Zadání pro Ostatní aktivity I

Skupina A

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 2x_2 + \quad ax_3 + \ 3x_4 &= 4 \\ x_1 + (a-1)x_2 + (a+1)x_3 + \ 5x_4 &= 4 \\ 2x_3 + \ x_4 &= 0 \\ 2x_3 + a^2 x_4 &= a^2 - 3a. \end{aligned}$$

a) Zjistěte, pro které hodnoty parametru a má soustava rovnic jediné řešení; žádné řešení; nekonečně mnoho řešení.

b) Za a dosaďte tu hodnotu, pro kterou existuje nekonečně mnoho řešení (kdyby takových a bylo víc, vyberte si jedno z nich), a řešení pak najděte.

c) Napište nějaké konkrétní číselné řešení soustavy z části b) a ověřte, že soustavu opravdu splňuje.

d) Vypočítejte determinant původní matice soustavy a zjistěte, pro které hodnoty parametru a je nenulový. Porovnejte s výsledky části a). (Determinant můžete počítat rozvojem, ale lepší je asi využít eliminaci.)

Řešení: a) $a = \pm 1$ žádné; $a = 3$ nekonečně mnoho; jinak jediné

b) $a = 3$: $x = (4 - 2t, t, 0, 0)$

d) $|A| = 2(a-3)(a^2-1)$

2. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} (a-1)x_1 \qquad\qquad + 2x_4 &= 0 \\ x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ (a+1)x_1 \qquad - 2x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -3x_1 + ax_2 \qquad\qquad &= 0. \end{aligned}$$

a) Zcela obecně: Může se stát, že soustava s nulovou pravou stranou nemá žádné řešení? Odpovězte ano/ne a odpověď zdůvodněte.

b) Rozvojem podle vhodného řádku nebo sloupce vypočítejte determinant matice soustavy.

c) Na základě výsledku části b) zjistěte, pro které hodnoty parametru a má soustava rovnic jediné řešení; žádné řešení; nekonečně mnoho řešení.

d) Za a dosaďte tu hodnotu, pro kterou existuje nekonečně mnoho řešení (kdyby takových a bylo víc, vyberte si jedno z nich), a řešení pak najděte.

Řešení: b) $|A| = 2(a-3)(a+2)$, c) $a = 3, a = -2$ nekonečně mnoho; jinak jediné

d) Pro $a = 3$: $x = (-t, -t, t/2, t)$, pro $a = -2$: $x = (2t/3, -t, 13t/6, t)$

Skupina B

1. Jsou dány matice a vektory

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

U každého z následujících součinů rozhodněte, jestli jej lze vypočítat. Pokud ano, určete rozměry výsledné matice. U částí g) a h) součin i vypočítejte (pokud to jde).

a) AB	b) BA	c) AB^{T}	d) $B\overline{x}$
e) $B\underline{y}$	f) $\underline{y}B$	g) $\overline{x}\underline{y}$	h) $\overline{x}^{\mathrm{T}}\overline{x}$

Řešení: a) nelze; b) 3×2; c) 2×3; d) 3×1 ; e) nelze; f) 1×2;

g) 2×3, $\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \end{pmatrix}$; h) 1×1, $(x_1^2 + x_2^2)$

2. Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & b \\ -7 & a & 15 \end{pmatrix}$$

a) Uveďte příklad nenulových hodnot a, b, pro které k matici A neexistuje inverze. Řešte pomocí determinantu!

b) Určete hodnoty a a b, aby platilo $A^{-1} = B$, ale nesnažte se přitom žádnou inverzi počítat. Využijte vlastnosti, které navzájem inverzní matice musí mít.

c) Použijte matici A s hodnotami a, b zjištěnými v části b) a pomocí A^{-1} najděte řešení soustavy $A\overline{x} = \overline{b}$, kde $\overline{b} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

Řešení: a) $3a - 7b = 0$, tj. např. $a = 7, b = 3$ apod.; b) $a = 5$, $b = 2$; c) $\overline{x} = (-5, 2, 13)^{\mathrm{T}}$

3. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Vypočtěte matici A^2 (s obecnou hodnotou a).

b) Vypočtěte matici A^{-1} (opět s obecnou hodnotou a).

c) Vypočtěte matice $\left(A^2\right)^{-1}$ a $\left(A^{-1}\right)^2$, výsledky porovnejte. Je to náhoda, nebo zákonitost?

