

记为

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (1.66)$$

“历史上, 柯西-黎曼方程首先出现在达朗贝尔 1752 年研究流体力学的工作中, 1979 年欧拉将其引入到解析函数的研究。1814 年柯西用其构造他的函数论。黎曼关于函数论的博士论文直到 1851 年才出现。



在证明上述定理前, 我们先用看一下可导性的例子。

例 1.4 函数 $f(z) = \bar{z}$ 处处不可导。

例 1.5 函数 $f(z) = e^z$ 在全平面可导。在全平面处处可导的函数也称作整函数 (entire function)。

例 1.6 函数 $f(z) = x^2 + y + i(y^2 - x)$ 在直线 $y = x$ 上可导, 但处处不解析。

例 1.7 函数

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{z^4}) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \quad (1.67)$$

处处满足柯西-黎曼方程但在 $z = 0$ 处不解析。

下面我们尝试证明定理 1.4。首先我们证明必要性: 设

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (1.68)$$

存在。则 h 以任何方式区域零上述极限都相等。首先令 $h = s \rightarrow 0, s \in \mathbb{R}$ 。此时

$$f'(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x+s, y) - u(x, y)}{s} + i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x+s, y) - v(x, y)}{s} = u_x + iv_x. \quad (1.69)$$

其次令 $h = it \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}$ 。此时

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{it} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{it} = -iu_y + v_y. \quad (1.70)$$

由于导数取值不依赖以何种方式趋于零, 因此有

$$u_x + iv_x = -iu_y + v_y, \quad (1.71)$$

或者写成

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (1.72)$$

接着证明充分性: 令 $h = s + it$, 由偏导数的存在性和连续性可知

$$u(x+s, y+t) = u(x, y) + su_x + tv_y + \alpha|h|, \quad (1.73)$$

$$v(x+s, y+t) = v(x, y) + sv_x + tv_y + \beta|h|, \quad (1.74)$$

其中 α 与 β 随着 $|h|$ 趋于零而趋于零。从而有

$$f(z+h) - f(z) = s(u_x + iv_x) + t(u_y + iv_y) + (\alpha + \beta)|h| \quad (1.75)$$

$$= (s + it)u_x - i(s + it)u_y + (\alpha + \beta)|h| \quad (1.76)$$

$$= h(u_x - iu_y) + (\alpha + \beta)|h|. \quad (1.77)$$

因此有

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = u_x - iu_y. \quad (1.78)$$

注 上述证明只给出了 $f(z)$ 在 z 点可导的充分条件。为了证明在 z 点解析, 还需要证明在 z 的某个邻域内处处可导。由条件易得。

复变函数的导数具有与实变函数类似的运算规则:

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (1.79)$$

$$\{f[g(z)]\}' = f'[g(z)]g'(z). \quad (1.80)$$

因此, 柯西-黎曼方程是判断一个复变函数在一点是否可导, 进而是否解析的重要工具。注意上式给出的柯西-黎曼方程是直角坐标下的形式。下面我们写出在极坐标系 $z = r \exp(i\phi)$ 下的柯西-黎曼方程。为此我们只需考虑 (各方向) 导数的存在性条件。 z 的径向微分可以写为 $\exp(i\phi)dr$, 因此沿径向导数可以写为

$$\frac{1}{e^{i\phi}} \frac{\partial f(z)}{\partial r} = \frac{1}{e^{i\phi}} u_r + \frac{1}{e^{i\phi}} i v_r, \quad (1.81)$$

而 z 的切向微分可以写为 $ir \exp(i\phi)d\phi$, 因此沿切向导数可以写为

$$\frac{1}{ire^{i\phi}} \frac{\partial f(z)}{\partial \phi} = \frac{1}{ire^{i\phi}} u_\phi + \frac{1}{ire^{i\phi}} i v_\phi, \quad (1.82)$$

要求沿径向和沿切向的导数相等立刻得到

引理 1.1. 极坐标下的柯西-黎曼方程

$$u_r = \frac{1}{r} v_\phi, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\phi. \quad (1.83)$$

柯西-黎曼方程的另一种方便形式是通过 Wirtinger 微分。

定义 1.11. Wirtinger 微分

Wirtinger 微分指的是如下定义的复求导记号:

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (1.84)$$

Wirtinger 微分可以通过微积分的链式法则理解。由于 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, 因此有

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.85)$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \partial_x - \frac{i}{2} \partial_y, \quad (1.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \partial_x + \frac{i}{2} \partial_y, \quad (1.87)$$

