特征多项式

稳定性定义 ⇒由系统结构/参数决定，与外界输入无关

定义一：

$G_B(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s-1)}$

在有界输入的作用下，其输出响应也是有界的。此时系统称为有界输入有界输出稳定，简称BIBO稳定。

系统恢复平衡点的能力

借输入输出关系来定义稳定性，但稳定性与输入无关。

定义二：

若一个系统处于平衡态，由于扰动作用，使其偏离平衡点。那么当扰动消失后，若系统能够依赖自身能力重新恢复到原始平衡状态，则称系统是稳定的。若扰动消失后不能恢复原始平衡状态，而偏差越来越大，则称系统是不稳定的。若扰动消失后，系统输出与原始的平衡状态间存在恒定的偏差或输出维持等幅振荡，则系统处于临界稳定状态。

稳定性表征了系统由初始偏差状态回复平衡状态的能力。

83

2、线性系统稳定的充要条件

假如原始平衡点在原点的单输入单输出系统，由齐次微分方程式来描述的

$$a_n c^{(n)} + a_{n-1}c^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{c} + a_0 c = 0$$

在任何初始条件下，若满足

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty} \dot{c}(t) = \cdots = \lim_{t\to\infty} c^{(n-1)}(t) = 0 \qquad (*)$$

则称系统是稳定的。

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

设上式有k个实根p_i (i=1，2，…，k)，r对共扼复数根($\sigma_i \pm j\omega_i$)，(i=1，2，…r)，且k+2r=n，则齐次方程的解的一般式为

$$c(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i e^{p_i t} + \sum_{i=1}^{r} e^{\sigma_i t}(A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t)$$

式中系数A_i、B_i和C_i由初始条件决定。

84

稳定的充要条件

$G_B(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$

$$c(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i e^{p_i t} + \sum_{i=1}^{r} e^{\sigma_i t}(A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t)$$

若所有$p_i<0$，$\sigma_i<0$(即都是负数)，则(*)满足，系统最终能恢复至平衡状态，所以是稳定的；

若p_i或σ_i中有一个或一个以上是正数，则条件式(*)不满足，$t\to\infty$时偏差越来越大，系统是不稳定的；

只要p_i中有一个为零，或σ_i中有一个为零(即有一对虚根)，则式(*)不满足，系统输出或者为一常值，或者为等幅振荡，不能恢复原平衡状态。这时称系统处于稳定的临界状态。

线性系统稳定的充分必要条件是：

系统所有的特征根均为负实数或具有负的实部

也就是它的所有极点均在S平面的左半部分。

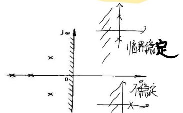

图 3-10 根平面

Routh稳定性判据

1、系统稳定性初步鉴别：

系统特征方程如下

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = -a_{n-1},\quad \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n}\lambda_i\lambda_j = a_{n-2},\quad \sum\lambda_i\lambda_j\lambda_k = -a_{n-3}\ \cdots\ \prod\lambda_i = (-1)^n a_0$$

系数均为正数：设$a_n>0$,系统稳定必要条件是所有系数均为正数

若有系数为零/负数，则系统不稳定

2、Routh判据 (充要条件)

对于系统特征方程

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

(1) 列写Routh表

存在为0项

$$c_1 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},\quad c_2 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix},\quad c_3 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}\ \cdots$$

直至c_i为0再算下一行 ⇒直到s^0行

$$\begin{array}{lllll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & & \cdots & & \\
s^1 & f_1 & & & \\
s^0 & g_1 & & &
\end{array}$$

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix},\quad b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix},\quad b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}\ \cdots$$

直至b_i为0再算下一行

g_1 ⇒ s^0系数

(2) 评估Routh表左端第一列各数符号 ⇒各项为正，系统稳定；若有负数，系统不稳定

→变化次数即右半平面极点个数

※为简化运算，可将一整行乘除同一个数；

※当某行第一列元素为0而其余元素不全为0，将第一列零元素设为非常小正数ε

※当出现全零行时，以全零行上一行系数建立辅助多项式P(s) ⇒求导有 $\frac{dP(s)}{ds}=\sum_{i=0}^{n} a_i s^n$，$a_i$为该全零行新系数

到包含关于原点对称的一对根 {一正一负 / 虚轴一上一下，求根问题Routh表常有全零行

求解辅助多项式P(s)=0根即为该组根

确定P(s)后多项式除法获得其他根

3、稳定裕量的检验

相对稳定性：在稳定情况下有多少稳定裕量

特征方程的左半平面根越靠近虚轴稳定性越差，稳定裕量越小，相对稳定性越差

※可移动s平面坐标轴再应用ROUTH判据，

z=s+a 将s左移a得z

即令s=z-a (左移a)，代入特征式得关于z的新特征方程；

再检验新特征方程有几个根位于新虚轴(垂线s=-a)右边；

若所有根均在新虚轴左边(新劳斯表第一列均为正数)，则说系统有稳定裕量a