



经典电动力学

作者：朱华星编著

组织：浙江大学

版本：0.5

Faraday is, and must always remain, the father of that enlarged science of electromagnetism. –

James Maxwell

目录

1	物质中的磁场	1
1.1	外磁场中局域电流分布受力分析	1
1.1.1	拓展知识：磁矩和角动量	4
1.2	静磁场边界条件	5
1.3	磁屏蔽	10
2	电动力学	14
2.1	电动势	14
2.2	电磁感应定律	15
2.3	麦克斯韦方程	19
3	守恒定律	22
3.1	能量守恒和能流密度矢量	22
3.2	动量流密度和应力张量	25
4	电磁波的传播	29
4.1	非导电介质中的平面波传播	29
4.2	电磁波的能流密度	31
4.3	电磁波的偏振	32
4.4	电磁波在介质表面的反射和折射	33
4.5	导电介质中的电磁波	39
4.6	相速度和群速度，色散现象	42
4.7	波导	46
5	运动电荷的势和场	51
5.1	标势和矢势	51
5.2	规范变换	52
5.3	吴大俊和杨振宁的磁单极子解	53
5.4	库伦规范和洛伦兹规范	55
5.5	麦克斯韦方程的推迟势解	56
5.6	洛伦兹变换	61
5.7	李纳-维谢尔势	62
5.8	运动电荷的电磁场：数学推导	63
6	电磁辐射	69
6.1	加速电荷的辐射场（拉莫尔公式）：物理理解	69
6.2	非相对论性加速粒子的辐射：拉莫尔公式的数学推导	70

6.3	电偶极辐射	71
6.4	理想磁偶极辐射	74
6.5	一般局域振荡源的偶极辐射场	77
6.6	一般局域振荡源的磁偶极辐射和（电）四极辐射	79
6.7	电四极矩辐射的角分布	81
7	相对性原理	85
7.1	伽利略变换	85
7.2	麦克斯韦与伽利略的冲突	87
7.3	相对论的基本假设	88
7.4	狭义相对论时空：间隔	89
7.5	洛伦兹变换	91
7.6	相对论速度叠加	96
7.7	光锥和固有时；相对论效应	98
7.8	四维矢量、四速度	100
7.9	更多的四维矢量：四维电流密度和四维势	104
8	相对论力学	103
8.1	作用量原理	103
8.2	相对论性作用量，能量与动量	106
8.3	粒子运动学	108
9	带电粒子在电磁场中的动力学	112
9.1	带相互作用的作用量	112
9.2	电磁场的作用量	115
9.3	电磁场与带电粒子耦合的完整作用量	117

第6章 电磁辐射

6.1 加速电荷的辐射场（拉莫尔公式）：物理理解

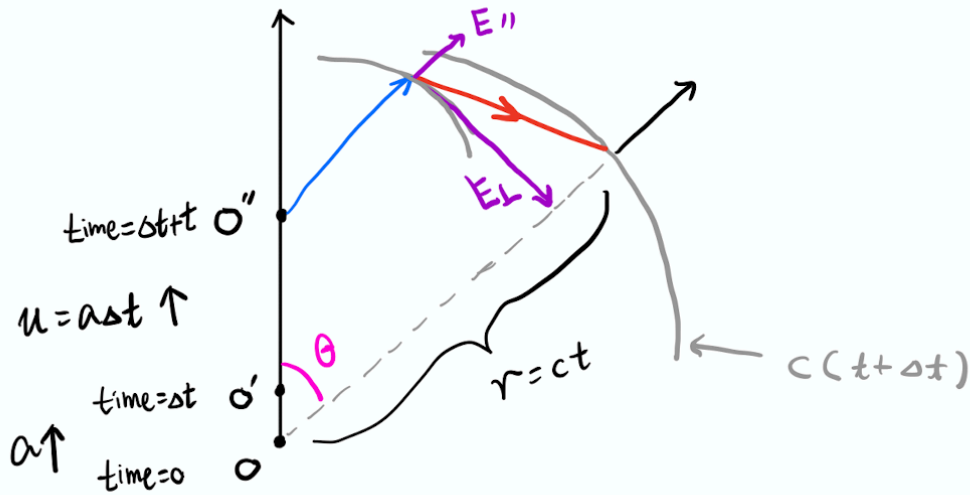


图 6.1: 加速电荷的辐射场

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} \simeq \frac{a\Delta t}{c\Delta t} = \frac{a_{\perp}t}{c} = \frac{a_{\perp}r}{c^2} \quad (6.1)$$

因此

$$E_{\perp} = \frac{a_{\perp}r}{c^2} E_{\parallel} \simeq \frac{a \sin \theta r}{c^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{a \sin \theta}{r} \quad (6.2)$$

这是一个传播的电磁波。电场总是线偏振，且偏振方向总是在 \mathbf{a} 和 \mathbf{r} 所长成的平面上，与 \mathbf{r} 垂直。横偏振电场的强度正比于 $1/r$ ，磁场

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{E}_{\perp} \quad (6.3)$$

因此能流密度矢量

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{Q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (6.4)$$

对能流密度矢量做球面角积分，得到加速电荷的总辐射功率

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_r \sin \theta d\theta = \frac{Q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{a^2(t_r)}{r^2} \quad (6.5)$$

其中 $t_r = t - r/c$ 是推迟时刻。这个公式就是拉莫尔公式，描述的是加速粒子的辐射功率。



笔记 一些重要事实：对于带电为 Q ，以 \mathbf{a} 加速的粒子，在位置 \mathbf{r} 处测量其辐射电场，总是有：

- 电场偏振方向位于 \mathbf{a} 和 \mathbf{r} 所张成的平面上；

- 辐射电场与 \mathbf{r} 垂直, $E_{\perp} \propto \mathbf{a}_{\perp}$, $E_{\perp} \propto 1/r$ 。

例 6.1 考虑线偏振平面波入射到大气分子中。大气分子中的外层电子在线偏振电场的作用下做简谐振动,

$$m_e \ddot{x} = qE_0 \cos(\omega t) - Kx \quad (6.6)$$

假设简谐振动解为

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t) \quad (6.7)$$

代入(6.6), 得到方程

$$-m_e A(\omega) \omega^2 \cos(\omega t) = qE_0 \cos(\omega t) - K A(\omega) \cos(\omega t) \quad (6.8)$$

可以求的振幅为

$$A(\omega) = -\frac{qE_0}{m_e \omega^2 - K} = \frac{\frac{q}{m_e} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \omega_0 = \frac{K}{m_e} \quad (6.9)$$

当入射光频率与固有频率 ω_0 相比很小时, 近似有

$$A \simeq \frac{qE_0}{m_e \omega_0^2} \quad (6.10)$$

而电荷的加速度为

$$a = \ddot{x} \simeq -\frac{qE_0}{m_e \omega_0^2} \omega^2 \cos(\omega t) \quad (6.11)$$

因此由拉莫尔公式, 得到电子辐射的总功率

$$P(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{q^2 E_0^2}{m_e^2 \omega_0^4} \omega^4 \cos^2(\omega t) \quad (6.12)$$

做周期平均后得到

$$\langle P \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} P(t) dt = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{q^2 E_0^2}{m_e^2 \omega_0^4} \omega^4 \quad (6.13)$$

这称作瑞利辐射。这个公式可以解释天为什么是蓝的, 以及日落日出是太阳是红的。

6.2 非相对论性加速粒子的辐射：拉莫尔公式的数学推导

还记得, 在(5.189)中我们求得以路径 $\mathbf{w}(t)$ 运动的点电荷的电场可以写为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c^2 - |\dot{\mathbf{w}}|^2)}{(Rc - \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{w}})^3} (\mathbf{R}c - R\dot{\mathbf{w}}) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R}c - \dot{\mathbf{w}}R) \times \ddot{\mathbf{w}}]}{(Rc - \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{w}})^3} \quad (6.14)$$

其中 $\dot{\mathbf{w}} \equiv \dot{\mathbf{w}}(t_{\text{ret}})$ 是推迟时刻粒子的速度, $\ddot{\mathbf{w}} \equiv \ddot{\mathbf{w}}(t_{\text{ret}})$ 是推迟时刻粒子的加速度,

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_{\text{ret}}) \quad (6.15)$$

是推迟时刻从粒子所在位置指向观测点的矢量。我们感兴趣的是辐射场, 因此可以忽略 \mathbf{E} 中的第一项, 只保留第二项。另外, 我们考虑低速运动的粒子, $|\dot{\mathbf{w}}| \ll c$ 。

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R} \times [\mathbf{R}c \times \ddot{\mathbf{w}}]}{(Rc)^3} \quad (6.16)$$

则瞬时坡印廷矢量可以写为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{\text{rad}} \times \mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rad}}^2 \hat{\mathbf{R}}. \quad (6.17)$$

其中

$$E_{rad} = |\mathbf{E}_{rad}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R c^2} |\ddot{\mathbf{w}}| \sin \Theta \quad (6.18)$$

其中 Θ 是粒子加速方向与 \mathbf{R} 的夹角。瞬时辐射功率的角分布因此可以写为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c} R^2 E_{rad}^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} |\ddot{\mathbf{w}}|^2 \sin^2 \Theta \quad (6.19)$$

而总辐射功率为

$$P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} = 2\pi \int_{-1}^1 d\cos \Theta \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{\mathbf{w}}|^2 \quad (6.20)$$

这个公式是所谓的拉莫尔公式，描述的是低速（非相对论性）运动带电粒子的辐射。

拉莫尔公式表明加速电荷的辐射功率与其加速度平方成正比。对于受电磁场加速的粒子，其加速度与电荷/质量比相关，因此对于电荷相同粒子，质量越小的辐射功率越大。例如， $m_p \sim 2 \times 10^3 m_e$ ，因此加速电子的辐射功率越是加速质子的 4×10^6 倍。这对加速器设计有实际指导意义，目前世界上能量最高的加速器是大型强子对撞机（质子-质子对撞），质心系能量约为 $13000 m_p c^2$ ，而讨论中最强大的正负电子对撞机（例如中国的 CEPC），其质心系能量仅为 $250 m_p c^2$ ，其原因就是加速电子比加速质子更难（电子辐射功率损失更大）。

对于经典的电子绕原子核运动的朴素原子核模型，电子做圆周运动，因此时刻在做加速运动，由拉莫尔公式知道电子将不断辐射能量，从而将不可避免的掉进原子核中。我们现在知道，这个结论是不对的，在电子尺度上量子力学将变得重要，经典的拉莫尔公式不再成立。

6.3 电偶极辐射

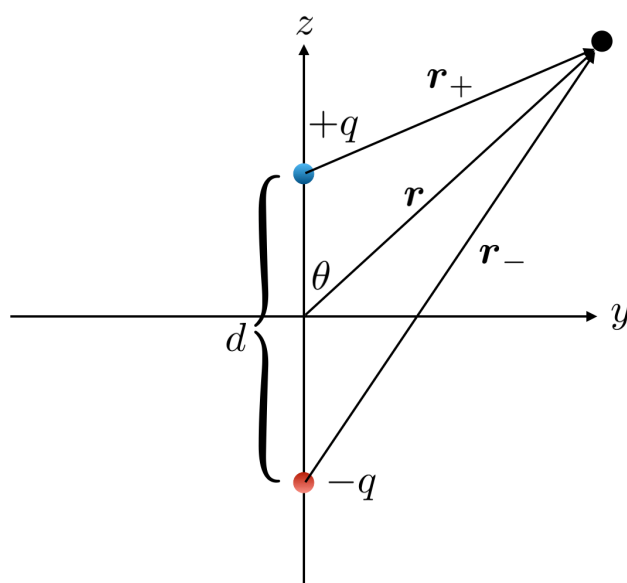


图 6.2: 电荷做简谐振荡的电偶极子。

考虑如图6.2所示的电偶极子。在 $z = d/2$ 处有随时间变化的点电荷 $q_+(t) = q_0 \cos(\omega t)$ 。类似的 $z = -d/2$ 处有点电荷 $q_-(t) = -q_0 \cos(\omega t)$ 。这里的电偶极子是在 $\hat{z}/2$ 和 $-\hat{z}/2$ 处的两个带电金属球，中间有一根沿着 \hat{z} 方向的金属导线相连，从而电流能在两个导电球间流动。整个系统可以用如下电荷密度表示

