

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Ελαχιστοποίηση με χρήση παραγώγων

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας δοσμένης συνάρτησης πολλών μεταβλητών $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ χωρίς περιορισμούς. Οι αλγόριθμοι που θα χρησιμοποιήσουμε βασίζονται στην ιδέα της επαναληπτικής καθόδου, βάσει της οποίας ξεκινάμε από κάποιο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και παράγουμε διαδοχικά τα διανύσματα x_1, x_2, \dots έτσι ώστε $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Οι αλγόριθμοι αναζήτησης που θα μελετήσουμε είναι:

- Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)
- Μέθοδος Newton
- Μέθοδος Levenberg-Marquardt

Η αντικειμενική συνάρτηση που θα μελετήσουμε είναι η:

$$f(x, y) = x^3 e^{-x^2 - y^4}.$$

Θέμα 1 Σχεδιάστε την f για να πάρετε μια γενική εικόνα της μορφής της.

Θέμα 2 Ελαχιστοποιήστε την f με χρήση της μεθόδου Μέγιστης Καθόδου, χρησιμοποιώντας ως αρχικά σημεία (x_0, y_0) τα i) $(0, 0)$, ii) $(-1, -1)$, iii) $(1, 1)$. Το βήμα γ_k θα επιλεγεί: α) σταθερό (της επιλογής σας), β) τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k + \gamma_k d_k)$ και γ) βάσει του κανόνα Armijo. Σχολιάστε τις διαφορές στα αποτελέσματα, σε περίπτωση που προκαλούνται, λόγω της επιλογής του σημείου έναρξης (x_0, y_0) του αλγορίθμου, καθώς επίσης και λόγω της επιλογής του βήματος γ_k . Οδηγούμαστε πάντα σε σωστό αποτέλεσμα; Αν όχι τι πιστεύετε ότι φταίει;

Θέμα 3 Επαναλανάβετε τα ερωτήματα του Θέματος 2 χρησιμοποιώντας την μέθοδο Newton.

Θέμα 4 Επαναλανάβετε τα ερωτήματα του Θέματος 2 χρησιμοποιώντας την μέθοδο Levenberg-Marquardt.

- Να παραδώσετε όλους του κώδικες των προγραμμάτων που γράψατε (m-files) και μία αναφορά στην οποία θα καταγράψετε όλες τις παρατηρήσεις σας (σύγκλιση και σύγκριση των μεθόδων, αριθμός επαναλήψεων, γραφική παράσταση της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς k).

- Σχολιάστε τυχόν αποκλίσεις από τις επιθυμητές τιμές λόγω εγκλωβισμού του αλγορίθμου σε κάποιο τοπικό ακρότατο (ελάχιστο ή μέγιστο). Παρατηρήστε την εξάρτηση του αποτελέσματος από την τιμή εκκίνησης (x_0, y_0) του αλγορίθμου, καθώς επίσης και από την επιλογή του βήματος γ_k .