

# **V23 - Quanten-Analogien**

David Gutnikov  
david.gutnikov@udo.edu

Lasse Sternemann  
lasse.sternemann@udo.edu

Bearbeitet am 10.08.2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1	Allgemeines . . . . .	3
1.2	Unendlicher Potentialtopf . . . . .	3
1.3	Wasserstoffatom und Analogon . . . . .	5
1.4	Wasserstoffmolekül und Analogon . . . . .	6
1.5	1-dim. Festkörper und Analogon . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>8</b>
2.1	Versuchsaufbau . . . . .	8
2.2	Vorbereitungsmessungen . . . . .	10
2.3	Vermessung des Wasserstoffatoms . . . . .	10
2.4	Vermessung des Wasserstoffmoleküls . . . . .	11
2.5	1-dimensionaler Festkörper . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>12</b>
3.1	Vorbereitungsmessungen . . . . .	12
3.2	Wasserstoffatom . . . . .	14
3.3	Wasserstoffmolekül . . . . .	19
3.4	Ein-Dimensionaler Festkörper . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>Daten</b>	<b>32</b>

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Allgemeines

Schallwellen sind longitudinale Schwingungen von Teilchen in einem Medium und sie können mithilfe der sogenannten Helmholtzgleichung mathematisch beschrieben werden:

$$\Delta P(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

$P(\vec{r}, t)$  beschreibt hierbei die Verteilung der Druckamplitude und  $c$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit/Gruppengeschwindigkeit der Welle. Nach dem Abseparieren der Zeitabhängigkeit nach  $P(\vec{r}, t) = p(\vec{r}) \cdot \cos(\omega t)$  ergibt sich eine stationäre Differentialgleichung für den Druck.

$$\Delta p(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} p(\vec{r}) \quad (1)$$

Analog wird die Wellenfunktion, deren Betragsquadrat die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Elektrons ist, in einem zeitunabhängigen Potential  $V(\vec{r})$  mithilfe der Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t)$$

bestimmt. Auch hier wird die Zeitabhängigkeit über  $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}$  abgekoppelt, was wiederum zur stationären Schrödingergleichung führt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (2)$$

Das Analogon zum Potential, in welchem sich das Elektron befindet, ist das Einschließen des Gases in einem Volumen  $V$ . Dabei gelten die Von-Neuman-Randbedingungen

$$\vec{\nabla} P(\vec{r}, t)|_{\partial V} = 0$$

an den Grenzen des Volumens.

Die dabei unter konstruktiver Interferenz der einfallenden und der am Rand des Volumens reflektierten Welle entstehenden stehenden Wellen können als das Analogon zu Wellenfunktionen von bestimmten quantenmechanischen Systemen benutzt werden.

## 1.2 Unendlicher Potentialtopf

### Potentialtopf

Der eindimensionale unendliche Potentialtopf mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

wird mit der stationären Schrödingergleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

und den Randbedingungen

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

gelöst. Es ergibt sich eine ebene Welle,

$$\psi(x) = A \sin(kx)$$

deren Extrema sich im Laufe der Zeit nicht verschieben (stehende Welle) mit der Kreiswellenzahl:

$$k = \frac{\pi n}{L} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

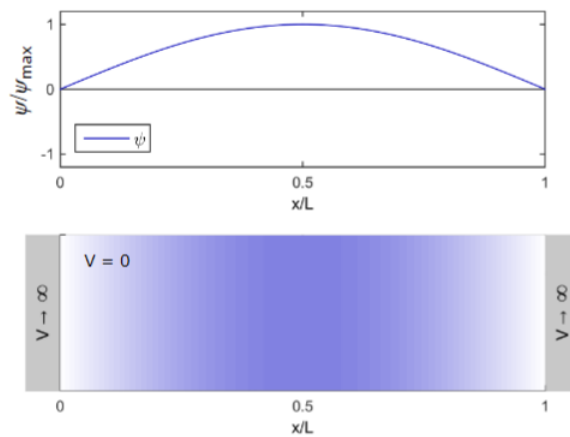


Abbildung 1: Hier wird beispielhaft die Lösung der Schrödingergleichung für einen unendlichen Potentialtopf  $\psi(x)$  mit  $n = 1$  dargestellt. Entnommen aus [1].

### Rohrresonator und Analogon

Hierbei wird an einem Ende eines Rohres ein Lautsprecher und am anderen Ende ein Mikrofon angebracht. Es wird von Resonanz gesprochen, wenn eine stehende Welle durch konstruktive Überlagerung der vom Lautsprecher einfallenden und der reflektierten Schallwelle entsteht. Dabei muss die Länge des Rohres ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge der Schallwelle sein:

$$L = \frac{\lambda}{2}n$$

Mit der Definition der Kreiswellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  ergibt sich die gleiche Bedingung wie für den unendlichen Potentialtopf in (3):

$$k = \frac{\pi n}{L} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

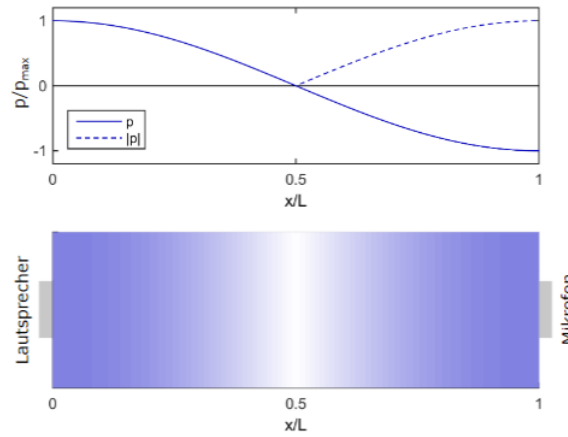


Abbildung 2: Hier wird beispielhaft die Druckamplitude eines Rohrresonators  $p(x)$  mit  $n = 1$  dargestellt. Entnommen aus [1].

Der einzige Unterschied zwischen der Druckverteilung  $p(x)$  und der Wellenfunktion  $\psi(x)$  liegt in der Position der Knoten und Bäuche, aufgrund der verschiedenen Randbedingungen, wie es in Abbildung 1 und Abbildung 2 zu erkennen ist.

### 1.3 Wasserstoffatom und Analogon

#### Wasserstoffatom

Die Wellenfunktion für das Wasserstoffatom wird auch mit der stationären Schrödingergleichung (2) bestimmt. Wegen der Kugelsymmetrie des Coulombpotentials des Kerns  $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  werden Kugelkoordinaten verwendet und der Laplace-Operator muss dementsprechend umgeschrieben werden.

Der Separationsansatz  $\psi(r, \varphi, \theta) = Y_l^m(\varphi, \theta) \cdot R_{n,l}(r)$  trennt die Schrödingergleichung in zwei einzelne Differentialgleichung. Der winkelabhängige Teil

$$-\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_l^m(\varphi, \theta) = l(l+1) Y_l^m(\varphi, \theta)$$

wird durch die Kugelflächenfunktionen mit den zugehörigen Legendre-Polynomen  $P_{lm}$  gelöst:

$$Y_l^m(\varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (4)$$

Der radiale Teil kann im Kugelresonator nicht realisiert werden, weshalb er in diesem Versuch nicht betrachtet wird.

Die auftretenden Quantenzahlen  $n$ ,  $l$  und  $m$  sind der Reihenfolge nach die Hauptquantenzahl, die Drehimpulsquantenzahl und die magnetische Quantenzahl. Ihnen erliegen

die folgenden Bedingungen auf:

$$\begin{aligned}n &= 1, 2, \dots \\l &= 0, 1, \dots, n-1 \\m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l\end{aligned}$$

$n$  geht in die Energieeigenwerte  $E = -\frac{E_{\text{ryd}}}{n^2}$  ein. Die Spin-Bahn-Kopplung hebt die Entartung der Energieniveaus teilweise auf, sodass aus jedem  $n$ -Energieniveau  $n$  weitere Energieniveaus entstehen. Die Entartung in  $m$  wird aufgehoben, indem ein äußeres Magnetfeld angelegt wird.

