Nyquist判据 ⇒ 稳定性分析

有闭环传函 $\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

为保证系统稳定，特征方程 $1+G(s)H(s)=0$ 的所有根都必须位于左半s平面

Nyquist判据将开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 与 $1+G(s)H(s)=0$ 在右半s平面根数目相联系的判据，无须求出闭环极点。

1、幅角原理

有复变函数 $F(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$

s平面上一条封闭的曲线 Γ_s 不通过 $F(s)$ 的奇点；映射在 $F(s)$ 平面上也是一条封闭曲线 Γ_F 封闭的曲线

Γ_s 上任取一点 s_1，其辅助函数 $F(s)$ 对应的幅角为

$$\angle F(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)$$

解析点 s_1 沿封闭曲线按顺时针方向旋转一周后再回到起始点时，封闭曲线外的零极点到 s_1 的向量旋转了 $0°$，封闭曲线内的零极点指向 s_1 的向量旋转了 -2π

$$\angle F(s)=-2\pi(Z-P)$$

Z和P为封闭曲线内零极点数目

Nyquist判据穿越形式

穿越：开环Nyquist曲线穿过 $(-1,0j)$ 点左边实轴

正穿越：ω 增大时，Nyquist由上而下穿过 $(-1,-\infty)$ 段实轴，正穿越次数用 N^+ 表示

→ 相角增加，Nyquist曲线逆时针包围 $(-1,j0)$ 点一圈

负穿越：ω 增大时，Nyquist由下而上穿过 $(-1,-\infty)$ 段实轴。负穿越次数用 N^- 表示

→ 相当于Nyquist曲线顺时针包围 $(-1,j0)$ 点一圈

故有 $N=2(N^+-N^-)$

奈氏判据描述为 $Z=P-2(N^+-N^-)$

☆ 增补段处理

（1）开环传递函数含有 v 个积分环节时，在开环幅相曲线上绘制增补段，该增补段从 $\omega=0$ 的逆时针 $v90°$ 处，以半径无穷大的圆弧顺时针绕原点转 $v\cdot\frac{\pi}{2}$ 角度至 $\omega=0$ 处。

（2）开环传递函数含有虚轴上的开环极点 jd 时，设其重数为 v。则开环虚极点 jd 增补段的映射曲线为，当 ω 由 $d^-\to d^+$ 变化时以半径无穷大的圆弧顺时针绕原点转 $v\pi$ 角度。

综上，奈氏曲线逆时针包围 $(-1,j0)$ 的圈数 $N=2(N^+-N^-)$。从而可以在幅相曲线上应用奈氏判据判断稳定性。

【命题 5.7】幅相曲线上的奈氏判据：设 P 为位于 s 平面右半平面的开环传递函数极点数，N^+ 和 N^- 分别为幅相曲线（含原点处和虚轴上开环极点增补段）正负穿越的次数。

（1）若幅相曲线不穿过 $(-1,j0)$ 点，则闭环系统稳定的充分必要条件是 $P=2(N^+-N^-)$。

（2）若幅相曲线不穿过 $(-1,j0)$ 点，且 $P>2(N^+-N^-)$，则闭环系统不稳定，不稳定的根（右半平面的根）的个数为 $Z=P-2(N^+-N^-)$。

（3）若幅相曲线起点在 $(-1,j0)$ 点上或穿过 $(-1,j0)$ 点，闭环系统稳定性的判断需要在采用【命题 5.4】和【命题 5.5】修正的幅相曲线上进行。此时，若 $P=2(N^+-N^-)$，则闭环系统临界稳定；若 $P>2(N^+-N^-)$，则闭环系统不稳定，不稳定的根（右半平面的根）的个数为 $Z=P-2(N^+-N^-)$。

2、Nyquist判据

构造辅助复变函数 $F(s)=1+G(s)H(s)=1+\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{D(s)+N(s)}{D(s)}$

$F(s)$ 极点为开环传函的极点，零点为闭环传函的极点

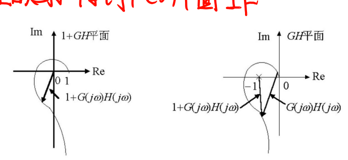
选取 Γ_s（关心右半平面极点个数，Γ_s 应包括整个s右半平面）

分三段讨论映射
$$\begin{cases} s=-j\omega \xrightarrow{F(s)} 1+|G(-j\omega)H(-j\omega)|e^{j\angle G(-j\omega)H(-j\omega)} & \omega\ (-\infty,0)\ \text{频率特性} \\ s=j\omega \xrightarrow{F(s)} 1+|G(j\omega)H(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)H(j\omega)} & \omega\ (0,\infty)\ \text{频率特性} \\ s=\lim\limits_{R\to\infty}Re^{j\phi} \xrightarrow{F(s)} 1+\left(\lim\limits_{R\to\infty}\frac{b_m}{a_n}\frac{1}{R^{n-m}}\right)e^{-j(n-m)\phi} \end{cases}$$

* $n>m$ 时，映射到 $1+G(j\omega)H(j\omega)$ 平面的 $(1,j0)$

$n=m$ 时，映射到 $1+G(j\omega)H(j\omega)$ 平面的实轴某点

s平面 Γ_s 经映射得到 $F(s)$ 平面 Γ_F



1+G(j ω)H(j ω)曲线对原点的包围，恰等于G(j ω)H(j ω)轨迹对-1+j0点的包围

F(s)=1+G(s)H(s)在右半s平面的零点数Z与极点数P以及G(j ω)H(j ω)在G(j ω)H(j ω)平面上逆时针围绕-1+j0点旋转的圈数N的关系

