

Versuchsnummer: 106

Gekoppelte Pendel

Konstantin Mrozik
konstantin.mrozik@udo.edu

Marcel Kebekus
marcel.kebekus@udo.edu

Durchführung: 26.11.2019

Abgabe: 03.12.2019

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Zielsetzung	3
1.2	Grundlagen	3
1.3	Doppelpendel	3
2	Durchführung	4
2.1	Aufbau	4
2.2	Versuch	4
3	Auswertung	6
3.1	Längenprüfung	6
3.2	Gleichsinnige Schwingung	7
3.3	Gegensinnige Schwingung	8
3.4	Gekoppelte Schwingung	9
3.5	Kopplungskonstante	9
4	Diskussion	10
	Literatur	12

1 Theorie

1.1 Zielsetzung

Mit dem Versuch sollen die Schwingungsdauern von 2 gekoppelten Pendeln bestimmt werden um Rückschlüsse auf die Kopplungskonstante der Pendel zu ziehen.

1.2 Grundlagen

Bei der Betrachtung eines Pendels der Länge l mit der Masse m und Vernachlässigung der Reibung kann man die Bewegungsgleichung anhand der angreifenden Kräfte bestimmen. Durch eine Auslenkung des Pendels wirkt eine Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ die ein Drehmoment $M = D_p \cdot \Phi$, mit dem Auslenkwinkel Φ und der Winkelrichtgröße D_p , bewirkt. Mit der Kleinwinkelnäherung ergibt sich folgende Bewegungsgleichung

$$J \cdot \ddot{\Phi} + D_p \cdot \Phi = 0 \quad (1)$$

mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2)$$

1.3 Doppelpendel

Wenn zwei Pendel mit einer Feder gekoppelt werden wirkt ein zusätzliches Drehmoment auf die einzelnen Pendel

$$M_1 = D_f \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) \text{ und } M_2 = D_f \cdot (\Phi_1 - \Phi_2)$$

Damit entsteht ein System aus Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} J \cdot \ddot{\Phi}_1 + D \cdot \Phi_1 &= D_f(\Phi_2 - \Phi_1) \\ J \cdot \ddot{\Phi}_2 + D \cdot \Phi_2 &= D_f(\Phi_1 - \Phi_2) \end{aligned}$$

Dieses System beschreibt die Schwingung der beiden Pendel und die Lösung der DGL's sind neue Schwingungsgleichungen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 und den Winkeln α_1 und α_2 als Anfangsbedingung. Wir unterscheiden verschiedene Arten der Schwingung, abhängig von den Auslenkungen zu Beginn.

Gleichsinnig $\alpha_1 = \alpha_2$ Über die Kopplung der Federn wirkt keine Kraft und die Schwingung wird somit nur durch die Gravitation beeinflusst. Die Eigenfrequenz bestimmt sich als

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3)$$

Und die Periodendauer der Schwingung lässt sich mit folgender Formel berechnen

$$T_+ = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\omega_+} \quad (4)$$

Gegensinnig $\alpha_1 = -\alpha_2$ Die beiden Pendel werden um den gleichen Betrag in verschiedene Richtungen ausgelenkt. Dadurch entsteht eine symmetrische Schwingung bei der die Kraft der Kopplungsfeder auf die Pendel betragsgleich aber mit umgekehrtem Vorzeichen wirkt. Mit der Frequenz

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}} \quad (5)$$

K ist in diesem Fall die Kopplungskonstante. Und Periodendauer

$$T_- = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + 2K}} = \frac{2\pi}{\omega_-} \quad (6)$$

Gekoppelt $\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 \neq 0$ Beim Start schwingt nur eines der Pendel und überträgt mit fortlaufender Zeit seine Energie auf das andere Pendel. Das Maximum der Energie eines Pendels ist erreicht wenn das andere Pendel ruht. Die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels wird Schwebung genannt. Die Schwebungsdauer und die Frequenz der Schwebung werden folgendermaßen berechnet:

$$T_S = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = \frac{2\pi}{\omega_S} \quad \omega_S = \omega_+ - \omega_- \quad (7)$$

