有于 C_3 和 $-C_1$ 都是绕 z_0 的正定向围道，柯西定理的围道积分独立性告诉我们对于带形区域中的解析函数有

$$\int_C = \int_{C_3} = \int_{-C_1} \tag{4.72}$$

因此

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C f(w)(w-z_0)^{n-1}dw\right]\frac{1}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n . \tag{4.73}$$

此即我们要证明的定理。显然，一旦指定了洛朗级数的展开点和带形区域，其系数就是唯一确定的。在实际计算问题中，除了直接应用洛朗级数系数的积分表示外，通常有更简便的代数技巧能直接得到系数。

例 4.13 计算

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)}$$

在 $z_0 = 1$ 处的洛朗展开，展开区域分别为环域 $0 < |z-1| < 3$ 和 $3 < |z-1|$。

例 4.14 计算

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

在 $z_0 = 0$ 处的洛朗展开。

例 4.15 计算

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2}x(z-1/z)\right)$$

在收敛环上的洛朗展开。

✍ **练习 4.9** 求下列函数在对应环域上的洛朗展开：

- $z/(z+2)$，$2 < |z|$
- $\sin(1/z)$，$0 < |z|$
- $\cos(1/z)$，$0 < |z|$
- $1/(z-3)$，$3 < |z|$

✍ **练习 4.10** 令 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$，求 f 在下述环域上的洛朗展开：

- $|z| < 1$
- $1 < |z| < 2$
- $2 < |z|$

✍ **练习 4.11** 证明 $1/(e^z-1)$ 在原点处的洛朗展开具有形式

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1}$$

其中 B_k 称作伯努利数。求出 B_1, B_2, B_3。

4.5 奇点的分类

洛朗展开适用于孤立奇点或非奇异点处的展开。为此我们需要定义何为孤立奇点。

定义 4.1. 孤立起点

z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则一定有 z_0 的某个充分小邻域内使得 z_0 是其中的唯一奇点。反之则称为非孤立奇点。

如果 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则一定存在某个 r，使得 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < r$ 上解析，并且有洛朗展开

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n . \tag{4.74}$$

此时奇点 z_0 又可以分为如下几类：

- **可去奇点**：如果所有 $b_n = 0$，则 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点。另外还有一些等价的可去奇点表述
  - $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限。
  - $\lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$。
  - 存在一个邻域 $D_\varepsilon(z_0)$，使得 $f(z)$ 在 $D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$ 有界。
- **极点**：如果只有有限个 b_n 不为零，则 z_0 是 $f(z)$ 的极点。如果 $b_n \neq 0, b_m = 0, \forall m > n$，则 z_0 是 n 阶极点。一阶极点又称为单极点。另外还有一些等价的 m 阶极点判断方法：
  - $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$，$g$ 在 z_0 解析，且 $g(z_0) \neq 0$。
  - $\frac{1}{f(z)}$ 在 z_0 是 m 阶零点。
  - $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^{m+1} f(z) = 0$ 但 $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$
- **本性奇点**：如果有无穷多个 b_n 不为零，则 z_0 是本性奇点。另外一个判断方法是，如果一个奇点既非可去奇点也非极点，则肯定是本性奇点。
- **留数**：b_1（或 a_{-1}）称作 $f(z)$ 在 z_0 的留数，记作 $\mathrm{res} f(z_0)$。

关于本性奇点，一个重要的定理是

定理 4.7. Casorati-魏尔斯特拉斯定理

设 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点，令 D 是 z_0 的某个邻域，使得 $f(z)$ 在 $U = D\backslash\{z_0\}$ 上解析。则 $f(z)$ 在 U 上的取值是在 $\mathbb{C}$ 中处处稠密的，即对于 $\mathbb{C}$ 中任何复数，$f(z)$ 在 U 上都可无限逼近。

证明：用反证法，设存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 及 $s > 0$，使得

$$|f(z) - \alpha| > s , \qquad \forall z \in U$$

定义函数

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha} , \tag{4.75}$$

显然 $g(z)$ 在 U 上是解析函数且有界，因此 z_0 最多是 $g(z)$ 的可去奇点，因此可将 $g(z)$ 延拓成 D 上的解析函数。从而 z_0 至多是 $\frac{1}{g(z)} = f(z) - \alpha$ 的极点。但这与 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点矛盾，得证。

例 4.16 判断下列函数在 $z_0 = 0$ 处的奇点性质。对于孤立奇点，其留数是多少?

