经典电动力学

作者：朱华星编著
组织：浙江大学
版本：0.5

Faraday is, and must always remain, the father of that enlarged science of electromagnetism. – James Maxwell

目录

第 5 章 运动电荷的势和场

5.1 标势和矢势

在我们研究静电和静磁现象的时候，一个主要问题是求解静电场或静磁场，即求解关于它们的耦合一阶线性方程组。但是，直接求解矢量型的微分方程是复杂的。因此，我们引入了静电势和磁矢势的概念，我们把麦克斯韦方程组化成关于静电势和磁矢势的二阶线性微分方程，然后可以应用数理方法里学过的技术求解。这一节，我们要把静电势和磁矢势的概念进一步推广到非静态的情形，即可以有运动电荷和电流振荡的情形。我们会发现势的概念在这时将变得非常重要。

在学习静电场时，我们知道引入静电势的概念是非常方便的。对于原点处的点电荷，其静电势可以写为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,. \tag{5.1}$$

这是一个瞬时势。如果我们某一时刻把电荷变为 $2q$ 的话，不管多远处的空间点，都能立刻感觉到静电势变为原来的两倍 (因而静电场也变为原来的两倍)。这就产生了一种超距瞬时相互作用，这显然是不合理的，因为这意味着信号传递的速度将是无穷大。一个合理的想象是，正如电磁场是以有限速度传播，电势也是以有限速度从带电体传播出去。我们下面要做的就是从麦克斯韦方程证明这一点，并求出电势传播的速度。

首先回顾麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \tag{5.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0\,, \qquad \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\,. \tag{5.3}$$

由于磁场是无源的，我们总可以引入矢势将它写作

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}\,. \tag{5.4}$$

因此法拉第定律可以重写为

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{A})}{\partial t}\,. \tag{5.5}$$

即

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0\,. \tag{5.6}$$

因此 $\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ 是一个无旋场。有亥姆霍兹公式，无旋场总是可以写成一个标量函数的梯度，

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi\,. \tag{5.7}$$

我们把 Φ 称作标势。注意，对于静磁场，$\boldsymbol{A}$ 不随时间改变，此时电场也是静态的，标势和静电势是一回事。但对于变化电磁场它们是不同的。现在，即使对于变化的电磁场，我

们也可以通过标势和矢势表示,

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\,,\qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\,. \tag{5.8}$$

我们可以用标势和矢势完全重写麦克斯韦方程。将(5.8)代进高斯定律,

$$-\nabla^2\Phi-\partial_t(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,. \tag{5.9}$$

而安培-麦克斯韦定律重写为

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J}-\varepsilon_0\mu_0\left(\partial_t\nabla\Phi+\partial_t^2\boldsymbol{A}\right)\,. \tag{5.10}$$

重新整理一下，我们得到

$$\nabla^2\Phi+\partial_t(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\,-\,\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \tag{5.11}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon_0\mu_0\partial_t^2\boldsymbol{A}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\mu_0\partial_t\Phi)=\,-\,\mu_0\boldsymbol{J}\,. \tag{5.12}$$

例：给定标势和矢势分布

$$\Phi=0\,,\qquad \boldsymbol{A}=\begin{cases}\frac{\mu_0 k}{4c}(ct-|x|)^2\hat{\boldsymbol{z}}\,, & \text{当}|x|<ct\,,\\ 0\,, & \text{当}|x|>ct\,.\end{cases} \tag{5.13}$$

求对应的场，电荷和电流分布。

5.2 规范变换

上一节我们把求解麦克斯韦方程问题化成了求解标势和矢势的问题：

$$\nabla^2\Phi+\partial_t(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\,-\,\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \tag{5.14}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon_0\mu_0\partial_t^2\boldsymbol{A}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\mu_0\partial_t\Phi)=\,-\,\mu_0\boldsymbol{J}\,. \tag{5.15}$$

从中我们可以得到电场和磁场,

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\,,\qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\,. \tag{5.16}$$

在经典电动力学里，我们认为电场和磁场是本质的，标势和矢势只是引入的辅助量。因此，对于同一个电场和磁场，可以允许不同的标势和矢势。对标势和矢势作变换,

$$\Phi'=\Phi+\alpha\,,\qquad \boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\beta}\,, \tag{5.17}$$

我们要求电场和磁场不改变,

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi'-\frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t}\,,\qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}'\,. \tag{5.18}$$

显然这个条件会约束 α 和 $\boldsymbol{\beta}$。我们把满足(5.18)的变换 (5.17)称作规范变换。我们下面来看规范变换所需满足的条件。首先，由 (5.18)的第二式可知，必须有

$$\nabla\times\boldsymbol{\beta}=0\,. \tag{5.19}$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 是无旋的，由亥姆霍兹定理可以将它写成梯度的形式,

$$\boldsymbol{\beta}=\nabla\lambda\,, \tag{5.20}$$

这时，(5.18)的第一式变为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi - \nabla\alpha - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \partial_t \nabla\lambda\,, \tag{5.21}$$

