§1 数字滤波类型与指标

滤波：对信号整形、检测等处理过程皆称为滤波

滤波器：把对信号的滤波看作一个系统，该系统的系统函数就称为滤波器

IIR (Infinite Impulse Response) → 系统离散序列无限长 → z^{-1}有理分式

FIR (Finite Impulse Response) → 序列有限长 → z^{-1}多项式

滤波目的

① 为压制输入信号的某些频率成分，从而改变频谱中各频率分量相对比例

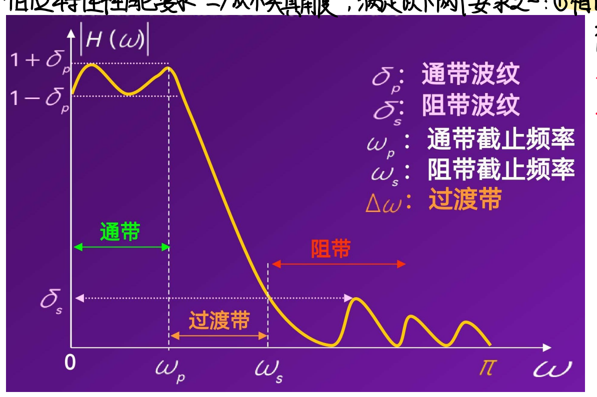
指标 $H(e^{j\omega}) = |H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

其中 $|H(\omega)| = \sqrt{Re^2[H(e^{j\omega})] + Im^2[H(e^{j\omega})]}$，$\varphi(\omega) = \arctan\frac{Im[H(e^{j\omega})]}{Re[H(e^{j\omega})]}$

☆频率变量用数字频率 ω 表示，$\omega = \Omega T = \frac{\Omega}{F_s}$（$\omega$：rad，以 2π 为周期；Ω → rad/s，模拟角频率；T → 抽样时间间隔；F_s → 抽样频率）

频率特性只限于 $|\omega| \le \pi$ 范围

相位特性性能要求 ⇒ 从不失真角度，满足以下两个要求之一：① 相位线性 $\varphi(\omega) = -\tau\omega$ ② 群恒时延特性 $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -\tau(\omega) = constant$（$\tau$ → 时延常数）

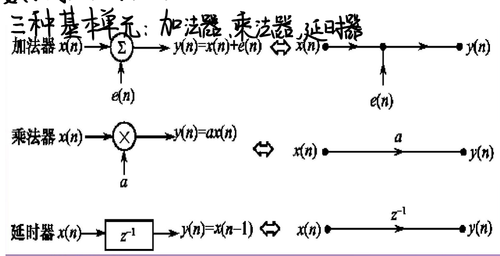


设计数字滤波器：

寻求一个因果稳定的线性时不变离散系统，使其系统函数 $H(z)$ 具有指定频率特性

§2 数字网络信号流图表示

三种基本单元：加法器、乘法器、延时器



AR $y_n = \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k}$ 灰度模型（自回归）；递归滤波

MA $y_n = \sum b_k x_{n-k}$ 滑动平均

ARMA 自回归滑动平均

$\sum a_k y_k = \sum b_k x_k$ ⇒ 一般形式（差分方程）$\overset{z}{\Rightarrow}$ $H(z) = \frac{P_m(z^{-1})}{P_n(z^{-1})}$ $\overset{z^{-1}}{\Rightarrow}$ 差分方程（可双向进行）

↳ $Y(z)A(z) = X(z)B(z)$ ⇒ $Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}X(z)$，$y(n) = h(n) * x(n)$

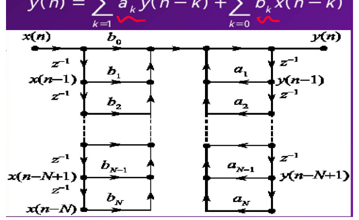
转置定理：将信号流图所有分支方向反转，保持各支路增益不变，将网络输入/输出交换位置，则网络输入输出响应不变。

§3 IIR数字滤波器结构

＊Kalman / Wiener / 粒子 / 小波（运动/状态/测量 同态；$\varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$）

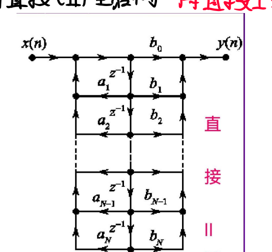
1、IIR的直接（I）型结构

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$



a_k, b_k 控制不直接；高度反馈，误差大

2、IIR的直接（II）型结构 将直接I型中延时单元减少



3、级联型 可通过调整零极点控制，可重排二阶节顺序减少有限字长效应

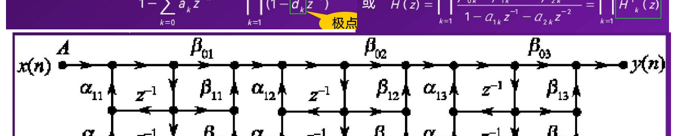
$$\because H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = A\frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}$$

