

Quanten Analogien

Marcel Kebekus
marcel.kebekus@tu-dortmund.de

Konstantin Mrozik
konstantin.mrozik@tu-dortmund.de

Abgabe: 6. Oktober 2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Ziel | 3 |
| 2 | Versuchseinführung | 3 |
| 3 | Theorie | 3 |
| 3.1 | Der Rohrresonator | 3 |
| 3.1.1 | Rohrresonator mit Blenden | 4 |
| 3.2 | Analogon Teilchen im unendlichen Potenzialtopf | 4 |
| 3.3 | Der Kugelresonator | 5 |
| 3.4 | Analogon Wasserstoffatom | 7 |
| 3.5 | Gekoppelte Kugelresonatoren | 7 |
| 4 | Durchführung | 9 |
| 5 | Auswertung | 10 |
| 5.1 | Rohrresonator | 10 |
| 5.2 | Wasserstoffatom | 12 |
| 5.2.1 | Die Winkelabhängigkeit der Resonanzfrequenzen | 13 |
| 5.3 | Wasserstoffmolekül | 18 |
| 5.4 | 1-dim-Festkörper | 21 |
| 5.4.1 | Resonatorkette mit verschiedenen Blendendurchmessern | 22 |
| 6 | Diskussion | 26 |
| | Literatur | 28 |

1 Ziel

Ziel ist die Durchführung von akustischen Experimenten mit einem Kugelresonator und verschiedenen Resonatorketten sowie der Vergleich mit quantenmechanischen Systemen eines Wasserstoffatoms, Wasserstoffmoleküls und 1-dimensionalen Festkörpern.

2 Versuchseinführung

Im Folgenden Versuch wird mithilfe eines Mikrofons und eines Lautsprechers die Druckverteilung in einem Rohr- und Kugelresonator betrachtet. Dazu wird jeweils das Frequenzspektrum für die jeweiligen Resonatoren betrachtet, die durch ein Frequenz-zu-Spannung-Konverter mittels einer geeigneten Software erstellt werden.

3 Theorie

Bei den vermessenden Resonatoren kann ein Vergleich zu quantenmechanischen Modellen gezogen werden. In diesem Abschnitt sollen die Gemeinsamkeiten zwischen den im Versuch betrachteten Modellen und ihren quantenmechanischen Analogien aufgezeigt werden.

Die Druckverteilung in einem Resonator kann mithilfe der Helmholtzgleichung

$$\Delta\varphi = \lambda \cdot \varphi \quad (1)$$

beschrieben werden. Diese Differentialgleichung beschreibt die Druckänderung mit der Von-Neumann-Randbedingung

$$v(0) = v(L) = 0$$

3.1 Der Rohrresonator

Der Rohrresonator wird an einem Ende mit dem Mikrofon und am anderen Ende mit dem Lautsprecher abgeschlossen. Beim Abspielen einzelner Frequenzen entsteht genau dann eine Resonanz, wenn die Wellenlänge λ der Schallwelle mit der Reflexion der Welle konstruktiv interferiert. Dies geschieht genau dann, wenn gilt

$$L = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2f}. \quad (2)$$

Wobei L die Rohrlänge, c die Schallgeschwindigkeit, f die Frequenz der Schallwelle und n ein ganzzahliges Vielfaches ist. Im Rohr findet dabei nur eine Ausbreitung der Luftmoleküle mit Ausbreitungsrichtung der Schallwelle statt. Die Druckverteilung $P(x, t)$ ergibt sich dann mit der Gleichung 1 zu

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P(x, t) = \frac{1}{\rho\kappa} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \quad (3)$$

wobei ρ die Dichte und κ die Kompressibilität des Mediums ist in dem sich die Schallwellen ausbreiten (hier: Luft). Daraus folgt die zeitabhängige Lösung

$$P(x, t) = p(x) \cdot \cos(wt) \quad (4)$$

mit dem Ortsanteil $p(x)$. Die Kreiszahl k lässt sich über die Beziehung $k = 2\pi/\lambda$ zu

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad (5)$$

bestimmen.

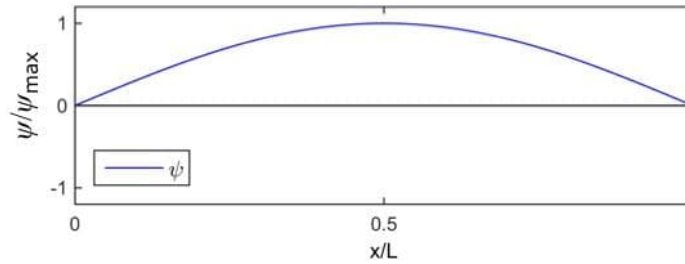


Abbildung 1: Skizze zur Herleitung der Resonanz im Rohrresonator. Zu sehen ist die Grundschiwingung. [3]

3.1.1 Rohrresonator mit Blenden

Koppelt man zwei Rohrresonatoren mit einer Blende, so verhält sich das System ähnlich zu einem gekoppelten Pendel. Es kommt zur einer zusätzlichen Resonanz ω_{R2} zur Ursprungsresonanz ω_{R1} . Es gilt zusätzlich $\omega_{R2} \geq \omega_{R1}$. Dies lässt sich nun durch eine Kette von Resonatoren und Blenden weitertreiben, wobei jeweils zusätzliche Resonanzen auftreten, die im Spektrum immer dichter aneinander liegen. Bei unendlich vielen gekoppelten Resonatoren kann man von einem Band sprechen. Analog zu einem 1-dim-Festkörper kann man hier von einer Bandlücke sprechen.

3.2 Analogon Teilchen im unendlichen Potenzialtopf

Der Vergleich mit einem Teilchen im unendlichen Potenzialtopf ist dabei ein Analogon für Materie (bzw. Elektronen und Protonen) mit einem Wellencharakter, welcher durch die de-Broglie-Wellenlänge λ_B über

$$\lambda_B = \frac{h}{p} \quad (6)$$

mit dem planckschen Wirkungsquantum h und dem Impuls des Teilchens p beschrieben werden kann. Die Differentialgleichung für die Wellenfunktion $P(x, t)$ für das Teilchen im Kasten folgt dabei aus der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) + V(x)P(x, t) \quad (7)$$

mit der Teilchenmasse m , dem Potenzial $V(x)$. Für den unendlichen Potenzialtopf gilt $V(0 < x < L) = 0$ und $V(x \geq L) \rightarrow \infty$ und $V(x \leq 0) \rightarrow \infty$. Damit ergibt sich die Lösung

$$P(x, t) = \rho(x) \cdot \exp(-i\omega t) \quad (8)$$

und die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$E\rho(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x) \quad (9)$$

mit der Energie E . Für eine stehende Welle folgt daraus die Gleichung der Form

$$\rho(x) = A \sin(kx + \phi) \quad (10)$$

mit der komplexen Amplitude A , der Kreiszahl k und der Phase ϕ . An den Rändern ergibt sich dabei eine Wellenfunktion von null, sodass aus dieser Randbedingung $\rho(x = 0) = 0$ und $\rho(x = L) = 0$ folgt

$$k = \frac{n\pi}{L}. \quad (11)$$

Es wird deutlich dass der Vergleich der beiden Modelle berechtigt ist. Im klassischen Fall erzeugt man eine kosinusabhängige stationäre Druckverteilung (vgl. Gl. 4), während das quantenmechanische Modell eine stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt (vgl. Gl. 10). Unterschiede zeigen sich bei den Randbedingungen. Denn während bei dem quantenmechanischen Teilchen die Wahrscheinlichkeitsdichte verschwindet, sind an den Enden des Rohres die Druckunterschiede maximal, was allerdings kein Einfluss auf die erlaubten Wellenlängen hat. Beide Modelle bilden dabei stehende Wellen für die Kreiszahl k nach Gleichung 11 aus.

3.3 Der Kugelsonator

Nun wird ein Resonator mit einer Kugelform betrachtet (Hohlkugel), der aus zwei Halbkugeln besteht, welche gegeneinander verdreht werden können. Somit können die Resonanzamplituden in Abhängigkeit des Winkels α gemessen werden.