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q_0 \cos(\omega t) \delta(\mathbf{r} - \frac{d}{2} \hat{z}) - q_0 \cos(\omega t) \delta(\mathbf{r} + \frac{d}{2} \hat{z}). \quad (6.21)$$

系统的电偶极矩是

$$\mathbf{p}(t) = \int d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t) \mathbf{r}' = p_0 \cos(\omega t) \hat{z}, \quad p_0 = q_0 d. \quad (6.22)$$

由推迟势公式，在 \mathbf{r} 处的标势可以写为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.23)$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos(\omega(t - r_+/c))}{r_+} - \frac{\cos(\omega(t - r_-/c))}{r_-} \right). \quad (6.24)$$

由余弦定理有

$$r_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + (d/2)^2}. \quad (6.25)$$

为了得到简单结果，我们需要做一些近似。首先，我们假设观测点的距离远大于振子的尺度，

$$d \ll r. \quad (6.26)$$

在这个近似下有

$$r_{\pm} = r(1 \mp \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos \theta) + \mathcal{O}(d/r). \quad (6.27)$$

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{r} (1 \pm \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos \theta) + \mathcal{O}(d^2/r^2). \quad (6.28)$$

余弦函数变为

$$\cos[\omega(t - r_{\pm}/c)] \simeq \cos[\omega(t - r/c \pm \frac{d}{2c} \cos \theta)] \quad (6.29)$$

$$= \cos[\omega(t - r/c)] \cos(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta) \mp \sin[\omega(t - r/c)] \sin(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta) \quad (6.30)$$

这里我们要应用第二个近似，即振子的尺度远小于波长，

$$d \ll c \frac{2\pi}{\omega}, \quad (6.31)$$

这时余弦函数近似为

$$\cos[\omega(t - r_{\pm}/c)] \simeq \cos[\omega(t - r/c)] \mp \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \sin[\omega(t - r/c)]. \quad (6.32)$$

把这个结果代进标势的表达式中, 得到

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos(\omega(t - r_+/c))}{r_+} - \frac{\cos(\omega(t - r_-/c))}{r_-} \right) \quad (6.33)$$

$$\simeq \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega d}{2c} \cos\theta \sin[\omega(t - r/c)]}{r_+} - \frac{\cos[\omega(t - r/c)] + \frac{\omega d}{2c} \cos\theta \sin[\omega(t - r/c)]}{r_-} \right) \quad (6.34)$$

$$\simeq \frac{q_0 d \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{\omega}{c} \sin[\omega(t - r/c)] + \frac{1}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \right] \quad (6.35)$$

在静止极限 $\omega \rightarrow 0$ 下, 第二项退化为电偶极子的静电势。下面我们用第三个近似, 即观察点的距离远大于电磁波波长,

$$r \gg c \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6.36)$$

事实上, 这三个近似可以统一为

$$d \ll c \frac{2\pi}{\omega} \ll r. \quad (6.37)$$

标势化为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \simeq -\frac{q_0 d \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\omega}{c} \sin[\omega(t - r/c)]. \quad (6.38)$$

电荷的变化必然伴随着电流。可以求得

$$\mathbf{I}(t) = -\frac{dq_-(t)}{dt} \hat{\mathbf{z}} = -q_0 \omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}}. \quad (6.39)$$

为什么这里有个负号? 可以这样理解, 如果 $q_-(t)$ 的电荷增加的话, 它对时间导数是正的, 电流应该流入 $-\hat{\mathbf{z}}/2$ 处的导体球, 因此电流应该沿 $-\hat{\mathbf{z}}$ 方向, 所以应该有一个负号。因此矢势可以写为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{-q_0 \omega \sin[\omega(t - r(z)/c)] \hat{\mathbf{z}}}{r(z)} dz \quad (6.40)$$

$$\simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\mathbf{z}}. \quad (6.41)$$

有了标势和矢势可以计算电场和磁场。在球极坐标下,

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.42)$$

$$= \frac{p_0 \cos\theta \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\sin[\omega(t - r/c)]}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \frac{p_0 \cos\theta \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\omega \cos[\omega(t - r/c)]}{c} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}} \quad (6.43)$$

$$+ \frac{p_0 \sin\theta \omega}{4\pi\epsilon_0 r^2 c} \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.44)$$

$$\simeq \frac{p_0 \cos\theta \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\cos[\omega(t - r/c)]}{r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (6.45)$$

$$\partial_t \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\mathbf{z}} \quad (6.46)$$

$$= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos[\omega(t - r/c)] (\cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (6.47)$$

由此得到

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (6.48)$$

而磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.49)$$

$$= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \quad (6.50)$$

$$= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left[\frac{\omega}{c} \sin \theta \cos[\omega(t - r/c)] + \frac{\sin \theta}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \right] \hat{\phi} \quad (6.51)$$

$$\simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi cr} \sin \theta \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\phi} \quad (6.52)$$

这是往无穷远处辐射的球波。其能流密度为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \right]^2 \hat{\mathbf{r}}. \quad (6.53)$$

周期平均的能流密度矢量为

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (6.54)$$

总平均辐射功率通过对能流密度在球面上的积分求得，

$$\langle P \rangle = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}. \quad (6.55)$$

6.4 理想磁偶极辐射

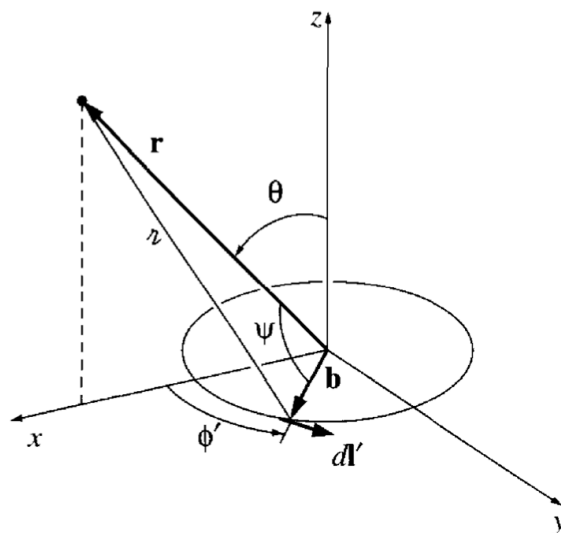


Figure 11.8

图 6.3: 理想磁偶极辐射。图片摘自格里菲斯。

我们下面考虑理想磁偶极做简谐振荡激发的电磁辐射。对于小电流圈，我们知道理想磁偶极子的矢势可以写成

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (6.56)$$

其中磁偶极矩

$$\mathbf{m} = I_0 S \mathbf{n} = I_0 \pi b^2 \mathbf{n}. \quad (6.57)$$

\mathbf{n} 是电流圈通过右手法则定出的法向方向, b 是电流圈半径。现在我们考虑电流圈中的电流做简谐振荡,

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t). \quad (6.58)$$

我们考虑辐射区的场, 有如下近似

$$b \ll \lambda \simeq \frac{c}{\omega} \ll r \quad (6.59)$$

其中 λ 是电磁波波长。考虑图 6.3 中 \mathbf{r} 处的场。不失一般性我们可以选取如图的球坐标系。由于电流圈中的净电荷为零, 我们只需考虑矢势。由推迟势公式, 有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.60)$$

令

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad (6.61)$$

矢势可以写为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{l}' \frac{I_0 \cos(\omega t - \omega R/c)}{R}. \quad (6.62)$$

由对称性可知, \mathbf{r} 点的矢势方向必然沿着 $\hat{\mathbf{y}}$ 方向, 因此我们仅需考虑 $\hat{\mathbf{y}}$ 方向的矢势投影,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{\mathbf{y}} \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' \frac{\cos(\omega t - \omega R/c)}{R}. \quad (6.63)$$

由余弦公式, 这时 R 可写为

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{b}| = \sqrt{b^2 + r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}} \quad (6.64)$$

\mathbf{r} 和 \mathbf{b} 可以参数化为

$$\mathbf{r} = r(\sin \theta, 0, \cos \theta), \quad \mathbf{b} = b(\cos \phi', \sin \phi', 0), \quad (6.65)$$

因此

$$R = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \sin \theta \cos \phi'}. \quad (6.66)$$

利用近似 $b \ll r$, 可把 R 近似为

$$R \simeq r \left(1 - \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right). \quad (6.67)$$

$$\cos(\omega t - \omega R/c) \simeq \cos(\omega(t - r/c)) + \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \quad (6.68)$$

$$= \cos(\omega(t - r/c)) \cos\left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi'\right) - \sin(\omega(t - r/c)) \sin\left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi'\right) \quad (6.69)$$

$$\simeq \cos(\omega(t - r/c)) - \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \sin(\omega(t - r/c)) \quad (6.70)$$

其中在最后一行我们用了近似 $b \ll c/\omega$ 。在这些近似下，矢势写为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{\mathbf{y}} \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' \left[\cos(\omega(t - r/c)) - \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \sin(\omega(t - r/c)) \right] \frac{1}{r(1 - \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi')} \quad (6.71)$$

$$\simeq \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \hat{\mathbf{y}} \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' \left[\cos(\omega(t - r/c)) - \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \sin(\omega(t - r/c)) + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \cos(\omega(t - r/c)) \right] \quad (6.72)$$

注意到有

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi' = \pi, \quad (6.73)$$

并且有近似

$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}, \quad (6.74)$$

我们得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\mathbf{y}}. \quad (6.75)$$

其中 $m_0 = I_0 \pi b^2$ 。注意到一般情况下 \mathbf{A} 应沿 $\hat{\phi}$ 方向，因此又可以写为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\phi}. \quad (6.76)$$

由矢势可以求得电场和磁场

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\phi}. \quad (6.77)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \begin{vmatrix} \frac{\hat{r}}{r^2 \sin \theta} & \frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} & \frac{\hat{\phi}}{r} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} \quad (6.78)$$

$$\simeq -\frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\phi) \quad (6.79)$$

$$\simeq -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\theta}. \quad (6.80)$$

注意辐射电场和磁场具有同样相位，且互相垂直。玻印廷矢量为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \right]^2 \hat{\mathbf{r}}. \quad (6.81)$$

周期平均的玻印廷矢量是

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (6.82)$$

而总的辐射功率为

$$\bar{P}_M = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}. \quad (6.83)$$

可以比较电偶极子和磁偶极子的辐射功率。

$$\bar{P}_E = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}. \quad (6.84)$$

其中 $p_0 = qd$ 。为了公平起见，让振荡磁偶极子和电偶极子的电流具有同样振幅，

$$I_0 = q\omega, \quad (6.85)$$

则

$$\frac{\bar{P}_M}{\bar{P}_E} = \frac{\mu_0 I_0^2 \pi^2 b^4 \omega^4}{12\pi c^3} \frac{12\pi c}{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4} = \frac{\omega^2 \pi^2 b^4}{d^2 c^2}. \quad (6.86)$$

假设电偶极子和磁偶极子具有同样的尺寸， $b = d$ ，则

$$\frac{\bar{P}_M}{\bar{P}_E} = \left(\frac{\omega b \pi}{c} \right)^2 \ll 1, \quad (6.87)$$

