

Versuchsnummer: 355

Gekoppelte Schwingkreise

Konstantin Mrozik
konstantin.mrozik@udo.edu

Marcel Kebekus
marcel.kebekus@udo.edu

Durchführung: 21.01.2020

Abgabe: 28.01.2020

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Gekoppelte Systeme allgemein	3
1.2	Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise	3
1.3	Gekoppelte Schwinkreise mit Erreger	6
2	Durchführung	7
2.1	Justierung	7
2.2	Austausch der Schwingungsenergie zwischen den Einzelsystemen	7
2.3	Fundamentalschwingungen	8
2.4	Verlauf der Ströme	8
3	Auswertung	9
3.1	Berechnung Frequenzen	9
3.2	Stromabhängigkeit von der Frequenz	10
4	Diskussion	12
	Literatur	13

Ziel

Betrachtung von Energieübertragung zwischen zwei miteinander kapazitiv gekoppelte Schwingkreise mit und ohne äußere Anregung.

1 Theorie

1.1 Gekoppelte Systeme allgemein

Von einem gekoppelten System spricht man, wenn zwei schwingungsfähige Systeme miteinander Verbunden sind, sodass das eine System Einfluss auf das andere System nimmt. Dabei findet eine Energieübertragung von dem einen ins andere System statt. Zudem ist das Verhalten des Gesamtsystems bei Einfluss eines äußeren periodisch einwirkenden Erregers interessant, da diese erzwungenen Schwingungen zu speziellen Resonanzphänomenen führen.

1.2 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Die zwei Schwingkreise bestehen jeweils aus einem ohmschen Widerstand, einer Induktivität L (hier: Spule) und einer Kapazität C (hier: Kondensator). Die Kopplung der Systeme entsteht aufgrund eines Kopplungskondensators C_k .

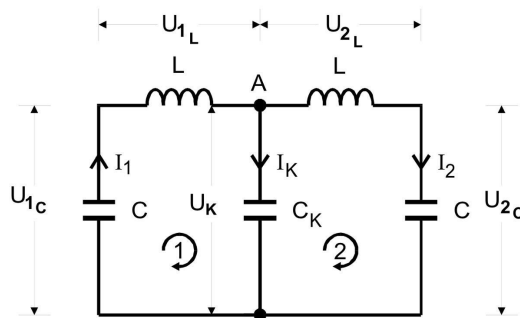


Abbildung 1: Schaltbild von zwei Schwingkreisen, die über den Kopplungskondensator C_k gekoppelt sind. [3, S. 299]

Dabei gilt für den Strom an Punkt A die Kirchhoffsche Regel

$$I_k = I_1 - I_2 \quad (1)$$

$$0 = U_{1C} + U_{1L} + U_k \quad (2)$$

$$0 = U_{2C} + U_{2L} + U_k \quad (3)$$

mit U_C und U_L ergeben sich somit zwei homogene Differentialgleichungen zweiter

Ordnung, jeweils für den Schwingkreis 1 und 2.

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt \quad (4)$$

$$U_L = L \cdot \dot{I} \quad (5)$$

Die Lösungen ergeben sich dann als:

$$I_1(t) = \frac{1}{2} (I_{1_0} + I_{2_0}) \cos(2\pi v^+ t) + \frac{1}{2} (I_{1_0} - I_{2_0}) \cos(2\pi v^- t) \quad (6)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2} (I_{1_0} + I_{2_0}) \cos(2\pi v^+ t) - \frac{1}{2} (I_{1_0} - I_{2_0}) \cos(2\pi v^- t) \quad (7)$$

mit der Schwingfrequenz v^+ und v^-

$$v^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (8)$$

$$v^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)^{-1}}} \quad (9)$$

Das Verhältnis der beiden Eigenfrequenzen ist somit:

$$n = \frac{v^+ - v^-}{2 \cdot (v^- - v^+)} \quad (10)$$

Dabei spricht man von den Fundamentalschwingungen, bei denen im 1. Fall $I_{1_0} = I_{2_0}$ die Anteile aus $(I_{1_0} - I_{2_0})$ verschwinden und somit $I_1(t) = I_2(t)$ ist, also das System phasengleich mit v^+ schwingt. Und bei dem 2. Fall $I_{1_0} = -I_{2_0}$ verschwindet $(I_{1_0} + I_{2_0})$ es folgt somit $I_1(t) = -I_2(t)$, also eine gegenphasig Schwingung mit v^- .

