Versuchsnummer: 355

Gekoppelte Schwingkreise

Konstantin Mrozik
konstantin.mrozik@udo.edu

Marcel Kebekus
marcel.kebekus@udo.edu

Durchführung: 21.01.2020

Abgabe: 28.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

Ziel

Betrachung von Energieübertragung zwischen zwei miteinander kapazitiv gekoppelt Schwingkreise mit und ohne erzwungende äußere Anregung.

1 Theorie

1.1 Gekoppelte System allgemein

Von einem gekoppelten System spricht man, wenn zwei schwingungsfähige Systeme miteinander Verbunden sind, sodass das eine System Einfluss auf das andere System nimmt. Dabei findet eine Energieübertragung von dem einen ins andere System statt. Zudem ist das Verhalten des Gesamtsystems bei Einfluss eines äußeren periodisch einwirkenden Erregers intressant, da diese erzwungenden Schwingungen zu speziellen Resonanzphänomenen führen.

1.2 Kapazitiv gekoppete Schwingkreise

Die zwei Schwingkreise bestehen jeweils aus einem ohmschen Widerstand, einer Induktivität L (hier: Spule) und einer Kapazität C (hier: Kondensator). Die Kopplung der System entsteht aufgrund eines Kopplungskondensator C_k.

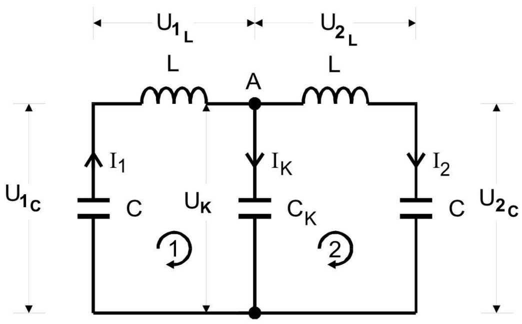

Abbildung 1: Schaltbild von zwei Schwingkreise, die über den Kopplungskondensator C_k gekoppelt sind. [3, S. 299]

Dabei gilt für den Strom an Punkt A die Kirchhoffsche Regel

$$I_k = I_1 - I_2 \tag{1}$$
$$0 = U_{1_C} + U_{1_L} + U_k \tag{2}$$
$$0 = U_{2_C} + U_{2_L} + U_k \tag{3}$$

mit U_C und U_L ergeben sich somit zwei homogenen Differentzialgleichung zweiter Ordung, jeweils für den Schwingkreis 1 und 2.

$$U_C = \frac{1}{C}\int I dt \tag{4}$$

$$U_L = L \cdot \dot{I} \tag{5}$$

Die Lösung ergeben sich dann als:

$$I_1(t) = \frac{1}{2}\left(I_{1_0} + I_{2_0}\right) cos\left(2\pi v^+ t\right) + \frac{1}{2}\left(I_{1_0} - I_{2_0}\right) cos\left(2\pi v^- t\right) \tag{6}$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2}\left(I_{1_0} + I_{2_0}\right) cos\left(2\pi v^+ t\right) - \frac{1}{2}\left(I_{1_0} - I_{2_0}\right) cos\left(2\pi v^- t\right) \tag{7}$$

mit der Schwingfrequenz v^+ und v^-

$$v^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{8}$$

$$v^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)^{-1}}} \tag{9}$$

Dabei spricht man von den Fundermentalschwingungen, bei denen im 1 Fall $I_{1_0} = I_{2_0}$ die Anteil aus $(I_{1_0} - I_{2_0})$ verschwinden und somit $I_1(t) = I_2(t)$ ist, also das System phasengleich mit v^+ schwingt. Und bei dem 2 Fall $I_{1_0} = -I_{2_0}$ verschwindet $(I_{1_0} + I_{2_0})$ es folgt somit $I_1(t) = -I_2(t)$, also gegenphasig Schwingung mit v^-.
Lässt man ein System in Ruhe und lenkt das andere aus, also $I_{1_0} \neq 0; I_{2_0} = 0$ so entsteht zwei zeitgleiche Schwingungen mit einer hohen Frequenz $\frac{\nu^+ + \nu^-}{2}$ und einer niedrigen Frequenz $\frac{\nu^+ - \nu^-}{2}$ welche man als Schwebung bezeichnet.

