MMAT – Ostatní aktivity I – komentář k častým chybám

Zde najdete komentáře k příkladům, které jste mi posílali nejčastěji a vyskytovaly se v nich chyby a různé nedostatky, které jste od sebe nekriticky opisovali.

Příklad A1

Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 2x_2 + \quad ax_3 + \ 3x_4 &= 4 \\ x_1 + (a-1)x_2 + (a+1)x_3 + \ 5x_4 &= 4 \\ 2x_3 + \ x_4 &= 0 \\ 2x_3 + a^2x_4 &= a^2 - 3a. \end{aligned}$$

a) Zjistěte, pro které hodnoty parametru a má soustava rovnic jediné řešení; žádné řešení; nekonečně mnoho řešení.

b) Za a dosaďte tu hodnotu, pro kterou existuje nekonečně mnoho řešení (kdyby takových a bylo víc, vyberte si jedno z nich), a řešení pak najděte.

c) Napište nějaké konkrétní číselné řešení soustavy z části b) a ověřte, že soustavu opravdu splňuje.

d) Vypočítejte determinant původní matice soustavy a zjistěte, pro které hodnoty parametru a je nenulový. Porovnejte s výsledky části a). (Determinant můžete počítat rozvojem, ale lepší je asi využít eliminaci.)

Řešení:

a) Soustavu přepíšeme do matice a upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & a & 3 & 4 \\ 1 & (a-1) & (a+1) & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a^2 & a^2-3a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & a & 3 & 4 \\ 0 & (a-3) & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-1 & a^2-3a \end{array}\right)$$

Častá chyba, které se studenti dopouštějí nezávisle na sobě:

$$\underline{\underline{\text{Takto ne!}}} \qquad a^2 - 1 = a^2 - 3a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}.$$

Řešit takovou rovnici nemá vůbec smysl! Přepište si upravenou soustavu zpátky do rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 2x_2 + ax_3 + \quad 3x_4 &= 4 \\ (a-3)x_2 + \ x_3 + \quad 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 + \quad x_4 &= 0 \\ (a^2-1)x_4 &= a^2 - 3a. \end{aligned}$$

Další častá chyba nebo spíš neobratnost:

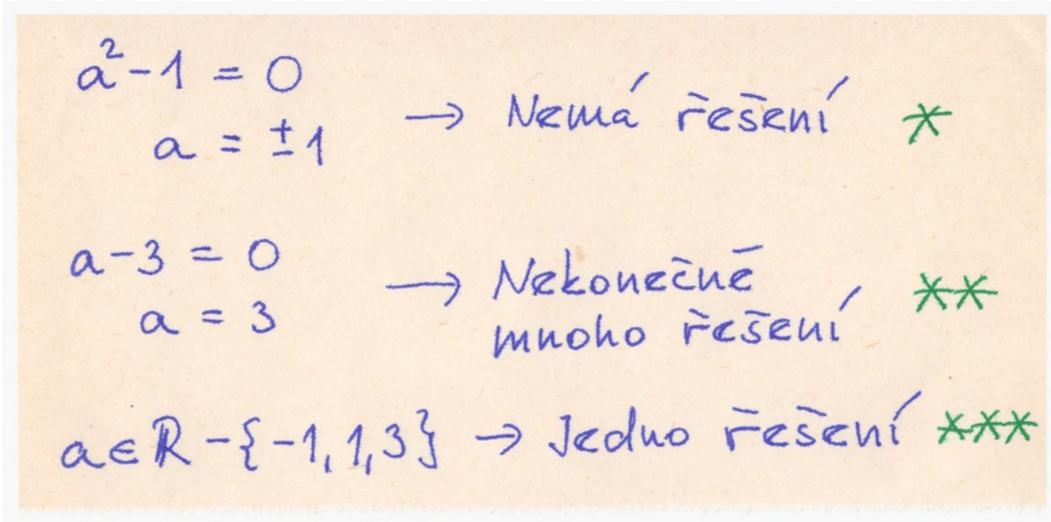
Student zkoumá, kdy je

$$a^2 - 3a = 0. \qquad \text{Tohle není moc zajímavé.}$$

Zajímavé jsou vedoucí prvky v řádcích matice soustavy, protože těmi při výpočtu jednotlivých neznámých budeme dělit. Jak vypadá postupný výpočet jednotlivých neznámých?

