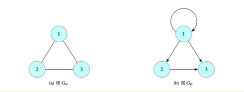
多智能体协同

对比 \ 控制结构	利	弊
集中式系统	强大的中央智能体，快速有效发送命令	鲁棒性不足，高度依赖中心智能体，核心成本高
分布式系统	低成本传感器和处理器，只依赖局部信息，容错性强	更复杂的控制策略，通信带宽和质量限制

特点：自主性、容错性、协作分布性、可扩展性

研究内容：单个智能体动力学模型、通信关系、控制协议

解：图(a)的顶点集V_a和边集E_a分别为$V_a=\{v_1,v_2,v_3\}$, $E_a=\{e_{12},e_{21},e_{23},e_{32},e_{31},e_{13}\}$。图(b)的顶点集$V_b$和边集$E_b$分别为$V_b=\{v_1,v_2,v_3\}$, $E_b=\{e_{21},e_{31},e_{32}\}$。同时图(b)还有一个环$e_{11}$。



(a) 图 G_a　　(b) 图 G_b

- **连通图**

  若无向图每一对不同的顶点之间都有通路，则该图称为连通的。

  对于图中任意两个顶点v_i, v_j，总是存在至少一条路径使两个顶点相连$v_i\to\cdots\to v_j$，则称这两个顶点是连通的。

- **强连通图**

  若当v_i和v_j都是有向图的顶点时，总存在从v_i到v_j和从v_j到v_i的通路，则该有向图是强连通的。

- **弱连通图**

  若在有向图的底图里，任何两个顶点之间都有通路，则该有向图是弱连通的。

  有向图忽略边的方向后得到的无向图称为有向图的底图。

- **树**

  如果一个连通简单图没有回路，则称它是一棵树。

  性质 由树的定义可直接得到以下性质。

  1. 树中任意两点之间至多只有一条边；
  2. 树中边数比节点数少 1；
  3. 树任意去掉一条边，就变为不连通图；
  4. 树任意添加一条边，就会构成一个回路。

- **生成树**

  设 G 是简单图。图 G的生成树是包含 G的所有顶点的树

  如果一幅有向图中存在一个称作根的顶点，使得它到其他所有顶点都有路径连接，则称这幅有向图存在有向生成树，该顶点称为生成树的根

假设有向图$G=(V,E)$从v_j到v_i有边，则它的矩阵在(i,j)位置上有1，邻接矩阵是$A=[a_{ij}]$，则

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若\{v_j\to v_i\}是G的一条边\\ 0, & 否则\end{cases}$$

- 有向图的邻接矩阵不必是对称的

度矩阵

由顶点的度组成的对角矩阵，称为图的度矩阵。

使用邻接矩阵A的元素a_{ij}来表示顶点的度，统一定义顶点的度为

$$d_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$

图的度矩阵D定义为以顶点的度为对角元素的对角矩阵，有

$$D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$$

由顶点的度矩阵和邻接矩阵相减组成的矩阵，称为图的拉普拉斯矩阵。

用一个加权有向图$G=(V,E,A)$来表示多智能体系统，图中的节点集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$表示系统中的智能体，边$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$表示智能体之间存在信息交换，$A=[a_{ij}]$为邻接矩阵，表示智能体之间的通信权重。令$a_{ij}\in\{0,1\}$，邻居节点的集合$N_i=\{v_j\mid v_j\in V,e_{ij}\in E\}$表示所有与智能体$v_i$有信息交换的智能体组成集合。

由图G表示的多智能体系统的拉普拉斯矩阵L定义为

$$L=D-A$$

针对有向图中度矩阵采用入度(或出度) 时，对应的L矩阵具有行和为零(或列和为零)的性质。

引理 3.1

针对一个有 N 个节点的无向图 G，对应的拉普拉斯矩阵 L 满足如下条件：

1. L 含有至少一个 0 特征值，并且 1 是对应的特征向量，即 $L1_n=0$；
2. 如果 G 是连通的，那么 0 是拉氏矩阵 $-L$ 的一个特征值，且 $-L$ 的其余 $N-1$ 个特征值均有负实部。

引理 3.2

针对一个有 N 个节点的有向图 G，对应的拉普拉斯矩阵 L 满足如下条件：

1. L 含有至少一个 0 特征值，并且 1 是对应的特征向量，即 $L1_n=0$；
2. 如果 G 有一个生成树，那么 0 是拉氏矩阵 $-L$ 的一个特征值，且 $-L$ 的其他 $N-1$ 个特征值均有负实部；
3. 如果 G 不含有生成树，那么 L 含有至少两个 0 特征值，且其几何重数不小于 2。

引理 3.3

针对一个$n\times n$ 阶的拉普拉斯矩阵 L，$e^{-Lt},\forall t>0$ 是一个具有正对角元素的随机矩阵。如果 L 有唯一的 0 特征值，且 $\mathrm{Rank}(L)=n-1$，那么它的左特征向量 $w_l=[w_{l1}\ \ w_{l2}\ \ \cdots\ \ w_{ln}]^T\geq 0$，且 $1_n^Tw_l=1$，$L^Tw_l=0$。当时间 $t\to\infty$ 时，$e^{-Lt}\to 1_nw_l^T$。

左特征向量 $A^Ty_i=\lambda_iy_i$　　$t\to\infty$ 时 $e^{-Lt}\to\begin{bmatrix}w_{l1} & w_{l2} & \cdots & w_{ln}\\ w_{l1} & \cdots & \cdots & w_{ln}\\ w_{l1} & \cdots & \cdots & w_{ln}\end{bmatrix}=1_nw_l^T$　且 $1_n^Tw_l=1\ (w_{l1}+\cdots+w_{ln}=1)$，$L^Tw_l=0$