利用 Wirtinger 微分柯西-黎曼方程又可以写为:

引理 1.2. Wirtinger 微分下的柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (1.88)$$

即 $f(z)$ 是独立于变量 \bar{z} 的复变函数。正是因为这个条件, 我们可以将复解析函数看作单个独立复变量 z 的函数, 而不仅仅是两个实变量 x, y 的函数。

由于复解析函数的导数与方向无关, 因此可以写为

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y). \quad (1.89)$$

因此又可以写作

$$f'(z) = \frac{1}{2}(u_x - iu_y) + \frac{i}{2}(v_x - iv_y) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \quad (1.90)$$

即复解析函数的导数计算可以直接利用单变量微积分中的微分规则求解。

下面我们简单讨论一下柯西-黎曼方程的解释。

与共形映射的关系。对于平面上的两组直角坐标系 xOy 和 uOv , 如果 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是区域 D 上的函数, 则定义了一个从 xOy 上的区域到 uOv 上的区域的映射。共形映射指的是一类保持映射区域中任意两条曲线的夹角和定向不变的映射。共形映射的一个直观例子如下图所示:

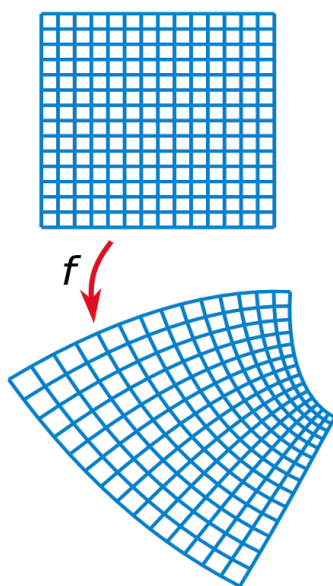


图 1.1: 一个共形变换的例子。图形取自: https://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_map#Pseudo-Riemannian_geometry。

定理 1.5. 共形映射定理

一个映射是共形映射的充要条件是 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是区域 D 上关于 $z = x + iy$ 的解析函数。



为了理解这一点, 我们考虑 xOy 平面上的一条光滑参数曲线 $(x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$ 。在 $t = 0$ 处该曲线的切矢量为

$$V = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

映射后的曲线具有参数形式 $(u[x(t), y(t)], v[x(t), y(t)])$ 。由微积分的链式法则, 在 $t = 0$ 处对应的切矢量为

$$U = \begin{pmatrix} u_x x'(0) + u_y y'(0) \\ v_x x'(0) + v_y y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

当 $f(z)$ 是解析函数且在 $z = x(0) + iy(0)$ 处导数不为零时, 变换矩阵可以写作

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

即切矢量具有变换关系

$$U = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} V \quad (1.94)$$

因此以解析函数的实部和虚部构成的映射相当于对曲线做了一个 r 倍的伸缩和 θ 角的旋转。如果有两条光滑曲线以 ϕ 角相交, 则同时旋转 θ 角后夹角仍是 ϕ 。

推论 1.1. 曲线族的正交性

对于解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $u(x, y) = C_1$ 和 $v(x, y) = C_2$ 定义了 uOv 平面上的两族正交曲线。由共形映射定理可知在 xOy 平面上由这两组方程定义的曲线也是正交的。




与调和函数的关系。 我们把拉普拉斯方程的解称作调和函数。在二维拉普拉斯方程可以写成

$$\nabla^2 g(x, y) := (\partial_x^2 + \partial_y^2)g(x, y) = 0. \quad (1.95)$$

如果 $u(x, y)$ 是解析函数的实部, 由柯西-黎曼方程很容易得到

$$\nabla^2 u(x, y) = \partial_x u_x + \partial_y u_y = \partial_x v_y - \partial_y v_x = (\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x)v(x, y) = 0, \quad (1.96)$$

因此解析函数的实部是调和函数。同理很容易证明解析函数的虚部 $v(x, y)$ 也是调和函数。我们把 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 称作一对共轭调和函数, 或者互为对方的 Bäcklund 变换。

 **练习 1.6** 极限 $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$ 是否存在? 请说明。

 **练习 1.7** 函数


$$f(x + iy) = -4xy + 2i(x^2 - y^2 + 3)$$


是否是解析函数? 如是请给出其解析区域。


 **练习 1.8** 函数

$$g(x + iy) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{for } z \neq 0 \\ 0 & \text{for } z = 0 \end{cases}$$