Řešení:

$$a) \;\; A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) \;\; A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c) \;\; (A^{-1})^2 = (A^2)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3a \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Rovnost $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ platí pro regulární matice univerzálně.

4. Zjednodušte následující výrazy s maticemi. Všechny uvedené matice jsou regulární a stejných rozměrů, I je jednotková matice.

   a) $ABB^{-1}CA^{-1}$

   b) $C^{-1}A^{-1}AC$

   c) $(I - A)(I + A^{-1})$

   Řešení: a) ACA^{-1}; b) I; c) $A^{-1} - A$

5. Vyjádřete matici X z maticové rovnice, jestliže matice A, B, C jsou regulární a všechny stejných rozměrů. Zjednodušte, co lze zjednodušit. Pro kontrolu si pak můžete (ale nemusíte) výpočet zkusit s konkrétními maticemi 2×2 – vypočtěte X podle vašeho vyjádření, dosaďte do rovnice a zkontrolujte, je-li splněna.

   a) $AXB = C$

   b) $AX + B = A$

   c) $A^{-1}XB = BA^{-1}B$

   Řešení: a) $X = A^{-1}CB^{-1}$; b) $X = I - A^{-1}B$; c) $X = ABA^{-1}$

Skupina C

1. a) Která dvojice vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^2$? (Nic složitého nepočítejte, jen se podívejte a rozhodněte.)

   - $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
   - $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix}$

   b) Pracujte s dvojicí vektorů z části a), která bázi tvoří. Tuto bázi označme $\underline{v}$.
   - Vektory načrtněte (snažte se pěkně, v měřítku) a spolu s nimi načrtněte vektor $\overline{w}$, který má v bázi $\underline{v}$ souřadnice $\overline{w}_v = (1, 1/2)^{\mathrm{T}}$. Vektor $\overline{w}$ pouze načrtněte, zatím nic nepočítejte!
   - Vypočítejte souřadnice vektoru $\overline{w}$ ve standardní bázi a porovnejte s obrázkem.
   - Znovu načrtněte obrázek s bázovými vektory a spolu s nimi ještě vektor $\overline{u} = (-6, 1)^{\mathrm{T}}$ (uvedené souřadnice jsou ve standardní bázi). Graficky odhadněte, jaké jsou souřadnice vektoru $\overline{u}$ v bázi $\underline{v}$ (jsou „pěkné“).
   - Určete souřadnice vektoru $\overline{u}$ v bázi $\underline{v}$ výpočtem a výsledek porovnejte s odhadem z obrázku.

   c) Pracujte s dvojicí vektorů z části a), které bázi netvoří. Napište tři různé vektory, které leží v prostoru generovaném vektory $\overline{v}_1, \overline{v}_2$, a jeden vektor, který v tomto prostoru neleží.

   Řešení: $\overline{w} = (0, 4)^{\mathrm{T}}$; $\overline{u}_v = (1, -1)^{\mathrm{T}}$.

2. a) Pro které hodnoty a tvoří dané vektory bázi $\mathbb{R}^3$? Rozhodněte pomocí determinantu.

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

   b) Dosaďte za a tu hodnotu, pro kterou vektory z části a) bázi $\mathbb{R}^3$ netvoří. (Kdyby takových hodnot existovalo víc, zvolte nejmenší z nich.)
   - Najděte bázi a dimenzi prostoru $V = \langle\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}\rangle$. (Není nutno nic složitého počítat, když už víte, že báze $\mathbb{R}^3$ to není.)
   - Rozhodněte, který z vektorů $\overline{u}_1 = (-1, 5, 4)^{\mathrm{T}}, \overline{u}_2 = (-1, 5, 6)^{\mathrm{T}}$ leží ve V. (Zkuste si rozmyslet, jestli by výpočet nešel dělat pro oba vektory současně.)

