数学模型：描述系统/环节的输出变量与输入变量之间关系的数学表达式

类型 多样
- 静态方程：描述变量间静态关系、⇒ 代数方程
- 动态方程：描述变量间动态关系 ⇒ 差分方程、微分方程、偏微分方程

建模方法：
- 机理建模：据系统运动学/动力学/电学规律
- 实验建模：据输入输出（人为施加典型输入）⇒ 系统辨识模型

△准确性，简化性△

系统
- 线性系统 满足叠加原理的系统
- 非线性系统 不满足叠加原理的系统
- 集中参数系统 变量仅为时间的函数 ⇒ 动态方程是微分方程
- 分布参数系统 不仅为时间的函数，还是空间的函数 ⇒ 动态方程是偏微分方程
- 线性定常系统 微分方程系数为常数 $\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=u(t)$
- 线性时变系统 微分方程系数为时间的函数 $\frac{d^3y}{dt^3}+2t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=u(t)$

满足叠加原理
微分方程系数为常数

下面我们将研究单输入单输出集中参数线性定常连续系统
（可线性化的非线性）
变量仅是时间的函数（动态方程是微分方程）

微分方程 $\xrightarrow{\text{导出}}$ 传递函数 $\xRightarrow[\text{建立}]{}$ 方块图/方框图/结构图　信号流图

微分方程标准形式 $(m\le n)$

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}c(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}c(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}c(t)+c(t)$$
$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}r(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}c(t)+\cdots+b_1\frac{d}{dt}r(t)+b_0r(t)$$

输出 系数为1 输入

非零初始条件 由输出求传函

传函特征根　拉氏变换表达式特征根

（1）系统的输出响应 $C(s)$ 的分母，是由因式 $s-p_j$ 和 $s-q_k$ 组成的，即 $C(s)$ 分母多项式等于 0 的根包括了系统的特征根 p_j 和输入信号 $R(s)$ 分母等于 0 的根 q_k。如果已知 q_k 和 $C(s)$ 的表达式，可以得出 p_j。

（2）如果已知系统的特征根 p_j，则系统的零输入响应 $C_1(s)$ 总可以用待定系数法设为形如 $C_1(s)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{s-p_j}$ 的待定表达式，其中 α_j 为待定系数。若特征根 p_j 和 p_{j+1} 为共轭复数根，则二者在待定表达式中所对应的两个分式可以合并设为分式 $\frac{\alpha_j s+\beta_j}{s^2-(p_j+p_{j+1})s+p_jp_{j+1}}$。

（3）如果已知系统的输出响应 $C(s)$ 和零输入响应 $C_1(s)$，则二者之差即为零状态响应 $C_2(s)=C(s)-C_1(s)$。

（4）零状态响应 $C_2(s)$ 与输入拉氏变换 $R(s)$ 之比为系统的传递函数。

上述结论提供了"在非零初始条件下，已知一定输入作用下的输出响应……

控制系统的微分方程模型

牛顿第二定律，刚体旋转定律，基尔霍夫

典型微分方程系统

①机械位移系统

弹簧-质量-阻尼器系统。外力 $f(t)$，系统产生 $y(t)$ 位移

$$\begin{cases} f(t)-f_1(t)-f_2(t)=M\frac{d^2y}{dt^2} \\ f_1(t)\ \text{阻尼器阻力：}\ f_1(t)=B\frac{dy(t)}{dt}\ (B\text{：阻尼系数}) \\ f_2(t)\ \text{弹簧力：}\ f_2(t)=k\,y(t)\ (k\text{：弹性系数}) \end{cases}$$

消去 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 中间变量有

$$\Longrightarrow M\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}+ky=f(t)$$

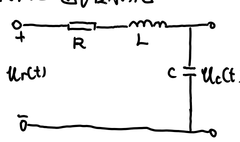
$$\xrightarrow{\text{除}k}\underbrace{\frac{M}{k}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{B}{k}\frac{dy}{dt}+\boxed{y}}_{\text{输出量}}=\frac{1}{k}f(t)\ \xrightarrow[T_M^2=\frac{M}{k}]{T_B=\frac{B}{k}}\ T_M^2\frac{d^2y}{dt^2}+T_B\frac{dy}{dt}+y=\frac{1}{k}f(t)$$

输入项　输出项系数为1

$N\cdot s/m$　s^2　s　kg　N/m　$kg\cdot m/s^2$　m　s

T_B 和 T_M 为系统时间常数，$\frac{1}{k}$ 为系统传递系数（放大系数），稳态时系统输出输入比

② RLC电路系统



$$\begin{cases} L\frac{di}{dt}+Ri+u_c(t)=u_r(t) \\ i=C\frac{du_c}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow LC\frac{d^2u_c}{dt}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

$$\Rightarrow \frac{L}{R}RC\frac{d^2u_c}{dt}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

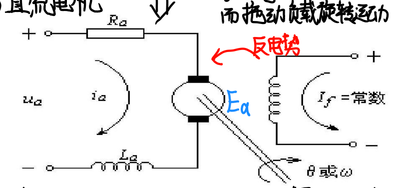
$$\xrightarrow[T_2=RC]{T_1=\frac{L}{R}} T_1T_2\frac{d^2u_c}{dt}+T_2\frac{du_c}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