Die Art der Kopplung zweier Pendel kann über die Kopplungskonstante K beschrieben werden, mit

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \quad (8)$$

2 Durchführung

2.1 Aufbau

Um das gekoppelte Pendel zu untersuchen wurden zwei Pendel mit einer Aufhängung an der Wand befestigt. Um die Reibung der Aufhängung zu minimieren liegen die Pendel nur mit zwei Nadel auf der Aufhängung auf, da so die Angriffsfläche und somit die Reibung minimal ist. Die beiden Pendel besitzen jeweils ein Loch in der Metallstange um die Pendel durch eine Feder miteinander zu koppeln. Die Massen an den Pendeln sind in der Höhe verstellbar.

2.2 Versuch

Die Schwingungsdauern der beiden einzelnen Pendel mit der Länge 72cm wurden zuerst bestimmt. Dazu wurden die Pendel einmal ausgelenkt und die Dauer von 5 Schwingungen wurde mit einer Stoppuhr festgehalten. Diese Methode des Messens wird auch bei den weiteren Messungen verwendet. Nachdem für jedes Pendel diese Messung 10 mal wiederholt wurde, wurden die Schwingungsdauern für die gegensinnige und gleichsinnige

Schwingung bestimmt. Zuletzt wurde bei der Schwebung die Schwingungsdauer und die Schwebungsdauer parallel gemessen. Zwischen den Messungen wurde einmal die Länge des Pendels verstellt um Werte für 72cm und für 80cm zu erhalten.

3 Auswertung

3.1 Längenprüfung

Für die Schwingungsdauer T der beiden frei schwingenden Pendel (mit gleichen Längen):

	Pendel 1 / s (72cm)	Pendel 2 / s (72cm)
	1,688	1,694
	1,668	1,732
	1,688	1,720
	1,700	1,73
	1,674	1,694
	1,688	1,682
	1,712	1,700
	1,694	1,708
	1,70	1,726
	1,686	1,686
Mittelwert \bar{T} (nach Gl. 9):	1,69	1,71
Standartabweichung σ (nach Gl. 10):	0,012	0.018

Tabelle 1: Frei schwingende Pendel

Es wurde dabei versucht die Längen der beiden Pedel möglichst genau gleich einzustellen. Anhand der Mittelwerte der beiden Pendel lässt die Aussage bzw. Näherung treffen, beide Pendel seien exakt gleich lang.

Der Mittelwert bildet sich dabei aus:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad (9)$$

Die Standartabweichung bildet sich aus:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (10)$$

3.2 Gleichsinnige Schwingung

Für die gleichsinnige Schwingung ergaben sich für die beiden Pendellängen $l = 72\text{cm}$ und $l = 80\text{cm}$ folgende Schwingungsdauern T :

	Pendel 1 / s (72cm)	Pendel 2 / s (80cm)
	1,694	1,806
	1,706	1,794
	1,712	1,812
	1,720	1,794
	1,700	1,824
	1,688	1,812
	1,744	1,776
	1,720	1,782
	1,720	1,800
	1,676	1,806
Mittelwert \bar{T} (nach Gl. 9):	1,708	1,801
Standartabweichung σ (nach Gl. 10):	0,019	0,014

Tabelle 2: Gleichsinnige Schwingung

Dabei spiegelt der Mittelwert die Proportionalität $T \sim \sqrt{l}$ (siehe Gl. 4) wieder. Aus den Messwerten ergibt sich eine Schwingungsfrequenz:

	$w / \frac{1}{s}$	
	Pendel 72cm	Pendel 80cm
Aus Messwerten (mit Gl.(4))	$3,68 \pm 0,04$	$3,489 \pm 0,027$
Berechnet (mit Gl.(3))	3,691	3,501

3.3 Gegensinnige Schwingung

Für die gegensinnige Schwinung ergaben sich die Schwingungsdauern:

	Pendel 1 / s (72cm)	Pendel 2 / s (80cm)
	1,574	1,344
	1,568	1,344
	1,582	1,364
	1,576	1,33
	1,588	1,318
	1,574	1,35
	1,568	1,312
	1,588	1,332
	1,556	1,314
	1,564	1,312
Mittelwert \bar{T} (nach Gl. 9):	1,574	1,332
Standartabweichung σ (nach Gl. 10):	0,01	0,017

Tabelle 3: Gegensinnige Schwingung

Dabei ist anzumerken, dass hier nach Gl. 6 ebenfalls eine $T \sim l$ Proportionalität gelten sollte. Dem wird sich im Abschnitt 4 gewidmet.

