

計算量のイメージと 賢い考え方1(動的計画法)



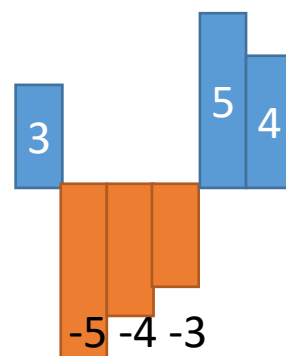
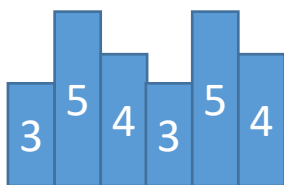
問題

[問題AA@レギオ神戸問題セット](#)

[問題文 & 解答例@github](#)

$A_1 \dots A_n$ の部分列の和について、その最大値を答えよ。

- 要素は 10万個ぐらいあることも！



問題

[問題AA@レギオ神戸問題セット](#)

[問題文 & 解答例@github](#)

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

$A_1 \dots A_n$ の部分列の和について、その最大値を答えよ。

■ 解1: 全部の部分列 $A_{\text{from}} \dots A_{\text{to}}$ について、実際に和を求める!

● from x to の組み合わせ: $n^2 / 2$

● from..to の足し算: n に比例したコスト

● 併せると n^3 に比例したコスト

■ どれぐらい厳しいの??

● 今回、 n は $100000 = 10^5$

● n^3 は $100000 \times 100000 \times 100000 = 10^{15} = 10^3$ 兆ってどれぐらい?

```
for (int from = 0; from < n - 1; from++) {  
    for (int to = from + 1; to < n; to++) {  
        int sum = 0;  
        for (int i = from; i <= to; i++) {  
            sum += vec[i];  
        }  
        if (sum > maxSum) maxSum = sum;  
    }  
}
```

問題

[問題AA@レギオ神戸問題セット](#)

[問題文 & 解答例@github](#)

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

$A_1 \dots A_n$ の部分列の和について、その最大値を答えよ。

■ 解1: 全部の部分列 $A_{\text{from}} \dots A_{\text{to}}$ について、実際に和を求める！

● from x to の組み合わせ: $n^2 / 2$

● from..to の足し算: n に比例したコスト

● 併せると n^3 に比例したコスト

■ どれぐらい厳しいの??

● 今回、 n は $100000 = 10^5$

● n^3 は $100000 \times 100000 \times 100000 = 10^{15} = 10^3$ 兆ってどれぐらい?

```
for i in range(n):
    for j in range(i+1, n+1):
        #s = 0
        #for k in range(i, j):
        #    s += list[k]
        s = sum(list[i:j])
        result = max(result, s)
```

現実計算機のスペック

■ CPU のクロック: 数GHz

- 1秒間に数G回の命令をこなす
(1命令1nano sec以下)
- 1000命令かかる処理でも、数M回こなす
- つまり「1秒」で解くとは、
数G回以内の命令で解くということ