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{a^2-3a}{a^2-1} \\ x_3 &= -\frac{1}{2}x_4 \quad \text{(pak za } x_4 \text{ dosadíme)} \\ x_2 &= \frac{1}{a-3}(-x_3 - 2x_4) \quad \text{(pak za } x_3, x_4 \text{ dosadíme)} \\ x_1 &= 4 - 2x_2 - ax_3 - 3x_4 \quad \text{(pak za } x_2, x_3, x_4 \text{ dosadíme)} \end{aligned}$$

Pro které hodnoty a se takový výpočet nedá provést, tj. neexistuje jednoznačné řešení?
Co mi mnoho studentů poslalo (bezprostředně po úpravě na schodovitý tvar):


$a^2 - 1 = 0$
$a = \pm 1$ → Nemá řešení *

$a - 3 = 0$
$a = 3$ → Nekonečné mnoho řešení **

$a \in R - \{-1, 1, 3\}$ → Jedno řešení ***

To je sice pravda, ale v této fázi výpočtu takové výsledky ještě nemohou být vidět! Vidět je pouze část ***, protože v případě, že vedoucí prvky všech řádků jsou nenulové, má soustava jediné řešení.
Pokud jde o *, tak zde se dalo dosadit v hlavě a k uvedenému závěru dojít, ale přece jen – když sepisujete projekt, měli byste tam mít výsledky v logickém sledu a se zdůvodněním:
Pro $a = 1$ je poslední rovnice $0 \cdot x_4 = -2$, tedy soustava nemá řešení. Podobně pro $a = -1$ by vyšlo $0 \cdot x_4 = 4$.
Pro $a = 3$ (část **) je nutný další výpočet, např.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tedy soustava pro $a = 3$ je

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4 & & x_1 + 2x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = t, x_1 = 4 - 2t, t \in \mathbb{R} \\ x_3 + 2x_4 = 0 & \Rightarrow & x3 = 0 \\ -\ 3x_4 = 0 & & x4 = 0 \end{array}$$

Pro $a = 3$ existuje nekonečně mnoho řešení. Tímto je vyřešena i část b).
c) Zde jste mi často posílali (nikoli nezávisle na sobě) řešení pro $a = 0$. To svědčí o nepořádném čtení zadání. Mělo se najít konkrétní řešení (tj. s čísly, ne s parametrem t) pro $a = 3$. Různými volbami t dostaneme různá řešení, např.

$$t = 0\colon \overline{x} = (4, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad t = 1\colon \overline{x} = (2, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \ldots$$

Mělo se ověřit, že nalezené řešení opravdu splňuje rovnice (klasická zkouška správnosti řešení). Např. pro $\overline{x} = (2, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ by to bylo:

$$\begin{array}{rl} 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 4 & \text{platí} \\ 2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 4 & \text{platí} \\ 2 \cdot 0 + \quad 0 = 0 & \text{platí} \\ 2 \cdot 0 + 9 \cdot 0 = 0 & \text{platí} \end{array}$$

d) Pro výpočet determinantu se hodí využít matici upravenou na trojúhelníkový tvar. Nejprve je ale nutno zkontrolovat, jestli nebyla provedena nějaká úprava, která by determinant měnila, tj. výměna řádků nebo vynásobení některého řádku nějakým číslem. To se nestalo, pouze jsme k řádkům přičítali násobky jiných řádků, což determinant nemění. A proto

$$|A| = 1 \cdot (a - 3) \cdot 2 \cdot (a^2 - 1) = 2(a - 3)(a^2 - 1)$$

Determinant je nenulový přesně pro ty hodnoty a, pro které má soustava právě jedno řešení. Pro $a = \pm 1$ a $a = 3$ je determinant nulový. Jestli má soustava žádné, nebo nekonečně mnoho řešení, to odtud nepoznáme, je nutno vzít v potaz pravou stranu.