极点

$$H(z) = A\prod_{k=1}^{L}\frac{1 + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}}{1 - \alpha_{1k}z^{-1} - \alpha_{2k}z^{-2}} = A\prod_{k=1}^{L}H_k(z)$$

或

$$H(z) = \prod_{k=1}^{L}\frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}}{1 - \alpha_{1k}z^{-1} - \alpha_{2k}z^{-2}} = \prod_{k=1}^{L}H'_k(z)$$



☆先将系统写为 z^{-1} 有理分式，即 $\frac{\sum_{k=0} \beta_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0} \alpha_k z^{-k}}$

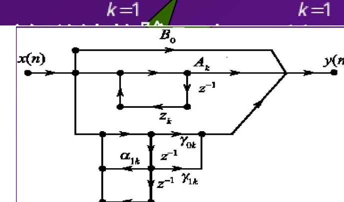
4、并联型

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{L}\frac{A_k}{1 - z_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{P}\frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k}z^{-1}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

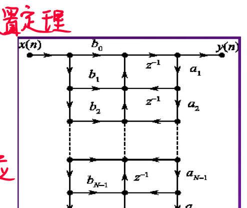
实数极点：误差小，不能单独调整零点位置；共轭极点

$$H(z) = B_0 + \sum_{k=1}^{L} H_{1k}(z) + \sum_{k=1}^{P} H_{2k}(z)$$

一阶　二阶



5、转置型 据转置定理



三个基本问题

① 根据实际要求确定滤波器性能指标；
② 用一个因果稳定的系统函数去逼近这个指标；
③ 用一个有限精度的运算去实现这个传输函数。
问题①、③与实际的要求及实现的硬件条件有关，本章主要讨论问题②，即：系统函数的设计(或逼近)问题。

对IIR滤波器 $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$

⇒ 确定 $H(z)$ 阶数 N 及分子分母多项式系数 a_k, b_k

设计方法：

① 模拟滤波器 $H(s) \xrightarrow{f}$ 数字滤波器（f：脉冲响应不变；双线性不变）（前后频率一致 s 上 $j\Omega$ → z 上单位圆，前后频率响应曲线形状基本一致；仍因果稳定，s 左半平面 → z 上单位圆内）

② 最优化CAD

③ 零极点累试

§4 模拟滤波器设计 巴特沃斯滤波器，切比雪夫滤波器

1、模拟滤波器的频率特性与衰减特性

设模拟滤波器传函 $H(j\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega}$ → $|H(j\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)}$，$\varphi(\Omega) = -\tau\Omega$

用反映功率增益的幅度平方函数/模平方函数表示

滤波器的幅度特性所给定的指标通常是通带/阻带的衰减 $A(\Omega) = -10\lg|H(j\Omega)|^2 = -20\lg|H(j\Omega)|$ (dB)

$H(z) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)} \Rightarrow H(j\Omega) \Rightarrow H(s)$

$\omega_c, \delta_p, A(\Omega)$

$|H(j\Omega)|^2 = H(s)H^*(s) = H(s)H(-s)$

2、归一化与频率变换

在设计模拟滤波器时，为使设计结果具有普遍性以及计算方便，常采用归一化参数。

归一化包含：

① 电路参数归一化：将系统中无源元件的阻抗或运算阻抗分别除以基准电阻(系统的负载电阻值)；

② 频率归一化：将所有的频率都除以基准频率（滤波器的截止频率）。计算实际电路参数时应要将归一化频率乘以截止频率，进行反归一化。

频率变换：从归一化低通原型滤波器到高通、带通、带阻等其它类型的滤波器的变换方法。

3、由模平方函数 $|H(j\Omega)|^2$ 求模拟滤波器的传递函数 $H(s)$

模拟滤波器在不含有源器件时，若为一个因果稳定的、物理可实现的系统，则其系统函数必须为正实函数，即具有以下三特点：

① 是一个具有实系数的关于s的有理函数：$H(s) = N(s)/D(s)$

② 所有极点必须全部分布在s平面的左半平面内；

③ 分子多项式N(s)的阶次必须小于或等于分母多项式D(s)的阶次

由实函数的傅立叶变换的共轭对称性知：

$$H^*(j\Omega) = H(-j\Omega)$$

$$\therefore |H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) = H(j\Omega)H(-j\Omega)$$

$\because j\Omega$ 代表s平面的虚轴，$\therefore$ 解析延拓得：

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega)|_{s=j\Omega} = H(s)H(-s)$$

由给定的模平方函数求所需的传递函数的方法：

① 解析延拓：令 $s = j\Omega$ 代入模平方函数得：$H(s)H(-s)$，并求其零极点。

② 取 $H(s)H(-s)$ 所有左半平面的极点作为 $H(s)$ 的极点

③ 按需要的相位条件(最小相位、混合相位等)取 $H(s)H(-s)$ 一半的零点构成 $H(s)$ 的零点。

4、逼近问题

寻找一个恰当的近似函数来逼近理想特性。

1、巴特沃斯设计 最大平坦滤波器

低通巴特沃斯 $|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{j\Omega}{j\Omega_c})^{2N}}$