   Řešení: a) Báze to není pro $a = 3$, jinak ano. c) $\overline{u}_1 \in V, \overline{u}_2 \notin V$

3. Jsou dány vektory

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Části a) a b) lze řešit současně.

   a) Ověřte, že zadané vektory tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

   b) Najděte matici inverzní k matici, jejíž sloupce tvoří zadané vektory.

   c) Najděte souřadnice vektoru $\overline{u} = (0, 5, 2)^{\mathrm{T}}$ v bázi tvořené zadanými vektory. Použijte k tomu inverzní matici nalezenou v části b).

   d) Napište alespoň jeden vektor $\overline{w}$, který leží v $\langle\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}\rangle$, ale přitom neleží v $\langle\{\overline{v}_1\}\rangle$ ani v $\langle\{\overline{v}_2\}\rangle$. Zapište, jak jste vektor $\overline{w}$ sestavili, ne jenom výsledek!

   Řešení:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 8 \\ -4 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{u}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Jsou dány dvě báze $\mathbb{R}^3$: $\underline{e} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ a $\underline{f} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3)$, kde

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Najděte obě matice přechodu mezi těmito bázemi ($\underline{f} = \underline{e}T$, $\underline{e} = \underline{f}S$).
Poznámka: Jestliže jste už vyřešili předchozí příklad v této skupině s inverzní maticí (všimněte si, že první báze je stejná), nedala by se pro hledání matice T tato inverze nějak využít?
Poznámka: Vzpomeňte/najděte si, co tvoří sloupce matice přechodu. Prohlédněte si první dva vektory z $\underline{f}$ ve vztahu k bázi $\underline{e}$ a prohlédněte si první dva sloupce matice T – najděte souvislost.

b) Má-li vektor $\overline{u}$ v bázi $\underline{e}$ souřadnice $(1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, jaké jsou jeho souřadnice v bázi $\underline{f}$? Jaké jsou jeho souřadnice ve standardní bázi? Pro kontrolu pak také nalezené souřadnice v bázi $\underline{f}$ přepočítejte do standardní báze a výsledky porovnejte.

Řešení:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{u}_f = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{u}_{stand} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. Najděte báze a dimenze prostorů $L_1 = \langle\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\rangle$, $L_2 = \langle\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}\rangle$. Pak najděte i báze a dimenze prostorů $L_1 + L_2$ a $L_1 \cap L_2$ (při těchto výpočtech už pracujte pouze s vybranými bázemi L_1, L_2, ne se všemi zadanými vektory).

$$\overline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overline{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Báze L_1 např. $\overline{u}_1$ a $\overline{u}_3$, pro L_2 např. $\overline{v}_1$ a $\overline{v}_2$, báze $L_1 + L_2$ např. $\overline{u}_1, \overline{u}_3, \overline{v}_1$, báze průniku např. $(0, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

6. a) Rozhodněte, zda polynomy $p_1(x) = x^2 + 2$, $p_2(x) = x + 1$, $p_3(x) = 2x^2 - x$ tvoří bázi prostoru všech polynomů stupně nanejvýš 2.

b) Pokud zadané polynomy bázi tvoří, najděte souřadnice polynomu $q(x) = 3x^2 - 3x$ v této bázi. Pokud bázi netvoří, rozhodněte, zda q leží v podprostoru generovaném p_1, p_2, p_3.

Řešení: Je to báze, $q = (p_1, p_2, p_3)(1, -2, 1)^{\mathrm{T}}$

7. O následujících množinách rozhodněte, jestli tvoří vektorový prostor.

Návod: (ale radši ho neukazujte žádným ortodoxním matematikům. . .)

- Napište si libovolný konkrétní prvek v zadané množiny a ověřte, jestli i nějaký jeho α-násobek leží v této množině. Pokud ano, záleželo na volbě v a α, nebo to vyjde i pro jakékoli jiné hodnoty?
- Zvolte si dva prvky množiny a ověřte, jestli i jejich součet leží v množině. Pokud ano, záleželo na konkrétní volbě, nebo to vyjde i pro jakékoli jiné?