Příklad A2 a příklady ze skupiny B byly většinou bez problémů. **Jen v příkladu B3 někteří zapomněli při výpočtu inverzní matice dělit determinantem:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{nikoli} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mám dojem, že jsem to možná při hodnocení někde přehlédla a příklad odsouhlasila.

Příklad C1

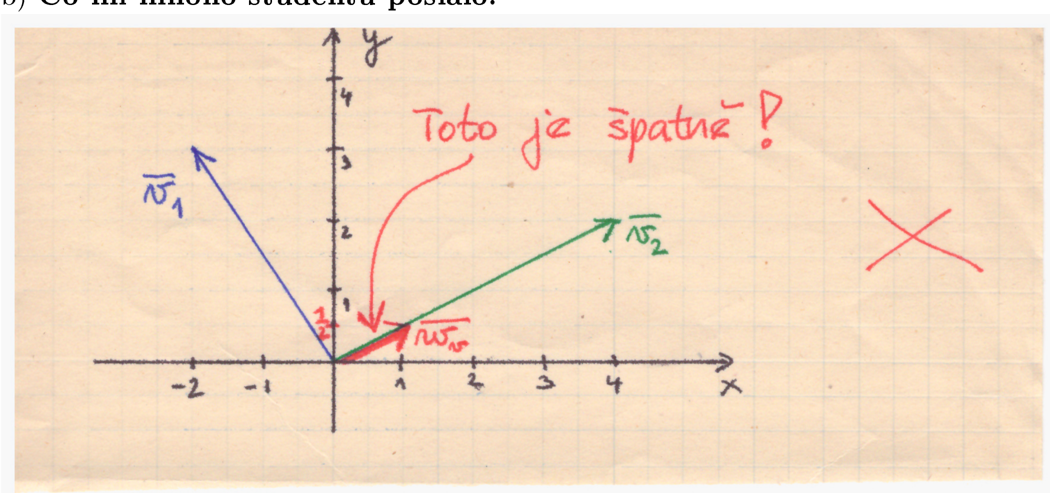
- a) Která dvojice vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^2$? (Nic složitého nepočítejte, jen se podívejte a rozhodněte.)

  - $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix}$

  b) Pracujte s dvojicí vektorů z části a), která bázi tvoří. Tuto bázi označme $\underline{v}$.
  - Vektory načrtněte (snažte se pěkně, v měřítku) a spolu s nimi načrtněte vektor $\overline{w}$, který má v bázi $\underline{v}$ souřadnice $\overline{w}_v = (1, 1/2)^{\mathrm{T}}$. Vektor $\overline{w}$ pouze načrtněte, zatím nic nepočítejte!
  - Vypočítejte souřadnice vektoru $\overline{w}$ ve standardní bázi a porovnejte s obrázkem.
  - Znovu načrtněte obrázek s bázovými vektory a spolu s nimi ještě vektor $\overline{u} = (-6, 1)^{\mathrm{T}}$ (uvedené souřadnice jsou ve standardní bázi). Graficky odhadněte, jaké jsou souřadnice vektoru $\overline{u}$ v bázi $\underline{v}$ (jsou „pěkné").
  - Určete souřadnice vektoru $\overline{u}$ v bázi $\underline{v}$ výpočtem a výsledek porovnejte s odhadem z obrázku.

  c) Pracujte s dvojicí vektorů z části a), které bázi netvoří. Napište tři různé vektory, které leží v prostoru generovaném vektory $\overline{v}_1, \overline{v}_2$, a jeden vektor, který v tomto prostoru neleží.

