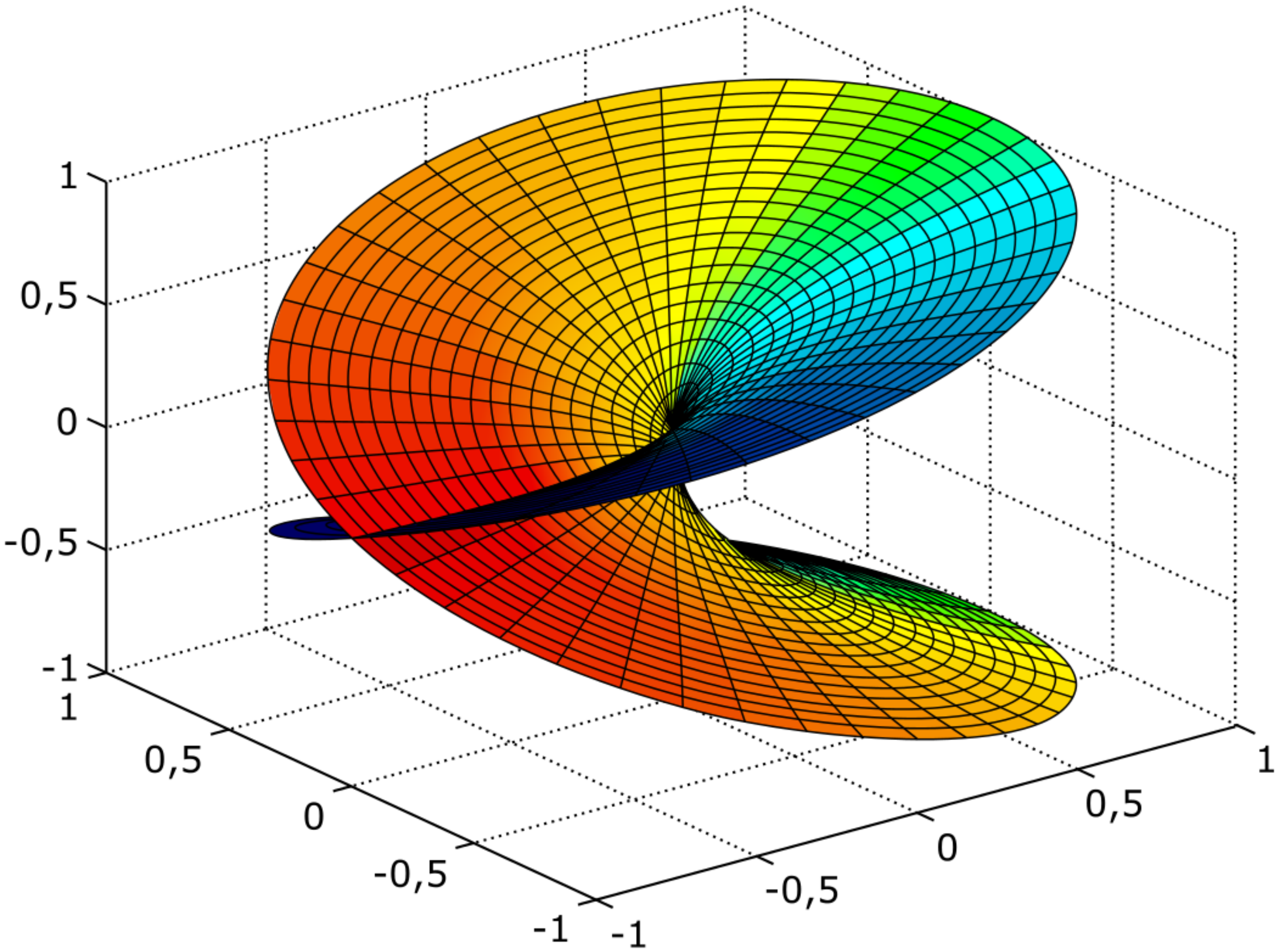

复变函数及其应用

作者：朱华星编著

组织：浙江大学

版本：0.5

The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain. –
Jacques Hadamard

目录

第 1 章 复变函数的基本概念

本章内容：

- 复变函数论的历史和意义
- 复数的起源和必要性
- 复数及其运算的基本性质
- 复函数与映射
- 复变函数的导数与解析性（全纯性），柯西-黎曼方程
- 一些基本的初等函数及其映射
- 多值函数，割线与黎曼面

