

CORRECTION DU CONCOURS DIRECT D'ENTREE À L'ESATIC

SESSION 2016

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

QUESTION À CHOIX DIRECTS

Consignes : Choisir l'assertion qui est vraie.

Question-1 : Si (a_n) est une suite tel que : $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n^2 - 3n$

alors (U_n) est une suite arithmétique.

A Vrai ■

B Faux □

Justification : $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n^2 - 3n = \frac{n}{2}(4n - 6)$ en utilisant $a_n = a_p + (n - p)r \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)r$ on trouve que $r=4$ et $a_1 = -1$.

Question-2 : $0 < k < 1$ et (U_n) la suite définie par : $U_0 = 1$ et $(U_{n+1} = (1 + k^n)U_n)$

– □ **A :** $U_n = (1 + k)(1 + k^2)(1 + k^3)\dots(1 + k^{n-1})$

– □ **B :** $U_n = (1 + k)(1 + 2^n)(1 + 3^n)\dots(1 + k^n)$

– □ **C :** $U_n = 1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^n$

– ■ **D :** Aucune réponse précédente n'est juste

Justification : car on ne retrouve pas $U_0 = 1$ avec aucune de ces formules.

Question-3 : (V_n) la suite définie par $(V_0) = 2$ et $V_n = 2V_{n-1} - n$; et pour tout entier naturel n on a $V_n = 2^n + n + 1$

A Vrai □

B Faux ■

Justification : par récurrence on a $V_0 = 2^0 + 0 + 1 = 2$ supposons que $V_k = 2^k + k + 1$ est vrai par la suite on trouve que $V_{k+1} = k + 1$.

Question-4 : (W_n) la suite telle que $W_0 = 1$ et pour tout entier naturel n $W_{n+2} = 5W_{n+1} - 6W_n$ on n'a donc $W_n = 2^{n+1} - 3^n$

A Vrai □

B Faux ■

Justification : par récurrence la formule n'est pas vérifiée

Question-5 : soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$ on n'a alors :

– □ **A :** $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128i$

– □ **B :** $z^{14} = 64 - 64i$

- ☒ **C** : $z^{14} = -64 + 64i\sqrt{3}$
- ☐ **D** : $z^{14} = -128 + 128i\sqrt{3}$

Justification : car $z = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$ donc $z^{14} = 128(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -64 + 64i\sqrt{3}$

Question-6 : On répète quatre fois de manière indépendante une expérience aléatoire dont la probabilité de succès est 0,35 Alors la probabilité d'obtenir au moins un succès est :

- ☐ **A** : environ 0,015
- ☒ **B** : environ 0,821
- ☐ **C** : environ 0,985
- ☐ **D** : environ 0,025

Justification : car la probabilité d'avoir zero succès est $p = C_4^0 * 0,35^0 * (1 - 0,35)^4 = 0,1785$ donc la valeur recherchée est $1 - 0,1785 = 0,821$

Question-7 : $(U_n); (V_n); (W_n)$ sont trois suites définies par : pour tout n entier naturel $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ ensuite $V_n = \frac{U_{n-1}}{U_n}$ et $W_n = \ln(V_n)$ avec $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ et $x > \frac{1}{2}$

- ☐ **A** : (V_n) est une suite géométrique
- ☐ **B** : (V_n) est une suite arithmétique
- ☒ **C** : (V_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

Justification : car la suite ne respecte pas les lois d'une suite géométrique ni d'une suite arithmétique

Question-8 : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ et $x > \frac{1}{2}$ $(U_n); (V_n); (W_n)$ sont trois suites définies par : pour tout n entier naturel $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ ensuite $V_n = \frac{U_{n-1}}{U_n}$ et $W_n = \ln(V_n)$

- ☐ **A** : $U_n = [1 - (\frac{1}{2})^{2^n}]^{-1}$
- ☐ **B** : $\lim U_n = 2$
- ☐ **C** : $U_n = [1 - (-\frac{1}{2})^{2^n}]$

Justification :

Question-9 : soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3\sin^3 x - 6\sin x + 5}{\sin^2 x + 1}$ alors ça dérivée est :

- ☐ **A** : $f'(x) = \frac{4\sin^2 x \cos x}{(\sin^2 x + 1)^2}$
- ☐ **B** : $f'(x) = \frac{9\sin^2 x \cos x - 6\cos x}{2\sin x \cos x}$
- ☐ **C** : $f'(x) = \frac{(3\sin^4 x + 15\sin^2 x + 10\sin x - 6)\cos x}{(\sin^2 x + 1)^2}$
- ☒ **D** : Aucune réponse précédente n'est juste

