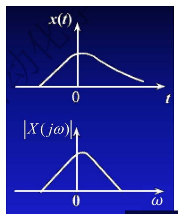
一、Fourier变换几种形式 时间函数 ⇔ 频率函数

① 连续时间 ⇔ 连续频率 傅里叶变换 FT

$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$



② 离散时间 ⇔ 连续频率 序列傅里叶变换 DTFT

$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boxed{x(n)}e^{-j\omega n}$ $\quad x(nT_s)=x(t)\cdot\boxed{p(t)}\to\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$

$=FT[x(t)\cdot p(t)]$

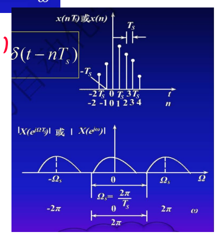
$=\frac{1}{2\pi}FT[x(t)]*FT[p(t)]$

$=\frac{1}{2\pi}X_a(j\omega)*P(j\omega)$

$=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_a(j\omega)*\delta(j\omega-jn\Omega_s)$

$=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_a(j\omega-\boxed{jn\Omega_s})$ 频域周期延拓

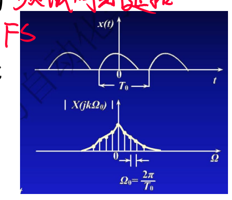
$\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$
$=2\pi x(n)$



③ 连续时间 ⇔ 离散频率 连续傅里叶级数 FS

$X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$

$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$



时域连续周期函数
⇓
频域非周期离散

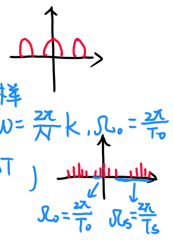
* 连续 $x(t)$ $\xrightarrow[T_s]{\text{采样}}$ 离散 $\hat{x}(n)$ $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ 连续周期 $X(e^{j\omega})$

$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{x}(n)e^{-j\omega n}$ $\quad \Omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$

无混叠时,取一周期 ⇑ ⇓ 周期延拓 $\qquad$ ⇓ 采样 令 $\omega=\frac{2\pi}{N}k$, $\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

周期,离散 $\hat{x}(k)$ $\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$ 离散,周期 $X(e^{j\Omega T})$

$\hat{x}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$



④ 离散时间 ⇔ 离散频率 离散傅立叶级数 DFS

二、离散傅立叶级数DFS

1、定义正/反变换

$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$

$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$

频域

其中 $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, $\tilde{X}(k+rN)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+rN)}=\tilde{X}(k)$ 周期N,长NT_s

* 模拟角频率 $\Omega=2\pi f$,物理频率 $f=\frac{\omega}{2\pi}f_s$ $\qquad$ $\omega=\Omega T_s$

同理 $\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+rN)$ 周期N,长$N\Omega$

2、DFS性质

①线性

$\tilde{X}_1(k)=DFS[\tilde{x}_1(n)]$, $\tilde{X}_2(k)=DFS[\tilde{x}_2(n)]$

$DFS[a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)]=a\tilde{X}_1(k)+b\tilde{X}_2(k)$

②周期序列移位

$DFS[\tilde{x}(n+m)]=W_N^{-mk}\tilde{X}(k)=e^{j\frac{2\pi}{N}mk}\tilde{X}(k)$

③调制特性

$DFS[W_N^{nl}\tilde{x}(n)]=\tilde{X}(k+l)$

☆ ④周期卷积(循环卷积/圆周卷积)

$\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)\Rightarrow\tilde{y}(n)=IDFS[\tilde{Y}(k)]$

$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$

$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_2(m)\tilde{x}_1(n-m)$

圆周卷积过程:
1)补零
2)周期延拓
3)翻褶,取主值序列
4)圆周移位
5)相乘相加

三、离散傅里叶变换与性质

时间函数	频率函数
连续、非周期	非周期、连续
连续、周期(T_0)	非周期、离散($\Omega_0=2\pi/T_0$)
离散(T)、非周期	周期($\Omega_s=2\pi/T$)、连续
离散(T)、周期(T_0)	周期($\Omega_s=2\pi/T$)、离散($\Omega_0=2\pi/T_0$)