1.1 复变函数的历史和意义

一些应用：

- 围道积分，柯西定理
- 代数学基本定理，复数的代数闭域性质
- 数论，黎曼 zeta 函数
- 傅立叶变换，信号处理
- 共形变换，共形场论，相变
- 流体力学、空气动力学，静电学，机翼设计
- 量子力学
- 解析性与因果律，色散关系
- 黎曼面：椭圆曲线加密；弦论；几何图形压缩
- 控制系统稳定性原理
- 复动力学和分形

1.2 复数的起源

早在中学阶段我们就知道，二次方程

$$x^2 = -1\,, \tag{1.1}$$

在实数域内无解，因此引入 -1 的平方根

$$i = \sqrt{-1}\,, \tag{1.2}$$

原方程的解写为 $x = \pm i$。但是这个说法并无法说明引入复数的必要性，原因是 $x^2 = -1$ 在实数域内无解有清晰的几何意义，因此并无引入复数的十分必要性。从这个角度讲，引入复数似乎是数学家的人为发明，并非实实在在的客体，这样其重要性大减。下面我们

将见到，从三次方程的求解出发，复数不再是人为引入的发明，而是实实在在的客体。这需要从数学史的一个传奇故事说起。

卡尔达诺与三次方程的求根公式

十六世纪意大利数学家和三次方程的求解；博洛尼亚大学的费罗对三次缺项方程的求解，$x^3+mx=n$。文艺复兴时代的学术挑战，费罗对三次缺项方程求根公式的保密以作为秘密武器应付学术挑战。费罗弥留之际将他的公式传授给学生心高气傲的菲奥尔。菲奥尔向布雷西亚的著名学者，伟大的“结巴”丰塔纳挑战。菲奥尔和丰塔纳互相向对方出了 30 道题，菲奥尔认为求根公式只有自己知道，丰塔纳无论如何无法解出三次缺项方程，因此孤注一掷出了 30 道三次缺项方程的题。丰塔纳日以继夜地研究三次方程的解，在挑战截止的最后时刻独立得到了求根公式，一举击败菲奥尔。

这次学术挑战事件传遍了江湖，这时传奇人物卡尔达诺出场了。卡尔达诺一生著述丰富，累计达 7000 多页，内容包罗万象。莱布尼茨恰当地使用概括了他的一生：“卡尔达诺是有许多缺点的伟人。若没有这些缺点，他定将举世无双。”卡尔达诺听闻了菲奥尔和丰塔纳的学术对决，对丰塔纳的求根公式非常感兴趣，不断写信去请求丰塔纳公开他的秘密。经过卡尔达诺持之以恒的劝说，丰塔纳决定将求根公式告诉卡尔达诺，但是使用密码文写就，并要求卡尔达诺终其一生保守其秘密。卡尔达诺以基督教徒的名义欣然同意，这件事似乎就到此为止。

这时，这个故事的最后一位重要人物，费拉里登场。费拉里早年是卡尔达诺的仆人，但很快发展成了师徒关系，并一同研究高次方程的解。卡尔达诺和费拉里一道，对高次方程的求解做出了重要贡献。首先是卡尔达诺发现了一般三次方程，$ax^3+bx^2+cx+d=0$，的求根公式。与此同时，费拉里也发现了四次方程的求根公式。这无疑是代数学史上的重大突破。但他们的方法都基于将方程首先化成三次缺项方程，因此受制于卡尔达诺向丰塔纳做出的誓言，无法将他们的重大突破向世人公开。

后来，卡尔达诺师徒去到博洛尼亚。此时费罗早已去世，但卡尔达诺和费拉里从费罗三十年前的论文中找到了三次缺项方程的求根公式。这给了卡尔达诺启示，求根公式并非丰塔纳独有，而是早就被费罗所得到，因此卡尔达诺也就不再需要遵守他向丰塔纳所做过的承诺。1545 年，卡尔达诺将三次和四次方程的求解写进了他的数学杰作《大术》，标志着人类数学史上的一个惊人突破。《大术》的出版让丰塔纳极度恼怒，导致了布雷西亚和米兰之间的持续信件谩骂和公开论战，此处不表。

