§2.2 离散时间信号(序列)

物理上指定义在离散时间上的信号样本集合，可以是本就存在的，也可是模拟信号采样得来

数学上可用时间序列 $\{x(n)\}$ 表示，$x(n)$ 代表序列的第n个样点的数字，n为时间序号。$-\infty<n<\infty$

序列的运算

加减、乘积

* 延时 $y(n)=x(n-n_0)$ ($n_0<0$ 左移；$n_0>0$ 右移)
* 反褶 $y(n)=x(-n)$
* 差分 $\begin{cases}\text{前向}: \Delta x(n)=x(n+1)-x(n)\\ \text{后向}: \nabla x(n)=x(n)-x(n-1)\end{cases}$

  $\nabla x(n)=\Delta x(n-1)$ $\quad \nabla^2 x(n)=\nabla[\nabla x(n)]=x(n)-2x(n-1)+x(n-2)$
* 抽取 $y(n)=x(nM)$ || 插值 $y(n)=\begin{cases}x(\frac{n}{L}) & n=0,\pm L,\pm 2L\\ y'(n) & \text{其他}\end{cases}$
* 卷积：对两序列 $x(n)$，$h(n)$ 有卷积 $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$

  ① 翻褶 $x(n)\to x(m)$ $\quad h(n)\to h(m)\to h(-m)$

  ② 移位 $h(-m)\to h(n-m)$

  ③ 相乘 $x(m)h(n-m)$ $-\infty<m<\infty$

  ④ 相加 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

  } $-\infty<n<\infty$

  性质：① 可交换性 ② 结合性 ③ 分配律性

  两个长度分别为M和N的有限长序列卷积结果长度长 $M+N-1$

常用的序列

1. 单位(脉冲)序列 $\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$
2. 单位阶跃序列 $u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$

   $\delta(n)=\nabla u(n)=u(n)-u(n-1)$

   $u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)$
3. 矩形序列 $R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leq n<N-1\\ 0 & \text{其他}n\end{cases}=u(n)-u(n-N)$
4. 复指数序列

   $x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}$ 数字频率

   $=e^{\sigma n}\cos\omega_0 n+je^{\sigma n}\sin\omega_0 n$

   $\omega=\Omega T=\frac{\Omega}{f}$

   $\Omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$

序列周期：若序列 $x(n)$ 满足 $x(n)=x(n+N)$，称 $x(n)$ 为以N为周期的周期序列 最小正整数

* 正弦序列及其周期 $x(n)=\sin(\omega_0 n+\phi)$，由定义：

  $x(n)=\sin(\omega_0 n+\phi)=\sin(\omega_0 n+2k\pi+\phi)$ 整数

  $=\sin[\omega_0(n+\boxed{\frac{2k\pi}{\omega_0}})+\phi]$ 周期

∴ 当 $p=\frac{2k\pi}{\omega_0}$ 为整数时正弦序列有周期

任意序列的表示：使用单位序列 $\delta(n)$ 表示成样点值的加权和形式

$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)=x(n)*\delta(n)$

§2.3 离散时间系统

系统实际上表示对输入信号的一种运算，所以离散系统就表示对输入序列的运算

记为 $T[\ ]$，$y(n)=T[x(n)]$

* 累加器：$y(n)=y(n-1)+x(n)=\sum_{l=-\infty}^{n}x(l)=\sum_{l=-\infty}^{n-1}x(l)+x(n)$

  M点的滑动平均滤波器 $y(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x(n-k)$

  线性插值：$y(n)=\frac{1}{2}[x(n-1)+x(n+1)]$

线性系统：若 $\begin{cases}y_1(n)=T[x_1(n)]\\ y_2(n)=T[x_2(n)]\\ y(n)=T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)\end{cases}$

