Zadání pro Ostatní aktivity I

Skupina A

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 2x_2 + \quad a x_3 + \ 3x_4 &= 4 \\ x_1 + (a-1)x_2 + (a+1)x_3 + \ 5x_4 &= 4 \\ 2x_3 + \ \ x_4 &= 0 \\ 2x_3 + a^2 x_4 &= a^2 - 3a. \end{aligned}$$

   a) Zjistěte, pro které hodnoty parametru a má soustava rovnic jediné řešení; žádné řešení; nekonečně mnoho řešení.

   b) Za a dosaďte tu hodnotu, pro kterou existuje nekonečně mnoho řešení (kdyby takových a bylo víc, vyberte si jedno z nich), a řešení pak najděte.

   c) Napište nějaké konkrétní číselné řešení soustavy z části b) a ověřte, že soustavu opravdu splňuje.

   d) Vypočítejte determinant původní matice soustavy a zjistěte, pro které hodnoty parametru a je nenulový. Porovnejte s výsledky části a). (Determinant můžete počítat rozvojem, ale lepší je asi využít eliminaci.)

2. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} (a-1)x_1 \qquad\qquad + 2x_4 &= 0 \\ x_2 \qquad + \ \ x_4 &= 0 \\ (a+1)x_1 \qquad - 2x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -3x_1 + a x_2 \qquad\qquad &= 0. \end{aligned}$$

   a) Zcela obecně: Může se stát, že soustava s nulovou pravou stranou nemá žádné řešení? Odpovězte ano/ne a odpověď zdůvodněte.

   b) Rozvojem podle vhodného řádku nebo sloupce vypočítejte determinant matice soustavy.

   c) Na základě výsledku části b) zjistěte, pro které hodnoty parametru a má soustava rovnic jediné řešení; žádné řešení; nekonečně mnoho řešení.

   d) Za a dosaďte tu hodnotu, pro kterou existuje nekonečně mnoho řešení (kdyby takových a bylo víc, vyberte si jedno z nich), a řešení pak najděte.

Skupina B

1. Jsou dány matice a vektory

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

U každého z následujících součinů rozhodněte, jestli jej lze vypočítat. Pokud ano, určete rozměry výsledné matice. U částí g) a h) součin i vypočítejte (pokud to jde).

a) AB b) BA c) AB^{T} d) $B\overline{x}$
e) $B\underline{y}$ f) $\underline{y}B$ g) $\overline{x}\underline{y}$ h) $\overline{x}^{\mathrm{T}}\overline{x}$

2. Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & b \\ -7 & a & 15 \end{pmatrix}$$

a) Uveďte příklad nenulových hodnot a, b, pro které k matici A neexistuje inverze. Řešte pomocí determinantu!

b) Určete hodnoty a a b, aby platilo $A^{-1} = B$, ale nesnažte se přitom žádnou inverzi počítat. Využijte vlastnosti, které navzájem inverzní matice musí mít.

c) Použijte matici A s hodnotami a, b zjištěnými v části b) a pomocí A^{-1} najděte řešení soustavy $A\overline{x} = \overline{b}$, kde $\overline{b} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

3. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Vypočtěte matici A^2 (s obecnou hodnotou a).

b) Vypočtěte matici A^{-1} (opět s obecnou hodnotou a).

c) Vypočtěte matice $\left(A^2\right)^{-1}$ a $\left(A^{-1}\right)^2$, výsledky porovnejte. Je to náhoda, nebo zákonitost?

4. Zjednodušte následující výrazy s maticemi. Všechny uvedené matice jsou regulární a stejných rozměrů, I je jednotková matice.

a) $ABB^{-1}CA^{-1}$

b) $C^{-1}A^{-1}AC$

c) $(I - A)(I + A^{-1})$

5. Vyjádřete matici X z maticové rovnice, jestliže matice A, B, C jsou regulární a všechny stejných rozměrů. Zjednodušte, co lze zjednodušit. Pro kontrolu si pak můžete (ale nemusíte) výpočet zkusit s konkrétními maticemi 2×2 – vypočtěte X podle vašeho vyjádření, dosaďte do rovnice a zkontrolujte, je-li splněna.

a) $AXB = C$

b) $AX + B = A$

c) $A^{-1}XB = BA^{-1}B$

Skupina C

1. a) Která dvojice vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^2$? (Nic složitého nepočítejte, jen se podívejte a rozhodněte.)

