※ 过阻尼 二阶系统性能指标

对于过阻尼系统 无超调量和峰值时间

☆ 两个实数根相差 7~10倍，可近似为一阶系统求性能指标

当两个根比较接近，很难根据响应得到上升时间和调节时间与 ξ 的关系，通过曲线拟合方法可得下列经验公式

① 延滞 $t_d = \frac{1+0.6\xi+0.2\xi^2}{w_n}$；② 上升 $t_r = \frac{1+1.5\xi+\xi^2}{w_n}$

③ 调节 t_s

对 $s^2+2\xi w_n s+w_n^2 = (s+\frac{1}{T_1})(s+\frac{1}{T_2}) \Rightarrow \xi = \frac{1+\frac{T_1}{T_2}}{2\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}}$（维达定理）

$s_{1,2} = -\xi w_n \pm w_n\sqrt{\xi^2-1}$

$T_1 \geq 4T_2$，$t_s = 3T_1$（$\Delta = 5\%$）

$T_1 = T_2$，$t_s = 4.75T_1$

$\frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$

※ 二阶系统设计

$w_n\uparrow$，$\xi\downarrow$，ξw_n 不变

① 比例环节 $\boxed{k_A\uparrow}$（解实部不变）$t_p\downarrow$ $t_r\downarrow$ t_s 不变 ⇒ 响应初期快速性↑，超调量↑；$G_B(s) = \frac{5k_A}{s^2+34.5s+5k_A}$

校正装置

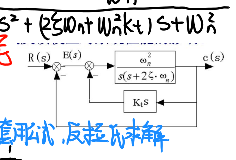
$k_A\downarrow$，$t_p\uparrow$，$t_r\uparrow$（过阻尼时 t_s 增大，无超调）

又难以兼顾系统快速性/平稳性

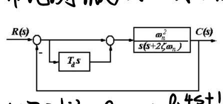
② 速度反馈/微分反馈 $k_t s$：$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2+(2\xi w_n+w_n^2 k_t)s} \xrightarrow{\text{单位反馈}} G_B(s) = \frac{w_n^2}{s^2+(2\xi w_n+w_n^2 k_t)s+w_n^2}$

此系统 $w_n' = w_n$，$\xi' = \xi + 0.5 w_n k_t$（$k_t > 0$）不过大，不能变为过阻尼

自然振荡频率不变　阻尼比↑，$\sigma_p\downarrow$ $t_r\uparrow$ $t_s\downarrow$



③ 带比例微分控制系统



$G_k = \frac{w_n^2(1+T_d s)}{s(s+2\xi w_n)} \Rightarrow G_B = \frac{w_n^2(1+T_d s)}{s^2+(2\xi w_n+T_d w_n^2)s+w_n^2}$，$z = \frac{1}{T_d}$

闭环零点，不能套用公式，应按定义求解

以下讨论 $G_B = \frac{0.4s+1}{s^2+0.9s+1}$，$G_B' = \frac{1}{s^2+0.9s+1}$

对 G_B' 有 $\xi = 0.45$，$w_n = 1$，$\beta = \arccos\xi = 1.104\,rad$　对 G_B 有 $C(s) = G_B(s)R(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{0.4s+1}{s^2+0.9s+1} = \frac{1}{s} - \frac{s+0.45}{(s+0.45)^2+0.893^2} - \frac{0.05}{(s+0.45)^2+0.893^2}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t) = 1-e^{-0.45t}[\cos 0.893t + 0.056\sin 0.893t]$

$= 1-1.002e^{-0.45t}\sin(0.893t+1.508)$

① $t_r = \frac{\pi-\beta}{w_d} = 2.27s$

② $t_p = \frac{\pi}{w_d} = 3.51s$

③ $\sigma_p = e^{-\frac{\pi 0.45}{\sqrt{1-0.45^2}}} = 20.55\%$

④ $t_s = \frac{3}{\xi w_n} = 6.67s$

① t_r：$0.893t_r+1.508 = \pi \Rightarrow t_r = \frac{\pi-1.508}{0.893} = 1.82$ ↓

② t_p：$c'(t) = 0.4509e^{-0.45t}\sin(0.893t+1.508) - 0.895e^{-0.45t}\cos(0.893t+1.508) = 0$

$\Rightarrow \tan(0.893t_p+1.508) = 1.984$

$\Rightarrow t_p = 3.06s$ ↓

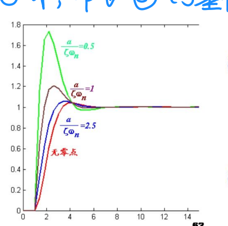
③ σ_p：$c(t_p) = 1.225$，$\sigma_p = 22.5\%$ ↑