⇒ 该系统为线性系统，即具有齐次性和叠加性

⇒ 加权信号和的响应 = 响应的加权和；先运算后系统操作 = 先系统操作后运算

移不变系统：若 $y(n)=T[x(n)]$ 且对输入 $x(n-n_0)$ 有 $T[x(n-n_0)]=y(n-n_0)$，该系统称为时不变系统

⇒ 系统参数不随时间变化的系统，亦即输出波形不随输入加入时间变化

线性非移变系统：线性，时不变性

冲激和阶跃响应

冲激响应：系统对 $\delta(n)$ 的响应

阶跃响应：系统对 $u(n)$ 的响应

∅ 单位脉冲响应与离散卷积

线性时不变离散系统 任意激励 $x(n)$ 下响应 $y(n)$ 与单位脉冲响应 $h(n)$ 关系

LTI

$y(n)=T[x(n)]=T[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)]$

$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

$=x(n)*h(n)$

常系数差分方程

线性时不变LTI离散系统可用线性常系数差分方程表示

$\sum_{k=0}^{N}d_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}p_k x(n-k)$

或

$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}\frac{d_k}{d_0}y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}\frac{p_k}{d_0}x(n-k)$

$\max\{M,N\}$ 称为差分方程阶数

求解方法

1. 迭代法：数值求解方法

   差分方程自身含递推信息；仅适用于计算机

   ∅ 需给出边界条件
2. 时域经典法：齐次解+特解（自由响应+强迫响应）

   若非齐次线性差分方程

   $d_0y(n)+d_1y(n-1)+\cdots+d_Ny(n-N)=f[x(n)]$

   有 $\boxed{\text{特解}}$ $y^*(t)$ $\sum_{k=0}^{N}d_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}p_k x(n-k)$，$x(n)\neq 0$

   其对应的N阶常系数齐次线性差分方程

   $d_0y(n)+d_1y(n-1)+\cdots+d_Ny(n-N)=0$

   有N个线性无关特解

   $y_1(n), y_2(n), \cdots, y_k(n)$

   即该常系数齐次线性差分方程有 $\boxed{\text{通解}}$ $\sum_{k=0}^{N}d_k y(n-k)=0$

   $Y=C_1y_1(n)+C_2y_2(n)+\cdots+C_Ny_N(n)$

   则原非齐次线性差分方程全解

   $Y=C_1y_1(n)+\cdots+C_Ny_N(n)+y^*(n)$

3. Z变换 → 反变换 → $y(n)$

通解的求解方法

齐次差分方程 $\sum_{k=0}^{N}d_k y(n-k)=0$ 对应特征方程

特征多项式 $\sum_{k=0}^{N}d_k\lambda^{N-k}=0$

设上式有根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$ 其齐次解一般形式：

$y_c(n)=a_1\lambda_1^n+a_2\lambda_2^n+\cdots+a_N\lambda_N^n$

若 λ_i^n 是L重根，齐次解为

$y_c(n)=a_1\lambda_1^n+\cdots+a_{i0}\lambda_i^n+a_{i1}n\lambda_i^n+a_{i2}n^2\lambda_i^n+\cdots+a_{i,L-1}n^{L-1}\lambda_i^n+a_N\lambda_{N-L}^n$

特解的求解方法

卷积法：在零状态下线性非移变系统对输入 $x(n)$ 的响应 $y(n)$ 可用单位脉冲响应表示的线性卷积来运算

绍卷积法。卷积法的思路是：由于在**零状态下**，线性非移变系统对输入 $x(n)$ 的响应 $y(n)$ 可用单位脉冲响应表示的线性卷积来计算。

$$y(n)=h(n)*x(n)$$

零状态响应：不考虑原始时刻系统储能的作用（起始状态等于零），由系统的外加激励信号产生的响应。

为此，将方程写成D算子的形式，即

$$\sum_{k=0}^{N}d_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}p_k x(n-k)\longrightarrow\sum_{k=0}^{N}d_kD^k y(n)=\sum_{k=0}^{M}p_kD^k x(n)$$