Zur genauen Beschreibung des dreidimensionalen Problems der Druckverteilung wird nun die Kugelsymmetrie mit den Koordinaten des Polarwinkels θ (0 bis π) und des Azimutwinkel φ (0 bis 2π) verwendet. Analog zum Rohrresonator folgt aus der Helmholtzgleichung

$$\frac{\partial^2 P(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho\kappa} \Delta P(\vec{r}, t) \quad (12)$$

Mit dem Ansatz $P(\vec{r}, t) = p(\vec{r}) \cos(\omega t)$ ergibt sich die stationäre Druckverteilung nach

$$-\frac{w^2}{c^2} p(\vec{r}) = \Delta p(\vec{r}) \quad (13)$$

die mit dem Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten zu einem Winkel- $Y_l^m(\theta, \varphi)$ und Radialanteil $f(r)$ separiert werden kann. Dabei ist $Y_l^m(\theta, \varphi)$ eine Kugelflächenfunktion,

welche die stationäre, zeitunabhängige Druckverteilung beschreibt. l ist die Drehimpulsquantenzahl ($0 \leq l \leq n-1$), m der ganzzahlige Index mit $-l \leq m \leq l$, sodass es für jedes l nach

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos(\theta)) \cdot \exp(im\varphi) \quad (14)$$

nicht nur eine Kugelflächenfunktion sondern $2l+1$ gibt. Somit gibt es bei einem festen l für eine Kugeloberfläche mehrere Schwingungsmöglichkeiten mit gleicher Frequenz und Energie. Man spricht von Entartung.

Setzt man den Laplace-Operator aus Gleichung 13 in Kugelkoordinaten ein, so kann die entstehende Differentialgleichung durch den Ansatz

$$p(r, \theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi) \cdot f(r) \quad (15)$$

in zwei Differentialgleichung getrennt und somit gelöst werden.

Tabelle 1: Legendre-Polynome P_l^m bis $l = 2$

| | $m = 0$ | $m = \pm 1$ | $m = \pm 2$ |
|---------|--|---|---|
| $l = 0$ | $P_0^0(\cos(\theta)) = 1$ | | |
| $l = 1$ | $P_1^0(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ | $P_1^{\pm 1}(\cos(\theta)) = \mp \sin(\theta)$ | |
| $l = 2$ | $P_2^0(\cos(\theta)) = \frac{1}{3}(3\cos^2(\theta) - 1)$ | $P_2^{\pm 1}(\cos(\theta)) = \mp 3\cos(\theta)\sin(\theta)$ | $P_2^{\pm 2}(\cos(\theta)) = 3\sin^2(\theta)$ |

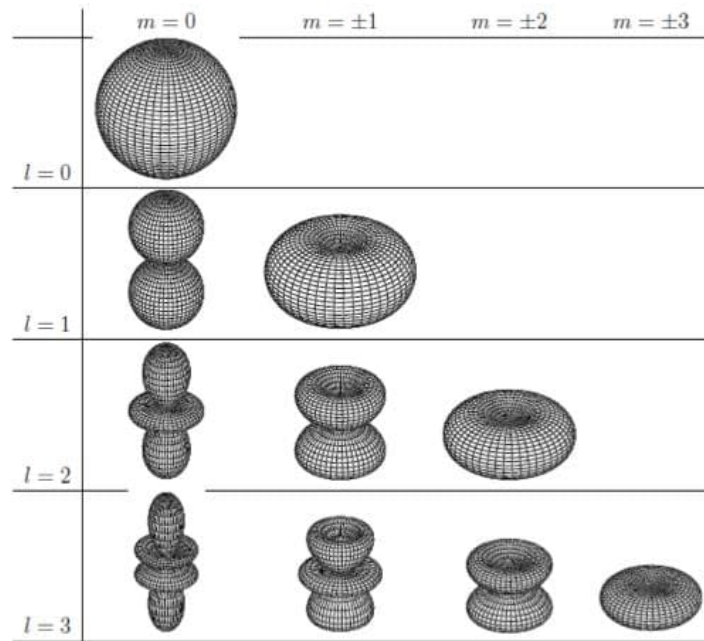


Abbildung 2: Betrag der Schwingungsmoden $|Y_l^m(\theta, \varphi)|$. [4]

Symmetriebrechung

Ist die Kugelsymmetrie aufgehoben, so wird die Entartung der einzelnen m -Zustände aufgehoben, sodass die verschiedenen Kugelflächenfunktionen zu einem l nicht mehr die gleichen Energien haben. Da es zu jedem l insgesamt $2l + 1$ verschiedene m gibt, sollte sich dies im Spektrum äußern. Allerdings wird im Spektrum lediglich eine Gruppe von $l + 1$ Peaks deutlich, da sich die weiteren Zustände nur in der Phase unterscheiden. Bei geringer Verformung können die Kugelflächenfunktionen näherungsweise weiterhin als Lösung angenommen werden.

3.4 Analogon Wasserstoffatom

Das Analogon zum Kugelresonator bildet das Wasserstoffatom mit einem einzigen Elektron, was ein analytisches Lösen der Schrödingergleichung ermöglicht. Es folgt hierfür die dreidimensionale, zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$E\psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) + V(r)\psi(r) \quad (16)$$

mit dem Coulombpotenzial $V(r)$ des Kerns. Drückt man nun die Gleichung in Kugelkoordinaten aus, so folgt durch einen Separationsansatz

$$\psi(r, \theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi) R_{n,l}(r) \quad (17)$$

als Lösung für die Differentialgleichung. Dabei lösen die Kugelflächenfunktionen Y_l^m die rein vom Winkel abhängigen Differentialgleichungen und $R_{n,l}(r)$ den Radialteil. Dabei beschreibt n die Hauptquantenzahl. In diesem Index unterscheidet sich das Wasserstoffatom zum Kugelresonator. Das führt dazu, dass die Resonanzen der beiden Systeme nicht in der gleichen Reihenfolge im Spektrum auftreten und l ist dabei zu einem bestimmten n beim Kugelresonator nicht entartet, beim Wasserstoffatom jedoch schon. Grund dafür sind die verschiedenen Potenziale.

3.5 Gekoppelte Kugelresonatoren

Mit zwei gekoppelten Kugelresonatoren und einer Blende kann ein Wasserstoffmolekül H_2^+ mit einem Elektron simuliert werden. Durch verschiedene Blenden kann eine unterschiedlich starke Kopplung dargestellt werden. Genauso wie beim Rohrresonator mit einer Blende, bildet sich auch beim gekoppelten Kugelresonator mit Blende eine zweite Resonanz aus. Dies lässt sich auf das Überlappen der einzelnen Atomorbitale zurückführen, die somit ein neues Molekülorbital bilden. Die Überlappung kann auf zwei Arten geschehen. Dabei können die Vorzeichen jeweils gleich sein (Phasenverschiebung von 0°) oder unterschiedlich (Phasenverschiebung um 180°). Man spricht von bindender oder antibindender Überlappung.

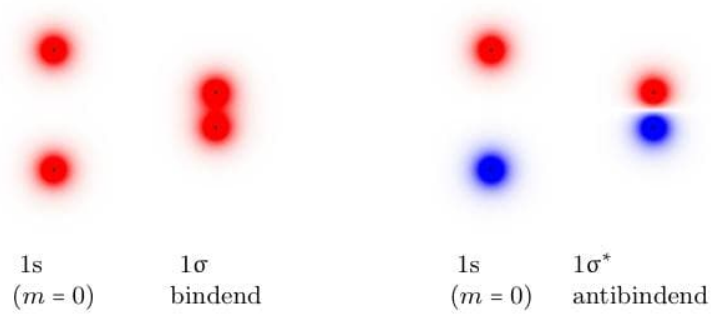


Abbildung 3: Beispiel für bindende und antibindende Molekülorbitale beim Zusammenführen zweier Atome. Die Farbe spiegelt dabei die Phase wider.
[3]

Zwei Atome mit 1s-Orbitalen bilden somit bei positivem Vorzeichen ein zugehöriges 1σ -Molekülorbital. Die neuen Orbitale werden dabei mit griechischen Buchstaben gekennzeichnet und resultieren aus der magnetischen Quantenzahl m . Aus $m = 0$ folgt somit die neue Orbitalbezeichnung σ , $m = 1$ führt zu einem π -Orbital. Die Hauptquantenzahl unterscheidet dabei die Orbitale gleicher Symmetrien aber unterschiedlichen Energien. Zusätzlich kann die Wahrscheinlichkeit der Lage des Elektrons beschrieben werden. Dabei hat das 1σ Molekülorbital eine hohe Wahrscheinlichkeit für die Lage zwischen den beiden Atomkernen (bindender Zustand, energetisch tiefere Lage). Bei niedriger Auftrittswahrscheinlichkeit beim antibindenden Zustand $1\sigma^*$ liegt der Zustand energetisch höher als der Zustand des Atoms.