其中最后一个不等式来自与电偶极子的尺寸远小于电磁波波长。因此，通常电偶极子的辐射功率要远大于磁偶极子的辐射功率。

6.5 一般局域振荡源的偶极辐射场

假设我们有约束在有限空间 \mathbb{V} 的振荡电荷和电流。由叠加原理可知，不同振荡频率的源不会互相干扰，因此我们可以仅考虑一个单频率的振荡电荷和电流：

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (6.88)$$

注意，物理的电荷和电流需要对上式取实部后求得。推迟矢势可以写为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \int d\tau \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(\tau - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right). \quad (6.89)$$

把(6.88)中的源代进去得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-i\omega t} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (6.90)$$

其中波数 $k = \omega/c$ 。显然磁场和电场应该具有同样的时间依赖。磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (6.91)$$

在不含源分布的区域，由安培-麦克斯韦定理，电场可以写成

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{ic}{k} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (6.92)$$

我们将主要关心远场区域（辐射区），即满足

$$d \ll \lambda \ll r \quad (6.93)$$

的区域，其中 d 是源分布的尺度， λ 是电磁波波长。在这个近似下，分母中的 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r$ ，但分子上指数函数的宗量应近似为

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \simeq r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'. \quad (6.94)$$

这时我们的矢势近似为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}'. \quad (6.95)$$

我们可以对指数函数做幂次展开，

$$e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^n. \quad (6.96)$$

在积分区域, $\mathbf{r}' \lesssim d$, 又因为在辐射区 $kd \ll 1$, 因此展开的每一项的重要性逐次递减。如果我们只考虑领头项, 即 $n = 0$ 的项, 矢势近似为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (6.97)$$

注意到

$$\int \nabla' \cdot (\mathbf{J}(\mathbf{r}') \mathbf{r}') d^3 r' = (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j) \hat{\mathbf{x}}_k \int \partial'_i (J_j(\mathbf{r}') x'_k) d^3 r' \quad (6.98)$$

$$= \int (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r}' d^3 r' + \int (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j) \hat{\mathbf{x}}_k \delta_{ik} \int J_j d^3 r' \quad (6.99)$$

$$= \int (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r}' d^3 r' + \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (6.100)$$

所以

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' = - \int \mathbf{r}' (\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) d^3 r'. \quad (6.101)$$

利用电荷连续性方程,

$$\partial_t \rho(\mathbf{r}', t) = -i\omega \rho = -\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t), \quad (6.102)$$

我们得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 r' = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \mathbf{p}. \quad (6.103)$$

可以看到领头阶的矢势仅与系统的电偶极矩相关, 因此把它称为电偶极辐射。假如我们定义时间依赖的电偶极矩

$$\mathbf{p}(t) = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}, t) d^3 r' = e^{-i\omega t} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}) d^3 r' = e^{-i\omega t} \mathbf{p}, \quad (6.104)$$

则辐射场的矢势可以写为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr} \dot{\mathbf{p}}(t)}{r} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_{\text{ret}})}{r}. \quad (6.105)$$

其中推迟时间近似为

$$t_{\text{ret}} \simeq t - r/c. \quad (6.106)$$

其中我们用头上一代表时间导数。从中我们得到磁场和电场,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k(\mathbf{r}, t) \quad (6.107)$$

$$= -\epsilon_{ijk} \partial_j \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} p_k \quad (6.108)$$

$$= -\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x_j} p_k \quad (6.109)$$

$$= -\epsilon_{ijk} \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \left(\frac{ike^{ikr-i\omega t}}{r} - \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r^2} \right) \frac{r_j}{r} p_k \quad (6.110)$$

$$= -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \left(\frac{ike^{ikr-i\omega t}}{r} - \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} \quad (6.111)$$

$$\simeq \frac{\omega^2\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}, \quad (6.112)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{ic}{k} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.113)$$

$$\simeq \frac{i\omega^2 \mu_0}{4\pi k} \frac{ik e^{ikr-i\omega t}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) \quad (6.114)$$

$$= \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{r}}. \quad (6.115)$$

注意这是复的电场和磁场。复的玻印廷矢量为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*, \quad (6.116)$$

实的周期平均玻印廷矢量是复的玻印廷矢量的实部。上式中的额外 1/2 起了周期平均的效果。辐射的角分布可以写为

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \text{Re}[\mathbf{r} \cdot \mathbf{S}] = \frac{\omega^4 \mu_0}{32\pi^2 c} |\mathbf{r} \times \mathbf{p}|^2 = \frac{\omega^4 \mu_0}{32\pi^2 c} p^2 \sin^2 \theta, \quad (6.117)$$

其中 θ 是 \mathbf{r} 和 \mathbf{p} 的夹角。这就是一般的偶极辐射角分布的公式。根上一节的电偶极子振荡公式比较可以发现一致。但注意这一节讨论的是任意的局域电荷分布的辐射，偶极项只是其辐射的领头阶贡献。

6.6 一般局域振荡源的磁偶极辐射和（电）四极辐射

与静电场的多极展开类似，我们可以对辐射场做多极展开。我们的出发点是(6.118)，我们复制到下式：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} d^3 r'. \quad (6.118)$$

注意到在上式中已经应用了辐射场（远场）近似，即

$$r \gg d, \quad (6.119)$$

其中 d 是源的最大尺度。c 场近似还有

$$kd \ll 1, \quad (6.120)$$

即源的尺度远小于辐射波的波长。利用这个近似我们可以展开指数函数

$$e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^n \quad (6.121)$$

$$= 1 - ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + \dots \quad (6.122)$$

其中第一项我们已在上一节知道对应于电偶极辐射。我们这一节讨论第二项贡献。我们将看到它对应于磁偶极辐射和电四极辐射。第二项对应的矢势可以写为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (-ik) \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d^3 r' \quad (6.123)$$

对被积函数我们应用矢量恒等式可以改写为

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') = \frac{1}{2} \left[(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \mathbf{r}' \right] + \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \times \hat{\mathbf{r}}. \quad (6.124)$$

我们先看上式右边的第二项，其对应的矢势为

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (-ik) \int \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \times \hat{\mathbf{r}} d^3 r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (-ik) \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}, \quad (6.125)$$

其中 \mathbf{m} 是源的磁偶极矩,

$$\mathbf{m} = \int \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \times \hat{\mathbf{r}} d^3 r'. \quad (6.126)$$

如果我们引入时间依赖的磁偶极矩,

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{m} e^{-i\omega t}, \quad (6.127)$$

则对应的矢势可以写为

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (-ik) \mathbf{m}(t) \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{rc} \dot{\mathbf{m}}(t) \times \hat{\mathbf{r}} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{m}}(t_{\text{ret}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc}. \quad (6.128)$$

下面我们再来看(6.124)右边的第一项,

$$\int d^3 r' \frac{1}{2} [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \mathbf{r}']. \quad (6.129)$$

注意到

$$\nabla' \cdot (\mathbf{J}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \mathbf{r}') = (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j) \hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{x}}_l \partial'_i (J_j(\mathbf{r}') x'_k x'_l) \quad (6.130)$$

$$= \delta_{ij} \hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{x}}_l \partial'_i (J_j(\mathbf{r}') x'_k x'_l) \quad (6.131)$$

$$= \delta_{ij} \hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{x}}_l \left[\partial'_i J_j(\mathbf{r}') x'_k x'_l + J_j(\mathbf{r}') \delta_{ik} x'_l + J_j(\mathbf{r}') x'_k \delta_{il} \right] \quad (6.132)$$

$$= i\omega \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \mathbf{r}' + \mathbf{J}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' + \mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}'), \quad (6.133)$$

即

$$\frac{1}{2} \left((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \mathbf{r}' + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right) = \frac{1}{2} \left[\hat{\mathbf{r}} \cdot \left[\nabla' \cdot (\mathbf{J}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \mathbf{r}') \right] - i\omega \rho(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}' \right]. \quad (6.134)$$

忽略掉全微分项, 我们有

$$\int d^3 r' \frac{1}{2} [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \mathbf{r}'] = -\frac{i\omega}{2} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}'. \quad (6.135)$$

因此, 这一项导致的矢势可以写为

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \frac{(-k\omega)}{2} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}'. \quad (6.136)$$

为了从矢势求磁场, 我们需要对矢势求旋度。对于辐射场部分, 我们有(6.112)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \propto \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}, \quad (6.137)$$

因此, 对于辐射场, 我们可以加上正比于 $\hat{\mathbf{r}}$ 的项而不影响结果。为了证明这一点, 注意到磁场由矢势的旋度求得, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 而对于任意径向场 $f(r)\mathbf{r}$, 其旋度

$$\nabla \times f(r)\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (f(r) x_k) \quad (6.138)$$

$$= \hat{\mathbf{x}}_i \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(r) \right) x_k + \hat{\mathbf{x}}_i \epsilon_{ijk} \delta_{jk} \overset{0}{f(r)} \quad (6.139)$$

$$= \hat{\mathbf{x}}_i \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial r} f(r) \right) \frac{\partial r}{\partial x_j} x_k \quad (6.140)$$

$$= \hat{\mathbf{x}}_i \epsilon_{ijk} f'(r) x_k \frac{x_j}{r} \quad (6.141)$$

$$= 0. \quad (6.142)$$

为了得到上面结果，我们应用了 ϵ_{ijk} 是全反对称张量的性质，即 $\epsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0$ ，以及 $\epsilon_{ijk}x_jx_k = 0$ 。我们对(6.112)加一项径向量

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \frac{(-k\omega)}{6} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \left[3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}' - \hat{\mathbf{r}}(r')^2 \right] \quad (6.143)$$

$$= -\frac{\mu_0\omega^2}{24\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{rc} \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}. \quad (6.144)$$

其中我们应用了电四极矩张量的定义：

$$\vec{Q} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \left[3\mathbf{r}'\mathbf{r}' - \vec{I}(r')^2 \right]. \quad (6.145)$$

其中 \vec{I} 是二阶单位张量。如果我们定义时间依赖的电四极矩，

$$\vec{Q}(t) = \vec{Q} e^{-i\omega t}, \quad (6.146)$$

则(6.144)可以写为

$$\boxed{\frac{\mu_0}{24\pi} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}(t_{\text{ret}})}{rc}} \quad (6.147)$$

综合电偶极辐射，磁偶极辐射和电四极辐射的结果，我们有辐射矢势的多极展开式

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_{\text{ret}})}{r} + \frac{\mu_0}{24\pi} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}(t_{\text{ret}})}{rc} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{m}}(t_{\text{ret}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc} + \text{更高极矩}.} \quad (6.148)$$

注意到上式是一个关于 v/c 的展开， v 是源的特征电荷运动速度。对于非相对论性的源，这是一个很小的量。从这个表达式我们可以求出辐射电场和磁场的多极展开。

6.7 电四极矩辐射的角分布

下面我们来看一个特殊情形，即电偶极辐射和磁偶极都为零，第一阶非零项为电四极辐射时的辐射角分布。此时我们的辐射矢势可以近似为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0\omega^2}{24\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{rc} \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q} + \text{更高极矩}. \quad (6.149)$$

为了方便可以定义矢量

$$\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}}) \equiv \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}. \quad (6.150)$$

由此可以求出磁场，

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.151)$$

$$= -\frac{\mu_0\omega^2}{24\pi} \nabla \times \left[\frac{e^{ikr-i\omega t}}{rc} \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \quad (6.152)$$

$$= -\frac{\mu_0\omega^2}{24\pi} \left\{ \left[\nabla \frac{e^{ikr-i\omega t}}{rc} \right] \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{e^{ikr-i\omega t}}{rc} \nabla \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}}) \right\} \quad (6.153)$$

注意到

$$\frac{e^{ikr-i\omega t}}{rc} \nabla \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}}) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (6.154)$$