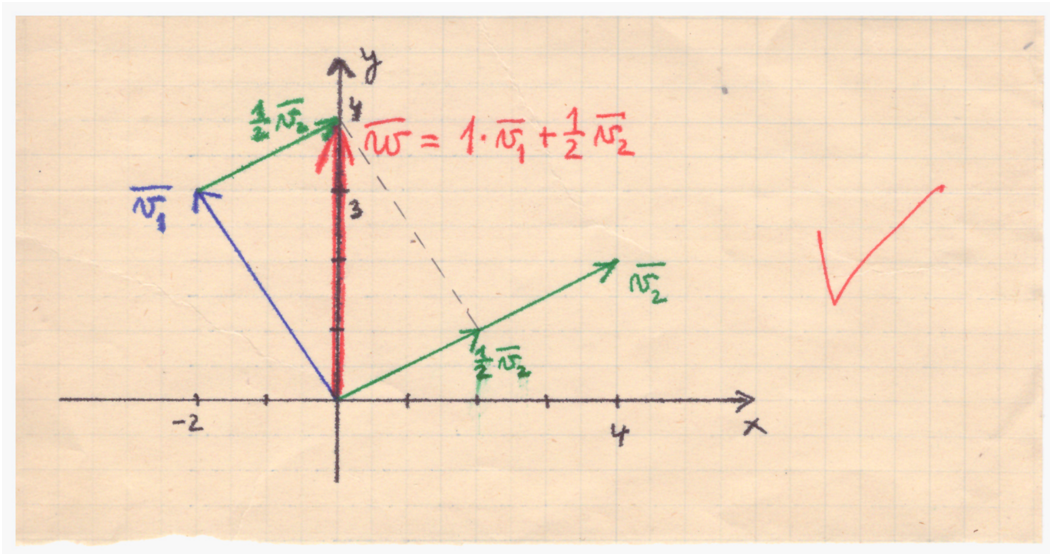
Řešení:
a) Bázi $\mathbb{R}^2$ tvoří první dva vektory, protože jsou lineárně nezávislé.
b) **Co mi mnoho studentů poslalo:**



Takový obrázek je důkaz obvyklého nepochopení, co jsou to souřadnice vektoru v určité bázi. Zápisem $\overline{w}_v = (1, 1/2)^{\mathrm{T}}$ myslíme, že vektor $\overline{w}$ se dá zapsat pomocí vektorů $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ jako

$$\overline{w} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \cdot \overline{v}_1 + \frac{1}{2} \cdot \overline{v}_2.$$

S vektorem, který má ve standardní bázi souřadnice $(1, 1/2)^{\mathrm{T}}$, nemá $\overline{w}$ nic společného.
Správně měl obrázek vypadat nějak takto:



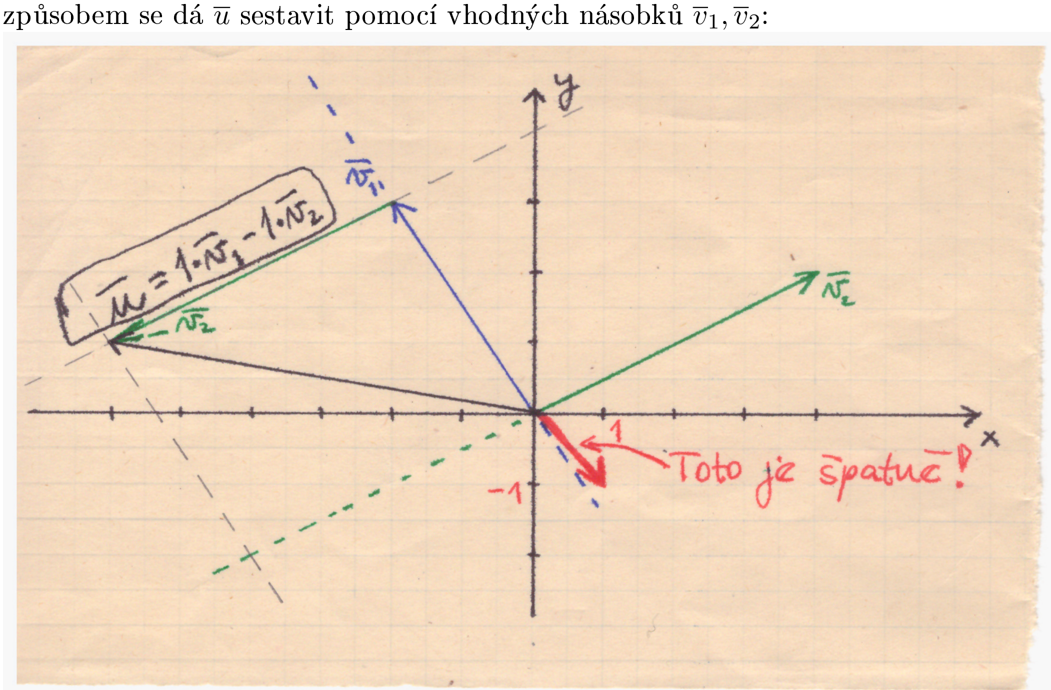
Souřadnice $\overline{w}$ ve standardní bázi jste obvykle měli dobře. Srovnejte výsledek s obrázkem (tím správným).

