一、DFT计算量

$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$ $\begin{cases} N^2\text{个复数乘法} \begin{cases} 4N^2\text{实数乘法} \\ 2N(2N-1)\text{实数加法} \end{cases} \\ N(N-1)\text{个复数加法} \end{cases}$

※ $W_N^{nk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ 特性

周期性：$W_N^{k+rN}=W_N^k$

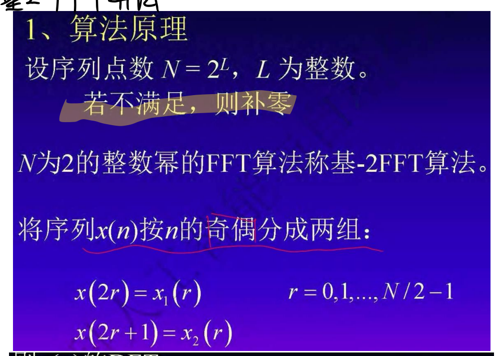
对称性：$(W_N^{nk})^*=W_N^{-nk}=W_N^{N-nk}$

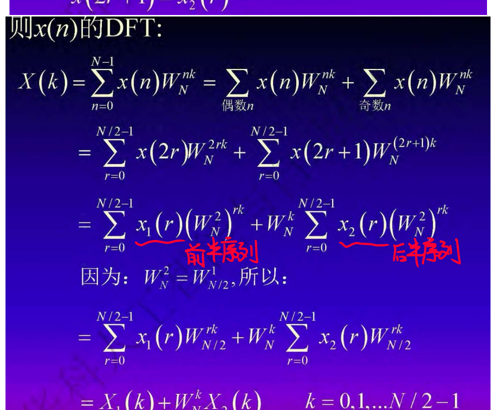
特殊点：$W_N^0=1$，$W_N^{\frac{N}{2}}=-1$，$W_N^{\frac{N}{2}+k}=W_N^{\frac{N}{2}}\cdot W_N^k=-W_N^k$，$W_N^2=W_{\frac{N}{2}}^1$

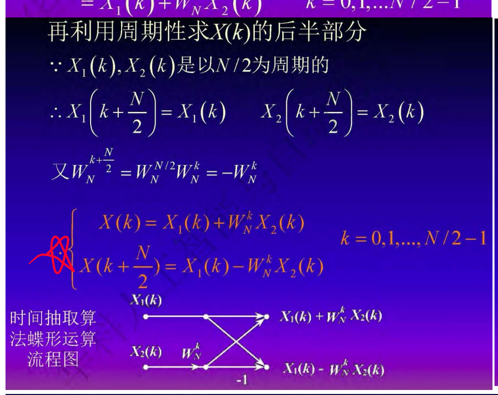
⇒ FFT思想：利用DFT系数特性合并DFT运算中部分项，长DFT → 短DFT

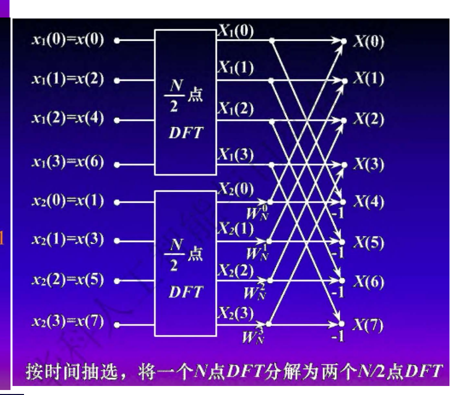
$\begin{cases} \text{DIT 时间抽选} \\ \text{DIF 频率抽选} \end{cases}$

二、DIT基2-FFT算法



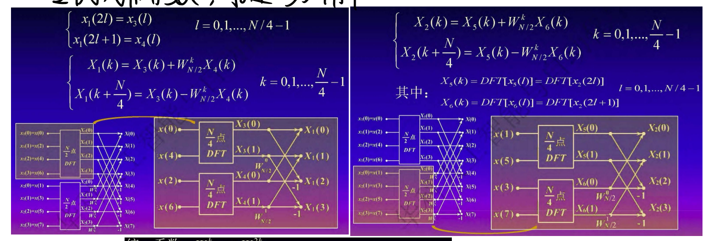




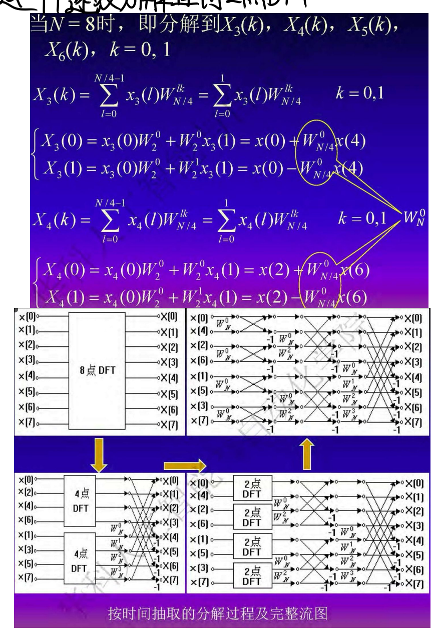


	复数乘法	复数加法
一个$N/2$点DFT	$(N/2)^2$	$N/2(N/2-1)$
两个$N/2$点DFT	$N^2/2$	$N(N/2-1)$
一个蝶形	1	2
$N/2$个蝶形	$N/2$	N
总计	$N^2/2+N/2$ $\approx N^2/2$	$N(N/2-1)+N$ $\approx N^2/2$

