

故此时的最优分类面为

$$\mathbf{w}_2^T \mathbf{x} + b_2 = 0, \text{ which is exactly equivalent to } \mathbf{w}_1^T \mathbf{x} + b_1 = 0$$

其中 $\mathbf{w}_2 = [10 \ 10]^T, b_2 = -15$ 。

可以验证, 将 $\mathbf{w}_2 = [10 \ 10]^T, b_2 = -15$ 代入上述 constraints 中有第 1、3、5、6 是严格等式, 故候选支撑向量为 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$ 。

由 Dual SVM 知识可知, 当求解 Dual SVM 问题时, 在如下式子中

$$\alpha_n (1 - y_n (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_n + b)) = 0$$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$ 满足 $\alpha_n > 0, y_n (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_n + b) = 5$ 所对应的样本即为支撑向量。

5, Hinge Loss 是支撑向量机的误差函数, 因此, 除了用二次规划求解最佳分类面外, 也能用梯度下降法求解, (1) 请推导梯度并写出算法流程; (2) 假设初始增广权向量 $\vec{w} = (0, 0, 0)^T$, 用第 4 题训练样本集去设计分类面, 指出哪些向量在边界上? 假设它们都是支撑向量的话, 请问最佳权系数向量是否是这些支撑向量的线性组合?

解: (1) 已知样本集合 $\{(\vec{x}_1, y_1), (\vec{x}_2, y_2), \dots, (\vec{x}_N, y_N)\}$, 每个样本的标签为 $y_n \in \{+1, -1\}$, 我们基于 Hinge Loss, 对于每个样本定义其误差函数为:

$$err_{SVM} = \max(0, 1 - y_n (\vec{w}^T \vec{x}_n + b))$$

对其求梯度, 得到:

$$\text{当 } 1 - y_n (\vec{w}^T \vec{x}_n + b) \geq 0, \quad \frac{\partial E_{in}(\vec{w})}{\partial \vec{w}} = -y_n \vec{x}_n$$

$$\text{当 } 1 - y_n (\vec{w}^T \vec{x}_n + b) < 0, \quad \frac{\partial E_{in}(\vec{w})}{\partial \vec{w}} = 0$$