$$I_1\left(t\right) = I_{1_0} cos\left(\frac{\nu^+ + \nu^-}{2} t\right) cos\left(\frac{\nu^+ - \nu^-}{2} t\right) \tag{10}$$

$$I_2\left(t\right) = I_{2_0} sin\left(\frac{\nu^+ + \nu^-}{2} t\right) sin\left(\frac{\nu^+ - \nu^-}{2} t\right) \tag{11}$$

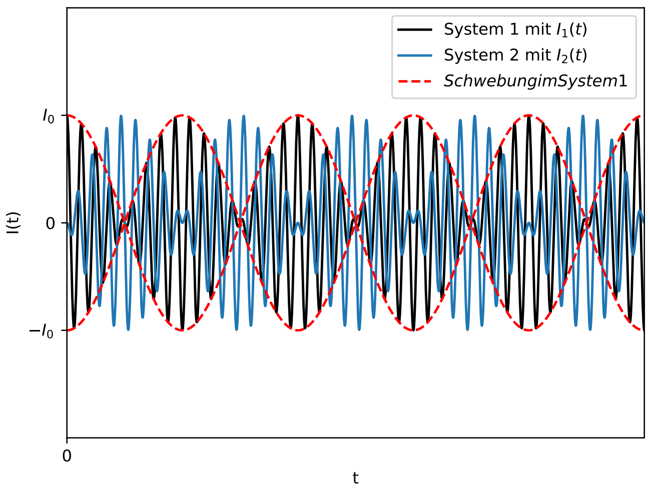

Abbildung 2: Darstellung einer Schwebung. Dabei wird der Energieaustausch zwischen den System deutlich. Das System 2 befindet sich zu Beginn in Ruhe ($I_2(0) = 0$) während das System 1 zu Beginn ausgelenkt ist ($I_1(0) = I_0$). Energie wird dabei von System 1 auf System 2 übertragen, bis schließlich die gesamte Energie in System 2 ist und der Prozess umgekehrt wiederholt wird.

1.3 Gekoppelte Schwinkreise mit Erreger

Wird ein Schwingkreis mit einer Erregerspannung (hier: eine Sinusspannung) an, so erhält man nach den Kirchhoffschen Gesetzen

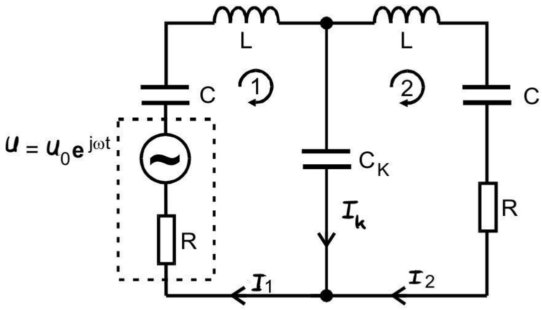

Abbildung 3: Gekoppelte Schwinkreise mit Sinusgenerator [3, S. 303]

$$U = \left(z_C + z_L + z_{C_k} + z_R\right) I_1 - z_{C_k} I_2 \tag{12}$$

$$0 = \left(z_C + z_L + z_{C_k} + z_R\right) I_2 - z_{C_k} I_1 \tag{13}$$

mit den passenden Impedanzen z_C, z_L und z_R

$$z_C = \frac{1}{i\omega C} \qquad z_L = i\omega L \qquad z_R = R$$

folgt schließlich die frequenzabhängige Gesamtimpedanz $Z(\omega)$.

$$Z(w) = \omega L - \frac{1}{w\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_k}\right)^{-1}} \tag{14}$$

Daraus folgen die Maxima für den Strom $I_2(w)$ mit

$$|I_2(w^+)| = U \cdot \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC}}} \qquad |I_2(w^-)| = U \cdot \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC}(1 + \frac{C}{C_k})}} \tag{15}$$

2 Durchführung

2.1 Justierung

Zunächst werden die beiden Schwingkreise auf die gleiche Resonanzfrequenz eingestellt. Die Größenordung ermittelt man dabei, indem das Strommaximum des linken Schwingkreises sucht. Die dazu gehörige Frequent sntspricht dabei in etwa der Resonanzfrequent. Für eine genauere Ermittlung untersuche man mit Hilfe der Lissajous-Figure die Phase φ zwischen der Generatorspannung und dem Schwingkreisstrom. Im Falle der Resonanz ist $\varphi = 0$. Nun wird der zweite Schwinkreis mithilfe einer regelbaren Kapazität auf diese Resonanzfrequenz abgestimmt.