为了保持 $\boldsymbol{E}$ 不变，我们必须要求

$$\nabla(\alpha + \partial_t\lambda) = 0\,, \tag{5.22}$$

这个等式成立要求（即对于任意的 α 我们可以要求）

$$\partial_t\lambda = -\alpha\,, \tag{5.23}$$

由此我们得到最一般的规范变换具有形式

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}\,, \qquad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\lambda\,, \tag{5.24}$$

注意，$\lambda(t, \boldsymbol{r})$ 可以是时间和空间的函数，称为规范函数。

例：对于如下标势和矢势

$$\Phi = 0\,, \qquad \boldsymbol{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\,, \tag{5.25}$$

其对应的场，电荷和电流分布是怎样的？如果我们做一个规范函数为

$$\lambda = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r} \tag{5.26}$$

的规范变换后，结果如何？

5.3 吴大俊和杨振宁的磁单极子解

我们前面提到，如果存在磁单极，则麦克斯韦方程应做相应修改：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = g \tag{5.27}$$

其中 g 为磁荷密度。但如果磁场能用矢势表示的话，则

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0 \tag{5.28}$$

因此，如果我们认为矢势是关于电磁场更基本的量的话[1]，则看起来磁荷是无法存在的。

为了引入磁荷和不导致上述矛盾，核心在于全空间中的矢势不必存在唯一的连续分布。空间中同以区域可以有不同的矢势，只要它们相差是一个规范因子，则描述的物理是一样的。我们下面就来寻求这样一个矢势解，使其满足

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = g \tag{5.29}$$

设磁单极子位于坐标原点，我们选取球坐标系。为了简化起见，我们假设矢势只有非零的方位角分量，$\boldsymbol{A} = A_\phi(r,\theta)\boldsymbol{e}_\phi$，且由对称性应不依赖于 ϕ。在球坐标系下，旋度可以写为

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ A_r & rA & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix} \tag{5.30}$$

[1]在量子力学里，通过所谓的 AB 效应，矢势会产生可观测效应，因此我们认为矢势是更基本的。

因此

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\Big[\boldsymbol{e}_r r(\cos\theta A_\phi+\sin\theta\partial_\theta A_\phi)-\boldsymbol{e}_\theta r(\sin\theta A_\phi+r\sin\theta\partial_r A_\phi)\Big] \tag{5.31}$$

另一方面，由高斯定律和 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=g$，磁场可以写为

$$\boldsymbol{B}=\frac{g}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{5.32}$$

为了让(5.31)和(5.32)成立，我们得到微分方程组

$$A_\phi+r\partial_r A_\phi=0 \tag{5.33}$$

$$\frac{r\cos\theta}{\sin\theta}A_\phi+r\partial_\theta A_\phi=1 \tag{5.34}$$

由(5.33)我们得到

$$A_\phi=\frac{g}{4\pi r}u(\theta) \tag{5.35}$$

其中 $u(\theta)$ 是关于 θ 的待定函数。将其代入(5.34)中得到

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}u(\theta)+u'(\theta)=1 \tag{5.36}$$

这个方程的一般解为

$$u(\theta)=\frac{c-\cos\theta}{\sin\theta} \tag{5.37}$$

其中 c 是一个常数，来自于边界条件。注意到这个解在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 是奇异的。我们无法找到一个全空间的非奇异解，但是可以找到在除掉北极或除掉南极后是非奇异但解。例如，让 $c=1$，则

$$A_\phi^N=\frac{g}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \tag{5.38}$$

在除掉南极和原点后的空间中非奇异。类似的，

$$A_\phi^S=-\frac{g}{4\pi r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \tag{5.39}$$

在除掉北极和原点后的空间中非奇异。容易验证，我们找到的解 $\boldsymbol{A}$ 会给出 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=g$。

但这里还有一个问题。在 $0<\theta<\pi$ 的区域，A_ϕ^N 和 A_ϕ^S 都是允许的解，但它们具有不同的形式，因此一个自然的问题是在它们是否给出同样的磁场。如果不一样的话我们的解就不自洽了。在这个交叠的区域，有

$$A_\phi^N-A_\phi^S=\frac{g}{2\pi r}\frac{1}{\sin\theta}=\nabla\omega\,,\qquad \omega=\frac{g}{2\pi}\phi \tag{5.40}$$

因此，尽管在交叠区域存在两个不同的矢势解，但它们但差只是一个规范变换因子，因此它们给出但磁场是一样的！这就是著名的吴-杨磁单极子解。

注：在球坐标系下，标量场的梯度可以写为

$$\nabla f=(\partial_r f)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}(\partial_\theta f)\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}(\partial_\phi f)\boldsymbol{e}_\phi \tag{5.41}$$

5.4 库伦规范和洛伦兹规范

现在我们可以利用规范变换的自由度来简化标势和矢势的波动方程，(5.15)。在研究静磁问题的时候，我们已经引入过所谓的库伦规范，在这个规范下矢势满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0\,. \tag{5.42}$$

如果 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} \neq 0$，我们总可以做一个规范变换，使得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}' = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla^2 \lambda = 0\,. \tag{5.43}$$

其中规范函数满足

$$\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \boldsymbol{A}\,. \tag{5.44}$$

