DS证据理论 ⇒不同数据源数据融合

识别框架

- 状态集合X：例：$X = \{a, b, c\}$
  - X的幂集
    - 原集合中所有的子集（包括全集和空集）构成的集族
    - 记为：2^X：$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$
- 基本概率分配(Basic Probability Assignment, BPA)：
  - 给2^X的每一个元素（假设）分配一个概率（测度）
  - 称为mass函数，表示相信的程度(a degree of belief)
  - 满足：$m(\emptyset) = 0,\quad \sum_{A \subseteq X} m(A) = 1$ 使得m(A)>0的A称为**焦元** (Focal elements)

- 例：探测信号灯，可能状态：X: {Green, Yellow, Red}
  - 假设：2^X: {∅,{G},{Y},{R},{G,Y},{Y,R},{G,R},X}

Hypothesis	Mass
Null	0
Green	0.15
Yellow	0.25
Red	0.35
Green or Yellow	0.04
Yellow or Red	0.06
Green or Red	0.05
Any	0.1

- 似真(然)函数(Plausibility function)，常记为Pl()

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) = 1 - Bel(\neg A) \quad \forall A \subseteq X$$

- 所有与假说A存在交集的mass函数之和
- 1减去所有与A不存在交集的mass函数之和
- 似真函数表示客观概率的上限，it "could possibly be the true state of the system" up to that value, because **there is only so much evidence** that contradicts that hypothesis.

交集：与集合A有公共元素

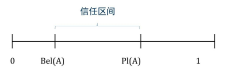
- 例：探测信号灯，可能状态：X: {Green, Yellow, Red}
  - 假设：2^X: {∅,{G},{Y},{R},{G,Y},{Y,R},{G,R},X}

Hypothesis	Mass	Belief	Plausibility
Null	0	0	0
Green	0.15	0.15	0.34 1-B(Y or R)
Yellow	0.25	0.25	0.45 1-B(R or G)
Red	0.35	0.35	0.56 1-B(Y or G)
Green or Yellow	0.04	0.44	0.65 1-B(Red)
Yellow or Red	0.06	0.66	0.85 1-B(Green)
Green or Red	0.05	0.55	0.75 1-B(Yellow)
Any	0.1	1.0	1.0

M(Green) + M(Yellow) + M(Green∪Yellow)

华中科技大学 HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

- 信任区间：对假设A的信任区间[$Bel(A), Pl(A)$]



- 表示对某个假设的确认程度 (一种区间不确定)

Dempster合成规则

$\forall A \subseteq X$ 上两组mass函数m_1, m_2有Dempster合成规则

$$m_1 \oplus m_2(A) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C)$$

K 归一化常数有

$$K = \underbrace{\sum_{B \cap C \neq \emptyset}}_{\text{有交集的两项}} m_1(B) m_2(C) = 1 - \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) m_2(C)$$

假设	张三认为 m_1	李四认为 m_2
Adam作案	0.86	0.02
Ben作案	0.13	0.90
Clark作案	0.01	0.08

- 解：首先计算归一化常数K

$$K = \sum_{B \cap C \neq \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)$$
$$= m_1(Adam) \cdot m_2(Adam) + m_1(Ben) \cdot m_2(Ben) + m_1(Clark) \cdot m_2(Clark)$$
$$= 0.86 \times 0.02 + 0.13 \times 0.90 + 0.01 \times 0.08 = 0.135$$

思考：为什么不考虑如{Adam, Ben}这样的状态?

其次，关于Adam的组合mass函数：

$$m_1 \oplus m_2(\{Adam\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{Adam\}} m_1(B) \cdot m_2(C) = \frac{1}{K} \cdot m_1(\{Adam\}) \cdot m_2(\{Adam\}) = \frac{1}{0.135} \times 0.86 \times 0.02 = 0.1274$$

关于Ben的组合mass函数：

$$m_1 \oplus m_2(\{Ben\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{Ben\}} m_1(B) \cdot m_2(C) = \frac{1}{K} \cdot m_1(\{Ben\}) \cdot m_2(\{Ben\}) = \frac{1}{0.135} \times 0.13 \times 0.90 = 0.8667$$

关于Clark的组合mass函数：

$$m_1 \oplus m_2(\{Clark\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{Clark\}} m_1(B) \cdot m_2(C) = \frac{1}{K} \cdot m_1(\{Clark\}) \cdot m_2(\{Clark\}) = \frac{1}{0.135} \times 0.08 \times 0.01 = 0.0059$$