Lässt man ein System in Ruhe und lenkt das andere aus, also $I_{1_0} \neq 0; I_{2_0} = 0$ so entstehen zwei zeitgleiche Schwingungen mit einer hohen Frequenz $\frac{\nu^+ + \nu^-}{2}$ und einer niedrigen Frequenz $\frac{\nu^+ - \nu^-}{2}$ welche man als Schwebung bezeichnet.

$$I_1(t) = I_{1_0} \cos\left(\frac{\nu^+ + \nu^-}{2} t\right) \cos\left(\frac{\nu^+ - \nu^-}{2} t\right) \quad (11)$$

$$I_2(t) = I_{2_0} \sin\left(\frac{\nu^+ + \nu^-}{2} t\right) \sin\left(\frac{\nu^+ - \nu^-}{2} t\right) \quad (12)$$

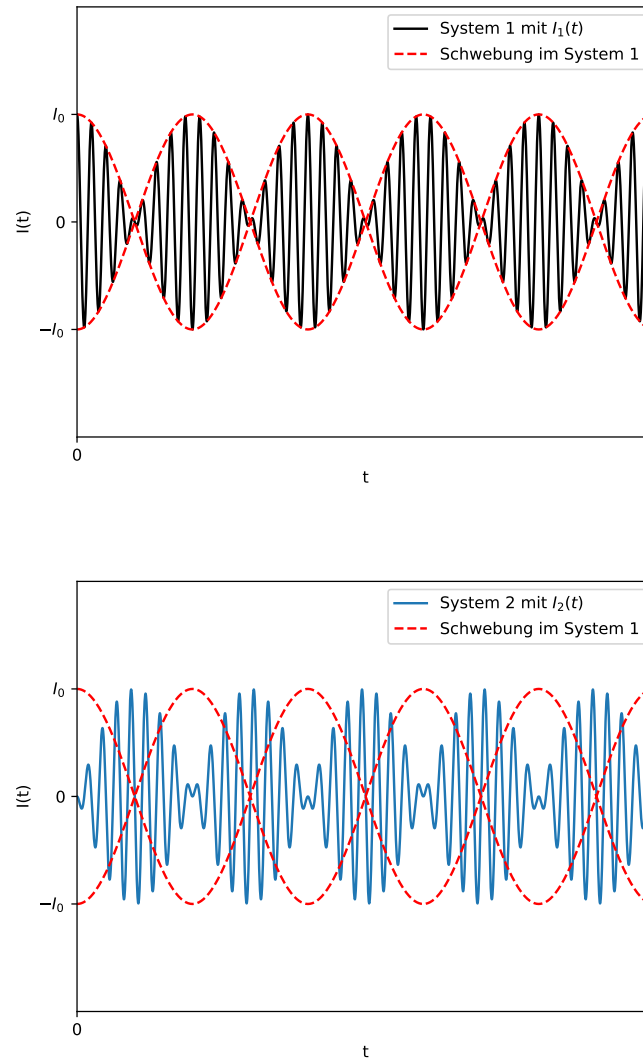


Abbildung 2: Darstellung einer Schwebung. Dabei wird der Energieaustausch zwischen den Systemen deutlich. Das System 2 befindet sich zu Beginn in Ruhe ($I_2(0) = 0$) während das System 1 zu Beginn ausgelenkt ist ($I_1(0) = I_0$). Energie wird dabei von System 1 auf System 2 übertragen, bis schließlich die gesamte Energie in System 2 ist und der Prozess umgekehrt wiederholt wird.

