CORRECTION DU CONCOURS DIRECT D'ENTREE À L'ESATIC

SESSION 2012

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

QUESTION À CHOIX DIRECTS (QCD)

Consignes : de la question N° 1 à la question N°13, choisir **A** si l'assertion est vraie. Choisir **B** si l'assertion est fausse.

Question-1 : Si (U_n) converge vers 0 alors (U_n) est une suite croissante et négative ou décroissante et positive. **A** ■ . **B** □

Justification : Si une suite converge vers 0 c'est que soit 0 la majore, soit 0 la minore.

Question-2 : A est évènement d'un univers tels que P($\bar{A}$)= $\frac{7}{11}$
La probabilité de l'évènement P(A) = $\frac{5}{11}$ **A** □ . **B** ■

Justification : On sait que P(X)+P($\bar{X}$) = 1 or ici on n'a P(A)+P($\bar{A}$) = $\frac{12}{11}$.

Question-3 : soit D et E deux évènements incompatibles d'un univers
Alors les évènements D et $\bar{E}$ sont incompatibles **A** □ . **B** ■

Justification : D et E sont déjà incompatibles Alors D et $\bar{E}$ ne peuvent en aucun cas être incompatibles puisque D et $\bar{E}$ auront des éventualités en commun.

Question-4 : Lors d'un jet de deux dés, on donne les évènements suivants :
A : «le produit des numéros obtenus est au plus égal à 6»
B : «le produit des numéros obtenus est au moins égal à 6»
A et B deux évènements incompatibles **A** □ . **B** ■

Justification : Car A et B ont en commun l'éventualité, l'obtention du chiffre 6.

Question-5 : Le coefficient de corrélation linéaire r d'une serie statistique double est un nombre qui vérifie la relation |r| ≤ 1 **A** ■ . **B** □

Justification : on a $\mathbf{r} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

comme la covariance est toujours inférieure ou égale au produit des écarts-type, le coefficient est compris entre -1 et 1 d'où |r| $\leq$ 1

Question-6 :

La covariance est un nombre réel toujours négatif **A** ☐ . **B** ■

Justification : À complèter.!!!

Question-7 :

La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{sin(n)}{ln(n+2)}$ diverge **A** ■ . **B** ☐

Justification : Car cette suite n'admet pas de limite en + ∞

Question-8 :

On considère dans C le nombre complexe z = $(1+i)^2$

arg(z) = $\frac{\pi}{4}$ + 2kπ ; k $\in$ Z **A** ☐ . **B** ■

Justification : On a z $= (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^2$ donc z $= (2e^{i\frac{\pi}{2}})$ d'où arg(z) = $\frac{\pi}{2}$ + 2kπ ; k $\in$ Z

Question-9 :

Soit une fonction g définie sur [0 ;1] par g(x) = $\int_0^x e^t cos(t)dt$

g est strictement croissante sur [0 ;1] **A** ■ . **B** ☐

Justification : Car g'(x) = $e^t cos(t)$ or $e^t cos(t) > 0$ sur [0 ;1]

Question-10 :

Le nombre de mots de 4 lettres qu'on peut écrire avec les lettres du mots PRODUIT est 35

N.B : un mot peut avoir un sens ou nom **A** ■ . **B** ☐

Justification : On ne sais pas dans quel ordre sera pris les lettres dans le mots produit donc on fait une combinaison de 4 dans 7 ce qui nous fait $C_7^4 = 35$

Question-11 :

Pour tout nombre réel x différent de 1 on n'a : $\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$

donc $\int_{-3}^{0} \frac{x^2}{(x-1)^2}dx$ = - $\frac{7}{4}$ + ln(2) **A** ☐ . **B** ■

Justification : $\forall x \neq 1$ on a : $\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$

$\int_{-3}^{0} \frac{x^2}{(x-1)^2}dx = \int_{-3}^{0}(1)dx + \int_{-3}^{0} \frac{2}{(x-1)}dx + \int_{-3}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}dx$

