1、频率响应　系统稳定为前提

指系统输入为正弦函数输入时，系统输出响应的稳态分量

不失一般性，考虑如下线性定常系统：

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

当输入为正弦输入 $r(t)=A\sin\omega t$ 时

有 $R(s)=\mathcal{L}[r(t)]=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{A\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)}$

有输出，$C(s)=G(s)R(s)=\frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}\cdot\frac{A\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)}=\frac{b}{s+j\omega}+\frac{\bar b}{s-j\omega}+\frac{a_1}{s-s_1}+\frac{a_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-s_n}$

※对线性系统外加正弦信号，输出同频正弦信号(相位，幅值变化)

对非线性系统会产生除基波以外谐波

$\therefore c(t)=\mathcal{L}^{-1}[C(s)]=be^{-j\omega t}+\bar b e^{j\omega t}+a_1e^{s_1t}+a_2e^{s_2t}+\cdots+a_ne^{s_nt}$

对稳态系统 $c_{ss}(t)=\lim_{s\to\infty}c(t)=be^{-j\omega t}+\bar b e^{j\omega t}$

其中 $b=G(s)\frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}\cdot(s+j\omega)\Big|_{s=-j\omega}=\frac{G(-j\omega)A}{2j}$，同理 $\bar b=\frac{G(j\omega)A}{2j}$

$\therefore G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$，$\varphi(\omega)=\angle G(j\omega)=\arctan\frac{\mathrm{Im}G(j\omega)}{\mathrm{Re}G(j\omega)}$

$G(-j\omega)=|G(-j\omega)|e^{j\varphi(-\omega)}=|G(j\omega)|e^{j\varphi(-\omega)}$

$\therefore c_{ss}(t)=-|G(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}\cdot\frac{Ae^{-j\omega t}}{2j}+|G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}\frac{Ae^{j\omega t}}{2j}$

$=\boxed{|G(j\omega)|A}\cdot\frac{e^{j(\omega t+\varphi)}-e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2j}$

$=C\sin(\omega t+\varphi)$

$\therefore\begin{cases}C=|G(j\omega)|A & \text{输出稳态分量幅值}\\ \varphi(\omega)=\angle G(j\omega)=\arctan\frac{\mathrm{Im}G(j\omega)}{\mathrm{Re}G(j\omega)} & \text{输出与输入相位差}\end{cases}$ ⇒频率的函数

稳定线性定常系统在正弦激励下稳态输出仍为同频率正弦信号，输出与输入幅值比 $|G(j\omega)|$，相位差为 $\angle G(j\omega)$。

定义 $G(j\omega)=G(s)|_{s=j\omega}$ 为频率特性

频率特性均有，频率响应不一定有

$G(j\omega)=G(s)|_{s=j\omega}$　c_{ss} 与 ω, C, φ 有关　已知

2、图形表示法 $\begin{cases}\text{幅相曲线Nyquist图(极坐标图)}\\ \text{Bode图(对数幅频响应图和相频响应图)}\end{cases}$

Nyquist 图　$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$，$G(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)$

复平面上以 ω 为第三参量，随 $\omega(0\to\infty)$ 变化，$G(j\omega)$ 端点的变化曲线(轨迹)，称为系统的Nyquist图/极坐标图，向量 $G(j\omega)$ 长度等于 $|G(j\omega)|$

$\varphi(\omega)$ ($\angle G(j\omega)$) 等于正实轴方向沿逆时针方向绕原点旋转从正方向转至 $G(j\omega)$ 方向的角度

Nyquist图绘制

将开环传递函数表示为若干典型环节串联形式

$$G(j\omega)H(j\omega)=G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_n(j\omega)$$

其相角/幅值形式的频率特性为：

$$G(j\omega)H(j\omega)=|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|\cdots|G_n(j\omega)|\angle[\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\cdots+\varphi_n(\omega)]$$

$$\begin{cases}|G(j\omega)H(j\omega)|=|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|\cdots|G_n(j\omega)|\\ \varphi(\omega)=\angle[\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\cdots+\varphi_n(\omega)]\end{cases}$$

求起点/终点改写为 $GH(j\omega)=U(\omega)+V(\omega)j$ ⇒实频/虚频特性，更准确

还应补充必要特征点，据 $GH(j\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 变化趋势作图

考虑系统

$$G(s)H(s)=\frac{K(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)\cdots(1+j\omega\tau_m)}{(j\omega)^\nu(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots(1+j\omega T_{n-\nu})}\ (m<n)\quad \begin{matrix}T_i>0\ (i=1\cdots n-\nu)\\ \tau_j>0\ (j=1\cdots m)\end{matrix}$$