因此这一项不贡献到辐射场，因此可以忽略。再来看梯度项，

$$\nabla \frac{e^{ikr-i\omega t}}{rc} = \frac{e^{-i\omega t}}{rc} \nabla e^{ikr} + \frac{e^{ikr-i\omega t}}{c} \nabla \frac{1}{r}, \quad (6.155)$$

$$\simeq \frac{e^{-i\omega t}}{rc} \nabla e^{ikr} \quad (6.156)$$

$$= \frac{e^{-i\omega t}}{rc} \frac{\partial e^{ikr}}{\partial r} \nabla r \quad (6.157)$$

$$= \frac{e^{ikr-i\omega t}}{rc} ik\hat{\mathbf{r}} \quad (6.158)$$

$$= i \frac{e^{ikr-i\omega t}}{rc} \mathbf{k} \quad (6.159)$$

因此我们可以把磁感应强度写为

$$\mathbf{B} = -i \frac{\mu_0 \omega^2 e^{ikr-i\omega t}}{24\pi rc} \mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (6.160)$$

我们要强调的是，这个结果是只保留了辐射场部分，即正比于 $1/r$ 的部分。由安培-麦克斯韦定律

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.161)$$

对于电场其随时间变化的形式必然也为 $e^{-i\omega t}$ ，因此

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E}, \quad (6.162)$$

我们可以求得电场，

$$\mathbf{E} = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} \quad (6.163)$$

$$= \frac{\mu_0 c \omega e^{-i\omega t}}{24\pi} \nabla \times \left[\frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \quad (6.164)$$

$$\simeq \frac{\mu_0 c \omega e^{-i\omega t}}{24\pi} \frac{\nabla e^{ikr}}{r} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \quad (6.165)$$

$$= i \frac{\mu_0 c \omega e^{ikr-i\omega t}}{24\pi r} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \quad (6.166)$$

同样我们在上面的计算中做了只保留辐射场的近似。从复的电场和磁场可以求得复的玻印廷矢量

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \quad (6.167)$$

$$= -\frac{\mu_0 \omega^3}{576\pi^2 r^2} \left[\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \right] \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \quad (6.168)$$

物理的玻印廷矢量对周期平均后是复的玻印廷矢量的实部的一半，即

$$\bar{\mathbf{S}} = -\frac{\mu_0 \omega^3}{1152\pi^2 r^2} \left[\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \right] \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \quad (6.169)$$

周期平均的单位角辐射功率可以写为

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{S}} \quad (6.170)$$

$$= \frac{r^2}{k} \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{S}} \quad (6.171)$$

$$= -\frac{\mu_0 \omega^3}{1152 \pi^2 k} \mathbf{k} \cdot \left\{ \left[\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \right] \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \right\} \quad (6.172)$$

利用矢量恒等式

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \quad (6.173)$$

我们有

$$\frac{dP}{d\Omega} = -\frac{\mu_0 \omega^3}{1152 \pi^2 k} \left[\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \right] \cdot \left[(\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \times \mathbf{k} \right] \quad (6.174)$$

$$= \frac{\mu_0 \omega^3}{1152 \pi^2 k} \left| \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \right|^2 \quad (6.175)$$

对于一般的辐射源，要解析求出辐射功率角分布是较为复杂的。但总辐射功率（即对球面角积分）较容易求出。总辐射功率定义为

$$P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} \quad (6.176)$$

注意到

$$\left[\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \right] = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \mathbf{k} - k^2 \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (6.177)$$

因此

$$\left| \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \right|^2 = k^4 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* - k^2 |\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}|^2 \quad (6.178)$$

$$= k^4 \left[\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{Q}} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{Q}}^*) - |\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{Q}}|^2 \right] \quad (6.179)$$

$$= k^4 \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta Q_{\alpha\gamma} Q_{\beta\gamma}^* - k^4 Q_{\alpha\gamma} Q_{\beta\delta}^* \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta \hat{r}_\gamma \hat{r}_\delta \quad (6.180)$$

其中 \hat{r}_α 是单位向量的第 α 分量。上式中我们用到

$$|\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{Q}}|^2 = |\hat{r}_\alpha Q_{\alpha\beta} \hat{r}_\beta|^2 \quad (6.181)$$

$$= \hat{r}_\alpha Q_{\alpha\beta} \hat{r}_\beta \hat{r}_\gamma Q_{\gamma\delta}^* \hat{r}_\delta \quad (6.182)$$

因此角度积分转换为如下积分

$$\int d\Omega \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta \quad (6.183)$$

$$\int d\Omega \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta \hat{r}_\gamma \hat{r}_\delta \quad (6.184)$$

由对称性可知，

$$\int d\Omega \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta = c_1 \delta_{\alpha\beta} \quad (6.185)$$

$$\int d\Omega \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta \hat{r}_\gamma \hat{r}_\delta = c_2 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \quad (6.186)$$

未知系数可以取对角项求得

$$\int d\Omega \hat{r}_\alpha \hat{r}_\alpha = 4\pi = c_1 \delta_{\alpha\alpha} = 3c_1 \quad (6.187)$$

$$\int d\Omega \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta = 4\pi = c_2 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha}) = 15c_2 \quad (6.188)$$

即

$$c_1 = \frac{4\pi}{3}, \quad c_2 = \frac{4\pi}{15}. \quad (6.189)$$

因此

$$\int d\Omega \left| \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{r}})) \right|^2 = k^4 Q_{\alpha\gamma} Q_{\beta\gamma}^* \int d\Omega \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta - k^4 Q_{\alpha\gamma} Q_{\beta\delta}^* \int d\Omega \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta \hat{r}_\gamma \hat{r}_\delta \quad (6.190)$$

$$= k^4 Q_{\alpha\gamma} Q_{\beta\gamma}^* \frac{4\pi}{3} \delta_{\alpha\beta} - k^4 Q_{\alpha\gamma} Q_{\beta\delta}^* \frac{4\pi}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \quad (6.191)$$

$$= \frac{4\pi}{3} k^4 Q_{\alpha\gamma} Q_{\alpha\gamma}^* - \frac{4\pi}{15} k^4 (Q_{\alpha\gamma} Q_{\alpha\gamma}^* + \cancel{Q_{\alpha\alpha} Q_{\beta\beta}^*} + Q_{\alpha\gamma} Q_{\alpha\gamma}^*) \quad (6.192)$$

$$= \frac{4\pi}{5} k^4 Q_{\alpha\gamma} Q_{\alpha\gamma}^* \quad (6.193)$$

其中我们利用了四极矩张量的无迹条件。因此我们得到总功率的表达式

$$P = \frac{\mu_0 \omega^3 k^3}{1440\pi} Q_{\alpha\gamma} Q_{\alpha\gamma}^* = \frac{\mu_0 \omega^6}{1440\pi c^3} Q_{\alpha\gamma} Q_{\alpha\gamma}^* \quad (6.194)$$

即辐射功率与频率的六次方成正比。

例：求带电椭球（所带电荷作简谐振荡）的辐射功率角分布，已知

$$Q_{33} = Q_0, \quad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{Q_0}{2}, \quad (6.195)$$

非对角元为零。

第7章 相对性原理

关于相对论的部分大量参考自朗道的《场论》。

参考系：坐标系以及固定在这个坐标系上的时钟。一个参考系中发生的一个事件可以用其上的时间和空间坐标记录， $(t, x, y, z) \equiv (t, \boldsymbol{x})$ ，称作空时坐标。如果一个不受外力作用物体在某个参考系中做匀速运动，则成该参考系为**惯性参考系**。显然可以有无穷多个惯性参考系。狭义相对论研究的就是在不同惯性参考系之间的运动学和动力学关系。

7.1 伽利略变换

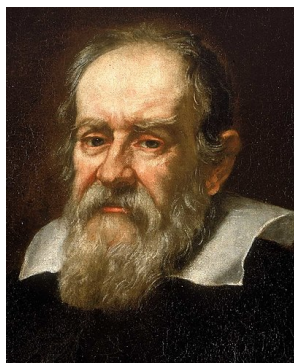


图 7.1: 伽利略·伽利莱 (Galileo Galilei; 1564 年 2 月 15 日 - 1642 年 1 月 8 日，意大利物理学家、数学家、天文学家及哲学家，科学革命中的重要人物。其成就包括改进望远镜和其所带来的天文观测，以及支持哥白尼的日心说。伽利略做实验证明，感受到引力的物体并不是呈匀速运动，而是呈加速度运动；物体只要不受到外力的作用，就会保持其原来的静止状态或匀速运动状态不变。他又发表惯性原理阐明，未感受到外力作用的物体会保持不变其原来的静止状态或匀速运动状态。伽利略被誉为“现代观测天文学之父”、“现代物理学之父”、科学方法之父、“科学之父”及“现代科学之父”。史蒂芬·霍金说，“自然科学的诞生要归功于伽利略。” --摘自维基百科。

在进入狭义相对论之前，我们先回顾大家在牛顿力学里所熟悉的伽利略相对性原理。设有两个惯性参考系 K 和 K' ，它们的坐标轴相互平行。假设 K' 系相对 K 系以速度 \boldsymbol{v} 匀速运动。设在 K 系中某一事件的空时坐标为 (t, \boldsymbol{x}) ，则在 K' 系该事件对应的空时坐标为

$$t' = t, \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t. \quad (7.1)$$

这个坐标系变换称为伽利略变换。假如 \mathbf{v} 刚好沿 x 轴方向，则伽利略变换可以写为

$$t' = t, \quad (7.2)$$

$$x' = x - vt, \quad (7.3)$$

$$y' = y, \quad (7.4)$$

$$z' = z. \quad (7.5)$$

假如有一个物体在 K 系中以速度 \mathbf{u} 做匀速运动，

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (7.6)$$

由于 K' 也是惯性系，该物体在 K' 系中必然也做匀速运动，记其速度为 \mathbf{u}' ，则 \mathbf{u} 和 \mathbf{u}' 的关系为

$$\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{d(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad (7.7)$$

这就是伽利略变换下的速度叠加原理。而对于加速运动粒子，在 K' 系中加速度定义为

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \quad (7.8)$$

而在 K' 系中加速度为

$$\mathbf{a}' = \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt'^2} = \frac{d^2(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} - \frac{d^2(\mathbf{v}t)}{dt^2} = \mathbf{a} \quad (7.9)$$

因此加速度伽利略变换下不变。

例：证明流体力学中的 Navier-Stokes 方程在伽利略变换下是不变的。Navier-Stokes 方程是关于流体中速度场分布随时间改变的方程，可以写为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (7.10)$$

其中速度场 $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ ，压力场 $p(t, \mathbf{x})$ 是时间和空间的函数。 ν 是粘滞系数，可以认为是常数。 p 和 ν 在伽利略变换下不变。我们先看梯度算符在伽利略变换下的行为

$$\nabla = \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{x}'_i \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \hat{x}'_i \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{\partial (x_j - v_j t)}{\partial x_i} = \hat{x}'_i \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \hat{x}'_i \frac{\partial}{\partial x'_j} \delta_{ij} = \nabla' \quad (7.11)$$

因此梯度算符在伽利略变换下不变。由此，(7.10)中的右式在伽利略变化下是不变的，用方程表示

$$-\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla' p' + \nu' \nabla'^2 \mathbf{u}', \quad (7.12)$$

其中我们用到了 $p' = p$ ， $\nu' = \nu$ ，以及

$$\nabla'^2 \mathbf{u}' = \nabla^2 (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7.13)$$

其中 \mathbf{v} 是两个惯性系间的相对速度。

$$\mathbf{u}'(t', \mathbf{x}') = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{v} \quad (7.14)$$

是在 K' 系中流体的速度场分布。对于 NS 方程的左边，

$$\frac{\partial \mathbf{u}'(t', \mathbf{x}')}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = \frac{\partial (\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{v})}{\partial t'} + [(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla] (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (7.15)$$

$$= \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t'} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (7.16)$$

利用

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \quad (7.17)$$

有

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{v}t, \quad \text{或} \quad x_i = x'_i + v_i t = x'_i + v_i t', \quad (7.18)$$

有

$$\frac{\partial x_i}{\partial t'} = v_i, \quad (7.19)$$

因此

$$\frac{\partial \mathbf{u}'(t', \mathbf{x}')}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (7.20)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (7.21)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (7.22)$$