由此求得 $$y(n)=\frac{\sum_{k=0}^{M}p_kD^k}{\sum_{k=0}^{N}d_kD^k}x(n)=H(D)x(n)$$

单位延迟算子D

令：$x(n)=\delta(n)$，则有：$h(n)=H(D)\delta(n)$

$$H(D)=\frac{\sum_{k=0}^{M}p_kD^k}{\sum_{k=0}^{N}d_kD^k}=\frac{p_0+p_1D+p_2D^2+\ldots+p_MD^M}{d_0+d_1D+d_2D^2+\ldots+d_ND^N}$$

$$=\frac{A_1}{1-a_1D}+\frac{A_2}{1-a_2D}+\frac{A_3}{1-a_3D}\ldots+\frac{A_N}{1-a_ND}\quad(M<N)$$

$$h(n)=H(D)\delta(n)$$

$$=\frac{A_1}{1-a_1D}\delta(n)+\frac{A_2}{1-a_2D}\delta(n)+\frac{A_3}{1-a_3D}\delta(n)\ldots+\frac{A_N}{1-a_ND}\delta(n)$$

$$=\sum_{k=1}^{N}g_k(n)$$

注意D是延迟算子，是对序列的延迟。式中：$g_i(n)=A_i(\delta(n)+a_i\delta(n-1)+a_i^2\delta(n-2)+\ldots)=A_ia_i^nu(n)$ 这里的 $\delta(n)$，$\delta(n-1)$，$\delta(n-2)$...都是序列

式中：$g_i(n)=\frac{A_i}{1-a_iD}\delta(n)=A_i(1+a_iD+a_i^2D^2+\ldots)\delta(n)=A_ia_i^nu(n)$

$A_i\sum_{n=0}^{\infty}(a_iD)^N$

所以：$h(n)=\sum_{i=1}^{N}A_ia_i^nu(n)$

9/5/2022 9:19:51 PM

方程的特解为

$$y_p=h(n)*x(n)=\left[\sum_{i=1}^{N}A_ia_i^nu(n)\right]*x(n)$$

比较法

线性时不变系统输入与输出有相同的形式

输入	输出
$x(n)=e^{an}$	$y(n)=Ae^{an}$
$x(n)=e^{j\omega n}$	$y(n)=Ae^{j\omega n}$
$x(n)=\cos\omega n$	$y(n)=A\cos(\omega n+\theta)$
$x(n)=\sin\omega n$	$y(n)=A\sin(\omega n+\theta)$
$x(n)=n^k$	$y(n)=A_kn^k+A_{k-1}n^{k-1}+\cdots+A_1n+A_0$
$x(n)=A$	$y(n)=C$
$x(n)=(r)^n$	$y(n)=C(r)^n$
$x(n)=(r)^n$（r与特征根重）	$y(n)=C_1n(r)^n+C_2(r)^n$

序列的能量与功率

1. 有界信号

   若存在有界常数B使序列 $x(n)$ 满足

   $|x(n)|\leq B<\infty$

   称序列为有界信号
2. 序列的总能量

   有界信号的总能量定义为序列各样点值的平方和，即

   $E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2$

   当 $E<\infty$ 时，称信号为能量有限信号

   * 序列长度有限且 $x(n)$ 有限，则信号能量有限；序列长度无限长即使信号有界，能量不一定有限
3. 序列的平均功率

   ① 对非周期序列 $x(n)$，序列无限长，有平均功率定义

   $P=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}|x(n)|^2=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}E$

   * E有限，P=0 信号称能量信号；E无限，P有限信号称功率信号

   ② 对周期为N周期序列 $\tilde{x}(n)$，其平均功率定义

   $P=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|\tilde{x}(n)|^2$

   周期序列常为功率信号

有限/无限脉冲响应 LTI离散时间系统分类

脉冲响应长度

① 有限脉冲响应FIR系统

$h(n)=0$，$n<N_1$ or $n>N_2$

$y(n)=\sum_{k=N_2}^{N_1}h(k)x(n-k)$

② 无限脉冲响应IIR系统

$h(n)$ 无限长

$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k)$

因果性 ⇒ 物理可实现性

系统在n时刻输出仅取决于n时刻及以前的输入，与n时刻以后输入无关

有因果性充要条件 $h(n)=h(n)u(n)$

稳定性 ⇒ 对有界输入，输出也有界 BIBO稳定性

系统稳定条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$