Z=P-N

稳定的充要条件是：P=N

有在虚轴上极点时在极点以无穷小半径逆时针作圆，即增加 $s=\lim\limits_{r\to0}aj+re^{j\theta}$ $(0^-<\omega<0^+,\ -90°<\theta<90°)$ 第四段

$a=0$ 时，经映射 $G(s)H(s)$ 有 $\lim\limits_{r\to0}\frac{k}{r^v}e^{-jv\theta}=\infty e^{-jv\theta}$，$\theta\in(-90°,90°)$

为 $G(s)H(s)$ 平面上半径无穷大圆弧，角度为顺时针 $v\pi$

故充要条件不变

- 绘制出幅相曲线G(j ω)H(j ω)曲线[ω在(0,∞)]
- 关于实轴对称的绘制出ω在(−∞,0)范围的G(j ω)H(j ω)曲线；
- 若是v型系统，从0^-到0^+顺时针补画vπ圆弧；形成封闭曲线。
- 判断所绘制封闭曲线围绕-1+j0点圈数N；逆正顺负
- 已知开环传递函数在右半平面的极点数P　$D(s)=0$
- 最后可得　Z=P-N

若Z=0,系统稳定；否则系统不稳定，且有Z个不稳定根。

→ 辅助函数 $F(s)=1+G(s)H(s)$

（1）$P=N$ 原点处/虚轴上闭环极点为单重根 ⇒ 临界稳定

（2）$P=N$ 原点处/虚轴上闭环极点为多重根 ⇒ 不稳定

或 $P>N$ ⇒ 不稳定

相对稳定性（时域分析中采用超调量/特征根靠近虚轴的远近来衡量）

开环Nyquist曲线与 $(-1,0j)$ 点的接近程度反映系统闭环的相对稳定性，即稳定程度

1、幅值裕度 k_g：相位穿越频率对应开环幅频特性的倒数值

开环频率特性曲线与GH平面负实轴交点频率称为相位穿越频率，满足

$$\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g)=-180°$$

所以

$$k_g=\frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}\ \text{或}\ k_g(dB)=-20\lg|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$$

对于开环系统没有右半平面极点的情况 $(P=0)$，有

$$\begin{cases} k_g>1/k_g(dB)>0 & \text{系统稳定} \\ k_g=1/k_g(dB)=0 & \text{系统临界稳定} \\ k_g<1/k_g(dB)<0 & \text{系统不稳定} \end{cases}$$

故右半平面有极点时情况复杂

物理意义表述：保持系统稳定条件下，开环增益所允许增加的最大倍数/最大分贝数

局限 ① 条件稳定系统

由两个幅值裕度 $k_{g1}(>1)$ 和 $k_{g2}(<1)$ 共同表示

物理意义：条件稳定系统开环增益放大 k_{g1} 或缩小 k_{g2} 倍时，系统均达到临界稳定状态

② 幅值裕度同稳定性可能不同

2、相位裕度 $\gamma(\omega_c)$：指幅值穿越频率对应相移与-180°角差值

开环Nyquist曲线与单位圆交点对应频率 ω_c 称为幅值穿越频率（剪切频率）

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=1\ \text{或}\ 20\lg|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=0$$

所以

$$\gamma=\varphi(\omega_c)-(-180°)=\varphi(\omega_c)+180°$$

对于开环系统右半平面无极点时

$$\begin{cases} \gamma>0 & \text{系统稳定} \\ \gamma=0 & \text{系统临界稳定} \\ \gamma<0 & \text{系统不稳定} \end{cases}$$

故右半平面有极点时情况复杂

含义：在幅值穿越频率 ω_c 上，系统开环Nyquist曲线穿过 $(-1,j0)$（临界稳定）尚可增加（开环稳定系统）的相位滞后量 $\gamma(\omega_c)$

局限：相位裕度相同但稳定程度有可能不同

故应同时考虑 k_g 和 $\varphi(\omega_c)$ 说明系统稳定程度：

最小相位系统，只有幅值裕度和相位裕度都是正值时，系统才是稳定的

一般要求：$k_g>6dB$ 或 $k_g>2$ 且 $\gamma(\omega_c)=30°\sim60°$

3、幅值裕度与相位裕度计算

（1）据定义求

① 据相位等于-180°求出相应的相位穿越频率 ω_g

② ω_g 代入幅值公式求幅值裕度 k_g

③ 据幅值等于1/0dB求相应剪切频率 ω_c

④ 据定义求相位裕度

反正切和公式　$\arctan\omega_gT_1\pm\arctan\omega_gT_2=\arctan\frac{\omega_gT_1\pm\omega_gT_2}{1\mp(\omega_gT_1)(\omega_gT_2)}$ ⇒ 试根法

故系统阶次较高时，ω_g 和 ω_c 用解析法不好求

（2）作图法：

绘制Bode图，$L(\omega)=0dB$ 时与实轴交点即为 ω_c

$1<\omega_c<4$

故 ~~☐~~ ~~☐~~ ⇒ 忽略

稳定裕度的概念　（开环频率指标）

稳定裕度的定义
- 剪切频率　ω_c　$|G(j\omega_c)|=1$
- 相角裕度　γ　$\gamma=180°+\angle G(j\omega_c)$
- 相位穿越频率　ω_g　$\angle G(j\omega_g)=-180°$　或令虚部为零
- 幅值裕度　K_g　$K_g=\frac{1}{|G(j\omega_g)|}$

稳定裕度的意义　γ，K_g 的物理意义

稳定裕度计算方法
$$\begin{cases} L(\omega)\Rightarrow\omega_c\Rightarrow\gamma=180°+\varphi(\omega_c) \\ \varphi(\omega)=-180°\Rightarrow\omega_g\Rightarrow K_g=\frac{1}{|GH(j\omega_g)|} \end{cases}$$