在 $z = 0$ 处是否解析? 请给出理由。

 **练习 1.9** 如果 $g(w)$ 和 $f(z)$ 是解析函数, 证明 $g[f(z)]$ 也是解析函数。

 **练习 1.10** $f(z)$ 是解析函数, 如果 $|f(z)| = \text{常数}$, 则 $f(z) = \text{常数}$ 。

 **练习 1.11** 证明调和函数形式上满足微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

1.5 一些初等解析函数；多值函数的支点与割线

这一节我们介绍一些大家熟知的初等函数推广到复变函数时的行为。我们先从单值函数说起。

整数幂次函数。 整数幂次函数 z^n ，其中 $n \in \mathbb{Z}$ ，我们在前面已经提到过。整幂次函数是全复平面上的解析函数，即整函数。其导数为 $(z^n)' = nz^{n-1}$ 。下图给出了从映射的观点给出整幂次函数在 $n = 2$ 时的行为。

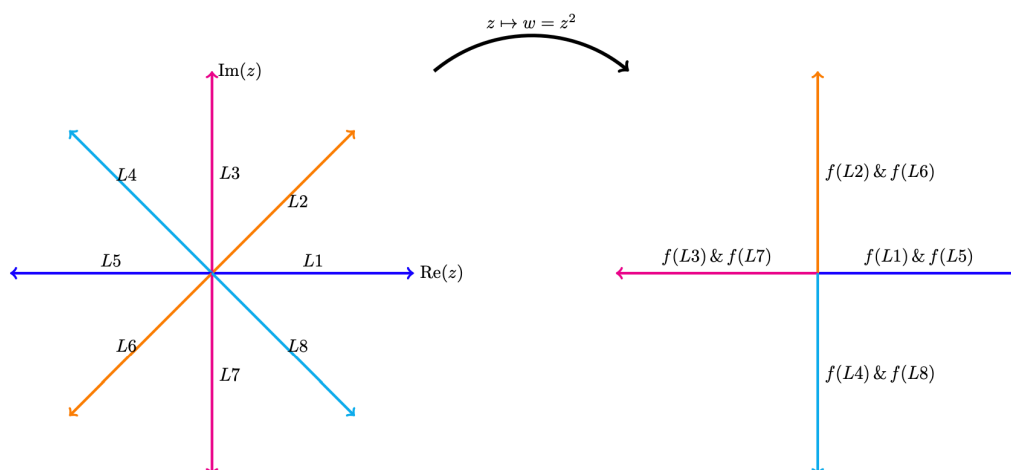


图 1.2: 极坐标格点在 $z \mapsto w = f(z) = z^2$ 下的映射。图形取自: <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic1.pdf>。

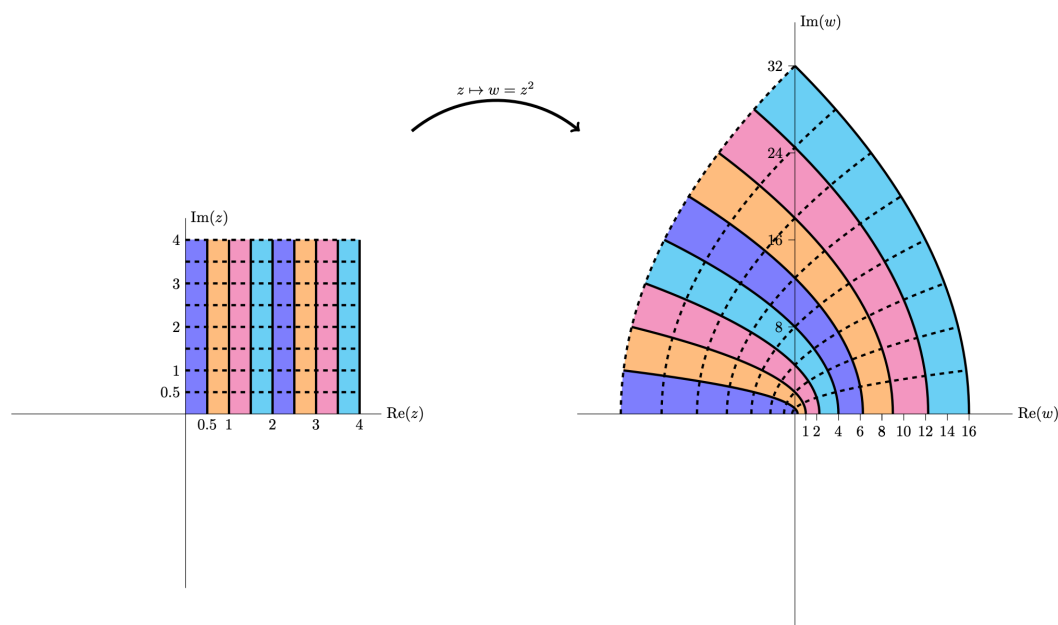


图 1.3: 直角坐标格点在 $z \mapsto w = z^2$ 下的映射。图形取自: <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic1.pdf>。