4 Durchführung

Der Versuch besteht aus vier verschiedenen Einzelversuchen, sodass sich die Aufteilung in Rohrresonator-, Kugelresonator-, gekoppelter Kugelresonator- und 1-dim-Festkörper Versuchsteil gliedern lässt.

Zur Verfügung steht dabei eine PC gesteuerte Software, welche das Durchlaufen eines Schall-Frequenzspektrums in unterschiedlicher Schrittweite ermöglicht. Zudem lässt sich über die verwendete Software das Resonanzspektrum, welches durch das Mikrofon aufgezeichnet wird, darstellen.

Darüber hinaus kann die Frequenzmessung mit einer Schaltungseinheit erzeugt und über ein Oszilloskop angezeigt werden.

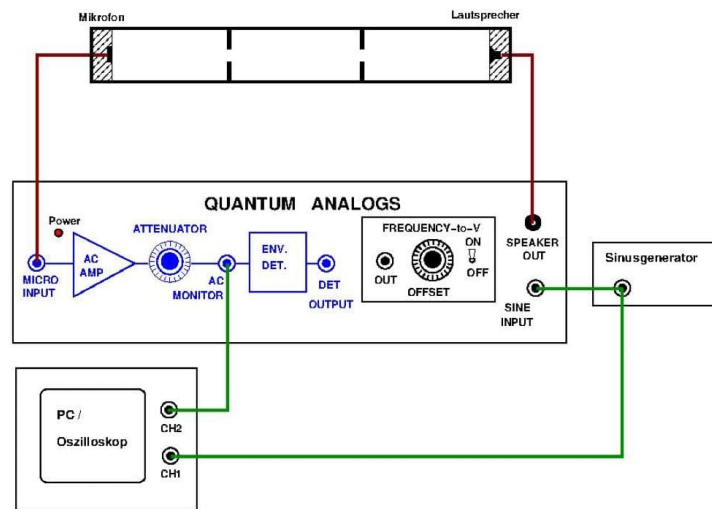


Abbildung 4: Schematische Darstellung der analogen Frequenzspektrum Erzeugung-/Aufnahmeschaltung.[1]

Auflistung der Einzelversuche

Rohrresonator

Vermessungen von eins bis zwölf 50 mm Aluminiumzylindern im Frequenzspektrum 0, 10 bis 12 kHz.

Vermessung eines Frequenzspektrums eines einzelnen 75 mm Zylinders.

Kugelresonator

Hochauflösendes Frequenzspektrum bei einem Winkel von 180° (5Hz-Schritte, bei 60ms/Schritt).

Druckamplitude als Funktion des Drehwinkels (Winkel in 5° Schritten von 0° bis 180° variieren).

Vermessung der Aufspaltung beim Verwenden verschiedener Blenden.

Vermessen der Winkelabhängigkeit beim Verwenden einer 9 mm Blende.

gekoppelte Kugelresonatoren

Hochauflösendes Frequenzspektrum bei verschiedenen Kopplungsstärken (Blenden).
Winkelabhängigkeit bei Verwendung einer 16 mm Blende.

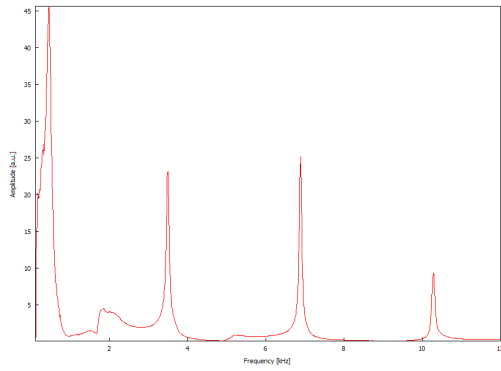
1-dim-Festkörper

Frequenzspektrum mit verschiedener Anzahl von Zylindern und Blenden und verschiedenen Durchmessern und Längen.

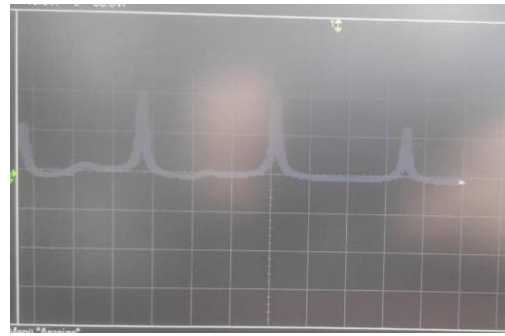
5 Auswertung

5.1 Rohrresonator

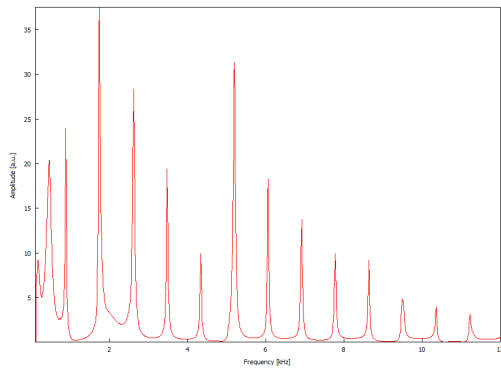
Zunächst wird das Frequenzspektrum von einem bis zwölf aneinander gereihten Zylindern der jeweiligen Länge 50 mm in einem Frequenzbereich von 0,1 kHz bis 12 kHz mit einem 2-Kanal-Oszilloskop aufgenommen. Diese Messung wird mit der Software des Computers wiederholt. Exemplarisch werden im Folgenden die beiden Messungen mit 1, 5 und 12 Zylindern dargestellt. Es wird deutlich, dass beide Frequenzspektren ähnlich aussehen. Allerdings ist die Auflösung des Spektrums, welches von der Computersoftware aufgezeichnet wurde höher. Es ist daher sinnvoll im Folgenden diese zu verwenden.



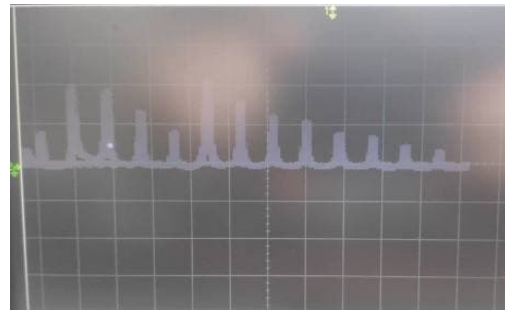
(a) Das Frequenzspektrum eines einzelnen Rohrresonators der Länge 50 mm (Computersoftware).



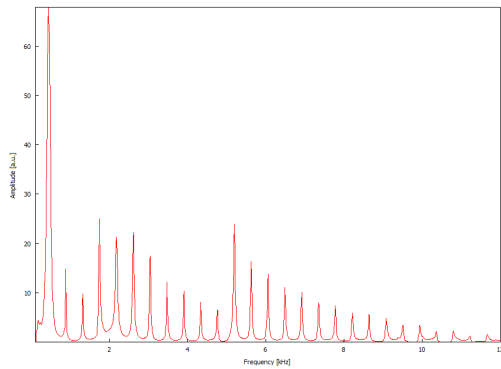
(b) Das Frequenzspektrum eines einzelnen Rohrresonators der Länge 50 mm (per Oszilloskop).



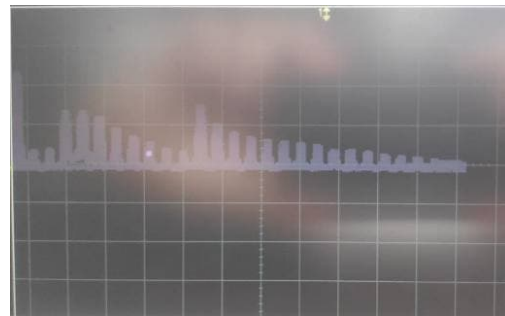
(c) Das Frequenzspektrum von vier Rohrresonatoren der jeweiligen Länge 50 mm (Computersoftware).



(d) Das Frequenzspektrum von vier Rohrresonatoren der jeweiligen Länge 50 mm (per Oszilloskop).



(e) Das Frequenzspektrum von acht Rohrresonatoren der jeweiligen Länge 50 mm (Computersoftware).



(f) Das Frequenzspektrum von acht Rohrresonatoren der jeweiligen Länge 50 mm (per Oszilloskop).

