



IIR: $\{h_n\}_{n=0}^{\infty} \leftrightarrow hct \leftrightarrow H(s) \rightarrow H(z)$

IIR数字滤波器
优点: 能借助模拟滤波器已有成果设计;
缺点: 相位非线性

FIR数字滤波器
优点: 严格线性相位, 系统十分稳定 (系统函数为全零点型); 进行滤波时可采用FFT
缺点: 幅度特性较差; 设计繁琐

FIR: $\{h(n)\}_{n=0}^{N-1}$ 长N有限实序列 $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$ Z^{-1} 的N-阶多项式, 有N-1零点, 原点有N-1重极点
当 $h(n)=h(N-n)$ 或 $h(n)=h(N-1-n)$ 时相位对称性

偶对称: $H(\omega) = \frac{1}{2}(h(0) + h(N)) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos[\omega(n-\frac{N-1}{2})]$ 奇对称: $H(\omega) = \frac{1}{2}(h(0) - h(N)) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \sin[\omega(n-\frac{N-1}{2})]$ \Rightarrow 偶延时常数 $\omega(n) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{N-1}{2}$ (只抽样间隔)

$\Rightarrow H(\omega)$ 中各关于 ω 对称项相等

中间项: $H(\omega) = \frac{1}{2}(h(0) + h(N)) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos[n\omega]$

N为奇数时 $H(0) = h(\frac{N+1}{2})$, $n=1, \dots, \frac{N-1}{2}, 0(n)=h(\frac{N+1}{2})$ 有

取 $c(n) = 2h(\frac{N+1}{2}-n)$ 取 $c(n) = 2h(\frac{N+1}{2}-n)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 偶对称

$H(0)=H(\pi)=0$ (H在 $\omega=\pm\pi$ 偶点, 不适合)

N为偶数时 $H(\frac{N+1}{2})=0$ 取 $c(n) = 2h(\frac{N+1}{2}-n)$ 关于 $\omega=0, 2\pi$ 奇对称, $\omega=\pi$ 偶对称 $H(0)=0$

$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N-1} c(n) \cos[n(\omega-\frac{N-1}{2})]$ $\Rightarrow H(\omega)=0$

($H(\omega)=0$, $H(\omega)$ 在 $\omega=1$ 为零点)
 \Rightarrow 高通在 $\omega=0$ 不适合

FIR滤波器零点特性 $H(z) = \pm z^{-\lfloor N/2 \rfloor} H(z^{-1})$ (偶±, 奇-)

\pm 为 $H(z)$ 零点 $\Rightarrow z^{-1}$ 为 $H(z)$ 零点、 $H(z^{-1}) = \pm z^{\lceil N/2 \rceil} H(z^{-1}) = 0$

$h(n)$ 实数, $H(z)$ 为实系数多项式, z^{-1} 为共轭反对称, $z^{\lceil N/2 \rceil}$ 也为零点 (单倍圆对称)

FIR滤波器的主要优点:

① FIR滤波器能严格做到线性相位或群延时为常数, 而IIR滤波器只能逼近线性相位;

② FIR滤波器是全零点型滤波器, 总是稳定的, 不会因滤波运算的舍入误差而产生极限环振荡现象。

FIR滤波器的主要缺点:

① 对同样幅度响应的滤波器, 用FIR滤波器实现比用IIR滤波器实现需要较高的节数, 多达5-10倍。

② 当滤波器的特性要求较高时, 用FIR滤波器来实现, 滤波过程需要较多的计算时间。

FIR滤波

FIR数字滤波器

- 直接型 (横截型、卷积型)
- 级联型
- 快速卷积型
- 线性相位型
- 频率采样型

FIR的窗函数法设计

● 窗函数设计的基本方法

1、设计思想 在时域, 设计 $h_d(n)$ 逼近理想

$h_d(n)$

设理想滤波器的单位脉冲响应为 $h_d(n)$ 则:

$$h_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-jn\omega}$$

$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} h_d(n) \cos(n\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 偶对称

$H(0)=H(\pi)=0$

$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} h_d(n) \sin(n\omega)$ 关于 $\omega=0, 2\pi$ 奇对称, $\omega=\pi$ 偶对称 $H(0)=0$

$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} h_d(n) \sin(n(\omega-\frac{N-1}{2}))$ $\Rightarrow H(\omega)=0$

($H(\omega)=0$, $H(\omega)$ 在 $\omega=1$ 为零点)
 \Rightarrow 高通在 $\omega=0$ 不适合

FIR滤波器零点特性

$H(z) = \pm z^{-\lfloor N/2 \rfloor} H(z^{-1})$ (偶±, 奇-)

\pm 为 $H(z)$ 零点 $\Rightarrow z^{-1}$ 为 $H(z)$ 零点、 $H(z^{-1}) = \pm z^{\lceil N/2 \rceil} H(z^{-1}) = 0$

$h(n)$ 实数, $H(z)$ 为实系数多项式, z^{-1} 为共轭反对称, $z^{\lceil N/2 \rceil}$ 也为零点 (单倍圆对称)

FIR滤波器的主要优点:

① FIR滤波器能严格做到线性相位或群延时为常数, 而IIR滤波器只能逼近线性相位;

② FIR滤波器是全零点型滤波器, 总是稳定的, 不会因滤波运算的舍入误差而产生极限环振荡现象。

FIR滤波器的主要缺点:

① 对同样幅度响应的滤波器, 用FIR滤波器实现比用IIR滤波器实现需要较高的节数, 多达5-10倍。

② 当滤波器的特性要求较高时, 用FIR滤波器来实现, 滤波过程需要较多的计算时间。

FIR窗函数法设计

直接型 (横截型、卷积型)