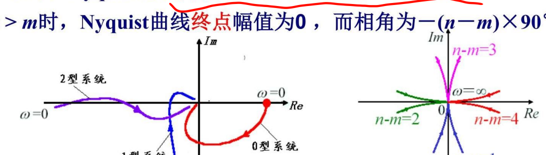
对于零极点均在左半平面时（最小相位系统）

开环没有积分环节，Nyquist曲线起点自实轴上的某一有限远点；

开环如果含有ν个积分环节的系统，Nyquist曲线起点自幅角为($-\nu\times 90°$)的无穷远处。

$n=m$时，Nyquist曲线终点止于实轴上的某一有限远点。

$n>m$时，Nyquist曲线终点幅值为0，而相角为$-(n-m)\times 90°$。



不含一阶或二阶微分环节（不含零点）的系统，相角滞后单调增加。
含有一阶或二阶微分环节的系统（含零点），由于相角非单调变化，Nyquist曲线可能出现凹凸。

Bode图 $\boxed{\text{对数幅频特性}}$ 单位为分贝(dB) 和 $\boxed{\text{相频特性}}$ → 横坐标：同对数幅频特性图；纵坐标：线性分度，相角 $\varphi(\omega)$ 单位为度(°)

→横坐标：以10为底的对数分度表示角频率　$\varphi(\omega)=\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\varphi_3(\omega)$

→纵坐标：线性分度，表示幅值 $|G(j\omega)|$ 对数的20倍，$L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|=20\lg\prod_{i=1}^{n}|G_i(j\omega)|=\sum_{i=1}^{n}20\lg|G_i(j\omega)|=\sum_{i=1}^{n}L_i(\omega)$

* $\omega=0$ 无法在横坐标上表示，一般标注 ω 的自然数值；对数坐标可拓宽表示范围；

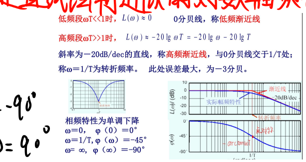
ω 变化十倍，对数坐标上等距，等于一个单位。对数频率特性图中，横坐标等距为十倍频记为decade(dec)

☆ 幅值相乘变相加，简化作图；可利用渐近直线绘制近似的对数幅频特性曲线

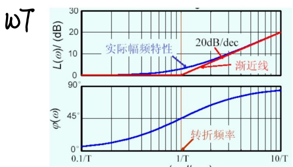
典型环节Bode图：

① 比例环节

关于0分贝线对称 $\begin{cases}\text{互为倒数}\begin{cases}\text{② 积分环节 } G(j\omega)=\frac{1}{j\omega},\ L(\omega)=-20\lg\omega,\ \varphi(\omega)=-90°\\ \text{③ 微分环节 } G(j\omega)=j\omega,\ L(\omega)=20\lg\omega,\ \varphi(\omega)=90°\end{cases}\\ \text{互为倒数}\begin{cases}\text{④ 惯性环节 } G(j\omega)=\frac{1}{j\omega T+1},\ L(\omega)=20\lg\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2},\ \varphi(\omega)=-\arctan\omega T\\ \text{⑤ 比例微分 } G(j\omega)=j\omega T+1,\ L(\omega)=20\lg\frac{\sqrt{1+\omega^2T^2}}{\sqrt{1+\omega^2T^2}},\ \varphi(\omega)=\arctan\omega T\end{cases}\end{cases}$

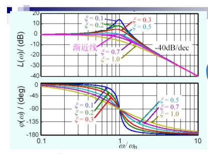


0分贝线与-20dB/dec斜率两条线组合而成

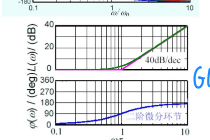


⑥ 二阶环节

$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}$，$\zeta>0$　$\begin{cases}|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2}}\\ \varphi(j\omega)=-\arctan\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}\end{cases}$



$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}$，$\zeta>0$



$G(s)=\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1$，$\zeta>0$

$L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|=-20\lg\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$

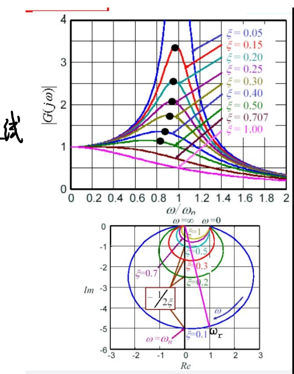
低频段 $\omega\ll\boxed{\omega_n}$ 时，$L(\omega)=0$　低频渐近线　(ω_n：转折频率)

