Six

5.8 Solution: 设 $z = e^{it}$.

$$
\begin{aligned}
I &= \mathrm{Re}\int_0^{2\pi}(1+2\cos t)^n e^{int}dt \\
&= \mathrm{Re}\int_{|z|=1}(1+z+z^{-1})^n z^n \frac{dz}{iz} \\
&= \mathrm{Re}\left\{2\pi\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{(1+z+z^2)^n}{z},0\right)\right\} \\
&= 2\pi\ .
\end{aligned}
$$

5.9 Solution:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(5-3\cdot\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)} \\
&= \int_{|z|=1}\frac{-2dz}{(3z-i)(z-3i)} \\
&= 2\pi i\times\frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}
$$

5.10 Solution: 复变函数 $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ 在上半平面有单极点 $z=i,2i$ ，且根据大圆弧引理， $f(z)$ 在上半平面的大圆弧上的积分为 0 。所以，

$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,2i)\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{6i}+\frac{-1}{12i}\right) \\
&= \frac{\pi}{6}\ .
\end{aligned}
$$

5.11 Solution:

$$I = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2+1)^2}e^{ix}dx\ ,$$

设

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}e^{iz}\ ,$$

且根据约当引理， $f(z)$ 在上半平面的大圆弧上的积分为 0 ， $z=i$ 是 $f(z)$ 在上半平面的二阶极点，所以，

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{Im}\left\{2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,i)\right\} = \mathrm{Im}\left\{2\pi i \times \frac{1}{4e}\right\} \\ &= \frac{\pi}{2e}\ . \end{aligned}$$

5.12 Solution: 下面分 $p=0,\ p=1,\ p\neq 0且p\neq 1$ 三种情况讨论：

当 $p=0$ 时

$$I = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx = \int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)dx = \frac{1}{8}\ .$$

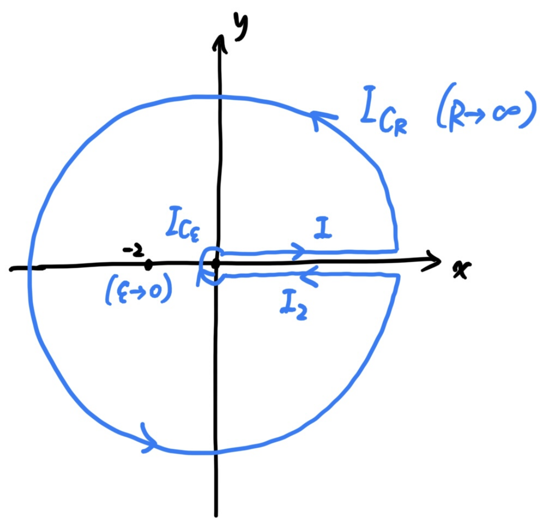
当 $p=1$ 时

$$I = \int_0^1\frac{1-x}{(x+1)^3}dx = -\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx + 2\int_0^1\frac{1}{(x+1)^3}dx = \frac{1}{4}\ .$$

当 $p\neq 0$ 且 $p\neq 1$时，观察被积函数的形式，不妨令 $t=(1-x)/x$ ，则有 $x=1/(1+t),\ t\in(0,+\infty)$ ，所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{\infty}^{0}\frac{\left(\frac{1}{1+t}\right)t^p}{\left(1+\frac{1}{1+t}\right)^3}\times\left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt \\ &= \int_0^{\infty}\frac{t^p}{(t+2)^3}dt\ , \end{aligned}$$

设复变函数 $f(z)=z^p/(z+2)^3$ ， $z=0,\infty$ 是它的支点，所以我们不妨做如下围道积分：



$$
\begin{aligned}
I + I_{C_R} + I_2 + I_{C_\varepsilon} &= 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, -2) \\
&= 2\pi i \cdot \lim_{z\to -2} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2} z^p \\
&= i\pi p(p-1)(-2)^{p-2} = i\pi p(p-1)2^{p-2}e^{i\pi p}\ ,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
|I_{C_R}| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{R^p e^{ip\phi}}{(Re^{i\phi}+2)^3} iRe^{i\phi} d\phi \right| \\
&\le \frac{R^{p+1}}{|2-R|^3} \times 2\pi = 0
\end{aligned}
$$

（第二行的等号用了 $R\to\infty$ 和 $p<2$ 条件），

$$
\begin{aligned}
|I_{C_\varepsilon}| &= \left| \int_{2\pi}^{0} \frac{\varepsilon^p e^{ip\phi}}{(\varepsilon e^{i\phi}+2)^3} i\varepsilon e^{i\phi} d\phi \right| \\
&\le \frac{\varepsilon^{p+1}}{|2-\varepsilon|^3} \times 2\pi \\
&\sim \varepsilon^{p+1} = 0
\end{aligned}
$$