但し、主メモリランダム
アクセスは、CPUより
数十倍遅い

1K = 1000 = 10^3
1M = 1,000,000 = 10^6
1G = 1,000,000,000 = 10^9
1T = 10^{12}

■ メモリ容量

- 主メモリ数GBは当たり前
 - でも、OS の領域も残してね
- ハードディスクはTBオーダー
 - でも、disk は遅いけどね

でも、キャッシュは
数MB程度以下

量感覚イメージ

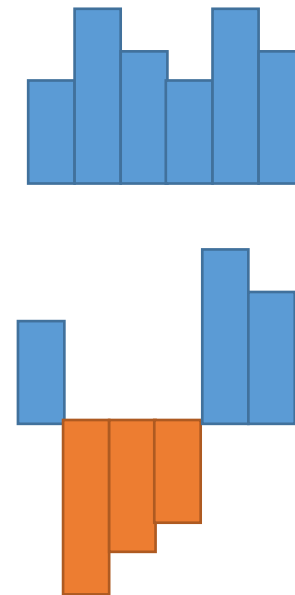
- 累乗: $2^{10}=1024 \doteq K$, $2^{20} \doteq M$, $2^{30} \doteq G$
- 階乗:
 - $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, $1 \times 2 \times \dots \times 10 = 3.6M$ ぐらい
 - $\dots \times 13$ で4G越える
- 32bit 符号付整数で表現できる値: $-2G \sim +2G$
- 時間
 - 1秒に数G回の演算が可能
 - 1分: 60秒、1時間: 3.6K秒、1日: 86.4K秒、
 - 1M秒で11日半ぐらい

もっと賢い方法はないのかね？(考え中)

$A_1 \dots A_n$ の部分列の和について、その最大値を答えよ。

■ 観察

- 全部「正」の値なら、全部足したのが解
- 途中「負」の領域がある
 - 小さい → 前後つなげたほうがいい
 - 大きい → 前後個別のほうがいい



もっと賢い方法はないのかな？（解決編：動的計画法）

- 解2: 「最後が A_i である部分列の最大和」 S_i が分かっていたとする（要素なしの部分列も考慮）

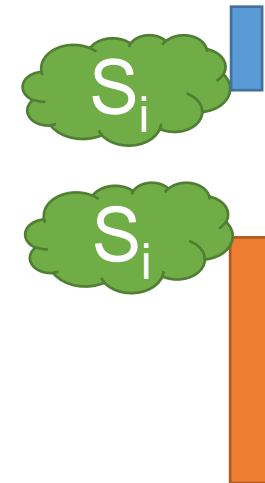
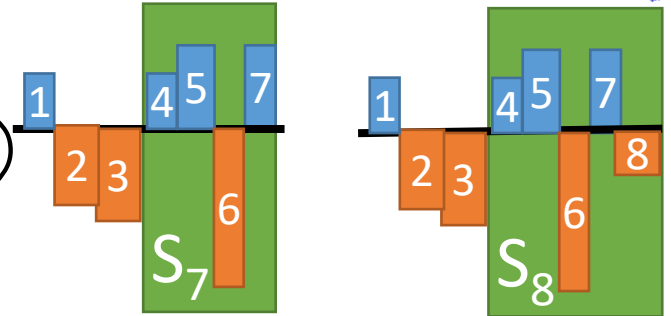
- S_1 は？ $A_1 > 0$ なら $S_1 = A_1$, $A_1 \leq 0$ なら $S_1 = 0$

- S_i がわかっているとして、 S_{i+1} は？

- $S_i + A_{i+1} > 0$ なら $S_{i+1} = S_i + A_{i+1}$

- $S_i + A_{i+1} \leq 0$ なら $S_{i+1} = 0$

- そんな S_i ($i = 1 \dots n$) たちの最大値を求めればOK



動的計画法 (Dynamic Programming: DP)

部分問題から順に解き、解き終わった部分問題の結果を用いて、より大規模な問題を解く方法

類題

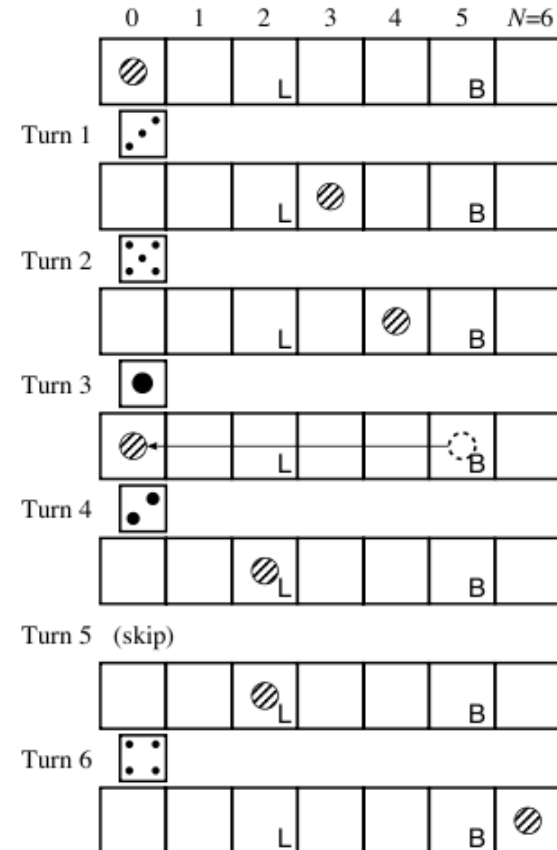
<https://judge.u-aizu.ac.jp/onlinejudge/description.jsp?id=1277>