④ t_s：$|1.002e^{-0.45t_s}| \leq 0.05$，$t_s = 6.67$

闭环零点对性能影响：①超调量↑ ② t_r，$t_p\downarrow$ ③ t_s 基本不变

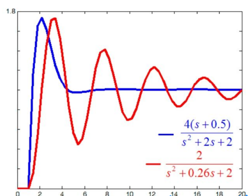
$G_B = \frac{2}{s^2+2s+2}$　$G_B = \frac{4(s+0.5)}{s^2+2s+2}$

$G_B = \frac{0.8(s+2.5)}{s^2+2s+2}$　$G_B = \frac{2(s+1)}{s^2+2s+2}$



$G_B = \frac{4(s+0.5)}{s^2+2s+2}$

$G_B = \frac{2}{s^2+0.26s+2}$



闭环零点使 σ_p 增大，比单纯二阶相比，相同 σ_p 时有较好平稳性

④ 超调量 $\sigma_p\uparrow$，闭环零点比共轭复数极点实部更靠近虚轴产生的影响就更大

☆ 带闭环零点的动态性能指标　$G_B(s) = \frac{w_n^2}{z}\cdot\frac{s+z}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$

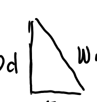
① $t_r = \frac{\pi-\varphi-\beta}{w_d}$

② $t_p = \frac{\pi-\varphi}{w_d}$

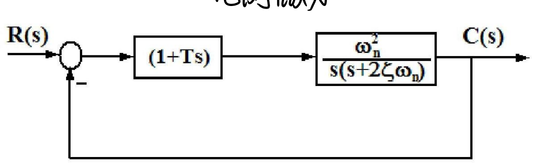
③ $\sigma_p = \frac{1}{\xi}\sqrt{\xi^2-2\gamma\xi^2+\gamma^2}\cdot e^{-\frac{(\pi-\varphi)\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$

④ $t_s \approx \frac{(3\sim4)+\ln(\frac{l}{z})}{\xi w_n}$

$$\begin{cases} w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} \\ \beta = \arccos\xi \\ \varphi = \arctan\frac{w_d}{z-\xi w_n} \\ \gamma = \frac{\xi w_n}{z} \\ l = \sqrt{(z-\xi w_n)^2+w_d^2} \end{cases}$$



比例微分



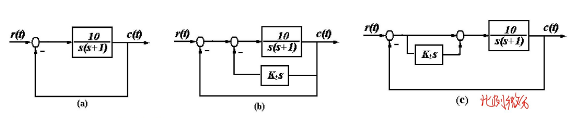
$G_B(s) = \frac{w_n^2}{z}\cdot\frac{\boxed{s+z}}{s^2+\boxed{(2\xi w_n+Tw_n^2)}s+w_n^2}$，$\boxed{z = \frac{1}{T}}$

闭环零点，$\sigma_p\uparrow$，$t_s\uparrow$

阻尼比↑ ⇒ $\sigma_p\downarrow$ $t_s\downarrow$

大小取决于零点相对于极点实部位置

综合性能取决于T



解：开环传递函数为

$G_{Ka} = \frac{10}{s(s+1)}$　$G_{Kb} = \frac{10}{s(s+1)+10K_t s}$　$G_{Kc} = \frac{10(1+K_t s)}{s(s+1)}$ 闭环零点

闭环传递函数为

$\xi\uparrow$，w_n。$\begin{cases}\sigma_p\downarrow \\ t_p\uparrow \\ t_s\downarrow\end{cases}$　闭环零点

$G_{Ba} = \frac{10}{s^2+s+10}$　$G_{Bb} = \frac{10}{s^2+(1+10K_t)s+10}$　$G_{Bc} = \frac{10(1+K_t s)}{s^2+(1+10K_t)s+10}$

结构图	典型(a)二阶	速度(b)反馈	比例(c)微分
闭环传函	$\frac{10}{s^2+s+10}$	$\frac{10}{s^2+3.16s+10}$	$\frac{10}{4.63}\frac{10(s+4.63)}{(s^2+3.16s+10)}$
闭环零点	无	无	−4.63
闭环极点	$-0.5 \pm j3.12$	$-1.58 \pm j2.74$	⇒ 超调增幅↓ $-1.58 \pm j2.74$
参数ω_n	3.16	3.16	3.16
参数ζ	0.158	0.5	0.5
平稳 性能σ_p%	60%	16.3%	23%
性能t_p	1.01	1.15	1.05 动态初期
快速 性能t_s	7	2.2	2.1 接近
闭环零点	无	无	−4.63
闭环极点	$-0.5 \pm j3.12$	$-1.58 \pm j2.74$	$-1.58 \pm j2.74$

改变系统闭环极点达到改善系统的目的

$\left.\begin{matrix}\xi\uparrow \\ w_n.\end{matrix}\right\} \Rightarrow \sigma_p\downarrow, t_s\downarrow$

