Exercises: Four

5.1 Solution:

(1)

$$f(z)=\frac{1}{z^3(1-z)(1+z)}\ ,\quad f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{t^5}{t^2-1}\ ,$$

所以奇点为

$$z=0,1,-1\ .$$

$z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶极点，可以通过在 $z=0$ 附近对 $f(z)$ 洛朗展开，从而获得留数，而 $z=1,-1$ 是 $f(z)$ 的一阶奇点，可用

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$$

求得其留数：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}(f,0)=\frac{1}{2}\times 2=1\ ,\\
&\mathrm{Res}(f,1)=-\frac{1}{2}\ ,\\
&\mathrm{Res}(f,-1)=-\frac{1}{2}\ .
\end{aligned}$$

(2) 当 $n=0$ 时， $f(z)$ 为常函数，在全平面解析，没有奇点。

当 n 为正整数时，因为

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^n(1+t)^n}\ ,$$

所以 ∞ 是 $f(z)$ 的奇点之一。所以 $f(z)$ 的奇点为

$$z = -1, \infty \ .$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,-1) &= \lim_{z\to -1} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} z^{2n}\right) \\
&= (-1)^{n+1}\cdot \binom{2n}{n-1} \ , \\
\operatorname{Res}(f,\infty) &= -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{t^{n+2}(1+t)^n}, 0\right) \\
&= -\lim_{t\to 0} \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \frac{1}{(1+t)^n}\right) \\
&= -(-1)^{n+1}\cdot \binom{2n}{n+1} \ ,
\end{aligned}$$

注意到上面两式中的 $\binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n+1}$，这是符合预期的，因为 $f(z)$ 在延展复平面上的所有各点留数之和为零。

(3) 因为

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t(1+t-t^2)}{1-t} \ ,$$

所以 ∞ 不是奇点。所以 $f(z)$ 的奇点为

$$z = 0, 1 \ .$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2+z-1}{z-1}\right) = 0 \ , \\
\operatorname{Res}(f,1) &= 1 \ .
\end{aligned}$$

虽然 ∞ 不是奇点，但留数不为零：

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1+t-t^2}{t(1-t)}, 0\right) = -1 \ .$$

(4)

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z+3i)(z-3i)} \ , \qquad f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t^4 e^{1/t}}{(1+3it)(1-3it)} \ ,$$

所以 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。所以， $f(z)$ 的奇点为

$$z=0,\pm 3i,\infty\ .$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,0)&=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2+9}\right)\xlongequal{\text{洛必达法则}}\frac{1}{9}\ ,\\
\mathrm{Res}(f,3i)&=i\frac{e^{3i}}{54}\ ,\\
\mathrm{Res}(f,-3i)&=-i\frac{e^{-3i}}{54}\ ,
\end{aligned}$$

$\mathrm{Res}(f,\infty)$ 可以通过等于 $\mathrm{Res}(f,0),\mathrm{Res}(f,3i),\mathrm{Res}(f,-3i)$ 之和的相反数求得，也可以直接求：

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\mathrm{Res}\left(\frac{t^2e^{1/t}}{1+9t^2},0\right)\ ,\ 设g(t)=\frac{t^2e^{1/t}}{1+9t^2}\ .$$

在 $t=0$ 附近展开 $g(t)$ ，有

$$g(t)=t^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{t^k}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l9^lt^{2l}\right)\ ,$$

从中可得 $g(t)$ 在 $t=0$ 处的留数

$$\begin{aligned}
a_{-1}&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+3)!}(-1)^l9^l\xlongequal{\text{整理得}}\frac{-1}{27}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{1}{(2l+1)!}3^{2l+1}\\
&=-\frac{1}{27}(\sin 3-3)=-\frac{\sin 3}{27}+\frac{1}{9}\ ,
\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=\frac{\sin 3}{27}-\frac{1}{9}\ .$$

5.2 Solution:

(1)

$$f(z)=\frac{2(\sin z-z)}{z(e^z-e^{-z})}=\frac{2(\sin z-z)e^z}{z(e^{2z}-1)}\ ,$$

所以奇点为

$$z = k\pi i \ , \ (k \in \mathbb{Z}) \ .$$

对于奇点 $z=0$ ，对 $f(z)$ 在 $z=0$ 附近展开：

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}z^l\right)\left\{\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2^p}{(p+1)!}z^p\right)^q\right\} \ ,$$