$$\overline{w} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Podobně v části, kde jste měli určit souřadnice $\overline{u} = (-6, 1)^{\mathrm{T}}$ v bázi $\underline{v}$. Výpočet byl obvykle správný – snažíme se $\overline{u}$ rozepsat jako lineární kombinaci vektorů $\overline{v}_1, \overline{v}_2$:

$$\overline{u} = x\overline{v}_1 + y\overline{v}_2 \quad \text{t.j.} \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = 1 \\ y = -1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{u}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Do obrázku jste kreslili vektor $(1, -1)^{\mathrm{T}}$, ten tam nemá co dělat. Měli jste graficky odhadnout, jakým způsobem se dá $\overline{u}$ sestavit pomocí vhodných násobků $\overline{v}_1, \overline{v}_2$:



Vektory vypadají pořád stejně, mění se jenom jejich číselný popis podle toho, jakou si zvolíme bázi. O městě Brně taky můžeme říct, že leží něco přes 100 km na sever od Vídně nebo necelých 200 km na jihovýchod od Prahy nebo zhruba 15 km na jih od Blanska, a nebude kvůli tomu pokaždé někde jinde.

c) Obvykle bez potíží.

Další příklady z C obvykle bez potíží nebo s individuálními chybami, které jsem autorům vysvětlila.

Je s podivem, kolik studentů „řešilo“ C5, včetně báze průniku dvou prostorů. Mnozí obkreslovači asi ani nepoznají, jestli si k obkreslení vybrali jednoduchý nebo těžký příklad.

Příklad D1

Je dáno lineární zobrazení $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$g(\overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + 2u_3 \\ u_1 + u_2 + 4u_3 \\ u_2 + u_3 \end{pmatrix}$$

a) Najděte matici tohoto zobrazení.

b) Vypočtěte hodnotu $g(u)$ pro vektor $\overline{u} = (-2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

c) Leží vektor $\overline{v} = (3, 1, -1)^{\mathrm{T}}$ v jádru zobrazení g? Jen ověřte, jestli má tu správnou vlastnost, nehledejte bázi jádra!

d) Jestliže vektor $\overline{v}$ z části c) v jádru ležel, uveďte libovolný příklad vektoru z $\mathbb{R}^3$, který v jádru neleží. A naopak, pokud tam neležel, uveďte příklad vektoru z $\mathbb{R}^3$, který v jádru je.

e) Leží vektor $\overline{w} = (1, 3, 1)^{\mathrm{T}}$ v oboru hodnot zobrazení g? Nehledejte bázi oboru hodnot, ale rozhodněte podle toho, že najdete (pokud existují) všechny vektory $\overline{u}$, pro které platí $g(\overline{u}) = \overline{w}$.

f) Na základě výpočtu z části e) rozhodněte, jestli každý vektor z $\mathbb{R}^3$ leží v oboru hodnot, nebo jestli by se našel nějaký, který tam neleží.

