§7.4 Z变换与反Z变换

1、Z变换

Z变换 ⇒ 分析离散系统特征多项式

$$E^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)\cdot e^{-kTs}$$

令 $z=e^{Ts}$，$s=\frac{1}{T}\ln z$　$z^{-1}=e^{-Ts}$

$$\Rightarrow E(z)=Z[e^*(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)z^{-k}=E^*(s)\Big|_{z=e^{Ts}}$$

原始信号

离散

$*$ $E(z)=Z[e^*(t)]=Z[E(s)]=Z[E^*(s)]=Z[e(t)]$

Z变换仅应用于离散系统；一个E(z)映射自一个特定 $e^*(t)$，但多个不同 $e(t)$

2、Z变换计算

① 据定义

$x_1(t)=1(t)\Rightarrow X_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x_1(kT)z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots=\frac{z}{z-1}$

$x_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\Rightarrow X_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x_2(kT)z^{-k}=\frac{z}{z-1}$

$x_3(t)=\sin\omega t=\frac{1}{2j}[e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}]\Rightarrow X_3(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2j}[e^{j\omega kT}-e^{-j\omega kT}]z^{-k}$

$=\frac{1}{2j}\sum_{k=0}^{\infty}[(e^{j\omega T}z^{-1})^k-(e^{-j\omega T}z^{-1})^k]=\frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z-e^{j\omega T}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}\right]$

$=\frac{1}{2j}\frac{z(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T})}{z^2-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})z+1}=\frac{z\sin\omega T}{z^2-2\cos\omega T\cdot z+1}$

$x_4(t)=t\Rightarrow X_4(z)=\sum_{k=0}^{\infty}kTz^{-k}=T[z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots]=-Tz[Dz^{-1}+Dz^{-2}+Dz^{-3}+\cdots]$

$=-Tz\,Dz^{-1}[1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots]=-Tz\,D\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}\right]=\frac{Tz}{(z-1)^2}$

② 部分分式分解　分解为特定形式后查表

$$E(s)=\frac{1}{(s+a)(s+b)}=\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{s+b}-\frac{1}{s+a}\right]\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\frac{1}{a-b}(e^{-bt}-e^{-at})\xRightarrow{Z}\frac{1}{a-b}\left[\frac{z}{z-e^{-bT}}-\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$$

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{zT}{(z-1)^2}$
$t^2/2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{z(z+1)T^2}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{zTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$a^{t/T}$	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$\frac{z}{z-a}$ $(a>0)$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-z\cos\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-e^{-aT}\cos\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$

3、Z变换性质

① 线性性：$Z[a\cdot e_1^*(t)\pm b\cdot e_2^*(t)]=aE_1(z)\pm bE_2(z)$

② 实位移性
- 延滞：$Z[e(t-nT)]=z^{-n}E(z)$
- 提前：$Z[e(t+nT)]=z^n\left[E(z)-\sum_{k=0}^{n-1}e(kT)\cdot z^{-k}\right]$

③ 复位移性 $Z[e(t)\cdot e^{\mp at}]=E(z\cdot e^{\pm aT})$

④ 初值定理 $\lim_{n\to 0}e(nT)=\lim_{z\to\infty}E(z)$

⑤ 终值定理 $\lim_{n\to\infty}e(nT)=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z)$

⑥ 卷积定理 $c^*(t)=e^*(t)*g^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)g[(n-k)T]$

$C(z)=E(z)\cdot G(z)$

4、反Z变换及计算方法 $Z^{-1}[X(z)]=\boxed{x(nT)}$ → 离散信号而非原连续信号

① 长除法

$$E(z)=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}=c_0+c_1z^{-1}+\cdots+c_kz^{-k}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)z^{-k}$$

$\Rightarrow e^*(t)=c_0\delta(t)+c_1\delta(t-T)+\cdots+c_k\delta(t-kT)$

② 部分分式分解　分式分解 $\frac{X(z)}{z}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z-z_i}$

若 $X(z)=\frac{b_0z^m+\cdots+b_{m-1}z+b_m}{a_0z^m+\cdots+a_{n-1}z+a_n}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}{a_0\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}$

无重根情况下有 $X(z)=z\left(\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{A_n}{z-z_n}\right)$

其中 $A_i=\left[(z-z_i)\frac{X(z)}{z}\right]\Big|_{z=z_i}$

此时 $x(t)=A_1\cdot z_1^{\frac{t}{T}}+A_2\cdot z_2^{\frac{t}{T}}+\cdots+A_n\cdot z_n^{\frac{t}{T}}$

$\therefore x(pT)=A_1\cdot z_1^p+A_2\cdot z_2^p+\cdots+A_nz_n^p$

③ 留数法

$f(kT)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1},z_i]$，$z_i$ 为 $F(z)z^{k-1}$ 极点

$\mathrm{Res}[z^{(k-1)}x(z),z_i]=\lim_{z\to z_i}\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}[(z-z_i)^rz^{k-1}x(z)]$

5、Z变换局限性

① 仅表现出采样点信息

② 连续信号在采样点可能存在跳变