Aus den Messwerten ergibt sich eine Schwingungsfrequenz:

	$\omega / \frac{1}{s}$	
	Pendel 72cm	Pendel 80cm
Aus Messwerten (mit Gl.(6))	3,992±0,025	4,72 ±0,06
Berechnet (mit Gl.(5))	3,722	3,605

3.4 Gekoppelte Schwingung

Für die Schwingungsdauern und Schwebungsdauern der gekoppelten Schwingung: Die

Tabelle 4: Schwingung und Schwebung des Pendels

Gemessen:	Pendel l=72cm		Pendel l=80cm	
	$T_{\text{Schwingung}} / \text{s}$	$T_{\text{Schwebung}} / \text{s}$	$T_{\text{Schwingung}} / \text{s}$	$T_{\text{Schwebung}} / \text{s}$
	1,538	18,96	1,750	20,52
	1,600	18,67	1,726	21,00
	1,600	18,43	1,744	21,38
	1,550	18,76	1,712	21,43
	1,636	18,95	1,726	19,83
	1,580	19,38	1,724	20,93
	1,632	18,46	1,694	21,84
	1,612	19,21	1,700	20,76
	1,636	18,66	1,706	20,50
	1,588	19,09	1,720	19,70
Mittelwert \bar{T} (nach Gl. 9):	1,597	18,857	1,721	20,789
Standartabweichung σ (nach Gl. 10):	0,033	0,299	0,017	0,647
Berechnete T_S (nach Gl.(7)):		20,030		5,118

berechnete Schwebungsdauer der Pendellänge von 80cm, weicht dabei sehr stark ab. In Abschnitt 4 wird dies genauer diskutiert.

Aus den Messwerten ergibt sich eine Schwingungsfrequenz:

	$\omega / \frac{1}{\text{s}}$	
	Pendel 72cm	Pendel 80cm
Aus Messwerten (mit Gl.7)	$3,93 \pm 0,08$	$3,65 \pm$
Berechnet (mit Gl.7)	-0,031	-0,103

3.5 Kopplungskonstante

Anhand der Gleichung 8 lässt sich die Kopplungskonstante K für die beiden Pendellängen ermitteln:

$$K \text{ für 72cm Pedel} = 0.082 \pm 0,012 \quad (11)$$

$$K \text{ für 80cm Pedel} = 0.293 \pm 0,014 \quad (12)$$

(siehe dazu Abschnitt 4)

4 Diskussion

In der Auswertung kommt es bereits zu einigen unrealistischen und offensichtlichen falschen Werten, die alle aus Berechnungen stammen. Im Folgenden soll die Ursache für die starke Abweichungen analysiert werden.

Dafür soll zu Beginn die Messung an sich überprüft werden. Dazu wird die jeweilige theoretische Schwingungsdauer mit den gemessenen Schwingungsdauern verglichen. Die

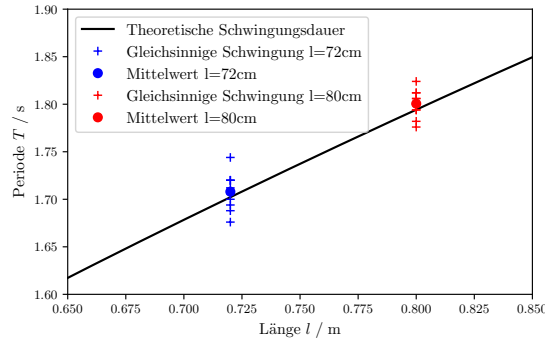


Abbildung 1: Gleichsinnige Schwingungen

theoretische Kurve folgt aus Gleichung 4. Es wird deutlich, dass die gemessenen Schwingungsdauern T_+ mit den zu erwartenden Schwingungsdauern übereinstimmt.

