2.20 求下列序列的 z 变换和收敛域。

(1) $\delta(n-m)$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(3) $a^n u(-n-1)$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n)-u(n-10)]$

(5) $\cos(\omega_0 n)u(n)$

解：(1) $X(z)=Z[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-m)z^{-n}$

$=z^{-m}$

收敛域 $|z|\in[0,\infty)$ 所有 z

(3) $X(z)=Z[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n u(-n-1)$

$=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{a}{z}\right)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n$ 左边序列 $|z|<a$

$=\frac{z}{a-z}$

收敛域 $|z|\in[0,a)$

2.21 求下列序列的 z 变换、收敛域和极-零点分布图。

(1) $x(n)=a^{|n|}$，$0<a<1$

(2) $x(n)=e^{(a+j\omega_0)n}u(n)$

(3) $x(n)=Ar^n\cos(\omega_0 n+\varphi)u(n)$，$0<r<1$

(4) $x(n)=\frac{1}{n!}u(n)$

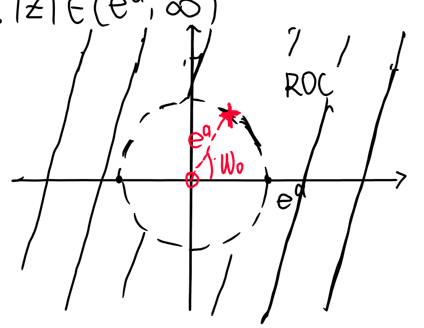
(5) $x(n)=\sin(\omega_0 n+\theta)u(n)$

解 (2) $X(z)=Z[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(a+j\omega_0)n}u(n)z^{-n}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{a+j\omega_0}}{z}\right)^n$ 右边序列

$=\frac{z}{z-e^{a+j\omega_0}}$

收敛域 $|z|\in(e^a,\infty)$ $|z|>R_c$



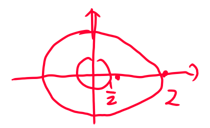
2.23 求下列 z 变换的逆变换。

$x(n)=\boxed{\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz}=\sum Res[X(z)z^{n-1},z_i]$

(1) $X(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$，$1<|z|<2$

(2) $X(z)=\frac{z-5}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$，$0.5<|z|<2$

(3) $X(z)=\frac{e^{-T}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2}$，$|z|>e^{-T}$



(4) $X(z)=\frac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}$，$|a|<|z|<|b|$

解：(2) $\because F(z)=X(z)z^{n-1}=\frac{(z-5)z^{n-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$ z^n

当 $n\geq 0$ 时，有极点 $z_1=2$，$z_2=0.5$，环线 C 内有极点 $z_2=0.5$

$\therefore Res[F(z),z_2]=\lim_{z\to 0.5}(z-0.5)\frac{(z-5)z^{n-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}=-6\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore x(n)=Res[F(z),z_2]=-6\left(\frac{1}{2}\right)^n$

当 $n<0$ 时，有极点 $z_1=2$，$z_2=0.5$，$1-n$ 重极点 $z_3=0$，环线 C 内有极点 $z_2=0.5$，$z_3=0$

$\therefore Res[F(z),z_2]+Res[F(z),z_3]=-Res[F(z),z_1]$

$=-\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{(z-5)z^{n-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}=-2^{n+2}$

$\therefore x(n)=-2^{n+2}$

综上所述 $x(n)=\begin{cases}-6\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\geq 0\\ -2^{n+2}, & n<0\end{cases}$

(4) $\therefore F(z)=X(z)z^{n-1}=\frac{z^n[(z-a)+(z-b)]}{(z-a)(z-b)}$

当 $n\geq 0$ 时，有极点 $z_1=a$，$z_2=b$，环线 C 内极点为 z_1

$\therefore Res[F(z),a]=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot F(z)=a^n$

$\therefore x(n)=a^n$

当 $n<0$ 时有极点 $z_1=a$，$z_2=b$，$z_3=0$，环线 C 内极点 z_3，z_1 且 z_3 为 $-n$ 重极点

$\therefore Res[F(z),a]+Res[F(z),0]=-Res[F(z),b]$

$=-\lim_{z\to b}(z-b)F(z)=-b^n$

$\therefore x(n)=-b^n$

综上所述 $x(n)=\begin{cases}a^n, & n\geq 0\\ -b^n, & n<0\end{cases}$

$W(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}}$

$Y(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$，$|z|>a$ $=-\frac{a}{1-a}\frac{1}{1-az^{-1}}+\frac{1}{1-a}\frac{1}{1-z^{-1}}$

$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$，$|z|>1$ $w(n)=-\frac{a}{1-a}(1)^n u(n)+\frac{1}{1-a}u(n)$

2.28 已知 $x(n)=u(n)$，$y(n)=a^n u(n)$，利用 z 变换求 $w(n)=x(n)*y(n)$。

2.29 已知 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 z 变换如下，用复卷积公式求 $\mathscr{Z}[x(n)\cdot y(n)]$。

解：$\because w(n)=x(n)*y(n)=Z^{-1}[X(z)\cdot Y(z)]$

$X(z)=Z[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{z}{z-1}$，$|z|\in(1,\infty)$

$Y(z)=Z[y(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\frac{z}{z-a}$，$|z|\in(|a|,\infty)$

$\therefore w(n)=Z^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-1)(z-a)}\right]$，$|z|\in(\max\{1,|a|\},\infty)$