1、DFT

长度为N的有限长序列$x(n)$ ⇒ 延拓为周期N的周期序列$\tilde{x}(n)$

$x(n)$ $\xrightarrow{\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)}$ $\tilde{x}(n)\ (x((n))_N)$ $\xrightarrow{DFT}$ $\tilde{X}(k)\ (X((k))_N)$ $\xrightarrow{\times R_N(n)}$ $X(k)$ → N点有限长

$\tilde{x}(n)\xrightarrow{\times R_N(n)}x(n)$

DFT变换定义:

$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$, $0\le k\le N-1$

$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$, $0\le n\le N-1$

或

$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}R_N(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$

$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}R_N(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$

其中 $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

※ DFT与序列的DTFT和Z变换的关系

$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}$

$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$

而 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$

Z变换单位圆上N点等间隔抽样 $\qquad$ DTFT在[0,2π]上N点,等间隔抽样

☆ 先ZT/DTFT,之后采样可得等效DFT

2、DFT性质

①线性

若 $X_1(k)=DFT[x_1(n)]$
$X_2(k)=DFT[x_2(n)]$
则 $DFT[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(k)+bX_2(k)$
a,b为任意常数

序列长度及DFT点数均为N,不等情况下应补零至 $N\ge\max\{N_1,N_2\}$

②序列的循环移位(圆周移位)

定义: $x_m(n)=x((n+m))_N R_N(n)$

$x(n)\xrightarrow[\text{延拓}]{\text{周期}}\tilde{x}(n)\xrightarrow{\text{移位}}\tilde{x}(n+m)=x((n+m))_N\xrightarrow[\text{序列}]{\text{取主值}}x_m(n)$

③ DFT下的Parseval定理

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)Y^*(k)$$

四、循环卷积计算线性卷积

两种卷积的关系

对$x_1(n)$和$x_2(n)$补零,使其长度均为N点;

对$x_2(n)$周期延拓: $\tilde{x}_2(n)=x_2((n))_N=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_2(n+rN)$

圆周卷积: $y_c(n)=[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N]R_N(n)$

$=[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_2(n+rN-m)]R_N(n)$

$=[\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2(n+rN-m)]R_N(n)$

$=[\sum_{r=-\infty}^{\infty}y_l(n+rN)]R_N(n)$

N点圆周卷积$y_c(n)$是线性卷积$y_l(n)$以N为周期的周期延拓序列的主值序列。

而$y_l(n)$的长度为N_1+N_2-1

∴只有当$N\ge N_1+N_2-1$时,$y_l(n)$以N为周期进行周期延拓才无混叠现象

即 当圆周卷积长度$N\ge N_1+N_2-1$时,N点圆周卷积能代表线性卷积

$x_1(n)\,ⓝ\,x_2(n)=x_1(n)*x_2(n)$ $\begin{cases}N\ge N_1+N_2-1\\0\le n\le N_1+N_2-2\end{cases}$

※ 线性卷积求解方法

◆ 时域直接求解

$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

◆ z变换法

$X(z)=ZT[x(n)]\quad H(z)=ZT[h(n)]$

$y(n)=IZT[Y(z)]=IZT[X(z)\cdot H(z)]$

◆ DFT法

$x(n)$ → 补$N-N_1$个零 → N点DFT → ⊗ → N点IDFT → $y(n)=x(n)*h(n)$

$h(n)$ → 补$N-N_2$个零 → N点DFT → ⊗

五、抽样Z变换(频域抽样理论)

时域抽样定理:在满足奈奎斯特定理条件下,时域抽样信号可以不失真地还原原连续信号。

频域抽样序列$\tilde{X}(k)$还原得周期序列为原非周期序列$x(n)$的周期延拓(周期N)

若序列长度为M,则只有当频域采样点数:

$N\ge M$

时,才有

$\tilde{x}_N(n)R_N(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]R_N(n)=x(n)$

即可由频域采样$X(k)$不失真地恢复原信号$x(n)$,否则产生时域混叠现象。

※ 抽样点数 ≥ 周期长度;采样频率f_s ≥ $2f_{max}$