线性 $T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]$

非移变 $y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$

2.4 满足什么条件的系统才是线性非移变系统？线性非移变系统的输入、输出和单位取样响应 $h(n)$ 之间满足什么关系？

$y(n)=h(n)*x(n)$

答：同时满足线性性和时不变性的离散时间系统。

线性非移变系统输出等于输入信号与单位取样响应 $h(n)$ 的卷积

2.5 已知一个线性非移变系统的单位取样响应为

$$h(n)=a^{-n}u(-n),\quad 0<a<1$$

用直接计算$\boxed{\text{线性卷积}}$的方法，求系统的单位阶跃响应。

解：$y(n)=u(n)*h(n)$

$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)\cdot u(n-m)$

$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a^{-m}u(-m)u(n-m)$ 令 $k=-m$

线性卷积

$* \xrightarrow{\text{傅}} \times \xrightarrow{\text{傅}^{-1}} *$

$* \xrightarrow{Z} \times \xrightarrow{Z^{-1}} *$

当 $n\geq0$ 时，$y(n)=\lim_{m\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a^m$

$=\lim_{m\to\infty}\frac{1-a^{m+1}}{1-a}$

$=\frac{1}{1-a}$

当 $n<0$ 时，$y(n)=\lim_{m\to\infty}\sum_{m=-n}^{\infty}a^m$

$=\lim_{m\to\infty}\frac{a^{-n}-a^{m+1}}{1-a}$

$=\frac{a^{-n}}{1-a}$

2.8 讨论下列各线性非移变系统的因果性和稳定性。

(1) $h(n)=2^nu(-n)$

(2) $h(n)=-a^nu(-n-1)$

(3) $h(n)=\delta(n+n_0),n_0>0$

(4) $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^nu(n)$

(5) $h(n)=\frac{1}{n}u(n)$

(6) $h(n)=2^nR_N(n)$

解(1) $h(n)\cdot u(n)=\delta(n)\neq h(n)$

$\therefore$ 非因果系统

$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n=2$

$\therefore$ 稳定系统

(3) $h(n)\cdot u(n)=\delta(n+n_0)=h(n)$ $\to 0$ 向左平移 n_0

$\therefore$ 因果系统

$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=1$

$\therefore$ 稳定系统

(5) $h(n)\cdot u(n)=\frac{1}{n}u(n)=h(n)$

$\therefore$ 因果系统

$\because \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\infty$ $n=0$ 时 $h(n)=\infty$

$\therefore$ 不稳定系统

2.11 用特征根法和递推法求解下列差分方程：

$$y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0,\text{且 } y(0)=1,y(1)=1。$$

解：特征根法：$\lambda^2-\lambda-1=0$

$\lambda_1=1.618,\lambda_2=-0.618$

$\therefore y(n)=C_1 1.618^n+C_2(-0.618)^n$ 以保留根式

代入 $y(0)=1,y(1)=1$

$\begin{cases}C_1+C_2=1\\1.618C_1-0.618C_2=1\end{cases}$

$\therefore y(n)=0.724\cdot1.618^n+0.276\cdot(-0.618)^n$

递推法

$y(2)=2$ $\quad y(-1)=0$

$y(3)=3$ $\quad y(-2)=1$

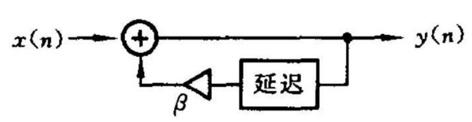
$y(4)=5$ $\quad y(-3)=-1$

2.12 用 D 算子计算由下列差分方程描述的$\boxed{\text{因果}}$线性非移变系统的单位取样响应 $h(n)$。

(1) $y(n)-2y(n-1)-8y(n-2)=5x(n)-8x(n-1)$

(2) $y(n)-\frac{1}{3}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$

2.13 一系统的框图如习题 2.13 图所示，试求该系统的单位取样响应 $h(n)$ 和单位阶跃响应 $y(n)$。



2.12 解(1) $y(n)-2Dy(n)-8D^2y(n)=5x(n)-8Dx(n)$

$y(n)=\frac{5-8D}{1-2D-8D^2}x(n)$

$\therefore H(D)=\frac{5-8D}{1-2D-8D^2}=\frac{14}{3}\frac{1}{1-4D}+\frac{1}{3}\frac{1}{1+2D}$ 符号有误

令 $x(n)=\delta(n)$

$\therefore h(n)=H(D)\delta(n)=\cancel{\frac{14}{3}\frac{1}{1-4D}\delta(n)+\frac{1}{3}\frac{1}{1+2D}\delta(n)}$

