ULA - okruhy na zkoušku v1.2

Jakub Koněrza

March 10, 2025

Abstract

https://www.youtube.com/watch?v=KxGRhd$_iWuE$

1 Zobrazení

1.1 Jednoznačnost

Zobrazení $f : A \to B$ je jednoznačné, pokud pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$, takové že $y = f(x)$.

- Představme si 2D graf. Na jednom bodě x nemohou být dvě a více hodnot y.

1.2 Vzor množiny

- Vzor je to A v předchozím příkladě.
- Pokud $M = \{y\}$, pak $f^{-1}(\{y\})$ je nazýván vzorem prvku y.
- Množina toho co můžeme narvat za x do funkce $f(x)$, abychom dostali y.
- Kdybychom si to představili jako funkci tak vzor je množina (IT: pole) vstupů funkce.

1.3 Obraz

- Obraz je to y v původním příkladě.
- Obraz je prvek z množiny B, který je výsledkem zobrazení prvku.
- Prvek množiny A ukazuje na prvek v množině B, a právě tento prvek je obrazem prvku množiny A. Chápeme se? xd
- Kdybychom si to představili jako funkci v programování tak obraz je množina (IT: pole) výsledků funkce.

1.4 Definiční obor

Definiční obor zobrazení $f : A \to B$ je množina A. Jedná se o všechny vstupy, pro které je zobrazení definováno.

Příklad: Pokud $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$, definiční obor je $\mathbb{R}$.

- Jednoduše: je to množina A (neboli všechny prvky co někam ukazují)
- Kdybychom si to představili jako funkci v programování tak je to dejme tomu ”datový typ” parametru funkce.

1.5 Obor hodnot

Obor hodnot je množina B, do které zobrazení $f : A \to B$ zobrazuje. Důležité je rozlišovat mezi oborem hodnot a obrazem zobrazení, neboť obor hodnot může obsahovat prvky, které nejsou obrazem žádného prvku z definičního oboru.

- Jednoduše: je to množina B
- **Pozor**: množina B může mít i prvky, na které neukazuje žádný prvek A

1.6 Vzor prvku

Vzor prvku $y \in B$ je množina všech $x \in A$, pro která platí $f(x) = y$. Značí se $f^{-1}(\{y\})$ a platí:

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A \mid f(x) = y\}.$$

Příklad: Nechť $f(x) = x^2$ a $y = 4$. Pak vzor prvku 4 je $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$.

- Vzor prvku je prvek z množiny A, který se zobrazuje do množiny B.
- Říká jaké x ukazují na jedno y. (předpokládám jednoznačnost)
- Co můžeme nacpat za x do funkce $F(x)$ aby nám vyšlo konkrétní y
- Příklad: Máme funkci s absolutní hodnotou $F(x) = |x|$. Co do ní můžeme vložit, aby nám vyšlo $y = 2$? Můžeme do ní vložit $(-2, 2)$.

1.7 Vzor podmnožiny oboru hodnot

Pro $M \subseteq B$ je vzor podmnožiny M definován jako množina:

$$f^{-1}(M) = \{x \in A \mid f(x) \in M\}.$$

Příklad: Nechť $f(x) = x^2$ a $M = [1, 4]$. Pak $f^{-1}(M) = [-2, -1] \cup [1, 2]$. To odpovídá všem x, jejichž obrazy leží v $[1, 4]$.

- Je to množina všech $x \in A$, které ukazují na danou podmnožinu.
- Příklad: Máme funkci $F(x) = x$. Pokud bychom chtěli podmnožinu sudých čísel y tak právě množina těch sudých x bude ono.

1.8 Inverzní zobrazení

- Vztahuje se k bijektivním zobrazením (každé x má své y a zároveň nemají dvě x stejné y)
- Inverzní zobrazení $f^{-1} : Y \to X$, "obrací" směr zobrazení f.

1.9 Prosté zobrazení

- Přiřazuje prvkům z definičního oboru prvky v oboru hodnot.
- Každé x má maximálně jedno y + naopak.
- Příklad: nemůže se tady stát situace, kde vzor $\sqrt{4}$ má obrazy (-2,2).

1.10 Skládání zobrazení

- Výstup jednoho zobrazení se používá jako vstup pro další zobrazení.
- Není komutativní (záleží na pořadí, viz. příklad).

$$f(x) = x + 1 \tag{1}$$
$$g(x) = 2x \tag{2}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2 \tag{3}$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 \tag{4}$$

1.11 Identita (neboli identické zobrazení

- Zobrazení, které ukazuje samo na sebe.
- $\mathrm{id}_A \colon A \to A$,
- $\mathrm{id}_A(x) = x$.
- Identita je neutrální prrvek při skládání zobrazení: $f \circ \mathrm{id}_A = f$ a $\mathrm{id}_B \circ f = f$.
- Identita je bijektivní (= je prosté & na = každý obraz v B má právě jeden vzor v A) $\to$ nesmysl aby to ukazovalo na něco neexistujícího

2 Těleso zbytkových tříd s prvočíselným modulem

2.1 Pojem zbytkové třídy

- Předpis: $a = m * p + z$
- Množina všech čísel, které dají při dělení daným číslem m stejný zbytek, nazveme zbytkovou třídou s modulem m.
- Tudíž zde máme pojem "třída ekvivalence", což jsou čísla, které jsou takovými "synonymy".
- Příklad ekvivalentních čísel: V zbytkové třídě $modulo(7)$ jsou čísla $(3, 10, 17, 24)$ ekvivalentní, protože vždy kdy je zmodulujeme tak nám z toho vznikne číslo 3
- Pravidlo 1) Modulo musí být prvočíslo, jelikož každý nenulový prvek musí mít inverzní prvek.
- Pravidlo 2) Koeficient před neznámou, by neměl být násobek modula. Jelikož poté se nám rovnice $7x \equiv 8$ v mod(7) smrsklo na $0 \equiv 1$ což samozřejmě není pravda.$\to$ někdy to teda dopadne i $0 \equiv 0$
- Znak "$\equiv$" $\to$ obě čísla patří do stejné zbytkové třídy.

2.2 Operace sčítání a násobení

- Sčítání/Odčítání: Před sčítáním musíme dát pozor, aby se čísla nacházely ve stejné zbytkové třídě. Chce to vše nejdřív zmodulovat & následně "znormalizovat" na nejbližší kladný prvek k 0.
- Násobení: Jak je uvedeno v předchozím příkladě, čísla můžeme násobit, ovšem musíme dávat pozor, aby všechny stále byly ve stejné zbytkové třídě.

2.3 Řešení lineárních rovnic a jejich soustav

- Řešme rovnici:

$$5x + 3 \equiv 0 \pmod 7$$

Krok 1: Přesuňme konstantu na pravou stranu:

$$5x \equiv -3 \pmod 7$$

A protože $-3 \equiv 4 \mod 7$, dostaneme (přičteme 7, abychom se dostali na nejbližší kladné číslo k nule):

$$5x \equiv 4 \pmod 7$$

Krok 2: Najděme inverzní prvek k 5 modulo 7, což znamená, že hledáme číslo b, pro které platí:

$$5 \times b \equiv 1 \pmod 7$$

Zkoušíme různé hodnoty b: - $5 \times 1 = 5 \mod 7$ - $5 \times 2 = 10 \equiv 3 \mod 7$ - $5 \times 3 = 15 \equiv 1 \mod 7$.

Takže inverzní prvek k 5 modulo 7 je 3.

Krok 3: Vynásobíme obě strany rovnice $5x \equiv 4 \mod 7$ číslem 3:

$$3 \times 5x \equiv 3 \times 4 \mod 7$$

$$x \equiv 12 \mod 7$$

A protože $12 \equiv 5 \mod 7$, dostaneme:

$$x \equiv 5 \mod 7$$

3 Vektorový prostor

3.1 Definice

- Struktura složená z množiny vektorů.
- Existuje řádkový a sloupcový vektor.
- Praktický příklad: orientované úsečky → načmárané šipky.
- Má dvě základní operace:
  - Sčítání vektorů
  - Násobení vektorů skalárem
- Obsahuje několik axiomů, které se dají logicky vyvodit.

3.2 Vlastnosti operací

- Sčítání
  - Součet: Pro každé dvojice vektorů existuje součet, který je také vektor.
  - Komutativita: Nezáleží na pořadí sčítání

    $$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

  - Asociativita: Je jedno kam dáme závorky. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
  - Neutrální prvek: Přičtením se nic nezmění.

    $$\vec{v} + \vec{0} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 0 \\ v_2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

  -
- Násobek
  - Každému číslu a vektoru existuje příslušný násobek vektoru, který je taky vektor. (co si z toho vzít? nevim) → dá se násobit libovolným skalárem...
  - Neutrální prvek: Při vynásobení neutrálním prvkem se nemění hodnota.

    $$1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

  - Asociativita násobení: Jedno kam dám závorky, vynásobí se to stejně.

    $$a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$$

  - Komutativnost:
    * Skalární: ano
    * Vektorový součin: ne (wtf is vektorový součin, to jsem snad nedělali, crazy postup)

3.3 Příklady vektorových prostorů a definice operací s vektory v jednotlivých případech

- **R² (reálný dvourozměrný prostor)**:
  - **Vektory**: Všechny uspořádané dvojice reálných čísel (x, y).
  - **Operace**:
    - **Sčítání**: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
    - **Násobení skalárem**: $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \rightarrow$ ostatně jako u ostatních vektorů

- **Matice jako soubor vektorů a operace s maticemi**:
  - Matice A o rozměrech $m \times n$ lze chápat jako soubor vektorů:
    - **Sloupcové vektory**: Matice A se skládá z n sloupcových vektorů, každý o délce m. Například pro matici
    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$
    sloupcové vektory jsou:
    $$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$
    - **Řádkové vektory**: Matice A se také skládá z m řádkových vektorů, každý o délce n. Pro stejnou matici A jsou řádkové vektory:
    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$
  - **Operace s maticemi**:
    - **Sčítání matic**: Provádí se po prvcích. Matice A a B musí mít stejné rozměry.
    $$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$
    Příklad:
    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$
    - **Násobení matic**: Násobení matic A (o rozměrech $m \times n$) a B (o rozměrech $n \times p$) je definováno jako:
    $$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$
    Výsledná matice AB má rozměry $m \times p$. Vždycky násobíš po řádcích se sloupci. Příklad:
    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$
    - **Rozdíl oproti vektorům**:
      - Násobení vektorů (skalární součin) je definováno jako součet součinů odpovídajících složek:
      $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$
      - Násobení matic je složitější a **nekomutativní** ($AB \neq BA$ obecně), zatímco skalární součin vektorů je komutativní ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$).