## Kugelresonator

Die Druckamplitude eines Gases in einem Kugelresonators wird mit der Helmholtzgleichung (1) bestimmt. Auch hier bietet es sich an Kugelkoordinaten zu benutzen. Die Differentialgleichung kann wieder mithilfe eines Separationsansatzes in einen winkelabhängigen und einen radialen Anteil  $p(r, \varphi, \theta) = Y_l^m(\varphi, \theta) \cdot F_{n,l}(r)$  zerlegt werden, wobei die Kugelflächenfunktionen den winkelabhängigen Teil lösen.

Der einzige Unterschied zwischen der Helmholtzgleichung und der Schrödingergleichung ist in diesem Fall das Coulombpotential, welches nicht durch ein Analogon realisiert werden kann. Da dieses Potential jedoch nur von  $r$  abhängt, hat es nur auf den radialen Teil der Differentialgleichung Einfluss, welcher in diesem Versuch nicht beobachtet wird.

Da die Symmetrieachse der durch den Lautsprecher erzeugten stehenden Schallwelle nicht mit der Symmetrieachse der zu drehenden Halbkugel des Resonators übereinstimmt, wird die richtige Ausrichtung mit einer Symmetriebrechung in Form eines Zwischenringes bewirkt. Das quantenmechanische Analogon dazu wäre ein angelegtes Magnetfeld, welches durch Wechselwirkung mit dem Drehimpuls diesen parallel zum Magnetfeld ausrichtet und die Entartung in  $m$  aufhebt.

## 1.4 Wasserstoffmolekül und Analogon

### Wasserstoffmolekül

Das  $\text{H}_2^+$ -Molekül besteht aus einem Elektron welches von den Coulombpotentialen zweier Kerne beeinflusst wird. In erster Näherung kann der bindende und antibindende Zustand des Elektrons durch die Überlagerung der Wellenfunktionen der beiden Kerne, wenn jeweils der andere Kern nicht existieren würde, erklärt werden. Die beiden Wellenfunktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  besitzen zwei Möglichkeiten wie sie zueinander stehen können, symmetrisch oder antisymmetrisch:

$$\begin{aligned}\psi_+ &= N_+[\psi_1 + \psi_2] \\ \psi_- &= N_-[\psi_1 - \psi_2]\end{aligned}$$

Im ersten Fall erhöht sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit zwischen den beiden Kernen, weshalb er bindend genannt wird. Im zweiten Fall heben sich die beiden Wellenfunktionen genau in der Mitte sogar komplett weg, weshalb die Wahrscheinlichkeit, dass sich dort das Elektron befindet gering ist.

### Kugelresonatoren mit Blende

Klassisch wird ein Wasserstoffmolekül mit zwei Kugelresonatoren, die über eine Blende miteinander verbunden sind, umgesetzt. Die Blendenweite steht dabei stellvertretend für den Abstand zwischen den beiden Kernen. Schwingen die stehenden Schallwellen in beiden Kugelresonatoren in Phase, so ist das Äquivalent der bindende Zustand. Schwingen die stehenden Schallwellen gegenphasig, so ist das Äquivalent der antibindende Zustand.

## 1.5 1-dim. Festkörper und Analogon

### 1-dim. Festkörper

Die Elektronen in einem 1-dim. Festkörper können als freie Elektronen betrachtet werden mit der Energie:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Diese freien Elektronen werden an den periodisch angeordneten Kernen des Festkörpers gestreut, wobei die Wellenzahl  $k$  die Bragg-Bedingung erfüllen muss:

$$n\lambda = 2d \quad \implies \quad k = \frac{\pi n}{d} \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots$$

$d$  ist der Abstand der Kerne.

Da aufgrund der Bragg-Bedingung nur Elektronen mit bestimmten Werten für  $k$  besonders stark gestreut werden und die Elektronen mit anderen  $k$  nicht wirklich gestreut werden, also lokalisiert sind, entstehen sogenannte Bandlücken zwischen dem Valenzband und dem Leitungsband in der Dispersionsrelation.

### Kette von Rohrresonatoren

Das klassische Äquivalent zum 1-dim. Festkörper kann als Aneinanderreihung von Rohrresonatoren mit Blenden dazwischen realisiert werden. Das kommt daher, dass der 1-dim. Festkörper als eine Kette von endlichen Potentialtöpfen die ähnlich zum Wasserstoffmolekül durch Blenden miteinander verbunden sind.

Mögliche Defekte z.B. Zwischenatome werden durch Einsetzen verschieden langer Rohrresonatoren und die damit verbundene variierende Kopplungsstärke wird wiederum durch verschieden breite Blendenöffnungen verwirklicht.

## 2 Durchführung

### 2.1 Versuchsaufbau

Für die durchzuführenden Messungen werden drei verschiedene Messaufbauten benötigt, um das Wasserstoffatom, das Wasserstoffmolekül und den 1-dimensionalen Festkörper zu simulieren.

#### Wasserstoffatom

Zur Simulation des Wasserstoffatoms wird ein Hohlraumresonator genutzt, der aus zwei aufeinandergesetzten Halbkugeln besteht. In der Wand des Hohlraumresonators befinden sich, wie in Abbildung 3 zu sehen, entgegengesetzt ein Mikrofon und ein Lautsprecher. Die Schallwellen des Mikrofons bilden stehende Wellen innerhalb des Hohlraumresonators aus. Die zugehörigen Druckamplituden werden vom Mikrofon vermessen. Zur Änderung der Symmetrieachse kann ein Zwischenring zwischen die beiden Halbkugeln gesetzt werden. Die beiden Halbkugeln können zueinander verdreht werden, sodass der Winkel zwischen dem Mikrofon und dem Lautsprecher zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  angepasst werden kann. Für einen Winkel von  $180^\circ$  stehen sich Mikrofon und Lautsprecher gegenüber. Es ist darauf zu achten, dass dieser Winkel nicht unbedingt dem tatsächlichen Polarwinkel  $\theta$  entspricht. Wenn keine Zwischenringe in das Wasserstoffatom eingesetzt werden muss  $\theta$  zunächst berechnet werden:

$$\theta = \arccos \left[ \frac{1}{2} \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \right]$$

Wenn jedoch Zwischenringe eingesetzt sind steht die Symmetrieachse aufrecht im Hohlraumresonator und der gemessene Winkel entspricht  $\theta$ .



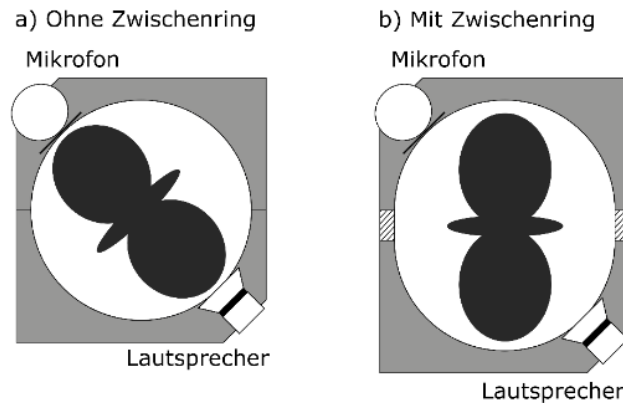


Abbildung 3: In der Abbildung ist der Aufbau zur Simulation des Wasserstoffatoms dargestellt. Ein Lautsprecher sendet Schallwellen aus, die von einem Mikrofon auf der entgegengesetzten Seite detektiert werden. Durch das Einsetzen eines Zwischenrings kann die Symmetrieachse verschoben werden. Entnommen aus [2]

### Wasserstoffmolekül

Um das Wasserstoffmolekül zu simulieren werden nun zwei Kugelresonatoren aufeinander gesetzt. Sie sind durch eine Öffnung in den Kugeloberflächen verbunden. Die Größe dieser Öffnung kann durch Blenden verschiedenen Durchmessers variiert werden. Das Mikrofon und der Lautsprecher befinden sich jeweils in einem der beiden Kugelresonatoren.

