A.

Jméno a příjmení:	ID:	Skupina:	1	2	3	4	5	Σ

1. *(max. 14 bodů)*
Jsou dány vektorové prostory $L_1 = \langle\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\rangle$ a $L_2 = \langle\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}\rangle$, kde

$$\overline{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \overline{u}_2 = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}, \overline{u}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \overline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}.$$

Najděte báze a dimenze těchto prostorů. Pak najděte i báze a dimenze prostorů $L_1 + L_2$ a $L_1 \cap L_2$ (při těchto výpočtech už pracujte pouze s vybranými bázemi L_1, L_2, ne se všemi zadanými vektory). Zapište je:

2. *(max. 14 bodů)*
Vektorový podprostor $L \subseteq \mathbb{R}^4$ je generován vektory

$$\overline{a}_1 = (2, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \overline{a}_2 = (-4, 3, 4, -1)^{\mathrm{T}}, \overline{a}_3 = (4, 0, -13, -2)^{\mathrm{T}}.$$

Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi L a zapište ji:

3. *(max. 14 bodů)*
Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\-2 & 1 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice A. Najděte ortogonální matici Q, která v podobnostní transformaci $D = Q^{-1}AQ$ převede matici A na diagonální matici D. Zapište též matici D.

$\lambda \in$ $\qquad$, $\qquad Q =$ $\qquad$, $\qquad D =$ $\qquad$.

4. *(max. 14 bodů)*
Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ je níže zadaná kvadratická forma negativně definitní.

$$K(\overline{x}) = -x^2 - 5y^2 - 4z^2 + 4xy + 2\alpha yz$$

To nastane, právě když $\alpha \in$ $\qquad$.

5. *(max. 14 bodů)* Na druhou stranu zadání:

a) vysvětlete pojem báze vektorového prostoru
b) v $\mathbb{R}^2$ uveďte příklad vektorů, tvořících bázi
c) v $\mathbb{R}^2$ uveďte příklad nenulových, od sebe různých vektorů, netvořících bázi

① $L_1 = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ $\quad L_2 = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ $\quad u_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

najděte bázi a dimenzi $L_1, L_2, L_1+L_2, L_1 \cap L_2$.

$$L_1 = \begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-3&1\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&2\\0&0&3\\0&0&1\end{pmatrix} \underset{(-3)}{\sim} \begin{pmatrix}1&3&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

dim = 2, báze je například $\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$$L_2 = \begin{pmatrix}1&-1&2\\2&4&-2\\0&1&-1\end{pmatrix} \underset{(-2)}{\sim} \begin{pmatrix}1&-1&2\\0&6&-6\\0&1&-1\end{pmatrix} \underset{(-6)}{\sim} \begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

dim = 1, báze je např. $\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$$L_1+L_2 = \begin{pmatrix}3&2&2\\-3&1&-2\\0&1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3&2&2\\0&3&0\\0&1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3&2&2\\0&1&-1\\0&3&0\end{pmatrix} \underset{(-3)}{\sim} \begin{pmatrix}3&2&2\\0&-3&3\\0&3&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3&2&2\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3&2&2\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \dim = 3$$

báze je $\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\dim(L_1+L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$ ✓

musí platit: $\underset{2}{\dim(L_1)} + \underset{1}{\dim(L_2)} = \underset{3}{\dim(L_1+L_2)} + \underset{0}{\dim(L_1 \cap L_2)}$!

$L_1 \cap L_2 =$

$\bar{x} \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 = \bar{x}$

$\bar{x} = -\beta_1 v_1 - \beta_2 v_2$

$\bar{x} = \bar{x}$

$\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 u_2 + \cancel{\alpha_3 u_3} = \cancel{-\beta_1 v_1 - \beta_2 v_2} - \beta_3 v_3 \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = 0$

využiju $L_1 + L_2$ [illegible]

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \tfrac{2}{3}\alpha_2 + \tfrac{2}{3}\beta_1 &= 0 \\ 0 + \alpha_2 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + \beta_1 &= 0 \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned} \alpha_1 &= -\tfrac{2}{3}s + \tfrac{2}{3}t \\ \alpha_2 &= s \\ \beta_1 &= t \end{aligned}}$$

báze je: $\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} =$?