Řešení:

Části a)–d) obvykle bez potíží.

e) Výpočet byl obvykle správný, ale často nesprávně formulovaná odpověď.

V oboru hodnot zobrazení leží ty vektory, které pro nějaký vstup vyjdou jako výsledek tohoto zobrazení. Zkoumáme tedy, jestli pro vhodný vektor $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$ bude platit

$$\begin{pmatrix} u_1 - u_2 + 2u_3 \\ u_1 + u_2 + 4u_3 \\ u_2 + u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vyřešíme příslušnou soustavu rovnic:

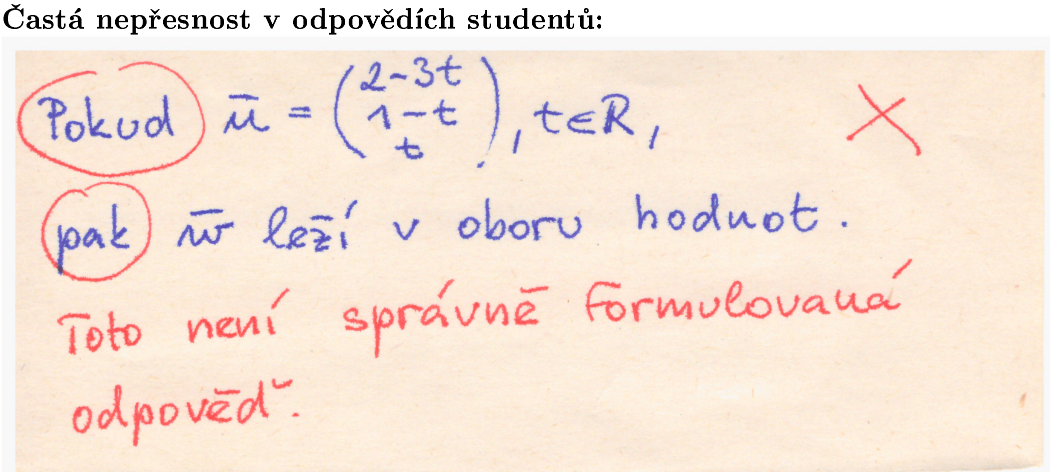
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} u_1 & = & 2 - 3t \\ u_2 & = & 1 - t \\ u_3 & = & t, \quad t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ukázalo se, že vektor $\overline{w}$ vyjde jako výsledek zobrazení g, pokud do g dosadíme vektor $\overline{u}$ v tomto tvaru. Tj. výsledek $(1, 3, 1)^{\mathrm{T}}$ dostaneme např. při dosazení vektorů $(2, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, (5, 2, -1)^{\mathrm{T}}, \ldots$.

Správná odpověď na otázku, zda $\overline{w}$ leží v oboru hodnot, by proto měla být:

Ano, vektor $\overline{\mathbf{w}}$ leží v oboru hodnot zobrazení g, protože $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{g}(\overline{\mathbf{u}})$ pro $\overline{\mathbf{u}} = (\mathbf{2} - \mathbf{3t}, \mathbf{1} - \mathbf{t}, \mathbf{t})^{\mathrm{T}}, \mathbf{t} \in \mathbf{R}$.

