**Versuchsnummer: 354**

# Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Konstantin Mrozik
konstantin.mrozik@udo.edu

Marcel Kebekus
marcel.kebekus@udo.edu

Durchführung: 14.01.2020

Abgabe: 21.01.2020
Korrektur: 27.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Ziel

Im Folgenden soll das Zeitgesetz von gedämpften elektrischen Schwingungen untersucht und mit der Theorie verglichen werden. Zudem soll die Erscheinung einer Resonanz eines Schwingkreises durch eine erzwungende Schwingung analysiert werden.

# 2 Theorie

Ein RCL-Kreis besteht aus zwei Speicher Bausteinen. Einer Kapazität $C$ (Kondensator) und einer Induktivität $L$ (Spule) sowie aus einem ohmschen Widerstand $R$. Der Strom pendelt dabei zwischen den Speichern hin und her, während der Widerstand die elektrische Energie irreversibel in Joulsche Wärme umwandelt, und zu einer dämpfung der Schwingung führt.

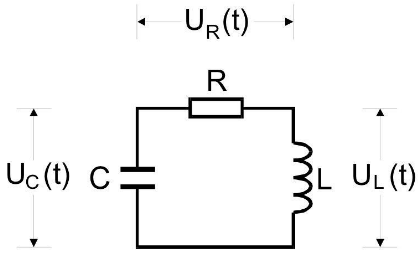



**Abbildung 1:** Gedämpfte Schwingkreis mit Widerstand $R$,Kapazität $C$, Induktivität $L$ [4, S. 284]

Über die 2. Kirchhoffsche Regel ergibt sich für die Spannung

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0 \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned} U_R(t) &= R \cdot I(t) \\ U_C(t) &= \frac{Q(t)}{C} \\ U_L(t) &= L\frac{dI}{dt} \\ I(t) &= \frac{dQ}{dt} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0 \tag{2}$$

woraus das charakteristische Polynom folgt.

$$k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0 \tag{3}$$

mit dem Ansatz $I(t) = Ae^{kt}$ ergibt sich mit der pq-Formel

$$k = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} \tag{4}$$

Der Schwingfall ergibt sich damit für die Bedingung, dass der Wurzelinhalt aus 4 negativ ist. Also

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \tag{5}$$

Das Folgerung ist ein oszillierender Strom

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} cos(\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{1}{2L})^2 t} \tag{6}$$

Dabei ist der Faktor $\frac{R}{2L}$ für die einhüllende Form verantwortlich, er beschreibt die Dämpfung der Schwingung wobei der ohmsch Widerstand $R$ als Dämpfungswiderstand bezeichnet wird.

Ist der Wurzelausdruck aus 5 $\sqrt{[...]} = 0$ so spricht man vom aperiodischen Grenzfall, hierfür gilt die Bedingung

$$\frac{R_{ap}^2}{4L} = \frac{1}{LC} \tag{7}$$

hieraus ergibt sich für den Strom die Form

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} = Ae^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} \tag{8}$$

Dabei konvergiert die Funktion am schnellsten gegen Null ohne eine Überschwingung.

Zur Untersuchung frequenzabhängiger Resonanz innerhalb des Schwingkreises durch eine oszillierende Erregerspannung $\tilde{U}(w)$ mit einer Maximalamplitude $U_0$ wird die Kondensatorspannung $U_C$ in abhängigkeit der Frequenz $w$ gemessen. Es gilt der Zusammenhang

$$U_C(w) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LCw^2)^2 + w^2R^2C^2}} \tag{9}$$

Die Resonanzfrequenz $w_{res}$ ist dabei die Frequenz bei der das Verhältnis $\frac{U_C(w)}{U_0}$ ihren Maximum erreicht.

$$w_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \tag{10}$$

Die frequenzabhängige Phase zwischen $U_C(w)$ und $\tilde{U}(w)$ läst sich dabei über den Vergleich des zeitlichen Abstandes $a$ der Nulldurchgänge mit der Länge $b$, der Schwingungsdauer bestimmen.