即 NS 方程的左边也是伽利略不变的。从而我们证明了 NS 方程的伽利略不变性。

7.2 麦克斯韦与伽利略的冲突

尽管伽利略变换与我们日常生活经验吻合，但它与麦克斯韦方程有着不可调和的矛盾。从麦克斯韦方程我们可以求出真空中的光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ 。这个速度只依赖于两个基本常数，似乎与参考系无关。但是如果光满足伽利略变换的速度叠加原理，那么光在有相对运动的两个惯性系里的速度就会不一样。一种可能的解决方案是认为存在一个特殊的静止惯性系，麦克斯韦方程只在这个特殊惯性系成立， $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ 求出的只是这个特殊惯性系里的光速。这个就是以太假设。但是迈克尔逊-莫雷的寻找以太实验以失败告终。

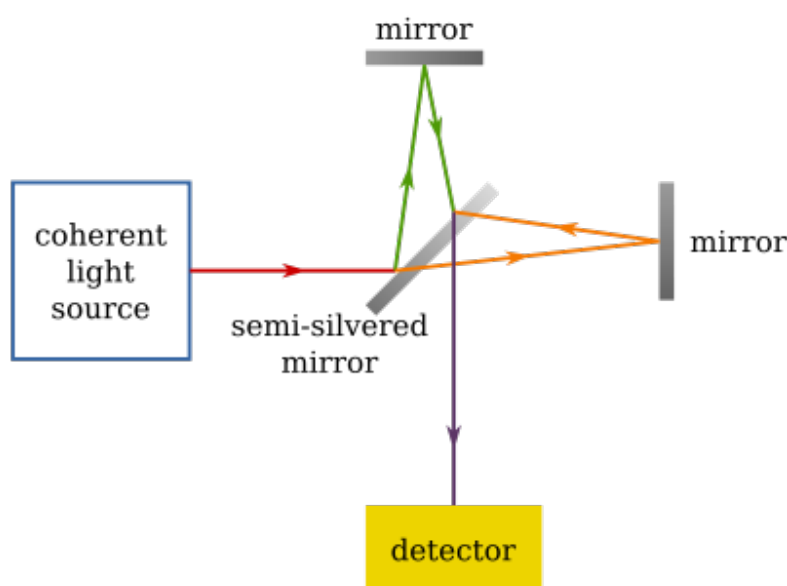


图 7.2: 迈克尔逊-莫雷实验。图形摘自维基百科。

事实上，从麦克斯韦方程直接可以看出它与伽利略变换间的矛盾。我们知道利用标

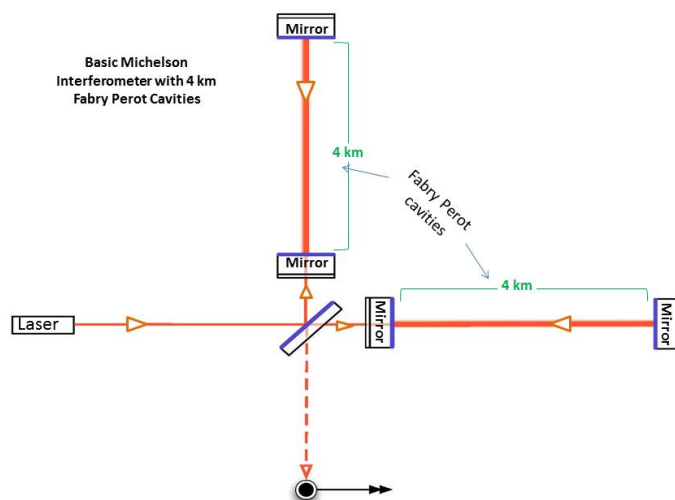


图 7.3: 激光干涉引力波天文台 (LIGO)。其原理与迈克尔逊-莫雷实验类似。图形摘自 LIGO 实验。

势和矢势，无源的麦克斯韦方程在洛伦兹规范下可以写为

$$\nabla^2 \Psi(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} = 0 \quad (7.23)$$

其中 Ψ 可以是标势或是矢势的分量。如果麦克斯韦方程满足相对性原理，则我们期待在 K' 系麦克斯韦方程可以写成一样的形式：

$$\nabla'^2 \Psi(t', \mathbf{x}') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(t', \mathbf{x}')}{\partial t'^2} = 0 \quad (7.24)$$

我们知道 $\nabla'^2 \Psi = \nabla^2 \Psi$ ，且 $\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi(t', \mathbf{x}')$ ，因此第一项没有问题。但第二项可以写成

$$\frac{\partial^2 \Psi(t', \mathbf{x}')}{\partial t'^2} = \left(\frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_j}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial x_i}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi(t, \mathbf{x}) \right) \quad (7.25)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Psi \right) \quad (7.26)$$

$$= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{v} \cdot \nabla) \Psi \quad (7.27)$$

因此，

$$\nabla'^2 \Psi(t', \mathbf{x}') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(t', \mathbf{x}')}{\partial t'^2} = \nabla^2 \Psi(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{v} \cdot \nabla) \Psi \right) \quad (7.28)$$

因此我们得到结论，麦克斯韦方程不满足伽利略协变性。

7.3 相对论的基本假设

在上述矛盾的基础上，爱因斯坦提出了狭义相对论的两个基本假设：

1. 相对性原理：所有的自然定律在所有惯性参考系中都是相同的。换句话说，描述自然界定律的方程，如用不同的惯性参考系的坐标与时间写出来，应具有相同的形式。

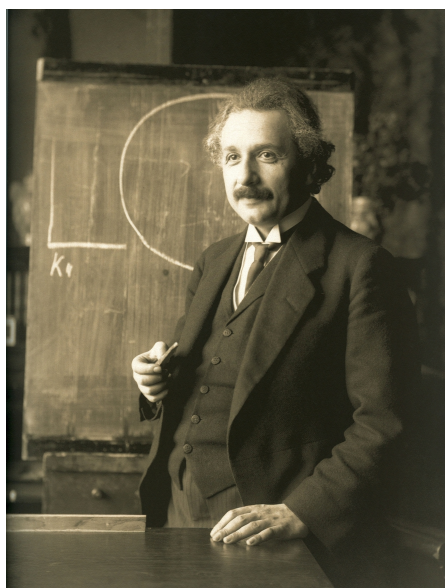


图 7.4: 阿尔伯特·爱因斯坦 (德语: Albert Einstein, 1879 年 3 月 14 日 - 1955 年 4 月 18 日), 犹太裔理论物理学家, 他创立了现代物理学的两大支柱之一的相对论, 也是质能等价公式 ($E = mc^2$) 的发现者。因为“对理论物理的贡献, 特别是发现了光电效应的原理”, 他荣获 1921 年度的诺贝尔物理学奖 (1922 年颁发)。这一发现为量子理论的建立踏出了关键性的一步。

2. 光速不变原理：不同惯性参考系中的光速相等且有限。

事实上, 狭义相对论不仅仅适用于与光相关的现象, 而是任意自然现象 (在不考虑引力的条件下)。因此, 有时把第二个假设改成: 不同任意惯性参考系中信号传递最大速度 C 有限且相等, 实验上这个速度等于真空中的光速 $C = c$ 。

7.4 狭义相对论时空：间隔

研究参考系的变化, 一个重要原则是抓住不变量。在伽利略变换中, 时间是不变量, 两个事件间的距离 $\sqrt{\Delta \mathbf{x}^2}$ 也是不变量。那么在狭义相对论是否存在不变的东西? 我们下面从相对论的基本假设出发来讨论这个问题。

设我们有两个惯性系 K 和 K' , 空时坐标系分别为 (t, \mathbf{x}) 和 (t', \mathbf{x}') , K' 相对 K 以匀速 \mathbf{u} 运动。假设在 K 系中的 t_1 时刻, \mathbf{x}_1 处发出一束光信号 (事件 A), 在 t_2 时刻在 \mathbf{x}_2 处被接收 (事件 B)。而在 K' 系的观察者看来, 是 t'_1 时刻 \mathbf{x}'_1 处发出一束光信号 (事件 A), 在 t'_2 时刻到达 \mathbf{x}'_2 被接收 (事件 B)。

我们知道, 信号的传播速度可以定义为传播距离除以传播所用时间。因此, K 系中的观察者可以算得 K 系中的光速

$$c = \frac{\sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2}}{t_2 - t_1} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{t_2 - t_1} \quad (7.29)$$

同理, 在 K' 系的观察者可以算得 K' 中的光速为

$$c' = \frac{\sqrt{(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1)^2}}{t'_2 - t'_1} = \frac{\sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}}{t'_2 - t'_1} \quad (7.30)$$

由于 K 和 K' 均为惯性系，其中的光速必须相等，因此 $c = c'$ ，即

$$\frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{t_2 - t_1} = \frac{\sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}}{t'_2 - t'_1} \quad (7.31)$$

这个结果把不同惯性参考系中的空时坐标联系了起来。为了方便表达，可以定义 A 和 B 两个事件的**间隔**。在 K 系中，间隔写为

$$s_{AB}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2, \quad (7.32)$$

而在 K' 系中，间隔写为

$$s_{AB}'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1)^2, \quad (7.33)$$

则由(7.29)知道，对于上面定义的两个事件 A 和 B，

$$s_{AB}^2 = s_{AB}'^2 = 0 \quad (7.34)$$

即在任意惯性参考系都成立 A 和 B 两点的间隔都为零。注意到上面的 A 和 B 是两个非常特殊的事件，它们刚好可以通过光信号联系起来。一般的， s_{AB} 可以取不同的实值：

1. $s_{AB}^2 = 0$: 这时我们称 A 和 B 具有**类光间隔**。
2. $s_{AB}^2 > 0$: 这时我们称 A 和 B 具有**类时间隔**。
3. $s_{AB}^2 < 0$: 这时我们称 A 和 B 具有**类空间隔**。

关于不同间隔的物理意义我们在后面的小节再阐述，但下面我们要证明的是，不管 s_{AB} 取值如何，在任意两个惯性参考系间均有

$$\boxed{s_{AB}^2 = s_{AB}'^2} \quad (7.35)$$

这是一个重要的结论，是光速不变原理的数学表述。设有任意两个事件 A 和 B，在 K 系中它们的间隔为 s_{AB} ，在 K' 系它们的间隔为 s_{AB}' ， K' 系以匀速 \mathbf{v}_1 相对 K 系运动。当 $s_{AB}^2 = 0$ 时，我们已经证明了 $s_{AB}^2 = s_{AB}'^2$ 。如果 A 和 B 无穷接近，我们可定义在 K 系中其间隔为

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (7.36)$$

由于 ds^2 是无穷小量， ds'^2 也应该是无穷小量。它们之间应有关系

$$ds^2 = a(v_1) ds'^2. \quad (7.37)$$

其中 $a(v_1)$ 是依赖于 K 和 K' 相对速度的函数。下面我们引入第三个惯性参考系 K'' ，其相对于 K 的速度为 \mathbf{v}_2 ，相对于 K' 的速度为 \mathbf{v}_{12} 。显然我们应有

$$ds^2 = a(v_2) ds''^2 \quad (7.38)$$

$$ds'^2 = a(v_{12}) ds''^2 \quad (7.39)$$

由上面三式我们得到

$$\frac{a(v_2)}{a(v_1)} = a(v_{12}) \quad (7.40)$$

但这个表达式的左边仅依赖于 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 的大小，而右边还依赖于 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 的夹角。因此，(7.40)成立仅当 a 是一个常数。这个常数可以由对称性定出为一。因此，我们证明了对于