上式没有负幂次项，所以 $z=0$ 是可去奇点。

对于奇点 $z=k\pi i \ (k\neq 0, k\in\mathbb{Z})$ ，猜测其为一阶极点，那么留数为

$$\begin{aligned}\lim_{z\to ik\pi}(z-ik\pi)f(z) &\xlongequal{\text{洛必达法则}} \frac{\sin(ik\pi)-ik\pi}{i\sin(k\pi)+ik\pi\cos(k\pi)} \\ &= \begin{cases} -\frac{k\pi-\sinh(k\pi)}{k\pi}, & \text{if } k \text{ is even} \\ \frac{k\pi-\sinh(k\pi)}{k\pi}, & \text{if } k \text{ is odd} \end{cases} .\end{aligned}$$

这说明 $z=k\pi i \ (k\neq 0, k\in\mathbb{Z})$ 确实是一阶极点，留数为

$$\mathrm{Res}(f, ik\pi) = \begin{cases} -\frac{k\pi-\sinh(k\pi)}{k\pi}, & \text{if } k \text{ is even} \\ \frac{k\pi-\sinh(k\pi)}{k\pi}, & \text{if } k \text{ is odd} \end{cases} .$$

(2) 奇点为 $z=k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ 。因为

$$\lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)^2}{\sin^2 z} = \lim_{z\to k\pi}\frac{2(z-k\pi)}{\sin\left(2(z-k\pi)\right)} = 1$$

是有限值，所以 $z=k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ 是二阶极点。因为

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\sin^2 z} = \frac{2}{1-\cos(2z)} = \frac{2}{1-\cos\left(2(z-k\pi)\right)} \\ &\xlongequal{\text{设}t=z-k\pi} \frac{2}{1-\cos(2t)} = \frac{2}{2t^2\left(1-\frac{2^3t^2}{4!}+\frac{2^5t^4}{6!}-\frac{2^7t^6}{8!}+\cdots\right)} \\ &= \frac{1}{t^2}\times\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2^3t^2}{4!}-\frac{2^5t^4}{6!}+\frac{2^7t^6}{8!}+\cdots\right)^l ,\end{aligned}$$

所以 $f(z)$ 在 $z=k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ 点的留数为零。

(3) 奇点为 $z=k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ 。

对于 $z=k\pi\ (k\neq 0)$ 奇点，

$$\begin{aligned}\lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)\cos\frac{1}{z}}{\sin z}&=\lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)\cos\frac{1}{z}}{\sin((z-k\pi)+k\pi)}\\&=\begin{cases}\cos\frac{1}{k\pi}, & \text{if } k \text{ is even}\\ -\cos\frac{1}{k\pi}, & \text{if } k \text{ is odd}\end{cases}\ .\end{aligned}$$

所以， $z=k\pi\ (k\neq 0)$ 是一阶极点，

$$\mathrm{Res}(f,k\pi)=\begin{cases}\cos\frac{1}{k\pi}, & \text{if } k \text{ is even}\\ -\cos\frac{1}{k\pi}, & \text{if } k \text{ is odd}\end{cases}\ .$$

对于 $k=0$ ， $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。对于 $f(z)$ 在 $z=0$ 附近做展开：

$$f(z)=\frac{1}{z}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\frac{1}{z^{2k}}\right\}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{z^{2l}}{(2l+1)!}\right]^m\right\}\ ,$$

所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 点的留数

$$\mathrm{Res}(f,0)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\sum_{m=1}^{k}\sum_{\{l_i\}}\frac{(-1)^m}{(2l_1+1)!\cdot(2l_2+1)!\cdot\dots\cdot(2l_m+1)!}\right)\ ,$$

其中 $\sum_{\{l_i\}}$ 的意思是遍历所有满足 $l_i\geq 1,\sum_i l_i=k$ 的 $\{l_1,...,l_m\}$ 。

事实上，因为

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{z}{\sin z}\\&=\frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{2iz}{e^{iz}-e^{-iz}}\\&=\frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(2\times\frac{iz}{e^{iz}-1}-\frac{2iz}{e^{2iz}-1}\right)\\&=\frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^kB_k}{k!}z^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k2^kB_k}{k!}z^k\right)\\&=\frac{1}{z}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\frac{1}{z^{2k}}\right\}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2-2^{2m})}{(2m)!}B_{2m}z^{2m}\right\}\ ,\end{aligned}$$

