1. Matematikai alapok

2021. február 24.

1. Állandók

			Matlab
π	$= 3.14159265358979324$		pi
Rad	$= \pi/180$		
Deg	$= 180/\pi$		
Arcs	$= 3600 * 180/\ \pi$		
AU	$= 149597870.0$	[km]	
c_light	$= 173.14$	[AU/d]	

2. Aritmetikai függvények

Föggvény neve	Jelölés	Matlab
Egészrész-függvény	$\mathrm{Int}(x) = [x]$	$\mathrm{floor}(x)$
Törtrész-függvény	$\mathrm{Frac}(x) = x - \mathrm{Int}(x)$	x-$\mathrm{floor}(x)$
Modulo-függvény	Modulo(x, y) $= y * \mathrm{Frac}(x/y)$	$\mathrm{mod}(x, y)$

Példák: $\mathrm{Int}(1) = 1$, $\mathrm{Int}(1.9) = 1$, $\mathrm{Int}(-2.2) = -3$;
$\mathrm{Frac}(1) = 0$, $\mathrm{Frac}(1.9) = 0.9$, $\mathrm{Frac}(-2.2) = 0.8$.

3. Mértékegységek szögekre

Jelöljük egy szög mértékét radiánban x_r-el, ívfokokban pedig x_d-vel. Ekkor

$$x\_r = x\_d * \pi/180;$$
$$x\_d = x\_r * 180/\pi.$$

Ha a szög mértékét ívfok, ívperc és ívmásodpercben $d\_dms = (xd, xm, xs)$ akarjuk , akor ügyelni kell a negatív szögek kezelésénél, amit az alábbi példákkal szemléltetünk:

x_d	xd	xm	xs
23.50000	23	30	00.0
-6.15278	-6	09	10.0
0.01667	0	1	0.0
-0.08334	0	-5	0.0

Az ívfok, ívperc, ívmásodperc formában megadott mértékeknél az előjel az első nemzérus tag mellé kerül, a fok és perc egész szám, míg a másodperc megadható tízedes jegyekkel is.

4. Forgatási mátrixok

Ha az $Oxyz$ derékszögű koordináta-rendszert elforgatva az Ox tengelye körül a φ mértékű szöggel direkt irányba (vagyis az Oy tengelyt az Oz felé forgatva), az $Ox_1y_1z_1$ rendszert kapjuk, (ahol az Ox tengely megegyezik az Ox_1 tengellyel), és egy pont helyzetvektora a két rendszerben

$$\vec{r} = (x, y, z)\,, \text{ illetve } \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)\,,$$

akkor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos\varphi & +\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & +\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Az Oy tengely körül forgatva a rendszer Oz tengelyét Ox felé, a megfelelő összefüggések:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin\varphi & 0 & +\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

míg az Oz tengely körül forgatva a rendszer Ox tengelyét Oy felé:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos\varphi & +\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & +\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Tehát a koordináta-rendszerek tengely körüli forgatásai az alábbi forgatási mátrixokkal jellemezhetők:

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos\varphi & +\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & +\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} +\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin\varphi & 0 & +\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} +\cos\varphi & +\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & +\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Szög mértékének meghatározása

- Ha ismert az $sr = \sin(r)$ érték, akkor az $r \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ radiánban megadott szö g mértéke egyértelműen meghatározható az $r =$arcin(sr) inverz függvény segítségével.
- Az $r \in [0, 2\pi)$ radiánban megadott szög mé rtékét viszont csak két szögfüggvényérték ismeretében tudjuk egyértelműen meghatározni. Példá ul, ha ismertek az $sr = \sin(r)$, illetve $cr = cos(r)$ értékek, akkor

$$r = \begin{cases} \arccos(cr), & \text{ha } sr \geq 0, \\ 2\pi - \arccos(cr), & \text{ha } sr < 0. \end{cases}$$

6. Gyakorlatok: Matlab függvények

Készítsük el a következő MATLAB függvényeket:

Név	Bemenet	Kimenet	Leírás
deg_dms	$deg \in [0, 360)$	(d, m, s) $d \in [0, 360) \cap \mathbb{N}$, $m \in [0, 59) \cap \mathbb{N}$, $s \in [0, 60) \cap \mathbb{R}$;	ívfokban megadott értéket alakít fok-perc-másodperc formába;
dms_deg	(d, m, s)	$\text{deg} \in \mathbb{R}$	ívfok-perc-másodperc formájú szögmértéket alakít ívfokba;
deg_rad	$deg \in [0, 360)$	$rad \in [0, 2\pi)$	radiánt alakít fokokká
rad_deg	$rad \in [0, 2\pi)$	$deg \in [0, 360)$	fokokatt alakít radiánná
Rot_x	$\varphi \in \mathbb{R}$ [rad]	$R_x(\varphi) \in M_3(\mathbb{R})$	forgatási mátrix az Ox tengely körül;
Rot_y	$\varphi \in \mathbb{R}$ [rad]	$R_y(\varphi) \in M_3(\mathbb{R})$	forgatási mátrix az Oy tengely körül;
Rot_z	$\varphi \in \mathbb{R}$ [rad]	$R_z(\varphi) \in M_3(\mathbb{R})$	forgatási mátrix az Oz tengely körül;
sc_rad	$sr, cr \in [-1, 1]$	$r \in [0, 2\pi)$	$sr = \sin(r), cr = \cos r, sr^2 + cr^2 = 1.$

6.1. Példák

1. **deg_dms**(123.12456789123) = (123.00, 7.00, 28.44);
2. **dms_deg**(11,22,33.4567) = 11.375960194444444;
3. **deg_rad**(345.678) = 6.033219251708959;
4. **rad_deg**(6.033219251708959) = 345.678;
5. **Rot_x**(π) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
6. **rad_deg**(**sc_rad**(-0.5,-sqrt(3)/2)) = 210.

6.2. Tesztkérdés minták

1. Az $\alpha = 123.12456789123$ fok szögmértéket fok, perc, másodperc alakban kifejezve mennyi a másodperc ötödik tizedesjegye? (**V**: 0)
2. Ha tudjuk, hogy $\cos\alpha = -0.5555555$ és $\sin\alpha < 0$, akkor a (fok, perc másodperc) alakban kifejezett α másodperceinek harmadik tizedesjegye: (**V**: 4)

   dms=deg_dms(360-acos(-0.5555555)*180/pi)

   dms = 236.00 15.00 3.65

   1000*dms = 365**4**.84