Für einen groben Frequenzbereich für einen beobachtbaren Energieaustausch gilt mit $L = 32\text{mH}$ und $C = 0.8nF$

$$\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{32 \cdot 10^{-3} \cdot 0.8 \cdot 10^{-9}}} \approx 31.5\text{kHz} \tag{16}$$

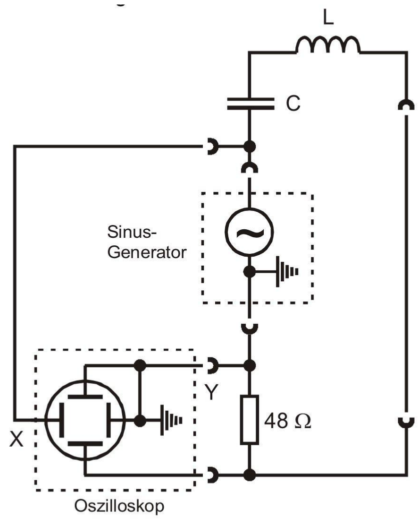

Abbildung 4: Schaltung zur genauen Bestimmtung der Resonanzfrequenz. Dabei wird ein Schwingkreis an einen Sinusgenerator angeschlossen. Jeweils der Strom des Generators und des Schwingkreises werden auf dem Oszilliskop im XY-Betrieb betrachtet. [3, S. 305]

2.2 Austausch der Schwingungsenergie zwischen den Einzelsystemen

Mit einer Rechteckspannung wird einer der Schwinkreise angeregt während der andere keine externe erregung ausgesetzt wird. Die beiden Schwingkreise sind dabei über den Kopplungskondensator C_k gekoppelt. Die Schwingungsenergie kann mithilfe des Oszilliskop am Kopplungsglied betrachtet werden.

Die entstehende Schwebung der Form 12 und 13 wird am Oszilliskop beobachtet. Somit kann ein Verhältnis zwischen der Schwingungs- und Schwebungsfrequenz in Abhängigkeit der Größe des Koppelkondensator C_k mit $2 \leq C_k \leq 12$nF ermittelt werden, durch die Anzahl der Schwingsmaxima innerhal einer Schwebungperiode.

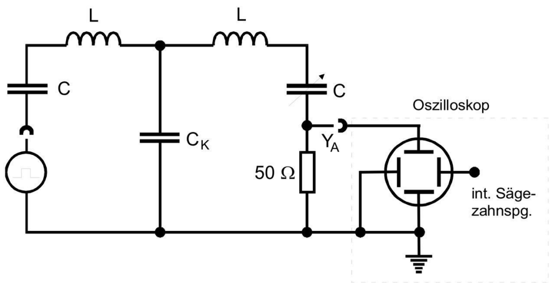

Abbildung 5: Schaltbild zur Untersucheng der Energieübertragung zwischen den Einzelsystemen durch Schwebungsvorgänge. [3, S. 306]

2.3 Fundermentalschwingungen

Die rechtecksignal aus Abbildung 5 wird durch ein Sinussignal ersetzt. Mit den Lissajous-Figuren bei denen die X-Komponente die Generatorspannung und die Y Komponente den Schwingkreis wiederspieglet. Man findet die Fundermentalschwingungen in Abhängigkeit von C_k bei $\varphi = 0$ bzw $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

2.4 Verlauf der Ströme

Nun betrachte man den Verlauf der Ströme I_2 und I_k in Abhängigkeit der Frequenz.

