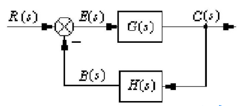
反馈控制系统稳态误差（在系统稳定的情况下才有意义）

→系统精度

一、稳态误差的计算

1、误差定义：为参考输入信号和反馈信号的差值 $e(t)=r(t)-b(t)$



误差拉氏变换 $E(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$

2、稳态误差定义

$e_{ss}=e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}[r(t)-b(t)]$

※对稳定系统，才有稳态误差的概念，这种定义为缺省定义；对于其它定义的稳态误差，必须首先给出误差定义式

3、稳态误差计算（终值定理）⇒ 条件：$sE(s)$ 的虚轴及右半平面无极点（原点除外）稳定

$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}s\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$

※当输入为正弦函数时，不能使用终值定理求稳态误差；正弦函数拉氏变换 $\mathcal{L}[A\sin\omega t]=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$ 在虚轴上一对极点

不能用终值定理求正弦输入的稳态误差

※系统的稳态误差只取决于系统的结构参数和输入信号

当输入信号形式确定后，系统稳态误差将只取决于系统结构和参数

⊗对稳态误差有影响的因素就是开环传递函数中的积分环节数

4、控制系统的型别

若控制系统的开环传递函数为：

$G_K(s)=G(s)H(s)=\frac{K(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ms+1)}{s^N(T_as+1)(T_bs+1)\cdots(T_ns+1)}$

系统有N个积分环节串联，表示在s=0处有N重极点，称系统为N型系统。

N=0，1，2，…时，分别称为0型(一阶)、1型(二阶)、2型(三阶)系统

⊗应用于单位反馈（全反馈到输入端）/能稳定

参考输入引起的稳态误差

1.单位阶跃输入 $R(s)=\frac{1}{s}$

$e_{ss}=\lim_{s\to0}s\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)=\lim_{s\to0}\frac{1}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{1+\lim_{s\to0}G(s)H(s)}$

令 $K_p=\lim_{s\to0}G(s)H(s)$（位置误差系数）⇒ 此时 $e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$

⊗位置误差系数针对阶跃输入定义而成 → 开环放大系数

对0型系统(N=0)，$K_p=\lim_{s\to0}\frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{(1+T_as)(1+T_bs)\cdots}=K$ ⇒ $e_{ss}=\frac{1}{1+K}$

这种没有积分环节的0型系统，阶跃输入稳态误差为一固定值，K↑，e_{ss}↓，称为有差系统

对1型及以上系统(N≥1)，$K_p=\lim_{s\to0}\frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s^N(1+T_as)(1+T_bs)\cdots}=\infty$ ⇒ $e_{ss}=0$

对阶跃输入而言，1型系统及以上系统没有稳态误差

0型系统可通过增大K值减小稳态误差或增加积分环节数目消除稳态误差

2.单位斜坡输入

$e_{ss}=\lim_{s\to0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to0}\frac{1}{sG(s)H(s)}$

令 $K_v=\lim_{s\to0}sG(s)H(s)$（速度误差系数）⇒ 此时 $e_{ss}=\frac{1}{K_v}$

⊗速度误差系数针对斜坡输入定义而成

对0型系统(N=0)，$K_v=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{(1+T_as)(1+T_bs)\cdots}=0$ ⇒ $e_{ss}=\infty$

对于0型系统，输出不能跟随斜坡输入，最后稳态误差为∞

对1型系统(N=1)，$K_v=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s(1+T_as)(1+T_bs)\cdots}=K$ ⇒ $e_{ss}=\frac{1}{K}$

→开环放大系数

对于1型系统，反馈信号能跟随斜坡输入，但总有一定误差；其稳态误差与K成反比

对2型及以上系统(N≥2)，$K_v=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s^N(1+T_as)(1+T_bs)\cdots}=\infty$ ⇒ $e_{ss}=0$

对斜坡输入而言，2型及以上系统没有稳态误差；

要使系统稳态误差一定成为0，必需N≥1，必须有1个及以上积分环节数

3.单位抛物线输入

$e_{ss}=\lim_{s\to0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{s^3}=\lim_{s\to0}\frac{1}{s^2G(s)H(s)}$

令 $K_a=\lim_{s\to0}s^2G(s)H(s)$（加速度误差系数）⇒ 此时 $e_{ss}=\frac{1}{K_a}$

⊗加速度误差系数针对抛物线输入定义而成

对0型/1型系统(N=0,1)，$K_a=\lim_{s\to0}s^2\frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s^N(1+T_as)(1+T_bs)\cdots}=0$ ⇒ $e_{ss}=\infty$