下面我们就来看一下这个传奇的求根公式，以及它和虚数的关系。《大术》里记载对于

$$x^3+mx=n\,, \tag{1.3}$$

可以写下其中一个根的代数式解

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}\,. \tag{1.4}$$

为了得到这个求根公式，费罗和丰塔纳做了一个绝妙的替换。他们让

$$x=t-u\,,\qquad m=3tu\,, \tag{1.5}$$

然后代入(1.3)的左手边，得到

$$(t-u)^3+m(t-u)=(t-u)^3+3tu(t-u)=t^3-u^3\,. \tag{1.6}$$

因此立刻得到

$$3tu=m\,,\qquad t^3-u^3=n\,. \tag{1.7}$$

上式的第一式给出

$$u=\frac{m}{3t}\,, \tag{1.8}$$

从而第二式给出

$$t^3-\frac{m^3}{27t^3}=n\,, \tag{1.9}$$

或者

$$t^6-nt^3-\frac{m^3}{27}=0\,. \tag{1.10}$$

因此

$$t^3=\frac{n\pm\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}\,,\text{或只取正根}\qquad t=\sqrt[3]{\frac{n+\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}}\,. \tag{1.11}$$

用同样的方法，还能从

$$u^3-t^3=-n \tag{1.12}$$

求得

$$u=\sqrt[3]{\frac{-n+\sqrt{n^2+\frac{4m^3}{27}}}{2}}\,. \tag{1.13}$$

这样我们就得到了《大术》里的公式

$$x=t-u=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}\,. \tag{1.14}$$

但是这个公式又跟虚数有何关系呢？我们看一个具体的方程：

$$x^3-15x=4\,. \tag{1.15}$$

容易验证这个方程有三个实数解，$x=4$ 和 $-2\pm\sqrt{3}$。但是通过《大术》的公式给出

$$t=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\,,\qquad u=\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}\,. \tag{1.16}$$

可以验证，

$$(2+\sqrt{-1})^3=2+\sqrt{-121}\,,\qquad (-2+\sqrt{-1})^3=-2+\sqrt{-121}\,, \tag{1.17}$$

因此

$$t = 2 + \sqrt{-1}\,, \qquad u = -2 + \sqrt{-1}\,. \tag{1.18}$$

t 和 u 均为复数，但

$$x = t - u = 2 + \sqrt{-1} - (-2 + \sqrt{-1}) = 4\,, \tag{1.19}$$

正是原方程的一个根！我们原来的方程是实系数方程，其根也是实系数。但是复数横亘在我们的求解过程中。打一个比方，如果实数是大陆，复数是海洋，数学家要从欧洲大陆去往美洲大陆，发现必须穿越大西洋才能抵达。旅途的起点和终点都是实数，但是旅途的中间必须进入复数的领地才能抵达彼岸。正是从这时开始，数学家意识到复数不再是人类心智的发明创造，而是真实存在的客观对象！这个认识是人类对抽象世界理解的巨大飞跃，因此毫无悬念其重要性很难为当时的人所理解。此时的复数犹抱琵琶半遮面，它的面纱直到两百多年后才由欧拉、高斯、柯西等伟大数学家揭开。

1.3 复数的性质及其运算

定义 1.1. 复数

复数 $z \in \mathbb{C}$ 通常记作

$$z = x + iy\,, \tag{1.20}$$

其中 $\mathbb{C}$ 是全体复数的集合，$x, y \in \mathbb{R}$ 是实数，

$$i^2 = -1$$

是虚数单位。x 和 y 分别称作 z 的实部和虚部，记作

$$x = \mathrm{Re}(z)\,, \qquad y = \mathrm{Im}(z)\,. \tag{1.21}$$

复共轭记作

$$z^* \equiv \bar{z} = x - iy\,. \tag{1.22}$$

♣

复数加减法：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)\,. \tag{1.23}$$

复数乘法：

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)\,. \tag{1.24}$$

复数的加法和乘法满足交换律和结合律，以及关于加法的分配律。复数模长：

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = +\sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{1.25}$$