1.3 Gekoppelte Schwingkreise mit Erreger

Wird ein Schwingkreis mit einer Erregerspannung (hier: eine Sinusspannung) angeregt, so erhält man nach den Kirchhoffschen Gesetzen

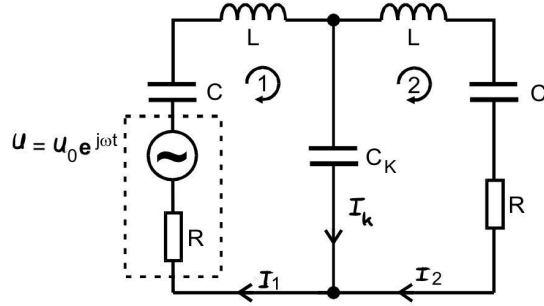


Abbildung 3: Gekoppelte Schwingkreise mit Sinusgenerator [3, S. 303]

$$U = (z_C + z_L + z_{C_k} + z_R) I_1 - z_{C_k} I_2 \quad (13)$$

$$0 = (z_C + z_L + z_{C_k} + z_R) I_2 - z_{C_k} I_1 \quad (14)$$

mit den passenden Impedanzen z_C , z_L und z_R

$$z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad z_L = i\omega L \quad z_R = R$$

folgt schließlich die frequenzabhängige Gesamtimpedanz $Z(\omega)$.

$$Z(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_k} \right)^{-1}} \quad (15)$$

Daraus folgen die Maxima für den Strom $I_2(\omega)$ mit

$$|I_2(\omega^+)| = U \cdot \frac{1}{R \sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC}}} \quad |I_2(\omega^-)| = U \cdot \frac{1}{R \sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC} \left(1 + \frac{C}{C_k} \right)}} \quad (16)$$

2 Durchführung

2.1 Justierung

Zunächst werden die beiden Schwingkreise auf die gleiche Resonanzfrequenz eingestellt. Die Größenordnung ermittelt man dabei, indem das Strommaximum des linken Schwingkreises sucht. Die dazu gehörige Frequenz entspricht dabei in etwa der Resonanzfrequenz. Für eine genauere Ermittlung untersuche man mit Hilfe der Lissajous-Figur die Phase φ zwischen der Generatorspannung und dem Schwingkreisstrom. Im Falle der Resonanz ist $\varphi = \pi/2$ und die Lissajous-Figur stellt eine Ellipse/Kreis dar. Nun wird der zweite Schwingkreis mithilfe einer regelbaren Kapazität auf diese Resonanzfrequenz abgestimmt.

Für einen groben Frequenzbereich für einen beobachtbaren Energieaustausch gilt mit $L = 32\text{mH}$ und $C = 0.8\text{nF}$

$$\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{32 \cdot 10^{-3} \cdot 0.8 \cdot 10^{-9}}} \approx 31.5\text{kHz} \quad (17)$$

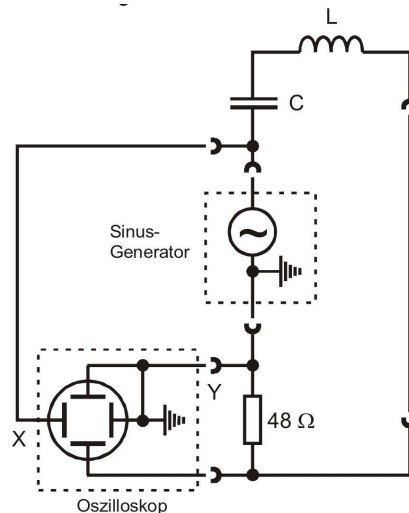


Abbildung 4: Schaltung zur genauen Bestimmung der Resonanzfrequenz. Dabei wird ein Schwingkreis an einen Sinusgenerator angeschlossen. Jeweils der Strom des Generators und des Schwingkreises werden auf dem Oszilloskop im XY-Betrieb betrachtet. [3, S. 305]

2.2 Austausch der Schwingungsenergie zwischen den Einzelsystemen

Mit einer Rechteckspannung wird einer der Schwingkreise angeregt während der andere keiner externen Erregung ausgesetzt wird. Die beiden Schwingkreise sind dabei über den Kopplungskondensator C_k gekoppelt. Die Schwingungsenergie kann mithilfe des Oszilloskops am Kopplungsglied betrachtet werden.