3 Auswertung

3.1 Berechnung Frequenzen

Zu Beginn werden die Frequenzen der Fundamentalschwingungen theoretisch bestimmt und ihr Verhältnis wird mit den experimentell bestimmten Werten verglichen. Mit 8 und 9 ergibt sich:

C_k	ν^-	ν^+
1,01	$(475 \pm 3) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$	$305 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$
2,03	$(401{,}8 \pm 2{,}4) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$	$305 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$
3,00	$(374{,}1 \pm 1{,}8) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$	$305 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$
4,00	$(358{,}5 \pm 1{,}4) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$	$305 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$
5,02	$(348{,}54 \pm 1{,}19) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$	$305 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$
6,47	$(339{,}4 \pm 0{,}9) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$	$305 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$
8,00	$(333{,}3 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$	$305 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$
9,99	$(328{,}0 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$	$305 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$

Tabelle 1: Frequenzen der Fundamentalschwingungen

C_k	Verhältnis der Frequenzen	Experiment	Abweichung von Theorie und Experiment
1,01	$2{,}30 \pm 0{,}04$	2	$0{,}131 \pm 0{,}015$
2,03	$3{,}67 \pm 0{,}08$	2	$0{,}455\,627\,0 \pm 0{,}012\,000\,3$
3,00	$4{,}957 \pm 0{,}118$	4	$0{,}193 \pm 0{,}019$
4,00	$6{,}27 \pm 0{,}15$	6	$0{,}043 \pm 0{,}024$
5,02	$7{,}61 \pm 0{,}19$	7	$0{,}080 \pm 0{,}023$
6,47	$9{,}51 \pm 0{,}25$	9	$0{,}053 \pm 0{,}025$
8,00	$11{,}5 \pm 0{,}3$	11	$0{,}044 \pm 0{,}026$
9,99	$14{,}1 \pm 0{,}3$	13	$0{,}078 \pm 0{,}025$

Tabelle 2: Frequenzverhältnisse

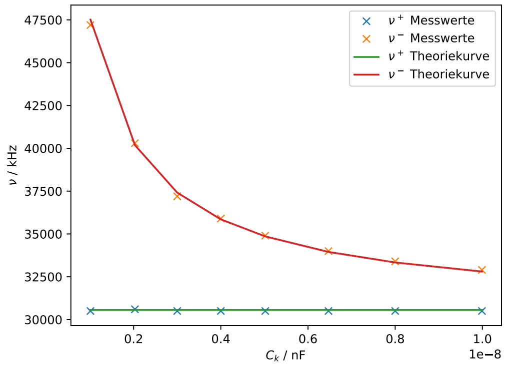

Abbildung 6: Verlauf der Frequenzen

3.2 Stromabhängigkeit von der Frequenz

Im folgenden wird die Abhängigkeit des Stromes von den Frequenzen für verschiedene C_k dargestellt.

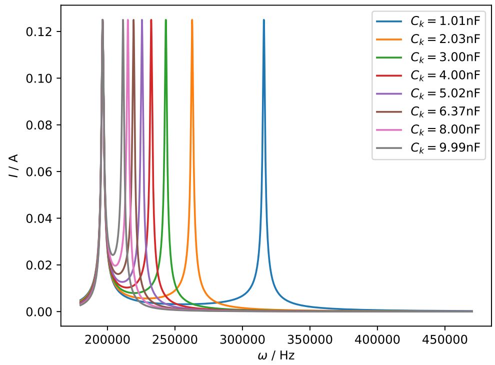

Abbildung 7: Stromverlauf in Abhängigkeit der Frequenzen

4 Diskussion

Die Verhältnisse der Frequenzen liegen nah an den theoretisch berechnteten Werten,ihre Fehler liegen zwischen 4% und 45% wobei der Fehler von 45% eine Ausnahme ist und auf schlechtes ablesen der Maxima zurücklgeführt werden kann.
Auch der Velauf der Frequenzen in Abhängigkeit von den C_k zeigt nur geringe Abweichungen von den theoretischen Werten.
Bei der Abhängigkeit des Stromes I_2 von den Frequenzen fällt auf das sich die Maxima des Graphen in einem Frequenzbereich weit entfernt von den untersuchten Frequenzen liegt. Diese Abweichung kann auf statistische Fehler im Versuchsaufbau zurükgeführt werden.

Literatur

[1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.

[3] *Versuchsaneitung 355 - Gekoppelte Schwingkreise*. TU Dortmund, 2019.