$\cancel{=\frac{14}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(4D)^n\delta(n)+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-2D)^n\delta(n)}$

$\cancel{=\frac{14}{3}4^nu(n)+\frac{1}{3}(-2)^nu(n)}$

$\therefore h(n)=\frac{14}{3}4^nu(n)+\frac{1}{3}(-2)^nu(n)$

$(1-2D-8D^2)y(n)=(5-8D)x(n)$

$y(n)=\frac{-8D+5}{-8D^2-2D+1}x(n)$

$H(D)=\frac{-8D+5}{-8D^2-2D+1}=\frac{2}{1-4D}+\frac{3}{1+2D}$

令 $x(n)=\delta(n)$

$\therefore h(n)=\frac{2}{1-4D}\delta(n)+\frac{3}{1-(-2D)}\delta(n)$

$=2\sum_{n=0}^{\infty}(4D)^n\delta(n)+3\sum_{n=0}^{\infty}(-2D)^n\delta(n)$

$=2\cdot4^nu(n)+3(-2)^nu(n)$

(2) $y(n)-\frac{1}{3}Dy(n-1)=x(x)+\frac{1}{3}Dx(n)$

$y(n)=\frac{1+\frac{1}{3}D}{1-\frac{1}{3}D}x(n)$

$\therefore H(D)=\frac{1+\frac{1}{3}D}{1-\frac{1}{3}D}=\frac{-(1-\frac{1}{3}D)+2}{1-\frac{1}{3}D}=-1+\frac{2}{1-\frac{1}{3}D}$

令 $x(n)=\delta(n)$

$\therefore h(n)=-\delta(n)+2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}D}\delta(n)$

$=-\delta(n)+2\cdot(\frac{1}{3})^nu(n)$

$\therefore h(n)=-\delta(n)+2(\frac{1}{3})^nu(n)$

2.13 解：$\because y(n)=x(n)+\beta Dy(n)$

$y(n)=\frac{1}{1-\beta D}x(n)$

$\therefore H(D)=\frac{1}{1-\beta D}$

令 $x(n)=\delta(n)$

$\therefore h(n)=H(D)\delta(n)$

$=\frac{1}{1-\beta D}\delta(n)$

$=\beta^nu(n)$

当输入 $u(n)$ 时

$y(n)=u(n)*h(n)$

$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)u(n-m)$

当 $n<0$ 时，$y(n)=0$

当 $n\geq0$ 时，

$y(n)=\sum_{m=0}^{n}h(m)$

$=\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}$

综上 $y(n)=\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}u(n)$

$FT[x^*(n)]=X^*(e^{-j\omega})$

2.14 设序列 $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$，求下列各序列的傅里叶变换(要有导出的过程)。

(1) $ax_1(n)+bx_2(n)$ $\qquad$ (2) $x(n-k)$

(3) $e^{j\omega_0n}\cdot x(n)$ $\qquad$ (4) $x(-n)$

(5) $x^*(n)$ $\qquad$ (6) $x^*(-n)$

(7) $\mathrm{Re}[x(n)]$ $\qquad$ (8) $j\mathrm{Im}[x(n)]$

(9) $x^2(n)$ $\qquad$ (10) $g(n)=nx(n)$

解(1) $FT[ax_1(n)+bx_2(n)]$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[ax_1(n)+bx_2(n)]e^{-j\omega n}$

$=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)e^{-j\omega n}+b\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n)e^{-j\omega n}$

$=aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$

(2) $FT[x(n-k)]$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-k)e^{-j\omega n}$

令 $i=n-k$

$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)e^{-j\omega i}\cdot e^{-j\omega k}$

$=X(e^{j\omega})\cdot e^{-j\omega k}$

(3) $FT[e^{j\omega_0n}x(n)]$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0n}x(n)e^{-j\omega n}$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(\omega-\omega_0)n}$

$=X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

(4) $FT[x(-n)]$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)e^{-j\omega n}$ $\quad e^{(-j\omega(-n))}$

$=X(e^{-j\omega})$

(5) $FT[x^*(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)[\cos(\omega n)-j\sin(\omega n)]$

令 $n=i$ 有 $x^*(i)[\cos(\omega i)-j\sin(\omega i)]=\{x(i)[\cos(\omega i)+j\sin(\omega i)]\}^*$

$\therefore FT[x^*(n)]=\boxed{X^*(e^{-j\omega})}$

$\boxed{x(n)e^{-j\omega n}}$ $X^*(e^{-j\omega})$

(6) $F[x^*(-n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(-n)e^{-j\omega n}$