### 1-dimensionaler Festkörper

Um das Verhalten eines 1-dimensionalen-Festkörpers zu analysieren, werden Zylinderresonatoren zu Ketten zusammengesetzt. Dabei können verschiedene Zylinderlängen und Blenden genutzt werden, die zwischen den Zylindern platziert werden. Der Lautsprecher wird so angesteuert, dass er über einen Zeitraum mit ansteigender Frequenz einen Ton aussendet. Die entstehenden stehenden Wellen werden vom Mikrofon aufgenommen und entweder wie in Abbildung 4 zu sehen über die Steuerelektronik auf das Oszilloskop übertragen oder direkt an einen Computer zur Auswertung mit einem automatischen Programm übertragen.

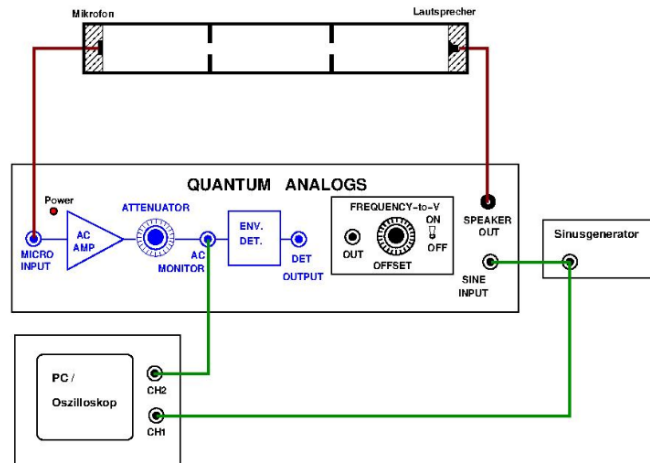


Abbildung 4: In der Abbildung ist der Aufbau zur Erzeugung der stehenden Wellen über einen Sinusgenerator und ein Lautsprecher sowie deren Detektion über ein Mikrofon, das das Signal auf ein Oszilloskop oder zum Computer leitet. Entnommen aus [2]

## 2.2 Vorbereitungsmessungen

Zur Vorbereitung der späteren Messungen soll zunächst eine Zylinderresonatorkette untersucht werden, die aus Zylinder der Länge 50 mm besteht und im Laufe der Messung von einem auf 12 Zylinder erweitert werden soll. Für jede Anzahl an Zylindern wird ein Frequenzspektrum der Druckamplitude im Bereich von 0,1 bis 12 kHz jeweils mit dem Oszilloskop und der Computersoftware aufgenommen. Anschließend werden auch die Frequenzspektren eines einzelnen Zylinders der Länge 50 mm und 75 mm vermessen.

## 2.3 Vermessung des Wasserstoffatoms

Zunächst wird ein hochaufgelöstes Frequenzspektrum von 0,1 bis 12 kHz in 5 Hz-Schritten mit dem Computer aufgenommen. Dabei stehen Mikrofon und Lautsprecher in einem Winkel von  $180^\circ$  zueinander und es ist kein Zwischenring eingesetzt.

Anschließend werden die Resonanzfrequenzen bei gleichem Aufbau mit Hilfe des Oszilloskops bestimmt. Dazu wird die Frequenz des Lautsprechers händisch über den Sinusgenerator von 0,1 bis 100 kHz variiert. Bei jeder auf dem Oszilloskop sichtbaren Resonanz wird die Ordnung der Resonanz, die Amplitude und die Phasenverschiebung neben der Resonanzfrequenz notiert.

Für die ausgewählten Resonanzen 2,310 kHz, 3,711 kHz, 4,999 kHz und 7,470 kHz werden nun hochaufgelöste Spektren für einen Winkelbereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  in  $10^\circ$ -Schritten aufgenommen.

Anschließend soll die Aufspaltung der Resonanzfrequenz bei 2,3 kHz untersucht werden. Dazu werden hochaufgelöste Frequenzspektren in 1 Hz-Schritten zwischen 1,8 und 2,8 kHz

für eingesetzte Zwischenringe der Größen 3 mm, 9 mm und 12 mm aufgenommen. Für den 9 mm großen Zwischenring wird die Aufspaltung der Resonanzfrequenz bei 2,3 kHz in Abhängigkeit des Winkels untersucht, indem hochaufgelöste Spektren der Druckamplituden zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  in  $10^\circ$ -Schritten aufgenommen werden.

## **2.4 Vermessung des Wasserstoffmoleküls**

Zur Untersuchung des Wasserstoffmoleküls werden zunächst hochaufgelöste Frequenzspektren im Bereich zwischen 2,2 und 2,5 kHz in 1 Hz-Schritten für eingesetzte Blenden der Durchmesser 10 mm, 16 mm und 20 mm aufgenommen.

Für die 16 mm-Blende wird obriges hochaufgelöstes Frequenzspektrum in Abhängigkeit des Winkels zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  in  $10^\circ$ -Schritten aufgenommen. Zusätzlich wird für die dabei auftretenden Resonanzfrequenzen die Phasenverschiebung zwischen der Druckamplitude in der oberen Kugel und der in der unteren Kugel über das Oszilloskop bestimmt.

## **2.5 1-dimensionaler Festkörper**

Zu Beginn wird ein Frequenzspektrum einer Resonatorkette von 0,1 bis 12 kHz in 5 Hz-Schritten aufgenommen. Das erste Frequenzspektrum wird für eine Kette aus zwei 50 mm-Zylindern, die durch eine 16 mm-Blende getrennt sind, aufgenommen. Daraufhin wird die Kette jeweils um einen Zylinder und eine Blende erweitert, bis die Kette aus zehn Zylindern besteht. Bei jedem neu hinzugefügten Zylinder wird dabei ein Spektrum aufgenommen.

Daraufhin wird die Messung mit den Blendendurchmessern 10 mm und 13 mm für Ketten aus zwei, vier und 10 Zylindern wiederholt.

Zur Untersuchung von Fehlstellen wird eine Kette aus 10 50 mm langen Zylindern mit 16 mm-Blenden aufgebaut. Es werden drei dem ersten entsprechende Frequenzspektren aufgenommen, in denen jeweils einer der 50 mm-Zylinder entweder durch einen 37,5 mm-, 62,5 mm- oder 75 mm-Zylinder ersetzt wurde.

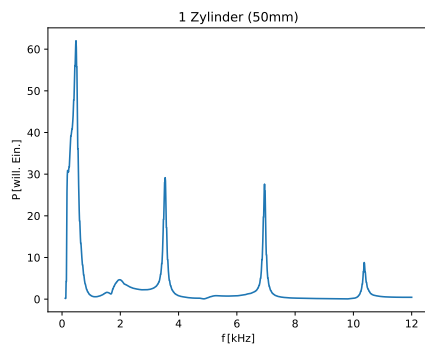
Anschließend wird eine durch 16 mm-Blenden getrennte Resonatorkette aus 10 Zylindern, die abwechselnd 50 mm und 75 mm lang sind, aufgebaut und wieder das entsprechende Frequenzspektrum aufgenommen.

Zuletzt wird eine Resonatorkette aus acht 50 mm langen Zylindern aufgebaut, die abwechselnd durch 13 mm- und 16 mm-Blenden getrennt werden. Auch hier wird das Frequenzspektrum im Bereich von 0,1 bis 12 kHz in 5 Hz-Schritten aufgenommen.

