Exercises: Three

2.4 Solution: 设实参数 t ，该积分的路径为 $z=t+it$ ，所以有

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}dz=\frac{1}{1+i}\int_0^1\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{1+i}\left.\frac{1}{t}\right|_0^1=\infty\ .$$

2.5 Proof:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\frac{1}{z-a}-\frac{1}{a-b}\frac{1}{z-b}\ , \tag{1}$$

根据复连通区域上的柯西定理，我们可以将积分回路从 $|z|=r$ 变为以 a 为圆心、 ρ 为半径的圆周 C ，即 $z=a+\rho e^{i\varphi}$ ，其中 $\rho<|a-b|$ 。 Eq. (1) 的第二项在 C 所围区域上是解析的，积分值为 0 ，所以要求的积分变为

$$\int_C\frac{1}{z-a}dz=\frac{1}{a-b}\int_0^{2\pi}id\varphi=\frac{2\pi i}{a-b}\ .$$

还有一种理解方法： Eq. (1) 中的 $1/(z-a)$, $1/(z-b)$ 的原函数分别为 $\ln(z-a)$, $\ln(z-b)$ ，回路 $|z|=r$ 包含了 $\ln(z-a)$的支点 a ，所以对于 $1/(z-a)$ 的积分值为 $2\pi i$ ，而 $1/(z-b)$ 的积分值为 0 。 □

2.6 Solution:

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{-2i}\int_{|z|=2}\left(\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-i}\right)dz=\frac{1}{-2i}\left(2\pi i-2\pi i\right)=0\ .$$

2.7 Solution:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_{|z|=r}\frac{-irdz}{z|z-a|^2}=\int_{|z|=r}\frac{-irdz}{z(z-a)(r^2/z-\bar{a})}\\&=\frac{ir}{|a|^2-r^2}\int_{|z|=r}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-r^2/\bar{a}}\right)dz\ .\end{aligned} \tag{2}$$

当 $r > |a|$ 时， $|a| < r < \frac{r^2}{|\bar{a}|}$ ，所以，

$$\text{Eq. (2)} = \frac{ir}{|a|^2 - r^2} \times 2\pi i = \frac{2\pi r}{r^2 - |a|^2} \ .$$

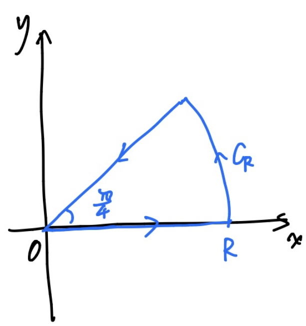
当 $r < |a|$ 时， $\frac{r^2}{|\bar{a}|} < r < |a|$ ，所以，

$$\text{Eq. (2)} = \frac{ir}{|a|^2 - r^2} \times (-2\pi i) = -\frac{2\pi r}{r^2 - |a|^2} \ .$$

综上，

$$\text{原式} = \frac{2\pi r}{|r^2 - |a|^2|} \ .$$

2.8 Solution: 设复变函数 $f(z) = e^{iz^2}$ ，根据单连通区域上的柯西定理， $f(z)$ 在如图扇形回路



上的积分为零，这里的扇形半径 R 趋于 ∞ 。所以，

$$0 = \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + \int_R^0 e^{i(\rho e^{i\pi/4})^2} d(\rho e^{i\pi/4}) \ , \tag{3}$$

其中，

$$\begin{aligned} \int_{C_R} e^{iz^2} dz &= \int_{C_R} \frac{1}{2iz} d(e^{iz^2}) \\ &= \frac{e^{iz^2}}{2iz}\bigg|_R^{Re^{i\pi/4}} + \int_{C_R} \frac{e^{iz^2}}{2iz^2} dz \ , \end{aligned} \tag{4}$$

其中 Eq. (4) 第一项取模，等于

$$\left|\frac{e^{iR^2 i}}{2iRe^{i\pi/4}} - \frac{e^{iR^2}}{2iR}\right| \le \left|\frac{e^{-R^2}}{2iRe^{i\pi/4}}\right| + \left|\frac{e^{iR^2}}{2iR}\right| = 0$$

（这里用了 $R \to \infty$ 条件），所以 Eq. (4) 的第一项等于 0 。而 Eq. (4) 第二项取模，等于

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz^2}}{2iz^2} dz\right| = \left|\int_{C_R} \frac{e^{iR^2 e^{i2\phi}}}{2iR^2 e^{i2\phi}} Re^{i\phi} i d\phi\right| \le \int_{C_R} \frac{e^{-R^2 \sin(2\phi)}}{2R} d\phi \le \frac{1}{2R}\frac{\pi}{4} = 0$$

（最后一个等号也用了 $R \to \infty$ 条件）。

Eq. (3) 的第三项等于

$$\begin{aligned}\int_R^0 e^{-\rho^2} e^{i\pi/4} d\rho &= -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho = -e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho \\ &= -e^{i\pi/4} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}(1+i)\ .\end{aligned}$$

所以，Eq. (3) 的第一项

$$\int_0^R e^{ix^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}(1+i)\ ,$$

对它取虚部和实部，则分别得到

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\ , \qquad \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\ .$$

2.9 Solution: 根据柯西公式：

a) 当 $m \ge 0,\ n \ge 0$ 时，被积函数在全平面解析，所以该围道积分为零。

b) 当 $m \ge 0,\ n = -1$ 时，积分等于

$$\int_{|z|=2} \frac{(1-z)^m}{z} dz = 2\pi i\ .$$

c) 当 $m \ge 0,\ n < -1$ 时，积分等于

$$\int_{|z|=2} \frac{(1-z)^m}{z^{-n}} dz = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}\ \frac{d^{(-n-1)}}{dz^{(-n-1)}}(1-z)^m\bigg|_{z=0}\ ,$$

