Exercises: Four

4.1 Proof:

$$
\begin{aligned}
w_n(x) &= \frac{x}{n(1+nx^2)} = \frac{1}{n\left(\frac{1}{x}+nx\right)} \ , \\
|w_n(x)| &= \frac{1}{n\left|\frac{1}{x}+nx\right|} \leq \frac{1}{2n^{3/2}} \ .
\end{aligned}
$$

因为 $\{\frac{1}{n^{3/2}}\}$ 是收敛的，也就是说，$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. $\forall n > N, p \geq 1,\ \sum_{k=n+1}^{n+p} 1/k^{3/2} < \varepsilon$，所以对于这一 N ，$\forall n > N, p \geq 1$ ，

$$
\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |w_k| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^{3/2}} < \varepsilon \text{ 成立。}
$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上一致收敛。 $\square$

4.2 Solution:

$$
\begin{aligned}
\frac{2z+3}{z+1} &= 2 + \frac{1/2}{1+\frac{z-1}{2}} \\
&= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k (z-1)^k \ .
\end{aligned}
$$

因为

$$
\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}}{2^k}\right| = 2 \ ,
$$

所以收敛半径 $R = 2$ 。

4.3 Solution: (a)

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = 0 \ .$$

(b)

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{|q|^{k^2/k}} = \lim_{k\to\infty} e^{-k\ln|q|} = \infty \ .$$

(c)

$$\lim_{k\to\infty}\ \sup\ |a_k|^{1/k} = 1 \ ,$$

所以收敛半径 $R = 1$ 。

4.4 Solution: 因为

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty}\sup\ |a_k|^{1/k} \ ,$$

所以：

(a) 对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ ：

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{k\to\infty}\sup\ |a_k|^{1/(2k)} = \frac{1}{\sqrt{R}} \ , \quad \therefore R_1 = \sqrt{R} \ .$$

(b) 对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$ ：

$$\frac{1}{R_2} = \lim_{k\to\infty}\sup\ |a_k|^{2/k} = \frac{1}{R^2} \ , \quad \therefore R_2 = R^2 \ .$$

4.5 Solution: 设 $t = z/(1+z)$ ，因为 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ 的收敛半径为1，收敛圆为以 $t=0$ 为圆心、半径为 1 的圆，收敛圆内部表示为 $|t|<1$ ，即

$$\left|\frac{z}{z+1}\right| < 1 \ , \quad \Leftrightarrow \quad |z| < |z+1| \ ,$$

所以 $|z|<|z+1|$ 时，级数收敛。当正好 $|z|=|z+1|$ 时，级数不收敛。

综上，$|z|<|z+1|$ 时，级数收敛，也就是 z 位于 $x>-1/2$ 的复平面上。

4.6 Solution:

$$\begin{aligned}
\because f(z) &= \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) \ , \\
\therefore f^{(k)}(z) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^k k!}{(z-i)^{k+1}} - \frac{(-1)^k k!}{(z+i)^{k+1}}\right) \ , \\
\therefore \frac{f^{(k)}(a)}{k!} &= \frac{(-1)^k}{2i}\left(\frac{1}{(a-i)^{k+1}} - \frac{1}{(a+i)^{k+1}}\right) \triangleq b_k \ , \\
\therefore f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k \ .
\end{aligned}$$

4.7 Solution:

$$\begin{aligned}
P_0(\alpha) &= 1 \ , \\
P_1(\alpha) &= \frac{f'(0)}{1!} = \alpha \ .
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(\alpha) \ ,$$

两边对 z 求导得，

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha - z}{\left(1-2\alpha z+z^2\right)^{3/2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1} P_k(\alpha) \ , \\
\frac{\alpha - z}{\left(1-2\alpha z+z^2\right)^{1/2}} &= \left(1-2\alpha z+z^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1} P_k(\alpha) \ , \\
(\alpha - z)\sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(\alpha) &= (z^2 - 2\alpha z + 1)\sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1} P_k(\alpha) \ ,
\end{aligned}$$

对比上式两边 z^{k+1} $(k \geq 0)$ 的系数，可整理得

$$(k+2)P_{k+2}(\alpha) - \alpha(2k+3)P_{k+1}(\alpha) + (k+1)P_k(\alpha) = 0 \ .$$

所以，可从 P_0, P_1 求得

$$\begin{aligned}
P_2(\alpha) &= \frac{1}{2}\left(3\alpha^2 - 1\right) \ , \\
P_3(\alpha) &= \frac{1}{2}\left(5\alpha^3 - 3\alpha\right) \ , \\
P_4(\alpha) &= \frac{1}{8}\left(35\alpha^4 - 30\alpha^2 + 3\right) \ .
\end{aligned}$$

