§5 脉冲响应不变法

1. 基本原理

从时域响应出发，使求得的数字滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ 等于模拟滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 抽样值

无限冲激响应 $h(n)=h(t)\big|_{t=nT}$

若 $H(s)$ 已知，则 $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)] \Rightarrow H(z)=\mathcal{Z}[h(n)]=\mathcal{Z}[h(t)\big|_{t=nT}]$

2. 方法

① 将 $H(s)$ 进行部分分式展开 $H(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k}$

$\mathcal{L}[e^{at}]=\frac{1}{s-a}$

② 对 $H(s)$ 反拉氏变换得 $h(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k t}u(t)$

③ 对 $h(t)$ 采样 $h(n)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k nT}u(nT)=\sum_{k=0}^{N}A_k(e^{s_k T})^n u(n)$

④ 对 $h(n)$ Z 变换 $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{s_k T}z^{-1}}$

※ 频率响应

原模拟滤波器频率响应 $H(j\Omega)$，$h(n)$ 为 $h(t)$ 等距采样，故 $h(n)$ 频谱为模拟信号频谱周期延拓

$$H(e^{j\omega})=\boxed{\frac{1}{T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}H\left(j\frac{\omega}{T}+j\frac{2\pi}{T}m\right)$$

$H(j\Omega)=0$，$|\Omega|\geq\frac{\Omega_s}{2}=\frac{\pi}{T}$

当模拟滤波器频率响应带限于折叠频率/奈氏频率，数字滤波器与模拟滤波器频率响应$\boxed{\text{相同}}$ $\longrightarrow H(e^{j\omega})=\frac{1}{T}H\left(j\frac{\omega}{T}\right)$，$|\omega|<\pi$

故高通/带阻滤波器产生混叠，不适用（$f: s\to z$ 多值映射）

几点修正

$T=\frac{1}{f_s}$

① 消去 T 影响 $h(n)=h(t)\big|_{t=nT} \Rightarrow h(n)=Th(t)\big|_{t=nT}$

② 直接用数字频率表示的求 $H(z)$　为便于使用查表法，模拟滤波器表中大多是归一化低通原型 $H_a(s)$，滤波器 3dB 截止频率归一化在 $\Omega_c=1$，应进行反归一化，令 $s=\frac{s}{\Omega_c}$（$\omega_c=\Omega_c T$）

§6 双线性变换法

为避免如脉冲响应不变法中混叠（多值映射），进行如下两步映射

① $f_1: s\longmapsto$ 中间 s_1 平面上横带域 $(-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T})$

② $f_2: s_1\longmapsto z$

3、双线性变换法的基本思路：
从频率响应出发，直接使数字滤波器的频率响应 $|H(e^{j\omega})|$ 逼近模拟滤波器的频率响应 $|H(j\Omega)|$，进而求得 $H(z)$。

设计方法

① 正切变换 $\Omega=\tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)$　s 平面 $j\Omega$ 轴 $\rightarrow s_1$ 平面 $j\Omega_1$ 轴上 $(-j\frac{\pi}{T}, j\frac{\pi}{T})$

② Z 变换 $z=e^{s_1 T}$　$\Omega_1\rightarrow z$ 平面单位圆上

③ 正切变换延拓至整个 s，有关系　$s=\tan\left(\frac{s_1 T}{2}\right)=\frac{1-e^{-s_1 T}}{1+e^{-s_1 T}}$

④ s_1 平面按 $z=e^{s_1 T}$ 映射至 z 平面　$s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ / $z=\frac{1+s}{1-s}$

几点修正

① 频率畸变　模拟频率与数字频率有非线性映射关系，$\Omega=\mathrm{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$　均匀　非均匀，ω↑越密　相位非线性

☆故进行预畸变保证各边界与设计相同 $\Omega_c=\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$，之后代入归一化低通原型 $H_a(s)=H_a\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$ 反归一化

此时数字系统 $H(z)=H(s)\big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=H_a(s)\big|_{s=\frac{1}{\Omega_c}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

$H(e^{j\omega})\xrightarrow[\text{畸变}]{\text{频率预}}H(j\Omega)\rightarrow H(s)\xrightarrow[\text{变换}]{\text{双线性}}H(z)$

② T 影响　可取 $s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 有 $\frac{2}{T}$ 系数差别，满足 $|\Omega_s|<\frac{\pi}{T}$ 即可（模拟频率在带限之内），不会因多值映射频率混叠

☆求 ω_c　① 给出指标，$\omega_c \Rightarrow \Omega_c=\omega_c f_s=\frac{\omega_c}{T}$；$f_c=\frac{\Omega_c}{2\pi}$　rad/s　$\frac{1}{s}$　rad

② 增益 3dB 处 $\Omega \Rightarrow |H(j\Omega_p)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}}=10^{-0.1A_p}$