差分方程 $\xrightarrow[x(n)=\delta(n)]{D算子}$ $h(n) \longrightarrow$ 判别收敛域

差分方程 $\xrightarrow{z变换}$ $H(z)$ $\xrightarrow{极点}$ 分收敛域讨论进行反变换

2.6 z变换

2.6.1 定义

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (z \in C)$$

与DTFT关系：令 $z = re^{j\omega}$ 则

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n) r^{-n}) e^{-j\omega n}$$

为 $\{x(n)r^{-n}\}$ 的DTFT，当 $r=1$（$|z|=1$）时，z变换与DTFT相等

z变换收敛域(ROC)为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n}| < \infty$$

通常z变换收敛域为环状

$$R_{g-} < |z| < R_{g+} \quad (0 \le R_{g-} < R_{g+} \le \infty)$$

z变换在收敛域中为z的连续函数

*不同序列z变换可能收敛于同一函数，$\boxed{收敛域不同}$

与傅立叶变换收敛的关系：

1、序列x(n)的傅立叶变换当且仅当其z变换的收敛域包含单位圆时一致收敛

2、傅立叶变换存在不能推出z变换存在

常用z变换对

$$\delta(n) \xleftrightarrow{z变换} 1 \qquad 所有z$$

$$u(n) \xleftrightarrow{z变换} \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

$$\alpha^n u(n) \xleftrightarrow{z变换} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad |z|>|\alpha|$$

$$(r^n \cos\omega_0 n) u(n) \xleftrightarrow{z变换} \frac{1-(r\cos\omega_0) z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \qquad |z|>r$$

$$(r^n \sin\omega_0 n) u(n) \xleftrightarrow{z变换} \frac{(r\cos\omega_0) z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \qquad |z|>r$$

2.6.2 性质

特性	序列	z变换	收敛域
	$g[n]$	$G(z)$	R_g
	$h[n]$	$H(z)$	R_h
共轭	$g^*[n]$	$G^*(z^*)$	R_g
时间翻转	$g[-n]$	$G(1/z)$	$1/R_g$
线性	$\alpha g[n]+\beta h[n]$	$\alpha G(z)+\beta H(z)$	包括 $R_g \cap R_h$
时移	$g[n-n_0]$	$z^{-n_0}G(z)$	R_g,但z=0或∞除外
乘于指数	$\alpha^n g[n]$	$G(z/\alpha)$	$\|\alpha\| R_g$
X[z]的微分	$ng[n]$	$-z\frac{dG(z)}{dz}$	R_g,但=0或∞除外
卷积	$g[n]*h[n]$	$G(z)H(z)$	包括 $R_g \cap R_h$
相乘	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_c G(v)H(z/v)v^{-1}dv$	$R_g R_h$
帕斯瓦尔公式	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c G(v)H^*(1/v^*)v^{-1}dv$		

2.6.3 有理z变换收敛域

1.有限长序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & n_1 \le n \le n_2 \\ 0, & other \end{cases}, \quad X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

只要级数每一项有界，有限和 $\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$ 有界，ROC为 $|z| \in (0,\infty)$

$n_1 \ge 0$ 时级数无正幂次，$0<|z|\le\infty$；$n_2 \le 0$ 级数无负幂次，$0\le|z|<\infty$

2、右边序列

$x(n)=0,\ n<n_1$，$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n}$，ROC $|z|>R_{x}$

3、左边序列

$x(n)=0,\ n>n_2$，$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n}$，ROC $|z|<R_{x}$

4、双边序列

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} \quad ROC \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

2.6.4 逆z变换

1.留数法

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

X(z)收敛域内逆时针方向绕一周单围线

围线积分

*常通过 $\boxed{留数定理}$ 求解

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_k \mathrm{Res}[\underbrace{X(z) z^{n-1}}_{F(z)}]_{z=z_k} = -\sum_m \mathrm{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_m}$$

逆时针旋转曲线内部

c内k个极点

c外m个极点，注意考虑 $\mathrm{Res}[X(z) z^{n-1}, \infty]$

如 $\sum_k \mathrm{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_k} + \sum_m \mathrm{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_m} = 0$

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

如研究扩充复平面，考虑 $z\to\infty$

当 $X(z) z^{n-1}$ 在 $z=\infty$ 时有二阶或以上零点（$X(z) z^{n-1}$ 分母多项式阶数比分子多项式阶数高二阶或以上）时，

$\mathrm{Res}[f(z), \infty] = 0$

2、部分分式展开

$$G(z) = \frac{P(z)}{D(z)} = \sum_{l=0}^{M-N} \eta_l z^{-l} + \frac{P_1(z)}{D(z)}$$

$z^{-l} \xrightarrow{z} \delta(n-l)$

$\frac{P_1(z)}{D(z)}$ ⇒ 真分式

①单极点

$$G(z) = \sum_{l=1}^{N} \frac{\rho_l}{1-\lambda_l z^{-1}}, \quad \rho = (1-\lambda_l z^{-1}) G(z) \big|_{z=\lambda_l}$$

其逆z变换 $g(n) = \sum_{l=1}^{N} \rho_l (\lambda_l)^n u(n)$，ROC：$|z| > \max|\lambda_l|$

若 $|z| < \min|\lambda_l|$，则 $g(n) = -\sum_{l=1}^{N} \rho_l (\lambda_l)^n u(-n-1)$