复指数函数。 我们定义复指数函数为

$$\exp(z) := e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.97)$$

也可从无穷幂次级数出发定义：

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k. \quad (1.98)$$

复指数函数也是周期函数：

$$\exp(z + i2k\pi) = \exp(z), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.99)$$

复指数函数也是在全复平面解析，因此也是整函数。复指数函数有如下性质：

1. $e^{z+w} = e^z e^w$, $z, w \in \mathbb{C}$ 。
2. $e^0 = 1$ 。
3. $e^z \neq 0$ 。
4. $\frac{d}{dz} e^z = e^z$ 。
5. 当 $n \in \mathbb{Z}$ 时, $(e^z)^n = e^{nz}$ 。

其中最后一条性质有必要简单解释一下。对于实指数函数，等式

$$(e^x)^y = e^{xy}, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.100)$$

总是成立的。但下面的互悖的命题表明这在复指数时失效。对于 $k \in \mathbb{Z}$,

1. $e^{1+2\pi ik} = e^1 e^{2\pi ik} = e \cdot 1 = e$
2. $(e^{1+2\pi ik})^{1+2\pi ik} = e$
3. $e^{1+4\pi ik-4\pi^2 k^2} = e$
4. $e^1 e^{4\pi i n} e^{-4\pi^2 n^2} = e$
5. $e^{-4\pi^2 k^2} = 1$

显然上述命题不可能同时为真。出现这种错误的原因是盲目使用了等式(1.100)。指数函数的映射如下图：

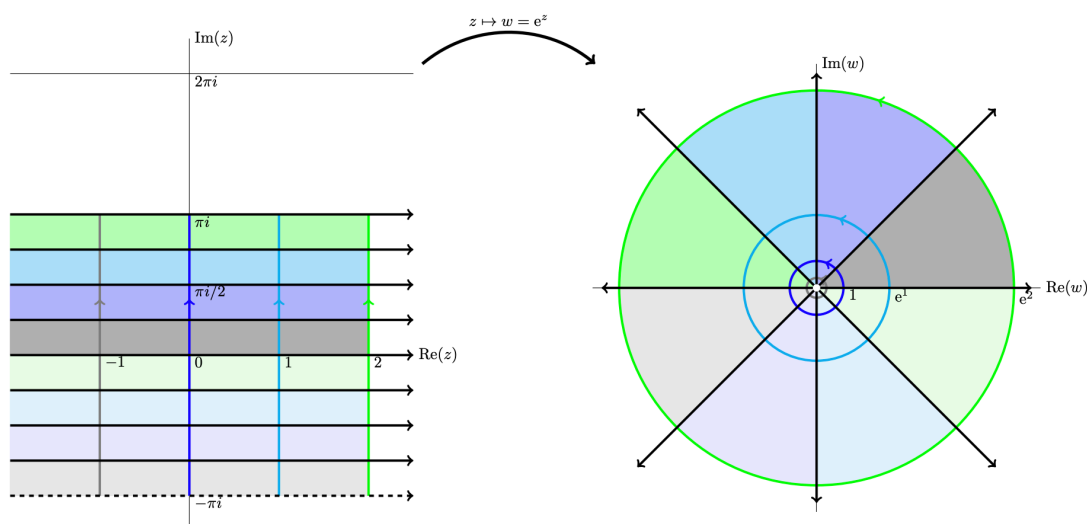


图 1.4: 复指数映射将一个水平周期带 $-\pi < y \leq \pi$ 映射到带孔复平面 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 。图形取自: <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic1.pdf>。

复三角函数。可以通过复指数函数定义如下三角函数：

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (1.101)$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (1.102)$$

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad (1.103)$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \quad (1.104)$$