Die entstehende Schwebung der Form 13 und 14 wird am Oszilloskop beobachtet. Somit kann ein Verhältnis zwischen der Schwingungs- und Schwebungsfrequenz in Abhängigkeit der Größe des Koppelkondensator C_k mit $2 \leq C_k \leq 12\text{nF}$ ermittelt werden, durch die Anzahl der Schwingungsmaxima innerhalb einer Schwebungsperiode.

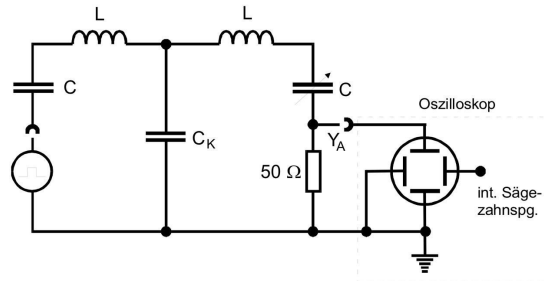


Abbildung 5: Schaltbild zur Untersuchung der Energieübertragung zwischen den Einzelsystemen durch Schwebungsvorgänge. [3, S. 306]

2.3 Fundamentalschwingungen

Das rechtecksignal aus Abbildung 5 wird durch ein Sinussignal ersetzt. Mit den Lissajous-Figuren bei denen die X-Komponente die Generatorspannung und die Y Komponente den Schwingkreis widerspiegelt. Man findet die Fundamentalschwingungen in Abhängigkeit von C_k bei $\varphi = 0$ bzw $\varphi = \pi$. Hierbei stellen die Lissajous-Figuren eine Gerade da, welche für $\pi = 0$ steigt und für $\phi = \pi$ fällt.

2.4 Verlauf der Ströme

Nun betrachte man den Verlauf der Ströme I_2 und I_k in Abhängigkeit der Frequenz.

3 Auswertung

3.1 Berechnung Frequenzen

Für die Auswertung der Messdaten werden zuerst die theoretischen Werte der Fundamentalschwingungen bestimmt. Nach 8 und 9 gilt:

$$\nu_+ = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L \cdot (C + C_{Sp})}}$$

$$\nu_- = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L \cdot \left(\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_k} \right)^{-1} + C_{Sp} \right)}}$$

Das Verhältnis der beiden Frequenzen bestimmt sich dann mit 10. Mithilfe der Messwerte wird nun die Abweichung der Messwerte von den Theoriewerten bestimmt.

$$a_n = \frac{|n_{theorie} - n_{experiment}|}{n_{theorie}} \quad (18)$$

Die Abweichung der verschiedenen Fundamentalfrequenzen lässt sich dementsprechend mit $\nu_{theoretisch}$ und $\nu_{experiment}$ berechnen.

Zu Beginn werden die Frequenzen der Fundamentalschwingungen ν_+ und ν_- theoretisch bestimmt und die Abweichungen a_{ν_+} und a_{ν_-} der experimentellen Werte bestimmt.