Abbildung 5

5.2 Wasserstoffatom

Nun wird der Kugelresonator (Wasserstoffatom) betrachtet. Hierbei wird ein Frequenzspektrum von 0,1 kHz bis 12 kHz in 5 Hz-Schritten aufgenommen. Der Winkel zwischen Mikrofon und Lautsprecher beträgt 180° . Die gefundenen Resonanzfrequenzen werden anschließend erneut händisch mit dem Sinusgenerator über das Oszilloskop vermessen. Dies beinhaltet die Ordnung der Resonanz, die Amplitude sowie die Phasenverschiebung neben der Resonanzfrequenz. Für die Resonanzfrequenzen X kHz, Y kHz, Z kHz und W kHz wird die Winkelabhängigkeit im Bereich 0° bis 180° in 10° -Schritten betrachtet. Zur Analyse der Aufspaltung wird ein Frequenzspektrum in 1 Hz-Schritten im Bereich 1,8 und 2,8 kHz mit verschiedenen eingesetzten Blenden aufgenommen. Die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz vom Winkel wird bei eingesetzter 9 mm Blende im Winkelbereich 0° bis 180° betrachtet.

Resonanzfrequenz

Im Frequenzbereich zwischen 0,1 und 12 kHz ergibt sich bei einem Winkel von 180° das in Abbildung 6 dargestellte Frequenzspektrum.

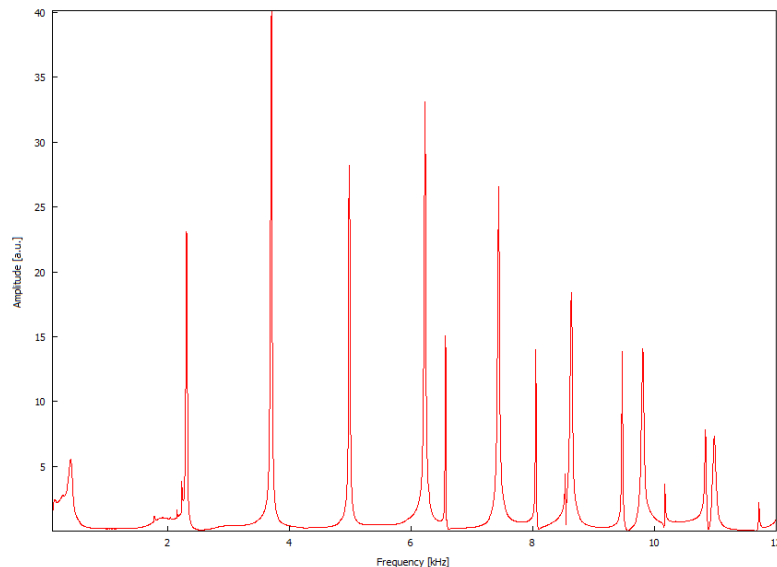


Abbildung 6: Das Hochauflösende Spektrum des Kugelresonators (Wasserstoffatommodells), bei einem festen Polarwinkel von 180° . Dabei ist die Frequenz in kHz gegen die Amplitude in willkürlichen Einheiten aufgetragen.

Die genauere Betrachtung der Resonanzfrequenzen ν_{res} aus Abbildung 6 mithilfe des Oszilloskops liefert die jeweilige Ordnung, Amplitude und Phasenverschiebung.

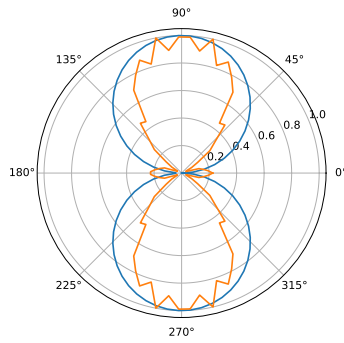
Tabelle 2: Die zu den Resonanzfrequenzen ν_{Res} gehörigen Ordnungen, Amplituden und Phasenverschiebungen.

| Ordnung | ν_{Res} / kHz | Amplitude / V | $\varphi / ^\circ$ |
|---------|--------------------------|---------------|--------------------|
| 1 | 0,4 | 4,3 | -102 |
| 2 | 2,301 | 76 | 70 |
| 3 | 3,694 | 231 | -78 |
| 4 | 4,979 | 187 | 90 |
| 5 | 6,221 | 249 | -30 |
| 6 | 7,433 | 239 | 170 |
| 7 | 8,042 | 143 | -14 |
| 8 | 8,630 | 189 | 20 |
| 9 | 9,465 | 155 | -150 |
| 10 | 9,807 | 159 | -130 |

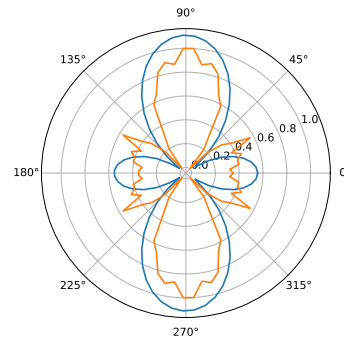
5.2.1 Die Winkelabhängigkeit der Resonanzfrequenzen

Nun wird die Druckamplitude der Resonanzfrequenzen 2,301 kHz, 3,694 kHz, 4,979 kHz und 7,433 kHz in Abhängigkeit des Winkels θ betrachtet. Dabei ist $\theta = 2\pi\varphi$.

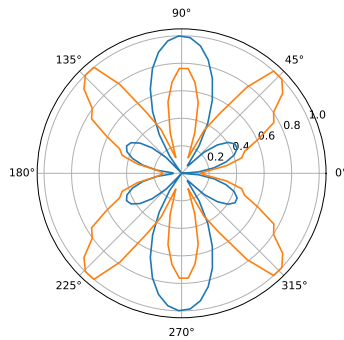
Deutlich zu erkennen sind die Keulen in 180°-Richtung, sowie eine schwache Ausprägung in 90°-Richtung.



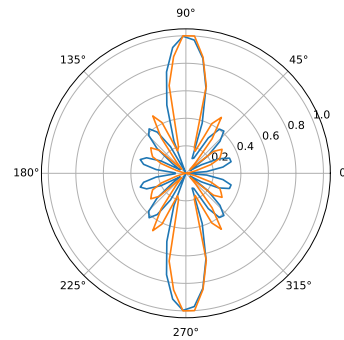
(a) Die Druckamplitude bei der Resonanzstelle 2, 300kHz (Form eines $2p_0$ -Orbitals).



(b) Die Druckamplitude bei der Resonanzstelle 3, 690kHz (Form eines $3d_0$ -Orbital).



(c) Die Druckamplitude bei der Resonanzstelle 4, 970kHz (Form eines $4f_0$ -Orbital).



(d) Die Druckamplitude bei der Resonanzstelle 7, 430kHz (Form eines $6h_0$ -Orbital).

Abbildung 7: Aufgetragen gegen den Polarwinkel θ . In blau sind die Kugelflächenfunktionen resultierend aus der Theorie dargestellt, in orange die Messwerte.

Aufspaltung der Zustände

Nun werden verschiedene Zwischenringe zwischen den beiden Halbkugel eingesetzt. Exemplarisch wird im Folgenden das Zwischenstück mit einer Ringbreite von 3mm betrachtet. In Abbildung 8 sind die zwei resultierenden Resonanzfrequenzen deutlich. Die Drehimpulsquantenzahl l muss daher gleich eins sein und bestätigt die Annahme, dass es sich um ein $2p_0$ -Orbital handelt.

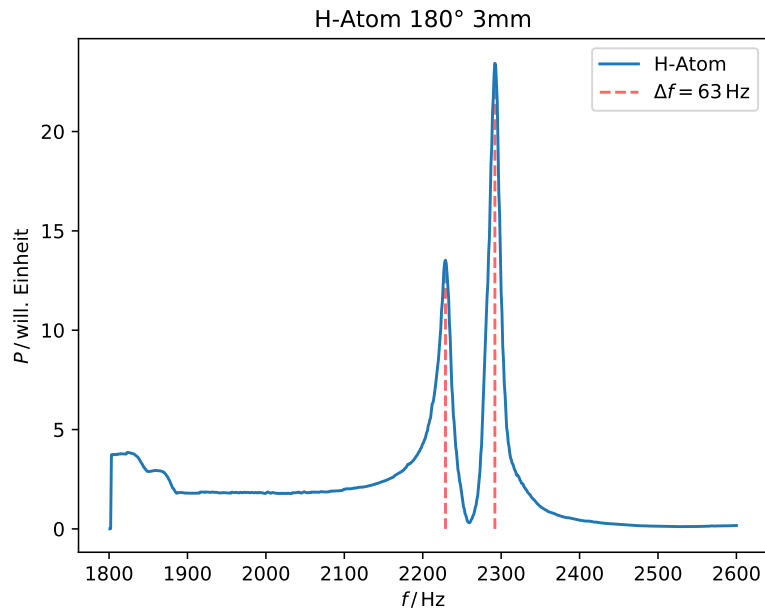


Abbildung 8: Aufspaltung der Resonanz bei 2,301kHz in zwei Resonanzfrequenzen.