Für die gegensinnige Schwingung ergibt sich der zu erwartende theoretische Werte aus Gleichung 6.

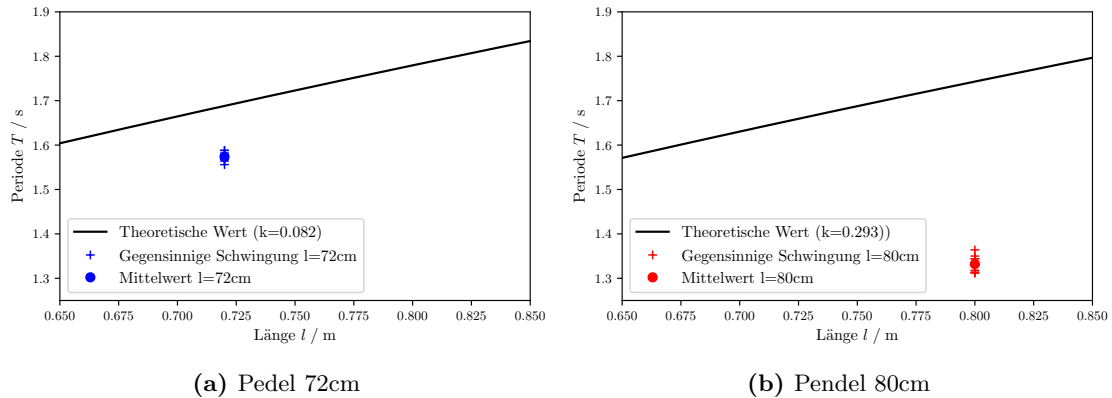


Abbildung 2: Gegensinnige Schwingungsdauer

Hier bei wird besonders gut deutlich, dass bei der Abbildung 2a, besonders aber in Abbildung 2b, große Abweichungen vorliegen. Dies lässt sich nur auf einen Messfehler zurückführen. Weiterführend sei zu beachten, dass die Kopplungskonstante die für die theoretische Kurve verwendet wird, ebenfalls aus diesen falschen Werten stammt.

Dies erklärt weiterführend, warum die Kopplungskonstanten aus 12 nicht die selben sind. Behauptung: Der Messfehler der gegensinnigen Schwingung der Pendel mit der Pendellänge $l = 80\text{cm}$ und $l = 72\text{cm}$ kommt durch die falsch gemessenen Werte.

Wird Gleichung 6 umgestellt, um die Größenordnung der Kopplungskonstante K zu erörtern, so gilt:

$$K = \frac{2\pi^2 l}{T_-^2} - \frac{g}{2} \quad (13)$$

Somit ergibt sich:

$$K \text{ für } 72\text{cm} = 0,833$$

$$K \text{ für } 80\text{cm} = 3,995$$

Für diese neuen Kopplungskonstanten sei gesagt, dass sie nur als Größenordnung dienen. Denn durch die passenden gleichsinnigen Schwingungsdauern T_+ und den fehlerhaften gegensinnigen Schwingungsdauern T_- folgt nach Gleichung 8 eine fehlerhafte Kopplungskonstante K .

Trägt man für diese neuen Kopplungskonstanten die gegensinnigen Schwingungen auf, bestätigt dies die Annahme, dass der Fehler in den gemessenen gegenphasigen Schwingungsdauern.