另外复三角函数也可通过无穷级数定义。当 z 是实数时，这些函数过渡到实的三角余弦、正弦、双曲余弦和双曲正弦函数。与实的三角函数类似，复的三角函数满足

$$\frac{d}{dz} \cos(z) = -\sin(z), \quad \frac{d}{dz} \sin(z) = \cos(z), \quad (1.105)$$

$$\frac{d}{dz} \cosh(z) = \sinh(z), \quad \frac{d}{dz} \sinh(z) = \cosh(z). \quad (1.106)$$

以及

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1, \quad \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1. \quad (1.107)$$

复三角函数也是全复平面上的解析函数，即整函数。注意，实的正弦和余弦函数是有界函数，但是复的正余弦函数的模没有上界。复正弦函数出现在黎曼 zeta 函数的解析延拓中。

我们前面讲过开根号函数是多值函数。为了研究多值函数我们需要引入枝点 (branch point) 和割线 (branch cut) 的概念。我们以开根号函数为例来引入这些概念。

定义 1.12. 枝点

$f(z)$ 是定义在复平面上的多值解析函数。如果在 z 在 z_0 的任意小邻域内绕行 z_0 一周， $f(z)$ 的取值与出发时不等，则称 z_0 是 $f(z)$ 的枝点。

如果 $z = 0$ 是 $f(1/z)$ 的枝点，则 ∞ 是 $f(z)$ 的枝点。

如果 z_0 是 $f(z)$ 的枝点， $f(z)$ 的取值在绕行 z_0 点一到 $N-1$ 周都取不同值，但在第 N 周后复原，则称 z_0 是 $N-1$ 阶枝点。



定义 1.13. 割线

对于复平面上的多值函数 $f(z)$ ，其割线 P 定义为复平面上的曲线，使得 $f(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus P$ 上是单值的。通常将多值函数枝点取作割线的端点。注意割线并没有唯一的选取方法。



割线将多值函数 $f(z)$ 的自变量 z 的不同分支分隔开来，不同分支称作多值函数的不同叶。枝点是不同叶相交的点。在我们讨论多值函数的计算时，必须指明选取的是多值函数的哪一叶。这可通过给定多值函数在一个点的取值指定。

开根号函数 $w = \sqrt{z}$ 。 \sqrt{z} 是最简单的多值函数。有两个枝点， $z = 0$ 和 $z = \infty$ 。为了看出 $z = 0$ 是枝点，可以选取一个无穷小的绕行路径， $z(t) = \varepsilon e^{it}$ ， $0 \leq t \leq 4\pi$ 。 $t = 0$ 时， $\sqrt{z(t)}|_{t=0} = \sqrt{\varepsilon}$ 。绕行一周后， $t = 2\pi$ ， $\sqrt{z(t)}|_{t=2\pi} = \sqrt{\varepsilon} e^{i\pi} = -\sqrt{\varepsilon}$ 。继续再绕行一周后， $t = 4\pi$ ， $\sqrt{z(t)}|_{t=4\pi} = \sqrt{\varepsilon} e^{i2\pi} = \sqrt{\varepsilon}$ ，与初始值相等。因此 $z = 0$ 是开根号函数的

一阶枝点。 \sqrt{z} 的割线通常取为负实轴。

例 1.8 $\sqrt{1-z^2}$ 分别有哪些枝点, 是几阶枝点, 并给出一种割线作法。

例 1.9 $\sqrt[3]{z(z-1)(z-i)}$ 分别有哪些枝点, 是几阶枝点, 并给出一种割线作法。

\sqrt{z} 有两叶。将其沿割线按照函数值连续粘合得到的二维曲面称作 \sqrt{z} 的黎曼面, 形如下图:

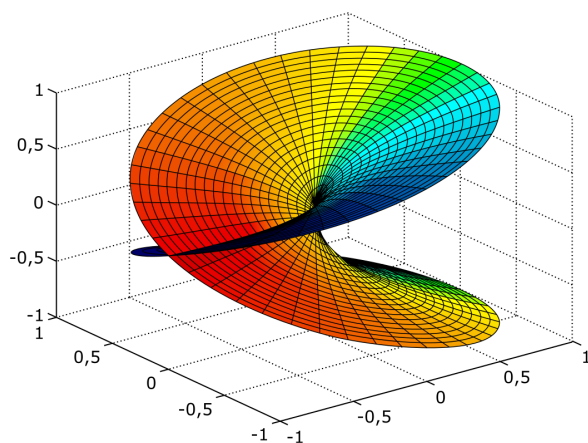


图 1.5: \sqrt{z} 的黎曼面。

复对数函数。复对数函数定义作复指数函数的反函数。即如果 $\exp(w) = z$, 则定义 $w = \ln z$ 。由于复指数函数是周期函数, 因此复指数函数是多值函数。利用幅角函数复对数可以写作

$$\ln(z) = \text{Ln}(|z|) + \text{Arg}(z). \quad (1.108)$$

其中 Ln 定义作对数函数取主值分支 ($k = 0$ 分支)。当其宗量为正实数时, 即通常的实对数函数。利用主幅角, 又可以写作

$$\ln(z) = \text{Ln}(|z|) + \arg(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.109)$$