这是一个泊松方程，由我们以前学过的唯一性定理可知，在给定边界条件的情况系，这个方程的解总是存在且唯一。在库伦规范下，标势和矢势满足的方程化为

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \tag{5.45}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \nabla \Phi\,. \tag{5.46}$$

注意到标势和静电势满足同样的泊松方程，但它们的物理意义并不一样。如果有边界条件 $\lim_{r\to\infty} \Phi(\boldsymbol{r}, t) = 0$，则解可以写为

$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\tau'\,, \tag{5.47}$$

注意到这是一个瞬时势，即某一时刻 ρ 的改变能够影响到任意远处的 Φ。但这并不违背因果律，原因是 Φ 在经典理论里并非物理观测量，电场才是。而由 $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi - \partial_t \boldsymbol{A}$ 可知，仅由 Φ 的梯度不能确定电场。标势的库伦解的时间和空间坐标具有不同的地位，不满足狭义相对性原理。

另一类常用的规范是所谓的洛伦兹规范，在这个规范下矢势和标势满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \Phi = 0\,, \tag{5.48}$$

在这个规范下，标势和矢势的方程变为

$$\nabla^2 \Phi - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \tag{5.49}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}\,. \tag{5.50}$$

这个规范的优点是时间和空间坐标地位一致（都出现在二阶微分里），明显满足相对性原理。这两组方程是非齐次波动方程，波的速度是

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}\,. \tag{5.51}$$

通常还引入所谓的达朗伯算符

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2\,, \tag{5.52}$$

这时标势和矢势的分量可以统一写作

$$\Box \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \qquad \Box \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}\,. \tag{5.53}$$

这可以看作是波动方程在四维的推广。由于(5.53)中两式的相似性，我们可以将其定义成一个思维矢势

$$A^\mu(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{\Phi}{c},A_x,A_y,A_z\right),\qquad \mu=0,1,2,3 \tag{5.54}$$

以及相应的四维电流密度

$$J^\mu(\boldsymbol{x},t)=(c\rho,J_x,J_y,J_z),\qquad \mu=0,1,2,3 \tag{5.55}$$

而(5.53)可以统一写为

$$\Box A^\mu=-\mu_0 J^\mu,\qquad \mu=0,1,2,3 \tag{5.56}$$

我们接下来的任务就是要求解这一组波动方程。

例：说明对于任意的标势和矢势，总可以做规范变换使其满足洛伦兹规范条件。

5.5 麦克斯韦方程的推迟势解

这一节参考自朗道的场论。标势和矢势的波动方程具有统一的形式：

$$\Box\Psi=\nabla^2\Psi-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-4\pi f(\boldsymbol{r},t). \tag{5.57}$$

其中 Ψ 可以是标势或矢势的分量，而 $f(\boldsymbol{r},t)$ 是电荷或电流密度的分量，我们把后者统一称为源。这个方程是线性的，我们可以把源写成无穷多点源的叠加

$$f(\boldsymbol{r},t)=\int f(\boldsymbol{r}',t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'. \tag{5.58}$$

形式上我们也可以把 Ψ 写成

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t)d^3\boldsymbol{r}'. \tag{5.59}$$

其中 $G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t)$ 其实就是格林函数，是待定的函数。代入波动方程里，由于求导的和积分的是不同变量，我们可以把积分号移到求导外，

$$\int d^3\boldsymbol{r}'\left[\nabla^2G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t)-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t)}{\partial t^2}\right]=-4\pi\int d^3\boldsymbol{r}'f(\boldsymbol{r}',t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{5.60}$$

为了让上式成立，可以要求

$$\nabla^2G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t)-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t)}{\partial t^2}=-4\pi f(\boldsymbol{r}',t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{5.61}$$

这个方程的简化之处在于右侧的源仅仅是 $\boldsymbol{r}$ 的 δ 函数。为了求解(5.61)，不失一般性我们可以令 $\boldsymbol{r}'=0$。这时(5.61)可以写作

$$\nabla^2G(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2G(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=-4\pi f(\boldsymbol{0},t)\delta(\boldsymbol{r}). \tag{5.62}$$

我们先求解 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$ 的情形。这时右侧的非齐次项变为零，我们得到方程

$$\nabla^2G(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2G(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=0. \tag{5.63}$$

选取球坐标，拉普拉斯算符写作

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{5.64}$$

显然这个问题具有球对称性，解仅有 r 依赖。因此，(5.63)可以写作

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}G(r,t)\right)-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 G(r,t)}{\partial t^2}=0\,. \tag{5.65}$$

这个方程应该在数理方法课中多次求解过了。这里再讲一遍。令

$$R(r,t)=rG(r,t)\,, \tag{5.66}$$

代入(5.65)，得到

$$\frac{\partial^2 R(r,t)}{\partial r^2}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 R(r,t)}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial R(r,t)}{\partial r}-\frac{1}{c_0}\frac{\partial R(r,t)}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial R(r,t)}{\partial r}+\frac{1}{c_0}\frac{\partial R(r,t)}{\partial t}\right)=0\,. \tag{5.67}$$