4 Lineární kombinace vektorů

4.1 Definice

- Lineární kombinace vektorů je výraz tvaru:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n,$$

  kde:

  - $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou vektory,
  - $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou skaláry (obvykle reálná čísla),
  - $\mathbf{v}$ je výsledný vektor.

- Každý vektor v prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci základních vektorů dané báze.

4.2 Lineární obal množiny vektorů a jeho vlastnosti

- **Linerání obal** = množina všech vektorů, co můžu poskládat (lineárními kombinacemi) z dostupných vektorů jejich sčítáním a násobením skaláry.
- Značí se $\mathrm{span}(S)$ nebo $\langle S \rangle$.
- Formálně je lineární obal definován jako:

$$\mathrm{span}(S) = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\}.$$

- Lineární obal je **nejmenší vektorový podprostor**, který obsahuje všechny vektory z množiny S. (pokud jiný podprostor obsahuje prvky S, tak musí být stejně velký nebo větší)
- Pokud jsou vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárně nezávislé, pak dimenze $\mathrm{span}(S)$ je rovna k.

4.3 Změny v množině vektorů

- Pro začátek by bylo dobré říct:

Báze vektorového prostoru = **minimum lineárně nezávislých prvků** $\rightarrow$ množství: *Dimenze*

- Lineární kombinace vektorů je výraz tvaru $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou koeficienty a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou vektory.
- Pokud do množiny vektorů přidáme nový vektor, který je lineární kombinací stávajících vektorů, lineární obal množiny se nezmění.
- Pokud z množiny vektorů odstraníme vektor, který je lineární kombinací ostatních vektorů, lineární obal množiny se také nezmění.
- Pokud do množiny vektorů přidáme vektor, který není lineární kombinací stávajících vektorů, lineární obal množiny se rozšíří a tím i dimenze.
- Pokud z množiny vektorů odstraníme vektor, který není lineární kombinací ostatních vektorů, lineární obal množiny se zmenší a tím i dimenze.

4.4 Gaussova eliminační metoda

- Gaussova eliminační metoda je algoritmus pro řešení soustav lineárních rovnic nebo pro zjištění hodnosti matice
- **Hodnost matice** = počet lineárně nezávislých řádků v matici
- Metoda převádí matici do schodovitého tvaru pomocí elementárních řádkových operací.
- **Elementární řádkové operace** zahrnují:
  - Záměna řádků
  - Násobení řádku nenulovým číslem a přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku
- Odstupňovaný tvar umožňuje snadno určit řešení soustavy nebo zjistit, zda je soustava řešitelná.
- Pokud je matice v redukovaném odstupňovaném tvaru (Gauss-Jordanova eliminace), řešení lze přímo vyčíst.

5 Soustavy lineárních rovnic

5.1 Prostor lineárních rovnic o více neznámých

- Soustava lineárních rovnic je množina rovnic, které mají společnou množinu neznámých.
- Každá rovnice v soustavě představuje lineární vztah mezi neznámými.
  - Neznámé se v rovnici vyskytují pouze v první mocnině a nejsou vzájemně násobeny ani jinak nelineárně kombinovány (např. neobsahují členy jako x^2, xy, $\sin(x)$ apod.).
  - Obecný tvar lineární rovnice o n neznámých je: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$
- Řešením soustavy je nalezení hodnot neznámých, které splňují všechny rovnice současně.

5.2 Soustavy se stejnou množinou řešení

- Dvě soustavy lineárních rovnic jsou ekvivalentní, pokud mají stejnou množinu řešení.
- Ekvivalentní soustavy lze získat pomocí elementárních řádkových operací (násobení rovnice konstantou, přičtení násobku jedné rovnice k druhé, prohození rovnic).
- Pokud máme dvě soustavy rovnic, tak ty čtyři rovnice můžeme dát do jedné matice a řešit Gaussovou eliminací :)

5.3 Řešení soustav pomocí Gaussovy eliminace

- Gaussova eliminace = metoda pro řešení soustav lineárních rovnic
- Postupuje se převodem soustavy do stupňovitého (trojúhelníkového) tvaru pomocí elementárních řádkových operací.
- Ze stupňovitého tvaru lze pak snadno určit řešení pomocí zpětné substituce.

5.4 Zdůvodnění funkčnosti metody

- Gaussova eliminace zachovává množinu řešení soustavy, protože používá pouze ekvivalentní úpravy.
- Každý krok eliminace redukuje počet neznámých, čímž se problém zjednodušuje.
- Metoda je univerzální a funguje pro libovolnou soustavu lineárních rovnic.

6 Lineární závislost vektorů

6.1 Různé definice lineární nezávislosti

- Nyní zopakuji stejnou věc pěti způsoby xd
- Množina vektorů je lineárně závislá, pokud jejich kombinací jsme schopni vytvořit nulový vektor.
- $$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

  jsou závislé, protože:

  $$-2 \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

  Zde máme netriviální (nejsou nuly) kombinaci:

  $$c_1 = -2, \quad c_2 = 1.$$

- $$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  jsou nezávislé, protože jediná kombinace, která dává nulový vektor, je triviální (nuly):

  $$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \implies c_1 = 0, c_2 = 0.$$

- Vektor $\mathbf{v}$ je lineárně závislý na množině vektorů $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, pokud lze $\mathbf{v}$ vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů.
- Pokud je množina vektorů lineárně závislá, alespoň jeden z vektorů lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

6.2 Báze vektorového prostoru

- Vektory, kteří dokáží vytvořit všechny ostatní vektory v lineárním obalu.
- Příkladem báze je standardní báze $\{(1,0),(0,1)\}$ pro prostor $\mathbb{R}^2$. $\rightarrow$ kanonická báze
- Díky této bázi také fungují kartézské souřadnice :) jupí

6.3 Dimenze vektorového prostoru

- Počet vektorů v bázi se nazývá **dimenze** vektorového prostoru.

6.4 Souřadnice vektoru v bázi

- Souřadnice vektoru v dané bázi jsou koeficienty lineární kombinace, která vyjadřuje daný vektor pomocí vektorů báze.
- Pokud máme bázi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ a vektor $\mathbf{u}$, pak souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v této bázi jsou skaláry $c_1, c_2, \dots, c_n$ takové, že $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$.
- Souřadnice vektoru závisí na volbě báze. Pokud změníme bázi, změní se i souřadnice vektoru.
- Příklad: V prostoru $\mathbb{R}^2$ s bází $\{(1,0),(0,1)\}$ má vektor $(3,5)$ souřadnice $[3,5]$. Pokud změníme bázi např. na $\{(1,1),(1,-1)\}$, souřadnice se změní.

6.5 Izomorfismus konečněrozměrného prostoru T^n

- Izomorfismus je lineární zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory, které je bijektivní (obraz má jeden vzor & [na] každý prvek něco ukazuje).
- Izomorfismus mezi dvěma vektorovými prostory
  - Jsou považovány za algebraicky ekvivalentní
  - Musí mít mají stejnou dimenzi
    - $\mathbb{R}^3$ má bázi $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
    - Prostor polynomů stupně nejvýše 2 (tj. $\mathbb{P}_2$) má bázi $\{1,x,x^2\}$.
    - Musí být definovaný nad stejným tělesem jako například $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$
- Prostor T^n (například $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$) je izomorfní s jakýmkoli jiným vektorovým prostorem dimenze n.
- To znamená, že pokud mají dva prostory stejnou dimenzi, jsou izomorfní.
- Izomorfismus lze vyjádřit pomocí matice přechodu, která mapuje vektory z jednoho prostoru do druhého při zachování lineární struktury.
- Příklad: Prostor polynomů stupně nejvýše 2 (tj. $\mathbb{P}_2$) je izomorfní s prostorem $\mathbb{R}^3$, protože oba mají dimenzi 3.