## **3 Auswertung**

### **3.1 Vorbereitungsmessungen**

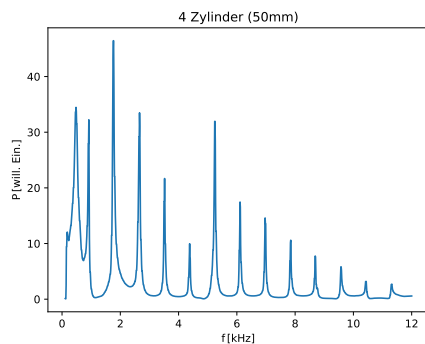
Für die erste Vorbereitungsmessung werden beispielhaft die Messungen für einen Zylinder, einer Reihe aus vier Zylindern und einer Reihe aus acht Zylindern der Länge 50 mm mit den entsprechenden Oszilloskopmessungen verglichen. Die Abbildungen 5 zeigen, dass die Messungen per Computersoftware und Oszilloskop weitgehend übereinstimmen. Die Peaks und deren relativen Höhen auf dem Oszilloskop spiegeln die Darstellung der Computersoftware wieder, werden jedoch weniger scharf dargestellt. Deswegen ist es sinnvoll die Computermessungen zur weiteren Analyse zu nutzen.



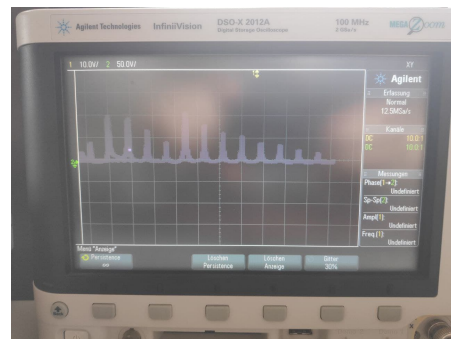
- (a) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum eines einzelnen Hohlraumresonators der Länge 50 mm per Computerprogramm dargestellt.



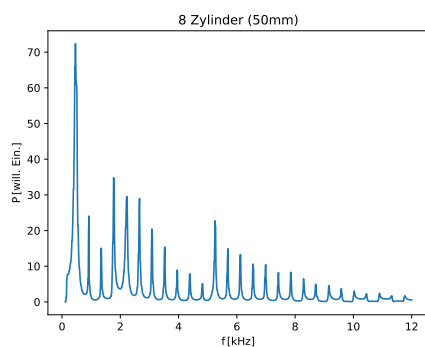
- (b) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum eines einzelnen Hohlraumresonators der Länge 50 mm per Oszilloskop dargestellt.



- (c) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum einer Kette aus vier Hohlraumresonators der Länge 50 mm per Computerprogramm dargestellt.



- (d) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum einer Kette aus vier Hohlraumresonators der Länge 50 mm per Oszilloskop dargestellt.



- (e) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum einer Kette aus acht Hohlraumresonators der Länge 50 mm per Computerprogramm dargestellt.



- (f) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum einer Kette aus acht Hohlraumresonators der Länge 50 mm per Oszilloskop dargestellt.

Abbildung 5

## 3.2 Wasserstoffatom

### Resonanzfrequenzen bei $\theta=180^\circ$

Zunächst wird das gemessene hochaufgelöste Frequenzspektrum des Hohlraumresonators bei einem Winkel von  $\theta = 180^\circ$  und einem Frequenzbereich zwischen 0,1 und 12 kHz in Abbildung 6 dargestellt.

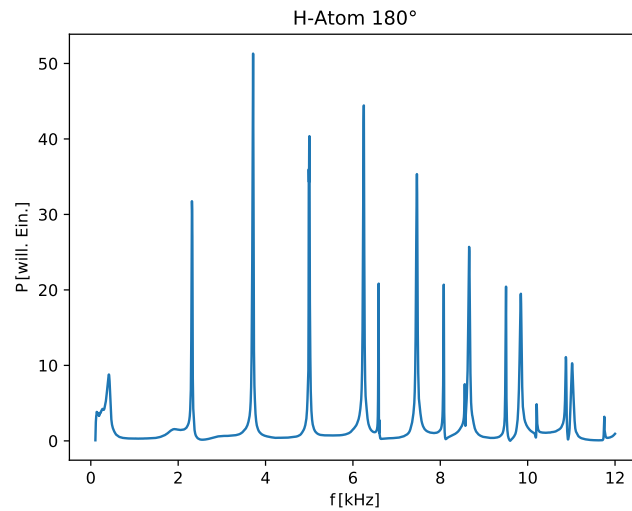
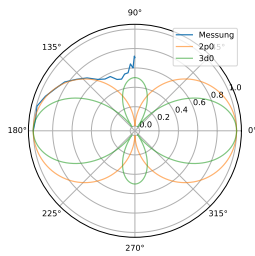


Abbildung 6: In der Abbildung ist das hochaufgelöste Spektrum des Wasserstoffatommodells bei einem Polarwinkel  $\theta$  von  $180^\circ$  im Bereich von 0,1 bis 12 kHz dargestellt.

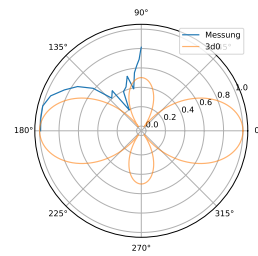
Mit Hilfe des Oszilloskops werden die in Abbildung 6 zu sehenden Resonanzfrequenzen analysiert und ihre Ordnung, Amplitude und Phasenverschiebung in Tabelle 2 aufgelistet.

## Winkelabhängigkeit gewählter Resonanzfrequenzen

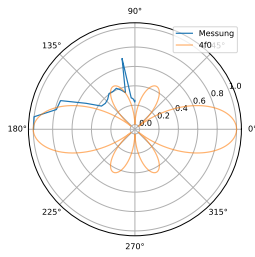
Die Druckamplitude der Resonanzfrequenzen wird für die Resonanzfrequenzen 2,310 kHz, 3,711 kHz, 4,999 kHz und 7,470 kHz in Abhängigkeit des Winkels  $\theta$  aufgetragen. Die in den Abbildungen 7a zu sehende Druckamplitudenverteilung kann unterschiedlich interpretiert werden. Deutlich ist eine Keule in 180°-Richtung zu erkennen. Zusätzlich ist auch ein sehr schwach ausgeprägter Ausschlag in 90°-Richtung zu erkennen. Je nach Bewertung des Ausschlags in 90°-Richtung kann von einem  $3d_0$ - oder  $2p_0$ -Orbital ausgegangen werden. Die in Abbildung 7b zu sehende Druckamplitudenverteilung weist ebenfalls eine große Keule in 180°-Richtung und eine Keule in 90°-Richtung, die sich womöglich aus zwei kleinen Keulen zusammensetzt auf. Wird davon ausgegangen, dass nur eine gesamte Keule in 90°-Richtung existiert, kann davon ausgegangen werden, dass es sich um das Äquivalent eines  $3d_0$ -Orbitals handelt. Die in Abbildung 7b zu sehende Druckamplitudenverteilungen könnte auf ein  $4f_0$ -Orbital hinweisen, sofern das eine Maximum nahe 90° vernachlässigt und so eine Keule erkennbar ist. In Abbildung 8b scheint das Äquivalent eines  $6h_0$ -Orbitals aufgenommen worden zu sein. Zur Bestimmung der Orbitale wurden die gemessenen Verteilungen mit theoretischen Atomorbitalen verglichen [3].



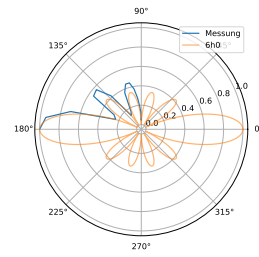
- (a) In der Abbildung Druckamplitude an der Resonanzstelle bei 2,310 kHz gegen den Polarwinkel  $\theta$  aufgetragen. Die Druckamplitudenverteilung lässt ein  $3d_0$ - oder  $2p_0$ -Orbital vermuten.



- (b) In der Abbildung Druckamplitude an der Resonanzstelle bei 3,711 kHz gegen den Polarwinkel  $\theta$  aufgetragen. Die Druckamplitudenverteilung lässt ein  $3d_0$ -Orbital vermuten.



- (a) In der Abbildung Druckamplitude an der Resonanzstelle bei 4,999 kHz gegen den Polarwinkel  $\theta$  aufgetragen. Die Druckamplitudenverteilung lässt ein  $4f_0$ -Orbital vermuten.