这是一个标准的一维波动方程。求解的一个技巧是引入新变量

$$u=r-c_0t,\,,\qquad v=r+c_0t\,, \tag{5.68}$$

这一组变量又称作光锥坐标，因为 $u=0$ 或 $v=0$ 的点刚好是从 $r=0,t=0$ 处发出的光所能达到的点。注意到

$$\frac{\partial R(u,v)}{\partial u}=\frac{\partial R(u,v)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial u}+\frac{\partial R(u,v)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R(u,v)}{\partial r}-\frac{1}{c_0}\frac{\partial R(u,v)}{\partial t}\right)\,, \tag{5.69}$$

类似的也可以求得对 v 的偏导数。在光锥坐标下，上述一维波动方程简化成

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 R(u,v)}{\partial u\partial v}=0\,. \tag{5.70}$$

这个方程的一般解可以写作

$$R(r,t)=R(u,v)=g_1(-u/c_0)+g_2(v/c_0)=g_1(t-r/c_0)+g_2(t+r/c_0)\equiv g_1(t_{ret})+g_2(t_{adv})\,, \tag{5.71}$$

其中 $t_{ret}=t-r/c_0$ 称作推迟时间，$t_{adv}=t+r/c_0$ 称作超前时间。g_1 和 g_2 是任意函数。$g_1(t_{\rm ret})$ 的物理意义是在 $t_{\rm ret}<t$ 时刻从距离为 r 处的源对 t 时刻观测点的影响，而 $g_2(t_{\rm adv})$ 的物理意义是在 $t_{\rm adv}>t$ 时刻从距离为 r 处的源对 t 时刻观测点的影响，因此 $g_2(t_{\rm adv})$ 是不满足因果律的，需要舍去。下面我们来确定 g_1 的函数形式。在 $r\neq 0$ 处我们的格林函数已经写为

$$G(r,t)=\frac{g_1(t-r/c_0)}{r}\,, \tag{5.72}$$

在 $r\sim 0$ 处，(5.62)中等式右侧的非齐次项变得无穷大，等式左侧的时间偏导数将变得不重要，可以忽略。这时(5.62)可以写作

$$\lim_{r\to 0}\nabla^2 G(r,t)=-4\pi f(\mathbf{0},t)\delta(\boldsymbol{r})\,, \tag{5.73}$$

这是我们熟知的泊松方程，其解可以写为

$$\lim_{r\to 0}G(r,t)=\frac{f(\mathbf{0},t)}{r}\,. \tag{5.74}$$

比较(5.72)和(5.74)，可知

$$g_1(t-r/c_0)=f(0,t-r/c_0)\,, \tag{5.75}$$

即格林函数写为

$$G(r,t)=\frac{f(\mathbf{0},t-r/c_0)}{r}\,, \tag{5.76}$$

这是 $\boldsymbol{r}'=\mathbf{0}$ 时的格林函数。当 $\boldsymbol{r}'\neq\mathbf{0}$ 时，应该写作

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t)=\frac{f(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,, \tag{5.77}$$

将其代入形式解(5.59)，得到

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\int\frac{f(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}' \tag{5.78}$$

换句话说，对于标势和矢势，我们分别得到推迟势解

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'\,, \tag{5.79}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}'\,, \tag{5.80}$$

可以验证，推迟势满足洛伦兹条件。

例：无穷长直线上有电流

$$I(t)=\begin{cases}0\,, & \text{for } t\leq 0\,,\\ I_0\,, & \text{for } t>0\,.\end{cases} \tag{5.81}$$

求出对应的电场和磁场。

例 5.1 设在 $t<0$ 时刻没有电荷和电流存在。在 $t=0$ 时刻在坐标原点放置一静止带电 Q 的粒子，求 $t\geq 0$ 的势和场分布。

解 首先必须强调这个例子不具有实际意义，因为其违背电荷守恒定律。电荷密度可以写为

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=Q\theta(t)\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}) \tag{5.82}$$

其中 $\theta(t)$ 是阶跃函数。推迟势可写为

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{Q\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}')\theta(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r'\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\theta(t-|\boldsymbol{r}|/c)}{|\boldsymbol{r}|}\end{aligned} \tag{5.83}$$

电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=&-\nabla\Phi(\boldsymbol{r},t)\\=&-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\theta(t-|\boldsymbol{r}|/c)\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}|}\frac{\partial\theta(t-|\boldsymbol{r}|/c)}{\partial|\boldsymbol{r}|}\nabla|\boldsymbol{r}|\\=&\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\theta(t-|\boldsymbol{r}|/c)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{e}_r}{r}\delta(t-|\boldsymbol{r}|/c)\end{aligned} \tag{5.84}$$

例 5.2 求匀速运动点电荷的推迟势，并求出相应的电场和磁场。真空中光速记为 $c_0=c$。

解 不妨设点电荷带电为 Q，速度为 $\boldsymbol{v}$，在 t 时刻位于坐标 $\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{v}t$。因此点电荷密度可以写成

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=Q\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t) \tag{5.85}$$

而电流密度可以写为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v} \tag{5.86}$$

因此推迟标势可以写为

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3x' \\ &= \int\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',\tau)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(\tau-(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c_0))d\tau\, d^3x' \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\delta^{(3)}\left[\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{v}\tau\right]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(\tau-(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c))d\tau\, d^3x'\end{aligned} \tag{5.87}$$