$\int_{-3}^{0} \frac{x^2}{(x-1)^2}dx$ = 3 - 2ln(4) +1 - $\frac{1}{4}$

$\int_{-3}^{0} \frac{x^2}{(x-1)^2}dx$ = $\frac{15}{4}$ - 4ln2

Question-12 :

$\int_{1}^{\alpha} \frac{ln(x+1)}{x^2}dx = 2\ln 2 - \frac{ln(1+\alpha)}{\alpha} + \ln(\frac{\alpha}{1+\alpha})$ **A** ■ . **B** □

Justification : On va commencé par faire une intégration par partie avec :

u(x) = ln(x+1) ⇒ u'(x) = $\frac{1}{x+1}$

v'(x) = $\frac{1}{x^2}$ ⇒ v(x)= $-\frac{1}{x}$

$\int_{1}^{\alpha} \frac{ln(x+1)}{x^2}dx = [-\frac{ln(x+1)}{x}]_{1}^{\alpha} + \int_{1}^{\alpha} \frac{1}{x(x+1)}dx$

avec $\frac{1}{x(x+1)}$ = $\frac{1}{x}$ - $\frac{1}{(x+1)}$

$\int_{1}^{\alpha} \frac{ln(x+1)}{x^2}dx = -\frac{ln(\alpha+1)}{\alpha}$ + ln(2) + $\int_{1}^{\alpha} \frac{1}{x}dx$ - $\int_{1}^{\alpha} \frac{1}{x+1}dx$

$\int_{1}^{\alpha} \frac{ln(x+1)}{x^2}dx$ = 2ln(2)+ln($\frac{\alpha}{\alpha+1}$)-ln($\frac{\alpha+1}{\alpha}$)

Question-13 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$: f(x) =$\frac{3e^x-1}{e^x+1}$ et (C) la courbe de f

Le point A(0 ;1) est un centre de symétrie pour (C) **A** ■ . **B** □

Justification : Pour qu'un point Ω(a,b) soit centre de symétrie pour (C) il faut qu'il respect la formule suivante : $\forall h \in \mathbb{R}$ f(a+h)+f(a-h) = 2b et ici nous avons, a=0, b=1, et posons h = 1 alors :

f(h) = $\frac{3e^h-1}{e^h+1}$ et f(-h) = $\frac{3-e^h}{e^h+1}$ donc f(h)+f(-h) = 2 donc A(0 ;1) est bien un centre de symétrie pour (C).

QUESTION À CHOIX MULTIPLES (QCM)

Consignes : de la question N° 14 à la question N°24, choisir la ou les bonnes réponses

Question-14 :

Soit (X,Y) une série statistique double. On n'appelle covariance le nombre noté COV(X,Y) et définie par :

- □ **A :** COV(X,Y) = ($\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$) -($\bar{X}\bar{Y}$) .
- □ **B :** COV(X,Y) = ($\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$) -($\overline{XY}$)
- ■ **C :** COV(X,Y) = ($\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$) -($\bar{X}\bar{Y}$)

- ☐ **D :** COV(X,Y) = $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i)$ -($\bar{X}\bar{Y}$)

Justification : Formule du cours

Question-15 :

soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $\frac{e^{2x+1}-e}{x}$; (C) sa courbe représentative et g la fonction définie par g(x) = e^{2x+5}

- ☐ **A :** g est dérivable en 0 et $\lim_{x\to 0} f(x)$ = g'(0) .
- ■ **B :** La limite en 0 de f est égale à 2e
- ■ **C :** L'axe des abscisses est asymptote à (C).
- ☐ **D :** $\forall x \neq 0$,f'(x) = $\frac{e}{x^2}[(x-1)e^{2x}+1]$

Justification : A est faux verifiez que $\lim_{x\to 0} f(x) \neq$ g'(0)

B est vrai car $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e(e^{2x}-1)}{x}$ posons X = 2x donc x = $\frac{X}{2}$ donc la limite devient $\lim_{X\to 0} \frac{2e(e^X-1)}{X}$ = 2e car on na la limite de référence $\lim_{X\to 0} \frac{(e^X-1)}{X} = 1$