- 合成后的mass函数m_{12}

假设	综合概率 m_{12}
Adam作案	0.1274
Ben作案	0.8667
Clark作案	0.0059

- 对于这个简单的实例而言，对于Adam, Ben, Clark的组合mass函数，再求信任函数、似然函数：
  - Bel({Adam}) = 0.1274，Pl({Adam})= 0.1274
  - Bel({Ben}) =0.8667，Pl({Ben})= 0.8667
  - Bel({Clark}) = 0.0059，Pl({Clark})= 0.0059

思考：为什么Bel和Pl相同?

n个mass函数Dempster

⇒ $\forall A \subseteq \Theta$，识别框架$\Theta$上有限个mass函数

$$(m_1 \oplus \cdots \oplus m_n)(A) = \frac{1}{K} \sum_{A_1 \cap \cdots \cap A_n = A} m_1(A_1) m_2(A_2) \cdots m_n(A_n)$$

其中 $K = \sum_{A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset} m_1(A_1) \cdots m_n(A_n) = 1 - \sum_{A_1 \cap \cdots \cap A_n = \emptyset} m_1(A_1) \cdots m_n(A_n)$

Zadeh悖论

- 如果证据相互矛盾：

假设	张三认为 m_1	李四认为 m_2	合成m_{12}
Adam作案	0.99	0	0.00
Ben作案	0.01	0.01	1.00
Clark作案	0	0.99	0.00

- 这显然违背人们的直觉！

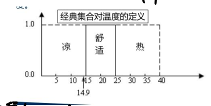
- 增加数据，消解Zadeh悖论：

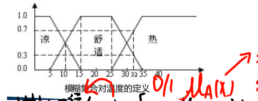
假设	张三认为 m_1	李四认为 m_2	合成m_{12}
{Adam}	0.98	0	0.49
{Ben}	0.01	0.01	0.015
{Clark}	0	0.98	0.49
Θ ={Adam, Ben, Clark}	0.01	0.01	0.005

- 大家可以自行套公式计算一下

模糊推理

经典集合 $\begin{cases} T \\ F \end{cases}$ ⇒ 模糊集合 0~1连续值





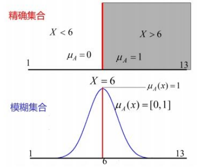
精确集合 $A = \{x \mid x > 6\}$

隶属函数 $\mu_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

模糊集合 $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$

0/1 $\mu_A(x)$ 表示元素x属于fuzzy set A的程度，取值[0,1]，将$\mu_A(x)$为x属于A的隶属度

隶属度 $\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ (0,1) & x\text{属于A的程度} \\ 0 & x \notin A \end{cases}$



fuzzy set A数学描述 $A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$

表示方法

离散

① Zadeh $A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_A(x_2)}{x_2}, \cdots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\}$ $C = \frac{0.8}{上海} + \frac{0.9}{南京} \cdots\cdots$

② 序偶 $A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \cdots, (x_n, \mu_A(x_n))\}$

③ 向量 $A = \{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \cdots, \mu_A(x_n)\}$

连续

④ 论域连续/元素数无限 $A = \int_{x \in U} \frac{\mu_A(x)}{x}$ $A = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^4}$

—— 运算 注意隶属度0缺省

（1）模糊集合的包含关系
- 若 $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$，则 $A \supseteq B$

（2）模糊集合的相等关系
- 若 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$，则 $A = B$

（3）模糊集合的交并补运算

∨表示取大运算
∧表示取小运算

① 交运算(intersection) $A \cap B$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

② 并运算(union) $A \cup B$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

③ 补运算(complement) $\bar{A}$ 或者 A^C

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

（4）模糊集合的代数运算

① 代数积：$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$

② 代数和：$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{AB}(x)$

③ 有界和：$\mu_{A \oplus B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\} = 1 \wedge [\mu_A(x) + \mu_B(x)]$

④ 有界积：

$$\mu_{A \otimes B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\} = 0 \vee [\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1]$$

- 直积(笛卡尔集)
- 设有两个集合A和B，A和B 的直积定义为：

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

- 它是由序偶（a，b）的全体所构成的二维论域上的集合。一般来说，$A \times B \neq B \times A$
  - 即A和B的次序是不可颠倒的。

两个集合的元素间所有可能配对。

经典关系

- 举例：有两组人，一组为男生 $M = \{m_1, m_2, m_3\}$，一组为女生 $W = \{w_1, w_2\}$。则其笛卡尔乘积M×W结果为何？若其中有两对有婚姻关系，即 $R(M, W) = \{(m_1, w_2), (m_3, w_1)\}$，则二元关系如何表示？二元关系矩阵如何表示？

解：(1). $M \times W = \{(m_1, w_1), (m_1, w_2), (m_2, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_1), (m_3, w_2)\}$.