其中，Bernoulli's numbers 的定义采用（ B_{2k} 与 4.11 题的 B_k 对应，相差正负号）：

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{l!}z^l\ ,\quad \left(B_0=1,B_1=-\frac{1}{2},B_2=\frac{1}{6},...\ ;\ B_{2l+1}=0,l\in\mathbb{N}_+\right)\ .$$

所以,

$$\mathrm{Res}(f,0) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-2^{2k})B_{2k}}{(2k)! \cdot (2k)!} \ .$$

(4)

$$f(z) = \frac{1}{(e^z - e^{-i2\pi/3})(e^z - e^{i2\pi/3})} \ ,$$

所以 $z = \pm\frac{2\pi}{3}i + 2k\pi i$ 是 $f(z)$ 的一阶极点。

$$\mathrm{Res}\left(f, \frac{2\pi}{3}i + 2k\pi i\right) = \lim_{z \to \frac{2\pi}{3}i + 2k\pi i} \frac{1}{2e^{2z} + e^z} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \ ,$$
$$\mathrm{Res}\left(f, -\frac{2\pi}{3}i + 2k\pi i\right) = \lim_{z \to -\frac{2\pi}{3}i + 2k\pi i} \frac{1}{2e^{2z} + e^z} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \ .$$

5.3 Solution:

$$f(z) = \frac{z^2+4}{(z-i)(z+i)}$$

在 $|z| = 2$ 内有单极点 $z = \pm i$,留数

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z \to i} \frac{z^2+4}{z+i} = -\frac{3}{2}i \ ,$$
$$\mathrm{Res}(f,-i) = \frac{3}{2}i \ .$$

所以

$$\int_{|z|=2} f(z) \ dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)\right) = 0 \ .$$

5.4 Solution: 设

$$f_n(z) = \frac{1}{(z+i)^n (n+6)!} \ , \quad n \geq 5 \ .$$

对于 $|z-i|=3$ ， $|f_n(z)| \le \frac{1}{(n+6)!}$ ，而级数 $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n+6)!}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=5}^{\infty} f_n(z)$ 在 $|z-i|=3$ 上一致收敛。又因为

$$\left| \int_{|z-i|=3} f_n(z)\ dz \right| \le \frac{6\pi}{(n+6)!}$$

有限， $\int_{|z-i|=3} f_n(z)\ dz$ 收敛。综上，可以把题干中的求和符号与积分符号互换。

因为 $f_n(z)$ 在 $|z-i|=3$ 内有 n 阶极点 $z=-i$ ，留数

$$\mathrm{Res}(f_n(z), -i) = 0\ ,$$

所以

$$\int_{|z-i|=3} \left(\sum_{n=5}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=5}^{\infty} \int_{|z-i|=3} f_n(z) dz = 0\ .$$

5.5 Solution:

$$f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

在 $|z|=2$ 内有本性奇点 $z=1$ 。对 $f(z)$ 在 $z=1$ 附近做展开：

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) + \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2k+1}}\ , \end{aligned}$$

所以留数

$$\mathrm{Res}(f, 1) = 1\ .$$

所以

$$\int_{|z|=2} f(z)\ dz = 2\pi i\ .$$

5.6 Solution:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{|z|=a} \frac{dz}{\frac{a^2}{z} - b} \\ &= \int_{|z|=a} \frac{-z\ dz}{b\left(z - \frac{a^2}{b}\right)}\ . \end{aligned} \tag{1}$$

当 $a > |b|$ 时， $|a^2/b| > a$ ，所以 Eq. (1) 的被积函数在 $|z| = a$ 内无奇点，所以积分 Eq. (1) 为零。
当 $0 < a < |b|$ 时， $|a^2/b| < a$ ，所以 Eq. (1) 的被积函数在 $|z| = a$ 内有单极点 $z = a^2/b$ ，

$$\text{原式} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(-\frac{z}{b\left(z - \frac{a^2}{b}\right)}, \frac{a^2}{b}\right) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{a^2}{b^2}\right) = -2\pi i \frac{a^2}{b^2} \ .$$

5.7 Solution: 由 5.1 题的第四小题可知，

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$$

在 $|z| = 5$ 内有二阶极点 $z = 0$ ，和一阶极点 $z = \pm 3i$ ，

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{9}, \quad \operatorname{Res}(f, 3i) = i\frac{e^{3i}}{54}, \quad \operatorname{Res}(f, -3i) = -i\frac{e^{-3i}}{54} \ .$$

所以

$$\int_{|z|=5} f(z)\ dz = 2\pi i \left(\frac{1}{9} - \frac{\sin 3}{27}\right) \ .$$