- (b) In der Abbildung Druckamplitude an der Resonanzstelle bei 7,470 kHz gegen den Polarwinkel  $\theta$  aufgetragen. Die Druckamplitudenverteilung lässt ein  $6h_0$ -Orbital vermuten.

## Zustandsaufspaltung

Nach dem Einsetzen von Zwischenringen ergeben sich Aufspaltungen der Resonanz um 2,3 kHz, die in Abbildung 9 exemplarisch für eine Ringlänge von 3 mm eingezeichnet ist. Da die Resonanz in zwei Resonanzen aufspaltet, muss die Drehimpulsquantenzahl gleich eins sein. So kann nun definitiv von einem  $2p_0$ -Orbital ausgegangen werden.

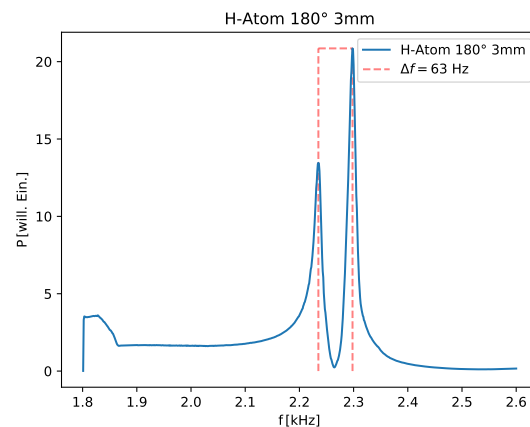


Abbildung 9: In der Abbildung ist die Aufspaltung der Resonanz bei 2,3 kHz in zwei circa 60 Hz entfernte Resonanzen deutlich zu erkennen.

Die Aufspaltung der Resonanzfrequenzen steigt, wie in Abbildung 10 zu sehen, linear mit der Länge des Zwischenrings auf einen maximalen Wert von 171 Hz an. Dies entspricht der zum Magnetfeld proportionalen Zeeman-Aufspaltung eines Wasserstoffatoms in einem externen Magnetfeld.



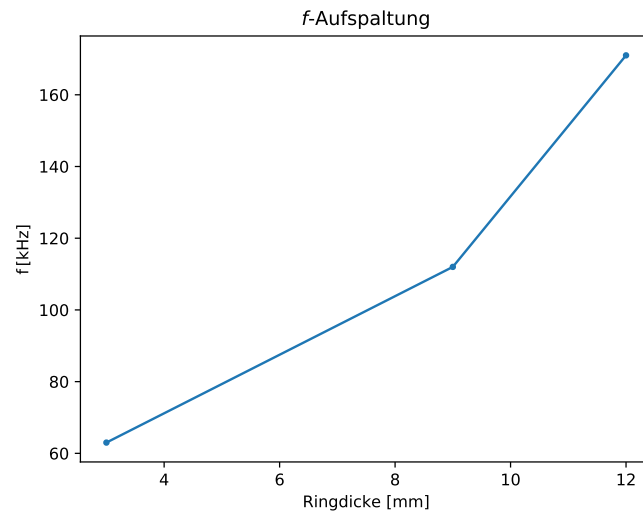


Abbildung 10: Aus der Abbildung ist ein linearer Zusammenhang zwischen der Aufspaltung der Resonanzzustände und der Länge des eingesetzten Zwischenrings zu vermuten.

### Winkelabhängigkeit der Zustandsaufspaltung

Die Winkelabhängigkeit der Resonanzfrequenzaufspaltung ist für einen Zwischenring der Länge 9 mm in einem Polarplot 11 aufgetragen.

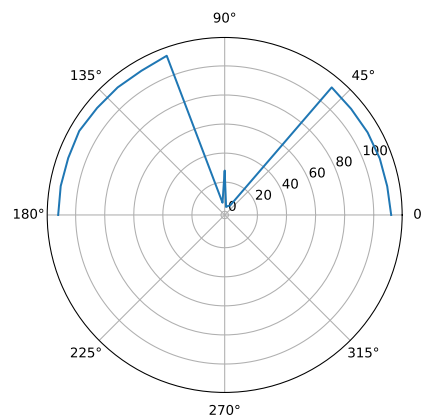


Abbildung 11: In der Abbildung ist die Druckamplitude gegen den Winkel  $\theta$  aufgetragen.

Die Aufspaltung ist in Abbildung 12 exemplarisch für einen Winkel von 180° dargestellt. Die Resonanzfrequenz bei 2,170 kHz entspricht einem Zustand mit den Quantenzahlen  $m=0$  und  $l=1$ . Die Resonanzfrequenz bei 2,284 kHz entspricht dem Zustand mit den

Quantenzahlen  $m=\pm 1$  und  $l=1$ . Diese Aufspaltung ist wieder das Äquivalent des Zeeman-Effekts, der in diesem Fall der Änderung einer Symmetrieachse, durch das Verlängern des Resonators in eine Richtung entspricht.

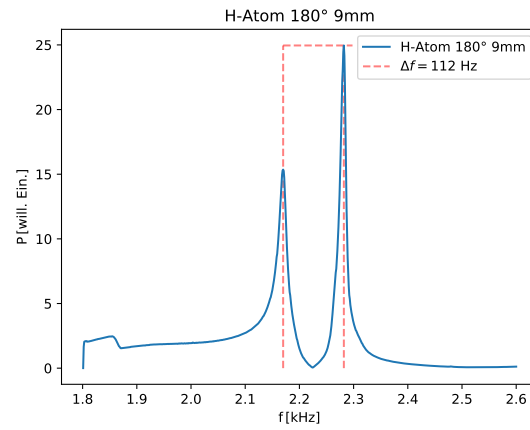


Abbildung 12: In der Abbildung ist die Aufspaltung der Resonanz exemplarisch für einen Winkel von  $180^\circ$  aufgetragen.

### 3.3 Wasserstoffmolekül

#### Resonanzfrequenzen für verschiedene Blendendurchmesser

Für die verschiedenen Blendendurchmesser 10 mm, 15 mm und 20 mm ergeben sich im Frequenzbereich von 2,2 bis 2,5 kHz drei Resonanzfrequenzen, deren exakte Werte in Abhängigkeit vom Blendendurchmesser in Abbildung 13 aufgetragen sind. Es ist deutlich zu erkennen, dass nur die dritte Resonanzfrequenz vom Blendendurchmesser abhängt.

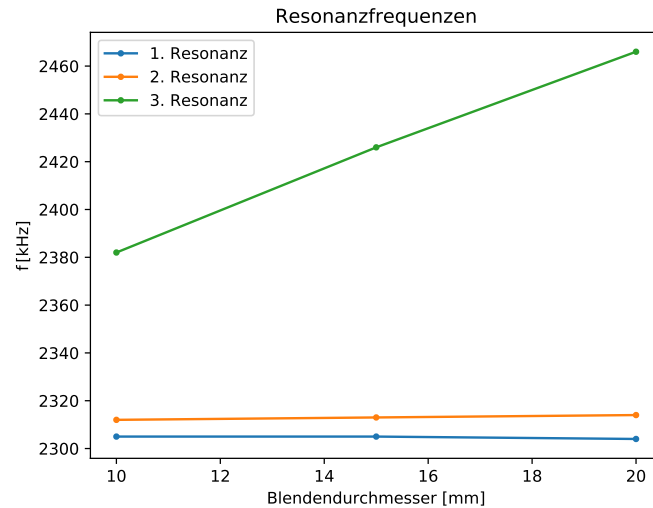


Abbildung 13: In der Abbildung sind die drei Resonanzfrequenzen im Bereich von 2,2 bis 2,5 kHz gegen den Durchmesser der eingesetzten Blende dargestellt.

### Winkelabhängigkeit gewählter Resonanzfrequenzen

Während für einen Blendendurchmesser von 16 mm maximal vier Resonanzen zu erwarten sind, werden wie in Abbildung 14 zu sehen nur die Resonanzfrequenzen 2307 Hz, 2313 Hz und 2426 Hz gemessen.