Trägt man nun die Resonanzfrequenz-Differenz $\Delta\nu$ gegen die Zwischenringbreite auf, so wird deutlich, dass sich dies annähernd linear verhält (vgl. Abbildung 9), Analogon hierfür wäre die Aufspaltung der Zustände eines Wasserstoffatoms in einem extern anliegendem Magnetfeld (Zeeman-Effekt).

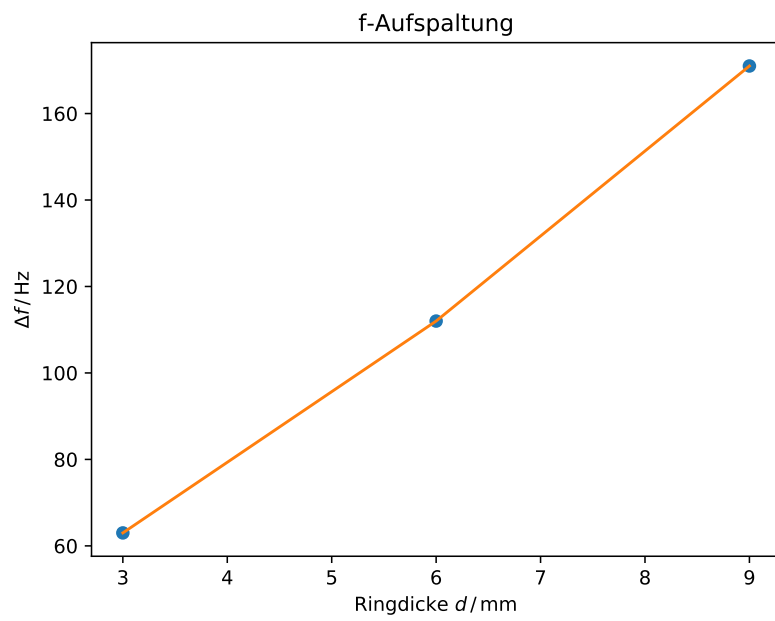


Abbildung 9: Abhängigkeit zwischen der Resonanzfrequenz-Differenz $\Delta\nu$ und der Ringbreite.

Zustandsaufspaltung und deren Winkelabhängigkeit

Für die Aufspaltung bei 180° ergibt sich das Frequenzspektrum aus Abbildung 10. Die Resonanzfrequenz $2,095\text{kHz}$ entspricht $m = 0$ und $l = 1$. Für die Resonanzfrequenz $2,265\text{kHz}$ folgt $m = \pm 1$ und $l = 1$.

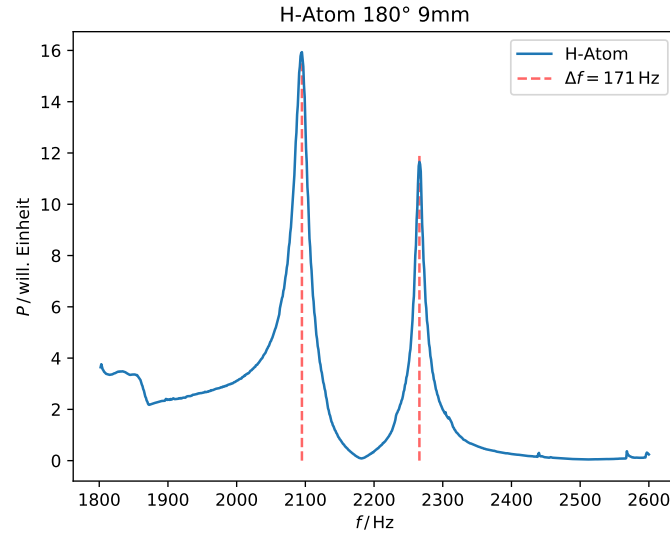


Abbildung 10: Die Aufspaltung der Resonanz bei Verwendung eines Zwischenrings der Breite 9mm bei einem Winkel θ von 180° .

Für die Resonanzfrequenzaufspaltung mit einem Zwischenring von 9 mm folgt die Winkelverteilung nach Abbildung 11.

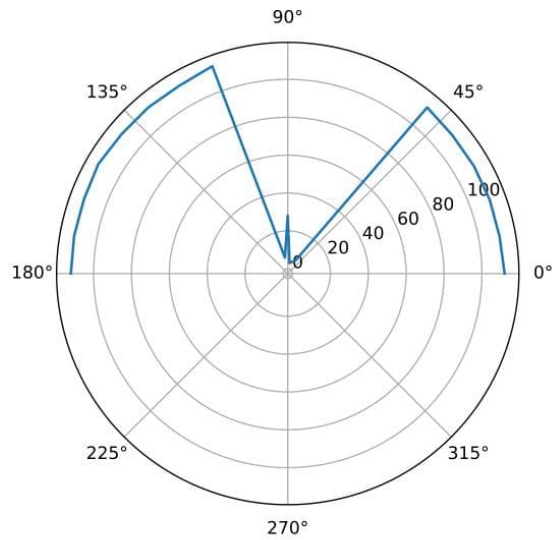


Abbildung 11: Druckamplitude gegen Winkel θ aufgetragen

5.3 Wasserstoffmolekül

Einfluss des Blendendurchmessers auf die Resonanzfrequenz

Nun werden zwei Kugelresonatoren über eine Blende, welche die Kopplungsstärke wieder spiegelt, gekoppelt. Zur Untersuchung wird zunächst ein Frequenzspektrum im Bereich von 2,2 kHz bis 2,5 kHz in 1 Hz-Schritten bei verschiedenen Blenden von 10 mm, 16 mm, 20 mm betrachtet.

Für das Resonanzfrequenz f in Abhängigkeit des Blendendurchmessers zeigt sich folgender in Abbildung 12 Verlauf.

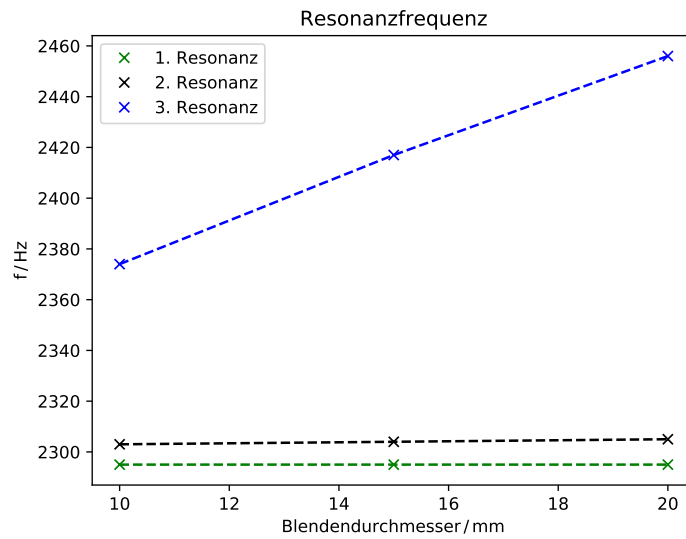


Abbildung 12: Abhängigkeit der 3 Resonanzfrequenzen zum Blendendurchmesser.

Winkelabhängigkeit der Resonanzfrequenz

Für den Blendendurchmesser von 15mm zeigen sich die drei Resonanzen, dargestellt in Abbildung 13, bei den Frequenzen ν von 2,297kHz, 2,304kHz und 2,416kHz.

