Versuchsnummer: 106

Gekoppelte Pendel

Konstantin Mrozik
konstantin.mrozik@udo.edu

Marcel Kebekus
marcel.kebekus@udo.edu

Durchführung: 26.11.2019

Abgabe: 03.12.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

1.1 Grundlagen

Bei der Betrachtung eines Pendels der Länge l mit der Masse m und vernachlässigung der Reibung kann man die Bewegungsgleichung anhand der angreifenden Kräfte bestimmen. Durch eine Auslenkung des Pendels wirkt eine Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ die ein Drehmoment $M = D_p \cdot \Phi$ bewirkt mit Φ dem Auslenkwinkel und D_p der Winkelrichtgröße. Mit der Kleinwinkelnäherung ergibt sich folgende Bewegungsgleichung

$$J \cdot \ddot{\Phi} + D_p \cdot \Phi = 0 \tag{1}$$

mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2}$$

1.2 Doppelpendel

Wenn man zwei Pendel mit einer Feder koppelt wirkt ein zusätzliches Drehmoment auf die einzelnen Pendel

$$M_1 = D_f \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) \text{ und } M_2 = D_f \cdot (\Phi_1 - \Phi_2)$$

Damit entsteht ein System aus Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} J \cdot \ddot{\Phi}_1 + D \cdot \Phi_1 = D_F(\Phi_2 - \Phi_1) \\ J \cdot \ddot{\Phi}_2 + D \cdot \Phi_2 = D_F(\Phi_1 - \Phi_2) \end{aligned}$$

Dieses System beschreibt die Schwingung der beiden Pendel und die Lösung der DGL's sind neue Schwingungsgleichungen mit den Frequenzen $\omega_1$und ω_2 und den Auslenkungen $\alpha_1$und α_2. Wir unterscheiden verschiedene Arten der Schwingung, abhängig von den Auslenkungen zu Beginn.

Gleichsinnig $\alpha_1 = \alpha_2$ Über die Kopplung der Federn wirkt keine Kraft und die Schwingung wird somit nur durch die Gravitation beeinflusst. Die Eigenfrequenz bestimmt sich als

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3}$$

Und die Periodendauer der Schwingnung lässt sich mit folgender Formel berechen

$$T_+ = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\omega_+} \tag{4}$$

Gegensinnig $\alpha_1 = -\alpha_2$ Die beiden Pendel werden um den gleichen Betrag in verschiedene Richtungen ausgelenkt. Dadurch entsteht eine symmetrische Schwingung bei der die Kraft der Kopplungsfeder auf die Pendel Betragsgleich aber mit umgekehrtem Vorzeichen wirkt. Mit der Frequenz

$$\omega_{-} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}} \tag{5}$$

Und Periodendauer

$$T_{-} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + 2K}} = \frac{2\pi}{\omega_{-}} \tag{6}$$

Gekoppelt $\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 \neq 0$ Beim Start schwingt ein Pendel und übertragt seine Energie auf das andere Pendel, das Maximunm ist erreicht wenn ein Pendel ruht und das Schwingt. Die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels wird Schwebung genannt. Die Schwebungsdauer und die Frequenz der Schwebung werden folgendermaßen berechnet:

$$T_S = \frac{T_{+} \cdot T_{-}}{T_{+} - T_{-}} = \frac{2\pi}{\omega_S} \qquad\qquad \omega_S = \omega_{+} - \omega_{-} \tag{7}$$

Die Art der Kopplung zweier Pendel kann über die Kopplungskonstante K beschrieben werden, mit

$$K = \frac{\omega_{-}^2 - \omega_{+}^2}{\omega_{-}^2 + \omega_{+}^2} = \frac{T_{+}^2 - T_{-}^2}{T_{+}^2 + T_{-}^2} \tag{8}$$

2 Durchführung

2.1 Aufbau

Um das gekoppelte Pendel zu untersuchen wurden zwei Pendel mit einer Aufhängung an der Wand befestigt. Um die Reibung der Aufhängung zu minimieren liegen die Pendel nur mit zwei Nadel auf der Aufhängung auf,da so die Angriffsfläche und somit dei Reibung minimal ist. Die beiden Pendel besitzen jeweils ein Loch in der Metallstange um die Pendel durch eine Feder miteinander zu koppeln. Die Massen an den Pendeln sind in der Höhe verstellbar.