任意两个惯性参考系，

$$ds^2 = ds'^2 \quad (7.41)$$

有限大间隔由无穷小间隔组成，因此我们又得到

$$s_{AB}^2 = s_{AB}'^2 \quad (7.42)$$

假如我们把时间和空间坐标放在一起，组合成四维坐标 (t, \mathbf{x}) ，则间隔 s_{AB}^2 定义了在四维时空中 A 和 B 的某种距离，而且这个距离在不同惯性参考系看来都是一样的。我们把带有这种距离结构的四维时空称作闵可夫斯基时空。与通常的欧氏时空不同，闵氏时空中的距离并不是正定的。



图 7.5: 赫尔曼·闵可夫斯基（德语：Hermann Minkowski，1864 年 6 月 22 日 - 1909 年 1 月 12 日），德国数学家，犹太人，四维时空理论的创立者，曾经是著名物理学家爱因斯坦的老师。

7.5 洛伦兹变换

我们这一节推导满足爱因斯坦的狭义相对性原理的空时坐标变换规律，即所谓的洛伦兹变换。推导洛伦兹变换的方法有多种，我们这里尝试从不变量的观点来推导。

为此我们回过头来用不变量原理来推导伽利略变换。伽利略相对论里有什么是不变的？时间和长度。我们想要寻找一组坐标和时间的变换，

$$(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z') \quad (7.43)$$

使得时间和长度在这个变换下是不变的。首先，由相对性原理，我们期望这个变换应该是线性变换。假如我们把时间和空间坐标写成一组四维矢量，我们把它就做四维空时坐

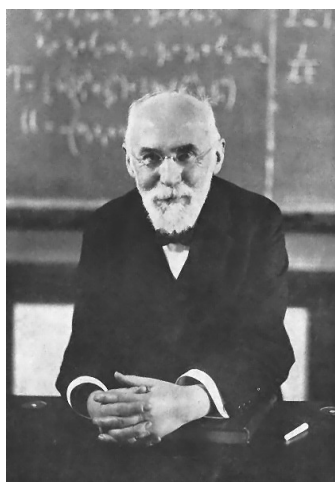


图 7.6: 亨德里克·安东·洛伦兹（荷兰语：Hendrik Antoon Lorentz，1853 年 7 月 18 日 - 1928 年 2 月 4 日），荷兰物理学家，曾与彼得·塞曼共同获得 1902 年诺贝尔物理学奖，并于 1881 年当选荷兰皇家艺术与科学学院院士，同时还曾担任多国科学院外籍院士。在爱因斯坦的晚年，他如此评价洛伦兹：“For me personally he meant more than all the others I have met on my life’s journey.”

标，

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

那么我们期望 K' 和 K 系的空时坐标可以通过一个矩阵联系起来

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G_{4 \times 4} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{00} & G_{01} & G_{02} & G_{03} \\ G_{10} & G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{20} & G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{30} & G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

其中 G 是一个四乘四矩阵，其元素可以是两个惯性系的相对速度和坐标轴的相对夹角的函数。为了确定其元素，我们先看时间不变性的要求：

$$t' = G_{00}t + G_{01}x + G_{02}y + G_{03}z = t \quad (7.46)$$

因此我们必然有

$$G_{00} = 1, \quad G_{01} = G_{02} = G_{03} = 0 \quad (7.47)$$

然后我们考察两个参考系相对静止，但坐标轴允许有夹角的情况。这是， G 矩阵必须具有形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ 0 & G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ 0 & G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

否则 K' 系的坐标将依赖于 K 系的时间，这与两个参考系相对静止不符。我们把右下角

的三乘三矩阵记做 $G_{3 \times 3}$ ，则长度不变性要求

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} G_{3 \times 3}^T G_{3 \times 3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 \quad (7.49)$$

换句话说，这要求

$$G_{3 \times 3}^T G_{3 \times 3} = \mathbb{1}_{3 \times 3} \quad (7.50)$$

即 $G_{3 \times 3}$ 是三维正交矩阵。如果我们还要求坐标轴定向不变的话，可以进一步将其约束为特殊三维正交矩阵。其物理意义对应与坐标轴的旋转。最后我们来看 K 和 K' 系的坐标轴互相平行，在 $t = 0$ 时刻原点也重合，但以相对速度 \mathbf{v} 匀速运动。这时变换关系应为

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ G_{10} & 1 & 0 & 0 \\ G_{20} & 0 & 1 & 0 \\ G_{30} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.51)$$

即

$$x' = G_{10}t + x, \quad y' = G_{20}t + y, \quad z' = G_{30}t + y. \quad (7.52)$$

对于 K' 系的坐标原点，有

$$x' = y' = z' = 0. \quad (7.53)$$

但在 K 系观察者看来， K' 系坐标原点的坐标应为

$$x = -v_x t, \quad y = -v_y t, \quad z = -v_z t. \quad (7.54)$$

由此我们求得

$$G_{10} = v_x, \quad G_{20} = v_y, \quad G_{30} = v_z. \quad (7.55)$$

由此我们求得了最一般的（不含平移）的伽利略变换。

利用同样的方法，我们来尝试求狭义相对论下的空时坐标变化。首先我们要知道在狭义相对论下什么量是坐标系变换的不变量。我们在上一节已回答了这个问题，答案是**间隔**，

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (7.56)$$

我们将从间隔的不变性出发来求导洛伦兹变换。为了推导方便，我们不妨设空间只有一维。三维的情况可以很容易从一维推广求得。因此，下面的推导是关于二维空时（1+1 维）进行的。我们考虑两个参考系 K 和 K' ，其中 K' 相对 K 以速度 u 沿 x 轴运动。两个坐标轴原点重合的时刻设为 $t = t' = 0$ ，对应的事件为 O ，也就是 O 事件在 K 系的空时坐标为 $(0, 0)$ ，在 K' 系的空时坐标为 $(0, 0)$ 。考虑任一空时事件 $A \neq O$ ，在 K 系的空时坐标为 (t, x) ，在 K' 系的坐标为 (t', x') 。 A 和 O 的间隔在 K 和 K' 系中分别由

$$s_{AO}^2 = c^2 t^2 - x^2, \quad s_{AO}'^2 = c^2 t'^2 - x'^2 \quad (7.57)$$

给出, 且

$$s_{AO}^2 = s_{AO}'^2 \quad (7.58)$$

我们要求的洛伦兹变换可以用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (7.59)$$

这个关系又可以改写为

$$\begin{pmatrix} ict' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{00} & \tilde{L}_{01} \\ \tilde{L}_{10} & \tilde{L}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \end{pmatrix} \quad (7.60)$$

注意到

$$\begin{pmatrix} ict' & x' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ict' \\ x' \end{pmatrix} = -c^2 t'^2 + x'^2 = -s_{OA}'^2 = -s_{OA}^2 = \begin{pmatrix} ict & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ict \\ x \end{pmatrix} \quad (7.61)$$

但由(7.60)又可以写为

$$\begin{pmatrix} ict' & x' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ict' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ict' & x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L}_{00} & \tilde{L}_{01} \\ \tilde{L}_{10} & \tilde{L}_{11} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{L}_{00} & \tilde{L}_{01} \\ \tilde{L}_{10} & \tilde{L}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \end{pmatrix} \quad (7.62)$$

这要求

$$\begin{pmatrix} \tilde{L}_{00} & \tilde{L}_{01} \\ \tilde{L}_{10} & \tilde{L}_{11} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{L}_{00} & \tilde{L}_{01} \\ \tilde{L}_{10} & \tilde{L}_{11} \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{2 \times 2} \quad (7.63)$$

即是二维特殊正交矩阵, 因此可以一般性的写为

$$\begin{pmatrix} \tilde{L}_{00} & \tilde{L}_{01} \\ \tilde{L}_{10} & \tilde{L}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (7.64)$$

其中 ϕ 的物理意义待定。把上式代进(7.60), 我们得到

$$ict' = ict \cos \phi - x \sin \phi, \quad (7.65)$$

$$x' = ict \sin \phi + x \cos \phi. \quad (7.66)$$

这个变换关系中包含显式的虚部。并非我们想要的形式。重新定义一个变量

$$\phi = i\eta, \quad (7.67)$$

注意到

$$\cos \phi = \cos(i\eta) = \cosh \eta, \quad \sin \phi = \sin(i\eta) = i \sinh \eta, \quad (7.68)$$

我们把变换(7.66)重写为

$$ct' = ct \cosh \eta - x \sinh \eta, \quad (7.69)$$

$$x' = -ct \sinh \eta + x \cosh \eta. \quad (7.70)$$

为了得到 η 与两个参考系相对速度 u 的关系, 我们注意到在 K 系看来, K' 系的坐标原点的为 $x = ut$ 。但在 K' 系其坐标原点总是有 $x' = 0$ 。因此有上式的第二行得到

$$0 = -ct \sinh \eta + ut \cosh \eta \quad (7.71)$$

即

$$u = c \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} \quad (7.72)$$

因此我们得到关系

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 - \frac{\sinh^2 \eta}{\cosh^2 \eta} = \frac{1}{\cosh^2 \eta} \quad (7.73)$$

即

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \equiv \gamma, \quad \sinh \eta = \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma \frac{u}{c} \quad (7.74)$$

代进(7.70), 我们得到洛伦兹变换公式

$$ct' = ct\gamma - \gamma x \frac{u}{c^2}, \quad x' = -t\gamma u + x\gamma. \quad (7.75)$$

重新整理一下, 我们得到

$$t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x), \quad (7.76)$$

$$x' = \gamma(x - ut). \quad (7.77)$$

这就是著名的洛伦兹变换。对于完整的四维时空, 如果两个参考系的相对运动沿着 x 轴方向, 则在

$$t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x), \quad (7.78)$$

$$x' = \gamma(x - ut), \quad (7.79)$$

$$y' = y, \quad (7.80)$$

$$z' = z. \quad (7.81)$$

下面我们再介绍洛伦兹变换的另一种求法, 其出发点仍然是间隔的洛伦兹不变性。对于(7.57)中定义的间隔不变性, 我们因子化成

$$(ct + x)(ct - x) = (ct' + x')(ct' - x') \quad (7.82)$$

引入光锥坐标

$$x_{\pm} = (ct \pm x), \quad x'_{\pm} = (ct' \pm x') \quad (7.83)$$

这就是我们在求李纳维谢尔势时用过的光锥坐标。在光锥坐标下, 间隔不变性表示为

$$x_+ x_- = x'_+ x'_- \quad (7.84)$$

很容易发现, 保持间隔不变的线性变换可以写为

$$x'_+ = e^{-\eta} x_+, \quad x'_- = e^{\eta} x_- \quad (7.85)$$

用时间和空间坐标表示出来, 有

$$ct' + x' = cte^{-\eta} + xe^{-\eta}, \quad ct' - x' = cte^{\eta} - xe^{\eta} \quad (7.86)$$

即

$$ct' = ct \cosh \eta - x \sinh \eta, \quad x' = -ct \sinh \eta + x \cosh \eta \quad (7.87)$$

类似的, η 可以从 K' 系的原点的空间坐标与 K 系的空时坐标的关系得到,

$$0 = ct \sinh \eta + ut \cosh \eta, \quad (7.88)$$

即

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{\sinh^2 \eta}{\cosh^2 \eta} \quad (7.89)$$

从而求得

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \equiv \gamma, \quad \sinh \eta = \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma \frac{u}{c} \quad (7.90)$$

文献上将 η 称为快度 (rapidity)。其在相对论性的速度叠加中非常有用。进而得到洛伦兹变换公式则

$$t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x), \quad (7.91)$$

$$x' = \gamma(x - ut), \quad (7.92)$$

$$y' = y, \quad (7.93)$$

$$z' = z. \quad (7.94)$$

与之前的结果一致。

当两个参考系的速度与光速相比较小时,

$$\gamma \simeq 1, \quad \frac{u}{c} \simeq 0, \quad (7.95)$$

这时洛伦兹变换变为

$$t' = t, \quad (7.96)$$

$$x' = x - ut, \quad (7.97)$$

$$y' = y, \quad (7.98)$$

$$z' = z. \quad (7.99)$$

即过渡为伽利略变换。

值得注意的是, 如果我们相继做两次伽利略变换, u_1 和 u_2 , 则最重结果与变换顺序无关。但对于洛伦兹变化, 交换变换的顺序一般会得到不同结果。这可以从洛伦兹变换可以看成 (虚) 的二维空时中的旋转来理解。