注意复数模长总是大于等于零的实数。复数除法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(-x_1y_2 + x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2}\,. \tag{1.26}$$

复数乘除的模长可以写为

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|\,, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,. \tag{1.27}$$

定义 1.2. 复数的几何表示

对于复数 $z=x+iy$，如果设立平面笛卡尔坐标系 xOy，则复数一一对应了平面上一个坐标为 (x,y) 的点。利用平面极坐标系，

$$x=r\cos\varphi\,,\qquad y=r\sin\varphi\,,\tag{1.28}$$

则有

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,,\tag{1.29}$$

其中 $r=|z|$ 是复数的模长，φ 称作复数 z 的幅角，记作

$$\varphi=\mathrm{Arg}(z)\,.\tag{1.30}$$

注意 Arg 是一个多值函数。这是由于三角函数的周期性，对于不同的 φ 可以对应同一个 z。例如

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r(\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi))\,,\quad\forall k\in\mathbb{Z}\,.\tag{1.31}$$

这里不同的 k 对应了该多值函数的不同“分支”。在本课程中讨论多值函数的时候，常需要限定到多值函数的一个“分支”内讨论，在该分支内多值函数是单值的。可以把幅角函数 Arg 在所有分支中的某一个选作“主值分支”，对应的幅角记作 $\arg(z)$，称作 z 的主幅角。对于 z 的主幅角，有

$$-\pi<\arg(z)\le+\pi\,,$$

幅角可以通过主幅角表示为

$$\varphi=\mathrm{Arg}(z)=\arg(z)+2k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\tag{1.32}$$

不同的 k 取值对应不同分支内的幅角。注意 $z=0$ 时无法定义幅角。♣

利用复数的几何表示可以很容易证明

定理 1.1. 三角不等式

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|\,,\qquad|z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|\,.\tag{1.33}$$

其中第一个不等式对应三角形的任两边长之和大于等于第三边，第二个不等式对应任两边长之差小于等于第三边。♡

定理 1.2. 欧拉公式

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi\,.\tag{1.34}$$

♡

欧拉有许多以其名字命名的公式和定理，而这个公式常常位列十大最美妙数学公式之一。如果让 $\varphi=\pi$，则

$$e^{i\pi}=-1+0\,.\tag{1.35}$$

欧拉公式的一个启发式证明如下。我们知道指数函数具有级数表示：

$$e^{ix}=1+\frac{1}{1!}ix+\frac{1}{2!}(-1)x^2+\frac{1}{3!}(-i)x^3+\frac{1}{4!}x^4+\ldots\,.\tag{1.36}$$

同时三角函数有级数表示：

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots , \tag{1.37}$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots , \tag{1.38}$$

上面两式比较，令 $x = \varphi$，即可得欧拉公式定理1.2。利用欧拉公式，复数的几何表示又可以写为

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} . \tag{1.39}$$

复数的几何表示对于计算复数的乘积和除法特别方便。对于两个复数 $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$，有

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} , \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} . \tag{1.40}$$

显然除法只有当 $z_2 \neq 0$ 时才有定义。进一步可以给出复数的整数幂次和方根。对于 $n \in \mathbb{Z}$，利用主幅角，有

$$z^n = r^n e^{in(\arg(z)+2k\pi)} , \qquad z^{1/n} = r^{1/n}e^{i(\arg(z)+2k\pi)/n} , \qquad k \in \mathbb{Z} . \tag{1.41}$$

结合欧拉公式，可以很容易证明，

定理 1.3. 第莫佛定理 (de Moivre's theorem)

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) . \tag{1.42}$$

♡

注意复数的整数幂次是单值的，即对于一个给定的 n 和 z，只有一个确定的 z^n。这是因为

$$z^n = r^n e^{in(\arg(z)+2k\pi)} = r^n e^{in\arg(z)}e^{i2nk\pi} = r^n e^{in\arg(z)} , \tag{1.43}$$