2.2 Versuch

Zuerst wurden die Schwingungsdauern der beiden einzelnen Pendel mit der Länge 72cm bestimmt. Dazu wurden die Pendel einmal ausgelenkt und die Dauer von 5 Schwingungen wurde mit einer Stoppuhr festgehalten. Diese Methode des Messens wird auch bei den weiteren Messungen verwendet. Nachdem für jedes Pendel diese Messung 10 mal wiederholt wurde, wurden die Schwingungsdauern für die gengensinnige und gleichsinnige Schwingung bestimmt. Zuletzt wurde bei der Schwebung die Schwingungsdauer und die Schwebungsdauer parallel gemessen. Zwischen den Messungen haben wir einmal die Länge des Pendels verstellt um Werte für 72cm und für 80cm zu erhalten.

3 Auswertung

3.1 Längenprüfung

Für die Schwingungsdauer T der beiden frei schwingenden Pendel (mit gleichen Längen):

	Pendel 1 / s (72cm)	Pendel 2 / s (72cm)
	1,688	1,694
	1,668	1,732
	1,688	1,720
	1,700	1,73
	1,674	1,694
	1,688	1,682
	1,712	1,700
	1,694	1,708
	1,70	1,726
	1,686	1,686
Mittelwert $\bar{T}$ (nach Gl. 9):	1,69	1,71

Tabelle 1: Frei schwingende Pendel

Es wurde dabei versucht die Längen der beiden Pedel möglichst genau gleich einzustellen. Anhang der Mittelwerter der beiden Pendel lässt die Aussage bzw. Näherung treffen, beide Pendel seien exakt gleich lang.
Der Mittelwert bildet sich dabei aus:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} T_{\mathrm{i}} \tag{9}$$

3.2 Gleichsinnige Schwingung

Für die gleichsinnige Schwingung ergaben sich für die beiden Pendellängen $l = 72cm$ und $l = 80cm$ folgende Schwingungsdauern T:

	Pendel 1 / s (72cm)	Pendel 2 / s (80cm)
	1,694	1,806
	1,706	1,794
	1,712	1,812
	1,720	1,794
	1,700	1,824
	1,688	1,812
	1,744	1,776
	1,720	1,782
	1,720	1,800
	1,676	1,806
Mittelwert $\bar{T}$ (nach Gl. 9):	1,708	1,801

Tabelle 2: Gleichsinnige Schwingung

Dabei spiegelt der Mittelwert die Proportionalität $T \sim \sqrt{l}$ (siehe Gl. 4) wieder.
Aus den Messwerten ergibt sich eine Schwingungsfrequenz:

	w / $\frac{1}{s}$	
	Pendel 72cm	Pendel 80cm
Aus Messwerten (mit Gl.(4))	3,679	3,486
Berechnet (mit Gl.(3))	3,691	3,501

3.3 Gegensinnige Schwingung

Für die gegensinnige Schwinung ergaben sich die Schwingungsdauern:

	Pendel 1 / s (72cm)	Pendel 2 / s (80cm)
	1,574	1,344
	1,568	1,344
	1,582	1,364
	1,576	1,33
	1,588	1,318
	1,574	1,35
	1,568	1,312
	1,588	1,332
	1,556	1,314
	1,564	1,312
Mittelwert $\bar{T}$ (nach Gl. 9):	1,574	1,332

Tabelle 3: Gegensinnige Schwingung

Dabei ist anzumerken, dass hier nach Gl. 6 ebenfalls eine $T \sim l$ Proportionalität gelten sollte. Dem wird sich im Abschnitt 4 gewidmet.

Aus den Messwerten ergibt sich eine Schwingungsfrequenz:

	ω / $\frac{1}{s}$	
	Pendel 72cm	Pendel 80cm
Aus Messwerten (mit Gl.(6))	3,992	4,717
Berechnet (mit Gl.(5))	3,722	3,605

3.4 Gekoppelte Schwingung

Für die Schwingungsdauern und Schwebungsdauern der gekoppelten Schwingung: Die

Tabelle 4: Schwingung und Schwebung des Pendels

	Pendel l=72cm		Pendel l=80cm	
Gemessen:	$T_{\text{Schwingung}}$ / s	$T_{\text{Schwebung}}$ / s	$T_{\text{Schwingung}}$ / s	$T_{\text{Schwebung}}$ / s
	1,538	18,96	1,750	20,52
	1,600	18,67	1,726	21,00
	1,600	18,43	1,744	21,38
	1,550	18,76	1,712	21,43
	1,636	18,95	1,726	19,83
	1,580	19,38	1,724	20,93
	1,632	18,46	1,694	21,84
	1,612	19,21	1,700	20,76
	1,636	18,66	1,706	20,50
	1,588	19,09	1,720	19,70
Mittelwert $\bar{T}$ (nach Gl. 9):	1,597	18,857	1,721	20,789
Berechnete T_S (nach Gl.(7)):		20,030		5,118

berechnete Schwebungsdauer der Pendellänge von 80cm, weicht dabei sehr stark ab. Dies wird sich in Abschnitt 4 gewidmet.