   - $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
   - $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix}$

   b) Pracujte s dvojicí vektorů z části a), která bázi tvoří. Tuto bázi označme $\underline{v}$.
   - Vektory načrtněte (snažte se pěkně, v měřítku) a spolu s nimi načrtněte vektor $\overline{w}$, který má v bázi $\underline{v}$ souřadnice $\overline{w}_v = (1, 1/2)^{\mathrm{T}}$. Vektor $\overline{w}$ pouze načrtněte, zatím nic nepočítejte!
   - Vypočítejte souřadnice vektoru $\overline{w}$ ve standardní bázi a porovnejte s obrázkem.
   - Znovu načrtněte obrázek s bázovými vektory a spolu s nimi ještě vektor $\overline{u} = (-6, 1)^{\mathrm{T}}$ (uvedené souřadnice jsou ve standardní bázi). Graficky odhadněte, jaké jsou souřadnice vektoru $\overline{u}$ v bázi $\underline{v}$ (jsou „pěkné“).
   - Určete souřadnice vektoru $\overline{u}$ v bázi $\underline{v}$ výpočtem a výsledek porovnejte s odhadem z obrázku.

   c) Pracujte s dvojicí vektorů z části a), které bázi netvoří. Napište tři různé vektory, které leží v prostoru generovaném vektory $\overline{v}_1, \overline{v}_2$, a jeden vektor, který v tomto prostoru neleží.

2. a) Pro které hodnoty a tvoří dané vektory bázi $\mathbb{R}^3$? Rozhodněte pomocí determinantu.

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

   b) Dosaďte za a tu hodnotu, pro kterou vektory z části a) bázi $\mathbb{R}^3$ netvoří. (Kdyby takových hodnot existovalo víc, zvolte nejmenší z nich.)
   - Najděte bázi a dimenzi prostoru $V = \langle\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}\rangle$. (Není nutno nic složitého počítat, když už víte, že báze $\mathbb{R}^3$ to není.)
   - Rozhodněte, který z vektorů $\overline{u}_1 = (-1, 5, 4)^{\mathrm{T}}, \overline{u}_2 = (-1, 5, 6)^{\mathrm{T}}$ leží ve V. (Zkuste si rozmyslet, jestli by výpočet nešel dělat pro oba vektory současně.)

3. Jsou dány vektory

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Části a) a b) lze řešit současně.

   a) Ověřte, že zadané vektory tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

   b) Najděte matici inverzní k matici, jejíž sloupce tvoří zadané vektory.

   c) Najděte souřadnice vektoru $\overline{u} = (0, 5, 2)^{\mathrm{T}}$ v bázi tvořené zadanými vektory. Použijte k tomu inverzní matici nalezenou v části b).

   d) Napište alespoň jeden vektor $\overline{w}$, který leží v $\langle\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}\rangle$, ale přitom neleží v $\langle\{\overline{v}_1\}\rangle$ ani v $\langle\{\overline{v}_2\}\rangle$. Zapište, jak jste vektor $\overline{w}$ sestavili, ne jenom výsledek!

4. Jsou dány dvě báze $\mathbb{R}^3$: $\underline{e} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ a $\underline{f} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3)$, kde

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Najděte obě matice přechodu mezi těmito bázemi ($\underline{f} = \underline{e}T$, $\underline{e} = \underline{f}S$).
Poznámka: Jestliže jste už vyřešili předchozí příklad v této skupině s inverzní maticí (všimněte si, že první báze je stejná), nedala by se pro hledání matice T tato inverze nějak využít?
Poznámka: Vzpomeňte/najděte si, co tvoří sloupce matice přechodu. Prohlédněte si první dva vektory z $\underline{f}$ ve vztahu k bázi $\underline{e}$ a prohlédněte si první dva sloupce matice T – najděte souvislost.

b) Má-li vektor $\overline{u}$ v bázi $\underline{e}$ souřadnice $(1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, jaké jsou jeho souřadnice v bázi $\underline{f}$? Jaké jsou jeho souřadnice ve standardní bázi? Pro kontrolu pak také nalezené souřadnice v bázi $\underline{f}$ přepočítejte do standardní báze a výsledky porovnejte.