C est vrai car on a $\lim_{x\to -\infty} e(x^{-1}e^{2x} - \frac{e}{x}) = 0$ et enfin D est faux car f'(x) = $\frac{e}{x^2}[(2x-1)e^{2x}+1]$

Question-16 :

On considère le nombre complexe : Z = 1-$tan^2(\alpha)$ + 2i $tan(\alpha)$ où $\alpha \in$]-$\frac{\pi}{4}$;0[

- ☐ **A :** Re(Z) $<$ 0 .
- ■ **B :** |Z| = 1 + $tan^2(\alpha)$
- ■ **C :** Re(Z) = $\frac{cos(2\alpha)}{cos^2(\alpha)}$
- ☐ **D :** arg(Z) = $\alpha + 2k\pi$; k $\in$ Z

Justification : A est faux sur]-$\frac{\pi}{4}$;0[on a 0 $<$ cos(x) $<$ 1 et sin(x) $<$ 0 on a donc $\frac{1}{cos(x)} > 1$ d'où $\frac{sin(x)}{cos(x)} < 1$ donc $tan^2(x) < 1$, Re(Z) $<$ 0 est faux

B est vrai car |Z| = $\sqrt{(1-tan^2(\alpha))^2 + (2tan(\alpha))^2}$ |Z| = $\sqrt{4tan^2(\alpha)+1-2tan^2(\alpha)+tan^4(\alpha)}$

|Z| = $\sqrt{1+2tan^2(\alpha)+tan^4(\alpha)} = \sqrt{(1+tan^2(\alpha))^2} = 1+tan^2(\alpha)$

C est vrai car Re(Z) = 1 - $tan^2(\alpha)$ = 1 - $\frac{sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{cos^2(\alpha)-sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{cos(2\alpha)}{cos^2(\alpha)}$

D est faux car Z = 1-$tan^2(\alpha)$ + 2i $tan(\alpha)$ = $(itan(\alpha)+1)^2$ donc arg(z) = 2arg($(itan(\alpha)+1)$)

arg(z) = 2arg($(i\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} + \frac{cos(\alpha)}{cos(\alpha)})$ = 2arg($\frac{1}{cos(\alpha)}$ + 2arg($cos(\alpha)+isin(\alpha)$) donc

arg(z) = 0+2α+2kπ/ k $\in$ Z

Question-17 :

soit f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $xe^{2x}-1$

- ☐ **A :** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f'(x) = (x+1)e^{2x} .
- ■ **B :** f est croissante sur [-$\frac{1}{2}$; $+\infty$[
- ■ **C :** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ **D :** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Justification : A est faux car f'(x) = $(2x+1)e^{2x}$

B est vrai car le signe de f'(x) sur [-$\frac{1}{2}$; $+\infty$[est positif

C est vrai car $\lim_{x\to+\infty} xe^{2x} - 1 = +\infty$

D est faux car posons X = 2x $\Rightarrow$ x = $\frac{X}{2}$ donc la limite devient $\lim_{x\to-\infty} \frac{X}{2}e^{X} - 1 = 0$

Question-18 :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. on extrait successivement et avec remise 3 boules de cette urne. on désigne par p la probabilité associée et par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

- ☐ **A :** P(X=2) = $\frac{18}{125}$.
- ☐ **B :** L'espérance mathématique de X, E(X) = 1.2
- ☐ **C :** La variance V(X) = 0.72
- ■ **D :** P(X≥1) = $\frac{98}{125}$

Justification : A est faux car P(X=2) = $\frac{2}{5} * \frac{2}{5} * \frac{3}{5} = \frac{12}{125}$

B est faux car E(x) = $\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$ et dans ce cas E(X) = $\frac{18}{125} * \frac{24}{125} = \frac{42}{125} = 0.336$

C est faux car V(X) = $\sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P_i$ donc ici V(X) = $(1-0.336)^2 * \frac{18}{125} + (2-0.336)^2 * \frac{12}{125} =$ 0.3293