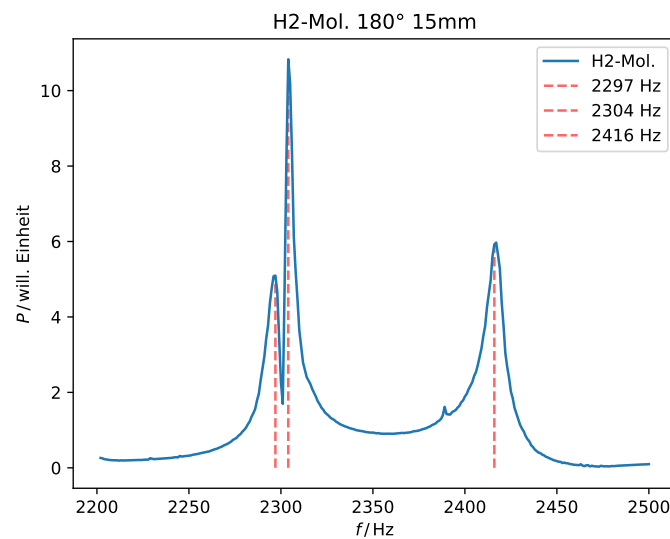
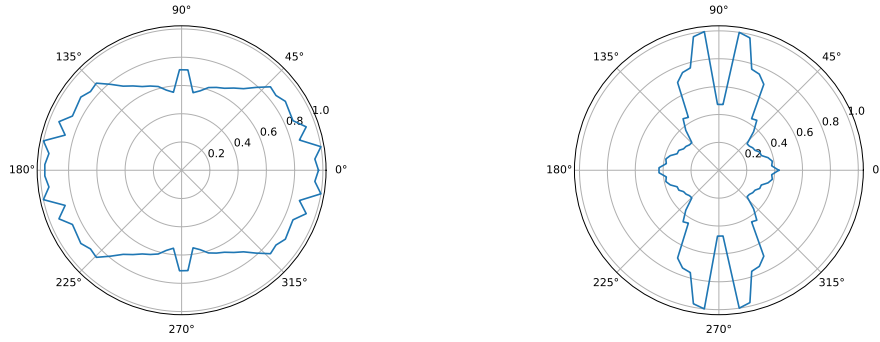


Abbildung 13: Frequenzspektrum bei einem Winkel $\theta = 180^\circ$. Zu sehen sind die Resonanzfrequenzen ν bei 2,297kHz, 2,304kHz und 2,416kHz.

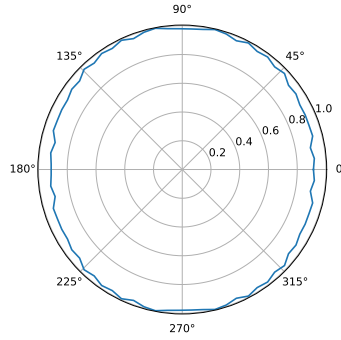
Im Folgenden werden für diese vier Resonanzfrequenzen die Druckamplituden in Abhän-

gigkeit des Winkels θ betrachtet und die Phasenverschiebung in Tabelle 3 aufgelistet. Daraus lassen sich die Symmetrien der Zustände definieren. Für eine Phasendifferenz von 0° spricht man von einem symmetrischen und bei einer Phase von 180° von einem antisymmetrischen Zustand.



(a) Die Druckamplitude bei der Resonanzstelle
2,297kHz

(b) Die Druckamplitude bei der Resonanzstelle
2,304kHz



(c) Die Druckamplitude bei der Resonanzstelle
2,416kHz

Abbildung 14

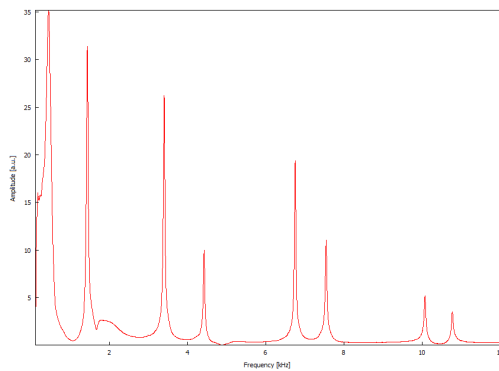
Tabelle 3

| Ordnung | ν_{Res} / kHz | obere Phasendiff. / $^\circ$ | untere Phasendiff. / $^\circ$ | Δ Phasendiff. / $^\circ$ |
|---------|-------------------|------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 1 | 2,296 | -135 | 10 | 145 |
| 2 | 2,303 | -126 | 30 | 156 |
| 3 | 2,418 | 53 | -128 | 181 |

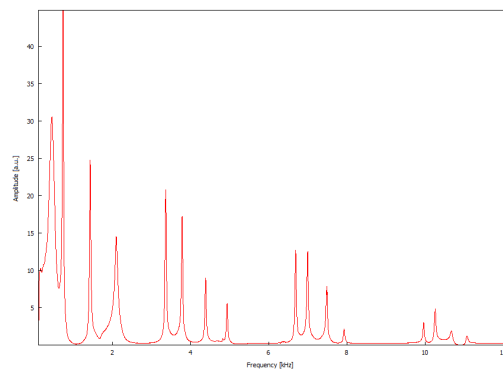
5.4 1-dim-Festkörper

Resonatorkette

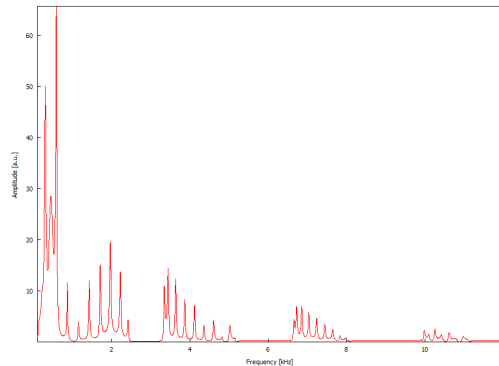
Nun wird ein Frequenzspektrum einer Resonatorkette betrachtet die mit jeweils 16mm-Blenden versehen werden. In Abbildung 15 prägen sich vier Bereiche aus, die mit Maxima gefüllt sind. Dabei entspricht dies der Anzahl der Maxima der verwendeten Zylinder. Überträgt man dies auf das Analogon des 1-dim-Festkörpers so lässt sich sagen, dass durch jeden Zylinder ein Band hinzugefügt wird, auf dem die Elektronen in eine Festkörper Zustände einnehmen können. Die leeren Bereiche sind dabei Bandlücken und beschreiben somit die 'verbotenen' Zonen im Festkörper in denen keine Elektronenzustände vorliegen.



(a) Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus zwei Resonatorgliedern (Rohrzylindern) mit einer jeweiligen Länge von 50mm und einer 16mm-Blende als Zwischenstück.



(b) Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus vier Resonatorgliedern (Rohrzylindern) mit einer jeweiligen Länge von 50mm und einer 16mm-Blende als Zwischenstück.



(c) Frequenzspektrum für eine Resonatorkette aus zehn Resonatorgliedern (Rohrzylindern) mit einer jeweiligen Länge von 50mm und einer 16mm-Blende als Zwischenstück..

Abbildung 15

5.4.1 Resonatorkette mit verschiedenen Blendendurchmessern

Die Größe des Blendendurchmessers spiegelt im Analogon des 1-dim-Festkörpers ein unterschiedlich starkes Potenzial wieder, sodass die Elektronen unterschiedlich stark lokalisiert auf ihren Bändern sind. Dies wird deutlich, wenn man sich das Frequenzspektrum zweier Resonatorketten mit unterschiedlichen Blenden betrachtet. Dazu ist in Abbildung 16 jeweils das Frequenzspektrum einer Resonatorkette mit zwei Zylindern und einer 10mm-Blende und gleiche Resonatorkette mit einer 13mm-Blende dargestellt.

