序列的傅立叶变换定义及性质

1.序列傅立叶变换的定义

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\boxed{e^{-j\omega n}}$$ 周期性 变换核函数

为序列 $x(n)$ 的傅立叶变换(FT)

FT成立的充要条件为序列 $x(n)$ 绝对可和,满足下式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$$

FT反变换定义为

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

2.性质

① 周期性

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi M)n}$$

*$X(e^{j\omega})$ 为频率 ω 周期函数,周期 2π,故一般只分析 $\pm\pi$ / $0\sim2\pi$ 之间的FT

② 线性:设 $X_1(e^{j\omega}) = FT[x_1(n)]$, $X_2(e^{j\omega}) = FT[x_2(n)]$,则

$$FT[ax_1(n)+bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$$

a,b为常数

③ 时移与频移:设 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$,则

$$FT[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

$$FT[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

④ 时域卷积

$$y(n)=x(n)*h(n) \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})$$

⑤ 频域卷积

$$y(n)=x(n)\cdot h(n) \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

⑥ Parseval定理

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\omega$$

离散时间系统的频率响应

系统函数 ⇒ 单位脉冲响应的傅立叶变换

$$H(e^{j\omega}) = F[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

称为系统的频率响应,又称系统的传输函数

$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} & \text{频率响应} \\ |H(e^{j\omega})| & \text{幅度响应} \\ \theta(\omega) = \arg\{H(e^{j\omega})\} & \text{相位响应} \\ g(\omega) = 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| & \text{增益函数} \\ a(\omega) = -g(\omega) & \text{衰减函数/损失函数} \end{cases}$$

※ 频率响应 $H(e^{j\omega})$ 与冲激响应 $h(n)$ 构成一对傅里叶变换

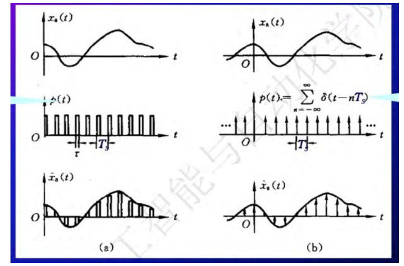
周期2π与ω相关的连续函数,若h(n)为实数,则幅度响应在 $0<<\omega<<2\pi$ 内偶对称

相位响应奇对称

$$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$h(n) = \mathcal{F}^{-1}[H(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

信号取样

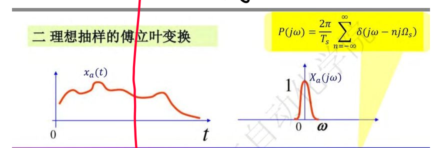


理想抽样 $\tau\to0$

冲激函数序列 $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_s t} = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_s t}$

理想抽样输出,$\hat{x}_a(t) = x_a(t)\cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT_s)\delta(t-nT_s)$

求理想抽样的频谱 $\hat{X}_a(j\omega)$



频谱延拓:

$$X_a(j\omega) = FT[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\hat{X}_a(j\omega) = FT[\hat{x}_a(t)] = FT[x_a(t)\cdot p(t)] = \frac{1}{2\pi}FT[x_a(t)]*FT[p(t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}X_a(j\omega)*P(j\omega) \qquad \frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(j\omega-nj\omega_s) \qquad 2\pi f_s=\frac{2\pi}{T_s} \text{ 基频率}$$

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[X_a(j\omega)*\delta(j\omega-j\omega_s n)] \qquad x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(p)\delta(t-p)=x(t)*\delta(t)$$

$$= \boxed{\frac{1}{T_s}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_a(j\omega-j\omega_s n)$$

※ $\hat{X}_a(j\omega)$ 是 $X_a(j\omega)$ 的周期延拓,$T=\omega_s$,且每个信号强度均乘 $\frac{1}{T_s}$

* Shannon-Nyquist采样定理:在信号 x_a 频带受限情况下,取样频率应大于等于信号最高频率的两倍 $\omega_s\geq2\omega_0$,$\frac{\omega_s}{2}$ 称为折叠频率,$2\omega_0$ 称为Nyquist频率