- $f(z) = \frac{1}{z^5}$

- $f(z) = \frac{\sin z}{z}$
- $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$
- $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$
- $f(z) = \ln z$
- $f(z) = e^{1/z}$

练习 4.12 ∞ 是整函数 $f(z)$ 的可去奇点当且仅当 f 是常函数。

4.6 解析延拓

不管是泰勒级数还是洛朗级数，它们一个共同的特征是在收敛圆或收敛环上必定存在至少一个奇点。但奇点并不一定在收敛圆或收敛换上处处存在。一个自然的问题是，如果在收敛圆或收敛环上存在解析邻域，能否在这个解析邻域处进一步进行泰勒展开从而延拓该函数的定义域？这就是我们这一节要研究的问题。

定理 4.8. 解析延拓

如果 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的某个连通区域 D 上解析。如果 V 是 $\mathbb{C}$ 上包含 D 的连通区域，$V \supset D$，$F(z)$ 是定义在 V 上的解析函数，且当 $z \in D$ 时，$F(z) = f(z)$，则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 V 上的解析延拓。

如果一个函数存在解析延拓，则这个解析延拓是唯一的。可以用反证法证明这一点。假设 $f(z)$ 定义在 D 上，在 $V \supset D$ 上 $f(z)$ 有两个不同的解析延拓 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$。定义一个新的函数 $g(z) = F_1(z) - F_2(z)$，则 g 在 V 上解析，且在 D 上恒为零。则有解析函数的零点孤立性定理可知，g 在 V 上也是零函数，从而 $F_1 = F_2$。得证。

我们以维基百科中的一个例子来看解析延拓是如何进行的。考虑如下的幂级数

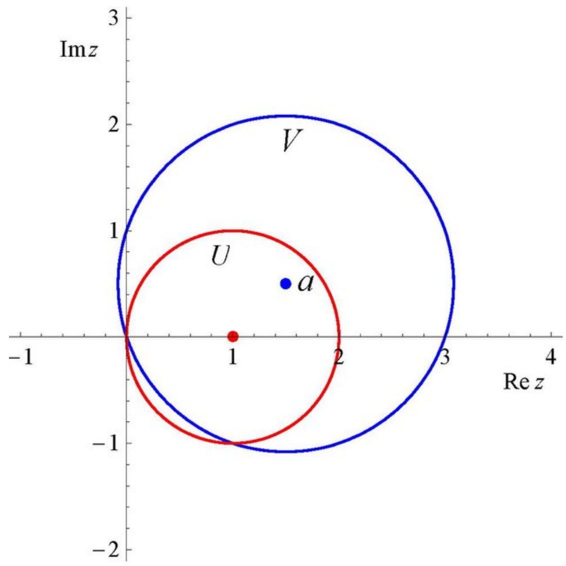

图 4.2: 解析延拓。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \,. \tag{4.76}$$

这个函数在 $U=\{|z-1|<1\}$ 上一致绝对收敛，收敛半径为 $R=1$。事实上，可以看出这个幂级数是

$$g(z)=\frac{1}{z} \tag{4.77}$$

在 $z=1$ 处的泰勒展开。显然 $g(z)$ 是在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上解析的。但假设我们不知道 $g(z)$ 的存在，我们希望从 $f(z)$ 出发将其延拓到复平面的其余区域。为此我们选取 U 上一点 a，并考虑 $f(z)$ 在 a 点处的幂级数展开，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\,. \tag{4.78}$$

我们的目标是计算新的展开系数 a_n，并求出其收敛区域 V。如果新的收敛区域不完全包含在 U 内，则我们得到了 $f(z)$ 在 $V\cup U$ 上的解析延拓。注意到 a 离 U 的边界 ∂U 的最近距离为 $\rho=1-|a-1|$。我们可以选取一个 $0<r<\rho$，并以 r 为半径，a 为圆心做一圆 $|w-a|=r$。显然这个圆完全包含在 U 内。利用柯西积分公式，我们可以求得 $f(z)$ 在 a 点的泰勒展开系数为

$$\begin{aligned}
c_n&=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(w-1)^k}{(w-a)^{n+1}}dw\\
&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{|w-a|=r}\frac{(a+re^{i\phi}-1)^k rie^{i\phi}}{(re^{i\phi})^{n+1}}d\phi\\
&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{|w-a|=r}\frac{\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(a-1)^{k-m}(re^{i\phi})^m rie^{i\phi}}{(re^{i\phi})^{n+1}}d\phi\\
&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{|w-a|=r}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(a-1)^{k-m}(re^{i\phi})^{m-n}d\phi\\
&=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\binom{k}{n}(a-1)^{k-n}\\
&=(-1)^n a^{-1-n}\,.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

