Exercises: One

*若无特殊说明，以下解答中皆选取主值分支为 $\arg(z) \in (-\pi, +\pi]$.

1.1 Solution:

a)

$$\sqrt{-i} = e^{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)/2} = e^{-i\pi/4}e^{ik\pi} \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

取 $k = 0, 1$ ； k 取其他整数值时与这两种情况中的一种相等。

b)

$$\sqrt{1+i} = \left[\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\right]^{\frac{1}{2}} = 2^{1/4}e^{i\pi/8}e^{ik\pi} \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

取 $k = 0, 1$ ； k 取其他整数值时与这两种情况中的一种相等。

c)

$$\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = e^{i(-\frac{\pi}{3}+2k\pi)/2} = e^{-i\pi/6}e^{ik\pi} \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

取 $k = 0, 1$ ； k 取其他整数值时与这两种情况中的一种相等。

1.2 Solution:

$$\sqrt[4]{-i} = e^{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)/4} = e^{-i\pi/8}e^{ik\pi/2} \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

当 $k = 0$ 时，$\sqrt[4]{-i} = e^{-i\pi/8} = \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$.

当 $k = 1$ 时，$\sqrt[4]{-i} = ie^{-i\pi/8} = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$.

当 $k=2$ 时，$\sqrt[4]{-i}=-e^{-i\pi/8}=-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$.
当 $k=3$ 时，$\sqrt[4]{-i}=-ie^{-i\pi/8}=-\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}$.
k 取其他整数值时与以上四种情况中的一种相等。

1.3 Proof:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|^2\\
=&\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\frac{\bar{a}-\bar{b}}{1-a\bar{b}}\\
=&\frac{|a|^2+|b|^2-(a\bar{b}+b\bar{a})}{1-(a\bar{b}+b\bar{a})+|a|^2|b|^2}\\
=&\frac{|a|^2+|b|^2-(a\bar{b}+b\bar{a})+(|a|^2-1)(|b|^2-1)}{1-(a\bar{b}+b\bar{a})+|a|^2|b|^2}\\
=&1\ ,
\end{aligned}
$$

其中倒数第二个等号用了 $|a|=1$ 或 $|b|=1$ 条件。$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1$ 得证。 □

1.4 Proof: 当 $n=1$ 时，$|a_1b_1|^2=|a_1|^2|b_1|^2$ ，柯西不等式显然成立。

假设柯西不等式在 $n\ (n\in\mathbb{N}_+)$ 时成立，即

$$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|^2\leq(|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2)(|b_1|^2+\cdots+|b_n|^2)\ ,$$

那么对于 $n+1$ 时，柯西不等式的

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= |a_1b_1+\cdots+a_nb_n++a_{n+1}b_{n+1}|^2\\
&= |a_1b_1+\cdots+a_nb_n|^2+2\mathrm{Re}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)a_{n+1}^*b_{n+1}^*\right]+|a_{n+1}b_{n+1}|^2\\
&\le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)+2\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right||a_{n+1}||b_{n+1}|+|a_{n+1}|^2|b_{n+1}|^2\\
&\le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)+2\sqrt{(\Sigma_{i=1}^{n}|a_i|^2)(\Sigma_{i=1}^{n}|b_i|^2)}|a_{n+1}||b_{n+1}|+|a_{n+1}|^2|b_{n+1}|^2\\
&\le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)|b_{n+1}|^2+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)|a_{n+1}|^2+|a_{n+1}|^2|b_{n+1}|^2\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n+1}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}|b_i|^2\right)\\
&= \text{RHS of 柯西不等式}\,,
\end{aligned}
$$

其中，第三行的小于等于号用了 n 时的柯西不等式，和 $\mathrm{Re}(z)\le|z|$，第四行的小于等于号用了 n 时的柯西不等式，第五行的小于等于号用了 $a+b\ge2\sqrt{ab}\ \ \forall a,b\ge0$ 。

综上，柯西不等式成立。 $\square$

1.5 Solution:

a) 题干中的 Eq. (1.53) 等于

$$
\begin{aligned}
&1+\mathrm{Re}\left(e^{i\varphi}+e^{i2\varphi}+\cdots+e^{in\varphi}\right)\\
=&1+\mathrm{Re}\frac{e^{i\varphi}(1-e^{in\varphi})}{1-e^{i\varphi}}\\
=&1+\mathrm{Re}\frac{(e^{i\varphi}-e^{i(n+1)\varphi})(1-e^{-i\varphi})}{2-e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}\\
=&1+\mathrm{Re}\frac{e^{i\varphi}-1+e^{in\varphi}-e^{i(n+1)\varphi}}{2-2\cos\varphi}\\
=&\frac{1-\cos\varphi+\cos(n\varphi)-\cos((n+1)\varphi)}{2-2\cos\varphi}\\
=&\frac{\cos(n\varphi)+1}{2}+\frac{\sin(n\varphi)\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\\
=&\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\ ,\text{for } \varphi\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ .
\end{aligned}
$$