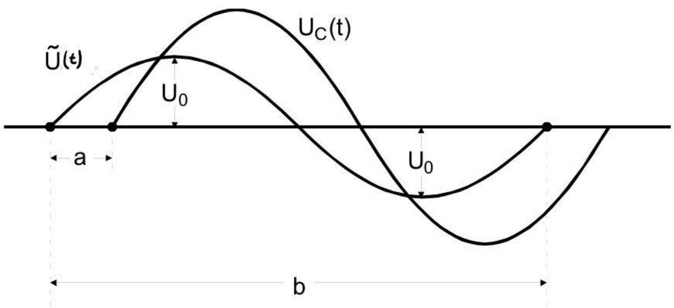



**Abbildung 2:** Methode zur Phasenbestimmung zwischen $U_C$ und $\tilde{U}$.[3, S. 282]

Somit gilt für die Phase $\phi$

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \tag{11}$$

Für die Phasenverschiebung $\phi$ in Abhängigkeit der Frequenz $\omega$ gilt

$$\phi(\omega) = arctan(\frac{-\omega RC}{1 - LCw^2}) \tag{12}$$

## 3 Durchführung

Der Versuch ist in 4 Teilmessungen aufgeteilt. Im ersten Teil des Versuchs wird die Zeitabhängigkeit der Amplitude untersucht. Um diese Zeitabhängigkeit festzustellen wird eine Rechtecksschwingung über einen Wiederstand $R_1$ ,eine Spule $L$ und einen Kondensator $C$ gesendet (3). Mit dem Ozilloskop wird die Spannung über dem Kondensator abgenommen und das Bild des Oszilloskops wird abfotografiert (6) und analysiert.

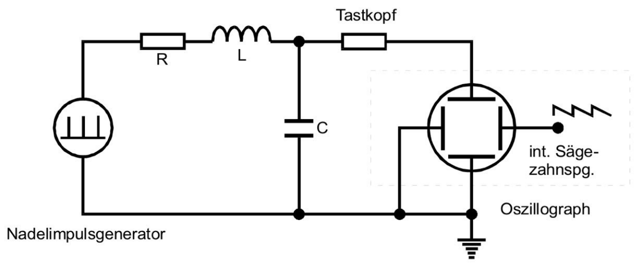



**Abbildung 3:** Versuchsaufbau - Zeitabhängigkeit der Amplitude [4, S. 294]

Im zweiten Teil des Versuchs soll der Grenzwiederstand $R_{ap}$ bestimmt werden bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt. Dazu wird der gleiche Aufbau wie für den ersten Teil verwendet, allerdings wird nun ein regelbarer Wiederstand verwendet (3).
Dazu stellt man den Widerstand zunächst auf den maximale Wert ein. Es wird eine monotone Abnahme der Kondensatorspannungdeutlich. Nun wird der Widerstand so verringrt bis nahzu ein Überschwingen stattfindet.
Im dritten Teil des Versuchs wird die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung an einem Serienresonanzkreis gemessen. Der Serienresonanzkreis ist eine Schaltung bei der der Generator ein Sinussignal durch den größeren der beiden Wiederstande $R_2$, durch die Spule $L$ und durch einen Kondensator $C$ leitet (4). Wieder wird das Signal parallel zum Kondensator abgenommen um die Spannung zu messen. Für die Messung wird zuerst die Frequenz bestimmt bei der die höchste Spannung gemessen wird, bei Schaltkasten 3 lag diese Frequenz ungefähr bei $f = 35$kHz. Nun werden jeweils 7 ganzzahlige Werte unter und über dieser Frequenz eingestellt und die entsprechende Spannung abgelesen.