(2). $R(M, W) = \{0, 1, 0, 0, 1, 0\}$.

二元关系矩阵：$\begin{array}{c|cc} & w_1 & w_2 \\ \hline m_1 & 0 & 1 \\ m_2 & 0 & 0 \\ m_3 & 1 & 0 \end{array}$

模糊关系

A、B 为两个模糊集合，模糊关系用直积(cartesian product)表示：

$$R: A \times B \to [0,1]$$

直积常用最小算子运算：

$$\mu_{A \times B}(a, b) = \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}$$

若A、B 为离散模糊集，其隶属函数分别为：

$$\mu_A = [\mu_A(a_1), \mu_A(a_2), \cdots, \mu_A(a_n)], \quad \mu_B = [\mu_B(b_1), \mu_B(b_2), \cdots, \mu_B(b_n)]$$

则其直积运算：

$$\mu_{A \times B}(a, b) = \mu_A^T \circ \mu_B$$

两个模糊向量的直积类似于向量乘积，只是乘法运算用取小运算代替

两个集合的元素间所有可能配对。

论域有限时使用模糊矩阵表示

模糊关系合成

- 设模糊关系 $Q \in X \times Y, R \in Y \times Z$，则模糊关系 $S \in X \times Z$ 称为Q与R的合成。
- S等于模糊矩阵Q与R的合成
- 模糊矩阵的合成常用计算方法：
  - 最大-最小合成法：写出矩阵乘积QR中的每个元素，然后将其中的乘积运算用取小运算代替，求和用最大运算代替
  - 最大-代数积合成法：写出矩阵乘积QR中的每个元素，然后将其中的求和运算用取大运算代替，乘积运算不变

①代数积：$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$

- 例：$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$，$Z = \{z_1, z_2\}$

$Q \in X \times Y$，$R \in Y \times Z$，$S \in X \times Z$，求S。

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$S = Q \circ R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

最大-最小合成法：
其中的乘积运算用取小运算代替，求和用最大运算代替

$$= \begin{bmatrix} (0.5 \wedge 0.2) \vee (0.6 \wedge 0.8) \vee (0.3 \wedge 0.5) & (0.5 \wedge 1) \vee (0.6 \wedge 0.4) \vee (0.3 \wedge 0.3) \\ (0.7 \wedge 0.2) \vee (0.4 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.5) & (0.7 \wedge 1) \vee (0.4 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.3) \\ (0 \wedge 0.2) \vee (0.8 \wedge 0.8) \vee (0 \wedge 0.5) & (0 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.4) \vee (0 \wedge 0.3) \\ (1 \wedge 0.2) \vee (0.2 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.5) & (1 \wedge 1) \vee (0.2 \wedge 0.4) \vee (0.9 \wedge 0.3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

模糊决策

- 模糊决策（模糊判决/解模糊/清晰化）：由模糊推理得到的结论或者操作是一个模糊向量，需要转化为确定值
  - 最大隶属度法：取隶属度最大的量作为推理结果
  - 加权平均判决法：将各隶属度作为权值进行加权平均
  - 中位数法：论域上把隶属函数曲线与横坐标转成的面积平分为两部分的元素称为模糊集的中位数

- 例：设有模糊控制规则：“如果温度低，则将风门开大”。
  设温度和风门开度的论域为{1，2，3，4，5}。
  “温度低”和“风门大”的模糊量：
  “温度低”= 1/1+0.6/2+0.3/3+0.0/4+0/5
  “风门大” = 0/1+0.0/2+0.3/3+0.6/4+1/5
  已知事实“温度较低”，可以表示为
  “温度较低” = 0.8/1+1/2+0.6/3+0.3/4+0/5
  试用模糊推理确定风门开度。

解：（1）确定模糊关系R

$$R = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.6 \\ 0.3 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \circ [0.0 \quad 0.0 \quad 0.3 \quad 0.6 \quad 1.0] = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

（2）模糊推理

$$B' = A' \circ R$$
$$= [0.8 \quad 1.0 \quad 0.6 \quad 0.3 \quad 0.0] \circ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$
$$= [0.0 \quad 0.0 \quad 0.3 \quad 0.6 \quad 0.8]$$

（3）模糊决策

- 用最大隶属度法：风门开度为5
- 用加权平均法：(0.3*3+0.6*4+0.8*5)/(0.3+0.6+0.8)=4.29 风门开度为4