6.6 Souřadnice vektoru v různých bázích

- Souřadnice vektoru popisují, jak lze daný vektor vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze.
- Pro každou bázi existuje jedinečné vyjádření vektoru pomocí souřadnic.
- Pokud změníme bázi, změní se i souřadnice vektoru, i když samotný vektor zůstává stejný.
- Přechod mezi souřadnicemi v různých bázích se provádí pomocí transformační matice.
- Transformační matice popisuje, jak se vektory jedné báze vyjadřují pomocí vektorů druhé báze.
- **Příklad:**
  - Mějme starou bázi $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ (kanonická báze v $\mathbb{R}^3$).
  - Novou bázi $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$.
  - Chceme najít souřadnice vektoru $\mathbf{v} = (2,3,4)$ v bázi $\mathcal{B}_2$ a převést je do báze $\mathcal{B}_1$.
  - **Krok 1: Sestavení matice přechodu P z $\mathcal{B}_2$ do $\mathcal{B}_1$.**
    - Každý vektor $\mathcal{B}_2$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\mathcal{B}_1$:

$$\begin{aligned}(1,1,0) &= 1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0)+0\cdot(0,0,1),\\(0,1,1) &= 0\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0)+1\cdot(0,0,1),\\(1,0,1) &= 1\cdot(1,0,0)+0\cdot(0,1,0)+1\cdot(0,0,1).\end{aligned}$$

    - Koeficienty těchto lineárních kombinací zapíšeme jako sloupce matice P:

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

  - **Krok 2: Převod souřadnic z $\mathcal{B}_2$ do $\mathcal{B}_1$.**
    - Máme vektor $\mathbf{v} = (2,3,4)$ v bázi $\mathcal{B}_2$.
    - Jeho souřadnice v bázi $\mathcal{B}_1$ získáme vynásobením matice P vektorem $\mathbf{v}_{\mathcal{B}_2}$:

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}_1} = P\cdot\mathbf{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

* Výpočet:

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 3+1\cdot 4 \\ 1\cdot 2+1\cdot 3+0\cdot 4 \\ 0\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

* Výsledek: Souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ v bázi $\mathcal{B}_1$ jsou $(6,5,7)$.

– **Krok 3: Převod souřadnic z $\mathcal{B}_1$ do $\mathcal{B}_2$.**

* Pokud chceme převést souřadnice z $\mathcal{B}_1$ do $\mathcal{B}_2$, použijeme inverzní matici P^{-1}.
* Nejprve spočítáme inverzní matici P^{-1}:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot \operatorname{adj}(P)$$

Kde $\det(P) = 1\cdot(1\cdot 1-0\cdot 1) - 0\cdot(1\cdot 1-0\cdot 0) + 1\cdot(1\cdot 1-1\cdot 0) = 2$.

$$\operatorname{adj}(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tedy:

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

* Nyní převedeme vektor $\mathbf{v}_{\mathcal{B}_1} = (6,5,7)$ do $\mathcal{B}_2$:

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}\cdot \mathbf{v}_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

* Výpočet:

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\cdot 6+(-1)\cdot 5+1\cdot 7 \\ (-1)\cdot 6+1\cdot 5+1\cdot 7 \\ 1\cdot 6+1\cdot 5+(-1)\cdot 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

* Výsledek: Souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ v bázi $\mathcal{B}_2$ jsou $(4,3,2)$. Tohle nevypadá úplně ok, já vím, ale už se mi to nechce upravovat xd

7 Číselné matice a operace s nimi

7.1 Násobení matice vektorem, násobení matic

- **Násobení matice vektorem**: Násobení matice A s rozměry $m\times n$ a vektorem x s rozměry $n\times 1$ vede k vektoru Ax s rozměry $m\times 1$. Každý prvek výsledného vektoru je skalárním součinem příslušného řádku matice A a vektoru x.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6 \\ 3\cdot 5+4\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

- **Násobení matic**: Násobení matice A s rozměry $m\times n$ a matice B s rozměry $n\times p$ vede k matici AB s rozměry $m\times p$. Prvek na pozici (i,j) výsledné matice je skalárním součinem i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

7.2 Matice přechodu

- **Matice přechodu**: Matice přechodu popisuje, jak se souřadnice vektoru v jednom bázovém systému převádějí do jiného bázového systému. Buďte P matice přechodu z báze B do báze C, pak souřadnice vektoru x v bázi C jsou $[x]_C = P[x]_B$.

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pokud $[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, pak $[x]_C = P[x]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

7.3 Matice reprezentující operace v Gaussově eliminační metodě

- **Matice elementárních operací**: Gaussova eliminace se provádí pomocí elementárních matric, které reprezentují operace, jako je násobení řádku skalar , přidání násobku jednoho řádku k druhému, apod.

Přidání 2 krát prvního řádku k druhému: $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix}$

7.4 Jednotková matice, inverzní matice a její výpočet Gaussovou-Jordanovou eliminační metodou

- **Jednotková matice**: Jednotková matice I je čtvercová matice s jedničkami na hlavní diagonále a nulami jinde. Pro každou matici A, platí $AI = IA = A$.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Inverzní matice**: Inverzní matice A^{-1} ke čtvercové matici A splňuje $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Výpočet se provádí pomocí Gaussova-Jordanovy eliminace.

PS: tady ten výpočet nemusí být správně, musím zkontrolovat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{eliminace}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

7.5 Lineární kombinace matic

- **Lineární kombinace matic**: Lineární kombinace matic je součet těchto matic, každá násobená skalárem. Pokud A, B jsou matice stejných rozměrů a c, d jsou skaláry, pak $cA + dB$ je lineární kombinace A a B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2A + 3B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 + 3 \\ 6 + 3 & 8 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

7.6 Transpozice matice

- **Transpozice matice**: Transpozice matice A vznikne převratem řádků a sloupců matice A. Prvek na pozici (i, j) v původní matici bude na pozici (j, i) v transponované matici A^T.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

7.7 Vztahy mezi různými maticovými operacemi

- **Asociativita a distributivita**: Násobení matic je asociativní, t.j. $(AB)C = A(BC)$, a distributivní, t.j. $A(B + C) = AB + AC$. Nicméně, násobení matic není komutativní, obecně $AB \neq BA$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \neq AB$$

7.8 Blokové matice a výpočty s nimi

- **Blokové matice**: Blokové matice jsou matice, jejichž prvky jsou samotné matice. Operace s nimi probíhají podobně jako s obyčejnými maticemi, pokud splňují dimenzionální požadavky.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

8 Lineární zobrazení na vektorových prostorech

8.1 Definice lineárního zobrazení

- Lineární zobrazení je funkce $T : V \to W$ mezi dvěma vektorovými prostory V a W nad stejným tělesem, která zachovává operace sčítání vektorů a násobení skalárem.
- To znamená, že pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a skalár c platí:
  1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ (aditivita = když sečtu celou množinu = funguje to stejně jako když sečtu daný prvek s prvkem)
  2. $T(c * \mathbf{u}) = c * T(\mathbf{u})$ (homogenita = když vynásobím danou množinu skalárem tak to funguje stejně, jako kdybych dané prvky vynásobil tím skalárem)

  Příklad: Uvažujme zobrazení $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované jako $T(x, y) = (2x, 3y)$. Toto zobrazení je lineární, protože splňuje obě podmínky.

8.2 Aditivní a homogenní zobrazení

Jednoduše to splňuje danou podmínku:

- **Aditivní zobrazení** splňuje podmínku $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.
- **Homogenní zobrazení** splňuje podmínku $T(c * \mathbf{u}) = c * T(\mathbf{u})$.
- **Příklad:** Zobrazení $T(x, y) = (x+y, x-y)$ je aditivní i homogenní, protože splňuje obě podmínky.

8.3 Přípustné operace s lineárními zobrazeními

- **Skládání lineárních zobrazení**: Je-li $T : V \to W$ a $S : W \to U$ lineární zobrazení, pak $S \circ T : V \to U$ je také lineární zobrazení.
- **Sčítání lineárních zobrazení:** Je-li $T, S : V \to W$ lineární zobrazení, pak $T+S$ je také lineární zobrazení.
- **Příklad:** Nechť $T(x, y) = (2x, y)$ a $S(x, y) = (x, 3y)$. Pak $(T+S)(x, y) = (3x, 4y)$ je také lineární zobrazení.

8.4 Jádro lineárního zobrazení

- **Jádro lineárního zobrazení** $T : V \to W$ = množina všech vektorů $\mathbf{v} \in V$, pro které platí $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
- Značíme ho $\ker(T)$.
- **Příklad:** Pro zobrazení $T(x, y) = (x + y, 0)$ je jádro $\ker(T) = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

8.5 Vlastnosti definičního oboru a oboru hodnot

- **Definiční obor** V je vektorový prostor, ze kterého zobrazení T zobrazuje.
- **Obor hodnot** $\mathbf{Im}(T)$ je množina všech vektorů $\mathbf{w} \in W$, pro které existuje $\mathbf{v} \in V$ tak, že $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
- **Příklad:** Pro zobrazení $T(x, y) = (x, 0)$ je definiční obor $\mathbb{R}^2$ a obor hodnot $\mathrm{Im}(T) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

9 Frobeniova věta (pro obecná lineární zobrazení)

Frobeniova věta = soustava lineárních rovnic má řešení právě takhle, když hodnost matice (množství lineárně nezávislých řádků) == hodnost rozšířené matice (s přidaným sloupcem pravých stran rovnic)

- **Případ 1:** hodnost(A) = hodnost$(A|\mathbf{b})$
  Soustava má řešení.
  Příklad:
  $$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 6. \end{cases}$$
  Hodnost $A = 1$, hodnost $(A|\mathbf{b}) = 1$.
  Závěr: Soustava má nekonečně mnoho řešení.
- **Případ 2:** hodnost$(A) <$ hodnost$(A|\mathbf{b})$
  Soustava nemá řešení.
  Příklad:
  $$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 7. \end{cases}$$
  Hodnost $A = 1$, hodnost $(A|\mathbf{b}) = 2$.
  Závěr: Soustava nemá řešení.
- **Případ 3:** hodnost(A) = počet neznámých
  Soustava má právě jedno řešení.
  Příklad:
  $$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$
  Hodnost $A = 2$, hodnost $(A|\mathbf{b}) = 2$, počet neznámých $= 2$.
  Závěr: Soustava má právě jedno řešení ($x = 2$, $y = 1$).
- **Případ 4:** hodnost$(A) <$ počet neznámých
  Soustava má nekonečně mnoho řešení.
  Příklad:
  $$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + 2y + 2z = 6. \end{cases}$$
  Hodnost $A = 1$, hodnost $(A|\mathbf{b}) = 1$, počet neznámých $= 3$.
  Závěr: Soustava má nekonečně mnoho řešení.