最后一步可通过符号计算软件如 Mathematica 求得。从而 $f(z)$ 在 a 处的幂级数展开可以写为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{-1-n}(z-a)^n \tag{4.80}$$

这个幂级数的收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=|a|\,, \tag{4.81}$$

收敛区域为 $V=|z-a|<a$。如果我们选取 $a\in U$ 且 $|a|>1$，显然 V 不包含在 U 内，因此我们得到了原幂级数在 U 外的解析延拓。

尽管通过幂级数的方法可以实现解析延拓，但在实际问题中通常有更简便的方法。我们以伽马函数来举例。伽马函数是最常见的特殊函数之一，在概率论，数论，几何，物

理等都有广阔应用。伽马函数由下述积分表示定义：

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\,. \tag{4.82}$$

首先我们证明这个积分定义在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时收敛。为此，注意到

$$\left|\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\right|\le\int_0^{\infty}|e^{-t}t^{z-1}|dt=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)-1}dt\,. \tag{4.83}$$

而

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)-1}dt \tag{4.84}$$

对于 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时收敛，这是因为对于积分的上限，e^{-t} 的衰减总是比 $t^{\mathrm{Re}(z)-1}$ 的增长快很多，因此是收敛的，而对于积分的下限，$e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)-1}\ge t^{\mathrm{Re}(z)-1}$，而后者是收敛的。另外，在区域 $\mathrm{Re}(z)>0$ 内，由于积分的绝对收敛性，积分号和求导可交换，因此

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz}=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\ln t\,dt \tag{4.85}$$

而右边也是一个在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时绝对收敛的积分，因此我们得到 $\Gamma(z)$ 在右半平面解析。我们的目标是将之解析延拓到整个复平面（除了奇点外）。我们注意到

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1)=&\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z+1-1}dt\\ =&-e^{-t}t^{z}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-t}zt^{z-1}dt\\ =&\,z\Gamma(z)\end{aligned} \tag{4.86}$$

这给出了 $\Gamma(z)$ 的一个函数方程。对于正整数值，显然有

$$\begin{aligned}&\Gamma(1)=1\,,\\ &\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1\,,\\ &\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\,,\\ &\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot2\cdot1\,,\\ &\Gamma(n)=(n-1)!\,.\end{aligned} \tag{4.87}$$

因此伽马函数在右半平面可以看成阶乘函数的解析延拓。为了将伽马函数延拓到左半平面，我们注意到

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(1+z)}{z} \tag{4.88}$$

我们将这个公式看成伽马函数在 $D_1=\{\mathrm{Re}(z)>-1\}$ 的**定义**。显然等式右边在 $D_1\backslash\{0\}$ 是解析的，从而我们将 $\Gamma(z)$ 解析延拓到了 $D_1\backslash\{0\}$。因此 0 是 $\Gamma(z)$ 的单极点。事实上这个过程可以一直进行下去，对于任意正整数 m，我们可以定义

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(m+z)}{z(z+1)\cdots(z+m-1)}\,, \tag{4.89}$$

这个函数在 $D_m=\{\mathrm{Re}>-m\}$ 上除了负整数点和 0 外是解析的。由于这个函数在 D_0 上与原始积分定义一致，因此由解析延拓的唯一性可知这个结果就是我们想要的解析延拓。因此我们找到了将 $\Gamma(z)$ 延拓到整个复平面除掉 0 和负整数点。

4.7 黎曼的 ζ 函数

学到复变函数不能不提黎曼的 ζ 函数。它定义作

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,, \qquad s = \sigma + it\,. \tag{4.90}$$

我们前面讲过这个无穷级数在 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 时时绝对收敛的。一个重要问题是如何将其解析延拓到整个复平面上。这个问题留作大作业，我们这里仅仅讨论黎曼 ζ 函数和素数的一个很小的联系。感兴趣的读者还可以取看看如何通过 ζ 函数证明素数分布定理。ζ 函数和素数的关系源自欧拉发现的如下无穷乘积表示：

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\text{primes}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\,, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1\,. \tag{4.91}$$

为了看出这一点，我们对右边作几何级数展开，

$$\prod_{p\in\text{primes}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p\in\text{primes}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,. \tag{4.92}$$