7.6 相对论速度叠加

设有 K 和 K' 两个惯性参考系, K' 相对 K 沿 x 轴以速度 u 做匀速运动。一个质点在 K 系中以匀速度 \vec{v} 运动, 求在 K' 系中的运动速度。首先, 设该质点在 K' 系中的坐标为 (x, y, z) , 我们有

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (7.100)$$

由洛伦兹变换公式,

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (7.101)$$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (7.102)$$

$$y' = y, \quad (7.103)$$

$$z' = z \quad (7.104)$$

因此该质点在 K' 系中的速度可以写为

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - udt}{dt - \frac{u}{c^2}dx} = \frac{dx/dt - u}{1 - \frac{u}{c^2}dx/dt} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad (7.105)$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1 - u^2/c^2}}{dt - \frac{u}{c^2}dx} = \frac{dy/dt\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \frac{u}{c^2}dx/dt} = \frac{v_y\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad (7.106)$$

$$v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad (7.107)$$

这就是相对论性的速度叠加法则。我们先考虑一个简单的质点沿 x 轴运动的情况, 这时有

$$v_y = 0, \quad v_z = 0 \quad (7.108)$$

由(7.107)我们得到

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_y = 0, \quad v'_z = 0. \quad (7.109)$$

显然如果 $u \ll c$,

$$v'_x \simeq v_x - u \quad (7.110)$$

与伽利略的速度叠加一致。而当 $v_x = -c$ 时, 即质点在 K 系以光速运动,

$$v'_x = \frac{-c - u}{1 - (-c)u/c^2} = -c \quad (7.111)$$

即质点在 K' 系也以光速运动。这与光速不变原理吻合。

例: 光行差现象 (Aberration)。

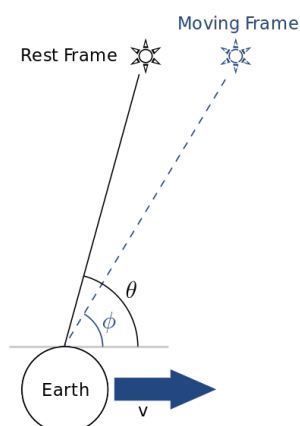


图 7.7: 地球上观察到的远处星体的视觉位置依赖于地球的速度。图中对差别做了夸张处理。图形摘自维基百科。

光行差现象的起源即相对论的速度叠加。设从远处星体的一束光到达地球。先做一个不合理假设，认为地球处在一个静止的 K 系，光线与 x 轴夹角为 θ ，则入射光沿 x 和 y 方向速度为

$$c_x = -c \cos \theta, \quad c_y = -c \sin \theta. \quad (7.112)$$

当然实际上地球所在的是以相对速度 v 运动的 K' 系，由相对论速度叠加原理，在 K' 系中的入射光速度为

$$c'_x = \frac{c_x - v}{1 - c_x v / c^2} = \frac{-c \cos \theta - v}{1 + \cos \theta v / c}, \quad c'_y = \frac{-c \sin \theta}{1 + \cos \theta v / c} \sqrt{1 - v^2 / c^2}, \quad (7.113)$$

即

$$\tan \phi = \frac{c'_y}{c'_x} = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{\cos \theta + v / c}. \quad (7.114)$$

或者有正弦

$$\sin \phi = \frac{|c'_y|}{\sqrt{c'^2_x + c'^2_y}} = \frac{\sin \theta}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta} \sqrt{1 - v^2 / c^2} \quad (7.115)$$

从这个等式可以立刻得到

$$\theta > \phi \quad (7.116)$$

因此这导致一个非常奇特的视觉现象：当宇宙飞船以高速前进时，宇航员看到其前方的星光不是往后方移动，而是往视线前方汇聚。

在低速近似下，这个等式可以写为

$$\sin \theta - \sin \phi \simeq \frac{v}{c} \sin \theta \cos \theta, \quad (7.117)$$

如果引入光行差角 $\Delta\theta = \theta - \phi$ ，则有

$$\Delta\theta \simeq \frac{v}{c} \sin \theta \quad (7.118)$$

7.7 光锥和固有时；相对论效应

假设在一个惯性参考系 K 中有一个运动质点。在一个很短的时刻，该质点的运动可以认为是匀速的，因此我们可以引入一个固联于该质点的坐标系，在这个很短时刻这个坐标系可以认为是惯性系，记为 K' 。在 K 系中的一个很短时刻 dt ，质点所运动距离为 $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ 。那么在质点本身看来，它经过的时间（即所谓的固有时） $dt' \equiv d\tau$ 是多久？对于固联于质点的参考系，显然有 $dx' = dy' = dz' = 0$ 。因此

$$ds'^2 = c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (7.119)$$

即

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = \frac{ds}{c} \quad (7.120)$$

注意到

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2 \quad (7.121)$$

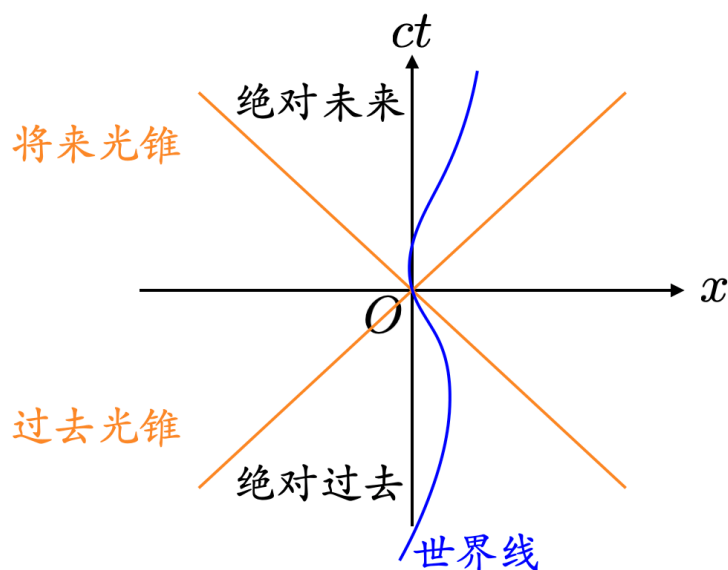


图 7.8: 时空图。

v 是质点的瞬时速度。因此固有时又可以写为

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7.122)$$

对上式积分，我们得到当静止的钟所行走的时间为 $t_2 - t_1$ 时，运动的钟所指示的时间间隔是

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7.123)$$

因此我们看到，对于运动的钟，其经历的时间总是小于等于静止的钟。等号只有在质点以光速运动时取到。这就是著名的**钟慢效应**。一个推论是，如果把间隔 ds 定义为闵可夫斯基时空中的距离的话，那么对于两个类时间隔的事件，连接它们的直线路径给出的是最大距离。（如何证明？）

例：孪生子佯谬。有一对双胞胎甲和乙，甲地球，乙乘宇宙飞船以接近光速进行太空旅行。当乙返回地球的时候，谁的年龄较大？

狭义相对论的另一个著名效应是**尺缩效应**或者**洛伦兹收缩**。设在 K 系内有一根长度为 l_0 ，与 x 轴平行的静止杆。在 K 系内杆的长度可通过某个时刻 t 时杆的两端的坐标差决定，

$$l_0 = x_2 - x_1 \quad (7.124)$$

另外，由于尺子在 K 系中静止， x_2 和 x_1 不随事件改变。在相对 K 系以匀速 u 沿 x 轴运动的 K' 系中的观察者看来，为了测量尺子的长度，我们要在某个时刻 t' **同时** 测量尺子两端的坐标。由洛伦兹变换的逆变换，我们有

$$x_1 = \frac{x'_1 + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (7.125)$$

上式求差得到

$$l_0 = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{l'_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.126)$$

其中 l' 是在 K' 系中测得的尺子长度。我们发现，在运动参考系中测得的尺子长度有一个收缩因子

$$l' = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (7.127)$$

我们把 l_0 称作固有长度。

如果是三维物体，由于横向方向不因运动而改变，我们有体积的收缩公式

$$V' = V_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (7.128)$$

例：火车过隧道佯谬。有一列长为 L 的火车经过一个长为 L 的隧道。站台上的观察者发现，在列车的车尾刚好进入隧道的时刻，隧道两端同时被闪电击中。由于尺缩效应，站台上的观察者认为在闪电时，火车已经完全进入隧道了，车头还没出隧道，因此没有被雷击中。但在火车上的观察者认为，由于尺缩效应，隧道变短了，因此火车一定会有一段在隧道外面，那就一定会被雷击中了，因此产生了佯谬。

解答这个佯谬的关键是同时性的相对性。站台上的观察者认为闪电是同时发生的，但对火车上的观察者并非如此。设站台的观察者所在的参考系为 K 系，隧道和火车轨道均沿 x 轴。火车所在的参考系 K' 以速度 u 沿 x 轴匀速运动。在 $t = t' = 0$ 时刻，火车的车尾刚好进入隧道的左端。设 K 系的坐标原点为隧道左端， K' 系的坐标原点为火车左端（车尾）。在 K 系看来，两次闪电分别对应两个事件，它们的空时坐标为

$$A = (0, 0), \quad B = (0, L) \quad (7.129)$$

在 K' 系看来，相应的坐标为

$$A = (0, 0), \quad B = (t', L') \quad (7.130)$$

由洛伦兹变换可以联系 B 在 K 和 K' 中的坐标，

$$t = 0 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(t' + \frac{ux'}{c^2} \right), \quad (7.131)$$

$$x = L = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} (x' + ut') \quad (7.132)$$

从中可以解出

$$x' = \frac{L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad t' = -\frac{Lu}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.133)$$

我们注意到两件事情，第一，隧道左端的闪电在 K' 系看来发生在 $t' = 0$ 时刻，但隧道右端闪电发生在 $t' = -\frac{Lu}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}} < 0$ 时刻。第二，闪电发生的位置在 $x' = \frac{L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} > L$ ，显然，而火车车头在 $x' = L$ ，因此不会被闪电击中。

7.8 四维矢量、四速度

我们前面看到，在狭义相对论里空间和时间是不可分割的整体。一个事件的空时坐标记为 (ct, x, y, z) ，可以看成四维时空中的一个点。为了方便起见，我们引入四维坐标，

x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (7.134)$$

这个空时坐标点与空时原点的间隔平方为

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (7.135)$$

定义四维不变张量 $\eta_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$,

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1, \quad \eta_{\mu\nu} = 0 \text{ if } \mu \neq \nu \quad (7.136)$$

这个不变张量称为闵氏时空的度规张量。注意它是对称张量, $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$ 。还可以定义度规张量的逆, $\eta^{\mu\nu}$, 满足

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho, \quad \delta_0^0 = \delta_1^1 = \delta_2^2 = \delta_3^3 = 1, \delta_\nu^\mu = 0 \text{ if } \mu \neq \nu \quad (7.137)$$

在闵氏时空恰好有

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.138)$$

即它们的分量刚好相等。利用它间隔平方可以写为

$$s^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \quad (7.139)$$

一般的, 如果有四个量 A^0, A^1, A^2, A^3 , 它们在洛伦兹变换 (设速度沿 x 轴) 下的形式为

$$A'^0 = \frac{A^0 - \frac{u}{c}A^1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad A'^1 = \frac{A^1 - \frac{u}{c}A^0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad A'^2 = A^2, \quad A'^3 = A^3 \quad (7.140)$$

那么我们把 A^μ 称为逆变四维矢量。如果引入洛伦兹变换矩阵,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.141)$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \beta = \frac{u}{c} \quad (7.142)$$