Justification : car la dérivée recherchée est plutôt $f'(x) = \frac{(3\sin^4 x + 15\sin^2 x - 10\sin x - 6)\cos x}{(\sin^2 x + 1)^2}$

Question-10 : La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur $[0;1]$ est :

- ☐ **A :** La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur $[0;1]$ est e
- ☐ **B :** $\int_{-1}^1 (x^2 + x^3) \sin^3 x dx = 0$
- ☒ **C :** $\int_0^\pi e^{\cos x} dx = \int_{-\pi}^0 e^{\cos x} dx$
- ☒ **D :** $\int_0^\pi e^{\cos x} dx = \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{\cos x} dx$

Justification : car la fonction $e^{\cos x}$ est une fonction pair

Question-11 : soit $I = \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$ la valeur de I est :

- ☐ **A :** $I = |-\frac{1}{e} - 1| - |e - 1|$
- ☐ **B :** $I = e + \frac{1}{e}$
- ☐ **C :** $I = 2(e - 1)$
- ☒ **D :** $I = e + \frac{1}{e} - 2$

Justification : car ici $I = [e^x - x]_0^1 + [x - e^{-x}]_{-1}^0 = e + \frac{1}{e} - 2$

Question-12 : pour tout n entier naturel $I_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t + 1} dt$:

- ☒ **A :** $I_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- ☒ **B :** I_n est décroissant
- ☐ **C :** pour tout entier naturel n , $I_1 + I_2 + \dots + I_n = \ln(n+2)$

Justification : car $I_n = [\ln|e^t + 1|]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}$ on a donc $I_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ qui a une dérivée négative donc décroissante

Question-13 : Soit $f(x) = kx + 1$, la valeur de k telle f soit une fonction de densité est :

- ☒ **A :** $k = -\frac{1}{2}$
- ☐ **B :** $k = \frac{1}{2}$
- ☐ **C :** $k = 0$

Justification : car pour $k = -\frac{1}{2}$ on a $\int_0^2 \left(-\frac{1}{4} + 1\right) dx = 1$

Question-14 : Soit $f(x) = 2x - 1$, avec f une fonction qui est définie sur \mathbb{R} alors la fonction f peut être une fonction densité de probabilité sur :

- ☒ **A :** $\left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$
- ☐ **B :** $[1; 2]$

– ■ C : $[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

Justification : car la fonction doit être continue, positive sur $[a; b]$ et $\int_a^b f(x)dx = 1$
 $\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (2x-1)dx = 1$ et $\int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (2x-1)dx = 1$

Question-15 : Une maladie touche 5% de la population d'un pays. On prélève au hasard un échantillon de 100 personnes . L'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de personnes atteintes est :

- □ A : $[0,04; 0,06]$
- ■ B : $[0,01; 0,09]$
- □ C : Aucune de ces réponse

Justification : en appliquant la formule suivante $[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$ avec $p=0,05$ et $n=100$

Question-16 : L'espace est muni d'un repère (O,I,J,K) les points A(1;2;1);B(0;2;2); C(0;0;5) sont alignés : A Vrai □ . B Faux ■

Justification : Car \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaire

Question-17 : L'espace est muni d'un repère (O,I,J,K) les points A(1;2;1);B(0;2;2); C(0;0;5) sont coplanaires : A Vrai ■ . B Faux □

Justification : Car il existe un couple α et β tel que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec $\alpha = \frac{11}{4}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$

Question-18 : On donne ci-dessous les représentations paramètres de deux droites.

$$(d_1) \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+2t \end{cases}$$

$$(d_2) \begin{cases} x = 3t \\ y = 1+2t \\ z = 2-t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

(d_1) et (d_2) sont coplanaires

A Vrai □ . B Faux ■

Justification : Car leur vecteur directeur n'est pas colinéaire et les droites (d_1) et (d_2) n'ont pas de points d'intersection

Question-19 : ABC est un triangle équilatéral de côté a ($a>0$). L'ensemble des points M du plan vérifiant : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{4}$ est :

- ☐ **A** : Le cercle contenant le point A
- ☐ **B** : Une droite
- ☐ **C** : le cerce inscrit dans ABC
- ☐ **D** : un ensembe contenant un seul point
- ☒ **E** : Vide