9.1 Množina vzorů daného vektoru při lineárním zobrazení

- **Definice:** Pro lineární zobrazení $f : V \to W$ a vektor $w \in W$, množina vzorů vektoru w je množina všech vektorů $v \in V$, pro které platí $f(v) = w$. Tuto množinu značíme $f^{-1}(w)$.
- **Příklad:** Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované jako $f(x, y) = x + y$. Pro $w = 2$, množina vzorů je $f^{-1}(2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$, což je přímka v rovině.

9.2 Postup hledání neznámého vzoru při známém obrazu

- **Kroky:**
  1. **Určete obraz lineárního zobrazení:** Zjistěte, zda daný vektor w patří do obrazu $f(V)$.
  2. **Najděte jedno řešení:** Pokud $w \in f(V)$, najděte alespoň jeden vektor $v_0 \in V$, pro který $f(v_0) = w$.
  3. **Popište obecné řešení:** Všechny vzory v jsou pak dány vztahem $v = v_0 + \ker(f)$, kde $\ker(f)$ je jádro zobrazení f.
- **Příklad:** Pro zobrazení $f(x, y) = x + y$ a $w = 2$, jedním řešením je $v_0 = (2, 0)$. Jádro zobrazení je $\ker(f) = \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Tedy obecné řešení je $v = (2, 0) + (t, -t) = (2 + t, -t)$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$.

9.3 Souvislost s řešením soustav lineárních rovnic

- **Souvislost:** Hledání vzorů daného vektoru při lineárním zobrazení je ekvivalentní s řešením soustavy lineárních rovnic. Konkrétně, jestliže f je reprezentováno maticí A, hledání v takového, že $f(v) = w$, se redukuje na řešení rovnice $Av = w$.

- **Příklad:** Pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $w = 2$, hledáme vektory $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ takové, že $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2$, což je stejné jako hledat řešení rovnice $x + y = 2$.

10 Maticová reprezentace lineárního zobrazení

10.1 Výpočet souřadnic obrazu ze souřadnic vzoru

- Při daném lineárním zobrazení $f : V \to W$ a jeho maticové reprezentaci A vzhledem k zvoleným bázím, lze souřadnice obrazu vektoru $v \in V$ vypočítat jako součin matice A a souřadnicového vektoru v v bázích V.

- Příklad: Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Potom obraz $f(v)$ má souřadnice $A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 * 1 + 2 * 2 \\ 3 * 1 + 4 * 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

10.2 Konstrukce maticové reprezentace

- Matice lineárního zobrazení vzhledem k daným bázím vstupního a výstupního prostoru se konstruuje tak, že sloupce matice jsou obrazy bázových vektorů vstupního prostoru vyjádřeny v bázích výstupního prostoru.

- Příklad: Nechť $f(e_1) = w_1 + 2w_2$ a $f(e_2) = 3w_1 + 4w_2$, kde $\{e_1, e_2\}$ je báze V a $\{w_1, w_2\}$ je báze W. Pak matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

10.3 Maticové reprezentace operací na lineárních zobrazeních

- Sčítání lineárních zobrazení odpovídá sčítání jejich matic, pokud jsou dané vzhledem k stejným bázím.

- Skalární násobek lineárního zobrazení odpovídá skalárnímu násobku jeho matice.

- Složené zobrazení $f \circ g$ odpovídá násobku matic $A_f \cdot A_g$.

- Příklad: Nechť $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $A_g = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Potom $A_{f \circ g} = A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} 1 * 5 + 2 * 7 & 1 * 6 + 2 * 8 \\ 3 * 5 + 4 * 7 & 3 * 6 + 4 * 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$.

10.4 Změna matice při změně bází ve výchozím a cílovém prostoru

- Při změně bází ve vstupním nebo výstupním prostoru se matice lineárního zobrazení mění podle vzorce $A' = P^{-1}AQ$, kde P je přechodová matice v cílovém prostoru a Q v výchozím prostoru.

- Příklad: Nechť původní matice je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, přechodová matice ve vstupním prostoru $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a ve výstupním prostoru $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Potom $A' = P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

11 Lineární zobrazení vektorového prostoru do sebe

11.1 Vlastní čísla a vektory lineárního zobrazení

- **Vlastní číslo** je skalár, ke kterému existuje nenulový vektor (**vlastní vektor**), který když proženeme danou maticí tak se nám vrátí vektor * λ.
- **Složitě řečeno**: Vlastní číslo λ lineárního zobrazení $A : V \to V$ je skalár, pro který existuje nenulový vektor $v \in V$, takže $A(v) = \lambda v$. Tento vektor v se nazývá **vlastní vektor** příslušný k λ.
- **Příklad**: Pro lineární zobrazení reprezentované maticí $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ jsou vlastní čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 3$ s příslušnými vlastními vektory $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11.2 Vlastnosti vlastních vektorů

- Vlastní vektory můžu vynásobit skalárem a stále to bude vlastní vektor a jeho přidružené vlastní číslo λ se nezmění.
- Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.
- **Příklad:** Pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vlastní číslo $\lambda = 1$ má vlastní vektory ve tvaru $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a jeho násobky.

11.3 Hlavní vektory

- **Hlavní vektory** (generalizované vlastní vektory) jsou rozšířením vlastních vektorů pro případy, kdy matici nelze diagonalizovat.
- Definují se rekurzivně jako řešení $(A - \lambda I)^k v = 0$ pro nějaké $k \geq 1$.
- **Příklad**: Pro matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, kde $\lambda = 2$ je vlastní číslo s algebraickou multiplicitou 2, ale geometrická multiplicita je 1. Hlavní vektor druhého řádu lze najít jako $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11.4 Elementární metody hledání vlastních čísel a vektorů na konečnědimenzionálních prostorech

- **Vlastní čísla**: Najdou se jako kořeny charakteristického polynomu $\det(A - \lambda I) = 0$.
- **Vlastní vektory**: Pro každé vlastní číslo λ se najdou vektorové prostředí $(A - \lambda I) * v = 0$. ([v=x1,x2,x3] nebo [v=a,b,c]. Hledáme prostě tuto neznámou.)
- **Příklad**: Pro matici $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, charakteristický polynom je $(5 - \lambda)(-1 - \lambda) + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Vlastní vektory k $\lambda = 2$ splňují $(A - 2I)v = 0$, což dává vektorový prostor řešení.

12 Skládání lineárního endomorfismu se sebou samotným

12.1 Co je endomorfismus?

- **Endomorfismus** = lineární zobrazení f co zobrazuje vektorový prostor V samo do sebe.
- To znamená, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ platí $f(\mathbf{v}) \in V$.
- **Podmínky endomorfismu**

- **Zobrazuje vektorový prostor do sebe sama:**
  * Pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ musí platit $f(\mathbf{v}) \in V$.
  * Jinými slovy, zobrazení f nemůže "vytáhnout" vektor z V do jiného prostoru.
- **Příklad:** Zobrazení $f(x, y) = (2x, 2y)$ na prostoru $\mathbb{R}^2$ zobrazuje $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, protože:

$$f(x, y) = (2x, 2y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{pro každé} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- **Kontrapříklad:** Zobrazení $f(x, y) = (x, y, 0)$ na prostoru $\mathbb{R}^2$ nezobrazuje do sebe sama, protože:

$$f(x, y) = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{pro každé} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

  Toto zobrazení není endomorfismus.

- **Příklad:** Mějme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ a endomorfismus $f(x, y) = (2x, 2y)$. Pro vektor $\mathbf{v} = (1, 3)$ dostaneme:

$$f(\mathbf{v}) = f(1, 3) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 3) = (2, 6).$$

  Výsledek $(2, 6)$ je opět vektor v $\mathbb{R}^2$, takže f je endomorfismus.

12.2 Mocniny a mnohočleny z lineárních endomorfismů

- **Skládání endomorfismu se sebou samotným:**
  - Označuje opakované aplikování endomorfismu f na vektorový prostor. Například, $f^2 = f \circ f$ znamená, že endomorfismus f je aplikován dvakrát.
  - Pokud f je reprezentován maticí A, pak f^2 je reprezentována maticí A^2.
  - **Příklad:** Pro endomorfismus $f(x, y) = (2x, 2y)$ platí:

$$f^2(x, y) = f(f(x, y)) = f(2x, 2y) = (2 \cdot 2x, 2 \cdot 2y) = (4x, 4y).$$

- **Mnohočleny endomorfismů:**
  - **Definice:** Pokud $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ je polynom a f je endomorfismus, pak mnohočlen endomorfismu $p(f)$ je definován jako:

$$p(f) = a_0 \mathrm{Id} + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n,$$

    kde:
    * Id je identické zobrazení ($\mathrm{Id}(x) = x$),
    * f^k je k-násobné skládání f se sebou samotným,
    * $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou koeficienty polynomu.
  - **Příklad:** Pro polynom $p(t) = t^2 - 3t + 2$ a endomorfismus $f(x) = 3x$ platí:

$$p(f) = f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}.$$

    Vypočítáme jednotlivé členy:
    * $f^2(x) = f(f(x)) = f(3x) = 3 \cdot 3x = 9x$,
    * $3f(x) = 3 \cdot 3x = 9x$,
    * $2\mathrm{Id}(x) = 2x$.