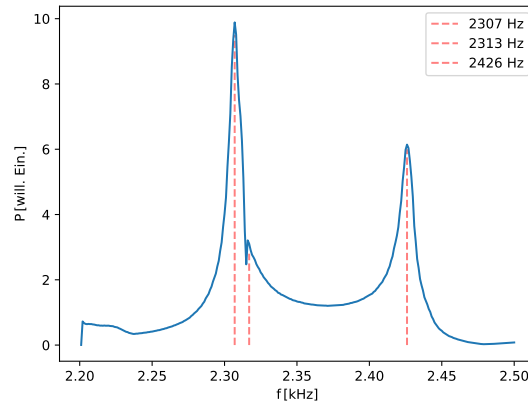
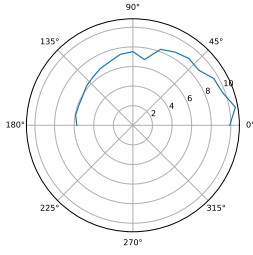
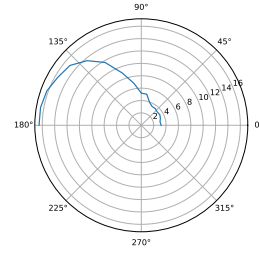


Abbildung 14: In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für einen Winkel von  $180^\circ$  aufgetragen. Es sind Resonanzen bei 2307 Hz, 2313 Hz und 2426 Hz zu erkennen.

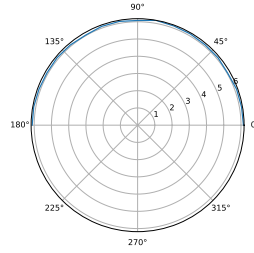
Für diese drei Resonanzfrequenzen werden die Druckamplituden in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$  in Polarplots aufgetragen



(a) In der Abbildung ist die Druckamplitude der Resonanzstelle bei 2307 Hz gegen den Winkel  $\varphi$  aufgetragen.



(b) In der Abbildung ist die Druckamplitude der Resonanzstelle bei 2313 Hz gegen den Winkel  $\varphi$  aufgetragen.



(c) In der Abbildung ist die Druckamplitude der Resonanzstelle bei 2426 Hz gegen den Winkel  $\varphi$  aufgetragen.

und die Phasenverschiebungen bei einem Winkel von  $180^\circ$  zwischen der Druckamplitude im oberen und unteren Teil des Resonators aufgelistet 1.

Tabelle 1: In dieser Tabelle sind für die drei gemessenen Resonanzfrequenzen  $f_{\text{res}}$ , die zugehörigen Phasendifferenzen für die obere und die untere Druckamplitude, sowie deren relative Phasendifferenz aufgelistet.

Ordnung	$f_{\text{res}}$ [kHz]	Phasendiff. oben $[\circ]$	Phasendiff. unten $[\circ]$	relative Phasendiff. $[\circ]$
1	2,307	−109	−36	73
2	2,313	−103	−85	188
3	2,426	36	−145	181

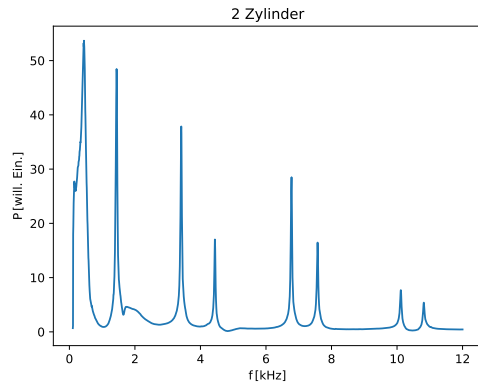
Aus den Phasenverschiebung lassen sich die Symmetrien der Zustände feststellen. Bei einer relativen Phasendifferenz von  $0^\circ$  handelt es sich um einen symmetrischen und bei  $180^\circ$  um einen antisymmetrischen Zustand. Demnach handelt es sich bei den Resonanzen bei 2,313 und 2,426 kHz eindeutig um antisymmetrische Zustände. Da die Verteilung bei 2,426 kHz unabhängig vom Polarwinkel  $\varphi$  ist und die Resonanz bei 2,3 kHz einem Zustand mit  $l=1$  entsprach, kann von einem  $2\sigma_u$ -Zustand ausgegangen werden. Die Verteilung bei 2,313 kHz ist zwar nicht offensichtlich unabhängig vom Winkel, aber zumindest kreisförmig. Wenn daher von einer Winkelunabhängigkeit, die nur nicht genau

genug gemessen wurde, ausgegangen wird, handelt es sich um den  $1\sigma_u$ -Zustand. Die relative Phasenverschiebung der Resonanz bei 2,307 kHz liegt mit  $73^\circ$  weit von  $0^\circ$  und  $180^\circ$  entfernt. Da sie etwas näher an  $0^\circ$  liegt und die Verteilung winkelnunabhängig ist, wird von einem  $1\sigma_g$ -Zustand ausgegangen.

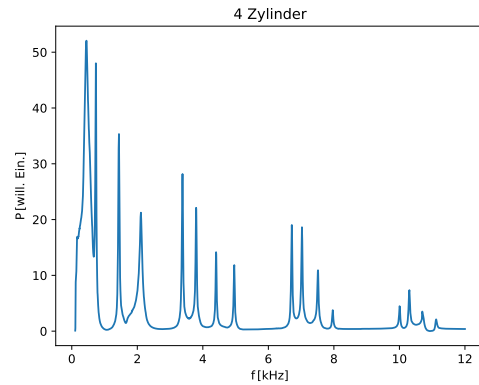
### **3.4 Ein-Dimensionaler Festkörper**

#### **Resonatorkette mit 16mm-Blenden**

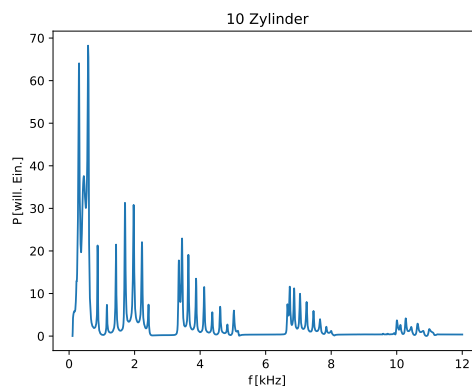
Die aufgenommenen Frequenzspektren der Resonatorketten zeigen jeweils vier Bereiche, die mit Maxima gefüllt sind. Wie in den Abbildung 16 zu erkennen, entspricht die Anzahl der Maxima der der verwendeten Zylinder. Dies lässt sich so interpretieren, dass durch jeden Zylinder ein Band hinzugefügt wird, auf dem Elektronen in einem Festkörper Zustände einnehmen können. Die Bereiche ohne Maxima entsprechen Bandlücken, also Bereichen, in denen keine Elektronenzustände vorliegen.



- (a) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus zwei Zylindern der Länge 50 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 16 mm getrennt sind, dargestellt.



- (b) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus vier Zylindern der Länge 50 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 16 mm getrennt sind, dargestellt.



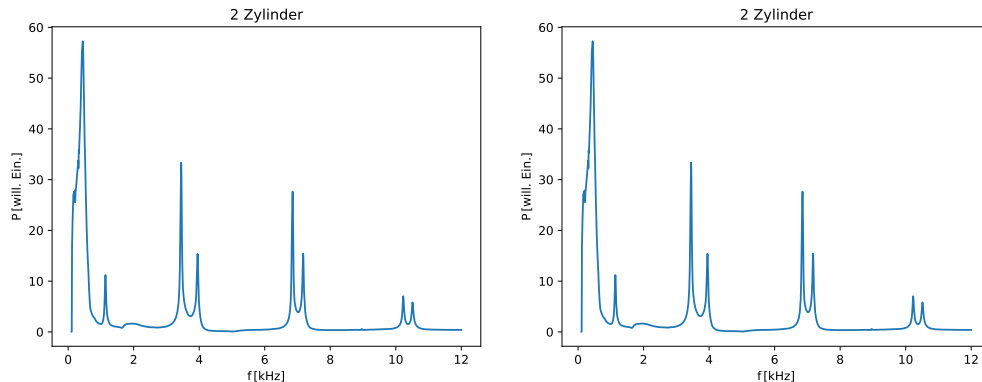
- (c) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus zehn Zylindern der Länge 50 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 16 mm getrennt sind, dargestellt.

