

7.11.19
Versuchsnummer: 102

Drehschwingungen

Konstantin Mrozik
konstantin.mrozik@udo.edu

Marcel Kebekus
marcel.kebekus@udo.edu

Durchführung: 19.11.2019

Abgabe: 26.11.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Vorbereitung	3
2.1 Elastizitätstheorie	3
2.2 Das Hooksche Gesetz	3
2.3 Symmetrien	4
2.4 Elastische Konstanten isotroper Stoffe	4
2.5 Problematik: Elastisches Nachwirken	5
3 Theorie	6
3.1 Bestimmung des Schubmoduls G	6
3.2 Das magnetische Moment eines Permanentmagneten	7
4 Durchführung	8
4.1 Versuchsaufbau	8
4.2 Die Periodendauer T	8
4.3 Die Periodendauer T im B-Feld	9
5 Auswertung	10
5.1 Das Schubmodul G - Messungen ohne B-Feld	10
5.1.1 Berechnung des Schubmoduls G	11
5.1.2 Berechnung der Querkontraktionszahl	11
5.1.3 Berechnung des Kompressionsmoduls Q	11
5.2 Das Magnetische Moment - Messung mit B-Feld	12
6 Diskussion	14
Literatur	15

1 Ziel

Ziel ist es das Torsionsmodul G einer Metallegierung, sowie das magnetische Moment eines Permanentmagneten zu bestimmen.

2 Vorbereitung

2.1 Elastizitätstheorie

Wirkt eine Kraft auf eine Fläche, so führt dies unter anderem zu einer Gestalts- und Volumenänderung. Dabei unterscheidet man in der Mechanik, unter folgenden Kräften:

Kräfte, die an jedem Volumenelement angreifen, wie der Schwerkraft, die zur Translation bzw. Rotation führen.

Kräfte, die an jedem Oberflächenelement angreifen, bewirken Gestalts- und Volumenänderungen.

Wirkt die Kraft senkrecht zur Oberfläche so spricht man von der Normalspannung σ bzw. vom Druck p . Wirkt die Kraft parallel zur Oberfläche, dann spricht man von der Tangential- bzw Schubspannung τ .

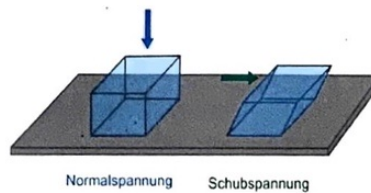


Abbildung 1: Spannungskomponenten

Geschieht diese Krafteinwirkung im elastischen Bereich des Materials, so bilden die elastischen Konstanten den Proportionalitätsfaktor zwischen der wirkenden Spannung und der Deformation.

Man spricht hierbei vom Hookschen Gesetz 2.2.

2.2 Das Hooksche Gesetz

Bewirkt die Spannung beim Material eine elastische Verformung, so kehrt dieser, nach dem Einwirken der Kraft wieder in seine Ausgangsform zurück (reversibler Vorgang). Man nennt diesen Bereich, elastischen bzw. hookschen Bereich. Dabei gilt:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad \text{bzw.} \quad P = Q \frac{\Delta V}{V} \quad (1)$$

2.3 Symmetrien

Ein vollständiges Hooksches Gesetz zu formulieren, ist dabei nicht auf die einfach dargestellte Form wie in Gleichung 2.2 beschränkt. Denn eine niedrige Symmetrie des Materials führt zu richtungsabhängigen Kräften, welche mehr Konstanten benötigen, um die Deformation vollständig zu beschreiben. Jeweils 3 Konstanten werden für die Gestalts- und die Volumenelastizität und 6 Konstanten für die Deformation benötigt. Diese Konstanten führen somit auf eine 6x6- Matrix, also insgesamt 36 Konstanten. Diese Vielzahl an Konstanten, kann durch Materialsymmetrien (z. B. Energieprinzip) verringert werden.

2.4 Elastische Konstanten isotroper Stoffe

In der Praxis haben sich für isotrope Stoffe vier Elastische Konstanten durchgesetzt.

Elastizitätsmodul E : Das Elastizitätsmodul E beschreibt die relative Längenänderung in Spannungsrichtung bei einer wirkenden Normalspannung σ .

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (2)$$

Schubmodul, Torsionsmodul G : Das Schub- bzw. Torsionsmodul G beschreibt die Gestaltelastizität bei einer wirkenden Schubspannung τ

$$\tau = G \alpha \quad (3)$$

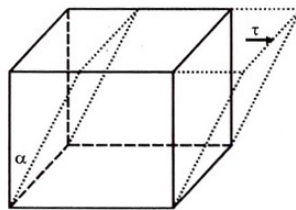


Abbildung 2: Schubmodul G , [5, S. 4]

Kompressionsmodul Q : Das Kompressionsmodul Q beschreibt die Volumenelastizität.