D est vrai. prenon soit A lévènement obtenir 0 boule rouge donc P(A) = $\frac{27}{125}$ donc l'évènement contraire est P(X≥1) = 1 - P(A) = $\frac{98}{125}$

Question-19 :

quatre points M,N,P et Q distints forment un parallélogramme MNPQ dont les diagonales se coupent en o. Alors :

- ☐ **A :** N est le barycentre de {(M,1),(P,1),(Q,-2)}
- ☐ **B :** $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$
- ☐ **C :** $MQ^2 - PQ^2 = 2\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{MQ}$
- ■ **D :** $2(MN^2 + MQ^2) = NQ^2 + MP^2$

Justification : A est faux car ici la condition d'existance du barycentre n'est pas respectée 1+1-2=0

B est faux $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{0}$ car $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QN} \neq \overrightarrow{0}$

C est faux car $MQ^2 - PQ^2 = MQ^2 - (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ})^2$

$= MQ^2 - PM^2 - 2\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{MQ} - MQ^2 = -PM^2 + 2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$

supposons maintenant :$-PM^2 + 2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$ car $2\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MQ}$

$-PM^2 + \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = 0 \Rightarrow -\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = 0$

$\overrightarrow{MP}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$ ce qui est absurde

D est vrai. on a : $NQ^2 + MP^2 = (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ})^2 + (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP})^2$ on a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

$NQ^2 + MP^2 = (\overrightarrow{-MN} + \overrightarrow{MQ})^2 + (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN})^2$

$= MN^2 - 2\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MQ} + MQ^2 + MQ^2 + 2\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MQ} + MN^2 = 2(MN^2 + MQ^2)$

Question-20 :

L'ESATIC Sélectionne ses étudiants avec une épreuve sous la forme de QCM portant sur 15 questions. pour chaque question, il y a quatre réponses réponses dont une seule est vraie.

Le nombre de possibilités de répondre :

- ■ **A :** Au QCM est 4^{15}
- ■ **B :** correctement à exactement dix questions est $C_{15}^{10} \times 3^5$
- ☐ **C :** juste à toutes les questions est 15
- ☐ **D :** correctement à au moins une question 4^{15} - 15

Justification : A est vrai Puisque pour chaque question on a 4 réponses possibles alors sur les 15 questions on a 4^{15} possibilités.

B est vrai car si l'on repond juste à 10 questions parmis 15, on ne sait pas dans quel ordre sont les 10 questions donc on va choisir les 10 questions bien repondues dans les 15 ce qui nous donne C_{15}^{10} et on sait dors et déjà que les 5 autres questions ont une réponse fausse ce qui nous donne 3 possibilités pour chaque question mal repondues d'où 3^5 pour les questions mal repondues.

C est faux car on a une seule possibilités de répondre juste au 15 questions c'est de trouver à chaque question la bonne réponse .

D est aussi faux car le nombre de possibilités de répondre à aucune questions juste est 3^{15}. si l'on retire cela dans l'univers qui est 4^{15}, il nous restera le nombre de possibilités de répondre au moins juste à une question.

Question-21 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1\,;\, U_1 = 2$ et pour tout n $\in \mathbb{N}$

$U_{n+2} = \frac{1}{2}(U_n - U_{n+1})$. La suite V_n est définie par $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$

- ■ **A :** La suite V_n est géométrique
- ☐ **B :** La suite U_n est arithmétique
- ■ **C :** $\forall n \in \mathbb{N}; U_n = (-1)^{n-1} + (\frac{1}{2})^{n-1}$
- ☐ **D :** Aucune des réponses précédentes.

