Для аксиомы петли можно ввести оператор степени 2, обозначаемый как `a²`, который будет синтаксическим сокращением для петлевой связи.

Дополнение к аксиоме петли (4):

$$a^2 \equiv a \to a \equiv aa$$

Пояснение:

1. **Семантика оператора степени 2**:
   - Запись `a²` эквивалентна связи `a → a`, где начало и конец совпадают.
   - Это сокращение позволяет явно обозначить петлевую связь без дублирования символа `a`.
2. **Совместимость с существующими аксиомами**:
   - **Аксиома эквивалентности (6)**:

     $$(a^2 \equiv b^2) \to (a \equiv b)$$

     Равенство квадратов связей влечёт равенство их компонентов.
   - **Аксиома отражения (7)**:

     $$-a^2 \equiv a^2$$

     Петлевая связь симметрична относительно отражения.
   - **Аксиома композиции (8)**:

     $$a^2 b \equiv (a \to a) \to b \quad \text{(левоассоциативность сохранена)}.$$
3. **Примеры использования**:
   - Петля с явным обозначением:

     $$\infty^2 \equiv \infty \quad (\text{так как } \infty \equiv \infty \to \infty).$$
   - Композиция петли и связи:

     $$a^2 \to b \equiv a \to a \to b.$$
4. **Расширение на другие степени**:
   - Степень 3: `a³ ≡ a → a → a` (тройная петля).
   - Однако в рамках МТС степени выше 2 требуют осторожности, так как они могут нарушить ассоциативность.

Итог:
Оператор `a²` вводится как синтаксическое сокращение для петлевой связи `a → a`, улучшая читаемость формул. Он не нарушает существующие аксиомы и подчёркивает структурную роль петли в МТС.

Аксиома степени петли (9):

$$a^n \equiv \underbrace{a \to a \to \ldots \to a}_{n \text{ раз}} \quad \text{при } n \geq 1,$$

где:

- $a^2 \equiv a \to a \equiv aa$ — петлевая связь (степень 2),
- $a^1 \equiv a$ — тривиальная степень (связь сама с собой),
- a^n при $n > 2$ интерпретируется как **левоассоциативная композиция** связей:

$$a^n \equiv (\ldots((a \to a) \to a) \to \ldots) \to a).$$

Смысл и постулаты:

1. **Степень как синтаксическое сокращение:**
   - Оператор степени a^n заменяет многократное повторение связи a в цепочке.
   - Например:
     - $a^3 \equiv (a \to a) \to a,$
     - $a^4 \equiv ((a \to a) \to a) \to a.$

2. **Совместимость с аксиомами МТС:**
   - **Аксиома эквивалентности (6):**
     Если $a^n \equiv b^n$, то $a \equiv b$.
   - **Аксиома отражения (7):**
     $-a^n \equiv a^n$ — петлевые связи степени n симметричны.
   - **Аксиома композиции (8):**
     Левоассоциативность сохраняется:

$$a^n \to b \equiv \underbrace{a \to a \to \ldots \to a}_{n \text{ раз}} \to b.$$

3. **Особые случаи:**
   - $a^1 \equiv a$ — связь с самой собой (тривиальная петля).
   - a^0 — не определена, так как соответствует отсутствию связи.

Примеры:

1. **Петля степени 2:**

$$x^2 \equiv x \to x \equiv xx.$$

   Это стандартная петлевая связь из аксиомы 4.
2. **Композиция степеней:**

$$x^3 \equiv (x \to x) \to x \equiv x \to x \to x.$$

3. **Связь с ∞:**

$$\infty^n \equiv \infty \quad \text{для любого } n \geq 1,$$

   так как $\infty \equiv \infty \to \infty \to \ldots$.

Итог:

Аксиома степени петли формализует **иерархию самосвязей** через оператор степени, сохраняя левоассоциативность и совместимость с остальными аксиомами МТС. Степень 2 (a^2) становится базовым элементом для построения сложных рекурсивных структур, а более высокие степени позволяют компактно описывать многократные композиции.