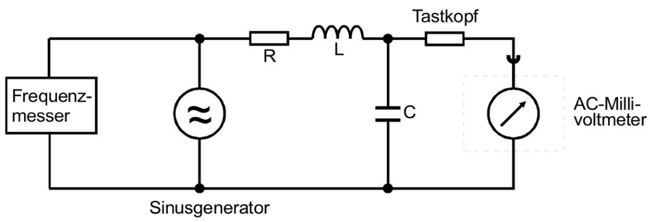



**Abbildung 4:** Versuchsaufbau - Frequenzabhängigkeit der Spannung [4, S. 295]

Im vierten Teil des Versuchs wird die Abhängigkeit der Phase (zwischen Erreger- und Kondensatorspannung) von der Frequenz bestimmt. Es wird die Kondensatorspannung wie in Teil drei des Versuchs gemessen und zusatzlich wird noch das Erregersignal abgenommen und im Oszilloskop dargestellt(5). Anhand der 2 Kurven im Oszilloskop kann der Phasenunterschied durch den Abstand der Minima der Kurven abgelesen werden.

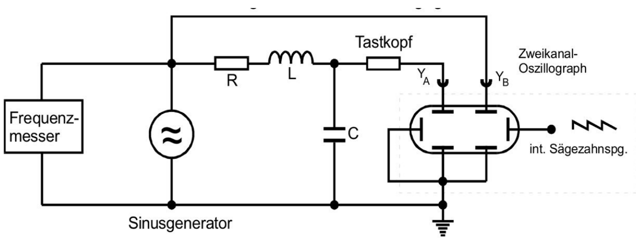



**Abbildung 5:** Versuchsaufbau - Frequenzabhängigkeit der Phasendifferenz [4, S. 296]

# 4 Auswertung

## 4.1 Effektiver Dämpfungswiderstand und Abklingdauer

Anhand der zeitabhängigkeit der Amplitude wird der Effektive Dämpfungswiderstand $R_{eff}$ und die Abklingdauer $T$ bestimmt.

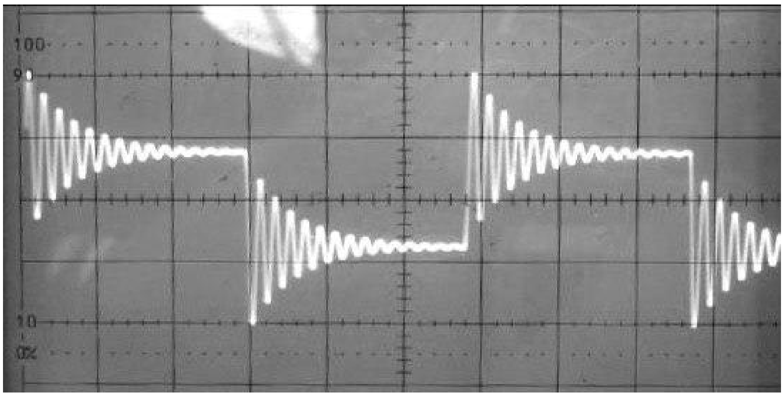


**Abbildung 6:** Gemessene Kondensatorspannung bei einem RCL-Kreis mit angelegter Rechteckspannung. Mit t $20\mu s/Div.$ und V $2V/Div.$

| $U(t)$ / 2V | $t$ / $20\mu s$ |
|---|---|
| 2,0 | 0 |
| 1,6 | 0,25 |
| 1,4 | 0,45 |
| 1,25 | 0,6 |
| 1,1 | 0,9 |
| 1,05 | 1,0 |
| 1,0 | 1,2 |
| 0,9 | 1,4 |
| 0,8 | 1,6 |
| 0,7 | 2,7 |

**Tabelle 1:** Amplituden aus gedämpften Schwingkries gegenüber der Zeit

Mit dem Widerstand $R1 = (30.3 \pm 0.01)\Omega$, der Induktivität $L = (3.5 \pm 0.01)mH$ der Schaltung und $y_0 = 2.6V$ folgt die Theoriekurve

$$y(t) = 2.6 \cdot e^{-R/2L \cdot t} \tag{13}$$

$$y(t) \approx 2.6 \cdot e^{-(4{,}33 \pm 0{,}01) \cdot 10^3 * t} \tag{14}$$

Insgesamt ergibt sich somit für die Messdaten und dessen Ausgleichsfunktion $y(t) = e^{-k*t}$ sowie für die Theoriekurve:

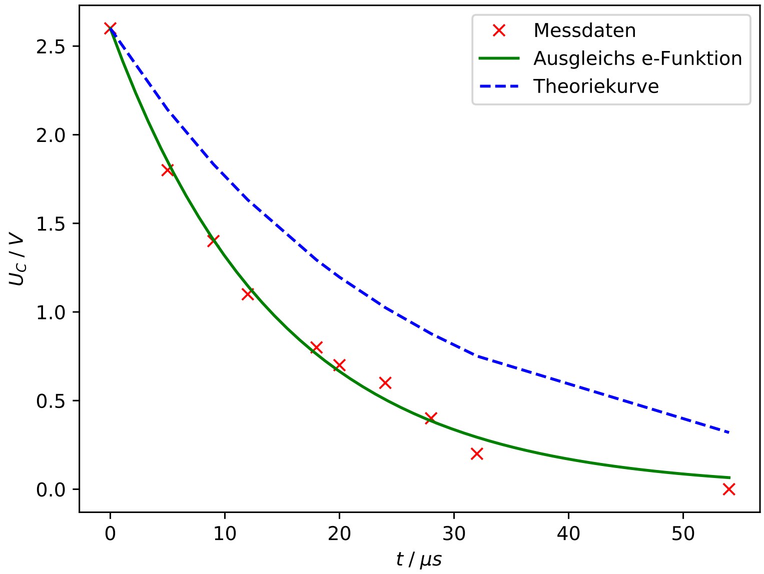



**Abbildung 7:** Darstellung der Daten der einhüllenden der gedämpften Schwingungen mit ihrer Ausgleichsfunktion $y(t) \approx 4 \cdot e^{-6{,}82 \cdot 10^4 \cdot t}$ verglichen mit der Theoriekurve

Aus den Daten und der Ausgleichsfunktion folgt somit der effektive Dämpfungswiderstand $R_{eff}$

$$R_{eff} = (4,77 \pm 0,12) \cdot 10^3 \cdot 2L \approx (33,34 \pm 0,84)\Omega \tag{15}$$

Die Abklingdauer $T_{ex}$ ergibt sich somit

$$T_{ex} = \frac{2L}{R_{eff}} \approx 1,47 \pm 0,04) \cdot 10^{-5} s \tag{16}$$

## 4.2 Aperiodischer Grenzfall

Der Spezialfall liefert:

$$R_{ap}^{Theorie} = \sqrt{\frac{4L}{C}} = 1673,32\Omega \tag{17}$$

Durch regelbaren Widerstand und das vermeiden eines Überschwingens ergibt sich

$$R_{ap}^{Exp} = 1475\Omega \tag{18}$$

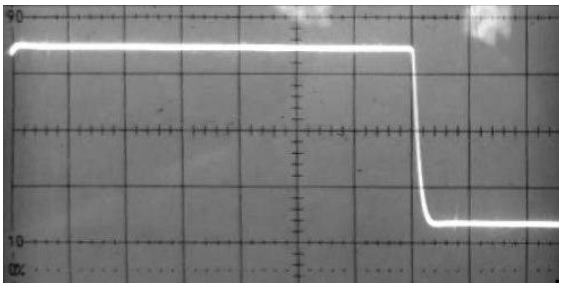


**Abbildung 8:** Der aperiodische Grenzfall mit einem Regelbaren Widerstand. Dieser ist so justiert, das gerade eben kein Überschwingen eintritt.