可以看到, 对于同一个 $z \neq 0$, 复对数函数有无穷多种可能的取值。 $z = 0$ 和 $z = \infty$ 是 $\ln(z)$ 的对数枝点 (无穷阶枝点)。复对数函数的割线通常取作负实轴。在除掉负实轴和原点复对数函数是单值解析的, 其导数为

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}. \quad (1.110)$$

与指数函数类似, 一些实对数函数中常用的等式在复对数时不再成立。例如,

$$\ln(e^z) \neq z, \quad (1.111)$$

但

$$\ln(e^z) = z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.112)$$

图1.6给出了定义在主值分支 $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ 上的单值复对数函数定义的映射。

沿割线按找函数值连续粘合后可以得到复对数函数的黎曼面, 形如图1.7。

例 1.10 函数 $\ln \frac{1-z}{1+z}$ 有哪些枝点, 给出一种割线的方式。

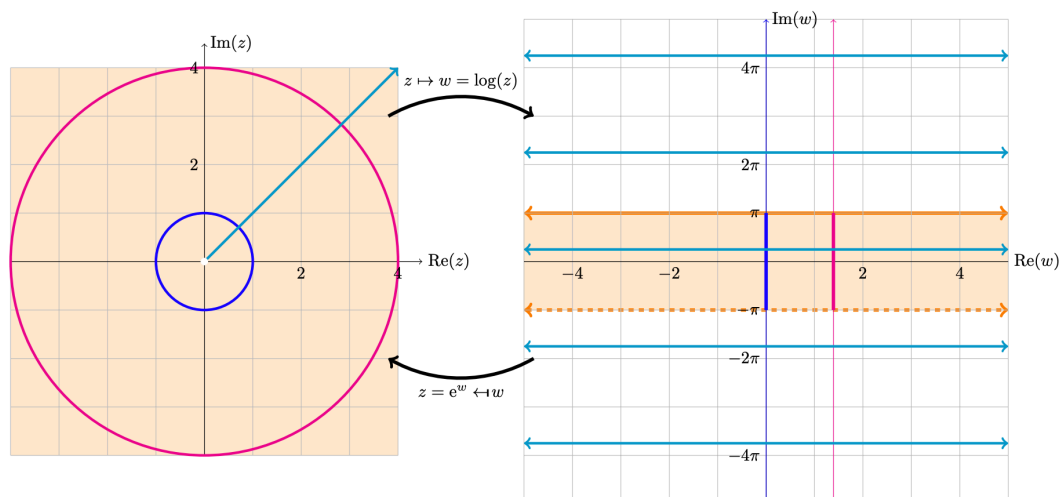


图 1.6: 主值分支上的复对数函数定义的映射。图形取自: <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic1.pdf>。