Abbildung 16



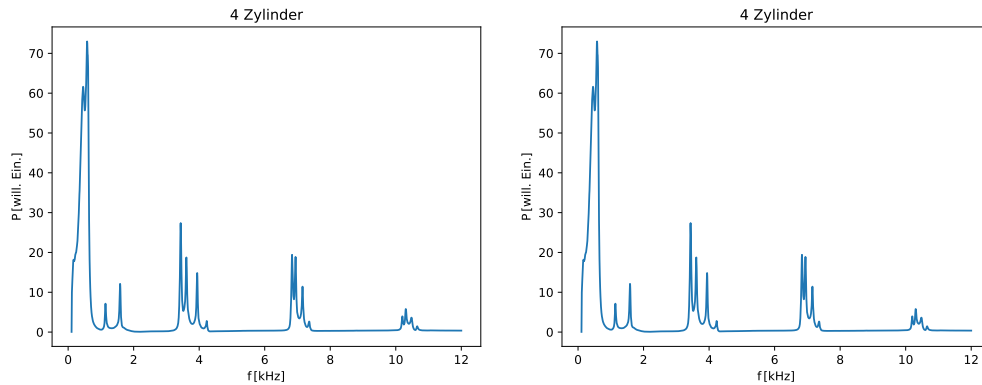
## Resonatorkette mit 10mm- und 13mm-Blenden

Ein kleinerer Blendendurchmesser entspricht einem größeren Potential innerhalb des Festkörpers. Demnach sind die Elektronen stärker lokalisiert und ihre Bänder flacher. Dies ist in den Abbildungen 1718 zu erkennen. Besonders für die Frequenzspektren bei einer Blendenwahl von 10 mm sind die kleineren Abstände zwischen den Maxima und die größeren Abstände zwischen den Maximabereichen im Vergleich zu den Frequenzspektren bei einer Blendenwahl von 16 mm deutlich zu erkennen.

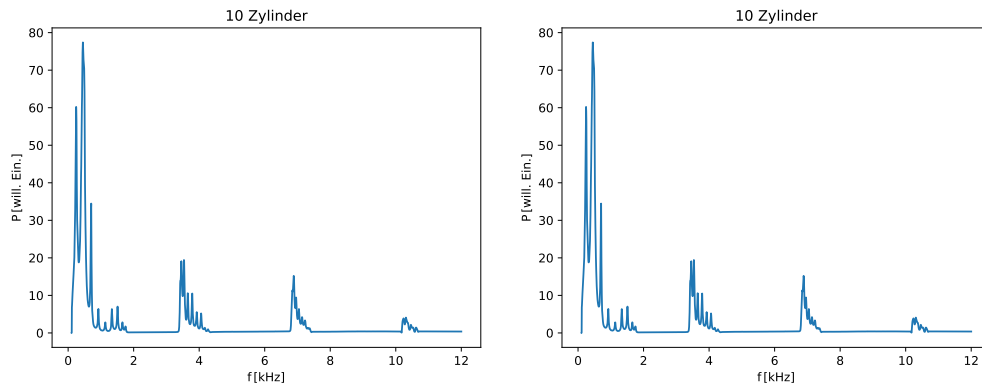


- (a) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus zwei Zylindern der Länge 50 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 10 mm getrennt sind, dargestellt.
- (b) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus zwei Zylindern der Länge 50 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 13 mm getrennt sind, dargestellt.

Abbildung 17: Auf der linken Seite sind die gemessenen Frequenzspektren für einen Blendendurchmesser von 10 mm und einer Anzahl von zwei Zylindern dargestellt. Auf der rechten Seite sind die entsprechenden Frequenzspektren für einen Blendendurchmesser von 13 mm dargestellt.



- (a) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus vier Zylindern der Länge 50 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 10 mm getrennt sind, dargestellt.
- (b) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus vier Zylindern der Länge 50 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 13 mm getrennt sind, dargestellt.

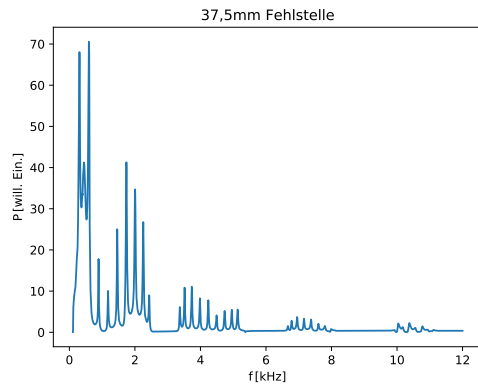


- (c) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus zehn Zylindern der Länge 50 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 10 mm getrennt sind, dargestellt.
- (d) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus zehn Zylindern der Länge 50 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 13 mm getrennt sind, dargestellt.

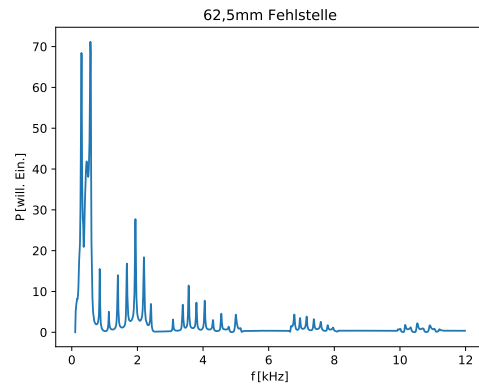
Abbildung 18: Auf der linken Seite sind die gemessenen Frequenzspektren für einen Blendendurchmesser von 10 mm und die Zylinderanzahlen vier und 10 dargestellt. Auf der rechten Seite sind die entsprechenden Frequenzspektren für einen Blendendurchmesser von 13 mm dargestellt.

## **Resonatorkette mit Störstellen**

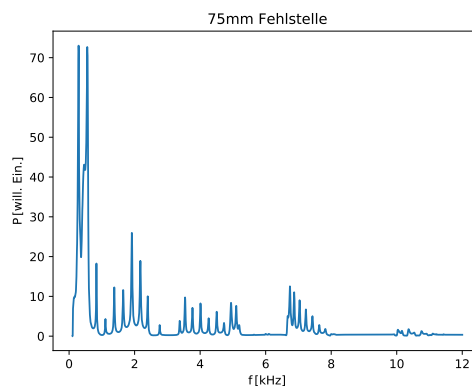
In Form von Zylindern abweichender Größe werden Störstellen erzeugt, die Gitterdefekten in Festkörpern entsprechen simulieren sollen. Diese Störstellen rufen Abweichungen vom ungestörten Frequenzspektrum hervor. So lässt sich für die Störzylinder der Größen 62,5 mm (siehe Abb. 19b) und 75 mm (siehe Abb. 19c) eine neue Resonanz um eine Frequenz von 3 kHz erkennen. Zudem ist, wie in Abbildung 19 zu sehen, für alle Störzylinder eine deutliche Reduktion der Druckamplituden im Vergleich zur ungestörten Resonatorkette aus zehn Zylindern zu erkennen. Auch ein Absacken der Druckamplituden in der Mitte des ersten Maximabereichs zwischen 0 und 3 kHz ist für alle Störzylinderlängen gut zu erkennen.



- (a) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonator-kette aus neun Zylindern der Länge 50 mm und einem Zylinder der Länge 37,5 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 13 mm getrennt sind, dargestellt.



- (b) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonator-kette aus neun Zylindern der Länge 50 mm und einem Zylinder der Länge 62,5 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 13 mm getrennt sind, dargestellt.

