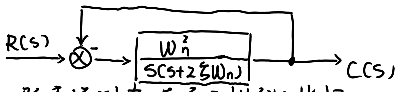


二阶系统动态响应及性能指标

$G_K(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$

闭环传递函数为

$G_B(s)=K\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

☆ ξ 和 ω_n 决定二阶系统动态特性的两个非常重要 → 阻尼比 → 无阻尼自然振荡频率

$r(t)=1(t)$ ($R(s)=\frac{1}{s}$) 输出响应拉氏变换为：

$C(s)=\frac{\omega_n^2}{\boxed{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}}\frac{1}{s}$

※ 据二阶代数方程 $s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0$ 求极点

有两特征方程根：$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$（闭环极点）

$\xi>1$，$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$ 两不等实根

$\xi=1$，$s_{1,2}=-\xi\omega_n$ 两相等实根

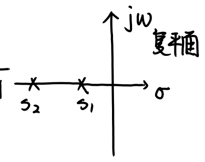
$0<\xi<1$，$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\,j$ 一对共轭复数根

$=-\xi\omega_n\pm\boxed{\omega_d}j$ 其中 $\omega_d=\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$ 称为有阻尼振荡频率

$\xi=0$，$s_{1,2}=\pm\omega_n j$ 一对共轭虚数根

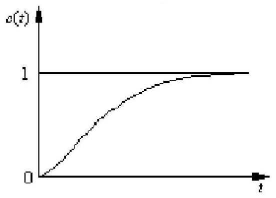
二阶系统阶跃响应 $C(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\boxed{\frac{1}{s}}$

① $\xi>1$，过阻尼情况，系统有两个不相等实数根 $s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$



$\therefore C(s)=\frac{1}{s}-\frac{[2\sqrt{\xi^2-1}(\xi-\sqrt{\xi^2-1})]^{-1}}{s-s_1}+\frac{[2\sqrt{\xi^2-1}(\xi+\sqrt{\xi^2-1})]^{-1}}{s-s_2}$

$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{e^{s_1t}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}-\frac{e^{s_2t}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}\right)$



系统响应曲线与一阶系统类似 ⇒ 特征：无超调

$\frac{dc(t)}{dt}=-\frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{s_1e^{s_1t}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}-\frac{s_2e^{s_2t}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}\right)$

$=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}(e^{s_1t}-e^{s_2t})$，$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0}=0$

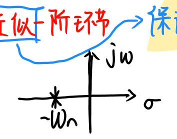
稳态 $c(\infty)=1$ ⇒ $e(\infty)=0$

※ $\xi\gg1$ ⇒ $(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n\approx0$，$s_1=-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n$ ⇒ $|\xi-\sqrt{\xi^2-1}|\ll|\xi+\sqrt{\xi^2-1}|$，$s_1>s_2$ ⇒ $\frac{e^{s_2t}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}\ll\frac{e^{s_1t}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}$

靠近虚轴 衰减慢，系数大 ⇒ 主导作用；离轴远动态分量作用小，衰减快，可忽略

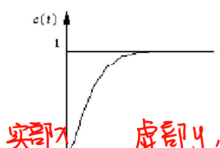
☆ 一般精度，两极点距离相差 7~10 倍或当 $\xi\geq1.5$ 时系统可近似一阶环节 → 保证稳态值不变的前提下忽略 s_2 作用

② $\xi=1$，临界阻尼情况，系统有两个相等实数特征根 $s_{1,2}=-\omega_n$



$\therefore C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}=\frac{1}{s}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}-\frac{1}{s+\omega_n}$

$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t)=1-e^{-\omega_nt}(1+\omega_nt)$



特征：稳态误差为 0；无超调也无振荡；ω_n 一定的情况下，其动态过程比过阻尼快

③ $0<\xi<1$ 称欠阻尼情况，系统有一对共轭复数根 $s_{1,2}=\boxed{-\xi\omega_n}\pm j\boxed{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

实部 x　虚部 y，记为 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ 有阻尼频率

记 $e(t)=c(t)-c(\infty)$，欠阻尼时 $\int_0^\infty|e|$ 相对最小 ⇒ 性能最佳（部分系统不允许振荡，考虑过/临界阻尼）

$\therefore C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}$

$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t)=1-e^{-\xi\omega_nt}\cos\omega_dt-\frac{\xi\omega_n}{\omega_d}e^{-\xi\omega_nt}\sin\omega_dt$

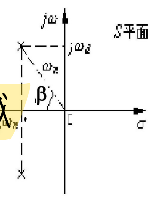
$=1-e^{-\xi\omega_nt}\left[\cos\omega_dt-\frac{\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_dt\right]$

$=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_nt}\left[\sqrt{1-\xi^2}\cos\omega_dt+\xi\sin\omega_dt\right]$

代入 $\xi=\cos\beta$，$\sqrt{1-\xi^2}=\sin\beta$ 有　初相位由阻尼比决定

$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\boxed{\xi\omega_nt}}\sin(\omega_dt+\boxed{\beta})$

实部　阻尼振荡频率



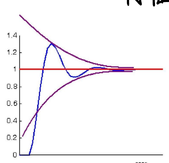
特征：为一衰减的振荡过程；

其振荡频率为有阻尼振荡频率 ω_d；

其幅值按指数曲线（响应曲线的包络线）衰减

两者均由参数 ξ 和 ω_n 决定

$\lim_{t\to\infty}e(t)=0$



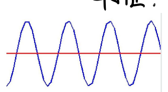
④ $\xi=0$ 称为无阻尼情况，系统有一对共轭虚根，$s_{1,2}=\pm j\omega_n$