Aus den Messwerten ergibt sich eine Schwingungsfrequenz:

	ω / $\frac{1}{s}$	
	Pendel 72cm	Pendel 80cm
Aus Messwerten (mit Gl.7)	3,934	3,653
Berechnet (mit Gl.7	-0,031	-0,103

3.5 Kopplungskonstante

Anhand der Gleichung 8 lässt sich die Kopplungskonstante K für die beiden Pendellängen ermitteln:

$$K \text{ für 72cm Pedel} = 0.0816 \tag{10}$$

$$K \text{ für 80cm Pedel} = 0.2926 \tag{11}$$

(siehe dazu Abschnitt 4)

4 Diskussion

In der Auswertung kam es bereits zu einigen unrealistischen und offensichtlichen falschen Werten, die alle aus Berechnungen stammten. Im Folgenden soll die Ursache für die dramastischen Abweichungen analysiert werden.
Dafür soll zu Beginn die Messung an sich überprüft werden. Dazu wird die jeweilige theoretische Schwingungsdauer mit den gemessenen Schwingungsdauern vergliechen. Die

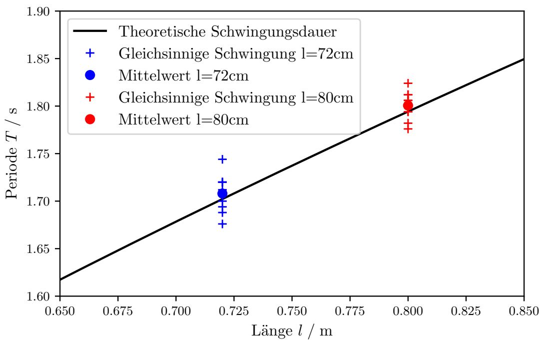
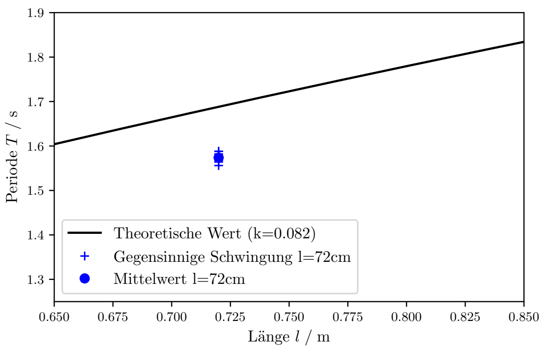


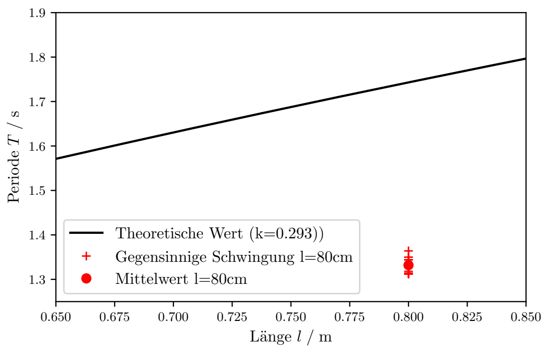
Abbildung 1: Gleichsinnige Schwingungen

theoretische Kurve folgt aus Gleichung 4. Es wird deutlich, dass die gemessenen Schwingungsdauern T_+ mit den zu erwartenen Schwingungsdauern übereinstimmt.

Für die gegensinnige Schwingung ergibt sich der zu erwartende theoretische Werte aus Gleichung 6.



(a) Pedel 72cm



(b) Pendel 80cm

Abbildung 2: Gegensinnige Schwingungsdauer

Hier bei wird besonders gut deutlich, dass bei der Abbildung 2a, besonders aber in Abbildung 2b, große Abweichungen vorliegen. Dies lässt sich nur auf einen Messfehler zurückführen. Weiterführend sei zu beachten, dass die Kopplungskonstante die für die theoretische Kurve verwendet wird, ebenfalls aus diesen falschen Werten stammt.