a) $V = \{(x, y)^{\mathrm{T}}; 2x + 3y = 0\}$
b) $V = \{(x, y)^{\mathrm{T}}; 2x + 3y = 5\}$
c) $V = \{f; f$ je funkce spojitá na $\langle -1, 1\rangle, f(0) = 0\}$ (neboli její graf prochází počátkem)
d) $V = \{f; f$ je funkce spojitá na $\langle -1, 1\rangle, f(0) = 2\}$

Skupina D

1. Je dáno lineární zobrazení $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$g(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + 2u_3 \\ u_1 + u_2 + 4u_3 \\ u_2 + u_3 \end{pmatrix}$$

   a) Najděte matici tohoto zobrazení.

   b) Vypočtěte hodnotu $g(u)$ pro vektor $\overline{u} = (-2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

   c) Leží vektor $\overline{v} = (3, 1, -1)^{\mathrm{T}}$ v jádru zobrazení g? Jen ověřte, jestli má tu správnou vlastnost, nehledejte bázi jádra!

   d) Jestliže vektor $\overline{v}$ z části c) v jádru ležel, uveďte libovolný příklad vektoru z $\mathbb{R}^3$, který v jádru neleží. A naopak, pokud tam neležel, uveďte příklad vektoru z $\mathbb{R}^3$, který v jádru je.

   e) Leží vektor $\overline{w} = (1, 3, 1)^{\mathrm{T}}$ v oboru hodnot zobrazení g? Nehledejte bázi oboru hodnot, ale rozhodněte podle toho, že najdete (pokud existují) všechny vektory $\overline{u}$, pro které platí $g(\overline{u}) = \overline{w}$.

   f) Na základě výpočtu z části e) rozhodněte, jestli každý vektor z $\mathbb{R}^3$ leží v oboru hodnot, nebo jestli by se našel nějaký, který tam neleží.

   Řešení: b) $(0, 2, 1)$; c) ano; e) $\overline{u} = (2 - 3t, 1 - t, t), t \in \mathbb{R}$

2. Jsou dána tři zobrazení z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$:

$$g_1(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + 2u_3 \\ -2u_1 + 2u_2 + 5u_3 \end{pmatrix}, \quad g_2(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + u_3^2 \\ -u_1^2 + u_2^2 + u_3^5 \end{pmatrix}, \quad g_3(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + 2u_3 \\ -2u_1 + 2u_2 - 4u_3 \end{pmatrix},$$

   a) Které/á z nich je/jsou lineární? U toho/těch, které/á lineární není/nejsou, to zdůvodněte – která vlastnost lineárního zobrazení není splněna? Ukažte to na příkladu (co nejjednodušším) s konkrétními čísly.

   b) Dál pracujte se zobrazením, které lineární je (pokud je jich víc, proveďte výpočty pro všechna).
   – Najděte bázi a dimenzi jádra.
   – Najděte bázi a dimenzi oboru hodnot.
   – Zkontrolujte (jen pohledem), že součtem dimenzí ker a Im je dimenze $\mathbb{R}^3$.
   – Pro odvážnější studenty: Rozhodněte, zda zobrazení má tu vlastnost, že pro každé $\overline{w} \in \mathbb{R}^2$ najdu $\overline{u} \in \mathbb{R}^3$ takové, že $g(\overline{u}) = \overline{w}$ (odborně se takové zobrazení nazývá surjektivní). Řešení tohoto problému úzce souvisí s dimenzí $\operatorname{Im} g$, není potřeba nic dalšího počítat.

   Řešení: g_1: Báze jádra např. $(1, 1, 0)$, báze Im např. $(1, -2), (2, 5)$, je surj.

   g_3: Báze jádra např. $(1, 1, 0), (-2, 0, 1)$, báze Im např. $(1, -2)$, není surj.