其中最后一个等式用了素数分解的唯一性。从这个结果我们立刻得到素数有无穷多个的证明：假如素数只有有限个，则

$$\prod_{p\in\text{primes}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{4.93}$$

必然是一个有理数。但我们知道

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \tag{4.94}$$

是无理数。因此素数必有无穷多个。

第 5 章 留数定理及其在定积分中的应用

5.1 留数定理

上一章我们介绍了解析函数在孤立奇点 z_0 附近可以作洛朗级数展开:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n+1}\,, \tag{5.1}$$

其中上述洛朗展开的收敛区域是 $0<|z-z_0|<r_1$，其中 $0<r_1\le\infty$。

定义 5.1. 留数

$f(z)$ 在 z_0 处的留数（residue）定义为 b_1，记为

$$\mathrm{Res}(f,z_0):=b_1\,. \tag{5.2}$$

♣

注意在留数的定义中要求洛朗展开的区域必须是 $0<|z-z_0|<r_1$，即紧邻孤立奇点的环域上的洛朗展开。

例 5.1 求

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$$

在 $z_0=0$ 处的留数。

定理 5.1. 留数定理

设 D 是 $\mathbb{C}$ 上的单连通区域，$f(z)$ 是定义在 $D\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 上的解析函数，即 $\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $f(z)$ 在 D 上的孤立奇点。则对于 D 上的任意不经过奇点的简单封闭正定向围道 C，有

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum\mathrm{Res}(f,a_k)\,. \tag{5.3}$$

其中求和遍历在 C 所包裹的区域内的奇点 a_k。5.1。

♡

证明：绕 C 包裹区域中的奇点 a_k 作一小正定向圆围道 C_k，使得 a_k 是 C_k 包裹的唯一奇点。则由复连通区域上的柯西定理可知，

$$\int_{C-C_1-C_2-\cdots-C_m}f(z)dz=0\,, \tag{5.4}$$

其中 m 是 C 包裹奇点的个数。有

$$\int_{C-C_1-C_2-\cdots-C_k}f(z)dz=\int_C f(z)dz-\int_{C_1}f(z)dz-\cdots-\int_{C_m}$$

即

$$\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{m}\int_{C_k}f(z)dz\,. \tag{5.5}$$

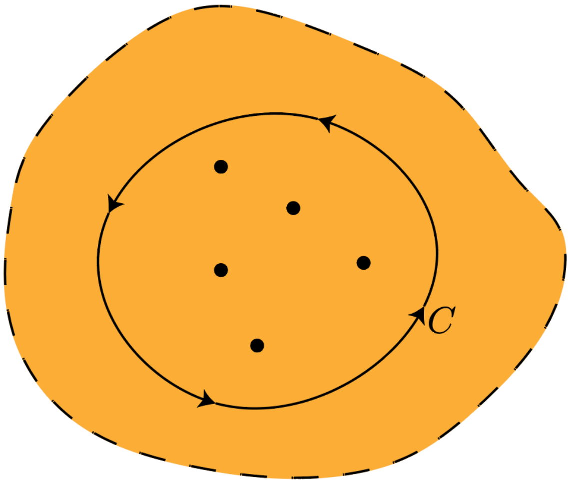

图 5.1: 留数定理

由于 C_k 仅包含孤立奇点 a_k，我们可以对 $f(z)$ 在 a_k 处作洛朗展开，

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{k,n}}{(z-a_k)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{k,n}(z-a_k)^n\,. \tag{5.6}$$

因此有

$$\int_{C_k}f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{C_k}\frac{b_{k,n}}{(z-a_k)^n}dz+\sum_{n=0}^{\infty}a_{k,n}(z-a_k)^n dz=b_{k,1}=\mathrm{Res}(f,a_k)\,. \tag{5.7}$$

得证。

通过留数定理计算围道积分的问题就转化为了更简单的计算留数的问题。

- 如果 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}(f,z_0)=0$。
- 如果 z_0 是 $f(z)$ 的单极点，则计算其留数的一个有用公式是

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)\,. \tag{5.8}$$

例 5.2 求

$$f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)(z-2)}$$

在单极点处的留数。

对于单极点，另一个有用的公式如下。如果 z_0 是 $g(z)$ 的单零点，则 z_0 是 $1/g(z)$ 的单极点，其留数为

$$\mathrm{Res}(1/g,z_0)=\frac{1}{g'(z_0)}\,. \tag{5.9}$$

为了证明这一点，注意到由于 z_0 是 $g(z)$ 的单零点，因此

$$g(z)=a_1(z-z_0)+a_2(z-z_2)+\cdots \tag{5.10}$$

且 $a_1=g'(z_0)\neq 0$。因此

$$\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{a_1(1-z)\left[1+a_2(1-z)+\cdots\right]}=\frac{1}{a_1(1-z)}+\text{正规部分} \tag{5.11}$$