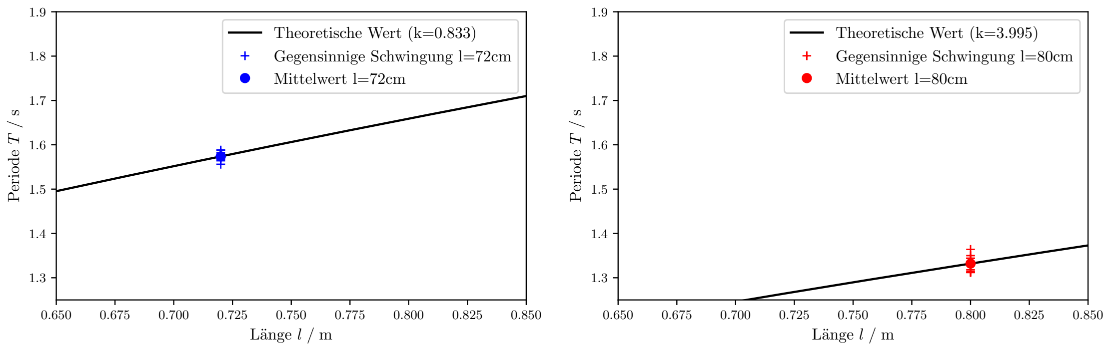
Dies erklärt weiterführend, warum die Kopplungskonstant aus 11 nicht die selben sind. Behauptung: Der Messfehler der gegensinnigen Schwingung von der Pendellänge $l = 80cm$ und $l = 72cm$ ist ist ein Ursprung der Fehler.
Stellt man Gleichung 6 um, um die Größenordung der Kopplungskonstante K zu erörtern, so gilt:

$$K = \frac{2\pi^2 l}{T_-^2} - \frac{g}{2} \tag{12}$$

Somit ergibt sich:

$$\text{K für 72cm} = 0,833$$
$$\text{K für 80cm} = 3,995$$

Für diese neuen Kopplungskonstanten sei gesagt, dass sie nur als Größenordnung diehnen. Denn durch die passenden gleichsinnigen Schwingungsdauern T_+und den fehlerhaften gegensinnigen Schwingungsdauern T_- folgt nach Gleichung 8 eine fehlerhaft Kopplungkonstante K.
Trägt man für diese neuen Kopplungskonstanten die gegensinnigen Schwingungen auf, bestätigt dies die Annahme, das der Fehler in den gemessenen gegenphasigen Schwingungsdauern.



(a) Pedel 72cm

(b) Pendel 80cm

Abbildung 3: Gegensinnige Schwingungsdauer mit Kopplungskonstante

Fazit: Der Fehler findet sich beim Messen der gegensinnigen Schwingungen und zieht sich dann durch die Rechnungen für die berechneten Kopplungskonstante K und die Frequenzen ω so wie für die Schwebungsdauer.
Somit stimmen gemessene und berechnete Werte nicht überein.

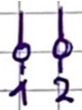
Literatur

[1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.

[3] *Versuchsaneitung V106 - Gekoppelte Pendel*. TU Dortmund, 2019.

Versuch 106 Gekoppelte Pendel



$L_1 = \{ \cancel{71,8} \; 72\,cm \}$

$L_2 = \{ \cancel{71,8} \; 72\,cm \}$

T_1: { 8,44; 8,34; 8,44; 8,50; 8,37; 8,44; 8,56; 8,47; 8,50; 8,43 }

5 × T gemessen

T_2: { (8,56; 8,57; 8,62;) 8,47; 8,66; 8,60; 8,65; 8,47; 8,41; 8,50; 8,54; 8,63; 8,43 }

↑ länge angepasst

$T_{gleichsinnig_{72}}$: { 8,47; 8,53; 8,56; 8,60; 8,50; 8,44; 8,72; 8,60; 8,60; 8,38 } mit L = 72 cm

$T_{gleichsinnig}$:$_{80}$ { 9,03; 8,97; 9,06; 8,97; 9,12; 9,06; 8,88; 8,91; 9,00; 9,03 } mit L = 80 cm

$T_{\cancel{sch}gegenphasig_{72}}$ { ~~6,72~~; [illegible]; 7,91; 7,88; 7,94; 7,87; 7,84; 7,94; 7,78; 7,82 } 72 cm
7,87; 7,84

$T_{gegenphasig_{80}}$: { 6,72; 6,72; 6,82; 6,65; 6,59; 6,75; 6,56; 6,66; 6,57; 6,56 } mit L = 80 cm

$T_{schwingung(S)_{80}}$: { 8,75; 8,63; 8,72; 8,56; 8,63; 8,62; 8,42; 8,50; 8,53; 8,60 }

$T_{schwebung\,(S)_{80}}$: { 20,52; 21,00; 21,38; 21,43; 19,83;
20,93; 21,84; 20,76; 20,50; 19,70 }

$T_{schwingung}\,(S)_{72}$: { 7,69; 8,00; 8,00; 7,75; 8,18; 7,90; 8,16;
8,06; 8,18; 7,94; 7,94;

$T_{schwebung}\,(S)_{72}$: { 18,96; 18,62; 18,43; 20,33; 18,76; 18,95;
19,38; 18,46; 19,21; 18,66; 19,09;

Falko.Barth@tu-dortmund.de F. [signature]