    Sečteme výsledky:

$$p(f)(x) = f^2(x) - 3f(x) + 2\mathrm{Id}(x) = 9x - 9x + 2x = 2x.$$

12.3 Jádro z mnohočlenu lineárního endomorfismu a jeho vztah ke kořenům mnohočlenu a vlastním vektorům základního endomorfismu

- **Jádro mnohočlenu endomorfismu:** Pro polynom $p(t)$ a endomorfismus f, je jádro $p(f)$ množina vektorů $\mathbf{v}$, pro které $p(f)(\mathbf{v}) = 0$. Toto jádro je podprostor vektorového prostoru.
- **Vztah ke kořenům polynomu:** Pokud λ je kořen polynomu $p(t)$, tj. $p(\lambda) = 0$, pak všechny vlastní vektory f s vlastními čísly λ leží v jádře $p(f)$. Například, pro $p(t) = t-2$ a endomorfismus f s vlastním číslem 2, platí:
$$\ker(p(f)) = \ker(f - 2\mathrm{Id}),$$
což je množina vlastních vektorů s vlastním číslem 2.
- **Vztah k vlastním vektorům:** Vlastní vektory endomorfismu f jsou přímo související s kořeny charakteristického polynomu f. Vektor $\mathbf{v}$ je vlastním vektorem k vlastnímu číslu λ, pokud $\mathbf{v} \in \ker(f - \lambda\mathrm{Id})$. Tento vztah se zobecňuje pro libovolný polynom $p(t)$, kde $\ker(p(f))$ obsahuje vektory, které splňují $p(f)(\mathbf{v}) = 0$.

13 Determinant

13.1 Možné definice a metody jeho výpočtu

- **Leibnizova formule:** Klasický křížový počítáníčko: (skalární součin prvků na \ diagonále) - (skalární součin prvků na / diagonále)
  - **Příklad:** Pro 2×2 matici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je $\det(A) = ad - bc$.
- **Laplaceova expandování:** Determinant lze vypočítat pomocí rozvoje podle libovolného řádku nebo sloupce. Například rozvoj podle prvního řádku:
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$$
kde C_{1j} je algebraický doplněk prvků a_{1j}. **Příklad:** Pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, determinant je $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.
- **Výpočet pomocí horní trojúhelnice:** Determinant matice se rovná součinu prvků na hlavní diagonále, pokud je matice převedena na horní trojúhelníkovou formu pomocí elementárních řádkových operací.
  - **Příklad:** Pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ je $\det(A) = 1 \cdot 4 = 4$.

13.2 Geometrická reprezentace

- Jednoduše řečeno: poměr mezi plochou co do matice vložím & plochou co vrátí
- Ve 2D násobek plochy, ve 3D násobek objemu.
- Determinant reprezentuje skalární faktor, kterým je změněna objemová míra lineární transformace dané maticí.
  - **Příklad:** Pro matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, determinant je 6, což znamená, že plocha obrazu je 6 krát větší než původní plocha.

14 Skalární součin

- Pozor! Je definován jinak v:
  - Ortogonální bázi
  - Ortonormální bázi
- Může to být otázka u teoretický

14.1 Definice, vlastnosti

- Skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je definován jako:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Vlastnosti skalárního součinu:
  - Komutativita: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
  - Distributivita: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
  - Asociativita s násobením skalárem: $(c * \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
  - Pozitivita definitnost: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ pouze pro $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- **Příklad**: Pro vektory $\mathbf{u} = (1, 2)$ a $\mathbf{v} = (3, 4)$ je skalární součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$.

14.2 Norma vektoru a její vlastnosti

- **Norma vektoru u** $\in \mathbb{R}^n$ je definována jako:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

- Vlastnosti normy:
  - Pozitivita definitnost: $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ a $\|\mathbf{u}\| = 0$ pouze pro $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
  - Homogenita: $\|c\mathbf{u}\| = |c|\|\mathbf{u}\|$
  - Trojúhelníková nerovnost: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
- Příklad: Norma vektoru $\mathbf{u} = (3, 4)$ je $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

14.3 Skalární součiny na různých vektorových prostorech

- Skalární součin lze definovat v různých vektorových prostorech, například v prostoru polynomů nebo v prostoru funkcí.
- **Příklad**: V prostoru polynomů $P([a, b])$ lze skalární součin definovat jako:

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx$$

- **Příklad výpočtu**: Pro polynomy $p(x) = x$ a $q(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$ je skalární součin:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

14.4 Speciálně: prostor l_2 a výpočet skalárního součinu geometrických posloupností

- Prostor l_2 je prostor všech číselných posloupností, jejichž součet čtverců je konvergentní.
- Skalární součin v l_2 je definován jako:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

- **Příklad**: Pro posloupnosti $\mathbf{a} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$ a $\mathbf{b} = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots)$ je skalární součin:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} + \cdots = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \cdots = \frac{7}{6}$$

14.5 Metrická matice a výpočet skalárního součinu vektorů pomocí souřadnic v dané bázi

- Metrická matice G v dané bázi je matice, jejíž prvky jsou skalární součiny základních vektorů.
- Skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ v této bázi se vypočte jako:

$$\mathbf{x}^T G \mathbf{y}$$

- Příklad: Pro metrickou matici $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ a vektory $\mathbf{x} = (1, 0)$, $\mathbf{y} = (0, 1)$ je skalární součin:

$$\mathbf{x}^T G \mathbf{y} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$$

14.6 Výpočet souřadnic vektoru v dané bázi pomocí skalárního součinu

- Souřadnice vektoru v dané bázi lze vypočítat pomocí skalárních součinů s základními vektory.
- Pro ortogonální bázi se souřadnice vypočítají jako:

$$x_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i}{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i}$$

- Příklad: V prostoru s bází $\mathbf{e}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, -1)$ a vektorem $\mathbf{v} = (2, 0)$ se souřadnice vypočítají jako:

$$x_1 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{1^2 + 1^2} = 1, \quad x_2 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2} = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)}{1^2 + (-1)^2} = 1$$

  Takže $\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2$.

15 Úhel vektorů a ortogonalita

15.1 Schwartzova nerovnost

- Schwartzova nerovnost tvrdí, že pro libovolné vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ v euklidovském prostoru platí:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

  Zde:

  - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ značí **skalární součin** vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.
  - Pro vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ je skalární součin definován jako:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

- $\|\mathbf{u}\|$ značí **normu (délku) vektoru** $\mathbf{u}$, která je definována jako:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

- Zápis $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ značí **obyčejné násobení** dvou reálných čísel (norem vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$).

- Tato nerovnost je základním nástrojem v lineární algebře a má mnoho aplikací. Například pro vektory $\mathbf{u} = (1, 0)$ a $\mathbf{v} = (0, 1)$ platí:

  - Skalární součin: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (1)(0) + (0)(1) = 0$,
  - Norma vektoru $\mathbf{u}$: $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$,
  - Norma vektoru $\mathbf{v}$: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$,
  - Obyčejné násobení norem: $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = 1 \cdot 1 = 1$.

  Nerovnost tedy platí, protože $0 \leq 1$.

15.2 Úhel mezi vektory

- Úhel θ mezi dvěma vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ lze vypočítat pomocí vzorce:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$$

  Například, pro vektory $\mathbf{u} = (1, 1)$ a $\mathbf{v} = (1, 0)$ je $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}$ a $\|\mathbf{v}\| = 1$, takže:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

  a tedy $\theta = 45°$.

15.3 Speciálně kolmost dvou vektorů

- Dva vektory jsou kolmé (ortogonální), pokud je jejich skalární součin roven nule, tedy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Například, vektory $\mathbf{u} = (2, 3)$ a $\mathbf{v} = (-3, 2)$ jsou kolmé, protože:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(-3) + (3)(2) = -6 + 6 = 0$$

15.4 Ortogonální množiny a jejich vlastnosti

- Ortogonální množina je množina vektorů, ve které je každý dvojice vektorů kolmá. Taková množina má vlastnosti, jako je lineární nezávislost (pokud nejsou žádné vektory nulové). Například, vektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ a $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ tvoří ortogonální množinu v $\mathbb{R}^3$.

- Ortonormální: bázové vektory mají navíc jednotkovou délku

15.5 Gramův-Schmidtův algoritmus

- Gramův-Schmidtův algoritmus je postup, který slouží k ortogonalizaci lineárně nezávislé množiny vektorů. Z dané množiny vektorů vytvoří ortogonální množinu vektorů, která spanuje stejný podprostor. Například, pro vektory $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ a $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$ v $\mathbb{R}^2$ lze konstruovat ortogonální vektory $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 1)$ a

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = (1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

16 Optimální aproximace

16.1 Vektor v podprostoru nejbližší k danému vektoru, konstrukce, vlastnosti odchylky, výpočet souřadnic aproximace, velikost odchylky

- Nejbližší vektor v podprostoru k danému vektoru je ortogonální projekce daného vektoru na ten podprostor.
- **Konstrukce**:
  1. Mějme vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ a podprostor W generovaný ortogonální bází $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$.
  2. Projekce $\mathbf{v}$ na W se vypočítá jako:

  $$\text{proj}_W \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i$$

  3. Odchylka je $\mathbf{v} - \text{proj}_W \mathbf{v}$.
  4. Velikost odchylky je $\|\mathbf{v} - \text{proj}_W \mathbf{v}\|$.
- Příklad: Nechť $\mathbf{v} = (3, 4, 5)$ a podprostor W je generován vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$ a $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$. Potom:

  $$\text{proj}_W \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle} \mathbf{u}_2 = \frac{3}{1}(1, 0, 0) + \frac{4}{1}(0, 1, 0) = (3, 4, 0)$$

  Odchylka je $\mathbf{v} - \text{proj}_W \mathbf{v} = (0, 0, 5)$ a její velikost je $\sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} = 5$.