那么有

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \quad (7.143)$$

我们把在洛伦兹变换下满足这个变换规律四个量的称作四维逆变矢量。这就是逆变矢量的定义。显然 x^μ 就是逆变矢量。注意(7.141)是一个常数矩阵。由间隔的洛伦兹不变性, 有

$$s^2 = \eta_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma = \eta_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma \quad (7.144)$$

我们得到洛伦兹变换矩阵满足

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \quad (7.145)$$

这是光速不变性原理的另一数学表述。由于洛伦兹变换是可逆变换，因此洛伦兹矩阵存在逆矩阵，记为 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \equiv \Lambda_\nu{}^\mu$ 。由上式我们由

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\lambda = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\lambda = \eta_{\mu\lambda}\Lambda^\mu{}_\rho = \Lambda_\lambda{}^\sigma\eta_{\rho\sigma} \quad (7.146)$$

或者写成

$$\Lambda_\lambda{}^\sigma = \eta_{\mu\lambda}\Lambda^\mu{}_\rho\eta^{\rho\sigma} \quad (7.147)$$

可以看到，度规张量有升降指标的作用。我们把两个矢量的洛伦兹点积定义为

$$A \cdot B \equiv \eta_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 \quad (7.148)$$

通常还会定义协变矢量，

$$B_\mu = \eta_{\mu\nu}B^\nu \quad (7.149)$$

因此点积又可以写为

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu \quad (7.150)$$

协变矢量在洛伦兹变换下满足

$$B'_\mu = \eta_{\mu\nu}B'^\nu = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho B^\rho = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho\eta^{\rho\lambda}B_\lambda = \Lambda_\mu{}^\lambda B_\lambda \quad (7.151)$$

两个四矢量的点积不带指标，因此是标量，而且是洛伦兹标量，即在洛伦兹变换下不变，

$$A' \cdot B' = A'_\mu B'^\mu = \Lambda_\mu{}^\rho A_\rho \Lambda^\mu{}_\sigma B^\sigma = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\sigma A_\rho B^\sigma = \delta^\rho{}_\sigma A_\rho B^\sigma = A \cdot B \quad (7.152)$$

并不是所有不带指标的量都是洛伦兹标量。例如，坐标时间 t 就不是洛伦兹标量，但固有时 $\tau = s/c$ 是洛伦兹标量。跟间隔的分类类似，我们把四维矢量用自己跟自己的点积分类，

$$A^2 \equiv A_\mu A^\mu = A \cdot A \quad (7.153)$$

- $A^2 > 0$: 类时矢量
- $A^2 = 0$: 类光矢量
- $A^2 < 0$: 类空矢量

如果我们有一个带有两个指标的量 $A^{\mu\nu}$ ，在洛伦兹变换下具有形式

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma A^{\rho\sigma} \quad (7.154)$$

则称之为二阶洛伦兹张量。在后面进入电动力学的相对论性表述时会碰到二阶洛伦兹张量。同理可以定义更高阶洛伦兹张量。

一个常见的四维矢量是四维速度，定义做

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (7.155)$$

利用

$$ds = cdt\sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (7.156)$$

它的分量可以写为

$$u^0 = \frac{cdt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.157)$$

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx^1}{cdt\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.158)$$

$$u^2 = \frac{dx^2}{ds} = \frac{dx^1}{cdt\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{v_y}{c\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.159)$$

$$u^3 = \frac{dx^3}{ds} = \frac{dx^1}{cdt\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{v_z}{c\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.160)$$

可以看出，四维速度是一个无量纲量。注意到

$$u_\mu u^\mu = \frac{dx_\mu dx^\mu}{ds^2} = 1 \quad (7.161)$$

因此四维速度的各个分量并非独立。可以认为四维速度是粒子世界线的且向单位向量。

进一步可以定义四维加速度，

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \frac{du^\mu}{ds} \quad (7.162)$$

注意到

$$0 = \frac{d(u_\mu u^\mu)}{ds} = \frac{du_\mu}{ds} u^\mu + \frac{du^\mu}{ds} u_\mu = 2a_\mu u^\mu = 2a \cdot u \quad (7.163)$$

因此四维加速度和四维速度总是互相正交的。

利用四矢量形式可以很容易得到相对论性的多普勒效应。我们知道，平面电磁波具有振荡因子

$$\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \cos(k \cdot x) \quad (7.164)$$

其中我们定义了四维波矢

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) \quad (7.165)$$

注意这是一个类光矢量

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 = 0 \quad (7.166)$$

显然相位应该是洛伦兹不变量，为了保证这一点， k^μ 必须是洛伦兹四矢量。由四矢量的洛伦兹变换性质知道，对于沿 x 轴做相对运动的两个参考系，

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{u}{c} k^x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.167)$$

$$k'^x = \frac{k^x - \frac{u}{c^2} \omega}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.168)$$

$$k'^y = k^y \quad (7.169)$$

$$k'^z = k^z \quad (7.170)$$

如果 \mathbf{k} 和 x 轴夹角为 θ ，则

$$\omega' = \frac{\omega - \frac{u}{c} \omega \cos \theta}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.171)$$

对于 $\theta \sim 0$ ，即观察者运动方向与电磁波同向，有

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}} < \omega \quad (7.172)$$

这就是相对论性的多普勒红移。对于 $\theta \sim \pi$ ，即观察者运动方向与电磁波反向，有

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} > \omega \quad (7.173)$$

即多普勒蓝移。

7.9 更多的四维矢量：四维电流密度和四维势

事实上，电动力学提供了最好的四维矢量的例子。遵循我们过去的例子，我们寻找不变量，从中推出变量之间的变换关系。在7.5节里，我们用到的不变量是两个事件间的间隔。但事实上电动力学中还存在另一个不变量，这就是一个区域内的电荷在不同惯性参考系中应该是相等的。换句话说，一个运动的电子和一个静止的电子所携带的电荷要求是一样的。换句话说，电荷是洛伦兹标量。设想有两个惯性系 S 和 S' ，其中 S' 以速度 u 相对 S 运动，在 $t = t' = 0$ 时刻两个惯性系的坐标原点重合。在 S 系中的一个区域 V 存在电荷密度分布 $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$ ，但 $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0$ ，对应的在 S' 系中这个区域记为 V' ， V' 以速度 u 相对 S 运动，相应的电荷密度记为 $\rho'(\mathbf{r}')$ 。在这里我们考虑的情形是电荷密度不随时间改变。否则由电荷守恒我们还需考虑流进和流出该区域的电流。则 V 中的电荷 Q 可以等价表示为

$$Q = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = \int_{V'} d^3r' \rho'(\mathbf{r}') \quad (7.174)$$

这里要注意的是， $d^3r \rho(\mathbf{r})$ 必须是在某个相同时刻 t 的积分，而 $d^3r' \rho'(\mathbf{r}')$ 必须是某个相同时刻 t' 的积分。但同时性的相对性告诉我们，不存在两个参考系都承认的相同时刻。在 S 系的积分测度可以记为

$$d^3r = dx dy dz = \frac{dx' + u dt'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} dy' dz' \quad (7.175)$$

如果我们选取 S' 参考系中的某个瞬时 t' 做积分，则 $dt' = 0$ ，因此¹

$$\int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{d^3r'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \rho(\mathbf{r}') = \int_{V'} d^3r' \rho'(\mathbf{r}') \quad (7.176)$$

因此我们得到

$$\rho'(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \rho(\mathbf{r}') \quad (7.177)$$

除此之外，原来在 S 系中静止的电荷，在 S' 系中获得速度 $-u\mathbf{e}_x$ 。因此， S' 系中的具有了非零的电流：

$$J'_x = -\rho' u = -\frac{\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} u \quad (7.178)$$

¹严格来说，在我们将 \mathbf{r} 写为 \mathbf{r}' 函数时，应该还有 t' 的依赖。但由于我们这里考虑的是某个 t' 瞬时的体积分，最后关于 t' 的依赖会消失，因此此处不明显写出。

因此，我们得到当 S 系中只有静止的电荷密度时在 S' 系中的电荷密度和电流密度。下面我们再来看，如果 S 系中只有电流密度而无非零的电荷密度，在 S' 系中会得到什么。

不妨设在 S' 系中有带正电荷的粒子沿 x 方向以速度 $v_+ = v$ 运动，带负电荷的粒子沿 x 方向以速度 $v_- = -v$ 运动。在正电粒子的静止参考系中的电荷密度为 ρ_0 ，在负电荷粒子的静止参考系中电荷密度为 $-\rho_0$ 。因此，在 S 系中的正、负电荷密度为

$$\rho_{\pm} = \pm \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.179)$$

因此，在 S 系中的总电荷密度为

$$\rho_+ + \rho_- = 0 \quad (7.180)$$

但电流密度为

$$J_x = \rho_+ v_+ + \rho_- v_- = 2 \frac{\rho_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.181)$$

在 S' 参考系中，正电荷的密度和负电荷的密度都发生了改变。由速度叠加法则，在 S' 系中，正电荷的运动为

$$v'_+ = \frac{v_+ - u}{1 - \frac{uv_+}{c^2}} = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (7.182)$$

而负电荷的速度为

$$v'_- = \frac{v_- - u}{1 - \frac{uv_-}{c^2}} = -\frac{v + u}{1 + \frac{uv}{c^2}} \quad (7.183)$$

因此，在 S' 系中的正电荷密度为

$$\begin{aligned} \rho'_+ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v_+^2/c^2}} \\ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v-u}{1 - \frac{uv}{c^2}}\right)^2/c^2}} \\ &= \frac{\rho_0 \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - u^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (7.184)$$

同理， S' 系中的负电荷密度变为

$$\rho'_- = -\frac{\rho_0 \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - u^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.185)$$

两式相减得到 S' 系中的总电荷密度为

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = -\frac{2\rho_0 \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{J_x \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.186)$$

因此我们看到一个参考系中的电流密度会导致另一参考系的电荷密度。而 S' 系中的电流密度为

$$J'_x = \rho'_+ v'_+ + \rho'_- v'_- = \frac{J_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.187)$$

综合(7.177), (7.178), (7.186), (7.187), 我们得到在 S 系中既有电荷密度也有电流密度

的情况下， S' 系的电流和电荷密度为

$$\begin{aligned}\rho' &= \frac{\rho - \frac{u}{c^2} J_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ J'_x &= \frac{J_x - u\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ J'_y &= J_y \\ J'_z &= J_z\end{aligned}\quad (7.188)$$

注意到，(7.188)的变换规律与时空坐标的变换规律一致。因此我们应将电荷密度和电流密度看成一个四维矢量，记作

$$J^\mu = (c\rho, J_x, J_y, J_z), \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (7.189)$$

定义四维的逆变导数

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z \right), \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (7.190)$$

对应的协变四维导数为

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z \right), \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (7.191)$$

此时电荷守恒定律可以写为

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (7.192)$$

两个四维导数的缩并可以写为

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 = -\square \quad (7.193)$$

刚好是负的达朗伯算符。容易验证达朗伯算符在洛伦兹变换下是不变的。还记得在(5.56)中给出了洛伦兹规范下的麦克斯韦方程，

$$\square A^\mu = -\mu_0 J^\mu \quad (7.194)$$

其中 $A^\mu = (\Phi/c, A_x, A_y, A_z)$ 。因此麦克斯韦方程又能写为

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 J^\mu \quad (7.195)$$

等式左右两边必须具有相同的洛伦兹变换性质。由于达朗伯算符是洛伦兹不变的，我们立刻得到 A^μ 应具有与 J^μ 一样的洛伦兹变换性质，因此 A^μ 也是一个四维逆变矢量！换句话说，我们得到标势和矢势在洛伦兹变换下的性质：

$$\begin{aligned}\Phi' &= \frac{\Phi - v A_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ A'_x &= \frac{A_x - \frac{u}{c^2} \Phi}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ A'_y &= A_y \\ A'_z &= A_z\end{aligned}\quad (7.196)$$

reference