C_k / nF	ν^- / kHz	ν^+ / kHz	$\nu_{-,theorie}$ / kHz	$\nu_{+,theorie}$ / kHz	a_{ν_+}	a_{ν_-}
1,01	47,2	30,5	$47,5 \pm 0,3$	30,557	0,0018	$0,006 \pm 0,008$
2,03	40,3	30,5	$40,18 \pm 0,24$	30,557	0,0018	$0,002 \pm 0,006$
3,00	37,2	30,5	$37,41 \pm 0,18$	30,557	0,0018	$0,005 \pm 0,004$
4,00	35,9	30,5	$35,85 \pm 0,14$	30,557	0,0018	$0,001 \pm 0,004$
5,02	34,9	30,5	$34,854 \pm 0,119$	30,557	0,0018	$0,001 \pm 0,003$
6,47	34,0	30,5	$33,94 \pm 0,09$	30,557	0,0018	$0,001 \pm 0,002$
8,00	33,4	30,5	$33,33 \pm 0,07$	30,557	0,0018	$0,002 \pm 0,002$
9,99	32,9	30,5	$32,80 \pm 0,06$	30,557	0,0018	$0,002 \pm 0,001$

Tabelle 1: Frequenzen der Fundamentalschwingungen

Nun werden noch die Verhältnisse der Frequenzen nach 10 bestimmt und ihre Abweichung nach 18.

C_k	$n_{theoretisch}$	$n_{experiment}$	a_n
1,01	$2,30 \pm 0,04$	2	$0,131 \pm 0,015$
2,03	$3,67 \pm 0,08$	2	$0,4556 \pm 0,0120$
3,00	$4,957 \pm 0,118$	4	$0,193 \pm 0,019$
4,00	$6,27 \pm 0,15$	6	$0,043 \pm 0,024$
5,02	$7,61 \pm 0,19$	7	$0,080 \pm 0,023$
6,47	$9,51 \pm 0,25$	9	$0,053 \pm 0,025$
8,00	$11,5 \pm 0,3$	11	$0,044 \pm 0,026$
9,99	$14,1 \pm 0,3$	13	$0,078 \pm 0,025$

Tabelle 2: Frequenzverhältnisse der Fundamentalschwingungen und Abweichung der Messwerte von der Theorie

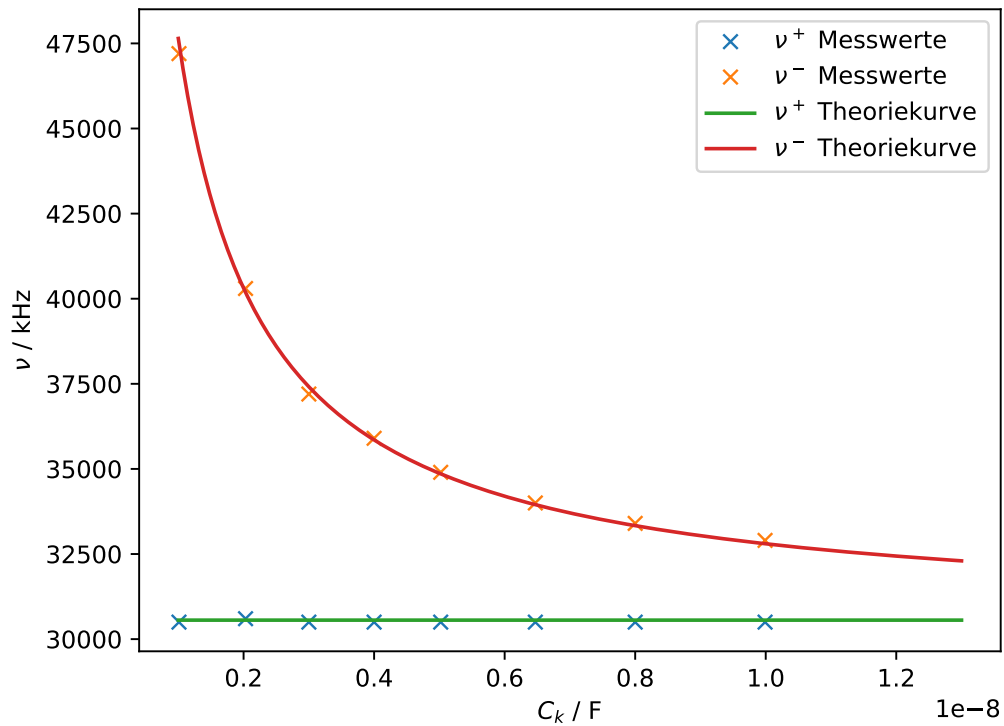


Abbildung 6: Verlauf der Frequenzen

3.2 Stromabhängigkeit von der Frequenz

Im folgenden wird die Abhängigkeit des Stromes von den Frequenzen für verschiedene C_k dargestellt. Hierbei lässt sich der Strom I durch 16 darstellen wie in 7 zu sehen.

