传递函数 → 表征动态性能

定义：零值初始条件下，线性系统(线性元件)的输出拉氏变换和输入拉氏变换之比

$a_n\frac{d^n}{dt^n}c(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}c(t)+a_0c(t)=b_m\frac{d^m}{dt^m}r(t)+\cdots+b_1\frac{d}{dt}r(t)+b_0r(t)$

令 $C(s)=\mathcal{L}[c(t)]$，$R(s)=\mathcal{L}[r(t)]$，对上式两边求拉氏变换且所有初始值为0，有

$a_nS^nC(s)+\cdots+a_1sC(s)+a_0C(s)=b_ms^mR(s)+\cdots+b_1sR(s)+b_0R(s)$ 用s"代替算子 $\frac{d^n}{dt^n}$

$(a_ns^n+\cdots+a_1s+a_0)C(s)=(b_ms^m+\cdots+b_1s+b_0)R(s)$

$$\boxed{G(s)}=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_mS^m+\cdots+b_1s+b_0}{a_ns^n+\cdots+a_1s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

传函　输入　输出

☆已知输入R(s)和G(s)，即可以求出C(s) ⇒ C(s)=G(s)R(s)

性质：①仅适合线性定常系统

②传函是复变量s的有理分式，分子多项式阶次m，分母多项式的阶次n及系数(a_i, a_j)

由系统或元件的参数和结构决定，与外加输入与初始状态无关 且 $m\le n$ ⇒ 物理可实现

③传函代表了输入和输出之间的关系，不能提供系统内部结构信息

④传函已知的情况下，对不同输入可研究系统输出和响应 $C(s)=G(s)R(s)\xrightarrow{反变换}c(t)$

⑤多输入多输出通过传函矩阵表示　$R(s)=\mathcal{L}[r(t)]=1$

☆当初始条件为0，(各阶导数及函数值均为0)，且 $r(t)=\delta(t)$ 时系统的输出 $c(t)$ ⇒ 单位脉冲响应

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=C(s)$$

一个系统传函即为该系统的单位脉冲响应的拉氏变换

常见表示方式和术语：①有理分式 $G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$

②零极点形式 $G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=k^*\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$ 零点　传函的极点 ⇒ 求零极点；转折频率

根轨迹增益 $\frac{b_m}{a_n}$　首1多项式

$k=G(0)=\frac{b_0}{a_0}$，s=0导数项为0　尾1多项式　共轭复根/二阶项

③时间常数形式 $G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=k\frac{(\tau_1s+1)\cdots(\tau_ps+1)(\tau_1^2s^2+2\tau_1\zeta s+1)\cdots(\tau_q^2s^2+2\tau_q\zeta s+1)}{(T_1s+1)\cdots(T_xs+1)(T_1^2s^2+2T_1\zeta s+1)\cdots(T_y^2s^2+2T_y\zeta s+1)}$ ⇒ 求放大倍数；求Bode图；误差系数

☆静态放大系数　其中 $p+2q=m$，$x+2y=n$　实根/一阶项

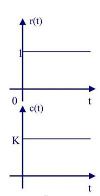
※ $k=k^*\frac{z_1z_2\cdots z_m}{p_1p_2\cdots p_n}$ 开环放大系数与稳态性能有关；闭环放大系数与脉冲响应稳态值有关

典型环节与传函 ①比例环节 $c(t)=kr(t)$ (又称无惯性环节/放大环节)

拉氏变换有 $C(s)=kR(s)$

⇒ $G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=k$

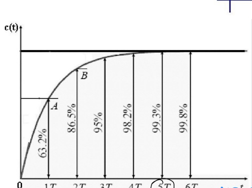
典型元件为电阻弹簧



②惯性环节 $T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=kr(t)$ (一阶常微分方程) → $c=k(1-e^{-\frac{t}{T}})$

拉氏变换有 $(Ts+1)C(s)=kR(s)$

⇒ $G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{k}{Ts+1}$ 比例系数　时间常数



T确定 ⇒ 稳态时间确定

典型环节为 RC电路，温度系统，水箱水位

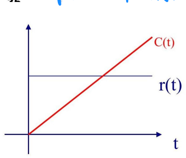
③积分环节 $T\frac{dc(t)}{dt}=r(t)$ (一阶常微分方程) 提升稳态准确性

拉氏变换 $TsC(s)=R(s)$

⇒ $G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts}$

$r(t)=1$时，$T\frac{dc}{dt}=1$ ⇒ $\frac{dc(t)}{dt}=\frac{1}{T}$

$\Rightarrow c(t)=\frac{t}{T}$



④微分环节 $c(t)=T\frac{dr(t)}{dt}$

拉氏变换有 $C(s)=TsR(s)$　理想微分环节

⇒ $G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=Ts$

☆不满足 $m\le n$，物理无法实现

☆当r(t)为阶跃输入时 $c(t)=T\delta(t)$

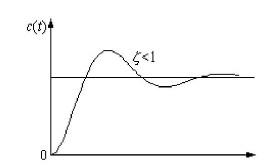
通常实际微分环节为

$G(s)=\frac{Ts}{T_1s+1}$ (T_1很小)

⑤二阶环节 (振荡环节) $T^2\frac{d^2c(t)}{dt^2}+2T\zeta\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$ (二阶常微分方程)

拉氏变换有 $T^2s^2C(s)+2T\zeta sC(s)+C(s)=R(s)$

⇒ $G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{T^2s^2+2T\zeta s+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\omega_n\zeta s+\omega_n^2}$ → 无阻尼自然振荡频率 ($\omega_n=\frac{1}{T}$) → 阻尼比



$0<\zeta<1$时，由于系统输出会出现振荡 ☆当$\zeta>1$时可拆分为两个一阶环节

典型环节是 RLC电路，电动机

⑥延滞环节(纯滞后环节) $c(t)=r(t-\tau)$ → 延滞时间(延迟时间)

⇒ $G(s)=e^{-\tau s}$ Laplace平移特性

典型环节是管道运输