若 $m \geq -n-1$ 则等于 $(-1)^{(-n-1)} \cdot 2\pi i \cdot C_m^{(-n-1)}$ （这里的 C 表示组合数），若 $0 \leq m < -n-1$ 则等于 0 。

d) 当 $n \geq 0,\ m=-1$ 时，积分等于 $-2\pi i$ 。

e) 当 $n \geq 0,\ m<-1$ 时，积分等于

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(-1)^{-m}(z-1)^{-m}} dz = (-1)^m \frac{2\pi i}{(-m-1)!} \left(\frac{d^{(-m-1)}}{dz^{(-m-1)}} z^n \right)_{z=1} ,$$

若 $n \geq -m-1$ 则等于 $(-1)^m \cdot 2\pi i \cdot C_n^{(-m-1)}$ ，若 $0 \leq n < -m-1$ 则等于 0 。

f) 当 $m<0,\ n<0$ 时，根据复连通区域上的柯西定理，该积分等于沿以 $z=0$ 为圆心、 ε (ε 很小) 为半径的圆周 C_1 的积分，加上以 $z=1$ 为圆心、 ε (ε 很小) 为半径的圆周 C_2 的积分（方向均为逆时针）：

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz &= \int_{C_1} \frac{(1-z)^m}{z^{-n}} dz + \int_{C_2} \frac{z^n}{(1-z)^{-m}} dz \\
&= \frac{2\pi i}{(-n-1)!} \left. \frac{d^{(-n-1)}}{dz^{(-n-1)}} (1-z)^m \right|_{z=0} + (-1)^m \frac{2\pi i}{(-m-1)!} \left. \frac{d^{(-m-1)}}{dz^{(-m-1)}} z^n \right|_{z=1} \\
&= \frac{2\pi i}{(-n-1)!} (-1)^{(-n-1)} \cdot m(m-1) \cdots (m+n+2) \\
&+ \frac{2\pi i}{(-m-1)!} (-1)^m \cdot n(n-1) \cdots (n+m+2) \\
&= 2\pi i \cdot C_{-m-n-2}^{-n-1} + 2\pi i \cdot (-1) \cdot C_{-m-n-2}^{-m-1} \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

2.10 Solution: 原式等于

$$
\begin{aligned}
\int_{|z|=r} \frac{\frac{-ir}{z}dz}{|z-a|^4} &= \int_{|z|=r} \frac{-irdz}{z(z-a)^2(\frac{r^2}{z}-\bar{a})^2} \\
&= \int_{|z|=r} \frac{-irzdz}{\bar{a}^2(z-a)^2(z-\frac{r^2}{\bar{a}})^2} \\
&= \int_{|z|=r} \frac{-ir}{\bar{a}(r^2-|a|^2)^3}\left(\frac{(|a|^2+r^2)\bar{a}z-2|a|^4}{(z-a)^2} - \frac{(|a|^2+r^2)\bar{a}z-2r^4}{(z-\frac{r^2}{\bar{a}})^2}\right)dz \\
&= \frac{-ir}{\bar{a}(r^2-|a|^2)^3}\begin{cases} -2\pi i(|a|^2+r^2)\bar{a}, & \text{if } r<|a| \\ 2\pi i(|a|^2+r^2)\bar{a}, & \text{if } r>|a| \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{-2\pi r(|a|^2+r^2)}{(r^2-|a|^2)^3}, & \text{if } r<|a| \\ \\ \frac{2\pi r(|a|^2+r^2)}{(r^2-|a|^2)^3}, & \text{if } r>|a| \end{cases}
\end{aligned}
$$

2.11 Proof: (a)

$$
\mathrm{Re}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z} = \frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\varphi}-z|^2} \ .
$$

选择积分围道为以原点为圆心、 R 为半径的圆周，即设积分变量为 $Re^{i\varphi}$ ，柯西积分公式可以写成：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}-z}Re^{i\varphi}id\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\varphi}-z|^2}d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{|z|^2-\bar{z}Re^{i\varphi}}{|Re^{i\varphi}-z|^2}d\varphi, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

其中最后一行式子的第二部分等于

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{\bar{z}(z-Re^{i\varphi})}{(z-Re^{i\varphi})(\bar{z}-Re^{-i\varphi})}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}-\frac{R^2}{\bar{z}}}d\varphi \ ,
$$

因为 $|z|<R$ ，上式的被积函数在积分围道围成的区域及边界上解析，所以积分为零。所以， Eq. (5) 即为

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\varphi}-z|^2}d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right)d\varphi \ .
\end{aligned}
$$

(b)

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\theta}+r}{Re^{i\theta}-r}\right)=\mathrm{Re}\frac{(Re^{i\theta}+r)(Re^{-i\theta}-r)}{(Re^{i\theta}-r)(Re^{-i\theta}-r)}=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\ .$$

□

2.12 Proof: 设 $u(r,\varphi)$ 为某个单位圆盘上解析的复变函数 $f(r,\varphi)$ 的实部（设虚部同理）。由2.11题的 (a) 可得， $r<1$ 时，

$$\begin{aligned}u(r,\theta)=\mathrm{Re}f(r,\theta)&=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(1,\varphi)\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}\right)d\varphi\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(1,\varphi)\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}+r}{e^{i(\varphi-\theta)}-r}\right)d\varphi\ ,\end{aligned}$$

根据2.11题的 (b) ，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(\varphi-\theta)}+r}{e^{i(\varphi-\theta)}-r}\right)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}=P_r(\theta-\varphi)\ ,$$

所以

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-\varphi)u(1,\varphi)d\varphi$$

得证。 □