得证。

例 5.3 求

$$f(z)=\frac{1}{\sin z}$$

的所有单极点并求其留数。

例 5.4 求

$$f(z)=\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$$

的所有单极点并求其留数。

- 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $k>1$ 阶极点，则

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]. \tag{5.12}$$

为了证明这一点，注意到

$$f(z)=\frac{b_k}{(z-z_0)^k}+\frac{b_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\cdots+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\text{正规部分}$$

$$(z-z_0)^k f(z)=b_k+b_{k-1}(z-z_0)+\cdots+b_1(z-z_0)^{k-1}+\text{正规部分} \tag{5.13}$$

因此得证。

例 5.5 求

$$f(z)=\frac{z+2i}{z^5+4z^3}$$

的极点和留数。

但更多时候，对于高阶极点直接计算洛朗展开是求留数的更简便方法。

例 5.6 求

$$f(z)=\frac{\sinh z}{z^5}$$

在 $z_0=0$ 的留数。

例 5.7 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz$$

例 5.8 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=1} z^2\sin(1/z)dz\,.$$

例 5.9 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{az^2+2z+a}dz\,,\qquad (0<a<1)$$

另一个有用的概念是无穷远处的留数。设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上除了有限个奇点 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 外是解析的。C 是包含所有这些奇点的一个正定向大圆，则按留数定理

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k)\,. \tag{5.14}$$

我们定义 $f(z)$ 在无穷远处的留数为

$$\mathrm{Res}(f,\infty):=-\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz\,. \tag{5.15}$$

因此无穷远处的留数与有限远处的留数有关系

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0\,. \tag{5.16}$$

为了使得这个概念有用，我们必须有直接求无穷远处留数的方法，否则就只是一个概念的替换而已。我们有如下定理

定理 5.2. 无穷远处留数

如果定义在 $\mathbb{C}$ 上的解析函数只有有限个奇点，则

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\mathrm{Res}\left(\frac{1}{w^2} f(1/w), 0\right) \tag{5.17}$$

♡

证明：我们从定义出发，令 $w = 1/z$，则

$$\mathrm{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{C}} f(1/w)\frac{dw}{-w^2}\,. \tag{5.18}$$

其中 $\tilde{C}$ 在 w 平面成为了反定向的围道，$f(1/w)$ 的所有的奇点都在 C 外，唯一的奇点来自因子 $1/w^2$。因此我们有

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{C}} f(1/w)\frac{dw}{-w^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\tilde{C}} f(1/w)\frac{dw}{w^2} = -\mathrm{Res}\left(\frac{1}{w^2} f(1/w), 0\right) \tag{5.19}$$

其中 $-\tilde{C}$ 具有正定向因而可用留数定理。证毕。

例 5.10 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)}dz\,.$$

✍ **练习 5.1** 求出下列函数在延展复平面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的所有奇点和留数。

1. $f(z) = 1/(z^3 - z^5)$
2. $f(z) = z^{2n}/(1+z)^n$，$n \in \mathbb{N}$。
3. $f(z) = (z^2 + z - 1)/(z^2(z-1))$
4. $f(z) = e^z/(z^2(z^2+9))$

✍ **练习 5.2** 求出下列函数在复平面 $\mathbb{C}$ 上的所有奇点，判断其是本性奇点还是极点，求出其极点阶数和留数。

1. $f(z) = \frac{\sin z - z}{z \sinh z}$
2. $f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$
3. $f(z) = \frac{\cos(1/z)}{\sin z}$
4. $f(z) = \frac{1}{e^{2z}+e^z+1}$

✍ **练习 5.3** 用留数定理计算积分 (如不作说明围道均为正定向，下同)

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2+4}{(z-i)(z+i)}dz$$

✍ **练习 5.4** 用留数定理计算积分

$$\int_{|z-i|=3} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(z+i)^n(n+6)!}dz$$

✍ **练习 5.5** 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=2} z\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz$$

✍ **练习 5.6** 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=a} \frac{dz}{\bar{z} - b},$$

分别讨论 $a > |b|$ 和 $|b| > a > 0$ 的情形。

✍ **练习 5.7** 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2(z^2+9)} dz$$