（最后一行用了 $\varepsilon\to 0$ 和 $p>-1$ 条件）。所以

$$
I_{C_R} = 0 = I_{C_\varepsilon}\ .
$$

而

$$I_2 = \int_{\infty}^{0} \frac{\rho^p e^{i2\pi p}}{(\rho+2)^3} d\rho = -e^{i2\pi p} I \ .$$

综上，

$$(1-e^{i2\pi p})I = i\pi p(p-1)2^{p-2}e^{i\pi p} \ ,$$

所以

$$I = \frac{i\pi p(p-1)(-2)^{p-2}}{1-e^{i2\pi p}} = -\frac{\pi p(p-1)2^{p-3}}{\sin(\pi p)} \ .$$

可以看到 $p=0,1$ 的情形等于上式取极限时的情况。

5.13 Solution:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x^2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2x^2} dx - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2} dx \\
&= -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x^2} dx \\
&= -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(-\frac{e^{i2x}}{x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) 2ie^{i2x} dx \right) \\
&= -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{ 0 + 2i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x} dx \right\} \\
&= -\frac{1}{4}\mathrm{Re}(2i \times \pi i) \\
&= \frac{\pi}{2} \ ,
\end{aligned}$$

其中倒数第二个等号的证明，可参见梁老师《数理方法》的“实轴上有单极点的情况”。

6.1 Solution:

1. $f(x)$ 是偶函数， $b_k=0\ (k\in\mathbb{N}_+)$ ，

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t dt=\frac{2}{\pi}\ ,\\
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos(kt)dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin((1+k)t)+\sin((1-k)t)\right]dt\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{1+k}}{1+k}+\frac{1-(-1)^{1-k}}{1-k}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^k}{1-k^2}\ ,\ (k\in\mathbb{N}_+,\ k\neq 1)\\
a_1 &= 0\ .
\end{aligned}
$$

所以

$$
f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx)\ .
$$

2. 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_k=0\ (k\in\mathbb{N}_+)$ 。

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t dt=\frac{\pi}{2}\ ,\\
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos(kt)dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k-1}{k^2}\ .
\end{aligned}
$$

$$
f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx)\ .
$$

3.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin t dt=\frac{1}{\pi}\ ,\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)dt=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^k}{1-k^2}\ ,\ (k\in\mathbb{N}_+,\ k\neq 1)\ ,\\
a_1 &= 0\ ,\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(kt)dt=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{if } k=1\\ 0, & \text{if } k\neq 1\end{cases}\ .
\end{aligned}
$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx)\ .$$

4. 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $a_k=0$ $(k\in\mathbb{N})$ 。求出 b_k 后，得

$$f(x)=-\frac{1}{2}\sin x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k(-1)^k}{k^2-1}\sin(kx)\ .$$

6.2 Solution: $f(x)=x^2$ 是偶函数，求出 a_0,a_k 后得

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)\ .$$

当 $x=0$ 时

$$0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\ ,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\ .$$

当 $x=\pi$ 时

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\ ,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ .$$

6.3 Solution: $f(x)=x^4$ 是偶函数，求出 a_0,a_k 后得

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\pi^4}{5}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8(\pi^2k^2-6)(-1)^k}{k^4}\cos(kx)\\&=\frac{\pi^4}{5}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(8\pi^2\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)-\frac{48(-1)^k}{k^4}\cos(kx)\right)\ .\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，上式变为

$$0=\frac{\pi^4}{5}-8\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}+48\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^4}\ ,$$

结合 6.2 题的结果，求得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^4}=\frac{7\pi^4}{720}\ .$$

而当 $x=\pi$ 时，

$$\pi^4=\frac{\pi^4}{5}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(8\pi^2\frac{1}{k^2}-48\frac{1}{k^4}\right)\ ,$$

结合 6.2 题的结果，求得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}\ .$$

附注：所有的（ $n\in\mathbb{N}_+$ ）

$$\int x^n\sin(ax)dx\ ,$$
$$\int x^n\cos(ax)dx\ ,$$
$$\int x^n e^{iax}dx$$

类型的积分都可用分部积分求得。利用分部积分，不定积分（以下均略写常数项 C ）

$$\int x\sin(ax)dx=\frac{1}{a^2}\sin(ax)-\frac{x}{a}\cos(ax)\ ,$$
$$\int x\cos(ax)dx=\frac{1}{a^2}\cos(ax)+\frac{x}{a}\sin(ax)\ .$$

根据分部积分，有递推公式

$$\int x^n\sin(ax)dx=-\frac{x^n}{a}\cos(ax)+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos(ax)dx\ ,$$
$$\int x^n\cos(ax)dx=\frac{x^n}{a}\sin(ax)-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin(ax)dx\ .$$