$\therefore X(w)=\frac{z^2}{z^2-(1+a)z+a}=1+(1+a)z^{-1}-(1+a+a^2)z^{-2}+(1+a+a^2+a^3)z^{-3}+\cdots+\left(\sum_{i=0}^{n}a^i\right)z^{-n}$

① ② ③ ④

$\therefore w(n)=\sum_{i=0}^{n}a^i$

差分方程 → D算子 → $H(D)$ $\xrightarrow[x(n)=\delta(n)]{部分分式展开}$ $h(n)$ $\xrightarrow{Z}$ $H(z)$

差分方程 → Z变换 [$y(n-m)\Rightarrow z^{-m}Y(z)$] $\xrightarrow{部分分式展开}$ $H(z)$

2.35 一个线性非移变离散时间系统的输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 满足差分方程

$$y(n-1)-\frac{5}{2}y(n)+y(n+1)=x(n)$$

$z^{-1}Y(z)-\frac{5}{2}Y(z)+zY(z)=X(z)$

$H(z)=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}=\frac{z}{z^2-\frac{5}{2}z+1}=\frac{4}{3}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{3}\frac{1}{z-\frac{1}{2}}$

对 z 进行分类讨论

(1) 试问该系统是否稳定，是否因果没有限制；

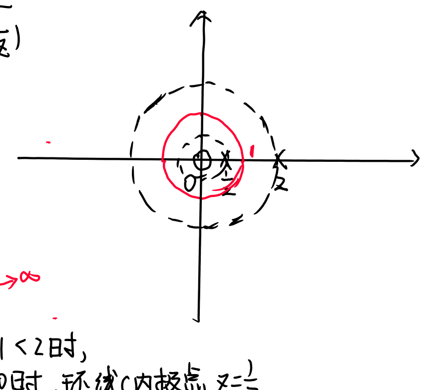
(2) 研究这个差分方程的极-零点分布图，求系统单位取样响应的 3 种可能选择方案，验证每一种方案都满足差分方程。

$\frac{1}{(1-\frac{2}{z})(1-\frac{1}{2z})}$

$=-\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}+\frac{2}{3}\frac{1}{1-2z}$

$=\frac{2}{3}[(2z)^n-(\frac{1}{2}z)^n]$

$=\frac{2}{3}(2^n-2^{-n})z^n$



解 (1) 对差分方程 Z 变换得

$z^{-1}Y(z)-\frac{5}{2}Y(z)+zY(z)=X(z)$

$\therefore H(z)=\frac{z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}(2^n-2^{-n})z^n$

有极点 $z_1=2$，$z_2=\frac{1}{2}$，零点 $z_3=0$

① $|z|>2$ 系统因果，不稳定 包含单位圆

环带 非因果 ← ② $\frac{1}{2}<|z|<2$ 系统非因果，稳定 $H(z)=\sum h(n)z^{-n}$ $z^{-n}\to\infty$

③ $|z|<\frac{1}{2}$ 系统非因果，不稳定

留数定理求 $h(n)$ $\lim_{z\to 0}H(z)$ 有限 因果

(2) $\therefore$ 求输入 $x(n)=\delta(n)$ 时的 $y(n)$ $\lim_{z\to\infty}H(z)$ 有限 逆因果

$\therefore y(n)=Z^{-1}[H(z)]$

令 $F(z)=H(z)z^{n-1}=\frac{z^n}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}$

① $|z|>2$ 时，

$n>0$ 时，环线 C 内有极点，$z_1=2$，$z_2=\frac{1}{2}$

$\therefore Res[F(z),z_1]=\lim_{z\to 2}(z-2)F(z)=\frac{2}{3}2^n$

$Res[F(z),z_2]=\lim_{z\to\frac{1}{2}}(z-\frac{1}{2})F(z)=-\frac{2}{3}2^{-n}$

$\therefore h(n)=\frac{2}{3}(2^n-2^{-n})$

$n<0$ 时，环线 C 内多 $-n$ 阶极点，$z_3=0$

而 分母阶次比分子高二阶及以上 $Res[F(z),\infty]=0$

$\therefore h(n)=-Res[F(z),\infty]=0$

综上，$h(n)=\frac{2}{3}(2^n-2^{-n})u(n)$

② $\frac{1}{2}<|z|<2$ 时，

$n>0$ 时，环线 C 内极点 $z_2=\frac{1}{2}$

$\therefore Res[F(z),z_2]=\lim_{z\to\frac{1}{2}}(z-\frac{1}{2})F(z)=-\frac{2}{3}2^{-n}$

$h(n)=-\frac{2}{3}2^{-n}$

$n<0$ 时，环线 C 内极点，$z_3=0$

$h(n)=Res[F(z),z_2]+Res[F(z),z_3]=-Res[F(z),z_1]$

$=-\frac{2}{3}2^n$

综上，$h(n)=-\frac{2}{3}[2^{-n}u(n)+2^n u(-n-1)]$

③ $|z|<\frac{1}{2}$ 时，

$n>0$ 时，环线 C 内无极点，

$\therefore h(n)=0$

$n<0$ 时，环线 C 内有极点 $z_3=0$

$\therefore h(n)=Res[F(z),z_3]=-\{Res[F(z),z_1]+Res[F(z),z_2]\}$

$=\frac{2}{3}(2^{-n}-2^n)$

综上，$h(n)=\frac{2}{3}(2^{-n}-2^n)u(-n-1)$