利用三维 delta 函数将 $\boldsymbol{r}'$ 积掉，我们得到

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}\tau|}\delta(\tau-(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}\tau|/c))d\tau \tag{5.88}$$

对于 δ 函数积分，数理方法中学过

$$\int d\tau\, g(\tau)\delta(f(\tau)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{g(\tau_i)}{|f'(\tau_i)|}\,, \tag{5.89}$$

其中 τ_i 是 $f(\tau)$ 在积分区域内的第 i 个根。因此我们需要求解方程:

$$c\tau = ct - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}\tau| \tag{5.90}$$

或者写成

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}\tau| = c(t-\tau) \tag{5.91}$$

由于上式左边大于零，因此其解应有 $t>\tau$。记这个解为推迟时刻 $\tau = t_{\rm ret}$。(用时空图解释该解的物理意义。) 不妨设 $\boldsymbol{v}$ 沿 x 轴，$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{r} = (x,y,z)$。因此，(5.91)可以写为

$$(x-v\tau)^2 + y^2 + z^2 = c^2(t-\tau)^2 \tag{5.92}$$

这是一个二次方程，其 $\tau < t$ 的根为

$$t_{\rm ret} = \tau = \frac{1}{1-\beta^2}\left(t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c}\sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}\right) \tag{5.93}$$

其中我们定义了

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{5.94}$$

因此，推迟势可以写为

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_{\rm ret}|}\frac{1}{1-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_{\rm ret})\cdot\boldsymbol{v}}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_{\rm ret}|}} \tag{5.95}$$

注意上式右边还考虑了 delta 函数中的雅可比因子的贡献。如果我们记

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t_{\rm ret} \tag{5.96}$$

为从 $t_{\rm ret}$ 时刻粒子所在位置指向 r 的矢量，则

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}/c} \tag{5.97}$$

利用

$$|\boldsymbol{R}| = c(t-t_{\rm ret})\,,\qquad \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}/c = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{c} - \frac{v^2}{c}t_{\rm ret} = \frac{vx}{c} - \frac{v^2}{c}t_{\rm ret} \tag{5.98}$$

因此有

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c(t-t_{\rm ret}) - \frac{vx}{c} + \frac{v^2}{c}t_{\rm ret}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{1}{t - \frac{vx}{c^2} - (1-\beta^2)t_{\rm ret}} \tag{5.99}$$

利用(5.93)的结果，得到

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{r},t) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{1}{\frac{1}{c}\sqrt{(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}}\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2}+y^2+z^2}}\end{aligned} \tag{5.100}$$

而相应的矢势为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2}+y^2+z^2}}\boldsymbol{v} \tag{5.101}$$

为了求出电场，我们需要求出标势的梯度，和矢势的时间导数。首先是梯度，

$$\begin{aligned}&\nabla\Phi(\boldsymbol{r},t) = (\boldsymbol{e}_x\partial_x+\boldsymbol{e}_y\partial_y+\boldsymbol{e}_z\partial_z)\Phi(\boldsymbol{r},t)\\ &\quad= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}}\cdot(-\frac{1}{2})\frac{1}{(\frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2}+y^2+z^2)^{3/2}}2\Big[\frac{(x-vt)}{1-\beta^2}\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z\Big]\end{aligned} \tag{5.102}$$

而矢势的时间导数为

$$\begin{aligned}\partial_t\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{Q\mu_0}{4\pi\sqrt{1-\beta^2}}\cdot(-\frac{1}{2})\frac{1}{(\frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2}+y^2+z^2)^{3/2}}2\Big[-\frac{(x-vt)}{1-\beta^2}v\boldsymbol{v}\Big]\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}}\cdot(-)\frac{1}{(\frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2}+y^2+z^2)^{3/2}}\Big[-\frac{(x-vt)}{1-\beta^2}\beta^2\boldsymbol{e}_x\Big]\end{aligned} \tag{5.103}$$

有趣的是，当我将这两项加起来，我们得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\nabla\Phi-\partial_t\boldsymbol{A} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{1}{(\frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2}+y^2+z^2)^{3/2}}\Big[(x-vt)\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z\Big] \tag{5.104}$$

如果我们定义在 t 时刻从粒子所在坐标 $\boldsymbol{v}t$ 指向 $\boldsymbol{r}$ 处的矢量，

$$\boldsymbol{R}_p = \boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t \tag{5.105}$$

则结果可以写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\nabla\Phi-\partial_t\boldsymbol{A} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{1}{\Big[\frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2}+y^2+z^2\Big]^{3/2}}\boldsymbol{R}_p \tag{5.106}$$