Poissonsche Querkontraktionszahl μ : Die Poissonsche Querkontraktionszahl μ beschreibt die Längenänderung durch die Normalspannung σ senkrecht zu Richtung von σ .

$$\mu := -\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{L}{\Delta L} \quad (4)$$

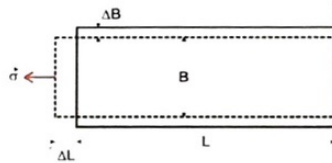


Abbildung 3: Poissonsche Querkontraktionszahl μ , [5, S. 3]

Dabei sind die vier Konstanten G , E , Q und μ nicht unabhängig von einander. Es gilt folgende Beziehung:

$$E = 2 G (\mu + 1) \quad (5)$$

$$E = 3 (1 - 2\mu) Q \quad (6)$$

2.5 Problematik: Elastisches Nachwirken

Das elastische Nachwirken ist eine Eigenschaft von Materialien, die nicht augenblicklich die Lage ihres definitiven Gleichgewichts annehmen, sondern die im Laufe der Zeit bei fortdauernden wirkenden äußeren Kräften noch weitere Änderungen erfahren und nachdem die äußeren Kräfte aufgehört haben zu wirken, nicht sofort, sondern erst nach einiger Zeit in den ursprünglichen Zustand wieder zurückkehren. [3] Dies gilt besonders bei Materialien mit niedrigen Schmelztemperaturen.

Dies führt zu großen Fehlerquellen bei dem Versuch die elastischen Konstanten statisch zu messen.

Um diese Fehlerquelle zu minimieren, verwendet man dynamische Methoden (s. Kapitel: 4).

3 Theorie

3.1 Bestimmung des Schubmoduls G

Um das Schubmodul G zu bestimmen wird ein zylindrischer Stab oder Draht des zu untersuchenden Materials in eine Vorrichtung gespannt. Bei dieser ist das obere Ende fest fixiert und das untere Ende kann gedreht werden, so dass auf das Material eine Schubspannung wirkt.

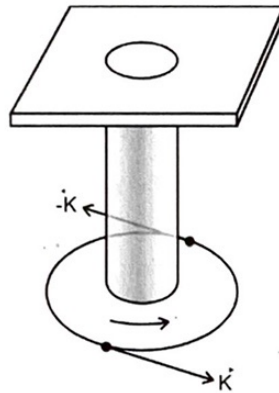


Abbildung 4: Torsion eines Drahtes/Stabes,[5, S. 5]

Die zwei entgegengesetzten Kräfte K wirken dabei auf zwei gegenüberliegenden Punkten und führen zu einer Deformation des Körpers.

Mit der Beziehung 3 und dem Scherungswinkel α , Torsionswinkel ϕ und der Körperlänge L folgt:

$$M = \int_0^R 2\pi \frac{G}{L} \phi r^3 dr = \frac{\pi G R^4}{2L} \phi \quad (7)$$

Mit der Richtgröße D

$$D := \frac{\pi G R^4}{2L} \quad (8) \quad \checkmark$$

Hierbei spielt die elastische Nachwirkung aus 2.5 eine bedeutende Rolle. Um diese Fehlerquelle zu minimieren, nutzt man statt dieser (in Abbildung 4 dargestellten) Statischen Methode eine Dynmaische Methode, bei der die Schubspannung zeitlich periodisch wirkt und zusätzlich eine Kugelmasse m_k an den Draht befestigt wird.

Somit führt eine Auslenkung aus der Gleichgewichtslage zu einer ungedämpften harmonischen Drehschwingung mit der Periodendauer T aufgrund der entgegenwirkenden Drehmomente M_{Draht} und M_{Masse} :

$$M_{\text{Draht}} + M_{\text{Masse}} = 0 \quad (9)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{D}} \quad \text{mit} \quad \theta_{\text{Kugel}} = \frac{2MR^2}{5} \quad (10)$$

wobei θ das Trägheitsmoment der Kugel ist. ✓

Mit Gleichung 8 und 10 folgt somit:

$$G = \frac{16\pi m_k R_k^2 L}{5T^2 R^4} \quad (11)$$

3.2 Das magnetische Moment eines Permanentmagneten

Für das magnetische Moment \vec{m} gilt

$$\vec{m}_{\text{mag}} := p \vec{a} \quad (12)$$

mit p als Polstärke und \vec{a} als Abstand zwischen den Polen.