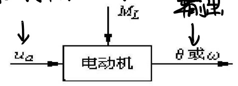
T_1，T_2 为两个时间常数，单位与t相同，传递系数为1

※ ①②系统微分方程结构相同 ⇒ 相似系统

电枢回路 ⇒ 电枢电流与电机励磁磁通相互作用产生电磁转矩 Md 从而拖动负载旋转运动

③ 直流电机





※不计电枢反应，涡流效应和磁滞影响，绕组温度不变

$$\begin{cases} \text{电枢回路}\quad L_a\frac{di_a}{dt}+R_ai_a+E_a=u_a \\ \text{反电动势}\quad E_a=k_e\omega \\ \text{电磁电动机转矩}\quad M_d=k_mi_a \\ \text{运动方程式}\quad J\frac{d\omega}{dt}+M_L=M_d \end{cases}$$

反电动势　参考输入　△i_a，M_d，E_a 为中间变量
反电势系数　输出
电动机转矩系数
转动部分转动惯量
负载输入

$$\Rightarrow \frac{L_aJ}{k_ek_m}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{R_aJ}{k_ek_m}\frac{d\omega}{dt}+\omega=\frac{1}{k_e}u_a-\frac{R_a}{k_ek_m}M_L-\frac{L_a}{k_ek_m}\frac{dM_L}{dt}$$

令 $T_m=\frac{R_aJ}{k_ek_m}$，$T_a=\frac{L_a}{R_a}$ 有 $T_aT_m\frac{d^2\omega}{dt^2}+T_m\frac{d\omega}{dt}+\omega=\frac{u_a}{k_e}-\frac{T_m}{J}M_L-\frac{T_aT_m}{J}\frac{dM_L}{dt}$　2阶线性定常微分方程

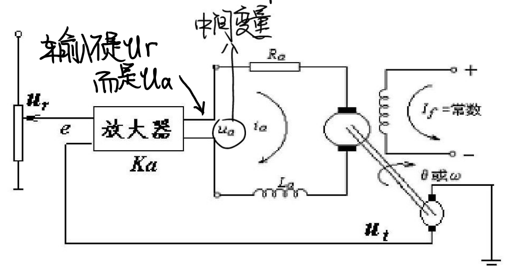
机电时间常数　电枢回路时间常数，比 T_m 小

若输出为电机机转角 θ，有

$$T_aT_m\frac{d^3\theta}{dt^3}+T_m\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{k_e}u_a-\frac{T_m}{J}M_L-\frac{T_aT_m}{J}\frac{dM_L}{dt}$$　3阶线性定常微分方程

④ 有反馈的系统的微分模型

输入不是 u_r 而是 u_a　中间变量



$$T_aT_m\ddot{\omega}+T_m\dot{\omega}+\omega=\frac{1}{k_e}u_a-\frac{T_m}{J}M_L-\frac{T_aT_m}{J}\dot{M}_L$$

设放大器没有惯性，输出与输入成正比

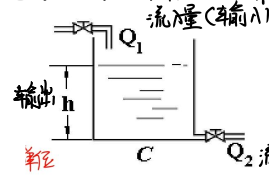
$$\left.\begin{matrix} u_a=k_ae \\ e=u_r-u_t \\ u_t=k_t\omega \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{间变量}]{\text{消去中}} T_aT_m\ddot{\omega}+T_m\dot{\omega}+\underbrace{(1+\frac{k_ak_t}{k_e})}_{=A>1}\omega=\frac{k_a}{k_e}u_r-\frac{T_m}{J}M_L-\frac{T_aT_m}{J}\dot{M}_L$$

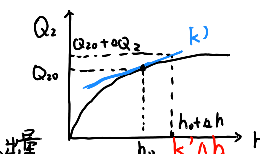
测速发电机

$$\xrightarrow{\text{除}A} T_a\boxed{\frac{T_m}{A}}\ddot{\omega}+\boxed{\frac{T_m}{A}}\dot{\omega}+\omega=\cdots\cdots$$

→ 机电时间常数 T_m ⇓ 动态过程速度↑

⑤ 液位流体模型（非线性模型）





在某一静态工作点附近存在各阶导数
附近 (h_0, Q_{20}) 作小
变化 可近似线性化

$\frac{\Delta Q_2}{\Delta h}=k'$

$(Q_1+\Delta Q_1)-(Q_2+\Delta Q_2)=C\frac{d\Delta h}{dt}$　$(Q_1=Q_2,\ h=h_0$ 平衡态$)$

$\Delta Q_1-\Delta Q_2=C\frac{d\Delta h}{dt}$

$$\begin{cases} Q_1=Q_{10}+\Delta Q_1 \\ Q_2=Q_{20}+\Delta Q_2 \\ h=h_0+\Delta h \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1-Q_2=C\frac{dh}{dt} & p\propto h \\ Q_2=\alpha\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}}=k\sqrt{h} & \text{流体方程} \end{cases}$$

流体系数　液体密度　$k=\alpha\sqrt{\frac{2g}{\gamma}}$

$\xrightarrow{\text{消去}Q_2} C\frac{dh}{dt}+k\sqrt{h}=Q_1$

$\Rightarrow \Delta Q_1-\Delta Q_2=C\frac{d\Delta h}{dt}$　$k'\Delta h$

$C\frac{d\Delta h}{dt}+k'\Delta h=\Delta Q_1$

$\Rightarrow \frac{C}{k'}\frac{d\Delta h}{dt}+\Delta h=\frac{1}{k'}\Delta Q_1$ 近似线性

小信号理论/小偏差理论

前提条件：① 控制系统有一额定工作状态/预定工作点，
② 输出偏离预定工作点偏差量很小

具体方法：将非线性函数在工作点邻域内一阶泰勒展开 ← 可导

$$z=f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(y-y_0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta z}_{\text{输出}}=f(x,y)-f(x_0,y_0)=\underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}}_{\text{常数}}\Delta x+\underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}}_{\text{常数}}\Delta y$$

输入

输入和输出的增量关系就是线性关系