$\cdot \beta_1 = t$

$: -\beta_1 \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = -t \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

CHYBA! - při určování L2, vynuluje se ti jen jeden řádek, tj. dim L2 = 2, báze např. (1, 2, 0)T a (-1, 4, -1)T => a tím pádem i bázi a dimenzi L1+L2, L1průnikL2

dim L1+L2=2, báze např. (1, -1, 0)T, (2, 1, 1)T, (1, 2, 0)T

dim L1průnikL2 tím pádem vychází 1, báze např. (1, 8, 1)T

A2) Vektorový podprostor $L \subseteq \mathbb{R}^4$ je generován vektory

$$\boxed{\bar{a} = (2,-1,0,1)^T,\ \bar{a}_2 = (-4,3,4,-1)^T,\ \bar{a}_3 = (4,0,-13,-2)^T}$$

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} ;\ \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b}_1 = \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{21} = -\frac{\sigma(\bar{a}_2, \bar{b}_1)}{\sigma(\bar{b}_1, \bar{b}_1)} = -\frac{(-4)\cdot 2 + 3\cdot 0 + 4\cdot(-2) + (-1)\cdot 0}{1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1} = -\frac{-12}{+6} = \underline{\underline{+2}}$$

$$\bar{b}_2 = \bar{a}_2 + \beta_{21}\cdot\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b}_1 \perp \bar{b}_2 = \sigma(\bar{b}_1; \bar{b}_2) = 0$$

$$\bar{b}_3 = \bar{a}_3 + \beta_{31}\cdot\bar{b}_1 + \beta_{32}\cdot\bar{b}_2 =$$

$$\beta_{31} = -\frac{\sigma(\bar{a}_3; \bar{b}_1)}{\sigma(\bar{b}_1; \bar{b}_1)} = -\frac{8-2}{+6} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\beta_{32} = -\frac{\sigma(\bar{a}_3; \bar{b}_2)}{\sigma(\bar{b}_2; \bar{b}_2)} = -\frac{-52-2}{1+16+1} = -\frac{-54}{18} = \underline{\underline{3}}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\bar{b}_3; \bar{b}_1) = 4 - 4 = \underline{\underline{0}} \quad ; \quad \sigma(\bar{b}_3; \bar{b}_2) = 0$$

ORTONORMÁLNÍ BÁZE:

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{\|b_1\|}\bar{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{h}_2 = \frac{1}{\|b_2\|}\cdot\bar{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{h}_3 = \frac{1}{\|h_3\|}\bar{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{21}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) - (-8\lambda) =$$

$$= -\lambda(\lambda^2-1) + 8\lambda = -\lambda^3 + \lambda + 8\lambda = -\lambda(\lambda^2+9)$$

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 3$$
$$\lambda_3 = -3$$

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$2x - z = 0$

$x = t$

$y = z = 2t$

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & -4 & 4 \\ 6 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-3x + 6z = 0$

$2y + 4z = 0$

$-x + 2z = 0$

$y + 2z = 0$

$x = 2z$

$y = -2z$

$z = t$

$$t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -6 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$y = -t$

$x = -z$

$z = 2t$

$x = -2t$

$$t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + 1 - 1 = 0$ ✓

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0 \cdot (-3) \cdot 3 = 0$ ✓

$\det A = 0$

$$h_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$h_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = Q^{-1} \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(A)

(4) Zjistěte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je níže zadaná kvadratická forma negativně definitní. $\mathcal{K}(\vec{x}) = -x^2 - 5y^2 - 4z^2 + 4xy + 2ayz$

NEGATIVNĚ DEFINITNÍ – všechna vlastní čísla matice A jsou záporná

$\mathcal{K}(x) < 0$ $\rightarrow D_1 < 0$; $D_2 > 0$; $D_3 < 0$

a) pomocí vl. čísel $\rightarrow$ NEVEDE K ŘEŠENÍ

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & a \\ 0 & a & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \end{array}$$

vlastní čísla

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -5-\lambda & a \\ 0 & a & -4-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -5-\lambda & a \end{matrix} = (-1-\lambda)(-5-\lambda)(-4-\lambda) - a^2(-1-\lambda) - 4(-4-\lambda) =$$

$$= (5+\lambda+5\lambda+\lambda^2)(-4-\lambda) + a^2 + a^2\lambda + 16 + 4\lambda =$$

$$= -20 - 4\lambda - 20\lambda - 4\lambda^2 - 5\lambda - \lambda^2 - 5\lambda^2 - \lambda^3 + a^2 + a^2\lambda + 16 + 4\lambda = -\lambda^3 - 10\lambda^2 + \lambda(-25+a^2) - 4 + a^2 = -\lambda(\lambda^2 + 10\lambda + 25 - a^2) - 4 + a^2$$

b) pomocí minorů

$D_1 < 0$ $\qquad$ $D_2 > 0$ $\qquad$ $D_3 < 0$

$-1 < 0$

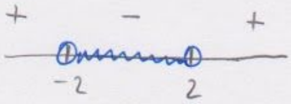
$D_1 = -1$ $\qquad$ $D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$

$1 > 0$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & a \\ 0 & a & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & a \end{matrix} = -20 + a^2 + 16 = a^2 - 4$$

$a^2 - 4 < 0$

$(a+2)(a-2) < 0$



$\underline{\underline{a \in (-2; 2)}}$

+

A.