我们看到，运动电荷的电场也是径向的！但其强度不再各向均匀；沿着粒子运动方向和

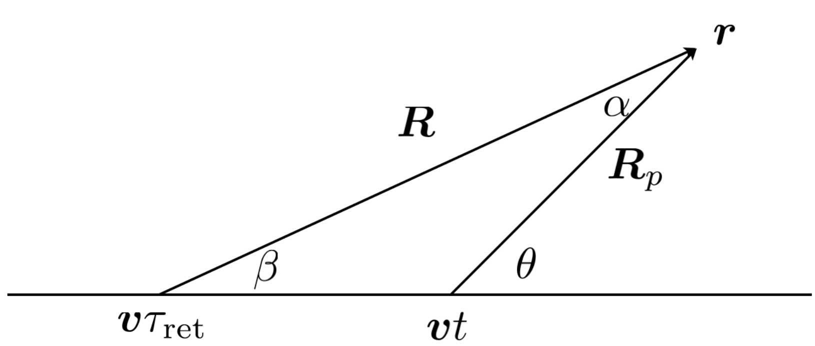

图 5.1: 匀速运动点电荷。

反方向的电场强度最小，垂直于电荷运动方向的电场强度最大。

而磁场由矢势的旋度给出，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=(\partial_x A_y-\partial_y A_x)\boldsymbol{e}_z+(\partial_y A_z-\partial_z A_y)\boldsymbol{e}_x+(\partial_z A_x-\partial_x A_z)\boldsymbol{e}_y \tag{5.107}$$

由于 $A_y=A_z=0$，因此显然 $B_x=0$。而

$$B_z=-\partial_y A_x=-v\mu_0\varepsilon_0\partial_y\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{v}{c^2}E_y \tag{5.108}$$

类似的

$$B_y=\frac{v}{c^2}E_z \tag{5.109}$$

对于沿着一般方向的 $\boldsymbol{v}$，我们有

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{5.110}$$

5.6 洛伦兹变换

事实上麦克斯韦方程的推迟势蕴含了洛伦兹变换，尽管我们仍将狭义相对论的荣耀归于爱因斯坦。回顾(5.100)中匀速运动标势的结果，

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2+y^2+z^2}} \tag{5.111}$$

其中 $\beta=v/c$。另一方面，我们可以做一个参考系变化去到粒子静止的惯性系。设粒子以速度 v 运动的惯性系 S 坐标为 (t,x,y,z)，粒子静止的惯性系 S' 坐标为 (t',x',y',z')。在 S' 系中，

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}} \tag{5.112}$$

由于粒子沿 x 方向运动，因此在 y 和 x 方向是相对静止的，因此可以合理认为

$$y'=y\,,\qquad z'=z \tag{5.113}$$

比较(5.113)和(5.112)，立刻有

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\qquad(\text{洛伦兹}) \tag{5.114}$$

而在牛顿力学中，伽利略坐标变换为

$$x'=x-vt\qquad(\text{伽利略}) \tag{5.115}$$

在牛顿力学中，时间是均匀流淌的，

$$t'=t\qquad(\text{牛顿}) \tag{5.116}$$

但在此，我们仅假设 t' 是 t 和 x 的线性函数，$t'=at+bx$，a,b 是可能依赖于速度的函数，切在 $v=0$ 时应过渡为 $t'=t$。为了求出于麦克斯韦方程自洽的时间变化，我们考虑真空中的麦克斯韦方程，

$$\Box\Phi(\boldsymbol{r},t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{5.117}$$

我们假定在任何惯性系中麦克斯韦方程应具有相同形式，换言之，

$$\Box'\Phi'(\boldsymbol{r}',t') = \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\Phi'(\boldsymbol{r}',t') = 0 \tag{5.118}$$

我们将坐标变换(5.115)代入(5.117)中，利用

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}+2\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}\\ &= \frac{1}{1-\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+b^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}+2\frac{b}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}\end{aligned} \tag{5.119}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}+2\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}\\ &= \frac{v^2}{1-\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+a^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-2\frac{va}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}\end{aligned} \tag{5.120}$$

因此，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\left(b^2-\frac{a}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\left(\frac{b}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{va}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} \tag{5.121}$$

另外我们也有

$$\frac{\partial^2}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,,\qquad \frac{\partial^2}{\partial z'^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.122}$$

因此，为了使得 S' 系中的方程具有(5.118)的形式，我们要求

$$b^2-\frac{a}{c^2}=-\frac{1}{c^2}\,,\qquad b+\frac{va}{c^2}=0 \tag{5.123}$$

解得

$$a=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\qquad b=-\frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5.124}$$

因此，我们得到使得麦克斯韦方程在坐标系变换下不变，沿 x 方向的匀速运动的坐标系变换应具有形式

$$\boxed{\begin{aligned}t' &= \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ y' &= y\\ z' &= z\end{aligned}} \tag{5.125}$$

这就是著名的洛伦兹变换。

5.7 李纳-维谢尔势

下面我们用推迟势来求出运动点电荷的标势和矢势，即所谓的李纳-维谢尔势。设带电荷 q 的点粒子在 t 时刻的位置矢量由 $\boldsymbol{w}(t)$ 给出。该点电荷的电荷密度可以写作

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t))\,. \tag{5.126}$$

代入推迟势(5.80)，得到

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}' \tag{5.127}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\tau\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{\rho(\boldsymbol{r}',\tau)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(\tau-t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c) \tag{5.128}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\tau\int d^3\boldsymbol{r}'\frac{q\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{w}(\tau))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(\tau-t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c) \tag{5.129}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\tau\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(\tau)|}\delta\Big[\tau-t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(\tau)|/c\Big] \tag{5.130}$$