同(5)

$F[x^*(-n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(-n)e^{-j(-\omega)(-n)}]^*=X^*(e^{j\omega})$

(7) $FT[\mathrm{Re}[x(n)]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2}(x(n)+x^*(n))]e^{-j\omega n}$

$=\frac{1}{2}X(e^{j\omega})+\frac{1}{2}X^*(e^{-j\omega})$

(8) $FT\{j\mathrm{Im}[x(n)]\}=FT[\frac{1}{2}(x(n)-x^*(n))]e^{-j\omega n}$

同(7)有

$FT\{j\mathrm{Im}[x(n)]\}=\frac{1}{2}X(e^{j\omega})-\frac{1}{2}X^*(e^{-j\omega})$

(9) $FT[x^2(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^2(n)e^{-j\omega n}$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta\, x(n)e^{-j\omega n}$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(\omega-\theta)n}}d\theta$ $\quad X(e^{j(\omega-\theta)})$

$=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*X(e^{j\omega})$

(10) $F[nx(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)e^{-j\omega n}$

$\because nx(n)e^{-j\omega n}=-\frac{1}{j}\frac{d(x(n)e^{-j\omega n})}{d\omega}$

$\therefore F[nx(n)]=j\frac{X(e^{j\omega})}{d\omega}$ ※左右同时求导推出

$FT[f^{(n)}(x)]=(j2\pi\xi)^nF(\xi)$

$FT[x(n)\cdot x(n)]=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*X(e^{j\omega})$

2.15 设一个因果的线性非移变系统由下列差分方程描述：

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

(1) 求该系统的单位取样响应 $h(n)$。

(2) 用(1)得到的结果求输入为 $x(n)=e^{j\omega n}$ 时系统的响应。

(3) 求系统的频率响应。傅氏变换

(4) 求系统对输入 $x(n)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)$ 的响应。 线性非移变系统不改变f仅改变相位

→频率 $\frac{\pi}{2}$，仅相位变化

解(1) $\because y(n)-\frac{1}{2}Dy(n)=x(n)+\frac{1}{2}Dx(n)$

$y(n)=\frac{1+\frac{1}{2}D}{1-\frac{1}{2}D}x(n)$

令 $x(n)=\delta(n)$

$\therefore H(D)=\frac{2-(1-\frac{1}{2}D)}{1-\frac{1}{2}D}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}D}-1$

$\therefore h(n)=(\frac{2}{1-\frac{1}{2}D}-1)\delta(n)$

$=2\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}D)^n\delta(n)-\delta(n)$

$=2(\frac{1}{2})^nu(n)-\delta(n)$

(2) $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$

$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\omega k}[2(\frac{1}{2})^{n-k}u(n-k)-\delta(n-k)]$

$=\frac{2e^{j\omega n}+e^{j\omega(n-1)}}{2-e^{-j\omega}}$

※将 $h(n)=(\frac{1+\frac{1}{2}D}{1-\frac{1}{2}D})\delta(n)$ 代入该卷积

(3) $H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}=\frac{2+e^{-j\omega}}{2-e^{-j\omega}}$

$\omega=\frac{\pi}{2}$

(4) $\therefore y(n)=|H(e^{j\frac{\pi}{2}})|\cos(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}+\theta)$

$=\cos(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{4}{3})$

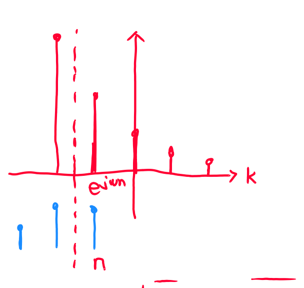
$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})|=1$

$\frac{2-j}{2+j}$

$=\frac{(2-j)^2}{(2-j)(2+j)}$

$=\frac{1}{5}(3-4j)$

$=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}j$



$e^{j\omega n}+e^{j\omega(n-1)}+\frac{1}{2}e^{j\omega(n-2)}+\cdots$

$S=e^{j\omega(n-1)}+\frac{1}{2}e^{j\omega(n-2)}+\cdots$

$\frac{1}{2}e^{-j\omega}S=0+\frac{1}{2}e^{j\omega(n-2)}+\cdots$

$(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})S=e^{j\omega(n-1)}$

$S=\frac{e^{j\omega(n-1)}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}=\frac{2e^{j\omega(n-1)}+2e^{j\omega n}-e^{j\omega(n-1)}}{2-e^{-j\omega}}$