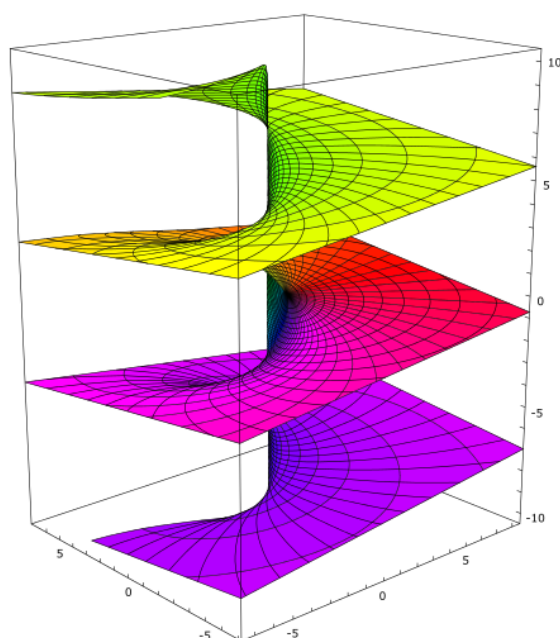


图 1.7: 对数函数的黎曼面

广义幂次函数。借助对数函数和指数函数可以定义广义幂次函数，

$$z^a := \exp(a \ln(z)), \quad z, a \in \mathbb{C}. \quad (1.113)$$

由于指数函数是单值函数，只需指定 $\ln(z)$ 的取值分支即可得到确定的函数值。

例 1.11 计算 i^i 。

例 1.12 在主值分支内计算 $\sqrt[3]{-1}$ 。

- 练习 1.12 用复对数和开根号函数表示三角函数的反函数 $\sin^{-1} z$ 和 $\cos^{-1} z$ 。
- 练习 1.13 计算 $\exp e^z$ 的实部和虚部。
- 练习 1.14 计算 $(-1)^{2i}$ 的所有取值。
- 练习 1.15 用对数函数表示 $\tan^{-1} z$ 。
- 练习 1.16 求 $\sqrt[3]{z(1-z)}$ 在延展复平面上的所有枝点, 并给出割线。
- 练习 1.17 求 $\ln(1-e^z)$ 在延展复平面上的所有枝点, 并给出割线。

1.6 求共轭调和函数

梁昆淼老师书中有一部分内容是关于已知解析函数的实部 (或虚部), 求虚部 (或实部)。这相当于已知两个共轭调和函数中的一个, 求另外一个。梁书中已给出三种解法, 这里不再重复。这里提出一种可以回避微分和积分运算的可能的解法。

这一新解法的思想是基于柯西-黎曼方程的 Wirtinger 微分表示:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (1.114)$$

利用这个结论, 在给定了 $u(x, y) = u((z + \bar{z})/2, i(\bar{z} - z)/2)$, 我们可以尝试对 u 做加法或减法, 从中移除所有的 \bar{z} 依赖, 则剩下的必是解析函数。我们以具体例子来讲解这个方法。

例 1.13 一直解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x, y) = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$, 求 $f(z)$ 。

解: 我们将 $v(x, y)$ 写作

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \sqrt{-\frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \sqrt{z\bar{z}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-(z - 2\sqrt{z\bar{z}} + \bar{z})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-(\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}})^2} \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}}). \end{aligned} \quad (1.115)$$

其中我们取了负根, 这是为了使 v 为正。因此

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(x, y) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}}), \quad (1.116)$$

显然为了使得 $f(z)$ 解析, $u(x, y)$ 应具有形式

$$u(x, y) = g(z) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\bar{z}}. \quad (1.117)$$

又知 $u(x, y)$ 应为实数, 容易猜得

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{z}, \quad (1.118)$$

这样就完全确定了

$$f(z) = \sqrt{2z} + C, \quad (1.119)$$

此处补回了加法常数。因为在这个过程中利用 $u(x, y)$ 的实性确定 $g(z)$ 的过程有猜想的猜

测的成分, 最后还需从结果 $f(z)$ 反推出实部或虚部与题干比较验证。

我们再来看一个更复杂的例子。

例 1.14 已知解析函数 $f(z)$ 的实部

$$u = \frac{2 \sin(2x)}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos(2x)},$$

且 $f(\pi/2) = 0$ 。求 $f(z)$ 。

解: 已知

$$\begin{aligned} u &= \frac{\frac{2}{2i}(e^{i(z+\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})})}{e^{i(\bar{z}-z)} + e^{-i(\bar{z}-z)} - (e^{i(z+\bar{z})} + e^{-i(z+\bar{z})})} \\ &= \frac{\frac{1}{i}(e^{i(z+\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})})}{(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}})(e^{-iz} - e^{iz})} \\ &= \frac{1}{i} \frac{[e^{iz}(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}) - e^{-iz}(e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}} + e^{i\bar{z}})]}{(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}})(e^{-iz} - e^{iz})} \\ &= \frac{1}{i} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{-iz} - e^{iz}} + \frac{1}{i} \frac{e^{i(z-\bar{z})} - e^{-i(z-\bar{z})}}{(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}})(e^{-iz} - e^{iz})}. \end{aligned} \quad (1.120)$$


另外我们知道

$$u(x, y) = f(z) - iv(x, y). \quad (1.121)$$

注意到(1.120)中最后一个等式右边第一项是解析函数, 第二项恰好是纯虚的, 因此可以当成 $-iv$ 。但是可以想象因此我们定下

$$f(z) = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{-iz} - e^{iz}} + C = \frac{\cos z}{\sin z} + C. \quad (1.122)$$