■ バックギャモンを単純化したゲーム

- 左端からスタート、右端がゴール
- サイコロを振って、目の数だけ進む
 - ゴールを超えたら、その分戻る
- L: 1回休み
- B: スタートに戻る

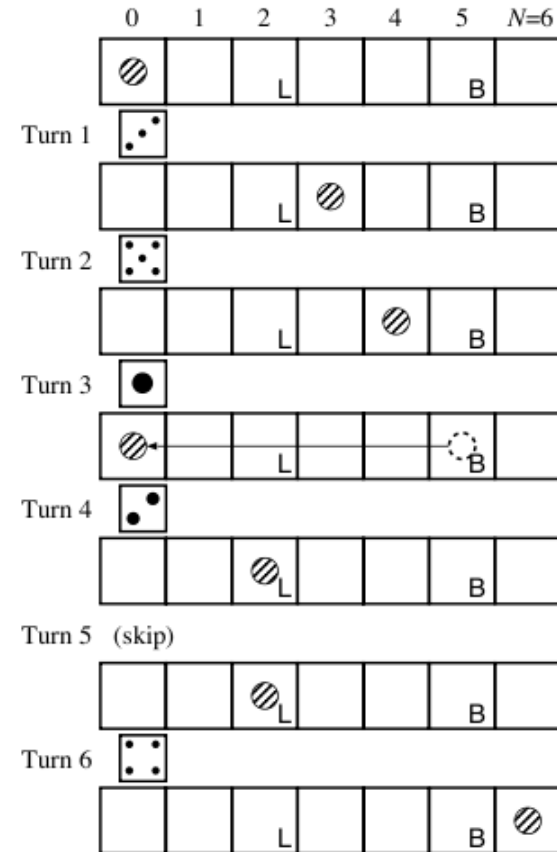
■ 質問: T 回以内にゴールにたどり着く確率は? ($1 \leq T \leq 100$)

どうやったら解けそう?