16.2 Použití v metodě nejmenších čtverců

- Metoda nejmenších čtverců minimalizuje sumu čtverců odchylek mezi daty a modelem.
- **Konstrukce**:
  1. Mějme data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ a model $y = mx + b$.
  2. Sestavíme matici A a vektor $\mathbf{b}$:

  $$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

  3. Řešíme soustavu $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$, kde $\mathbf{x} = (m, b)^T$.
- **Příklad**: Pro data $(1, 2), (2, 3), (3, 5)$:

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

  $$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix}$$

  Řešení soustavy:

  $$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix}$$

  Výsledek: $m = 1.5$, $b = 0.333$. Přímka je $y = 1.5x + 0.333$.

16.3 Použití v metodě sdružených gradientů

- Metoda sdružených gradientů iterativně hledá řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Konstrukce:
  1. Inicializace: $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$.
  2. Iterace:
  $$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T A \mathbf{p}_k}, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \quad \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k A \mathbf{p}_k, \quad \beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}, \quad \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k$$
  3. Opakování dokud $\|\mathbf{r}_k\|$ není dostatečně malé.
- Příklad: Řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde:
  $$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
  Inicializace: $\mathbf{x}_0 = (0,0)^T$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0 = (1,2)^T$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 = (1,2)^T$. První iterace:
  $$\alpha_0 = \frac{\mathbf{r}_0^T \mathbf{r}_0}{\mathbf{p}_0^T A \mathbf{p}_0} = \frac{5}{23}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \alpha_0 \mathbf{p}_0 = \left(\frac{5}{23}, \frac{10}{23}\right)^T, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \alpha_0 A \mathbf{p}_0 = \left(\frac{18}{23}, \frac{16}{23}\right)^T, \quad \beta_0 = \frac{\mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_0^T \mathbf{r}_0} = \frac{580}{529}, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$$
  Pokračování iterací dokud $\|\mathbf{r}_k\|$ není dostatečně malé.

16.4 Použití v JPEG kompresi

- V JPEG kompresi se obrazový blok aproximuje pomocí diskrétní cosine transformace (DCT).
- Konstrukce:
  1. Rozdělíme obraz na bloky 8x8 pixelů.
  2. Aplikujeme DCT na každý blok:
  $$F(u,v) = \frac{1}{4} C(u) C(v) \sum_{x=0}^{7} \sum_{y=0}^{7} f(x,y) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right)$$
  kde $C(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pro $u = 0$, jinak 1.
  3. Kvantizujeme koeficienty $F(u,v)$.
- Příklad: Pro blok 8x8 pixelů s hodnotami $f(x,y)$ aplikujeme DCT a získáme koeficienty $F(u,v)$. Nízké frekvenční koeficienty jsou prioritizovány při kompresi.

16.5 Úplná ortogonální množina v prostoru

- Množina vektorů, které jsou vzájemně ortogonální (jejich skalární součin je nulový).
- Úplnost znamená, že neexistuje nenulový vektor, který by byl ortogonální ke všem vektorům této množiny.
- Tvoří ortogonální bázi prostoru – libovolný vektor prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů.
- Příklad výpočtu:
  - Mějme vektory $\mathbf{u} = (1,0)$ a $\mathbf{v} = (0,1)$ v $\mathbb{R}^2$.
  - Skalární součin: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ (jsou ortogonální).
  - Tyto vektory tvoří úplnou ortogonální množinu, protože každý vektor v $\mathbb{R}^2$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

16.6 Fourierovy řady

- Rozklad periodické funkce na nekonečnou řadu goniometrických funkcí (sinů a kosinů) s různými frekvencemi.
- Tyto funkce tvoří úplnou ortogonální množinu v prostoru kvadraticky integrovatelných funkcí (L^2 prostoru) na intervalu $[-\pi, \pi]$ nebo $[0, 2\pi]$.
- Příklad výpočtu:
  - Mějme funkci $f(x) = x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.
  - Fourierova řada pro $f(x)$ je:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

  - První členy řady:

$$f(x) \approx 2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(4x) + \dots$$

17 Výpočetní náročnost operací s maticemi

17.1 Počty operací nutné k násobení matice vektorem

- Násobení matice $m \times n$ vektorem $n \times 1$ vyžaduje $\mathcal{O}(m \cdot n)$ operací (každý prvek výsledného vektoru je skalární součin řádku matice a vektoru).
- Příklad: Pro matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ a vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ potřebujeme $2 \cdot 3 = 6$ násobení a $2 \cdot 2 = 4$ sčítání.

17.2 Násobení matic

- Násobení dvou matic $n \times n$ klasickým algoritmem má složitost $\mathcal{O}(n^3)$ (každý prvek výsledku je skalární součin řádku a sloupce).
- Příklad: Pro matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ je počet operací $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ násobení a $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ sčítání.

17.3 Použití Gaussovy eliminační metody

- Redukce matice $n \times n$ do odstupňovaného tvaru má složitost $\mathcal{O}(n^3)$ (eliminace proměnných pomocí řádkových operací).
- Příklad: Pro matici $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se provádí přibližně n^3 operací pro eliminaci.

17.4 Gaussova-Jordanova eliminace

- Rozšíření Gaussovy eliminace do redukovaného odstupňovaného tvaru má také složitost $\mathcal{O}(n^3)$, ale s vyšší konstantou (eliminace nad i pod pivoty).
- Příklad: Po Gaussově eliminaci matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

  se dále vynulují prvky nad pivoty.

17.5 Strassenův algoritmus

- Strassenův algoritmus je efektivní metoda pro násobení matic, která dosahuje složitosti $\mathcal{O}(n^{2.81})$.
- To je lepší než klasický algoritmus se složitostí $\mathcal{O}(n^3)$.
- Algoritmus využívá rekurzivního dělení matic na menší podmatice a následně kombinuje výsledky pomocí speciálních operací.
- **Příklad**: Pro matice velikosti 2×2 se místo obvyklých 8 násobení použije pouze 7 speciálních operací. Tyto operace zahrnují například výpočet $(A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$, kde A_{11}, A_{22}, B_{11} a B_{22} jsou podmatice původních matic. Tím se sníží počet potřebných násobení, což vede k vyšší efektivitě.

18 Matematická indukce

18.1 Princip

- Matematická indukce je metoda dokazování, která se používá k ověření pravdivosti tvrzení pro všechna přirozená čísla.
- Skládá se ze dvou kroků:
  - **1. Bázový krok**: Ověříme, že tvrzení platí pro nejmenší hodnotu (obvykle $n = 1$).
  - **2. Indukční krok**: Předpokládáme, že tvrzení platí pro nějaké $n = k$ (indukční předpoklad), a dokážeme, že pak platí i pro $n = k + 1$.
- Pokud oba kroky platí, pak tvrzení platí pro všechna přirozená čísla.

18.2 Použití

- Matematická indukce se často používá k dokazování vlastností posloupností, součtů, nebo nerovností.
- **Příklad**: Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:

  $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

  Řešení:

  - **Bázový krok**: Pro $n = 1$ platí $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, což je pravda.
  - **Indukční krok**: Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k$, tedy:

    $$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

    Pak pro $n = k + 1$ máme:

    $$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

    Tím je indukční krok dokončen.

19 Základní pravidla kombinatoriky

19.1 Pravidlo součtu

- Pravidlo součtu říká, že pokud máme n možností, jak provést jednu věc, a m možností, jak provést jinou věc, a tyto věci nelze provést současně, pak celkový počet možností je $n + m$.
- **Příklad:** Máme 3 červené a 4 modré kuličky. Kolik máme možností, jak vybrat jednu kuličku? Podle pravidla součtu je to $3 + 4 = 7$ možností.

19.2 Pravidlo součinu

- Pravidlo součinu říká, že pokud máme n možností, jak provést jednu věc, a pro každou z těchto možností máme m možností, jak provést jinou věc, pak celkový počet možností je $n \times m$.
- **Příklad:** Máme 3 trička a 2 kalhoty. Kolik máme možností, jak si obléknout jedno tričko a jedny kalhoty? Podle pravidla součinu je to $3 \times 2 = 6$ možností.

19.3 Princip inkluze a exkluze

- Princip inkluze a exkluze slouží k výpočtu počtu prvků ve sjednocení dvou množin. Pokud máme množiny A a B, pak počet prvků v $A \cup B$ je $|A| + |B| - |A \cap B|$.
- **Příklad:** Ve třídě je 20 studentů, kteří umí anglicky, 15 studentů, kteří umí německy, a 5 studentů, kteří umí oba jazyky. Kolik studentů umí alespoň jeden z těchto jazyků? Podle principu inkluze a exkluze je to $20 + 15 - 5 = 30$ studentů.

19.4 Dirichletův princip

- Dirichletův princip (nebo také princip holubníku) říká, že pokud máme více předmětů než přihrádek, pak alespoň jedna přihrádka musí obsahovat více než jeden předmět.
- **Příklad:** Máme 10 ponožek a 9 šuplíků. Pokud chceme uložit všechny ponožky do šuplíků, pak alespoň jeden šuplík musí obsahovat alespoň dvě ponožky.

20 Kombinatorické výpočty

20.1 Variace

- **Bez opakování**:
  - Počet způsobů, jak vybrat k prvků z n s ohledem na pořadí, kde se prvky neopakují.
  - Vzorec: $V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
  - **Příklad**: Vybrat 3 studenty z 10 do soutěžního týmu (s rozlišením pozic): $V(3, 10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.
- **S opakováním**:
  - Počet způsobů, jak vybrat k prvků z n s ohledem na pořadí, kde se prvky mohou opakovat.
  - Vzorec: $V'(k, n) = n^k$.
  - **Příklad**: Počet možných 4místných PINů (čísla 0–9): $V'(4, 10) = 10^4 = 10\,000$.