Jméno a příjmení	ID:	Skupina	1	2	3	4	5	Σ

1. *(max. 14 bodů)* **Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro která výsledná soustava lineárních rovnic (a) nemá řešení, (b) má jediné řešení, (c) má nekonečně mnoho řešení:**

$$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 \qquad\quad - x_4 &= 3 \\ (a+3)x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 7 \\ -2x_3 - x_4 &= 3 \\ (a^2 + 3a - 4)x_4 &= 2a^2 - 2 \end{aligned}$$

Odpovědi zapište do rámečku:

2. *(max. 14 bodů)* Vektorový podprostor $L \subseteq \mathbf{R}^4$ je generován vektory

$$\overline{a}_1 = (1, 0, -2, 1)^T, \overline{a}_2 = (2, 1, -3, 4)^T, \overline{a}_3 = (-2, -4, 6, -4)^T.$$

Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi L a zapište ji:

3. *(max. 14 bodů)* Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice A.
Najděte ortogonální matici Q, která v podobnostní transformaci $D = Q^{-1}AQ$ převede matici A na diagonální matici D. Zapište též matici D.

$\lambda \in$ $\boxed{}$, $\qquad Q =$ $\boxed{}$, $\qquad D =$ $\boxed{}$.

4. *(max. 14 bodů)* Rozhodněte o definitnosti kvadratické formy v závislosti na parametru c.

$$K(\overline{x}) = -x^2 - 2y^2 - 18z^2 - 2xy + 6xz + 2cyz$$

Výsledky zapište do rámečku:

5. *(max. 14 bodů)* Na druhou stranu zadání:

a) vysvětlete pojem nezávislosti vektorů
b) vysvětlete, kdy vektory tvoří ve vektorovém prostoru bázi
c) vysvětlete, co je to systém generátorů vektorového prostoru a čím se liší (resp. může se lišit) od báze

$$\left(\begin{array}{l} 2x_1 + ax_2 \qquad - x_4 = 3 \\ \cancel{(a+3)}\ (a+3)x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ \qquad -2x_3 - x_4 = 3 \\ \qquad (a^2+3a-4)x_4 = 2a^2-2 \end{array}\right)$$

1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & a & 0 & -1 & 3 \\ 0 & a+3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a-4 & 2a^2-2 \end{array}\right)$$

$D = 2(a+3)(-2)(a^2+3a-4)$

$= -4(a+3)(a-3)(a-1)$

~~...~~ nemá řeš pro $\boxed{\begin{array}{l} a=\pm 3 \\ a=1 \end{array}}$

∞ řeš

$a^2+3a-4 = 2a^2-2$

$a^2-3a+2=0$

$(a-2)(a-1)=0$

$\boxed{a=2}$ nekonečně mnoho

$a \in \mathbb{R} \{\pm 3; 1; 2\}$ jedno řešení

3

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda+4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+4)(\lambda-3) - 9(\lambda-3) =$$

$$\begin{matrix} \lambda-4 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda+4 & 0 \end{matrix}$$

$$= (\lambda-3)\left[\lambda^2 - 16 - 9\right]$$

$$= (\lambda-3)(\lambda+5)(\lambda-5)$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -5 \quad \lambda_3 = 5$$

$\boxed{\lambda_1 = 3}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$7x_2 = -3x_1 \Rightarrow 7x_2 = -9x_2$

$3x_2 = x_1 \qquad x_2 = 0 \quad x_1 = 0$

$x_3 = t$

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = +5}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$x_3 = 0 \quad x_2 = t \quad x_1 = -3t$

$\cancel{x_2 = 0}$

$\cancel{x_1 = 0}$

$v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = -5}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right)$

$x_3 = 0 \quad x_1 = t \quad x_2 = 3t$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	2	3	4	5	Σ

<u>*1.(max. 12 bodů)*</u>. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ jsou dány vektory $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Označme $L_1 = \langle\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}\rangle$ a $L_2 = \langle\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3\}\rangle$.

Najděte dimenze prostorů L_1, L_2, $L_1 \cap L_2$ a $L_1 + L_2$:

(a) $\dim L_1 = \boxed{}$. (b) $\dim L_2 = \boxed{}$.

(c) $\dim L_1 \cap L_2 = \boxed{}$. (d) $\dim L_1 + L_2 = \boxed{}$.