Befindet sich der Magnet in einem homogenen B-Feld, resultiert ein magnetisches Drehmoment.

$$M_{\text{Mag}} = m_{\text{mag}} B \sin(\gamma) \quad (13)$$

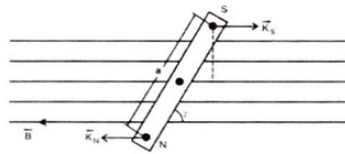


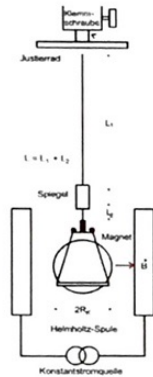
Abbildung 5: Permanentmagneten in einem äußeren Magnetfeld \vec{B} , [5, S. 12] ✓

Mit einer Kleinwinkelnäherung ergibt sich für die Periodendauer T_{mag} :

$$T_{\text{mag}} = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{m_{\text{mag}} B + D}} \quad (14)$$

4 Durchführung

4.1 Versuchsaufbau



(a) Versuchsaufbau Skizze, [5, S. 9]



(b) Foto des Versuchsaufbaus

Die Kugel soll im Versuch nicht pendeln um Fehler in den Versuchswerten zu vermeiden. Daher ist unter der Kugel eine Vorrichtung angebracht um nach jeder Messreihe die Pendelbewegung zu dämpfen.

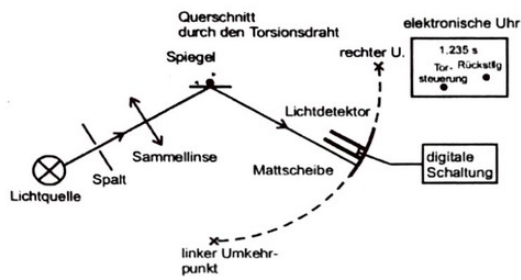
Um die Periodendauer zu messen muss mithilfe des Rings an der Aufhängung des Drahtes der Draht verdreht werden, wobei darauf geachtet werden muss dass der Spiegel bei der Schwingung den Lichtstrahl über die Photodiode lenkt.

Das Experiment zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Schallgeschwindigkeit war nicht durchführbar, daher haben wir hierfür einen vorgegebenen Wert erhalten.

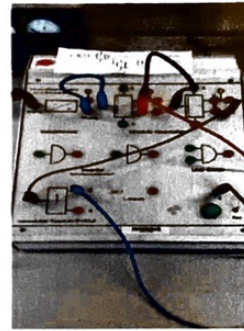
4.2 Die Periodendauer T

Im ersten Versuch darf an der Helmholtzspule kein Strom anliegen, da ausschließlich die Elastizität des Stoffes Einfluss auf die Periodendauer haben soll. Zu Beginn des Versuches wird der Magnet im inneren der Kugel parallel zum Draht eingestellt. Die Lampe am Versuchsaufbau wird eingeschaltet und das Licht trifft über eine Linse auf den am Draht befestigten Spiegel. Wenn der Draht nun ausgelenkt wird, läuft der Lichtstrahl über den mitschwingenden Spiegel periodisch über die Photodiode.

Die Photodiode ist über eine elektrische Schaltung an die Quarzuhr gekoppelt. Die elektrische Schaltung lässt über eine bistabile Kippstufe (Flip-Flop) das erste Signal passieren um die Stoppuhr zu starten. Mithilfe einer weiteren bistabilen Kippstufe wird das 2. Signal unterdrückt. Das dritte Signal stoppt die Quarzuhr und durch die monostabile Kippstufe und einen weiteren Flip-Flop wird die Uhr mit dem 4. Signal zurück gesetzt.



(a) Lichtuhr Skizze,[5, S. 10]



(b) Foto der Schaltung

4.3 Die Periodendauer T im B-Feld

Um die Stärke des Permanentmagneten in der Kugel zu berechnen muss dieser senkrecht zum Draht ausgerichtet werden, da so die Fehler durch das Erdmagnetfeld minimiert werden. Die Stromstärke an der Helmholtzspule wird nun von 0.1 Ampere bis 1 Ampere in 0.1 Ampere Schritten erhöht und für jede Stromstärke werden 10 Werte gemessen.