## 4.3 Kondensatorspannung und ihre Frequenzabhängigkeit

| $w$ / $kHz$ | $U_C(t)$ / $V$ |
|---|---|
| 28 | 3,2 |
| 29 | 3,4 |
| 30 | 3,6 |
| 31 | 3,7 |
| 32 | 3,9 |
| 33 | 4,0 |
| 34 | 4,2 |
| 35 | 4,4 |
| 36 | 4,4 |
| 37 | 4,3 |
| 38 | 4,1 |
| 39 | 4,0 |
| 40 | 3,8 |
| 41 | 3,6 |
| 42 | 3,2 |

**Tabelle 2:** Kondensatorspannung $U_C$ in Abhängigkeit der Frequenz

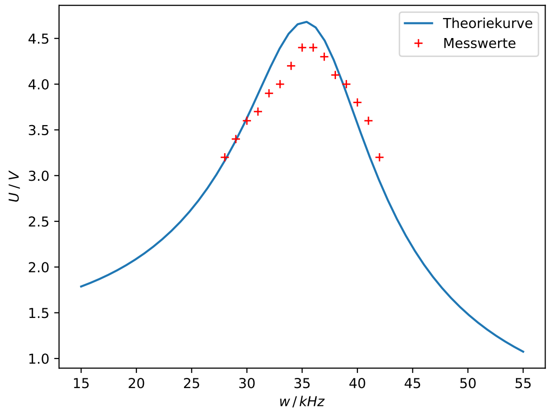



**Abbildung 9:** Daten aus 2 in Abhängigkeit von der Kondensatorspannung $U_C$ dargestellt

Grund für die Frequenzabhängigkeit sind die komplexen Widerstände von Spule und Kondensator. Der Betrag der Impedanz ergibt sich dabei aus

$$|Z_{ges}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \tag{19}$$

mit den Schwingkreis Komponenten $R = (271,6 \pm 0,2)\Omega$, $L = (3,5 \pm 0,01)10^(-3)H$ und $C = (5,00 \pm 0,2)10^(-90F)$ ergibt sich die Impedanzkurve

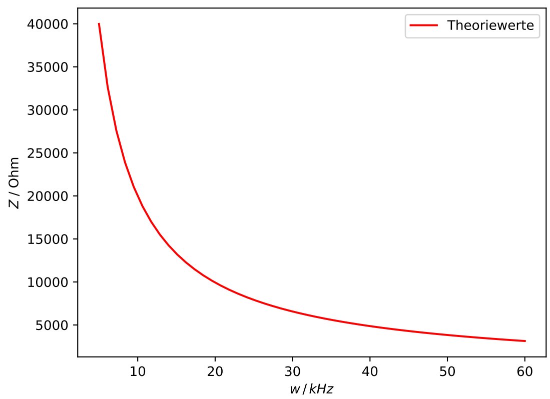



**Abbildung 10:** Frequenzabhängige Widerstände. Die Spannung ist proportional zur Impedanz $Z$

### 4.4 Phasenverschiebung

Nach der Methode in Abbildung 2 kann nun die Phasenverschiebung $\phi$ zwischen Erreger- und Kondensatorspannung bestimmt werden.

| $w$ / $kHz$ | $a$ | $b$ | $\Delta\phi$ / rad |
|---|---|---|---|
| 42,0 | 1,6 | 4,2 | 1,2 |
| 41,0 | 1,5 | 4,4 | 1,07 |
| 40,0 | 1,4 | 4,5 | 0,98 |
| 39,0 | 1,4 | 4,6 | 0,96 |
| 38,0 | 1,3 | 4,7 | 0,87 |
| 37,0 | 1,2 | 4,8 | 0,79 |
| 36,0 | 1,1 | 5,0 | 0,69 |
| 35,0 | 1,0 | 5,1 | 0,62 |
| 34,0 | 0,8 | 5,3 | 0,47 |
| 33,0 | 0,8 | 5,5 | 0,46 |
| 32,0 | 0,8 | 5,6 | 0,45 |
| 31,0 | 0,8 | 5,8 | 0,43 |
| 30,0 | 0,7 | 5,8 | 0,38 |
| 29,0 | 0,6 | 6,0 | 0,31 |