如果 $\varphi=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ 则 Eq. (1.53) 等于 $n+1$ 。

b) 题干中的 Eq. (1.54) 等于

$$
\begin{aligned}
&1+\mathrm{Im}\left(e^{i\varphi}+e^{i2\varphi}+\cdots+e^{in\varphi}\right)\\
=&1+\mathrm{Im}\frac{e^{i\varphi}-1+e^{in\varphi}-e^{i(n+1)\varphi}}{2-2\cos\varphi}\\
=&1+\frac{\sin\varphi+\sin(n\varphi)-\sin((n+1)\varphi)}{2-2\cos\varphi}\\
=&1+\frac{\sin(n\varphi)}{2}+\frac{1}{2}(1-\cos(n\varphi))\cot\frac{\varphi}{2}\\
=&1+\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\ ,\text{for } \varphi\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ .
\end{aligned}
$$

如果 $\varphi=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ 则 Eq. (1.54) 等于 1 。

1.6 Solution: 不存在。因为：比如 z 按实轴正方向趋于 ∞ ，则 e^z 趋向于无穷大，而如果 z 按虚轴方向趋于 ∞ ， $e^z=e^{iy}$ 是一个周期振荡的有界函数，以上两种情形“极限”并不相等且应该说极限均不存在，所以 $\lim_{z\to\infty}e^z$ 不存在。

1.7 Solution: $u(x,y)=-4xy$, $v(x,y)=2(x^2-y^2+3)$. 所以

$$u_x=-4y\ ,\quad u_y=-4x\ ,$$
$$v_y=-4y\ ,\quad v_x=4x\ .$$

所以 u_x,v_y,u_y,v_x 处处存在且连续,并且 $u_x=v_y$ ，$u_y=-v_x$ 。所以这个函数在全平面处处可导，即它是解析函数，解析区域为 $\mathbb{C}$ 。

1.8 Solution: 当 $z\neq 0$ 时，

$$u_x=\frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}\ ,\qquad v_y=\frac{xy^2(3x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}\ ,$$
$$u_y=\frac{2x^2y(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}\ ,\qquad v_x=-\frac{y^3(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}\ ,$$

且从上可知

$$\lim_{x\to0,y\to0}u_x,\ \lim_{x\to0,y\to0}v_x,\ \lim_{x\to0,y\to0}v_y\ \text{均不存在},\ \lim_{x\to0,y\to0}u_y=0\ .$$

另外，对于这个函数 $g(z)=\begin{cases}u+iv, & \text{if } z\neq 0\\ 0, & \text{if } z=0\end{cases}$ （这个函数是连续的），

$$u_x|_{z=0}=\lim_{x\to0,y\to0}\frac{x^2y^2/(x^2+y^4)-0}{x-0}\ \text{不存在}\ ,\quad v_y|_{z=0}=\lim_{x\to0,y\to0}\frac{xy^3/(x^2+y^4)-0}{y-0}\ \text{不存在}\ ,$$
$$u_y|_{z=0}=\lim_{x\to0,y\to0}\frac{x^2y^2/(x^2+y^4)-0}{y-0}=0\ ,\quad v_x|_{z=0}=\lim_{x\to0,y\to0}\frac{xy^3/(x^2+y^4)-0}{x-0}\ \text{不存在}\ ,$$

综上， u_x,v_x,v_y 在 $z=0$ 处不存在，所以 $g(z)$ 在 $z=0$ 处不可导。
（实际上，按照定义，

$$g'(0)=\lim_{x\to0,y\to0}\frac{u(x,y)+iv(x,y)}{x+iy}=\lim_{x\to0,y\to0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\ \overset{\text{沿}y^2=kx\text{逼近}}{=\!=\!=\!=}\ \frac{k}{k^2+1}\ ,$$

即可说明 $g(z)$ 在 $z=0$ 处不可导了。）

所以，该函数在 $z=0$ 处不是解析的。

另外，在 $z=0$ 的去心邻域内，该函数不一定满足柯西-黎曼方程，可以求得，只有当 $y=0$ 或 $y=\pm\sqrt{|x|}$ 时，才满足柯西-黎曼方程。这也可以说明 $g(z)$ 在 $z=0$ 处不是解析的。

1.9 Proof: 因为 $g(w)$ 和 $f(z)$ 是解析函数，所以 $\mathrm{d}g/\mathrm{d}w$ 和 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ 均存在，所以

$$\frac{\mathrm{d}g[f(z)]}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$$

也存在，即在相应区域内处处可导，即 $g[f(z)]$ 也是该区域上的解析函数。 □

1.10 Proof: 如果 $|f(z)|=\text{const.}$ ，设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ，$u,v,x,y\in\mathbb{R}$ ，则 $u^2+v^2=\text{const.}$ ，两边求偏导、消去常数因子则有：

$$uu_x+vv_x=0\ , \tag{1}$$

$$uu_y+vv_y=0\ . \tag{2}$$

因为 $f(z)$ 是解析函数，所以根据柯西-黎曼方程 $v_x=-u_y$ ，$v_y=u_x$ ，代入 Eq. (1), Eq. (2) 后得到

$$uu_x-vu_y=0\ , \tag{3}$$

$$uu_y+vu_x=0\ . \tag{4}$$

若要 Eq. (3), Eq. (4) 成立，要么 $u=v=0$ ，要么 $u_x=u_y=0$ ，其中 $u_x=u_y=0$ 也意味着 $v_x=v_y=0$ ；这两种情形中的任何一种，都意味着 $f(z)=\text{const.}$ 。 □