(右)特征向量 $Ax_i=\lambda_ix_i$

离散时间系统一致性

- **问题描述**

  针对离散时间多智能体系统，其单个智能体的动力学方程描述为

$$x_i(k+1)=x_i(k)+\epsilon u_i(k)\tag{3.3}$$

其中k表示时刻，ϵ表示步长

令$x(t)=[x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ \cdots\ \ x_n(t)]^T, u(t)=[u_1(t)\ \ u_2(t)\ \ \cdots\ \ u_n(t)]^T$，n表示系统中智能体的数量。系统的状态空间的表达式为

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\ \vdots\\x_n(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\ \vdots\\x_n(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\epsilon&0&\cdots&0\\0&\epsilon&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\epsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(k)\\u_2(k)\\ \vdots\\u_n(k)\end{bmatrix}$$

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$$

其中$A=1\otimes I_n, B=\epsilon\otimes I_n$。

一阶系统一致性　$\lim_{t\to\infty}\|x_i-x_j\|=0$

一阶动力学模型　$\dot{x}_i(t)=u_i(t)$　$x_i(t)$、$u_i(t)$表智能体i的状态和控制输入

$x(t)=[x_1(t)\cdots x_n(t)]^T$, $u(t)=[u_1(t)\cdots u_n(t)]^T$ 则 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

$u_i(t)=\sum_{j\in N_i}a_{ij}(x_j(t)-x_i(t))\Rightarrow u(t)=-L\cdot x(t)\Rightarrow x(t)=e^{-Lt}x(0)$

领航跟随系统一致性

- **问题描述**

  系统存在一个领航者，领航者的运动不受其他智能体的影响，而其他智能体跟随领航者运动成为跟随者。此类多智能体系统被称为领航跟随系统，跟随者模型可以表示为

$$\dot{x}_i(t)=u_i(t)\tag{3.1}$$

领航者常用下标0表示，其模型为

$$\dot{x}_0(t)=v_0(t)\tag{3.5}$$

其中v_0是领航者的(速度)控制输入

令$x(t)=[x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ \cdots\ \ x_n(t)]^T, u(t)=[u_1(t)\ \ u_2(t)\ \ \cdots\ \ u_n(t)]^T$，n表示系统中智能体的数量。系统的状态空间的表达式为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

其中$A=0\otimes I_n, B=1\otimes I_n$

领航跟随系统一致性

- **领航跟随(定义3)**

  当所有智能体的状态满足以下关系时，证明跟随者实现对领航者的跟踪

$$\lim_{t\to\infty}\|x_i(t)-x_0(t)\|=0, i=1,2,\cdots,n$$

- **牵制矩阵(定义4)**

  领航跟随系统中，定义第i个跟随者与领航者之间的关系为l_{il}。当领航者对跟随者有牵制作用时，$l_{il}=1$。没有牵制作用时，$l_{il}=0$。领航者对跟随者的牵制矩阵L_l为对角矩阵，有

$$L_l=\begin{bmatrix}l_{1l}&&&\\&l_{2l}&&\\&&\ddots&\\&&&l_{nl}\end{bmatrix}$$

领航跟随系统一致性

- **控制器设计**

  针对定义3的控制目标，设计跟随者的控制器为

$$u_i=\sum_{j\in N_i}a_{ij}(x_j-x_x)+l_{il}(x_0-x_i)+v_0\tag{3.6}$$

其中，l_{il}表示领航者对跟随者智能体的牵制，v_0表示领航者的速度。结合拉普拉斯矩阵和牵制矩阵的控制矩阵形式为：

$$\begin{aligned}u&=-Lx+L_l(1x_0-x)+1v_0\\&=-Lx-L_lx+L_l1x_0+1v_0\end{aligned}$$

其根据拉普拉斯矩阵定义可知，L的行和为零，因此有$L1x_0=0$，故上式可写为

$$\begin{aligned}u&=-Lx-L_lx+L_l1x_0+1v_0+L1x_0\\&=-(L+L_l)x+(L+L_l)1x_0+1v_0\\&=(L+L_l)(1x_0-x)+1v_0\end{aligned}\tag{3.7}$$

- **引理1**

  如果图G是连通的，那么对称矩阵$L+L_l$是正定的。

证明　令 λ_i,w_i 分别为 L 的特征值和特征向量。根据引理 3.1 和引理 3.2，有 $\lambda_1=0,w_1=1,\lambda_i>0,i\geq 2$。那么任何非零向量 $z\in\mathbb{R}^n$ 可以用 $z=\sum_{i=1}^{n}c_iw_i$ 来表示，其中 $c_i,i=1,2,\cdots,n$ 是一些常数。此外，由于至少存在一个或多个跟随者与领航者相连，因此有 $L_l\neq 0$。不失一般性，我们假设跟随者 j 与领航者相连，那么有 $b_j>0$，$w_1^TL_lw_1\geq b_j$。因此，在 $c_1\neq 0,c_2=\cdots=c_n=0$ 或 $c_i\neq 0(i\geq 2)$ 的情况下，我们总是有

$$\begin{aligned}z^T(L+L_l)z&=z^TLz+z^TL_lz\\&\geq\sum_{i=2}^{n}\lambda_ic_i^2w_i^Tw_i+z^TL_lz>0\end{aligned}$$