高频段 $\omega\gg\omega_n$ 时　$L(\omega)=-20\lg(\frac{\omega}{\omega_n})^2=-40\lg\omega+40\lg\omega_n$ 斜率为 -40dB/dec的直线，高频渐近线

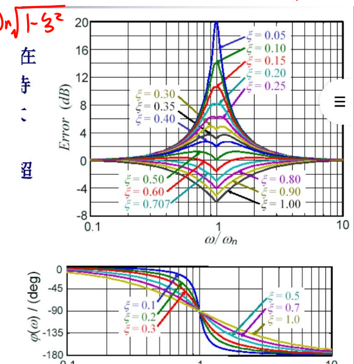
当 $\omega=\omega_n$(转折频率)时，$L(\omega)=-20\lg2\zeta$ ⇒与 ζ 有关，$|G(j\omega)|$ 可大于1，由谐振造成

$L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|=-20\lg\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$ ⇒ $f(\omega)$ 有 $f'(\omega)=4\frac{\omega^3}{\omega_n^4}-\frac{4\omega}{\omega_n^2}+\frac{8\zeta^2\omega}{\omega_n^2}=0$

解得 $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ (谐振频率) 产生谐振条件 $\zeta\le\frac{\sqrt2}{2}=0.707$ ☆其峰值 $M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$



$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$



ζ 较小时，$\omega=\omega_n$ 附近存在谐振，幅频特性渐近线与实际特性存在较大误差，ζ 越小，误差越大。

当 $0.38<\zeta<0.7$ 时，误差不超过 3dB

$\varphi(j\omega)=-\arctan\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$

$\begin{cases}\omega=0, & \varphi(0)=0°\\ \omega=\omega_n, & \varphi(\omega)=-90°\\ \omega=\infty, & \varphi(\omega)=-180°\end{cases}$

ζ 越大，相位变化越平缓

系统开环Bode图的绘制

开环传函有串联形式 $GH(j\omega)=\prod_{i=1}^{n}G_i(j\omega)$

频率特性有幅值相角形式 $GH(j\omega)=|GH(j\omega)|\angle[\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega)]=\prod_{i=1}^{n}|G_i(j\omega)|\angle[\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega)]$

有 $L(\omega)=20\lg|GH(j\omega)|=20\lg\prod_{i=1}^{n}|G_i(j\omega)|=20\sum_{i=1}^{n}\lg|G_i(j\omega)|=\sum_{i=1}^{n}L_i(\omega)$

$\varphi(\omega)=\angle\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega)$

由各环节叠加而成

☆ 相频特性同Nyquist $\begin{cases}\text{起始相位 } -90°\times N\\ \text{终止相位 } -90°\times(n-m)\end{cases}$

对数幅频特性 $\begin{cases}\text{低频段(频率低于最小转折频率的部分) 低频段斜率 由型别决定 } -20\nu\text{ dB/dec}\\ \text{高频段(频率高于最大转折频率的部分) 高频段斜率 由(n-m)决定 } -20(n-m)\text{ dB/dec}\end{cases}$

→ 渐近线每经过一个 $\boxed{\text{转折点}}$ 斜率发生变化 $\begin{cases}\text{惯性} & -20\text{ dB/dec}\\ \text{振荡} & -40\text{ dB/dec}\\ \text{一阶比例} & +20\text{ dB/dec}\\ \text{二阶微分} & +40\text{ dB/dec}\end{cases}$

转折频率为时间常数倒数

尾1多项式

绘制开环系统Bode图的步骤

1、化G(jω)为尾1标准型

2、顺序列出转折频率

3、确定基准线 $\begin{cases}\text{基准点}\quad(\omega=1,\ L(1)=20\lg K)\\ \text{斜率}\quad -20\cdot\nu\ \text{dB/dec}\end{cases}$ (第一转折频率之左的特性及其延长线)

4、叠加作图
- 一阶
  - 惯性环节　-20dB/dec
  - 比例微分　+20dB/dec
- 二阶
  - 振荡环节　-40dB/dec
  - 二阶微分　+40dB/dec

5、修正
- ① 两惯性环节转折频率很接近时
- ② 振荡环节ζ ∉(0.38, 0.8) 时

6、检查
- ① L(ω) 最右端曲线斜率=-20(n-m) dB/dec
- ② 转折点数=(惯性)+(比例微分)+(振荡)+(二阶微分)
- ③ φ(ω) ⇒ -90°(n-m)

最小相位系统根据对数幅频特性，求传递函数的步骤：

- 由低频段斜率确定系统型别－20ν dB/dec；
- 根据转折点确定转折频率和环节数目；
- 根据斜率变化确定环节特点（零点或极点）
- 根据低频线段（或延长线）必须经过(1，20lgK)点，求K