5 Auswertung

Zu Beginn, muss das Gesamtträgheitsmoment θ_{Ges} ermittelt werden. Dies ergibt sich aus dem Trägheitsmoment der Kugel θ_{Kugel} (aus Gleichung 10) und dem Trägheitsmoment der Kugelhalterung $\theta_{\text{Halterung}}$.

$$\theta_{\text{Kugel}} = 0.51220 \pm 0.00020 \text{ kgm}^2$$

$$\theta_{\text{Halterung}} = 2.25 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$$

$$\theta_{\text{Ges}} = 0.51220 \pm 0.00020 \text{ kgm}^2$$

5.1 Das Schubmodul G - Messungen ohne B-Feld

	T(s)
	18,696
	18,699
	18,702
	18,763
	18,699
	18,695
	18,591
	18,647
	18,673
	18,665
	18,663
	18,635
Mittelwert (nach Gl. 15):	\bar{T} 18,667
Unsicherheit (nach Gl. 16):	σ 0,029

Tabelle 1: Periodendauer T

$$\text{Mittelwert: } \bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad (15)$$

$$\text{Unsicherheit: } \bar{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (T_j - \bar{T})^2}}{\sqrt{n}} \quad (16)$$

5.1.1 Berechnung des Schubmoduls G

Benötigt werden folgende Werte, um das Schubmodul G nach Gleichung 11 zu bestimmen. Das Elastizitätsmodul E des Materials sei gegeben.

	L / cm	d / mm	m_k / g	$2R_k$ / mm	E / 10^{11} Pa
	66,38	0,19 0,19 0,2 0,2	512,2	50,76	2.100
Mittelwert:		0,0194			
Ungenauigkeit:	0,07	0,0004	0,205	0,0036	0.005

Tabelle 2: Messgrößen der Apparatur

Für das Schubmodul G ergibt sich somit:

$$G = (7,3 \pm 0,7) \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

Dies entspricht einem prozentualen Fehler von 9,6% (nach Gl. 17).

5.1.2 Berechnung der Querkontraktionszahl

Mit der Gleichung 6 ergibt sich für die Poissonsche Querkontraktionszahl μ

$$\mu = 0,45 \pm 0,13$$

Dies entspricht einem prozentualen Fehler von 28,9% (nach Gl. 17).

5.1.3 Berechnung des Kompressionsmoduls Q

Mit der Gleichung 6 folgt für das Kompressionsmodul Q

$$Q = (0,7 \pm 1,7) \cdot 10^{12} \text{ Pa}$$

Dies entspricht einem prozentualen Fehler von 242,8% (nach Gl. 17).

Der relative Gauß-Fehler ergibt sich dabei aus:

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{k1}}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{k2}}{k_2}\right)^2 + \dots} \cdot 100\% \quad (17)$$

5.2 Das Magnetische Moment - Messung mit B-Feld

Für das Magnetische Feld B im Inneren einer Helmholtz-Spulen gilt:

$$B = \frac{8}{\sqrt{125}} \cdot \frac{\mu_0 I N}{R} \quad (18)$$

wobei $N = 390$ die Windungszahl und $R = 78\text{mm}$ der Radius der Spulen ist.
Aus Gleichung 14 folgt:

$$\rightarrow m_{\text{mag}} B + D := \zeta = \frac{4\pi^2 \theta_{\text{Ges}}}{T_{\text{m}}^2} \quad (19)$$

Damit ist ζ eine lineare Funktion.

Daraus folgen die Parameter m_{mag} , D und B .

$$\zeta = m_{\text{mag}} B + D \rightarrow f(x) = ax + b \text{ mit } b = D \text{ und } a = m_{\text{mag}}$$

Die Messwerte sind auf der folgenden Seite in den Tabellen 3 und 4 zu finden.

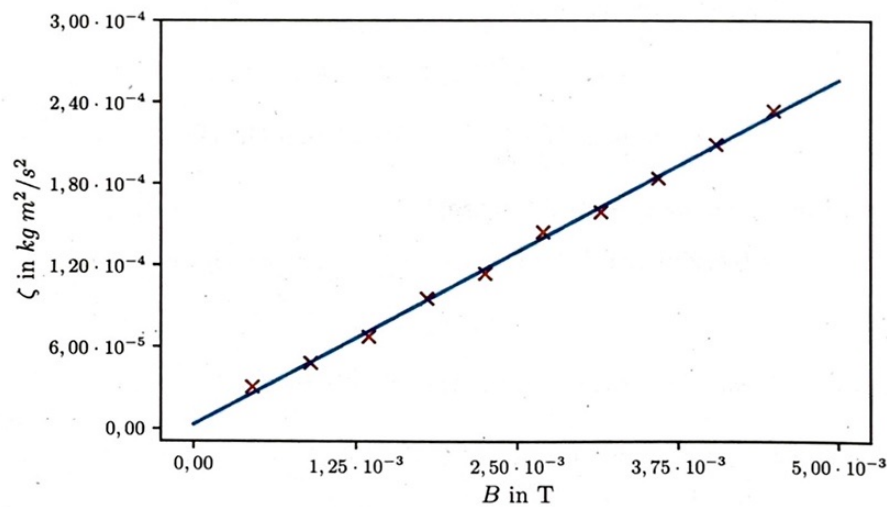


Abbildung 8: ζ -B-Diagramm

Somit ergibt sich:

$$m_{\text{mag}} = 0,05 \pm 8,41 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kgm}^2}{\text{Ts}^2}$$