**Tabelle 3:** Die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ zwischen der sinusförmigen Erregerspannung $\tilde{U}(t)$ und der Kondensatorspannung $U_C(t)$

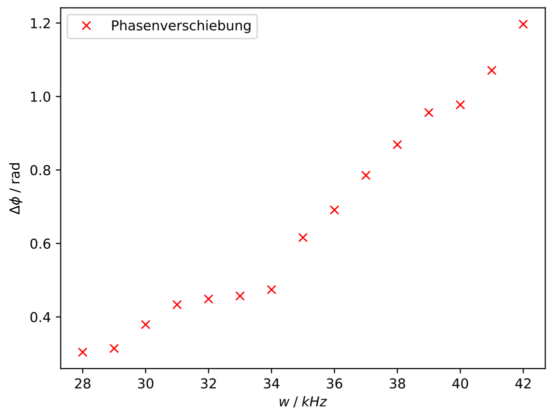



**Abbildung 11:** Berechnete Werte für die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ aus 3

# 5 Diskussion

## 5.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude

Die Abhängigkeit der Amplitude von der Zeit hat eine exponentielle abklingende Form und lässt sich damit gut an eine e-Funktion annähern. Allerdings stimmt die gemessene Zeitabhängigkeit nicht mit der Theoriekurve überein, was durch Probleme bei dem Ablesen der Werte vom Oszilloskop und durch einen Fehler in der Skalierung der Werte zu erklären ist.
Es stellt sich heraus, dass die Dämpfungskoeffizenten (hier: der Widerstand) im Argument der e-Funktion 8 um einen Faktor von ca. 2 zu klein ist, sodass die Theoriekurve nicht ganz auf die Messung passt.
Grund dafür sind ignorierte Faktoren, wie z. B. den kapazivien Einfluss der Spule sowie den Widerstand der Kabel selbst.

## 5.2 Aperiodischer Grenzfall

Der theoretisch berechnete Wert für den Wiederstand um den aperiodischen Grenzfall zu erreichen beträgt $R_{theo} = 1673,32\Omega$. Mit der Messung und Betrachtung des Bildes ließ sich der experimentelle Wert für den Wiederstand auf $R_{exp} = 1475\Omega$ bestimmen. Die gemessene Wert weicht um circa 15% von dem theoretisch berechneten Wert ab. Diese Abweichung kann durch die inneren Wiederstände des Aufbaus, durch Störungen am Messfühler sowie eine eine ungenaue Abmessung am Oszilloskop erklärt werden.

## 5.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Beim Auftragen der Kondensatorspannung $U_C$ gegen die Frequenz $\omega$ zeigt sich ein glockenkurven ähnliches Verhalten. Es ist zu vermuten, dass sich der Hochpunkt bei ca. $35kHz$ befindet, was die Resonanzfrequenz darstellt, die Eigenfrequenz des Schwingkreises. Es hätten noch mehr Werte gemessen werden müssen, um sicher das Maximum bestimmen zu können. Aufgetragen wurde dies in einer linearen Verhältnis. Dabei müssen die Frequenzen mit einem Faktor 5 multipliziert werden, damit sich die Theoriekurve dem gemessen Umstand anähert. Dies ist auf eine fehlerhafte Einstellung am Frequenzgenerator zurückzuführen.
Die Frequenzabhängigen Wiederstände nehmen mit tiefen Frequenz zu und fallen für hohen Frequenzen experimentelle ab.
Der Phasenunterschied im Frequenzbereich von 29 bis 42kHz zeigt nur sehr kleine Phasenunterschiede auf. Zu vermuten ist, dass die Phasenverschiebung erst bei tieferen Frequenz einiger 100Hz überhaupt bemerktbar ist.
Da die Spule tiefe Frequenzen einfacher passieren lässt und der Kondensator dagegen hohe Frequenzen passieren lässt, resultiert daraus eine Verzögerung für tiefe Frequenzen. Hier müsste eine breites Frequenzspektrum betrachtet werden.

# Literatur


[1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.