Justification : Car $MG^2 = -\frac{11a^2}{12} < 0$

Question-20 : On donne $f(z) = \frac{z+1-2i}{z-1+i}$ soit C l'ensembe des points M d'affixe z tels que : $|f(z)|=1$

- ☐ **A** : (C) est le cercle trigonométrique
- ☒ **B** : (C) est une droite passant par le point de coordonnées $(0; \frac{1}{2})$
- ☐ **C** : (C) est un cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(-1;2)$ et $B(1;-1)$
- ☐ **D** : (C) est une droite de coefficient directeur $-\frac{3}{2}$
- ☐ **E** : (C) est un segment de droite

Justification : On suppose que $z = x+iy$ et on remplace dans l'équation on trouve $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$

Question-21 : Soient les points $A(1;0)$; $B(-3;0)$ l'ensembe des points M d'affixe z vérifiant $|z-1|=2|z+3|$ est :

- ☐ **A** : Un cercle de diamètre $[AB]$
- ☒ **B** : Un cercle centré sur la droite $[AB]$ de diamètre déferent de $[AB]$
- ☐ **C** : L'hyperbole de foyers A et B et d'excentricité 2
- ☐ **D** : La droite (AB)
- ☐ **E** : La médiatrice (AB)

Justification : Car l'équation donne $3x^2 + 26x + 35 + 3y^2 = 0$ après modification on trouve $\frac{(x + \frac{13}{3})^2 + y^2}{9} = \frac{106}{9}$

Question-22 : Soit la suite numérique (U_n) définie par : $\forall n \in \text{entier naturel non nul} ; U_{2n} = n + 1$ et $U_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n}$

- ☐ **A** : (U_n) est croissante
- ☐ **B** : (U_n) converge vers 1
- ☒ **C** : (U_n) est minoré
- ☐ **D** : (U_n) admet une limite (finie ou infinie)
- ☐ **E** : (U_n) est borné

Justification : C'est évident que la suite ne croît pas car $U_2 = 2$ et $U_3 = 0$ ensuite (U_n) diverge est bien minoré par 0 et admet pas de limite et n'est pas borné puisqu'un de ces termes va à l'infinie

Question-23 : Soit un nombre réel $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ on considère les points A, B et M d'affixe respective 1;2 et $z=1 + e^{2i\theta}$:

- ☒ **A :** M appartient au cercle de centre A et de rayon 1
- ☐ **B :** M appartient à la droite d'équation $x = 1$
- ☐ **C :** $OM = 2$
- ☒ **D :** L'abscisse de M est toujours positive

Justification : L'équation du cercle est $(x+1)^2 + y^2 = 1$ avec $Z = 1 + e^{2i\theta} = 1 + \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$
 $(1 + \cos(2\theta) - 1)^2 + (\sin(2\theta))^2 = \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) = 1$ ensuite $\forall \theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $1 + \cos(2\theta)$ est toujours positif

Question-24 : Une fonction g est définie sur l'intervalle $] - \infty; 0]$ par $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$ soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère du plan.

- ☒ **A :** (Γ) admet une asymptotique d'équation : $y=-1$
- ☐ **B :** (Γ) n'admet pas d'asymptotique
- ☐ **C :** (Γ) admet une : asymptotique $y=x$
- ☐ **D :** (Γ) admet une asymptotique d'équation : $y=1$

Justification : Car quand on calcul la limite de $g(x)-x$ en $-\infty$ on trouve -1

Question-25 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ la fonction f'' dérivée seconde de la fonction f sur \mathbb{R} , est définie par .:

- ☐ **A :** $f''(x) = \int_0^x -2te^{-t^2} dt$
- ☐ **B :** $f''(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2} dx$
- ☒ **C :** $f''(x) = -2xe^{-x^2}$
- ☐ **D :** $f''(x) = e^{-x^2}$

Justification : il suffit de dérivée deux fois la fonction

Réalisé par OVI Jude Schadrac, KONE Namogo Ben Armel, BOUAKI Kouadio Julien, DJAKI Loba Stephane
 Etudiants à L'Ecole Supérieure Africaine des Technologies de l'Information et de la Communication

Mail : elitech32@gmail.com

La photocopie tue l'oeuvre intellectuelle

Tous droits réservés

58-79-51-80 - 48-73-43-15 - 48-59-49-99 - 79-87-94-36