离散时间系统数学模型 ⇒ 差分方程/冲激传递函数

一、Difference Equation 差分方程

1、线性时不变差分方程

差分定义：$e(kT)=e(k)$

前向差分
- 一阶 $\Delta e(k)=e(k+1)-e(k)$ $\qquad \lim\limits_{T\to 0}\frac{\Delta e(k)}{T}=\frac{de(t)}{dt}=\dot e(t)$
- 二阶 $\Delta^2 e(k)=\Delta e(k+1)-\Delta e(k)=e(k)-2e(k-1)+e(k-2)$
- …
- n阶 $\Delta^n e(k)=\Delta^{n-1}e(k+1)-\Delta^{n-1}e(k)$

后向差分
- 一阶 $\nabla e(k)=e(k)-e(k-1)$ $\qquad \dot e(t)$
- 二阶 $\nabla^2 e(k)=\nabla e(k)-\nabla e(k-1)=e(k)-2e(k-1)+e(k-2)$ $\qquad \ddot e(t)$
- …
- n阶 $\nabla^n e(k)=\nabla^{n-1}e(k)-\nabla^{n-1}e(k-1)$

2、差分方程

n阶线性时不变系统前向差分方程

$$c(k+n)+a_1c(k+n-1)+\cdots+a_{n-1}c(k+1)+a_nc(k)$$
$$=b_0r(k+m)+b_1r(k+m-1)+\cdots+b_{m-1}c(k+1)+b_mr(k)$$

n阶线性时不变系统后向差分方程

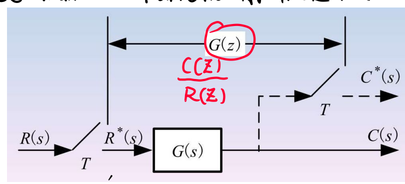
$$c(k)+a_1c(k-1)+\cdots+a_{n-1}c(k-n+1)+a_nc(k-n)$$
$$=b_0r(k-n+m)+b_1r(k-n+m-1)+\cdots+b_{m-1}r(k-n+1)+b_mr(k-n)$$

3、差分方程解法

① 迭代法，这k为一系列值递推求解

② Z变换法 — 1实位移性质 $\begin{cases} Z[e(t-nT)]=z^{-n}E(z) \\ Z[e(t+nT)]=z^{n}\left[E(z)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}e(kT)z^{-k}\right]\end{cases}$

二、Impulse Transfer Function 脉冲传递函数



零初值下输出在z域上与输入在z域上的比值即为脉冲传函，

$$r^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}r(nT)\delta(t-nT)=r(0)\delta(t)+r(T)\delta(t-T)+\cdots+r(nT)\delta(t-nT)$$

$$c(t)=r(0)g(t)+r(T)g(t-T)+\cdots+r(nT)g(t-nT)$$

$$c(kT)=r(0)g(kT)+r(T)g[(k-1)T]+\cdots+r(nT)g[(k-n)T]=\sum_{k=0}^{\infty}r(nT)g[(k-n)T]$$

$$C(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c(kT)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}r(nT)g[(k-n)T]z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}r(nT)z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}g[(k-n)T]z^{-(k-n)}$$

☆ $G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\sum\limits_{k=n}^{\infty}g[(k-n)T]z^{-(k-n)}=\sum\limits_{j=0}^{\infty}g(jT)z^{-j}=Z[g(t)]=Z[G(s)]$

单位冲激响应序列Z变换

1、性质

① G(z)是复数z的复函数

② G(z)仅取决于系统结构与参数

③ G(z)与差分方程之间存在联系

④ G(z)与$Z[k^*(t)]$相等

⑤ G(z)的零极点在z平面内

2、局限

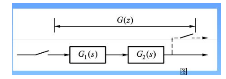
① 无法反映零初值情况下系统响应的全部信息、

② 仅用于SISO离散系统

③ 仅用于线性时不变差分方程

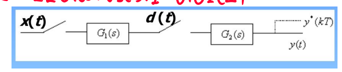
三、开环系统冲激传函化简

1、两部分间无采样环节



$G(s)=G_1(s)G_2(s)$；$G(z)=Z[G_1(s)G_2(s)]=G_1G_2(z)$

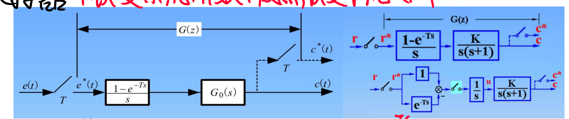
2、两部分间存在采样环节



$$\begin{cases} D(z)=G_1(z)X(z) \\ Y(z)=G_2(z)D(z)=G_1(z)G_2(z)X(z)\end{cases}$$

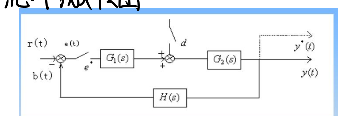
$\Rightarrow G(z)=G_1(z)G_2(z)$

3、零阶保持器 不改变系统阶数、极点，改变系统零点，



$$C(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_0(s)\right]R(z)=Z\left[\frac{1}{s}G_0(s)-\frac{e^{-Ts}}{s}G_0(s)\right]R(z)$$
$$=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_0(s)}{s}\right]R(z)$$
$$G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_0(s)}{s}\right]$$

四、闭环系统冲激传函



1、输入输出传函 $d=0$

$Y(z)=G_1G_2(z)E(z)$

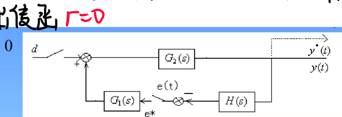
$$\left.\begin{aligned} e(t)=r(t)-b(t)\Rightarrow E(z)=R(z)-B(z) \\ B(z)=G_1G_2H(z)E(z)\end{aligned}\right\}\Rightarrow E(z)=\frac{R(z)}{1+G_1G_2H(z)}$$

误差脉冲传函 $G_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G_1G_2H(z)}$

$\therefore Y(z)=G_1G_2(z)\frac{R(z)}{1+G_1G_2H(z)}\Rightarrow \Phi(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_1G_2(z)}{1+G_1G_2H(z)}$

2、扰动输出传函 $r=0$

$r(t)=0$



$$Y(z)=G_2(z)D(z)+G_1G_2(z)E(z)$$
$$E(z)=-[G_2H(z)D(z)+G_1G_2H(z)E(z)]$$
$$\Rightarrow E(z)=-\frac{G_2H(z)}{1+G_1G_2H(z)}D(z)$$
$$\therefore Y(z)=G_2(z)D(z)-\frac{G_1G_2(z)G_2H(z)}{1+G_1G_2H(z)}D(z)$$
$$\Rightarrow \Phi_d(z)=\frac{Y(z)}{D(z)}=G_2(z)-\frac{G_1G_2(z)G_2H(z)}{1+G_1G_2H(z)}$$

E(z) :

D(z) passing through $G_2(z)$;

Loop of E(z)itself。

✳ e(t)后无采样环节

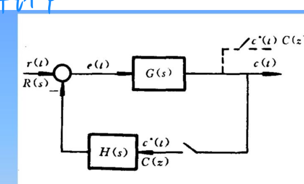


图 7-35 闭环离散系统

$$C(s)=G(s)R(s)-G(s)H(s)C^*(s)$$

$$C(z)=GR(z)-GH(z)C(z)\qquad\Rightarrow C(z)=\frac{GR(z)}{1+GH(z)}$$