Gruppen und Ringe

	Assoziativ	Neut. Element	Inv. Element	Kommutativ
Halbgruppe	✓			
Monoid	✓	✓		
Gruppe	✓	✓	✓	
Abelsche Gr.	✓	✓	✓	✓

(R1) $(R, \oplus)$ ist abelsche Gruppe.

(R2) $(R, \odot)$ ist Halbgruppe.

(R3) $\forall a, b, c \in R : a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$
$\forall a, b, c \in R : (a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$

$(R, \odot)$ kommutatives Monoid $\rightarrow$ Kommutativer Ring mit Einselement
$(R \setminus \{0\}, \oplus)$ abelsche Gruppe $\rightarrow$ Körper

Komplexe Zahlen

$$z = x + iy,\ w = u + iv$$

$$z \pm w := (x \pm u) + i(y \pm v)$$
$$z \cdot w := (xu - yu) + i(xv + yu)$$
$$\frac{z}{w} := \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\frac{yu - xv}{u^2 + v^2} \text{ nur für } w \neq 0$$

Polarkoordinaten $\rightarrow$ Kartesische Koordinaten $(a, \phi) \rightarrow z = a\ cos\phi + ia\ sin\phi$

Kartesische Koordinaten $\rightarrow$ Polarkoordinaten $z \rightarrow (|z|,\ arg\ z)$ mit $arg\ z \begin{cases} arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y \geq 0 \\ -arccos\frac{x}{|z|} & \text{falls } y < 0 \end{cases}$

Vektorraumaxiome

1. $(V, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\vec{0}$
2. $\forall \lambda, \mu \in K \forall \vec{v} \in V : \lambda \odot (\mu \odot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \odot \vec{v}$
3. $\forall \vec{v} \in V : 1 \odot \vec{v} = \vec{v}$
4. $\forall \lambda, \mu \in K \forall \vec{v} \in V : (\lambda + \mu) \odot \vec{v} = (\lambda \odot \vec{v}) \oplus (\mu \odot \vec{v})$
5. $\forall \lambda \in K \forall \vec{v}, \vec{w} \in V : \lambda \odot (\vec{v} \oplus \vec{w}) = (\lambda \odot \vec{v}) \oplus (\lambda \odot \vec{w})$

Lineare Abbildungen

- Monomorphismus, wenn f injektiv
- Epimorphismus, wenn f surjektiv
- Isomorphismus, wenn f bijektiv
- Endomorphismus, wenn $V = W$
- Automorphismus, wenn $V = W$ und f bijektiv

$$dim\ V = dim(Ker\ f) + dim(Im\ f) = dim(Ker\ f) + rg\ f$$

Basiswechsel

$$A_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Wobei $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ die Darstellung von $\mathcal{B}$ in der neuen Basis $\mathcal{B}'$ ist.

Determinanten

Verhalten von Determinanten bei elementaren Zeilenumformungen:

1. $det\ A' = -det\ A$
2. $det\ A' = \lambda \cdot det\ A$
3. Die Determinante verändert sich nicht.

Kram mit Normen

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}\| &\geq 0 \\
\|\vec{v}\| &= 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \\
\|\lambda\vec{v}\| &= |\lambda| \cdot \|\vec{v}\| \\
\|\vec{u} + \vec{v}\| &\leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\| \\
\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) &= arccos\frac{\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}
\end{aligned}$$

Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

$$\tilde{u}_1 = \vec{v}_1 \qquad \text{und } \vec{u}_1 = \frac{\tilde{u}_1}{\|\tilde{u}_1\|}$$

$$\tilde{u}_2 = \vec{v}_2 - \langle\vec{v}_2, \vec{u}_1\rangle \cdot \vec{u}_1 \qquad \text{und } \vec{u}_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|}$$

$$\tilde{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle\vec{v}_k, \vec{u}_i\rangle \cdot \vec{u}_i \qquad \text{und } \vec{u}_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|}$$

Arten von Codes

$$\begin{aligned} C \text{ ist } k\text{-fehlererkennend} &\Leftrightarrow \forall \vec{v} \in C : B_k(\vec{c}) \cap C = \{\vec{c}\} \\ &\Leftrightarrow d(C) \geq k + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \text{ ist } k\text{-fehlerkorrigierend} &\Leftrightarrow \forall \vec{c}, \vec{c}' \in C : (\vec{c} \neq \vec{c}' \Rightarrow B_k(\vec{c}) \cap B_k(\vec{c}') = \emptyset) \\ &\Leftrightarrow d(C) \geq 2k + 1 \end{aligned}$$