<u>*2.(max. 12 bodů)*</u>. Ve vektorovém prostoru $V = \mathbb{R}^3$ jsou dány dvě báze $\underline{\mathbf{e}} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$, $\mathbf{f} = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$. Najděte matici přechodu $Q = \boxed{}$ mezi bázemi, jestliže víte, že pro složky libovolného vektoru $\overline{v} \in V$ platí $\overline{v}_f = Q \cdot \overline{v}_e$.

<u>*3.(max. 12 bodů)*</u>. Je dáno lineární zobrazení $l : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$předpisem $l \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \\ 3x_1 - 9x_2 + 5x_3 - x_4 \\ -3x_1 + 9x_2 - 5x_3 + x_4 \end{pmatrix}$

Určete dimenzi prostorů **Ker** l a **Img** l:

(a) $\dim(\mathbf{Ker}\ l) = \boxed{}$. (b) $\dim(\mathbf{Img}\ l) = \boxed{}$.

<u>*4.(max. 17 bodů)*</u>. Vektorový podprostor $L \subseteq \mathbb{R}^3$je generován vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Najděte matici

$P = \boxed{}$ ortogonální projekce do L.

<u>*5.(max. 17 bodů)*</u> Kvadratická plocha má rovnici $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 9$. Určete (např. pom vlastních hodnot a transformace souřadnic) o jaký typ plochy se jedná a zda je plocha rot (zdůvodnění uveďte na zadní stranu zadání):

$3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4$

$3x_1 - 9x_2 + 5x_3 - x_4$

$-3x_1 + 9x_2 - 5x_3 + x_4$

3

JÁDRO

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & 5 & -1 & 0 \\ -3 & 9 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

OBOR HODNOT

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -9 & 5 & -1 \\ -3 & 9 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathrm{Img} = 2$

$-3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$ $\quad x_4 = t$

$x_3 = s$

$-3x_2 - 2x_3 = t$

$-3x_2 = 2s + t$

$x_2 = -\frac{2s+t}{3}$

$3x_1 + 2s + t + s + t = 0$

$3x_1 = -3s - 2t$

$x_1 = -s - \frac{2}{3}t$

$\dim \ker = 2$ $\quad x = t\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

MMAT 2015 - 1. termín

D.

Jméno a příjmení:	ID:	Skupina:	1	2	3	4	5	Σ

1.(max. 12 bodů) Je dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & & & = & -2 \\ 2x & - & y & & & = & -2 \end{array}$$

První a druhá rovnice určují přímku p, třetí a čtvrtá rovnice určují přímku q v třírozměrném Eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Úkolem je zjistit jejich vzájemnou polohu na základě hodností matic.

(a) Hodnost matice soustavy je ☐ (b) Hodnost rozšířené matice je ☐

Obě přímky jsou: (c) různoběžky (d) rovnoběžky (e) mimoběžky (f) totožné

2.(max. 12 bodů) Lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zobrazí

vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ na vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ na $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ na $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ na $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Určete matici F zobrazení f a bázi jeho jádra Ker f. Platí:

$F =$ ☐. Báze jádra zobrazení f je tvořena vektory ☐.

3.(max. 12 bodů) V prostoru $V = \mathbb{R}^3$ jsou dány dvě báze $e_1 = (-1, 1, 1)^T$, $e_2 = (1, -1, 1)^T$, $e_3 = (1, 1, -1)^T$ a $f_1 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$, $f_2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$, $f_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$. Určete matici přechodu T od báze $\underline{e}$ k bázi $\underline{f}$ (tj. takovou, že $\underline{f} = \underline{e} \cdot T$).

Platí $T =$ ☐.

4.(max. 17 bodů) Podprostor $L \subseteq \mathbb{R}^4$ je generován vektory $a = (1, 4, 4, 3)$, $b = (-2, 1, 1, 0)$, $c = (0, 3, 3, 2)$. Určete dimenze prostorů L a $L^\perp$ a najděte ortogonální průměty vektoru $u = (1, -2, 1, -2)$ do prostorů L a $L^\perp$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

(a) $\dim L =$ ☐. (b) $\dim L^\perp =$ ☐.

(c) Průmět u do L je $v =$ ☐. (d) Průmět u do $L^\perp$ je $w =$ ☐.

5.(max. 17 bodů) Najděte diagonální tvar D matice $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ a ortogonální matici H, která v podobnostní transformaci matici A na diagonální matici D převádí. Platí:

(a) $D =$ ☐, (b) $H =$ ☐.

5 - zbesilé počítanie - ale diagonalna matica - na diagonale vlastné čísla (upraviť na schodovitý tvar potom na diagonalny tvar, vypočítať vlastné čísla a dosadiť)

ortonormálna matica: D=HA =>H=DA^-1, takže výpočet inv(A) a vynásobiť diagonálnou maticou.

Ale fakt sa to dlho bude počítať ručne.Dúfam že máte kalkulačky.