Justification : A est vrai car $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{(U_{n+2} - \frac{1}{2}U_{n+1})}{(U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n)} = \frac{(\frac{1}{2}U_n - U_{n+1})}{(U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n)} =$ -1

B est faux car $U_{n+2} = \frac{1}{2}(U_n - U_{n+1}) \Rightarrow 2U_{n+2} = (U_n - U_{n+1}) \Rightarrow (U_{n+1} - U_n) = -2U_{n+2}$

C est vrai. effectuons une demonstration par recurence on a : 1^{ere} étape : U_0 est vrai car

$U_0 = (-1)^{-1} + (\frac{1}{2})^{-1} = -1 + 2 = 1$

supposons que U_k est vrai donc $U_k = (-1)^{k-1} + (\frac{1}{2})^{k-1}$

Démontrons que U_{k+1} est vrai. on sait que $U_{k+1} = V_k + \frac{1}{2}U_k$ or $V_k = \frac{3}{2}(-1)^k$ etant une suite géométrique de raison -1.on n'a donc $U_{k+1} = \frac{3}{2}(-1)^k + \frac{1}{2}((-1)^{k-1} + (\frac{1}{2})^{k-1})$ quand on dévèloppe on tombe sur U_{k+1} $=(-1)^k + (\frac{1}{2})^k$

Question-22 :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + (2cos(\alpha))z + 1 = 0$ où α est un paramètre réel

- ☐ **A :** Le discriminant $\Delta = 4sin^2(\alpha)$
- ■ **B :** Une solution de l'équation est $z_1 = cos(\alpha + \pi) + isin(\alpha + \pi)$
- ■ **C :** L'autre solution est $z_2 = \overline{z_1}$
- ☐ **D :** Le produit des solutions $z_1 z_2$ = -1

Justification : A est faux car ici le discriminant Δ = -4$sin^2(\alpha)$

B est vrai car $z_1^2 + (2cos(\alpha))z_1 + 1 = 0$ utilisez $cos(\alpha + \pi) = -cos(\alpha)$ et $sin(\alpha + \pi) = -sin(\alpha)$

C est Vrai car le conjugé de z_1 est aussi solution de cette équation.

D est aussi faux car $z_1 z_2 = 1$

Question-23 :

Dans $\mathbb{R}$:

- ☐ **A :** ln(x+1) = ln(2x+3) a pour unique solution -2
- ☐ **B :** (x+1)ln(x+1)=0 a une solution qui est égal à -1
- ■ **C :** e^3 est une solution de $ln(x)^2 - 2ln(x) - 3 = 0$
- ■ **D :** ln(2-x)+1 $\geq$ 0 pour ensemble de solution S = $]-\infty; 2[$

Justification : A est faux car -2 n'est pas dans l'ensemble solution

B est faux car -1 n'est pas dans l'ensemble solution de cette équation.

C est vrai car $ln(e^3)^2 - 2ln(e^3) - 3 = 0$

D est vrai il suffit de chercher l'ensemble solution pour se rendre compte qu'il est égal à $]-\infty; 2[$

Question-24 :

Les nombres a et b sont des nombres réels non nuls Alors :

- ☐ **A :** $\forall$ a $\in$ $]0;+\infty[$ on a :$\sqrt{a} < a < a^2$
- ■ **B :** si $0 <$ a $<$ b ≤ 1 alors $\sqrt{b} - \sqrt{a} < b - a$
- ■ **C :** si $1 \leq$ a $<$ b alors $\sqrt{b} - \sqrt{a} < b - a$
- ☐ **D :** Quel que soit le couple (a ;b) tels que $0 <$ a $<$ b on a : $\frac{1}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Justification : A est faux car 1 ne respect pas cette relation

B est vrai car on sait que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ car $(\sqrt{a+b})^2 =$ a+b $= \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 \leq \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$
donc $(\sqrt{a+b})^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Rightarrow (\sqrt{a+b}) \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})$
$\sqrt{b} = \sqrt{b-a+a} \leq \sqrt{b-a} + \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b-a} < b - a$

C est vrai car B est toujours vrai sur $[1\,;+\infty[$

D est faux il suffit de prendre a=3 et b=5 alors la relation donne quelque chose d'absurde.

Réalisé par OVI Jude Schadrac, KONE Namogo Ben Armel, BOUAKI Kouadio Julien, DJAKI Loba Stephane
Etudiants à L'Ecole Supérieure Africaine des Technologies de l'Information et de la Communication
Mail : elitech32@gmail.com

58-79-51-80 - 48-73-43-15 - 48-59-49-99 - 79-87-94-36