Анализ связи между выражением a^∞ и аксиомой рекурсивного замыкания ссылки (♂):

1. Сходства:

- **Рекурсивная природа:**
  Оба случая описывают бесконечные цепочки связей:
  - Для ♂v:

$$♂v \equiv ♂v \to v \equiv ♂v \to v \to v \to \ldots$$

  - Для a^∞:

$$a^\infty \equiv a \to a \to a \to \ldots$$

    В обоих случаях связь ссылается сама на себя, порождая бесконечную регрессию.
- **Свёртывание бесконечности:**
  Аксиома ♂v и оператор a^∞ используют синтаксическое сокращение для представления бесконечной последовательности:
  - ♂v заменяет цепочку ♂$v \to v \to v \to \ldots$.
  - a^∞ заменяет цепочку $a \to a \to \ldots$.

2. Различия:

- **Фиксация значения:**
  - В $\circlearrowleft v$ значение v **явно задано** и не участвует в рекурсии. Ссылка $\circlearrowleft v$ указывает на себя, но значение всегда остаётся v:

$$\circlearrowleft v \equiv \circlearrowleft v \to v.$$

  - В a^∞ значение **не фиксировано**. Если $a = r \to v$, то a^∞ будет цепочкой $r \to v \to r \to v \to \ldots$, что может привести к неоднозначности.
- **Структурная роль:**
  - Аксиома ♂v создаёт **устойчивую ссылку** с минимальной рекурсией (ссылка самозамыкается, но значение статично).
  - a^∞ описывает **динамическую композицию**, где связь a повторяется бесконечно, что может включать как ссылки, так и значения.

3. Связь с аксиомой ∞:

- **Полное самозамыкание:**
  Связь ∞ определяется как $\infty \equiv \infty \to \infty \to \ldots$, что эквивалентно ∞^∞. Здесь $a = \infty$, и бесконечная степень совпадает с аксиомой самозамыкания.
  Однако для других связей (например, $\circlearrowleft v$) выражение $(\circlearrowleft v)^\infty$ не эквивалентно ∞, так как $\circlearrowleft v$ сохраняет значение v.

4. Критические точки:

- **Парадокс идентичности:**
  Если $a = \circlearrowleft v$, то:

$$(\circlearrowleft v)^\infty \equiv \circlearrowleft v \to \circlearrowleft v \to \ldots \quad \text{vs} \quad \circlearrowleft v \equiv \circlearrowleft v \to v.$$

  Эти конструкции **не эквивалентны**, так как в первом случае ссылка $\circlearrowleft v$ рекурсивно повторяется, а во втором — значение v фиксировано.
- **Совместимость с аксиомой эквивалентности:**
  Аксиома 6 требует, чтобы равенство связей влекло равенство их компонентов. Если $a^\infty \equiv \circlearrowleft v$, то $a \equiv \circlearrowleft v$, но это противоречит фиксации значения v в $\circlearrowleft v$.

Итог:

Выражение a^∞ **обобщает идею бесконечной рекурсии**, но не учитывает специфику аксиомы ♂v, где рекурсия ограничена явным значением.
Для устранения противоречий необходимо:

1. **Уточнить область применения a^∞:**
   - Если a — самоссылающаяся связь (например, $a = \circlearrowleft v$), то a^∞ должна наследовать фиксацию значения v.
   - Если a — произвольная связь, a^∞ требует отдельного определения, чтобы избежать конфликтов с аксиомами.
2. **Ввести ограничения:**
   - Запретить a^∞ для связей с фиксированными значениями (♂v, ♀r), если это нарушает их семантику.
   - Разрешить a^∞ только для связей, где рекурсия не противоречит аксиомам (например, $\infty^\infty \equiv \infty$).

Таким образом, a^∞ **дополняет**, но **не заменяет** аксиому рекурсивного замыкания ссылки, подчёркивая многогранность бесконечных структур в МТС.

Доказательство того, что $r♀ \equiv r^\infty$:

1. **Определение $r♀$ (Аксиома 3):**
   Согласно аксиоме рекурсивного замыкания значения:

$$r♀ \equiv r \to r♀.$$

Это означает, что связь $r♀$ рекурсивно определяется через саму себя, где ссылка r направлена на значение $r♀$.