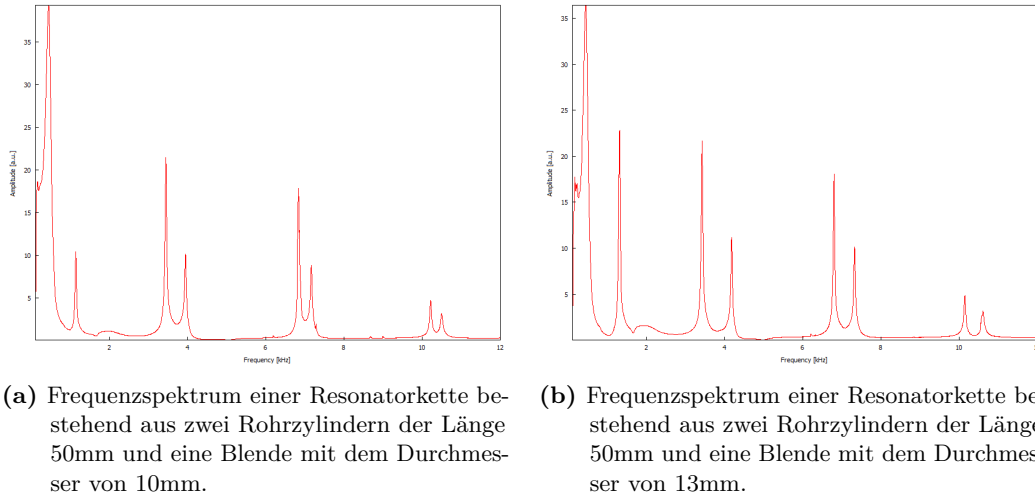


Abbildung 16

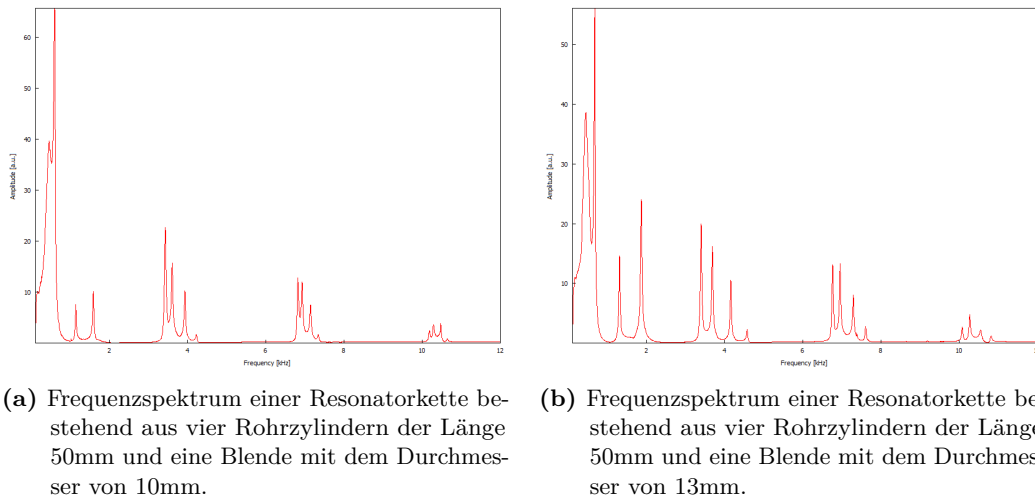
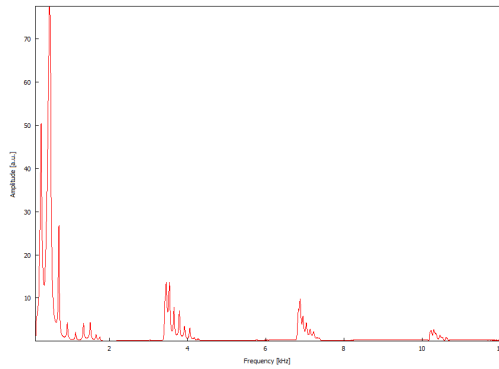
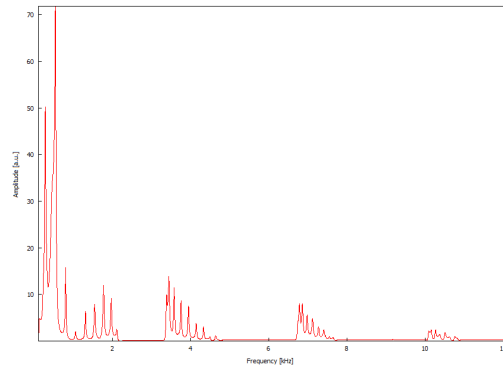


Abbildung 17



(a) Frequenzspektrum einer Resonatorkette bestehend aus zehn Rohrziylindern der Länge 50mm und eine Blende mit dem Durchmesser von 10mm.



(b) Frequenzspektrum einer Resonatorkette bestehend aus zehn Rohrziylindern der Länge 50mm und eine Blende mit dem Durchmesser von 13mm.

Abbildung 18

Es wird deutlich, dass die jeweiligen Maxima-Ausschläge deutlich höhere Werte annehmen für den jeweiligen Konfigurationen mit der größeren Blende.

Störstellen im Festkörper

Durch Verwendung vereinzelt geänderter Zylinderlängen können Störstellen, die im Festkörper Gitterdefekte entsprechen, simuliert werden. Diese führen zu Abweichungen im Frequenzspektrum, verglichen zum ungestörten Frequenzspektrum. Konkret lassen sich für die Störzylinder der Größe 37,5 mm und 62,5 mm eine neue Resonanz erkennen. Des weiteren resultiert eine deutlich sichtbare Verringerung der gesamten Druckamplitude im Vergleich zur ungestörten Resonatorkette.

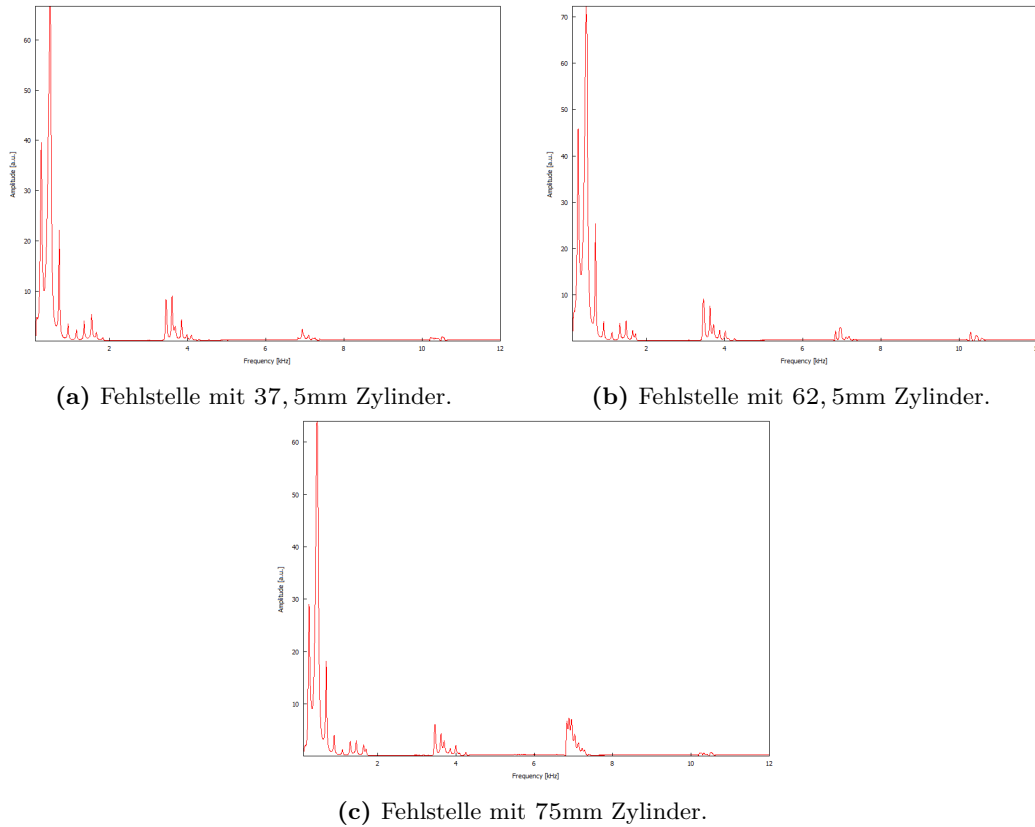
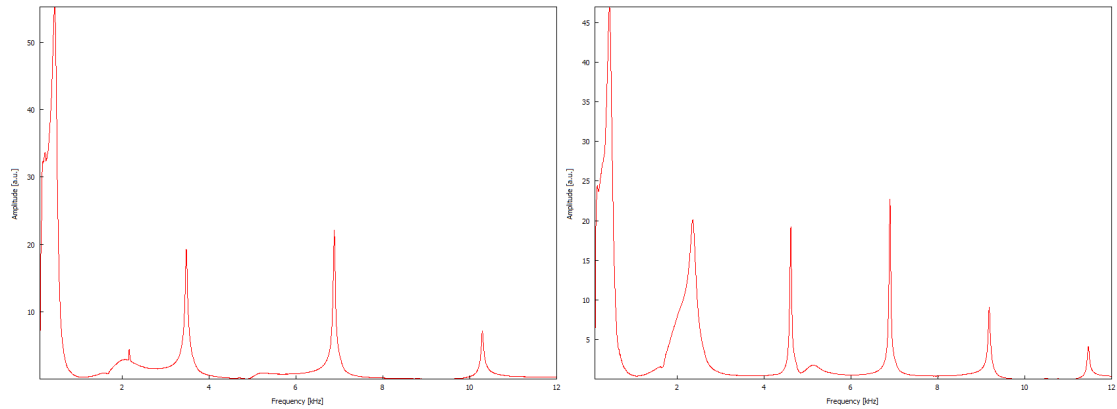


Abbildung 19: Frequenzspektren für eine Resonatorkette aus neun Zylindern der Länge 50 mm und einer Störstelle durch einen Zylinder einer anderen Länge. Zwischenstücke bilden 10 mm Blenden.