Častá nepřesnost v odpovědích studentů:



Srovnejte s: „Pokud $x = \pm 2$, pak $y = 4$ leží v oboru hodnot funkce $f\colon y = x^2$.“ No není to divně? Číslo 4 v oboru hodnot prostě leží. Pokud to chceme podrobněji zdůvodnit: „Číslo 4 leží v oboru hodnot funkce $f\colon y = x^2$, protože existuje x, konkrétně $x = \pm 2$, pro které platí $f(x) = 4$.“

U části f) bohužel mnozí studenti opisovali naprostý nesmysl, který ani nebudu zveřejňovat, aby to někoho nepopletlo.
Jak mělo být f) správně: V e) jsme zjistili, že vektor $(1,3,1)^{\mathrm{T}} \in \operatorname{Im} g$. Zjistili jsme to řešením soustavy rovnic s pravou stranou $\overline{w}$. Po úpravě soustavy se v matici jeden řádek vynuloval, poslední prvek na pravé straně se také vynuloval, a soustava proto měla nekonečně mnoho řešení. Kdybychom ale na pravou stranu dali jiný vektor než $(1,3,1)^{\mathrm{T}}$, mohlo by se stát, že by soustava řešení neměla. Tedy ne každý vektor z $\mathbb{R}^3$ leží v oboru hodnot zobrazení g.
Jiná možnost zdůvodnění: V e) jsme zjistili, že obor hodnot má dimenzi 2, báze oboru hodnot je tvořena např. vektory $(1,1,0)^{\mathrm{T}}, (-1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\operatorname{Im} g$ tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$. To znamená, že zdaleka ne každý vektor z $\mathbb{R}^3$ leží v $\operatorname{Im} g$.
Ještě jiná možnost, kterou studenti posílali, ale je zbytečně složitá, nevyužívá výpočet z části e): Zjistíme, jaké podmínky musí splňovat $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)^{\mathrm{T}}$, aby ležel v oboru hodnot, tj. aby soustava s pravou stranou $\overline{w}$ měla řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 2 & w_1 \\ 1 & 1 & 4 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & w_3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 2 & w_1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}(w_2 - w_1) \\ 0 & 0 & 0 & w_3 - \frac{1}{2}(w_2 - w_1) \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Aby } \overline{w} \in \operatorname{Im} g, \\ \text{musí platit} \\ w_3 = \frac{1}{2}(w_2 - w_1). \end{array}$$

Pro $\overline{w}$ vyšla omezující podmínka, takže ne každé $\overline{w} \in \mathbb{R}^3$ leží v oboru hodnot. Pro vektor $(1,3,1)^{\mathrm{T}}$ z části e) je tato podmínka splněna, zatímco např. pro $(1,1,1)$ ne.

Ostatní příklady ze skupiny D obvykle bez potíží nebo s individuálními chybami. Hojně byl obkreslován příklad D4 – to se vám opravdu tak líbí transformace souřadnic?

Příklad E1

Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru $V \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaného vektory $\overline{a}_1 = (2,-1,0,1)^{\mathrm{T}}, \overline{a}_2 = (-4,3,4,-1)^{\mathrm{T}}, \overline{a}_3 = (4,0,-13,-2)^{\mathrm{T}}$.
Průběžně kontrolujte, že postupně získávané vektory $\overline{b}_i$ jsou navzájem kolmé (kontrolní výpočet zapište).
Řešení:
Výpočty obvykle bez potíží, ale velmi často studenti nekontrolují **kolmost všech dvojic vektorů** $\overline{b}_i, \overline{b}_j, i \neq j$.
Mnoho studentů ověřilo pouze kolmost $\overline{b}_1 \perp \overline{b}_2$ a $\overline{b}_2 \perp \overline{b}_3$. Pozor, kolmé musí být všechny dvojice a není pravda, že by z kolmosti dvojic $\overline{b}_1, \overline{b}_2$ a $\overline{b}_2, \overline{b}_3$ plynula kolmost $\overline{b}_1, \overline{b}_3$. Zkuste si to na příklad s vektory

$$(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \quad (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad (1,0,2)^{\mathrm{T}}.$$

A především se pokuste si to představit geometricky – když je druhý vektor kolmý k prvnímu a třetí je kolmý k druhému, musí být třetí kolmý k prvnímu?
Další **relativně častá chyba** byla, že studenti na závěr vektory **nenormovali**, takže našli pouze bázi ortogonální, ale nikoli ortonormální.