可以证明，

$$\tau-t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(\tau)|/c=0 \tag{5.131}$$

只有一个小于 t 的根。记小于 t 的根为 $t_{\rm ret}$，即推迟时间。因此(5.130)的积分可以写为

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\tau\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(\tau)|}\delta\Big[\tau-t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(\tau)|/c\Big] \tag{5.132}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t_{\rm ret})|}\frac{1}{1-\frac{\Big[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t_{\rm ret})\Big]\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t_{\rm ret})|}} \tag{5.133}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t_{\rm ret})|-\Big[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t_{\rm ret})\Big]\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})} \tag{5.134}$$

注意到点电荷运动的电流密度可以写作

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t))=\rho(\boldsymbol{r},t)\dot{\boldsymbol{w}}(t)\,, \tag{5.135}$$

用同样的方法可以求得运动点电荷的矢势为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})c}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t_{\rm ret})|-\Big[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t_{\rm ret})\Big]\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})}=\mu_0\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})\Phi(\boldsymbol{r},t)}{c^2}\,. \tag{5.136}$$

(5.134)和(5.136)就是著名的李纳-维谢尔势。

由于 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t_{\rm ret})$ 这个组合在李纳-维谢尔势中经常出现，我们这里把它简写为

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t_{\rm ret})\equiv\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r},t)\,. \tag{5.137}$$

它代表了从 $t_{\rm ret}$ 时刻点电荷所在位置指向 $\boldsymbol{r}$ 处的矢量。这时李纳-维谢尔势简写为

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{cR-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r},t)\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})}\,, \tag{5.138}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})\Phi(\boldsymbol{r},t)}{c^2}\,. \tag{5.139}$$

例：求解以匀速 v 运动的点电荷 q 的李纳-维谢尔势。

5.8 运动电荷的电磁场：数学推导

有了运动电荷的电磁势后，一个自然问题是用它来求解运动电荷的电磁场。由李纳-维谢尔势看出，推迟时间 $t_{\rm ret}$ 也依赖于 r 和 t，这使得问题的计算极为复杂。我们知道电磁场可以表示为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-\partial_t\boldsymbol{A}\,,\qquad\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\,. \tag{5.140}$$

我们先来求电场。为此，我们先看 $\partial_t \boldsymbol{A}$,

$$\partial_t \boldsymbol{A} = \frac{1}{c^2}\left[\ddot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})\Phi(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right], \tag{5.141}$$

$$= \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})\Phi(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} - \dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})\frac{qc}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}}))^2}\frac{\partial(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}}))}{\partial t}. \tag{5.142}$$

因此我们需要求 $\partial_t|\boldsymbol{R}|$ 和 $\partial_t t_{\text{ret}}$。由推迟时间的定义知道

$$c(t-t_{\text{ret}}) = |\boldsymbol{R}|, \tag{5.143}$$

对左右两边求时间偏导数,

$$c(1-\partial_t t_{\text{ret}}) = \partial_t|\boldsymbol{R}| = \frac{\partial|\boldsymbol{R}|}{\partial t_{\text{ret}}}\partial_t t_{\text{ret}}. \tag{5.144}$$

而

$$\frac{\partial R}{\partial t_{\text{ret}}} = \frac{\partial\sqrt{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}}}{\partial t_{\text{ret}}} \tag{5.145}$$

$$= \frac{1}{2R}\frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})}{\partial t_{\text{ret}}} \tag{5.146}$$

$$= \frac{1}{R}\boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t_{\text{ret}}} \tag{5.147}$$

$$= \frac{1}{R}\boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{w}(t_{\text{ret}}))}{\partial t_{\text{ret}}} \tag{5.148}$$

$$= -\frac{1}{R}\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}}). \tag{5.149}$$

因此

$$\partial_t t_{\text{ret}} = \frac{1}{1+\frac{1}{c}\frac{\partial|\boldsymbol{R}|}{\partial t_{\text{ret}}}} = \frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})}{Rc}}. \tag{5.150}$$

此外我们还需知道

$$\partial_t(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})) = \partial_{t_{\text{ret}}}(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}}))\partial_t t_{\text{ret}}, \tag{5.151}$$

$$= \Big[(\partial_{t_{\text{ret}}}\boldsymbol{R})\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}}) + \boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})\Big]\partial_t t_{\text{ret}} \tag{5.152}$$

$$= \Big[-\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}}) + \boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})\Big]\partial_t t_{\text{ret}} \tag{5.153}$$

$$= \Big[-|\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})|^2 + \boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})\Big]\frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\text{ret}})}{Rc}}. \tag{5.154}$$