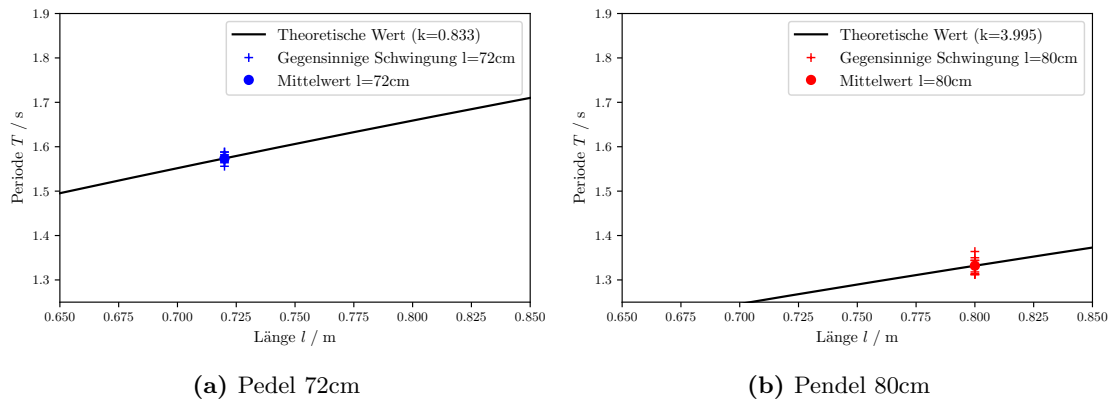


Abbildung 3: Gegensinnige Schwingungsdauer mit Kopplungskonstante

Fazit: Der Fehler findet sich beim Messen der gegensinnigen Schwingungen und zieht sich dann durch die Rechnungen für die berechneten Kopplungskonstante K und die Frequenzen ω so wie für die Schwebungsdauer.

Somit stimmen gemessene und berechnete Werte nicht überein.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [3] *Versuchsanleitung V106 - Gekoppelte Pendel*. TU Dortmund, 2019.

Versuch 106 Gekoppelte Pendel

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_1 = \{ 71,8; 72 \text{ cm} \} \\ L_2 = \{ 71,8; 72 \text{ cm} \} \end{matrix}$$

$$T_1: \{ 8,44; 8,34; 8,44; 8,50; 8,37; 8,44; 8,56; 8,47; 8,50; 8,43 \}$$

5 x T gemessen

$$T_2: \{ (8,56; 8,57; 8,62;) 8,47; 8,66; 8,60; 8,65; 8,47; 8,41; 8,50; 8,54; 8,63; 8,43 \}$$

↑
länge angepasst

$$T_{\text{gleichsinnig}}: \{ 8,47; 8,53; 8,56; 8,60; 8,50; 8,44; 8,72; 8,60; 8,60; 8,38 \} \text{ mit } l=72 \text{ cm}$$

$$T_{\text{gleichsinnig}}: \{ 9,03; 8,97; 9,06; 8,97; 9,12; 9,06; 8,88; 8,91; 9,00; 9,03 \} \text{ mit } l=80 \text{ cm}$$

$$T_{\text{gegenphasig}}: \{ 7,87; 7,84; 7,91; 7,88; 7,94; 7,87; 7,84; 7,94; 7,78; 7,82 \} \text{ mit } l=72 \text{ cm}$$

$$T_{\text{gegenphasig}}: \{ 6,72; 6,72; 6,82; 6,65; 6,59; 6,75; 6,56; 6,66; 6,57; 6,56 \} \text{ mit } l=80 \text{ cm}$$

$$T_{\text{Schwingung}}(s): \{ 8,75; 8,63; 8,72; 8,56; 8,63; 8,62; 8,42; 8,50; 8,53; 8,60 \}$$

$$T_{\text{Schwebung}}(s): \{ 20,52; 21,00; 21,38; 21,43; 19,83; 20,93; 21,84; 20,76; 20,50; 19,70 \}$$

$$T_{\text{Schwingung}}(s): \{ 7,69; 8,00; 8,00; 7,75; 8,18; 7,90; 8,16; 8,06; 8,18; 7,94; 7,94 \}$$

$$T_{\text{Schwebung}}(s): \{ 18,96; 18,62; 18,43; 20,33; 18,76; 18,95; 19,38; 18,46; 19,21; 18,66; 19,09 \}$$

Falko.Barth@tu-ostmund.de

F. Barth