又通过 $f(\pi/2) = 0$ 得到 $C = 0$ 。这里如何凑得 $-iv$ 使之纯虚是关键。在这个问题里是自然蹦出来的, 但可以想象有例外的情况, 这时如何系统的进行这个工作有待探究。

 **练习 1.18** 已知解析函数 $f(z)$ 的实部

$$u = e^{x^2-y^2} \cos(2xy),$$

求 $f(z)$ 。

 **练习 1.19** 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部

$$v = \frac{(e^x - e^{-x}) \sin y}{2},$$

求 $f(z)$ 。

第2章 复变函数的积分

2.1 复线积分和围道积分

定义 2.1. 光滑曲线

复平面上的光滑曲线用 γ 标记。设其具有参数化形式：

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (2.1)$$

其中 $\gamma(t)$ 一般取复值。当 $\gamma(a) = \gamma(b)$ 时，这是一条封闭曲线，这时用记号 C 来标记。注意对于同一曲线可以又有无穷多种参数化形式。



例 2.1 复平面上连接 $z = 0$ 和 $z = 1 + i$ 的直线可以参数化为

$$\gamma_1(t) = (1 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

或者

$$\gamma_2(t) = (1 + i) \frac{e^t - 1}{e - 1}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

定义 2.2. 围道积分

$f(z)$ 是复变函数，其沿曲线 γ 的积分定义为

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt, \quad (2.2)$$

又称作 $f(z)$ 的围道积分。注意这里的 $f(z)$ 不需要是解析函数。



由于曲线参数化的任意性，我们希望围道积分的值与曲线参数化无关，但这在上述定义中并不显然。为此我们需要如下定理。

定理 2.1. 围道积分的参数化独立性

复变函数围道积分的取值与参数化的具体形式无关。这个性质称作重参数不变性。

证明：设 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ 是 γ 的一种参数化形式。一个新的参数化形式可通过单调递增函数 $t = g(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$ 表示，使得

$$g(\alpha) = a, \quad g(\beta) = b.$$

这时的参数曲线写为

$$\gamma(g(\tau)) : x(g(\tau)) + iy(g(\tau)), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta.$$

利用 τ 参数化的围道积分写作

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(g(\tau))) \gamma'(g(\tau)) g'(\tau) d\tau &= \int_a^b f(\gamma(g(\tau))) \gamma'(g(\tau)) dg(\tau) \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

与原参数化一致, 证毕。

围道积分的另一种表示形式为

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy). \quad (2.4)$$

注意以这种形式进行具体计算时仍需指定 $x(t)$ 和 $y(t)$, 其结果与(2.2)无异。围道积分具有性质

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz, \quad (2.5)$$

其中 $\int_{-\gamma}$ 指的是沿曲线的反向积分, 即此时的积分起点为 $\gamma(b)$, 积分终点为 $\gamma(a)$ 。

例 2.2 沿 $z = 0$ 到 $z = 1 + i$ 的直线计算 $\int_{\gamma} z^2 dz$ 。

例 2.3 沿 $z = 0$ 到 $z = 1 + i$ 的直线计算 $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ 。

例 2.4 沿单位圆逆时针 (通常也称为正定向) 计算 $\int_C z^2 dz$ 。

例 2.5 沿单位圆逆时针计算 $\int_C z^{-1} dz$ 。

关于围道积分我们有如下不等式

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz| \leq ML, \quad (2.6)$$


其中 M 是 $|f(z)|$ 在 γ 上的极大值, $L = \int_{\gamma} |dz|$ 是 γ 的长度。第二个不等式是显然的, 我们只证明第一个不等式。令

$$\theta = \arg \left[\int_{\gamma} f(z) dz \right]. \quad (2.7)$$


则

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta} \int_{\gamma} f(z) dz \right] \\ &= \int_{\gamma} \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta} f(z) dz \right] \\ &\leq \int_{\gamma} |f(z) dz| \\ &= \int_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz|. \end{aligned} \quad (2.8)$$


证毕。

 **练习 2.1** 计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1}.$$

 **练习 2.2** 计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=1} = |z - 1| \cdot |dz|.$$

 **练习 2.3** 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析且处处满足 $|f(z) - 1| < 1$ 。证明对 D 中的任意封闭曲线 C 有

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

(假设 $f'(z)$ 连续)。