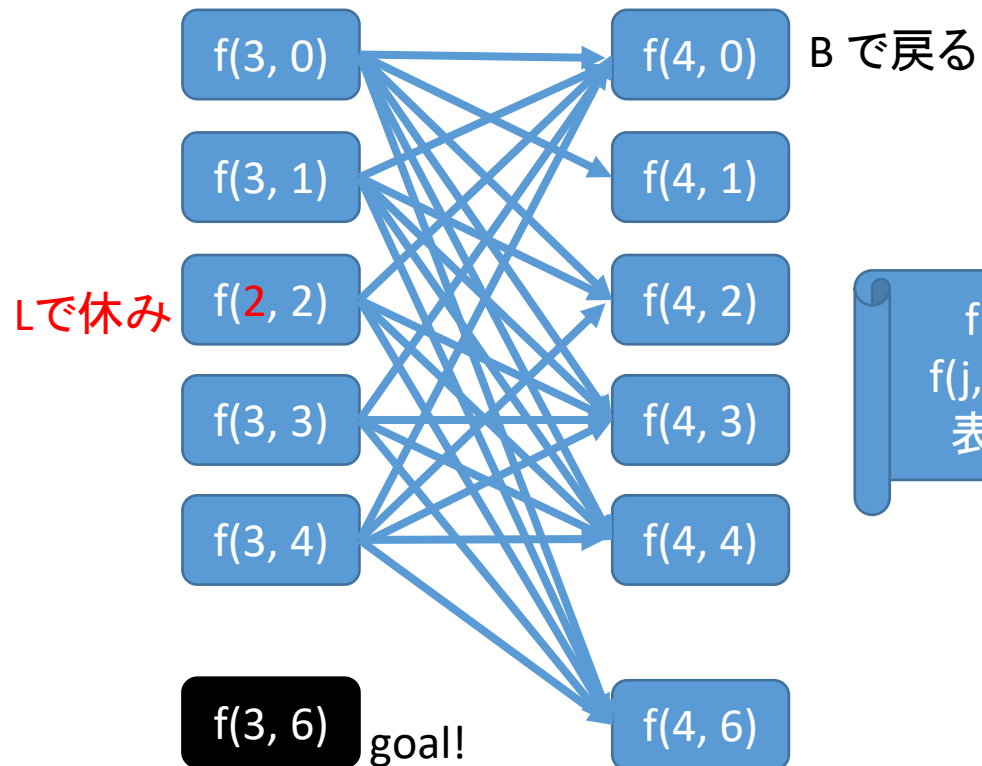
試行錯誤

- 最初は必ずスタート
- $1/6$ の確率で 1 から 6 に移動
 - 但し、L についたら1回休み
 - B についたら、スタートに戻る
- サイコロのパターンを全部試す？
 - 10回振るパターン: $6^{10} \sim 60M$
 - 20回だと、 $6^{20} \sim 3600$ ペタ??
 - 100回なんて、、、