而 $\arg(z)$ 是单值的。但复数的整数次方根不是单值的。这是因为

$$z^{1/n} = r^{1/n}e^{i(\arg(z)+2k\pi)/n} = r^{1/n}e^{i\arg(z)/n}e^{2ik\pi/n} , \qquad k \in \mathbb{Z} . \tag{1.44}$$

对于给定的整数 n，k 取值为 $0, 1, 2, \dots, n-1$ 时（对应了 n 个不同分支内的幅角），$z^{1/n}$ 对应了 n 个不同的值，而 $k = n$ 与 $k = 0$ 时 $z^{1/n}$ 取值相等，$k = n+1$ 与 $k = 1$ 时 $z^{1/n}$ 取值相等。当我们计算多值函数时，**必须**指明是在幅角的哪个分支内的取值，否则是有歧义的。多值函数的不同分支在数学物理中具有非常重要的意义，但通常也是容易困惑的概念，因此必须注意。在后面我们讨论多值函数及其割线时还会回到这个问题。

例 1.1 求 $\sqrt{i} = i^{1/2}$，并计算其所有不同取值。

选取主值分支为

$$\arg(z) \in [0, 2\pi) ,$$

在主值分支内 $\arg(i) = \pi/2$，因此利用几何表示在第 k 个分支内 i 可以记为

$$i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} . \tag{1.45}$$

因此

$$i^{1/2} = 1^{1/2}e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)/2} = e^{i\pi/4}e^{ik\pi} , \qquad k \in \mathbb{Z} . \tag{1.46}$$

当 $k=0$ 时，

$$i^{1/2}=e^{i\pi/4}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\,. \tag{1.47}$$

当 $k=1$ 时，

$$i^{1/2}=-e^{i\pi/4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\,. \tag{1.48}$$

k 取其它整数值与上面两种情况中的一种相等。

复数的几何表示还可用于表示平面上的几何形状。例如，方程

$$|z|=1 \tag{1.49}$$

代表了复平面上距原点距离为 1 的所有点的集合，即单位圆。同理，方程

$$|z-z_0|=R \tag{1.50}$$

代表了以 z_0 为圆心，半径为 R 的圆。我们知道，复数的整数 n 次方根有 n 种不同取值。因此 $\sqrt[n]{1}$ 有 n 种不同取值，分别对应了单位圆上等间距分隔的 n 个点。

练习 1.1 计算：

$$\sqrt{-i}\,,\quad \sqrt{1+i}\,,\quad \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}\,. \tag{1.51}$$

练习 1.2 计算 $\sqrt[4]{-i}$ 的所有可能取值。

练习 1.3 $a\,,b$ 为复数，证明当 $|a|=1$ **或** $|b|=1$ 时，有

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1\,. \tag{1.52}$$

练习 1.4 证明柯西不等式：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|^2\le\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\,.$$

（提示：可以用数学归纳法）。

练习 1.5 化简如下表达式：

$$1+\cos\varphi+\cos(2\varphi)+\cdots+\cos(n\varphi)\,, \tag{1.53}$$

$$1+\sin\varphi+\sin(2\varphi)+\cdots+\sin(n\varphi)\,. \tag{1.54}$$

1.4 复变函数及其导数

实变量函数 $f(x)$ 可以看成实数域或其子集（定义域）到实数域或其子集（值域）的映射。对应的，复变量函数（简称复变函数）可以看成复数域或其子集到复数域或其子集的映射，记作

定义 1.3. 复变函数定义

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\,,\qquad z=x+iy\,,\quad u(x,y)\in\mathbb{R}\,,\quad v(x,y)\in\mathbb{R}\,. \tag{1.55}$$

为了研究复变函数的解析性质，我们需要定义一些几何概念。

定义 1.4. 邻域

定义复平面上点 a 的 ε 邻域为以 a 为圆心，半径为 ε 的开圆，记为 $D_\varepsilon(a)$，

$$D_\varepsilon(a) = \left\{ z \middle| |z-a| < \varepsilon \right\}. \tag{1.56}$$