对0/1型系统，输出不能跟随抛物线输入，稳态误差为∞

对2型系统(N=2)，$K_a=\lim_{s\to0}s^2\frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s^2(1+T_as)(1+T_bs)\cdots}=K$ ⇒ $e_{ss}=\frac{1}{K}$

2型系统，输出能跟随抛物线输入，总有一定误差 $\frac{1}{K}$

对3型及以上的系统(N≥3) $K_a=\lim_{s\to0}s^2\frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s^N(1+T_as)(1+T_bs)\cdots}=\infty$ ⇒ $e_{ss}=0$

对抛物线输入而言，3型系统或3型以上系统没有稳态误差；

要使系统稳态误差一定为0，必需N>0，即必须有2个及以上的积分环节数

	单位阶跃输入 $r(t)=1$	单位斜坡输入 $r(t)=t$	单位抛物线输入 $r(t)=0.5t^2$
	位置误差系数 $K_p=\lim_{s\to0}G(s)H(s)$	速度误差系数 $K_v=\lim_{s\to0}sG(s)H(s)$	加速度误差系数 $K_a=\lim_{s\to0}s^2G(s)H(s)$
0型系统	$e_{ss}=\frac{1}{1+K}$	$e_{ss}=\infty$	$e_{ss}=\infty$
1型系统	$e_{ss}=0$	$e_{ss}=\frac{1}{K}$	$e_{ss}=\infty$
2型系统	$e_{ss}=0$	$e_{ss}=0$	$e_{ss}=\frac{1}{K}$

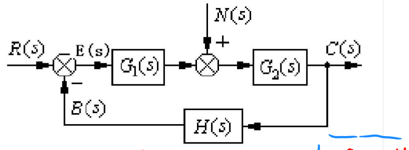
→有限稳态误差

扰动引起的稳态误差

⇒不仅与积分环节有关，还与积分环节位置有关

现分析它对输出/稳态误差的影响

设 $G_1(s)=K$，$G_2(s)=\frac{1}{Js}$，$H(s)=1$，分别计算当 $r(t)/n(t)$ 为阶跃输入时的系统稳态误差



$\frac{E(s)}{N(s)}$

解：$G_K(s)=G_1(s)G_2(s)H(s)=\frac{K}{Js}$

⇒Ⅰ型系统，$r(t)=1(t)$ 时稳态误差为0 ⇒ $e_{ssr}=0$

当 $n(t)=1(t)$ 时，$G_{en}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{-1}{Js+K}$

⇒ $e_{ssn}=\lim_{s\to0}s\frac{-1}{Js+K}\cdot\frac{1}{s}=-\frac{1}{K}$ 不为零

※若 $G_1(s)=\frac{1}{Js}$，$G_2(s)=K$，$H(s)=1$，再进行计算

$G_K(s)=G_1(s)G_2(s)H(s)=\frac{K}{Js}$

⇒Ⅰ型系统，$r(t)=1(t)$ 时 $e_{ssr}=0$ 仍成立

当 $n(t)=1(t)$ 时，$G_{en}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=-\frac{KJs}{Js+K}$

⇒ $e_{ssn}=\lim_{s\to0}s\frac{-KJs}{Js+K}\cdot\frac{1}{s}=0$ ⊗对于扰动稳态误差等于0

$e_{ssn}=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$

若扰动为阶跃函数 $n(t)=1(t)$，则

$e_{ssn}=-\frac{G_2(0)H(0)}{1+G_1(0)G_2(0)H(0)}$ 当 $G_1(0)G_2(0)H(0)\gg1$ 时 $e_{ssn}\approx-\frac{1}{G_1(0)}$

扰动作用点以前的前向通道传递系数 $G_1(0)$ 越大，由扰动引起的稳态误差越小

对阶跃输入要求系统无差，应该扰动作用点以前的 $G_1(s)$ 中包含积分环节，才能保证稳态误差为0

降低参考输入引起稳态误差的措施：

增大系统开环传递系数可减小有差系统的稳态误差；

增加开环传递函数中积分环节数，使系统型号提高，可消除有差系统的稳态误差；

降低扰动引起稳态误差的措施：

增大扰动作用点以前的前向通道传递系数以降低有差系统由扰动引起的稳态误差。

增加扰动作用点以前的前向通道中积分环节数，使系统型号提高，可消除有差系统由扰动引起的稳态误差；

$\frac{N(s)}{R(s)}$

还可以采用顺馈（或前馈）的控制方式消除稳态误差。