3. Jsou dána tři zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$:

$$g_1(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - 2u_2 \\ u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \end{pmatrix}, \quad g_2(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - 2u_2 \\ 3u_1 - 6u_2 \\ -u_1 + 2u_2 \end{pmatrix}, \quad g_3(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - 2 \\ 1 + u_2 \\ -u_1 + 2u_2 \end{pmatrix},$$

a) Které/á z nich je/jsou lineární? U toho/těch, které/á lineární není/nejsou, to zdůvodněte – která vlastnost lineárního zobrazení není splněna? Ukažte to na příkladu (co nejjednodušším) s konkrétními čísly.

b) Dál pracujte se zobrazením, které lineární je (pokud je jich víc, proveďte výpočty pro všechna).
- Najděte bázi a dimenzi jádra.
- Najděte bázi a dimenzi oboru hodnot.
- Zkontrolujte (jen pohledem), že součtem dimenzí ker a Im je dimenze $\mathbb{R}^2$.
- Pro odvážnější studenty: Rozhodněte, zda je zobrazení prosté (injektivní) neboli má tu vlastnost, že rovnost $g(\overline{u}) = g(\overline{v})$ je možná jedině pro $\overline{u} = \overline{v}$. Řešení tohoto problému úzce souvisí s $\ker g$, není potřeba nic dalšího počítat (ale lze řešit i výpočtem, asi se to z něj lépe uvidí).

Řešení: g_1: Jádro je $\{\overline{o}\}$, báze Im např. $(1,1,1), (-2,1,2)$, je prosté.

g_2: Báze jádra např. $(2,1)$, báze Im např. $(1,3,-1)$, není prosté.

4. Je dáno lineární zobrazení $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$g(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + 2u_3 \\ -2u_1 + 2u_2 + 5u_3 \end{pmatrix}$$

a) Najděte matici tohoto zobrazení.

b) Vypočtěte hodnotu g pro vektory $\overline{u} = (1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ a $\overline{v} = (2,2,0)^{\mathrm{T}}$.

c) Najděte matici zobrazení, jestliže v $\mathbb{R}^2$ místo standardní báze použijeme bázi $\overline{f}_1 = (2,-1)^T, \overline{f}_2 = (1,2)^{\mathrm{T}}$.

d) Znovu vypočtěte hodnotu g pro vektory z části b), ale tentokrát s použitím nové báze $\mathbb{R}^2$, tzn. pomocí matice nalezené v c).

e) Přepočítejte výsledek d) do standardní báze – přesvědčte se, že vyšel stejně jako v b).

Řešení: b) $g(u) = (4,1)^{\mathrm{T}}, g(v) = (0,0)^{\mathrm{T}}$; c)

$$G' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot G = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

d) $(7/5, 6/5)^{\mathrm{T}}$

Skupina E

1. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru $V \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaného vektory $\overline{a}_1 = (2, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \overline{a}_2 = (-4, 3, 4, -1)^{\mathrm{T}}, \overline{a}_3 = (4, 0, -13, -2)^{\mathrm{T}}$.

   Průběžně kontrolujte, že postupně získávané vektory $\overline{b}_i$ jsou navzájem kolmé (kontrolní výpočet zapište).

   Řešení: $\overline{b}_1 = (2, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$

   $\beta_{21} = 2$, $\overline{b}_2 = (0, 1, 4, 1)^{\mathrm{T}}$

   $\beta_{31} = -1$, $\beta_{32} = 3$, $\overline{b}_3 = (2, 4, -1, 0)^{\mathrm{T}}$

   $\overline{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{b}_1, \overline{h}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\overline{b}_2, \overline{h}_3 = \frac{1}{\sqrt{21}}\overline{b}_3,$

2. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru $V \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaného vektory $(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (2, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, (0, 1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$.

   Průběžně kontrolujte, že postupně získávané vektory $\overline{b}_i$ jsou navzájem kolmé (kontrolní výpočet zapište).

   Jestliže výsledek vyšel nějak „divně“, čím je to způsobeno? Jaká je dimenze V? Kolik vektorů bude tvořit jeho bázi?

   Řešení: $\beta_{21} = -1, \overline{b}_2 = (1, -1, -1, 1)^{\mathrm{T}}; \beta_{31} = -1, \beta_{32} = 1, \overline{b}_3 = (0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, ten v bázi nebude.

   Ortonormální báze: $\sqrt{2}/2(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, 1/2(1, -1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$

3. Jakýmkoli způsobem (nemusí to být Gram-Schmidtův ortogonalizační proces) najděte ortogonální bázi $\mathbb{R}^3$, která obsahuje vektor $\overline{u} = (1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$. Kolik takových bází existuje?