与速度反馈对比（无法和典型二阶比较）

闭环零点 ⇒ $\sigma_p\uparrow$，t_s 基本不变

高阶系统响应

实际控制系统多数是高于二阶的系统，即高阶系统。传函有如下形式

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1 s+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0} \quad (m \leq n)$$

$\xrightarrow{\text{零极点}}$ $$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m \prod_{i=1}^{q}(s+z_i)\prod_{i=1}^{l}(s^2+2\xi_{mi}w_{mi}s+w_{mi}^2)}{a_n \prod_{i=1}^{k}(s+p_i)\prod_{i=1}^{r}(s^2+2\xi_{ni}w_{ni}s+w_{ni}^2)} \quad (m \leq n)$$

$\xrightarrow{\text{假如无重极点}}$ $$C(s) = \frac{b_0}{a_0}\frac{1}{s} + \sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{s+p_i} + \sum_{i=1}^{r}\frac{A_i(s+\xi_{ni}w_{ni})+B_i w_{ni}\sqrt{1-\xi_{ni}^2}}{s^2+2\xi_{ni}w_{ni}s+w_{ni}^2}$$

$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ $$c(t) = \frac{b_0}{a_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k}C_i e^{-p_i t}}_{\text{惯性环节}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r}e^{-\xi_{ni}w_{ni}t}(A_i\cos w_{ni}\sqrt{1-\xi_{ni}^2}\,t + B_i\sin w_{ni}\sqrt{1-\xi_{ni}^2}\,t)}_{\text{振荡环节}}$$

各分量相对大小由系数/衰减快慢两因素决定 ⇒ 了解各分量及相对大小就可知高阶系统瞬态响应

系统稳定前提下，各分量衰减快慢由 $-p_i$，$-\xi_{ni}w_{ni}$ 决定 ⇒ 系统极点在s平面左半部离虚轴越远，相应分量衰减越快

各分量所对应的系数决定于系统的零、极点间的位置分布

$C(s) = \frac{s+2.5}{s(s+2)(s+0.5)} = \frac{2.5}{s} + \frac{1/6}{s+2} - \frac{16/6}{s+0.5}$　极点：−2，零点 −2.5

某极点 $-p_i$ 靠近零点 而远离其它极点和原点，相应的系数 C_i 越小

若一对零极点互相很接近，在 $c(t)$ 中与该极点对应分量几乎消除　☆ 消去时保证开环增益不变

⇒ 一对接近的零极点称为偶极子

零极点形式 令 $s=0$　保留 p_i，z_i

时间常数形式 令 $s=0$

$$C(s) = \frac{1}{s(s+5)(s+2)(s+4)} = \frac{0.025}{s} - \frac{0.067}{s+5} + \frac{0.125}{s+4} - \frac{0.083}{s+2}$$

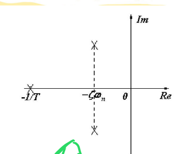
⇒ −4 5 −5 ⇒ 增强

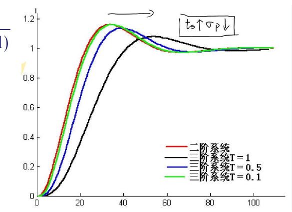
接近

$$C(s) = \frac{s+1}{s(s+5)(s+2)(s+4)} = \frac{0.025}{s} + \frac{0.267}{s+5} - \frac{0.375}{s+4} + \frac{0.083}{s+2}$$

$s=-1$ 接近 $s=-2$ 弱化

$G_B(s) = \frac{\omega_n}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n)(Ts+1)}$





若极点 $-p_i$ 远离原点也远离零点，越接近其他极点，相应系数 C_i 越大；

该瞬态分量影响也就不能忽略。两相互接近极点会相互强化

☆ 系统零点、极点共同决定了系统瞬态响应曲线形状

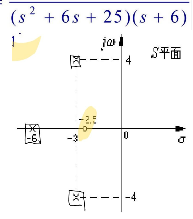
※ 结论：可忽略系数小/远离虚轴分量（影响小，衰减快）⇒ 可用低阶系统近似估计高阶系统性能

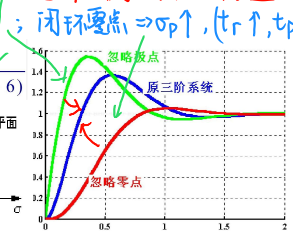
最靠近虚轴，附近无零点，其他极点距虚轴距离较远，称最靠近虚轴极点为主导极点

☆ 其他零极点离主导极点很近时不能忽略

闭环极点 ⇒ $\sigma_p\downarrow$，$t_s\uparrow$；闭环零点 ⇒ $\sigma_p\uparrow$，（$t_r\uparrow$，$t_p\uparrow$）响应速度变化变慢 t_s 基本不变

$$G_B(s) = \frac{60(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6)}$$





☆ 调节时间四倍即可忽略

7-10 倍可完全忽略