# Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Τρίτη εργαστηριακή άσκηση

-

Μέθοδος μέγιστης καθόδου με προβολή

*Κωνσταντίνος Κωνσταντινίδης,*

*ΑΕΜ: 9162 | konkonstantinidis@ece.auth.gr*


Το παρόν είναι μία αναφορά που παρουσιάζει και σχολιάζει τα ζητούμενα διαγράμματα και έπειτα καταλήγει στα συμπεράσματα της έρευνας.

Η συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση είναι η:

$f : R^2 \rightarrow R, \quad f(x) = 0.5*x_1^2 + 0.5*x_2^2$

## Θέμα 1

Με τη μέθοδο της μέγιστης καθόδου , με ακρίβεια ε = 0.01 και σημείο εκκίνησης το (1,2) , έχουμε τα εξής αποτελέσματα συναρτήσει του βήματος $\gamma_k$.

i) Για $\gamma_k$ = 0.1, χρειάστηκαν 52 επαναλήψεις για να συγκλίνει στο x = (0.0042, 0.0083).

ii) Για $\gamma_k$ = 1, χρειάστηκε 1 επανάληψη για να συγκλίνει στο x = (0,0). Αυτό συμβαίνει καθώς, για $\gamma_k$ = 1, έχουμε ότι το $x_{k+1} = x_k - \text{gradf}(x_k)$. Επειδή όμως gradf = $(x_1,x_2)$, έχουμε ότι είναι $x_{k+1} = 0$. Πράγματι, για οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης, η συνάρτηση πάντα συγκλίνει στο σημείο ολικού ελάχιστου (0,0) σε ένα βήμα.

iii) Για $\gamma_k$ = 2, η συνάρτηση δεν σύγκλινε. Για κάθε επανάληψη ως τις 500 επαναλήψεις που τις επιτράπηκε να τρέξει, η συνάρτηση πήγαινε από το (1,2) στο(-1,-2) και ξανά πίσω, έπαιρνε δηλαδή συνέχεια για $x_{k+1}$ το $-x_k$.

iv) Για $\gamma_k$ = 10, χρειάστηκαν 324 επαναλήψεις για να καταλήξει η συνάρτηση στο x = (inf,-inf). Μαθηματικά, έχουμε ότι για $\gamma_k$ = 10, είναι:
$x_{k+1} = x_k - 10*\text{gradf}(x_k)$. Όμως είναι $\text{gradf}(x_k) = x_k$, επομένως έχουμε ότι:
$x_{k+1} = -9x_k$. Και μαθηματικά βλέπουμε λοιπόν πως με τόσο μεγάλο $\gamma_k$, η σύγκλιση είναι αδύνατη, καθώς για οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης, το $x_k$ απλά θα μεγαλώνει (κατά απόλυτη τιμή) κάθε επανάληψη.

<u>Έρευνα σύγκλισης :</u>

Όπως είδαμε από iv), για πολύ μεγάλο $\gamma_k$ ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει. Μέχρι πόσο μπορεί να είναι λοιπόν το $\gamma_k$ για να συγκλίνει ο αλγόριθμος; Στην συγκεκριμένη περίπτωση, εύκολα βλέπουμε πως αν το $\gamma_k$ είναι μεγαλύτερο της μονάδας, θα ισχύει $|x_{k+1}| > x_k$, δηλαδή το $x_k$ θα αυξάνεται συνεχώς και η σύγκλιση θα είναι αδύνατη. Πρέπει λοιπόν το $\gamma_k$ να είναι μεταξύ 0 και 1.

## Θέμα 2

Η συνάρτηση, έχοντας ως σημείο εκκίνησης της αναζήτησης το (8,3), θεωρώντας $s_k$ = 15, $\gamma_k$ = 0.1 και ακρίβεια ε = 0.01, χρειάστηκε 59 επαναλήψεις για να συγκλίνει στο x = ($5.71*10^{-18}$, -0.01). Παρατηρούμε πως χρειάστηκαν περισσότερες επαναλήψεις σε σχέση με το (Θέμα 1,i). Ωστόσο, χρησιμοποιήθηκε διαφορετικό σημείο εκκίνησης της αναζήτησης, και ο αριθμός των επιπλέον επαναλήψεων είναι μικρός (7), επομένως κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο τελικά.

## Θέμα 3

Η συνάρτηση, έχοντας ως σημείο εκκίνησης της αναζήτησης το (-5,7), θεωρώντας $s_k$ = 20, $\gamma_k$ = 0.3 και ακρίβεια ε = 0.02, χρειάστηκε 161 επαναλήψεις για να συγκλίνει στο x = (-0,0116, -0,0116). Παρατηρούμε πως χρειάστηκαν περισσότερες επαναλήψεις σε σχέση με το (Θέμα 1,i). Αυτό οφείλεται μερικώς στην επιλογή διαφορετικού σημείου εκκίνησης της αναζήτησης, αλλά κυρίως στο μεγαλύτερο βήμα $\gamma_k$ το οποίο στη προκειμένη περίπτωση είναι τριπλάσιο. Ένας απλός πρακτικός τρόπος για συγκλίνει πιο γρήγορα η μέθοδος είναι να μη γίνεται χρήση σταθερού βήματος $\gamma_k$, αλλά μεταβλητού, είτε κάνοντας χρήση του κανόνα Armijo, είτε διαλέγοντας το $\gamma_k$ που ελαχιστοποιεί κάθε φορά την $f(x_k + \gamma_k * d_k)$.

## Θέμα 4

Καταρχάς, σε αντίθεση με τα θέματα 2 και 3, έχουμε δώσει πολύ μικρά $s_k$ και $\gamma_k$, επομένως εκ των προτέρων ξέρουμε ότι η συγκεκριμένη εκτέλεση της συνάρτησης θα χρειαστεί πολλές παραπάνω επαναλήψεις για να συγκλίνει σε σχέση με τις προηγούμενες δύο φορές. Πράγματι, πατώντας να εκτελεστεί ο αλγόριθμος για το Θέμα 4, έχουμε ότι χρειάστηκαν 7.346 επαναλήψεις ώστε η τελική τιμή του x να είναι [0.0071 , 0.0071], χιλιάδες φορές παραπάνω δηλαδή από όσες χρειάστηκε η μέθοδος για να συγκλίνει με συγκριτικά μεγαλύτερα βήματα.