[3] *Versuchsaneitung 353 - Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. TU Dortmund, 2019.

[4] *Versuchsaneitung 354 - Gedämpfte und erzwungene Schwinungen*. TU Dortmund, 2019.

V354 - Gedämpfte und erzwungene Schwingung

(e) muss nicht gemacht werden

5a) $T = 50\,\mu s$

$U = 2\,V$

5b) $T = 50\,\mu s$, $U = 2\,V$, $R = 2{,}95\,\Omega$ | $T = 20\,\mu s$, $U = 0{,}5\,V$, $R = 2{,}95\ \cdot \frac{5\,k\Omega}{10}$

5c) Erregerspannung:

$U = 1\,V$

$T = 50\,\mu s$

$R = 0$

Messung:

$U = 1\,V$

$T = 50\,\mu s$

$R = R_2$

2te-Messung verwenden

(Als Alternative Rechteck:

Erreger:

$U = 1\,V$

$T = 50\,\mu s$

$R = 0$

Mess:

$U = 1\,V$

$T = 50\,\mu s$

$R = R_2$ )

Frequenzabh:

| f/kHz | U/V |
|---|---|
| ~~1162 Hz~~ | ~~1,60~~ |
| ~~12700 Hz~~ | |
| 35,00 | 4,4 V |
| 34,00 | 4,2 |
| 33,00 | 4,0 |
| 32,00 | 3,9 |
| 31,00 | 3,7 |
| 30,00 | 3,6 |
| 29,00 | 3,4 |
| 28,00 | 3,2 |

10 µs

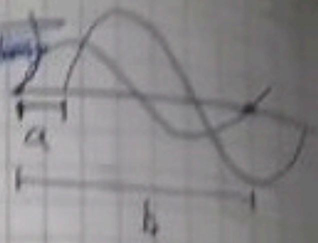
| f/kHz | U/V |
|---|---|
| 36,0 | 4,4 |
| 37,0 | 4,3 |
| 38,0 | 4,1 |
| 39 | 4,0 |
| 40 | 3,8 |
| 41 | 3,6 |
| (42 | 2,8) ? |
| 42 | 3,2 |

5d)

| f | (0,5 V/Div) U/V | (0,5 V/Div) V/V |
|---|---|---|
| 42 | 1,3 | |
| 42,5 | 1,35 | |
| 41 | 1,4 | |
| 41,5 | 1,45 | |
| 40 | 1,5 | |
| 40,5 | 1,5 | |
| 39 | 1,55 | |
| 39,5 | 1,6 | |
| 38 | 1,6 | |
| 38,5 | 1,65 | |
| 37 | 1,7 | 1,7 |
| 37,5 | 1,7 | 1,7 |
| 36 | | |
| 36,5 | | |
| 35 | | |
| 35,5 | | |
| 34 | | |
| 34,5 | | |
| 33 | | |
| 33,5 | | |
| 32 | | |
| 32,5 | | |
| 31 | | |
| 31,5 | | |
| 30 | | |
| 30,5 | | |
| 29 | | |
| 29,5 | | |
| 28 | | |
| 28,5 | | |

Div/t: 2 µs

| a/µs | b |
|---|---|
| 1,6 ~~1~~ | 4,2 |
| 1,265 | 4,4 |
| 1,44 | 4,265 |
| 1,34 | 4,36 |
| 1,463 | 4,357 |
| 1,2 | 4,48 |
| 1,01 | 5 |
| 1 | 5,1 |
| 0,8 | 5,13 |
| 0,8 | 5,25 |
| 0,8 | 5,36 |
| 0,8 | 5,8 |
| 0,7 | 5,8 |
| 0,6 | 6 |
| 0,6 | 6,2 |




$R_1 = (20,3 \pm 0,1)\,\Omega$  $R_2 = (271,6 \pm 0,2)\,\Omega$

$L = (3,5 \pm 0,01)\,mH$  $C = (5,00 \pm 0,2)\,nF$

S. Neuhaus