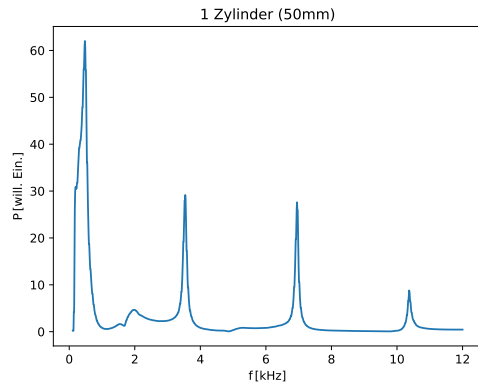


- (c) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum für eine Resonator-kette aus neun Zylindern der Länge 50 mm und einem Zylinder der Länge 75 mm, die durch Blenden mit einem Durchmesser von 13 mm getrennt sind, dargestellt.

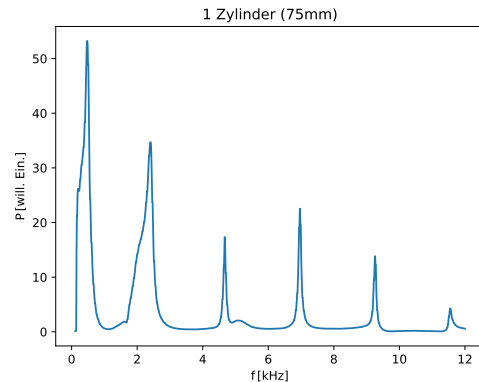
Abbildung 19

## Kette wechselnder Resonatorlängen

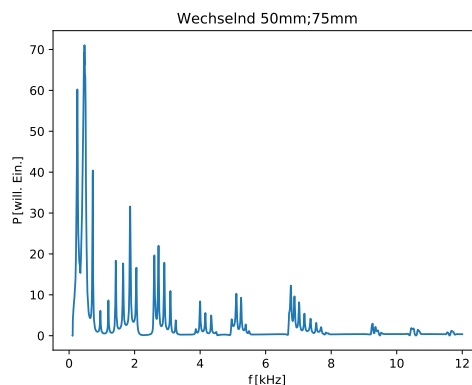
Die Kette aus abwechselnden 50 und 75 mm langen Resonatoren entspricht einem Gitter mit zwei-atomiger Basis. Dies führt dazu, dass die Resonanzen der einzelnen ein-atomigen Basen in die zwei-atomigen Basis übernommen werden. Dies ist im Vergleich der einzelnen Spektren eines 50 mm-Resonators (siehe Abb. 20a) und eines 75 mm-Resonators (siehe Abb. 20b) mit dem Spektrum der Kette wechselnder Resonatorlänge in Abbildung 20c zu erkennen.



(a) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum eines einzelnen Zylinders der Länge 75 mm dargestellt.



(b) In der Abbildung ist das Frequenzspektrum eines einzelnen Zylinders der Länge 75 mm dargestellt.



(c) In der Grafik ist das Frequenzspektrum einer Kette aus zehn durch 16 mm-Blenden getrennten Zylindern, die abwechselnd 50 mm und 75 mm lang sind, dargestellt.

Abbildung 20

### Kette wechselnder Blendendurchmesser

Das bei wechselndem Blendendurchmesser von 13 und 16 mm aufgenommene Frequenzspektrum ist in Abbildung 21 dargestellt und zeigt eine deutliche Aufspaltung der Maximalbereiche um mindestens 300 Hz. Die neuen Bandlücken entstehen dadurch, dass sich das Potential nun alle zwei Zylinder periodisch wiederholt und nicht jeden Zylinder. Dies entspricht einer neuen übergeordneten Periodizität des Gitters.

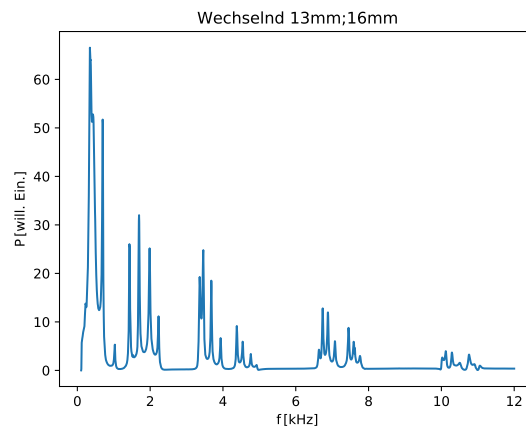


Abbildung 21: In der Abbildung ist das Frequenzspektrum einer Resonator-Kette aus acht 50 mm langen und abwechselnd durch 13 mm- und 16 mm-Blenden getrennten Zylindern dargestellt.

## 4 Diskussion

Die Betrachtung der Analogons für die gegebenen Systeme des Wasserstoffatoms, des Wasserstoffmoleküls und eines 1-dimensionalen Festkörpers haben alle einen eindrucksvollen Einblick in die Grundlagen dieser Systeme gegeben. Für das Wasserstoffatom konnten die Druckverteilungen weitestgehend eindeutig Atomorbitalen des Wasserstoffatoms zugeordnet werden. Die Aufspaltung der Resonanzen durch Aufhebung der Symmetriachse, sowie das Verhalten der Aufspaltung konnten besonders deutlich analysiert werden. Bei dieser Untersuchung konnten neben der  $l$  auch die  $m$ -Quantenzahl bestimmt werden. Für das Wasserstoffmolekül ergab die Untersuchung der Resonanzfrequenz, dass die erster und dritter Ordnung unabhängig vom Durchmesser der Blende sind und demnach in der  $m$ -Quantenzahl entartet sind. Die Resonanzfrequenz dritter Ordnung ist proportional zum Blendedurchmesser und nicht entartet. Aus den winkelabhängigen Druckamplitudenverteilungen ausgewählter Resonanzfrequenzen und den relativen Phasenverschiebungen zwischen oberen und unterem Resonator konnten die Molekülzustände für zwei der drei Resonanzen eindeutig bestimmt werden. Eine Resonanz konnte nicht vermessen werden.

Für den 1-dimensionalen-Festkörper konnten zunächst die grundlegenden Eigenschaften, wie das Entstehen von Bändern und Bandlücken sowie das Verhalten derer bei Änderung des auf das Elektron wirkenden Potentials überprüft werden. Anschließend zeigten die Störzylinder, wie die Bandstruktur durch Defekte innerhalb eines Gitters stark beeinflusst wird. Auch die Überlagerung der Bandstruktur zweier Basen bei einer zwei-atomigen Basis konnte direkt durch eine Resonatorkette aus Resonatoren wechselnder Längen beobachtet werden. Zuletzt konnte auch der Einfluss einer übergeordneten Periodizität des Gitters beobachtet werden, der darin liegt, dass neue Bandlücken entstehen.

## 5 Daten

Tabelle 2: In dieser Tabelle sind für die Ordnungen 1 bis 11 die Resonanzfrequenzen  $f_{\text{res}}$ , die zugehörigen Amplituden und Phasenverschiebungen  $\varphi$  aufgelistet.

Ordnung	$f_{\text{res}}$ [kHz]	Amplitude [V]	$\varphi$ [°]
1	2,310	176	79
2	3,711	287	−34
3	4,999	287	124
4	6,248	287	17
5	6,575	287	128
6	7,467	285	−134
7	8,067	287	5
8	8,553	285	−10
9	8,645	287	−6
10	9,492	287	−169
11	9,833	287	−132



## Literatur

- [1] <https://ap.physik.uni-konstanz.de/ap-public/Anleitungen/Quantenmodelle-Teil1.pdf>. *Quantenmodelle-Teil1.pdf*. URL: <https://ap.physik.uni-konstanz.de/ap-public/Anleitungen/Quantenmodelle-Teil1.pdf> (besucht am 19.08.2021).
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung V23 - Quanten Analogien*. 2021.
- [3] Geek3. *Atomic orbitals spdf m-eigenstates and superpositions*. 24. März 2018. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atomic\\_orbitals\\_spdf\\_m-eigenstates\\_and\\_superpositions.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atomic_orbitals_spdf_m-eigenstates_and_superpositions.png) (besucht am 12.08.2021).