Contents

Contents i

1 Tables & Co 1
1.1 Betrag . . . 1
1.2 Potenzen und Wurzeln . . . 1
1.2.1 Potenzgesetzte und Wurzelgesetze . . . 1
1.3 Logarithmensätze . . . 1

2 Ordinary Differential Equations 1
2.1 Stammfunktionen . . . 1

1 Tables & Co

E 1.1 (Ableitungen und Stammfunktionen)

$f(x) =$	$f'(x) =$	$F(x) =$
c	0	$c \cdot x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\frac{1}{x^n}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$x \cdot (\ln\lvert x\rvert - 1)$
$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x \cdot \ln\lvert a\rvert}$	$x \cdot (\log_a\lvert x\rvert - \frac{1}{ln\lvert a\rvert})$
a^x	$\ln a \cdot a^x$	$a^x \cdot \frac{1}{\lvert a\rvert}$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\sin^2 x$	$2 \sin x \cos x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$
$\cos^2 x$	$-2 \sin x \cos x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$
$\tan^2 x$	$2 \cdot \frac{\tan x}{\cos^2 x}$	$t \tan x - x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \cdot \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \cdot \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$\ln(\cosh x)$

E 1.2 (Wichtige Reihen & Limits)

- *geometrische Reihe:* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$ *ist konvergent für* $|q| < 1$, *da* $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$
- *harmonische Reihe:* $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ *ist divergent*
- *alternierende harmonische Reihe:* $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ *ist konvergent, aber nicht absolut konvergent*
- *Leibnizreihen haben die Form* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ *und sind konvergent*
- $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k^j}$ *ist konvergent für* $j \geq 2$, *keine Aussagen über* $1 < j < 2$
- *Euler-Mascheroni Konstante* $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$

E 1.3 (Infinite Series)

$\sum_{n=0}^{\infty} (k+1) \cdot q^n + \frac{1}{(1-q)^2}$, $\lvert q\rvert < 1$	$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n + \frac{a}{1-q}$, $\lvert q\rvert < 1$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi/4$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \pi^2/12$

E 1.4 (Other Important Stuff)

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$
- $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
- $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
- $\sin^2 x + cos^2 x = 1$
- $\sin x + y = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
- $\cos x + y = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
- $\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$
- $\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$
- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
- $\tan^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$
- $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ $\quad$ $\sin(\arctan x) = x/\sqrt{1 + x^2}$
- $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ $\quad$ $\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{1 + x^2}$
- $\tan(\arcsin x) = x/\sqrt{1 - x^2}$ $\quad$ $\tan(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}/x$

E 1.5

Radian	*Gradian*	sin	cos	tan
0 deg	0	0	1	0
30 deg	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45 deg	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60 deg	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90 deg	$\pi/2$	1	0	∞
120 deg	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
135 deg	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150 deg	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
180 deg	π	0	-1	0

1.1 Betrag

$|ab| = |a||b|$
$|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
$|a + b| \leq |a| + |b|$

1.2 Potenzen und Wurzeln

Definition: $x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow (x^n = a \textit{ und } x \geq 0)$
Es folgt: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, a \geq 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = (\frac{1}{a})^n$
$a^{\frac{1}{a}} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$a^x = e^{x \cdot \ln a}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a^{-m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

1.2.1 Potenzgesetzte und Wurzelgesetze

$a^m a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a^{km}}$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$a^n b^n = (ab)^n$ $\qquad$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

1.3 Logarithmensätze

$\log(uv) = \log u + \log v$ $\quad$ $\log(\frac{u}{v}) = \log u - \log v$

$\log(u^r) = r \cdot \log u$ $\qquad$ $\log(\frac{1}{v}) = -\log v$

2 Ordinary Differential Equations

2.1 Stammfunktionen

D 2.1 (Stammfunktion einer Funktion) *Sei* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *stetig, also* $f \in C^0(]a, b[)$. *Eine Funktion* $F \in C^1(]a, b[)$ *heißt Stammfunktion von* f *gdw.* $\forall x \in]a, b[: F'(x) = f(x)$ *gilt.*

R 2.2 *Ist* f *integrierbar, so muss nicht zwingenderweise eine stetige Stammfunktion existieren.*

T 2.3 (Konstante) *Seien* $F_1, F_2 :]a,b[\to \mathbb{R}$ *Stammfunktionen von* $f \in C^0(]a,b[)$. *Dann gilt* $F_1 - F_2 = c \in \mathbb{R}$.

C 2.4 *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall, sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, und seien* $a, b \in I$ *mit* $a < b$ *und* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dann gilt folgendes:

Sind $a + c, b + c \in I$, *gilt*

1. $\int_a^b f(t+c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$

Sind $ca, cb \in I$, *gilt*

2. $\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x)dx$

Ist f *stetig differenzierbar und* $f(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$, *gilt*

3. $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \log(|f(b)|) - \log(|f(a)|)$

T 2.5 (Local existence of unique sol) *Suppose* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *diffbar,* $x_0 \in \mathbb{R}$, $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}$. *Then the ODE* $F(x, y, y') = 0$ *has a unique sol* f *on "largest' open interval* I *containing* x_0 *st* $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y_0'$.

D 2.6 (Linear differential equations) *Let* $I \subset \mathbb{R}$ *be an open interval and* $k \geq 1$. *A* ***homogenous*** *linear ODE is defined as*

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0$$

, where a_i *are compex functions on* I. *A* ***inhomogenous*** *linear ODE is defined as*

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + ... + a_1y' + a_0y = b$$

, where b *is a compex funtion on* I.

T 2.7 *Consider a linear ODE. The following holds:*

- *Set* S *of* k*-diffbar sols to the ODE is a subspace of all complex functions defined on* I.
- $\dim(S) = k$*and* $\forall x_0 \in I \ \forall (y_0, ..., y_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ *exists a* ***unique*** $f \in S$ *st* $f(x_0) = y_0$, ..., $f^{(k-1)} = y_{k-1}$.
- *If* $b \in C^0(I)$ *is the inhom part of a ODE, then there exists a sol* f_0 *and* S_b *is the set of solutions which have the form* $f + f_0$, $f \in S$.
- $\forall x_0 \in I \ \forall (y_0, ..., y_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ *there a* ***unique*** *sol* $f \in S_b$ *st* $f(x_0) = y_0$, ..., $f^{(k-1)} = y_{k-1}$.