级联型

快速卷积型

线性相位型

频率采样型

常用窗

1、三角形窗(Bartlett Window)

$w(n)$

$$\begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \end{cases}$$

其频率响应为: $W(e^{j\omega}) = \frac{2}{N} [\frac{\sin(N\omega/4)}{\sin(\omega/4)}$

主瓣宽度为: $8\pi/N$

2、汉宁(Hanning窗, 又称升余弦窗)

$w(n)$

$$= \frac{1}{2} [1 - \cos(\frac{2\pi n}{N-1})] R_N(n)$$

其频率响应 $W(\omega)$ 和幅频响应 $R_M(\omega)$ 分别为:

$$W(e^{j\omega}) = \{0.5W_g(\omega) + 0.25[W_g(\omega - \frac{2\pi}{N-1}) + W_g(\omega + \frac{2\pi}{N-1})]\} e^{-j(\frac{N-1}{2})\omega}$$

$= W(\omega) e^{-j\omega\pi}$

$$W(\omega) = 0.5W_g(\omega) + 0.25[W_g(\omega - \frac{2\pi}{N-1}) + W_g(\omega + \frac{2\pi}{N-1})]$$

$W(\omega)$ 是三项矩形窗的幅度响应 $W_s(\omega)$ 的移位加权和, 使它旁瓣相互抵消, 能量更集中于主瓣, 但主瓣宽度比矩形窗的主瓣加宽了一倍, 为 $8\pi/N$

$R_M(\omega)$ 分别为数字低通滤波器的带通边缘与阻带边缘

3、汉明(Hamming窗, 又称改进的升余弦窗)

$w(n)$

$$= [0.54 - 0.46 \cos(\frac{2n\pi}{N-1})] R_N(n)$$

其幅度响应为:

$$W(\omega) = 0.54W_g(\omega) + 0.25[W_g(\omega - \frac{2\pi}{N-1}) + W_g(\omega + \frac{2\pi}{N-1})]$$

同汉宁窗的主瓣宽度 $8\pi/N$ 相同, 但旁瓣幅度更小, 旁瓣峰值小于主瓣峰值的1%

4、布莱克曼(Blankman窗, 又称二阶升余弦窗)

$w(n)$

$$= [0.42 - 0.5 \cos(\frac{2n\pi}{N-1}) + 0.08 \cos(\frac{4n\pi}{N-1})] R_N(n)$$

其窗函数中包含有余弦的二次谐波分量, 幅度响应为:

$$W(\omega) = 0.42W_g(\omega) + 0.25[W_g(\omega - \frac{2\pi}{N-1}) + W_g(\omega + \frac{2\pi}{N-1})]$$

+ 0.04[W_g(\omega - \frac{4\pi}{N-1}) + W_g(\omega + \frac{4\pi}{N-1})]

通过加入余弦的二次谐波分量, 可进一步降低旁瓣, 但其主瓣宽度变为 $12\pi/N$

设计流程

反变换

$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

$a = \frac{N-1}{2}$

由给定的滤波器的幅频响应参数求出理想的单位脉冲

响应 $h_d(n)$

若得不到 $h_d(n)$ 封闭式或不能用上式计算 $h_d(n)$ 时, 可对

在 $h_d(n)$ 到 ω 间等间隔采样 M , 用下式代替上式的积分

$$h_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_d(e^{j\omega k/M}) e^{j\omega nk/M}$$

按照频率采样定理, $h_d(n)$ 与 $h_M(n)$ 的关系为:

$$h_M(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n+rM) R_M(r)$$

当 M 足够大时, 就可保证 $h_M(n)$ 能足够好的逼近 $h_d(n)$

② 按允许的过渡带宽度 $\Delta\omega$ 及阻带衰减 $A_s = -20 \log_{10} \delta_s$

选择合适的窗函数 $w(n)$ 并估计节数 N

$$N = \frac{A}{\Delta\omega}$$

其中 A 由窗函数的类型决定。

③ 确定延时值 $\alpha = \frac{N-1}{2}$ (即滤波器的对称中心)

④ 求 $h(n) = h_d(n) w(n)$

⑤ 必要时验算频率响应: $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\omega}$

Gibbs效应

\rightarrow $W_R(\omega) = \frac{\sin(\frac{N\omega}{2})}{\frac{N\omega}{2}}$ \Rightarrow 宽 $\frac{4\pi}{N}$ 主瓣与无限长副瓣

加矩形窗处理后, 对理想频率响应产生了以下两点影响:

① 使理想频率特性不连续点 $\omega = \omega_c$ 处, 形成了一个过渡带, 过渡带的宽度等于矩形窗的频率响应 $W_R(\omega)$ 的主瓣宽度 $\Delta\omega = 4\pi/N$

② 在截止频率 ω_c 的两边 $\omega = \omega_c \pm 2\pi/N$ 处 (即过渡带的两边), $H(\omega)$ 出现最大的肩峰值, 肩峰的两侧形成起伏振荡, 其振荡幅度取决于旁瓣的相对幅度, 而振荡的快慢, 则取决于 $W_R(\omega)$ 波动的快慢。

若增加截取长度 N , 则在主瓣附近的窗的频率响应为:

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \approx \frac{\sin(N\omega/2)}{\omega/2} = N \frac{\sin x}{x}$$

随着 x 增大, 函数曲线波动的频率加快, 主瓣幅度加高, 旁瓣幅度也相应加高, 主瓣与旁瓣的相对比例保持不变。

这个相对比例由 $\sin x/x$ 决定, 即由矩形窗函数的形状决定。

因而, 当长度 N 增加时, 只会减小过渡带宽 $(4\pi/N)$, 而不会改变肩峰的相对值。

在矩形窗情况下, 最大相对肩峰值为 8.95%, N 增加时