20.2 Permutace

- **Bez opakování**:
  - Počet způsobů, jak uspořádat všech n jedinečných prvků.
  - Vzorec: $P(n) = n!$.
  - **Příklad**: Uspořádání 5 knih na polici: $5! = 120$.
- **S opakováním**:
  - Počet způsobů, jak uspořádat n prvků, kde se některé prvky opakují.
  - Vzorec: $P(n; k_1, k_2, \dots) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots}$.
  - **Příklad**: Uspořádání písmen ve slově ”MAMA” (2× M, 2× A): $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$.

20.3 Kombinace

- **Bez opakování**:
  - Počet způsobů, jak vybrat k prvků z n bez ohledu na pořadí.
  - Vzorec: $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
  - **Příklad**: Výbor 4 lidí z 10: $\binom{10}{4} = 210$.
- **S opakováním**:
  - Počet způsobů, jak vybrat k prvků z n s možností opakování (nezáleží na pořadí).
  - Vzorec: $C'(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.
  - **Příklad**: Nákup 5 koláčů ze 3 druhů (může být více stejných): $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$.

20.4 Kombinatorické identity

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symetrie).
  - **Vysvětlení**: Počet způsobů, jak vybrat k prvků z n, je stejný jako počet způsobů, jak vybrat $n-k$ prvků.
  - **Příklad**: $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$.
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (součet řádku v Pascalově trojúhelníku).
  - **Vysvětlení**: Součet všech kombinačních čísel v n-tém řádku Pascalova trojúhelníku je roven počtu všech podmnožin množiny s n prvky.
  - **Příklad**: Pro $n = 3$: $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$.

20.5 Pascalův trojúhelník

- Konstrukce: Každé číslo je součet dvou čísel přímo nad ním. Platí vztah:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

  - **Příklad**: 5. řádek Pascalova trojúhelníku [nejde mi opravit (• ∩ •)] :

			1			
		1		1		
	1		2		1	
1		3		3		1
1	4		6		4	1
1	5	10		10	5	1

  Tento řádek odpovídá kombinačním číslům:

$$\binom{5}{0} = 1, \quad \binom{5}{1} = 5, \quad \binom{5}{2} = 10, \quad \binom{5}{3} = 10, \quad \binom{5}{4} = 5, \quad \binom{5}{5} = 1.$$

20.6 Binomická věta

- Rozvoj $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
  - **Příklad**: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

20.7 Multinomická věta

- Zobecnění pro více proměnných: $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_m!} a_1^{k_1} \cdots a_m^{k_m}$.
  - **Příklad**: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

20.8 Zobecněná kombinační čísla

- Kombinace s opakováním: $\binom{n+k-1}{k}$.
  - **Příklad**: Počet způsobů, jak koupit 3 kusy ovoce ze 4 druhů: $\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$.

20.9 Newtonův vzorec

- Zobecněný rozvoj $(x+b)^r$ pomocí binomických koeficientů:

$$(x+b)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k b^{r-k}$$

  - **Příklad**: Rozvoj $(x+2)^4$:

$$(x+2)^4 = \sum_{k\geq 0} \binom{4}{k} x^k 2^{4-k}$$

Postupně vypočítáme každý člen:

$$\begin{aligned}
\binom{4}{0} x^0 2^4 &= 1 \cdot 1 \cdot 16 = 16, \\
\binom{4}{1} x^1 2^3 &= 4 \cdot x \cdot 8 = 32x, \\
\binom{4}{2} x^2 2^2 &= 6 \cdot x^2 \cdot 4 = 24x^2, \\
\binom{4}{3} x^3 2^1 &= 4 \cdot x^3 \cdot 2 = 8x^3, \\
\binom{4}{4} x^4 2^0 &= 1 \cdot x^4 \cdot 1 = x^4.
\end{aligned}$$

Sečtením všech členů dostaneme:

$$(x+2)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4.$$

21 Číselné posloupnosti

21.1 Prostor číselných posloupností

- Množina všech číselných posloupností (nekonečných nebo konečných) s operacemi sčítání a násobení skalárem.
  - **Příklad:** Posloupnosti $(1, 2, 3, \dots)$ a $(2, 4, 8, \dots)$ lze sečíst jako $(3, 6, 11, \dots)$.

21.2 Lineární zobrazení na prostoru číselných posloupností

- Zobrazení zachovávající lineární kombinace (např. operátor posunu, derivace posloupnosti).
  - **Příklad:** Operátor posunu T aplikovaný na $(1, 2, 3, \dots)$ dá $(0, 1, 2, \dots)$.

21.3 Rekurentně definované posloupnosti

- Posloupnosti, kde každý člen závisí na předchozích členech (např. Fibonacciho posloupnost).
  - **Příklad:** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ s $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ dává $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$.

21.4 Rekurence konečného řádu, diferenční rovnice

- Rekurence řádu k: člen a_n závisí na k předchozích členech (např. $a_n = 2a_{n-1}$).
  - **Co je řád rekurence?**
    - Řád určuje, kolik předchozích členů potřebujeme k výpočtu dalšího členu.
    - Např. rekurence $a_n = 2a_{n-1}$ je 1. řádu, protože závisí na 1 předchozím členu.
    - Rekurence $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ je 2. řádu, protože závisí na 2 předchozích členech.
  - **Příklad:** Diferenční rovnice $a_{n+1} - 3a_n = 0$ má řešení $a_n = C \cdot 3^n$.
    - Každý další člen je $3\times$ větší než předchozí.
    - Konstanta C se určí z počátečních podmínek.

21.5 Počáteční podmínky

- Hodnoty prvních členů posloupnosti nutné k jednoznačnému určení řešení rekurence.
  - **Příklad:** Pro $a_n = 2a_{n-1}$ s $a_0 = 1$ dostaneme posloupnost $(1, 2, 4, 8, \dots)$.
    - $a_0 = 1$ (počáteční podmínka),
    - $a_1 = 2a_0 = 2$,
    - $a_2 = 2a_1 = 4$,
    - $a_3 = 2a_2 = 8$,
    - a tak dále.

21.6 Lineární rekurentní vztahy konečného řádu

- Rekurence tvaru $a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} = 0$, kde c_i jsou konstanty.
  - **Příklad:** $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ má řešení $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$.
    - Charakteristická rovnice: $r^2 - 5r + 6 = 0$ s kořeny $r = 2$ a $r = 3$.
    - Obecné řešení je lineární kombinací 2^n a 3^n.

22 Řešení rekurentních vztahů

22.1 Lineární rekurentní vztahy s konstantními koeficienty

- Rekurentní vztah vyjadřuje posloupnost pomocí předchozích členů. Například pro posloupnost $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ s počátečními podmínkami $a_0 = 1$, $a_1 = 3$:
  - $a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$,
  - $a_3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$,
  - $a_4 = 2 \cdot 7 - 5 = 9$ atd.

22.2 Charakteristický mnohočlen rekurentního vztahu

- Polynom odvozený z rekurence. Pro $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ dosadíme $a_n = r^n$:
  - Charakteristická rovnice: $r^2 - 5r + 6 = 0 \implies r_1 = 2$, $r_2 = 3$.
  - Obecné řešení: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$.
  - S počátečními podmínkami $a_0 = 1$, $a_1 = 4$:
    - $1 = C_1 \cdot 2^0 + C_2 \cdot 3^0 \implies C_1 + C_2 = 1$,
    - $4 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 3^1 \implies 2C_1 + 3C_2 = 4$.
    - Řešení soustavy: $C_1 = -1$, $C_2 = 2$.
    - Konkrétní řešení: $a_n = -2^n + 2 \cdot 3^n$.

22.3 Vlastní čísla a vlastní a hlavní vektory posunutí posloupnosti

- Posunutí posloupnosti je operátor $S(a_n) = a_{n+1}$. Pro $a_{n+1} = 3a_n$:
  - Vlastní číslo je 3, vlastní vektor je posloupnost $a_n = 3^n$.
  - S počáteční podmínkou $a_0 = 2$:
    * $a_n = 2 \cdot 3^n$.

22.4 Reálné posloupnosti generované dvojicemi komplexně sdružených vlastních čísel

- Pro kořeny $r = \alpha \pm \beta i$ použijeme převod na trigonometrický tvar. Příklad pro rekurenci $a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2}$:
  - Charakteristická rovnice: $r^2 - 2r + 5 = 0 \implies r = 1 \pm 2i$.
  - Řešení: $a_n = C_1 \cdot (\sqrt{5})^n \cos(n\theta) + C_2 \cdot (\sqrt{5})^n \sin(n\theta)$, kde $\theta = \arctan(2)$.
  - S počátečními podmínkami $a_0 = 1$, $a_1 = 2$:
    * $1 = C_1 \cdot (\sqrt{5})^0 \cos(0) + C_2 \cdot (\sqrt{5})^0 \sin(0) \implies C_1 = 1$,
    * $2 = (\sqrt{5})^1 \cos(\theta) + C_2 \cdot (\sqrt{5})^1 \sin(\theta) \implies C_2 = \frac{2-\sqrt{5}\cos(\theta)}{\sqrt{5}\sin(\theta)}$.
    * Konkrétní řešení: $a_n = (\sqrt{5})^n \cos(n\theta) + \frac{2-\sqrt{5}\cos(\theta)}{\sqrt{5}\sin(\theta)} \cdot (\sqrt{5})^n \sin(n\theta)$.