2. **Рекурсивное разворачивание $r♀$:**
   Подставляя определение $r♀$ в правую часть, получаем:

$$r♀ \equiv r \to (r \to r♀) \equiv r \to r \to r♀ \equiv r \to r \to r \to r♀ \equiv \ldots$$

   Таким образом, $r♀$ представляет собой **бесконечную цепочку** связей:

$$r \to r \to r \to \ldots$$

3. **Интерпретация r^∞:**
   В МТС символ ∞ обозначает полное самозамыкание ($\infty \equiv \infty \to \infty$). Однако запись r^∞ можно трактовать как **бесконечное применение** связи r, то есть:

$$r^\infty \equiv r \to r \to r \to \ldots$$

   Это соответствует структуре, где каждое последующее значение связи совпадает с предыдущей связью r.

4. **Эквивалентность структур:**
   Из п. 2 и п. 3 следует, что:

$$r♀ \equiv r \to r \to r \to \ldots \equiv r^\infty.$$

   Обе конструкции описывают одну и ту же бесконечную рекурсивную цепочку связей, где r последовательно определяет саму себя.

5. **Проверка через аксиому эквивалентности (Аксиома 6):**
   Аксиома утверждает, что равенство связей требует тождества их компонентов. Поскольку:
   - Ссылка r в $r♀$ совпадает с ссылкой r в r^∞,
   - Значение $r♀$ в $r \to r♀$ совпадает со значением r^∞ в $r \to r^\infty$,
     то из $r♀ \equiv r^\infty$ следует $r \equiv r$, что верно тривиально.

Итог:
Связь $r♀$ формально эквивалентна r^∞, так как обе структуры определяются бесконечной рекурсивной цепочкой $r \to r \to r \to \ldots$.
Это следует из аксиомы рекурсивного замыкания значения (3) и интерпретации r^∞ как бесконечного применения связи r.

Ответ:
В рамках **Метатеории связей (МТС)** утверждение «степень есть длина повторяющейся последовательности связей» является **корректным**, но требует уточнения в контексте аксиом и нотации МТС. Вот как это работает:

1. Степень как длина последовательности

Согласно **Аксиоме степени петли (9)**, степень a^n определяется как левоассоциативная цепочка из n связей:

$$a^n \equiv \underbrace{a \to a \to \ldots \to a}_{n \text{ раз}}.$$

Здесь:

- **Степень n** — это количество повторений связи a, то есть **длина последовательности**.
- Например:
  - $a^2 \equiv a \to a$ (длина 2),
  - $a^3 \equiv (a \to a) \to a$ (длина 3).

2. Длина в терминах ассоциативных чисел

В МТС «длина» выражается через **ассоциативные числа (ачисла)**, которые кодируются комбинациями абитов (`0` , `1` , `(` , `)`). Например:

- Ачисло `∞101` соответствует длине 3,
- Ачисло `∞10` — длине 2.

Таким образом, степень a^n можно связать с ачислом n, где n — длина цепочки связей.

3. Примеры

1. **Конечная длина**:
   Для связи $a = 1$ (абит «наличие связи»):
   $$1^3 \equiv 1 \to 1 \to 1 \quad (\text{длина } 3, \text{ачисло } \infty 101).$$
2. **Бесконечная длина**:
   Для связи $r♀$:
   $$r♀ \equiv r^\infty \equiv r \to r \to r \to \dots \quad (\text{длина } \infty).$$

   Здесь длина соответствует бесконечной рекурсии, формализованной через символ ∞.

4. Ограничения и уточнения

- **Фиксированные значения**:
  Если связь имеет явное значение (например, $♂v$), её бесконечная степень $♂v^\infty$ **не эквивалентна** ∞, так как значение v остаётся фиксированным.
- **Совместимость с аксиомами**:
  Аксиома эквивалентности (6) требует, чтобы равенство степеней $a^n \equiv b^n$ влекло $a \equiv b$. Это гарантирует, что длина последовательности однозначно определяет её структуру.

5. Итог

Утверждение «степень есть длина повторяющейся последовательности связей» **верно в МТС**, если:

1. **Степень** n интерпретируется как количество связей в цепочке $a \to a \to \dots \to a$,
2. **Длина** выражается через ассоциативные числа (ачисла),
3. Учитываются ограничения для связей с фиксированными значениями ($♂v$, $r♀$) и бесконечных рекурсий (∞).

Пример формализации:
Для ачисла `∞101` (длина 3) и связи $a = 1$:
$$\text{Длина } 3 \equiv 1^3 \equiv 1 \to 1 \to 1.$$

Здесь степень 3 напрямую соответствует длине последовательности связей.