4.8 Solution:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \ln\left(\frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots}{z}\right) = \ln\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}\right) \\
&= n2\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}\right)^n \\
&= n2\pi i + \left(-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + O(z^8)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{z^2}{3!} + O(z^4)\right)^3 \\
&+ O(z^8) \\
&= n2\pi i + \left(-\frac{z^2}{3!}\right) + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{(3!)^2}\right) z^4 + \left(-\frac{1}{7!} - \frac{1}{2} \times \frac{-2}{(3!)(5!)} + \frac{1}{3} \times \frac{-1}{(3!)^3}\right) z^6 + O(z^8) \\
&= n2\pi i - \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{180}z^4 - \frac{1}{2853}z^6 + O(z^8)\ .
\end{aligned}$$

4.9 Solution:

(a)

$$\frac{z}{z+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^k\ .$$

(b)

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-(2k+1)}\ .$$

(c)

$$\cos\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k}\ .$$

(d)

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3^k}{z^{k+1}}\right)\ .$$

4.10 Solution:

(a) $|z| < 1$时，

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z}$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) z^k \ .$$

(b) $1 < |z| < 2$时，

$$f(z) = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{z} \times \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}} z^k - \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \ .$$

(c) $2 < |z|$时，

$$f(z) = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \times \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k} - \frac{1}{z} \times \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(2^k - 1) z^{-(k+1)} \ .$$

4.11 Proof: 将 $1/(e^z - 1)$ 在原点处洛朗展开：

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}}$$
$$= \frac{1}{z}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}\right)^l$$
$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}\right)^l \tag{1}$$
$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + O(z) \ , \tag{2}$$

又因为

$$\frac{1}{e^z-1} + \frac{1}{e^{-z}-1} + 1 = 0 \ ,$$

所以

$$\frac{1}{e^z-1}+\frac{1}{2}\text{ 是奇函数,}$$

也即 eq. (1) 中，除 z^0 项外，偶数幂次项系数都为零，也即 $1/(e^z-1)$ 在原点处可写成如下展开形式：

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1}\ .$$

□

下面求Bernoulli's numbers：可以从 eq. (1) 直接算出 B_1,B_2,B_3 ，也可以用如下方法：设 $f(z)=1/(e^z-1)=a_{-1}z^{-1}+a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$ ，

$$\frac{d}{dz}f(z)=\frac{d}{dz}\frac{1}{e^z-1}=-f(z)-(f(z))^2\ ,$$

$$\begin{aligned}-a_{-1}z^{-2}+a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots=&-\left\{a_{-1}z^{-1}+a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\right\}\\&-\left\{a_{-1}^2z^{-2}+2a_{-1}a_0z^{-1}+(2a_{-1}a_1+a_0^2)+\cdots\right\}\ ,\end{aligned}$$

由 eq. (2) 可知， $a_{-1}=1,a_0=-1/2$ （可代入上式验证成立），另外，由上式可得：对于 $k\in\mathbb{N}$ ，

$$(k+3)a_{k+1}=\begin{cases}-a_k-(2a_0a_k+2a_1a_{k-1}+\cdots+2a_{\frac{k-1}{2}}a_{\frac{k+1}{2}}), & \text{if } k \text{ is odd,}\\ -a_k-(2a_0a_k+2a_1a_{k-1}+\cdots+a_{k/2}^2), & \text{if } k \text{ is even,}\end{cases}$$

所以，对于 $k=0$ ，

$$3a_1=-a_0-a_0^2=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad a_1=\frac{1}{12},\ B_1=(2!)a_1=\frac{1}{6}\ .$$

对于 $k=2$ ，

$$5a_3=-a_1^2=-\frac{1}{144}\quad\Rightarrow\quad a_3=-\frac{1}{5\times 12^2},\ B_2=-(4!)a_3=\frac{1}{30}\ .$$

对于 $k=4$ ，同理可求得

$$a_5=\frac{1}{7\times 6\times 5\times 12^2},\ B_3=(6!)a_5=\frac{1}{42}\ .$$

4.12 Proof: 整函数 $f(z)$ 的形式为

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \ .$$

令 $z \to 1/t$ ，则有

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{-k} \ , \tag{3}$$

“ ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点”等价于“ $t = 0$ 是 $f(1/t)$ 的可去奇点”，即 eq. (3) 中的 b_k $(k > 0)$ 必须等于0，也即 $f(z)$ 是常函数。 $\square$