22.5 Řešení nehomogenních rekurencí se speciálními pravými stranami

- Metoda odhadu partikulárního řešení. Příklad: $a_n - 4a_{n-1} = 3^n$:
  - Homogenní řešení: $a_n^{(h)} = C \cdot 4^n$.
  - Partikulární řešení tipneme jako $a_n^{(p)} = K \cdot 3^n$. Dosazením: $3^n(K - 4K \cdot 3^{-1}) = 3^n \implies K = -3$.
  - Celkové řešení: $a_n = -3^{n+1} + C \cdot 4^n$.
  - S počáteční podmínkou $a_0 = 1$:
    * $1 = -3^1 + C \cdot 4^0 \implies C = 4$.
    * Konkrétní řešení: $a_n = -3^{n+1} + 4^{n+1}$.

23 Rovinné grafy

23.1 Základní pojmy

- **Vrchol (uzel)**: Základní prvek grafu reprezentovaný bodem
- **Stupeň vrcholu**: S kolika dalšími vrcholy je propojen hranou
- **Hrana**: Spojnice mezi dvěma vrcholy (neorientovaná/orientovaná)
- **Planární graf**: Lze nakreslit do roviny bez protnutí hran
- **Kuratowského věta**: Graf je neplanární $\iff$ obsahuje podgraf homeomorfní s K_5 nebo $K_{3,3}$
  Příklad: $K_{3,3}$ (graf "tří budov a tří zdrojů") není planární

23.2 Incidence

- **Incidence** je pojem, který popisuje vztah mezi vrcholy a hranami v grafu.
- Říkáme, že vrchol A **inciduje** s hranou e, pokud je vrchol A jedním z konců hrany e.
- Jinými slovy, vrchol a hrana jsou spojené.
- **Incidenční matice** je matematický nástroj, který popisuje incidenci v grafu.
- Je to matice o rozměrech $|V| \times |E|$, kde $|V|$ je počet vrcholů a $|E|$ je počet hran.
- Každý řádek matice odpovídá vrcholu a každý sloupec odpovídá hraně.
- Hodnota na pozici (i, j) v matici je definována takto:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud vrchol } i \text{ inciduje s hranou } j, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad: Uvažujme graf, který reprezentuje cestu $A - B - C$. Tento graf má tři vrcholy (A, B, C) a dvě hrany (e_1 mezi A a B, e_2 mezi B a C). Incidenční matice pro tento graf vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- První řádek odpovídá vrcholu A: A inciduje s e_1 (proto je tam 1), ale neinciduje s e_2 (proto je tam 0).
- Druhý řádek odpovídá vrcholu B: B inciduje s e_1 i e_2 (proto jsou tam dvě 1).
- Třetí řádek odpovídá vrcholu C: C inciduje s e_2 (proto je tam 1), ale neinciduje s e_1 (proto je tam 0).

23.3 Matice sousednosti

Matice sousednosti je čtvercová matice o rozměru $|V| \times |V|$, kde $|V|$ je počet vrcholů v grafu. Každý prvek a_{ij} udává počet hran mezi vrcholy i a j.

- Pokud $a_{ij} = 0$, mezi vrcholy i a j není žádná hrana.
- Pokud $a_{ij} = 1$, mezi vrcholy i a j je jedna hrana.
- Pro neorientovaný graf je matice symetrická ($a_{ij} = a_{ji}$).

Příklad:

23.4 Skóre grafu

- **Skóre grafu**: Posloupnost stupňů vrcholů v nerostoucím pořadí **Příklad**: $(3, 3, 2, 1)$ není grafické (nelze sestavit graf)

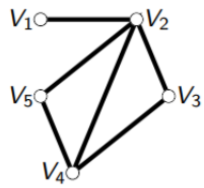
23.5 Havlův algoritmus

- **Kroky algoritmu**:
  1. Seřadit posloupnost nerostoucím způsobem
  2. Odebrat první prvek d_1
  3. Snížit následujících d_1 prvků o 1
  4. Opakovat dokud nezbyde samé nuly (grafické) nebo záporné číslo (negrafické)

Graf se dá popsat i *maticí sousednosti*, to je taková matice **S**, pro kterou je

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ , pokud množina } \{V_i, V_j\} \in \mathcal{E} \\ 0 \text{ jindy} \end{cases}$$

Například grafu



Obrázek: běžný graf

odpovídá matice sousednosti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice sousednosti normálního grafu je symetrická, $s_{ij} = s_{ji}$.

- **Příklad pro (3,3,2,2)**:

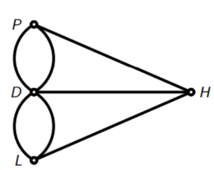
$$(3,3,2,2) \to (3,2,1,1) \quad \text{(odebráno 3, sníženy 3 prvky)}$$
$$(2,1,1) \to (1,0,0)$$
$$(0,0) \to \text{grafické}$$

23.6 Souvislost grafů – sled, tah, cesta

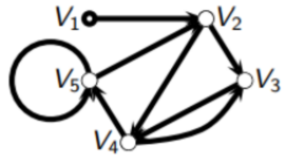
- **Sled**: Posloupnost vrcholů spojených hranami (hrany se mohou opakovat) **Příklad**: $A \to B \to C \to B$
  - Pochopil jsem to tak, že je to v podstatě skupina vektorů, kde jsou propojení: e1 = (vrchol1, vrchol2) a následně jsou daný do dalšího vektoru, kde "e1" funguje jako konkrétní informace o tom vrcholu. Příklad: posloupnost = (vrchol1, e1, vrchol2, e1, ...)
- **Tah**: Sled s jedinečnými hranami **Příklad**: $A \to B \to C \to D$
  - Podobné jako sled, akorát obsahuje propojení jen jednou + v posloupnosti je na prvním místě ten počátek. Příklad: posloupnost = (vrchol1, e1, (zde není vrchol2, protože už je v tom prvním propojení)
- **Cesta**: Tah s jedinečnými vrcholy **Příklad**: $A \to B \to C$

23.7 Speciální typy grafů

- **Multigraf**: Povoluje násobné hrany a smyčky **Příklad**: Graf s vrcholem A spojeným 2 hranami s B a se smyčkou u A

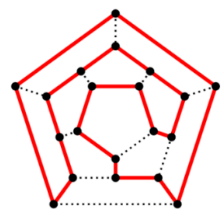


- **Úplný bipartitní graf** ($K_{m,n}$): Všechny vrcholy z části M spojeny s částí N **Příklad**: $K_{2,3}$ má 2+3 vrcholů a 6 hran
- **Pseudograf**: Multigraf + ještě má smyčky hran ze stejného vrcholu do stejného vrcholu
- **Cyklický**
  - Obsahuje kruh.



23.8 Eulerovské a Hamiltonovské grafy

- **Eulerovský graf (obsahuje Eulerovský tah)**:
  - Prochází všechny hrany jednou.
  - Příklad: Pošťák musí projít všemi ulicemi jednou.
  - Podmínka: Souvislý graf se všemi stupni sudými **Příklad**: Dva trojúhelníky spojené hranou
- **Hamiltonovský graf**:
  - Prochází všechny vrcholy jednou.
  - Příklad: Pošťák musí projít všechny křižovatky jednou.



- **Uzavřený Hamiltonovský graf**:
  - Koncový vrchol splývá s počátečním.

Kostra: libovolný podgraf, co funguje jako strom.

24 Ohodnocené grafy

24.1 Optimalizační algoritmy - minimální kostra

- **Kruskalův algoritmus**: Seřadí hrany podle váhy a přidává je od nejlehčí, dokud nevznikne kostra bez cyklů.
  - **Příklad**: Graf s vrcholy A, B, C, D a hranami $A - B(1)$, $A - C(4)$, $B - C(2)$, $B - D(5)$, $C - D(3)$. Postupně se přidají hrany $A - B(1)$, $B - C(2)$, $C - D(3)$. Celková váha: 6.
- **Borůvkův algoritmus**: Pro každou komponentu vybere nejlehčí hranu spojující ji s jinou komponentou. Opakuje, dokud není jediná komponenta.
  - **Příklad**: Stejný graf jako výše.
    - 1. iterace: Komponenty $\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}$. Nejlehčí hrany: $A-B(1)$, $B-C(2)$, $C-D(3)$, $D - C(3)$.
    - 2. iterace: Komponenty $\{A, B\}, \{C, D\}$. Nejlehčí spojující hrana: $B - C(2)$.
    Výsledná kostra: $A - B(1)$, $B - C(2)$, $C - D(3)$ (celkem 6).
- U tohoto je lepší se podívat na video.

24.2 Nejkratší cesta

- **Dijkstrův algoritmus**: Hledá nejkratší cestu z jednoho vrcholu do všech ostatních (pro nezáporné váhy).

- **Příklad pro Dijkstrův algoritmus**: Graf s vrcholy A, B, C, D a hranami $A - B(1)$, $A - C(4)$, $B - C(2)$, $B - D(5)$, $C - D(3)$. Hledání cesty z A do D:
  - Krok 1: $A \to B(1)$, $A \to C(4)$.
  - Krok 2: Z B vede cesta $B \to C(1 + 2 = 3)$ a $B \to D(1 + 5 = 6)$.
  - Krok 3: Z C vede $C \to D(3 + 3 = 6)$.
  Nejlepší cesta: $A \to B \to D$ s váhou 6 (nebo $A \to B \to C \to D$ se stejnou váhou).

Taky je lepší se podívat na video pro pochopení. Is this the end?

25 Post-zkouška

- Udělal jsem to za 1
- Doporučuju si spočítat alespoň jednou příklady ze sbírky.
- Všechno v tomto dokumentu nemusí být na 100% správně, učil jsem to při psaní. Možná i něco chybí. Každopádně nadpisy/podnadpisy se drží okruhů.
- Hodně štěstí :)