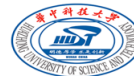


2.3 感知器算法的收敛性 (Guarantee of PLA)



课后证明:

(1): 针对线性可分训练样本集, PLA算法中, 当 $w_0 = 0$, 在对分错样本进行了 T 次修正后, 下式成立: $\frac{w_f^T w_T}{\|w_f\| \|w_T\|} \geq \sqrt{T} \cdot \text{constant}$

(2), 针对线性可分训练样本集, PLA算法中, 假设对分错样本进行了 T 次修正后得到的分类面不再出现错分状况, 定义:

$$R^2 = \max_n \|x_n\|^2, \quad \rho = \min_n y_n \frac{w_f^T}{\|w_f\|} x_n, \quad \text{证明: } T \leq \frac{R^2}{\rho^2}$$

人工智能与自动化学院

1

证明 (1) $w_f^T w_T = w_f^T (w_{T-1} + y_{nct} x_{nct}) = w_f^T w_{T-1} + w_f^T y_{nct} x_{nct}$

$$\text{令 } w_f^T y_{nct} x_{nct} \geq \min y_n w_f^T x_n = M$$

$$\therefore w_f^T w_T \geq w_f^T w_{T-1} + M \geq w_f^T w_{T-1} + 2M \geq \dots \geq TM$$

$$\therefore \|w_T\|^2 = \|w_{T-1} + y_{nct} x_{nct}\|^2 = \|w_{T-1}\|^2 + 2y_{nct} w_{T-1}^T x_{nct} + \|x_{nct}\|^2$$

又: 该样本被分类错误而更新

$$\therefore y_{nct} w_{T-1}^T x_{nct} \leq 0$$

$$\therefore \|w_T\|^2 \leq \|w_{T-1}\|^2 + \|x_{nct}\|^2 \leq \|w_{T-2}\|^2 + 2\|x_{nct}\|^2 \leq T \cdot \|x_{nct}\|^2$$

$$\text{令 } \|x_{nct}\|^2 \leq \max_n \|x_n\|^2 = R^2$$

$$\therefore \|w_T\| \leq \sqrt{T} R$$

$$\text{又: 柯西不等式 } w_f^T \cdot w_T \leq \|w_T\| \|w_f\|$$

$$\therefore \frac{w_f^T w_T}{\|w_f\| \|w_T\|} \geq \sqrt{T} \frac{M}{\|w_f\|} = \sqrt{T} \cdot \text{constant}$$

(2) 由(1)得

$$\frac{w_f^T w_T}{\|w_f\|} \geq T \rho$$

$$\|w_T\|^2 \leq T R^2$$

$$\text{且 } w_f^T \cdot w_T \leq \|w_f\| \|w_T\|$$

$$\therefore \frac{w_f^T w_T}{\|w_f\| \|w_T\|} = \sqrt{T} \frac{\rho}{R} \leq 1$$

$$\therefore T \leq \frac{R^2}{\rho^2}$$