S.O.

$$D = 3,55 \cdot 10^{-6} \pm 2,35 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

S.O.

Tabelle 3: Periodendauer T des Drahtes mit B-Feld von 0,1A - 0,5A

I	0,1A	0,2A	0,3A	0,4A	0,5A
T / s	13,168	10,583	8,871	7,444	6,639
	13,156	10,577	8,873	7,444	6,856
	13,151	10,564	8,869	7,465	6,840
	13,140	10,565	8,864	7,436	6,849
	13,130	10,558	8,860	7,440	6,860
	13,103	10,552	8,855	7,462	6,855
	13,069	10,530	8,850	7,440	6,850
	13,085	10,527	8,842	7,463	6,842
	13,074	10,518	8,835	7,445	6,835
	13,011	9,773	8,823	7,428	6,823
Mittelwert \bar{T} / s (nach Gl. 15):	13,109	10,475	8,854	7,447	6,825
B-Feld / T:	4,50E-04	8,99E-04	1,35E-03	1,80E-03	2,25E-03
$\zeta / \frac{kgm^2}{s^2}$:	3,08E-05	4,83E-05	6,76E-05	9,56E-05	1,14E-04

Tabelle 4: Periodendauer T des Drahtes mit B-Feld von 0,6A - 1,0A

I	0,6A	0,7A	0,8A	0,9A	1,0A
T / s	4,722	5,777	5,384	5,018	4,733
	6,237	5,767	5,378	5,029	4,779
	6,261	5,784	5,376	5,077	4,747
	6,227	5,767	5,362	5,045	4,765
	6,208	5,795	5,376	5,008	4,762
	6,229	5,762	5,363	5,038	4,728
	6,227	5,774	5,368	5,052	4,777
	6,178	5,784	5,359	5,061	4,756
	6,183	5,761	5,364	5,034	4,792
	6,163	5,791	5,373	5,028	4,789
Mittelwert \bar{T} / s (nach Gl. 15):	6,064	5,776	5,370	5,039	4,763
B-Feld / T:	2,70E-03	3,15E-03	3,60E-03	4,05E-03	4,50E-03
$\zeta / \frac{kgm^2}{s^2}$:	1,44E-04	1,59E-04	1,84E-04	2,09E-04	2,34E-04

6 Diskussion

Die Ungenauigkeiten in den gemessenen Werten sind durch das Pendeln der Messapparatur zu erklären, da schon kleine Störungen die Kugel zum Pendeln anregen und somit die Messung verfälschten. Außerdem traten bei der Messung des magnetischen Moments Fehler auf, weil es mühsam und ungenau war die Stellschraube so zu bewegen, dass der Spiegel den Lichtstrahl beim pendeln auch über die Photodiode lenkt und nicht nur daneben pendelt. Messabweichungen die deutlich von den anderen Werten der Messung abweichen wurden aus den Berechnungen gestrichen. Fehler durch das stoppen der Uhr konnten in diesem Versuch vernachlässigt werden, da durch die Quarzuhr und die Schaltung sehr genaue Messwerte entstehen. Die Ergebnisse des ersten versuchs scheinen realistisch, mit der Ausnahme des Wertes für Q dessen Fehler viel zu groß ist. Der Fehler von Q kann durch eine ungenaue Ablesung und große Fehlerfortpflanzung erklärt werden. Die Werte für das magnetische Moment scheinen auch realistisch.

Woher kommt diese Vermutung?

- Vergleich mit Literaturwerten von Stahl
- Kopie d. orig. Messdata

Literatur

- [1] Karl Scheel Arnold Berliner. *Physikalisches Handwörterbuch*. 2nd edition. Verlag von Julius Springer 1932, 1932, S. 277.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] *Meyers Großes Konversations-Lexikon, Band 5*. Leipzig, 1906, S. 589–590.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] *Versuchsaneitung V102 - Drehschwingung*. TU Dortmund, 2019.