$\frac{N}{2}$仍为偶数，可进一步分解



这样逐级分解直到2点DFT



运算量

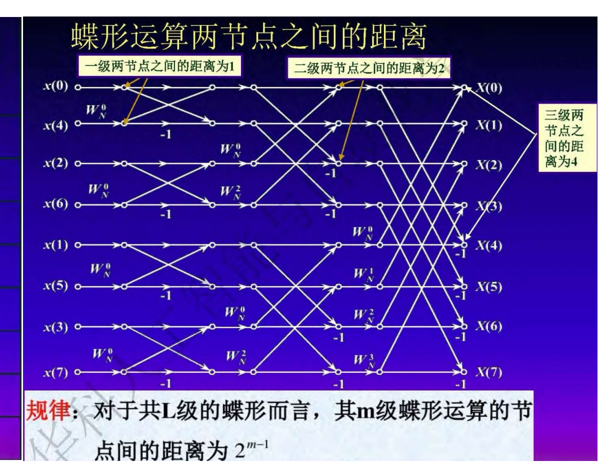
$N=2^L$时有L级蝶形，每级有$\frac{N}{2}$个蝶形，每个蝶形含1次复数乘法和2次复数加法

$\begin{cases} \text{乘法} & \frac{N}{2}L=\frac{N}{2}\log_2 N \\ \text{加法} & NL=N\log_2 N \end{cases}$

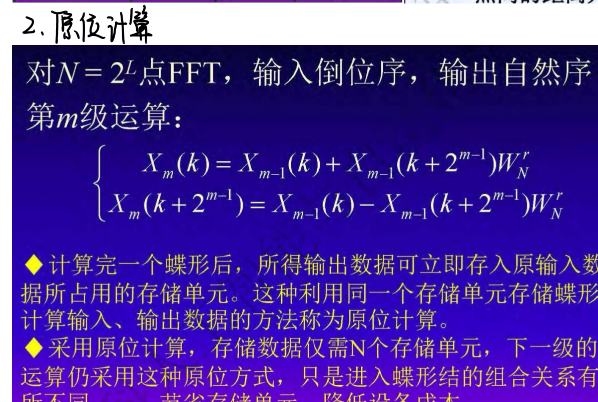
三、算法特点，倒码与原位计算

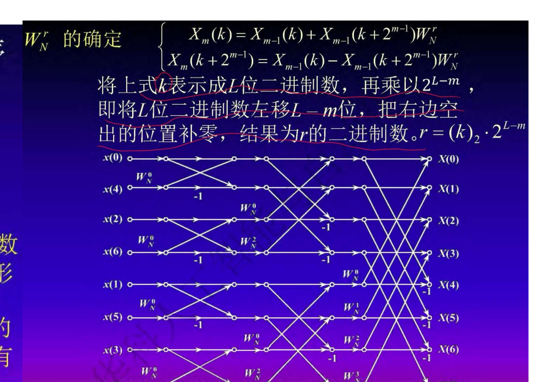
1、倒位序

倒位序		自然序	
$n=(n_0n_1n_2)_2$		$n=(n_2n_1n_0)_2$	
000	0	0	000
100	4	1	001
010	2	2	010
110	6	3	011
001	1	4	100
101	5	5	101
011	3	6	110
111	7	7	111



2、原位计算





四、IFFT算法

IDFT：$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$

DFT：$X(k)=\sum_{k=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$ → $(\frac{1}{2})^L$

FFT：$W_N^{nk}\to W_N^{-nk}$，$\times\frac{1}{N}$ → IFFT

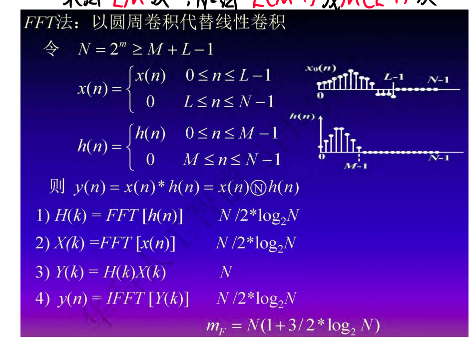
五、利用FFT计算线性卷积

1、线性卷积的FFT

若L点$x(n)$，M点$h(n)$，直接计算线性卷积$y(n)$

$y(n)=\sum_{m=0}^{M-1}h(m)x(n-m)$

乘法 LM 次，加法 $L(M-1)$或$M(L-1)$次



$k_m=\frac{ML}{2N(1+\frac{3}{2}\log_2 N)}$

① $M\approx L$时，$N\approx 2M$

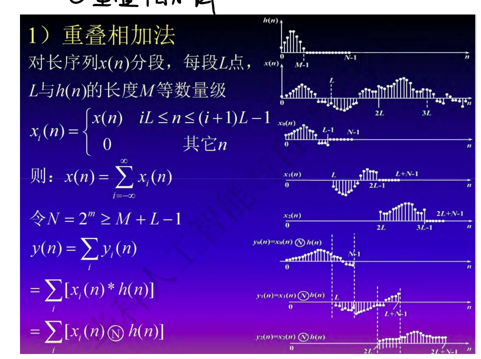
$k_m=\frac{M}{1+6\log_2 M}$

② $L\gg M$时，$N\approx L$

$k_m=\frac{M}{2+3\log_2 L}$

L↑ k_m↓

①重叠相加法



计算步骤

a. $X_i(k)=FFT[x_i(n)]$

b. $H(k)=FFT[h(n)]$

c. $Y_i(k)=X_i(k)\cdot H(k)$

d. $y_i(n)=IFFT[Y_i(k)]$

e. $y(n)=\sum_i y_i(n)$