$\therefore C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$

$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t)=1-\cos\omega_nt$

特征：一等幅振荡过程，振动频率为无阻尼自然振荡频率 ω_n

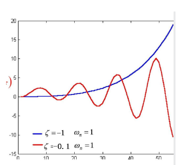
没有稳态，称为临界稳定



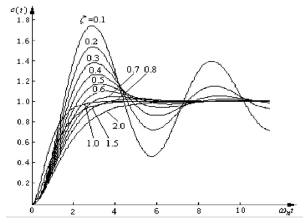
⑤ $\xi<0$ 系统不稳定

$-1<\xi<0$ 时，$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_nt}\sin(\omega_dt+\beta)$ 系统振荡发散

$\xi\leq-1$ 时，$c(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}}\left(\frac{e^{s_1t}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}-\frac{e^{s_2t}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}\right)$ 系统指数发散



稳定情况下，不同 ξ 值下的二阶系统单位阶跃响应曲线族如下



特定 ξ 值下，欠阻尼系统比临界阻尼系统更快达到稳态值，所以一般系统大多设计成欠阻尼系统

※ 欠阻尼二阶系统的性能指标

$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_nt}\sin(\omega_dt+\beta)$，$\xi=\cos\beta$ ⇒ 根 $-\xi\omega_n\pm\boxed{\omega_d}j$　$\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

① 上升时间 t_r（0% 到 100% $c(\infty)$）

令 $c(t_r)=c(\infty)$ 即 $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_nt}\boxed{\sin(\omega_dt+\beta)}=0$

$\sin(\omega_dt+\beta)=0$ ⇒ $\omega_dt+\beta=n\pi$ $\xRightarrow{n=1}$ $\omega_dt+\beta=\pi$

解得 $t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=\frac{\pi-\boxed{\beta}}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ ⇒ 与根实部正比 $\beta=\arccos\xi$

根虚部

结论：t_r 与有阻尼振荡 ω_d 成反比　ω_d 越大越好

ξ 一定，ω_n 越大，t_r 越小

ω_n 为固定值，ξ 越小，t_r 也越小

② 峰值时间 t_p

对 $c(t)$ 求一阶导数，令其为零，可得到

$\omega_d\cos(\omega_dt+\beta)-\xi\omega_n\sin(\omega_dt+\beta)=0$

$\tan(\omega_dt+\beta)=\frac{\omega_d}{\xi\omega_n}=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}=\tan\beta$　($\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$)

$\omega_dt=n\pi$

到第一个峰值 $n=1$，$\omega_dt_p=\pi$

$\therefore t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

结论：峰值时间 t_p 与有阻尼振荡频率 ω_d 成反比

ω_n 一定，ξ 越小，t_p 越小；ξ 一定，ω_n 越大，t_p 越小

③ 最大超调量 σ_p

$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_nt}\sin(\omega_dt+\beta)$

代入 $t=t_p$ 有

$c(t_p)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n\frac{\pi}{\omega_d}}\sin(\omega_d\frac{\pi}{\omega_d}+\beta)$

$=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}(-\sin\beta)$

$=1+\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\cdot\sqrt{1-\xi^2}=1+e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

$\therefore\sigma_p\%=\frac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)}=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times100\%$

结论：最大超调量完全由 ξ 决定 ⇒ ξ 越小，超调量越大

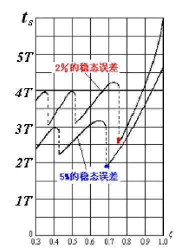
$\xi=0$ 时，$\sigma_p\%=100\%$；$\xi=1$ 时，$\sigma_p\%=0$

$\sigma_p=5\%$ 时，$\xi=0.69$；$\sigma_p=2\%$ 时，$\xi=0.78$

④ 调节时间 t_s，由定义得

$|c(t)-c(\infty)|\leq\Delta\cdot c(\infty)$，$t\geq t_s$

$\left|\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_nt}\sin(\omega_dt+\beta)\right|\leq\Delta$，$t\geq t_s$



衰减曲线的包络线，上式可写为

$\left|\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_nt}\right|\leq\Delta$，$t\geq t_s$

两边取对数

$t_s\geq\frac{1}{\xi\omega_n}\ln\frac{1}{\Delta\sqrt{1-\xi^2}}$

取 $\Delta=0.02$ 时，$t_s\geq\frac{3.912+\ln\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}}{\boxed{\xi\omega_n}}\approx\frac{4}{\xi\omega_n}=4T$，$\boxed{0<\xi<0.78}$　$\xi>0.78$ 后 $\sigma_p\%<2\%$ ⇒ 误差极大

取 $\Delta=0.05$ 时，$t_s\geq\frac{3+\ln\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}}{\boxed{\xi\omega_n}}\approx\frac{3}{\xi\omega_n}=3T$，$\boxed{0<\xi\leq0.69}$　$\xi>0.69$ 后 $\sigma_p\%<5\%$ ⇒ 误差极大

$T=\frac{1}{\xi\omega_n}$　适用范围

实部靠近虚轴（$|\xi\omega_n|$ 小），t_s 大

结论：t_s 与 $\xi\omega_n$ 近似成反比，$\xi\omega_n$ 越大，t_s 越小；

ω_n 一定时，t_s 与 ξ 成反比，与 t_p、t_r 和 ξ 的关系正好相反

☆ 选取 ξ、ω_n 满足系统设计要求，总结几点要求：

① 最大超调量 σ_p 和振荡次数 N 只由 ξ 决定，$\xi\downarrow$，$\sigma_p\uparrow$

② $\omega_n\uparrow$，t_r，t_p，$t_s\downarrow$

③ ω_n 一定时 $\xi\downarrow$，t_r，$t_p\downarrow$，$t_s\uparrow$

一般取 $\xi=0.7\sim0.8$（0.707）有好的综合性能