5. Najděte báze a dimenze prostorů $L_1 = \langle\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\rangle$, $L_2 = \langle\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}\rangle$. Pak najděte i báze a dimenze prostorů $L_1 + L_2$ a $L_1 \cap L_2$ (při těchto výpočtech už pracujte pouze s vybranými bázemi L_1, L_2, ne se všemi zadanými vektory).

$$\overline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

6. a) Rozhodněte, zda polynomy $p_1(x) = x^2 + 2$, $p_2(x) = x + 1$, $p_3(x) = 2x^2 - x$ tvoří bázi prostoru všech polynomů stupně nanejvýš 2.

b) Pokud zadané polynomy bázi tvoří, najděte souřadnice polynomu $q(x) = 3x^2 - 3x$ v této bázi. Pokud bázi netvoří, rozhodněte, zda q leží v podprostoru generovaném p_1, p_2, p_3.

7. O následujících množinách rozhodněte, jestli tvoří vektorový prostor.

Návod: (ale radši ho neukazujte žádným ortodoxním matematikům…)

- Napište si libovolný konkrétní prvek v zadané množiny a ověřte, jestli i nějaký jeho α-násobek leží v této množině. Pokud ano, záleželo na volbě v a α, nebo to vyjde i pro jakékoli jiné hodnoty?
- Zvolte si dva prvky množiny a ověřte, jestli i jejich součet leží v množině. Pokud ano, záleželo na konkrétní volbě, nebo to vyjde i pro jakékoli jiné?

a) $V = \{(x, y)^{\mathrm{T}}; 2x + 3y = 0\}$
b) $V = \{(x, y)^{\mathrm{T}}; 2x + 3y = 5\}$
c) $V = \{f; f \text{ je funkce spojitá na } \langle -1, 1\rangle, f(0) = 0\}$ (neboli její graf prochází počátkem)
d) $V = \{f; f \text{ je funkce spojitá na } \langle -1, 1\rangle, f(0) = 2\}$

Skupina D

1. Je dáno lineární zobrazení $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$g(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + 2u_3 \\ u_1 + u_2 + 4u_3 \\ u_2 + u_3 \end{pmatrix}$$

   a) Najděte matici tohoto zobrazení.

   b) Vypočtěte hodnotu $g(u)$ pro vektor $\overline{u} = (-2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

   c) Leží vektor $\overline{v} = (3, 1, -1)^{\mathrm{T}}$ v jádru zobrazení g? Jen ověřte, jestli má tu správnou vlastnost, nehledejte bázi jádra!

   d) Jestliže vektor $\overline{v}$ z části c) v jádru ležel, uveďte libovolný příklad vektoru z $\mathbb{R}^3$, který v jádru neleží. A naopak, pokud tam neležel, uveďte příklad vektoru z $\mathbb{R}^3$, který v jádru je.

   e) Leží vektor $\overline{w} = (1, 3, 1)^{\mathrm{T}}$ v oboru hodnot zobrazení g? Nehledejte bázi oboru hodnot, ale rozhodněte podle toho, že najdete (pokud existují) všechny vektory $\overline{u}$, pro které platí $g(\overline{u}) = \overline{w}$.

   f) Na základě výpočtu z části d) rozhodněte, jestli každý vektor z $\mathbb{R}^3$ leží v oboru hodnot, nebo jestli by se našel nějaký, který tam neleží.

2. Jsou dána tři zobrazení z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$:

$$g_1(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + 2u_3 \\ -2u_1 + 2u_2 + 5u_3 \end{pmatrix}, \quad g_2(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + u_3^2 \\ -u_1^2 + u_2^2 + u_3^5 \end{pmatrix}, \quad g_3(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + 2u_3 \\ -2u_1 + 2u_2 - 4u_3 \end{pmatrix},$$

   a) Které/á z nich je/jsou lineární? U toho/těch, které/á lineární není/nejsou, to zdůvodněte – která vlastnost lineárního zobrazení není splněna? Ukažte to na příkladu (co nejjednodušším) s konkrétními čísly.