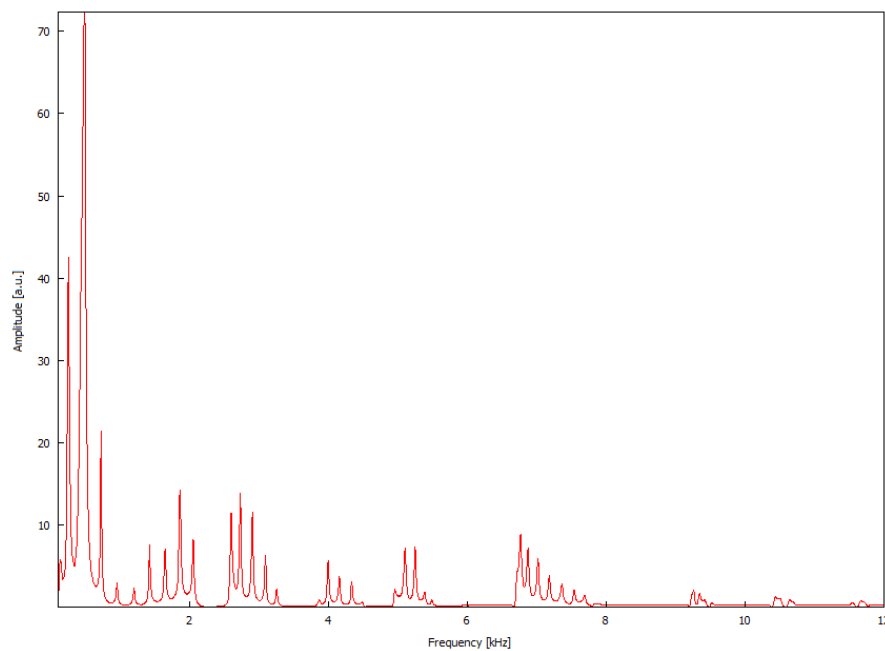
Resonatorkette mit wechselnden Zylinderlängen

Nun wird eine Resonatorkette aus abwechselnden Zylindern mit den Längen 50 mm und 75 mm betrachtet. Dies entspricht einer zwei-atomigen-Festkörper-Basis. Deutlich werden nun, dass die Resonanzen der einzelnen ein-atomigen Basen in die zwei-atomigen-basen übernommen werden.

In Abbildung 20 wird nun die wechselnde Resonatorkette mit einer 50 mm und einer 75 mm Resonatorkette verglichen.



(a) Frequenzspektrum eines einzelnen Zylinders mit der Länge von 75 mm. (b) Frequenzspektrum eines einzelnen Zylinders mit der Länge von 50 mm.



(c) Frequenzspektrum einer Resonatorkette mit zehn wechselnden Zylindern der Länge 50 mm und 75 mm und Blenden mit einem Durchmesser von 16 mm.

Abbildung 20

Resonatorkette mit wechselndem Blendendurchmesser

In Abbildung 21 ist das Frequenzspektrum einer Resonatorkette aus acht Zylindern mit abwechselnden Blendendurchmessern von 13 mm und 16 mm dargestellt. Es zeigt sich eine deutliche Aufspaltung der Maximalbereiche. Auf einen Festkörper übertragen lässt sich somit sagen, dass das vorliegende Gitter nun eine übergeordnete Periodizität aufweist und diese durch das verschiedene Potenzial entsteht.

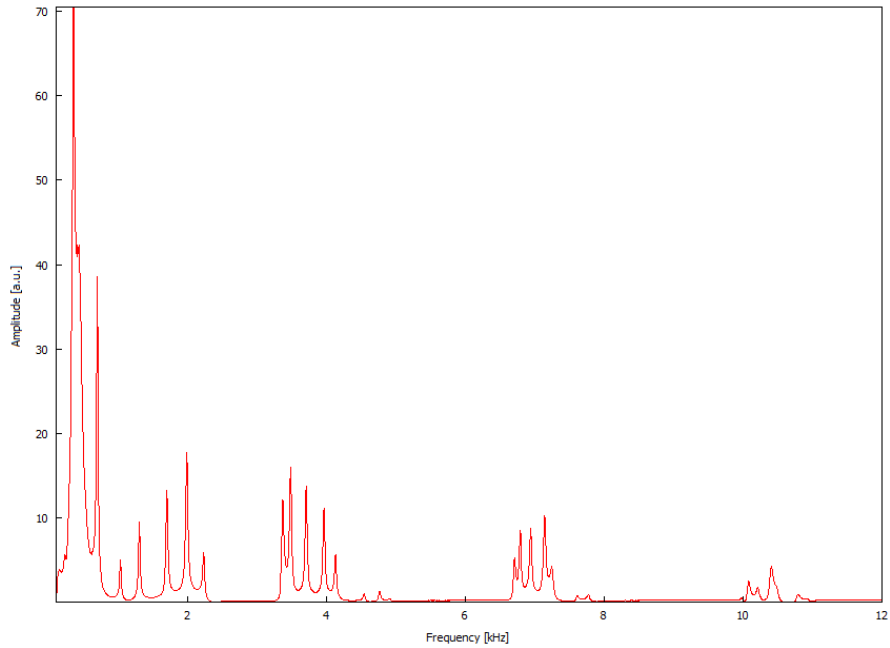


Abbildung 21: Frequenzspektrum einer Resonatorkette aus acht 50 mm langen Zylindern, welche abwechselnd durch 13mm und 16mm-Blenden getrennt sind.

6 Diskussion

In diesem Versuch konnte mithilfe von primitiven Resonatoren einem Lautsprecher und einem Mikrofon eindrucksvoll das Verhalten quantenmechanischer Systeme betrachtet werden. Somit konnten mit einem Kugelresonator Schlüsse auf Atomorbitale, Aufspaltung der Resonanzen bei Symmetriebrechungen und deren Verhalten eines Wasserstoffatoms analysiert werden und somit die Quantenzahlen l und m bestimmt werden.

Durch die Kopplung zweier Kugelresonatoren durch eine Blende konnten Rückschlüsse auf das Wasserstoffmolekül gezogen werden. So zeigt sich, dass sich die Resonanzfrequenz der ersten und zweiten Ordnung nicht durch eine sich ändernde Kopplungsstärke (Blendendurchmesser) beeinflussen lässt und somit der Entartung in m entspricht. Zudem zeigt sich die Proportionalität der Resonanzfrequenz der dritten Ordnung zum Blendendurchmesser und ist somit nicht entartet. Durch die Bestimmung der relativen Phasenverschiebung der Resonatorfrequenzen durch das Betrachten der winkelabhängigen Druckamplitude, konnten zwei der drei Resonanzen einem Molekülzustand zugeordnet werden.

Bei Verwendung von Rohrzylindern konnte auf grundlegende Eigenschaften von 1-dim-Festkörpern zurückgeschlossen werden. So würden Bändern, Bandlücken, Verhalten der Elektronen bei sich ändernden Potenzialen sichtbar. Über das Einführen eines Störzylinders in die Resonatorkette konnte eine Fehlstellung im Gitter des Festkörpers simuliert werden. Darüber hinaus konnte eine zwei-atomige Basis eines Festkörpers analysiert werden, indem abwechselnde Blenden und somit unterschiedlich starke Kopplungen im

Festkörper, in die Resonatorkette eingebaut wurden und schlussendlich der Einfluss einer übergeordneten Periodizität des Gitters und den daraus resultierenden neuen Bandlücken beobachtet werden.

Literatur

- [1] „Versuch 23: Quanten Analogien”, Tu Dortmund.
- [2] „Quantenmodelle”, Uni Konstanz, <https://ap.physik.uni-konstanz.de/ap-public/Anleitungen/Quantenmodelle-Teil1.pdf>, abgerufen am 5.10.2021.
- [3] „Grundkurs Theoretische Physik 3 - Elektrodynamik”, Nolting, Wolfgang