$\Omega = \Omega_p, A_p$ → $\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}$（$A_p = 3$dB，$\varepsilon = 1/(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^N$）

$\Omega = \Omega_s, A_s$ → $\lambda = \sqrt{10^{0.1A_s} - 1}$（$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega_s}{\Omega_c})^{2N}} = \frac{1}{1 + \lambda^2} = 10^{-0.1A_s} = \delta_s^2$）

用3dB截止频率 Ω_c 归一化 $\frac{\Omega}{\Omega_c}$ $|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2N}}$

☆设计 ① $A(\Omega)$ ② $\Omega = \Omega_p$ 时，$A(\Omega) \le 3$dB ③ 定 N $|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon(\frac{\Omega}{\Omega_p})^{2N}}$ 关键

ω_p，δ_p 为目的，优化 $\omega_s/\Delta\omega$，δ_s 尽量小

↳ $A(\Omega_p)$，与 Ω_p 直接相关 → N↑ 阻带衰减近似 $6N$ dB/倍频 → 趋近理想矩形特性

① 按给定的通、阻带指标恰当地选择滤波器的阶次N

$$\because \varepsilon^2(\frac{\Omega_s}{\Omega_p})^{2N} = \lambda^2$$

$$\therefore N \ge \frac{\lg(\lambda/\varepsilon)}{\lg(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{1}{2}\frac{\lg[(10^{0.1A_s} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)]}{\lg(\Omega_s/\Omega_p)}$$

若给定的指标 A_p=3dB，即通带边频 Ω_p 即为 Ω_c，ε=1，可求得：

$$N \ge \frac{\lg(\lambda/\varepsilon)}{\lg(\Omega_s/\Omega_c)} = \frac{\lg(\lambda)}{\lg(\Omega_s/\Omega_c)} = \frac{\lg(\sqrt{10^{0.1A_s} - 1})}{\lg(\Omega_s/\Omega_c)}$$

实际计算时，要对上式求得的数值取整加1。

② 从模平方函数求传递函数H(s)

Ⅰ 求得极点

$$\because |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\Omega/j\Omega_c)^{2N}} \quad N = 1, 2, \cdots,$$

令 $s = j\Omega$ 带入上式，得 $1 + (\frac{s}{j\Omega_c})^{2N} = 0$

又 $\because (-1) = e^{j(2k-1)\pi}$

$$\therefore s_k = \Omega_c e^{j(2k+N-1)\pi/2N} \quad k = 1, 2, \cdots, 2N$$

Ⅱ 系统函数的构成

滤波器的极点求出后，可取左半平面上的所有极点构成传递函数。

$$H(s) = A\frac{1}{\prod_{i=1}^{N}(s - s_i)}$$

对于低通滤波器，为了保证在频率零点 Ω 处，$|H(j\Omega)|$ 可取：

$$A = (-1)^N\prod_{i=1}^{N}s_i$$

$$\therefore H(s) = (-1)^N\prod_{i=1}^{N}\frac{s_i}{(s - s_i)}$$

Ⅲ 一般N阶归一化巴特沃思滤波器传递函数 H_a 表示（$s = \frac{s}{\Omega_c}$，$\Omega_c = 1$）

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{N}(s - s_i)} = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{N-1}s^{N-1} + s^N}$$

上式中 s_i 是 Ω_c=1时的极点（分布在单位圆上）；分母一般称为巴特沃思多项式，其系数可通过查附表1求得。

2、切比雪夫低通 切比雪夫函数逼近（等波纹）

Ⅰ：通带等波纹，阻带单调

Ⅱ：通带单调，阻带等波纹

1、基本原理

切比雪夫Ⅰ型的幅度平方函数为：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

切比雪夫Ⅰ型的幅度平方函数为：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

其中：ε 为表示通带波纹 δ_p 大小的参数（<1的正数），越大波纹越大。Ω_c 为截止频率（通带边频），在此它不一定是3dB。Ω/Ω_c 为 Ω 对 Ω_c 的归一化频率。

定义：切比雪夫多项式

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N\arccos x), & |x| \le 1 \\ \cosh(N\arccos hx), & |x| > 1 \end{cases}$$

2、设计公式

通带衰减　通带最大波纹

$$A_p = -10\lg\frac{1}{1+\varepsilon^2} = -20\lg(1 - \delta_p)$$

$$\therefore \varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}$$

阻带衰减

滤波器的阶数 $N \ge \frac{\arccos h[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{-0.1A_s} - 1}]}{\arccos h(\Omega_s/\Omega_c)}$

阻带边界频率

则切比雪夫Ⅰ型滤波器的传递函数为：

$$H(s) = \frac{\Omega_c^N}{\varepsilon 2^{N-1}\prod_{i=1}^{N}(s - s_i\Omega_c)}$$