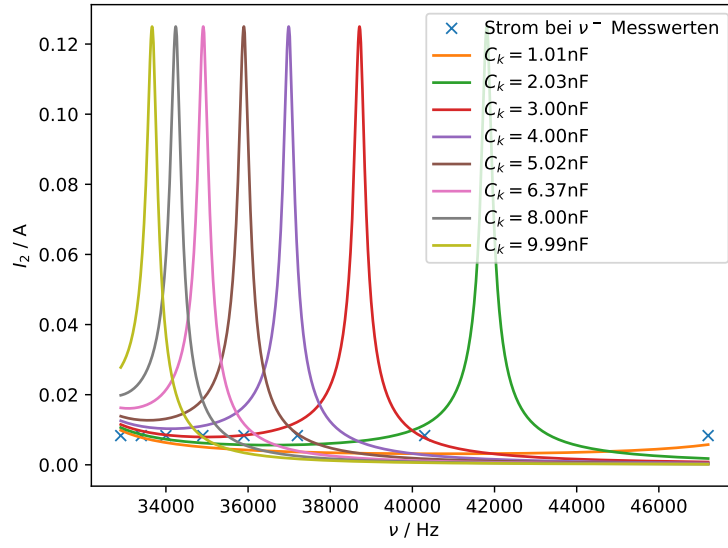


Abbildung 7: Stromverlauf in Abhängigkeit der Frequenzen

C_k	$I_{theoretisch}$	$I_{experiment}$	a_I
1,01	0,0057	0,0083	0,4464
2,03	0,0113	0,0083	0,2677
3,00	0,0122	0,0083	0,3171
4,00	0,0166	0,0083	0,4983
5,02	0,0186	0,0083	0,5538
6,47	0,0213	0,0083	0,6097
8,00	0,0241	0,0083	0,6544
9,99	0,0277	0,0083	0,6998

Tabelle 3: Frequenzverhältnisse der Fundamentalschwingungen und Abweichung der Messwerte von der Theorie

4 Diskussion

Die Verhältnisse der Frequenzen liegen nah an den theoretisch berechneten Werten, ihre Fehler liegen zwischen 4% und 45% wobei der Fehler von 45% eine Ausnahme ist und auf schlechtes ablesen der Maxima zurückgeführt werden kann.

Auch der Verlauf der Frequenzen in Abhängigkeit von den C_k zeigt nur geringe Abweichungen von den theoretischen Werten.

Bei der Abhängigkeit des Stromes I_2 von den Frequenzen fällt auf dass die Maxima des Experiments weit unter den theoretischen Maxima liegen. Die Abstände der theoretischen Maxima stimmen zwar ungefähr mit denen der Messung überein, aber auch die Lage der Werte ist leicht verschoben, diese Fehler sind durch einen Fehler beim Ablesen oder Fehler in der Umrechnung zu erklären. Auch bei der Betrachtung der Abweichungen a_I fällt auf, dass diese sehr groß sind und somit nicht für ein Aussagekräftiges Versuchsergebnis sprechen.

Die Fundamentalfrequenzen liegen wie im Plot 6 erkennbar nah an den Theoriewerten, auch die Abweichungen die zwischen 1% und 8% liegen verifizieren unsere Werte als plausibel.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [3] *Versuchsaneitung 355 - Gekoppelte Schwingkreise*. TU Dortmund, 2019.