②多重极点

设 $z=\nu$ 为L重极点，其余N-L个极点为单极点，

$$G(z) = \underbrace{\sum_{l=0}^{M-N} \eta_l z^{-l}}_{G_1(z)} + \underbrace{\sum_{l=1}^{N-L} \frac{\rho_l}{1-\lambda_l z^{-1}}}_{G_2(z)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{L} \frac{\gamma_i}{(1-\nu z^{-1})^i}}_{G_3(z)}$$

$$其中 \gamma_i = \frac{1}{(L-i)!(-\nu)^{L-i}} \frac{d^{L-i}}{d(z^{-1})^{L-i}} [(1-\nu z^{-1})^L G(z)] \Big|_{z=\nu} \quad 1\le i \le L$$

[例]利用部分分式法，求 $X(z)=1/(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1}),\ |z|>2$ 的z反变换。

解：

$$X(z) = \frac{A_1}{1-2z^{-1}} + \frac{A_2}{1-0.5z^{-1}}$$

$$A_1 = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}(1-2z^{-1})\Big|_{z=2} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}(1-0.5z^{-1})\Big|_{z=0.5} = -\frac{1}{3}$$

3、长除法

将 $G(z)$ 展开为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$ 的形式，右边序列采用降幂顺序长除

左边序列采用升幂顺序长除

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z|>\frac{1}{2}$$

长除法

$$
\begin{array}{r}
1-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{12}z^{-3}+\dots \\
1-\frac{1}{4}z^{-2}\ \big)\ 1-\frac{1}{3}z^{-1} \qquad\qquad \\
1-\frac{1}{4}z^{-2} \qquad \\
\hline
-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2} \qquad \\
-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{12}z^{-3} \\
\hline
\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{12}z^{-3} \\
\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{16}z^{-4} \\
\hline
\end{array}
$$

2.6.5 $\boxed{z变换}$ 与拉氏、傅氏变换的关系

离散的拉氏、傅氏变换

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\begin{cases} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \end{cases}$$

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j2\pi f$$

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad z \in C$$

2.7 系统函数

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$h(n)$：线性移不变系统单位抽样响应

$$Y(z) = X(z) H(z), \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

线性移不变系统的系统函数，单位圆 $z=e^{j\omega}$ 上系统函数即为系统频率响应

· 因果稳定系统

线性移不变系统稳定的充要条件 ①绝对可和 $\sum|h(n)|<\infty$ ② $H(z)$ 收敛域包括单位圆

$|h(n) z^{-n}| < \infty$

因果系统单位抽样响应为因果序列 $R_+ < |z| \le \infty$ ⇒ ① $h(n)$ 因果 ② 右边序列 $\lim_{z\to\infty} H(z)$ 有限，因果；左边序列 $\lim_{z\to 0} H(z)$ 有限，逆因果；双边序列，一定非因果

因果稳定系统收敛域含 $1 \le |z| \le \infty$ ⇒ 全部极点在单位圆内

一定右边序列

离散时间系统z变换

线性移不变系统常用差分方程表示

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m) \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} d_k D^k y(n) = \sum_{m=0}^{M} p_m D^m x(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} X(z)$$

则

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

对上式因式分解，令 $K = \frac{b_0}{a_0}$ 得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = K \frac{\prod_{m=1}^{M} (1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1-d_k z^{-1})}$$

所以

$$y(n) = \frac{\sum_{m=0}^{M} p_m D^m}{\sum_{k=0}^{N} d_k D^k} x(n) = H(D) x(n)$$

2.8 全通系统与最小相位

1、全通系统

系统幅度特性

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad 0 \le \omega \le \pi$$

称该系统为全通系统，频率响应可表示为：

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\theta(\omega)}, \quad 0 \le \omega \le \pi$$

一个N阶全通系统系统函数表达式为：

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = z^{-N} \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = z^{-N} \frac{D(z^{-1})}{D(z)}, \quad a_0 = 1$$

令 $z=e^{j\omega}$，由于 $D(e^{-j\omega}) = D^*(e^{j\omega})$，故

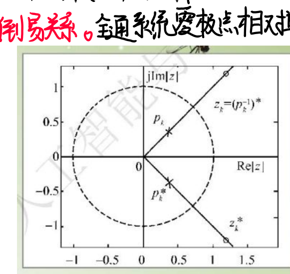
$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{D(e^{-j\omega})}{D^*(e^{j\omega})} \right| = 1$$

分子分母多项式系数相同而排列顺序相反

满足全通系统定义

2、全通系统零极点特性

设 $p_k = re^{j\varphi}$ 为 $H(z)$ 极点，$z_k = p_k^{-1} = r^{-1}e^{-j\omega}$ 一定为零点，即对实有理系统 $H(z)$，z_k 与 p_k 互为倒易关系。全通系统零极点相对单位圆镜像共轭成对，零点全在单位圆外



3、最小相位系统

零极点都在单位圆内的系统就是所谓的最小相位系统

*零点在单位圆外为最大相位系统，单位圆内外都有零点的系统称为混合相位系统

4、最小相位系统特性

①任意非最小相位系统都可以由最小相位系统和全通系统相级联构成

②最小相位系统具有最小相位超前时和最小相位滞后特性

信号系统响应各分量振幅包络的时延

*全通系统的相位在 $[0,\pi]$ 范围内为非正值

③最小相位系统具有能量延时最小的特性