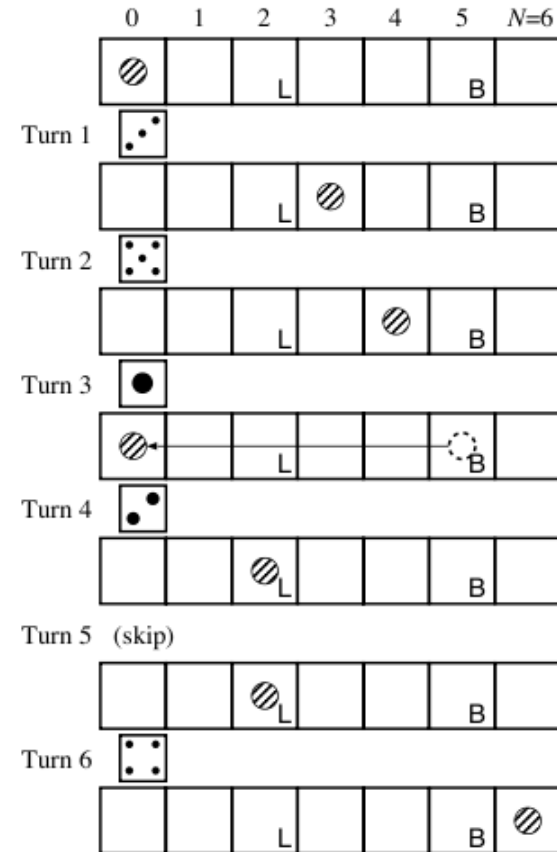


解法

- $f(k, p)$: k 回目に位置 p に到着する確率とする



$f(k, p)$ は
 $f(j, ?)$ ($j < k$)で
表現可能

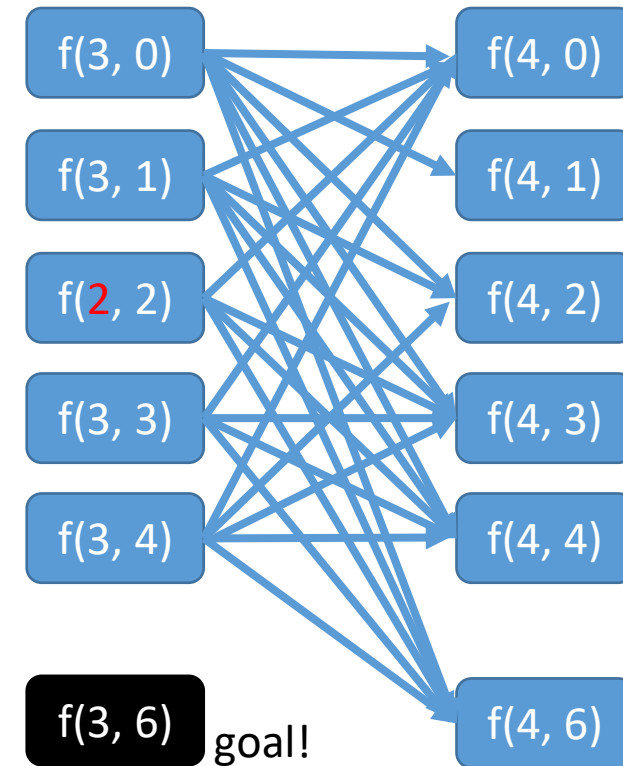


動的計画法 1/2 (Dynamic Programming, DP)

- 部分問題から順に解き、
- 部分問題の結果を用いて、より大規模な問題を解く

```
int prob[MAX_T][MAX_N+1]; /* f 相当 */  
  
int solve(int n, int t) {  
    prob[0][0], .., prob[0][n] の初期化  
    for(k ....) {  
        prob[j][?] (j<k)から prob[k][n]を求める  
        もしくは  
        prob[k][?] を prob[j][?] (j>k)に反映  
    }  
}
```

今回は
こっちが
楽かと？



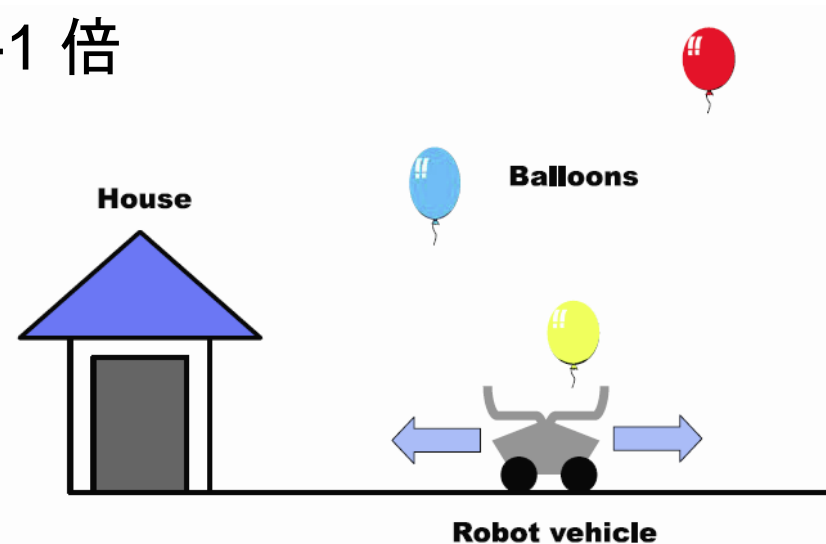
Balloon Collecting

■ 上から落ちてくる風船をロボットで集める

- 与えられるもの: 各風船が落ちる場所と時刻
- ロボットには風船を3個まで載せられる
- 風船は左端の家で回収
- 風船を k 個載せると、移動時間は $k+1$ 倍

■ 質問

- 風船をすべて回収できる場合は、最小移動距離
- 回収できない場合は、何個目で回収不能か？



考え方

■ 素直に動的計画法

- $f(k, b)$: k 番目の風船をキャッチして風船 b 個になるまでの最小移動距離 (or 到達不能か)

