit és sebességkomponenseit tartalmazó tömb.*

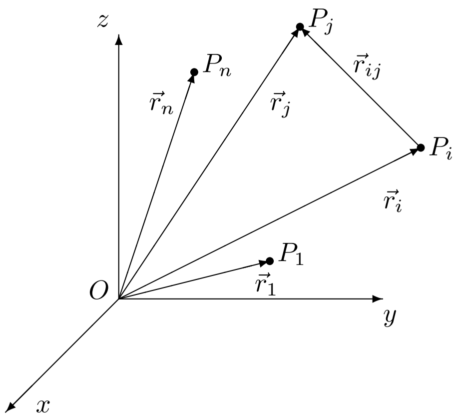
2. Feladat.

Készítsünk egy **Rajzolo** *nevű (Matlab) függvényt, amivel kirajzolható az előbbi föggvénnyel kiszámolt időintervallumra a bolygók Nap körüli mozgása (az ekliptika síkjára vetítve).*

Az n-test probléma mozgásegyenletei

Az égi mechanika alapfeladata általánosan mint az *n-test probléma* fogalmazható meg a következőképpen:

> *Határozzuk meg az n számú ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) pontszerű test mozgását, ha rájuk csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerők hatnak.*



1. ábra. Az n-test probléma

Jelölje az n-test problémában a tömegpontokat $P_1, P_2, \ldots, P_n$, tömegüket m_1, m_2, $\ldots$, m_n. Legyen P_i helyvektora egy $Oxyz$ inerciarendszerben $\vec{r}_i$, derékszögű koordinátái (x_i, y_i, z_i), $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (1. ábra). A P_i tömegpontra a P_j ($j \neq i, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$) által kifejtett gravitációs vonzóerő a Newton féle általános tömegvonzási törvény alapján

$$\overrightarrow{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \tag{1}$$

ahol $G = 6,674 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2} a Newton-féle gravitációs állandó[1],

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i, \tag{2}$$

$$r_{ij} = \|\vec{r}_{ij}\| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}, \tag{3}$$

és az erő irányát a P_i-ből a P_j-be mutató $\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$ egységvektor adja. Az égi mechanikában a Nemzetközi mértékrendszerben (SI) használt (kg, m, s) egységek helyett sajátos egységeket használnak, amelyek a következők: tömegegysége a *Nap tömege*, hosszúságegység a *csillagászati egység*, időegység pedig a *középnap*. Ebben a mértékrendszerben a tömegvonzási törvényben szereplő gravitációs állandót hagyományosan k^2-tel jelöljük, ahol a k *Gauss-féle gravitációs állandó* értéke:

$$k = 0,017\,202\,098\,95.$$

Így a tömegvonzási erő kifejezésére az

$$\overrightarrow{F}_{ij} = k^2 \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \qquad j \neq i,\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{4}$$

kifejezéseket használjuk.

A P_i-re ható $\overrightarrow{F}_i$ erő az $\overrightarrow{F}_{ij}$-k összegzésével adódik:

$$\overrightarrow{F}_i = k^2 \sum_{\substack{j=1,n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Az erőknek a derékszögű koordináta-rendszer tengelyeire eső vetületei:

$$F_{ix} = k^2 \sum_{\substack{j=1,n \\ j \neq i}} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \quad F_{iy} = k^2 \sum_{\substack{j=1,n \\ j \neq i}} m_i m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}, \quad F_{iz} = k^2 \sum_{\substack{j=1,n \\ j \neq i}} m_i m_j \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3}.$$

[1] A Seattle-i Washington Egyetem kutatói 2000-ben torziós ingával végzett nagypontosságú mérései szerint

$$G = (6,674\,215 \pm 0,000\,092) \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}.$$

Az n-test probléma Newton-féle mozgásegyenletei így

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = k^2 \sum_{\substack{j=1,n\\ j\neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}\vec{r}_{ij}, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

alakban írhatók, ahol az $\ddot{\vec{r}}_i$ gyorsulások az idő függvényeként változó $\vec{r}_i : [t_0, t_v] \to \mathbb{R}^3$ helyzetvektorok t idő szerinti másodrendű deriváltjai. A (5) közönséges másodrendű differenciálegyenletek az

$$\vec{r}_i\,(t_0) = \vec{r}_{i0}, \quad \dot{\vec{r}}_i\,(t_0) = \dot{\vec{r}}_{i0}, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

kezdeti feltételekkel egy kezdetiérték-feladatot alkotnak, amely megoldásai az

$$\vec{r}_{ij} = \overrightarrow{0}, \quad i,j=1,2,\ldots,n, \quad i\neq j$$

ütközéseken kívül egyértelműen meghatározottak.

1. Megjegyzés. *Az égi mechanikában szokásos*

$$V = -\frac{k^2}{2} \sum_{\substack{i,j=1,n\\ j\neq i}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = -k^2 \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{7}$$

potenciális energiát *bevezetve az n-test probléma* (5) *mozgásegyenletei az*

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = -grad_i V, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

alakban írhatók, amely egyenletek komponensekben az

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i\ddot{y}_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i\ddot{z}_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i}, \qquad i=1,2,\ldots,n, \tag{8}$$

egyenletekkel ekvivalensek.

Bizonyítás. Például az x koordináta esetén, ha $l \in \{1,2,\ldots,n\}$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x_l} &= \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{k^2}{2}\sum_{\substack{j=1,n\\ j\neq l}}\frac{m_l m_j}{r_{lj}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{k^2}{2}\sum_{\substack{i=1,n\\ i\neq l}}\frac{m_i m_l}{r_{il}}\right) = \\ &= \frac{k^2}{2}\left(\sum_{\substack{j=1,n\\ j\neq l}} m_l m_j \frac{x_j - x_l}{r_{lj}^3} + \sum_{\substack{i=1,n\\ i\neq l}} m_i m_l \frac{x_i - x_l}{r_{il}^3}\right) = k^2 \sum_{\substack{i=1,n\\ i\neq l}} m_l m_i \frac{x_i - x_l}{r_{li}^3} = F_{lx}, \end{aligned}$$

ami éppen a P_l-re ható erő x komponense. Az összegek deriválásánál azt tartottuk szem előtt, hogy csak azon tagok deriváltja nem zérus, amelyekben megjelenik x_l, $l=i$ vagy $l=j$ esetén.

Az n-test problémát leíró (8) egyenletek $3n$ számú közönséges másodrendű differenciálegyenletet jelentenek a meghatározandó $x_i\,(t)$, $y_i\,(t)$, $z_i\,(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, függvények számára, ahol a független változó a t idő, amelyre $0 \leq t_0 \leq t \leq t_v \leq \infty$. Így a (8) differenciálegyenlet-rendszer rendje $6n$.