   b) Dál pracujte se zobrazením, které lineární je (pokud je jich víc, proveďte výpočty pro všechna).
   - Najděte bázi a dimenzi jádra.
   - Najděte bázi a dimenzi oboru hodnot.
   - Zkontrolujte (jen pohledem), že součtem dimenzí ker a Im je dimenze $\mathbb{R}^3$.
   - Pro odvážnější studenty: Rozhodněte, zda zobrazení má tu vlastnost, že pro každé $\overline{w} \in \mathbb{R}^2$ najdu $\overline{u} \in \mathbb{R}^3$ takové, že $g(\overline{u}) = \overline{w}$ (odborně se takové zobrazení nazývá surjektivní). Řešení tohoto problému úzce souvisí s dimenzí $\operatorname{Im} g$, není potřeba nic dalšího počítat.

3. Jsou dána tři zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$:

$$g_1(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - 2u_2 \\ u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \end{pmatrix}, \quad g_2(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - 2u_2 \\ 3u_1 - 6u_2 \\ -u_1 + 2u_2 \end{pmatrix}, \quad g_3(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - 2 \\ 1 + u_2 \\ -u_1 + 2u_2 \end{pmatrix},$$

a) Které/á z nich je/jsou lineární? U toho/těch, které/á lineární není/nejsou, to zdůvodněte – která vlastnost lineárního zobrazení není splněna? Ukažte to na příkladu (co nejjednodušším) s konkrétními čísly.

b) Dál pracujte se zobrazením, které lineární je (pokud je jich víc, proveďte výpočty pro všechna).
- Najděte bázi a dimenzi jádra.
- Najděte bázi a dimenzi oboru hodnot.
- Zkontrolujte (jen pohledem), že součtem dimenzí ker a Im je dimenze $\mathbb{R}^2$.
- Pro odvážnější studenty: Rozhodněte, zda je zobrazení prosté (injektivní) neboli má tu vlastnost, že rovnost $g(\overline{u}) = g(\overline{v})$ je možná jedině pro $\overline{u} = \overline{v}$. Řešení tohoto problému úzce souvisí s $\ker g$, není potřeba nic dalšího počítat (ale lze řešit i výpočtem, asi se to z něj lépe uvidí).

4. Je dáno lineární zobrazení $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$g(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + 2u_3 \\ -2u_1 + 2u_2 + 5u_3 \end{pmatrix}$$

a) Najděte matici tohoto zobrazení.

b) Vypočtěte hodnotu g pro vektory $\overline{u} = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ a $\overline{v} = (2, 2, 0)^{\mathrm{T}}$.

c) Najděte matici zobrazení, jestliže v $\mathbb{R}^2$ místo standardní báze použijeme bázi $\overline{f}_1 = (2, -1)^T, \overline{f}_2 = (1, 2)^{\mathrm{T}}$.

d) Znovu vypočtěte hodnotu g pro vektory z části b), ale tentokrát s použitím nové báze $\mathbb{R}^2$, tzn. pomocí matice nalezené v c).

e) Přepočítejte výsledek d) do standardní báze – přesvědčte se, že vyšel stejně jako v b).

Skupina E

1. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru $V \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaného vektory $\overline{a}_1 = (2, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \overline{a}_2 = (-4, 3, 4, -1)^{\mathrm{T}}, \overline{a}_3 = (4, 0, -13, -2)^{\mathrm{T}}$.

   Průběžně kontrolujte, že postupně získávané vektory $\overline{b}_i$ jsou navzájem kolmé (kontrolní výpočet zapište).

2. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru $V \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaného vektory $(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (2, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, (0, 1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$.

   Průběžně kontrolujte, že postupně získávané vektory $\overline{b}_i$ jsou navzájem kolmé (kontrolní výpočet zapište).

   Jestliže výsledek vyšel nějak „divně“, čím je to způsobeno? Jaká je dimenze V? Kolik vektorů bude tvořit jeho bázi?

3. Jakýmkoli způsobem (nemusí to být Gram-Schmidtův ortogonalizační proces) najděte ortogonální bázi $\mathbb{R}^3$, která obsahuje vektor $\overline{u} = (1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$. Kolik takových bází existuje?