♣

定义 1.5. 区域

如果复平面上的一个点集 D 满足如下条件：

1. 在 D 中的每一个点 a，必存在充分小的 ε，使得 $D_\varepsilon(a) \subset D$。
2. D 中任意两点均可以可以通过一条 D 中的折线连接。

则称 D 是复平面上的一个区域。

♣

如果 D 是一个区域，D 的边界定义这样一些点的集合：这些点均不在 D 内，但它们的任意邻域均包含有 D 中的点。我们把 D 的边界用 ∂D 表示。D 和其边界的并集记为 $\overline{D} = D \cup \partial D$。

定义 1.6. 扩充复平面

记无穷远点为 ∞，扩充复平面定义为 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$。给定复平面上的点序列 $\{z_n\}$，

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \text{ iff } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|z_n|} = 0. \tag{1.57}$$

注意无穷远点只有一个，不管 z_n 以何种方向趋近无穷远点。

♣

定义 1.7. 单连通区域

对于复平面上的一个区域 D，如果对于 D 上的任意一条封闭曲线都能连续收缩成一个点，则称 D 是单连通区域。否则则成为多连通区域。

♣

在分析中一个最重要性质是函数的可导性（或可微性）。以实变量函数为例，一个实函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导指的是如下极限存在：

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.58}$$

并称其为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$。注意这要求 h 从正方向或负方向趋于 0 的极限都存在且相等。我们希望把这个定义推广到复变函数，为此我们需要在复平面上定义极限的概念。

定义 1.8. 极限

$f(z)$ 是定义在 $D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$[a] 上的复函数。如果对于任意小的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - L| < \epsilon$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处的极限存在，记为

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L. \tag{1.59}$$

[a] 这个记号的意思是 z_0 的 ε 邻域再除掉 z_0 这一点。之所以要除掉 z_0 的原因是函数在 z_0 极限存在与否与函数是否在 z_0 点有定义无关。

♣

用简单的语言描述，如果 $f(z)$ 在 z_0 处的极限存在，则不管 z 从哪个方向趋近 z_0，$f(z)$ 都趋近 L。可以看到，实变函数极限只有两种趋近可能，但在复变情形有无穷多种

趋近极限点的可能。

例 1.2 $z/\bar{z}$ 在 $z=0$ 处的极限是否存在?

实变函数中关于极限的运算规则也能应用到复变函数:

$$\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g\,, \tag{1.60}$$

$$\lim(fg) = \lim(f)\lim(g)\,, \tag{1.61}$$

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}\,,\ \text{if}\ \lim g \neq 0\,. \tag{1.62}$$

定义 1.9. 连续性

如果 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内有定义,而且

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)\,,$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续。如果 $f(z)$ 在区域 D 上的每个点都连续,则称 $f(z)$ 在 D 上连续。用简单的语言来说,连续性代表了函数取值没有跳跃性。 ♣

有了极限概念后,我们可以定义复变函数的导数。

定义 1.10. 复导数

复变函数 $f(z)$ 在 z_0 处的导数定义为

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,. \tag{1.63}$$

如果上述极限存在,我们称 $f(z)$ 在 z_0 可导,或可微。如果 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内处处可导,则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析。 ♣

例 1.3 函数 $\bar{z}$ 在 $\bar{z}=0$ 处不可导。

如果某个函数 $f(z)$ 在区域 D 上处处可导,则把 $f(z)$ 称作 D 上的解析函数(analytic function)。更多时候,为了与实变量函数的可导性区分,也把复变函数情形下的解析函数称作全纯函数(holomorphic function)。注意函数在某点 z 解析相比在 z 可导是一个更强的条件,因为解析性要求函数在 z 的某个邻域内处处可导。

如果把复变函数记作

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\,, \tag{1.64}$$

一个自然问题是可导性用 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 如何表示。

定理 1.4. 复变函数解析性条件和柯西-黎曼方程

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 上解析(即处处可导)的充要条件是:

1. u 和 v 及其一阶偏导数在 D 上存在且连续;
2. u 和 v 在 D 上处处满足柯西-黎曼方程[a]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{1.65}$$

为了方便书写,我们约定将偏导数记为 $\partial u/\partial x = u_x$,因此柯西-黎曼方程也

记为

$$u_x = v_y\,, \qquad u_y = -v_x\,. \tag{1.66}$$

[a]历史上，柯西-黎曼方程首先出现在达朗博尔 1752 年研究流体力学的工作中，1979 年欧拉将其引入到解析函数的研究。1814 年柯西用其构造他的函数论。黎曼关于函数论的博士论文直到 1851 年才出现。

♡

在证明上述定理前，我们先用看一下可导性的例子。

例 1.4 函数 $f(z) = \bar{z}$ 处处不可导。

例 1.5 函数 $f(z) = e^z$ 在全平面可导。在全平面处处可导的函数也称作整函数（entire function）。

例 1.6 函数 $f(z) = x^2 + y + i(y^2 - x)$ 在直线 $y = x$ 上可导，但处处不解析。

例 1.7 函数

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \tag{1.67}$$

处处满足柯西-黎曼方程但在 $z = 0$ 处不解析。

下面我们尝试证明定理1.4。首先我们证明必要性：设

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{1.68}$$

存在。则 h 以任何方式区域零上述极限都相等。首先令 $h = s \to 0\,, s \in \mathbb{R}$。此时

$$f'(z) = \lim_{s\to 0} \frac{u(x+s,y) - u(x,y)}{s} + i \lim_{s\to 0} \frac{v(x+s,y) - v(x,y)}{s} = u_x + iv_x\,. \tag{1.69}$$

其次令 $h = it \to 0\,, t \in \mathbb{R}$。此时

$$f'(z) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x,y+t) - u(x,y)}{it} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(x,y+t) - v(x,y)}{it} = -iu_y + v_y\,. \tag{1.70}$$

由于导数取值不依赖以何种方式趋于零，因此有

$$u_x + iv_x = -iu_y + v_y\,, \tag{1.71}$$

或者写成

$$u_x = v_y\,, \qquad u_y = -v_x\,. \tag{1.72}$$

接着证明充分性：令 $h = s + it$，由偏导数的存在性和连续性可知

$$u(x+s, y+t) = u(x,y) + su_x + tu_y + \alpha|h|\,, \tag{1.73}$$

$$v(x+s, y+t) = v(x,y) + sv_x + tv_y + \beta|h|\,, \tag{1.74}$$

其中 α 与 β 随着 $|h|$ 趋于零而趋于零。从而有

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= s(u_x + iv_x) + t(u_y + iv_y) + (\alpha+\beta)|h| & (1.75)\\ &= u_x(s+it)u_x - i(s+it)u_y + (\alpha+\beta)|h| & (1.76)\\ &= h(u_x - iu_y) + (\alpha+\beta)|h|\,. & (1.77) \end{aligned}$$

因此有

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = u_x - iu_y\,. \tag{1.78}$$

注 上述证明只给出了 $f(z)$ 在 z 点可导的充分条件。为了证明在 z 点解析，还需要证明在 z 的某个邻域内处处可导。证明留给感兴趣的读者。

复变函数的导数具有与实变函数类似的运算规则：

$$(f+g)' = f' + g' \,, \qquad (fg)' = f'g + fg' \,, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \,, \tag{1.79}$$

$$\{f[g(z)]\}' = f'[g(z)]g'(z) \,. \tag{1.80}$$

✍ **练习 1.6** 极限 $\lim_{z\to\infty} e^z$ 是否存在？请说明。

✍ **练习 1.7** 函数

$$f(x+iy) = -4xy + 2i(x^2 - y^2 + 3)$$

是否是解析函数？如是请给出其解析区域。

✍ **练习 1.8** 函数

$$g(x+iy) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{for } z \neq 0 \\ 0 & \text{for } z = 0 \end{cases}$$

在 $z=0$ 处是否解析？请给出理由。

✍ **练习 1.9** 如果 $g(w)$ 和 $f(z)$ 是解析函数，证明 $g[f(z)]$ 也是解析函数。

✍ **练习 1.10** $f(z)$ 是解析函数，如果 $|f(z)| =$ 常数，则 $f(z) =$ 常数。