综合以上，我们得到

$$\partial_t \boldsymbol{A} = \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{cR-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})}\frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})}{Rc}} \tag{5.155}$$

$$-\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret}))^2}c\left(1-\frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})}{Rc}}\right) \tag{5.156}$$

$$+\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{1}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret}))^2}\Big[-|\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})|^2+\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})\Big]\frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})}{Rc}} \tag{5.157}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{(cR-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret}))^2}(-\dot{\boldsymbol{w}}+R\ddot{\boldsymbol{w}}/c) \tag{5.158}$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{(cR-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret}))^3}\frac{R}{c}\Big[c^2-|\dot{\boldsymbol{w}}|^2+\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}}\Big]\dot{\boldsymbol{w}}\,. \tag{5.159}$$

注意上式的 $\boldsymbol{w}$ 的宗量都取在 $t_{\rm ret}$。

我们再来看梯度项。

$$\nabla\Phi = \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-1}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret}))^2}\nabla\Big[Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})\Big]\,. \tag{5.160}$$

我们先来看方括号中的第一项。由推迟时间的定义知道

$$c(t-t_{\rm ret}) = |\boldsymbol{R}|\,, \tag{5.161}$$

因此

$$\nabla|\boldsymbol{R}| = -c\nabla t_{\rm ret}\,. \tag{5.162}$$

或者

$$\nabla t_{\rm ret} = -\frac{1}{c}\nabla R \tag{5.163}$$

$$= -\frac{1}{c}\left((\partial_{t_{\rm ret}}R)\nabla t_{\rm ret}+\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right) \tag{5.164}$$

$$= -\frac{1}{c}\left(-\frac{1}{R}\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\rm ret})\nabla t_{\rm ret}+\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right) \tag{5.165}$$

因此

$$\nabla t_{\rm ret} = \frac{-\boldsymbol{R}}{Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}}\,. \tag{5.166}$$

写成分量形式，

$$\partial_i t_{\rm ret} = -\frac{R_i}{Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}}\,, \tag{5.167}$$

其中

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\,,\qquad \boldsymbol{R}=(R_1,R_2,R_3)=(R_x,R_y,R_z)\,. \tag{5.168}$$

方括号中的第二项可以写为

$$\nabla(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}) = \hat{\boldsymbol{x}}_i\partial_i(R_j w'_j) \tag{5.169}$$

$$= \hat{\boldsymbol{x}}_i\Big[w'_j(\partial_i R_j)+R_j(\partial_i w'_j)\Big] \tag{5.170}$$

其中

$$\partial_i R_j = \partial_i x_j - \partial_i w_j(t_{\text{ret}}) \tag{5.171}$$

$$= \delta_{ij} - (\partial_{t_{\text{ret}}} w_j)\partial_i t_{\text{ret}} \tag{5.172}$$

$$= \delta_{ij} - \dot{w}_j \frac{(-R_i)}{Rc - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}} \tag{5.173}$$

$$\partial_i \dot{w}_j = \partial_{t_{\text{ret}}} \dot{w}_j \partial_i t_{\text{ret}} = \ddot{w}_j \frac{(-R_i)}{Rc - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}}\,. \tag{5.174}$$

因此

$$\nabla(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}) = \hat{\boldsymbol{x}}_i \left[\dot{w}_j(\delta_{ij} - \dot{w}_j \frac{(-R_i)}{Rc - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}}) + R_j \ddot{w}_j \frac{(-R_i)}{Rc - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}}\right] \tag{5.175}$$

$$= \dot{\boldsymbol{w}} + \frac{\boldsymbol{R}|\dot{\boldsymbol{w}}|^2 - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}})}{Rc - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}} \tag{5.176}$$

因此

$$\nabla\Phi = \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(Rc - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^2} \left[-\nabla R + \nabla(\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})\right] \tag{5.177}$$

$$= \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(-\boldsymbol{R}c^2)}{(Rc - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^3} + \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\dot{\boldsymbol{w}}}{(Rc - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^2} \tag{5.178}$$

$$+ \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{R}(|\dot{\boldsymbol{w}}|^2 - \boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}})}{(Rc - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^3} \tag{5.179}$$

由上面的结果得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} =& -\nabla\Phi - \partial_t \boldsymbol{A} && (5.180)\\
=& -\frac{qc}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-\boldsymbol{R}c^2)}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^3} - \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\dot{\boldsymbol{w}}}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{(cR-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\mathrm{ret}}))^2}(-\dot{\boldsymbol{w}}+R\ddot{\boldsymbol{w}}/c) && (5.181)\\
& -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{(cR-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}(t_{\mathrm{ret}}))^3}\frac{R}{c}\Big[c^2-|\dot{\boldsymbol{w}}|^2+\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}}\Big]\dot{\boldsymbol{w}} - \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}(|\dot{\boldsymbol{w}}|^2-\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}})}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^3} && (5.182)\\
=& \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^3}\Bigg[\boldsymbol{R}c^3 - Rc^2\dot{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}c\dot{\boldsymbol{w}} + c^2R\dot{\boldsymbol{w}} - c\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\dot{\boldsymbol{w}} - cR^2\ddot{\boldsymbol{w}} && (5.183)\\
& + R\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\ddot{\boldsymbol{w}} - c^2R\dot{\boldsymbol{w}} + R|\dot{\boldsymbol{w}}|^2\dot{\boldsymbol{w}} - R\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}}\dot{\boldsymbol{w}} - c|\dot{\boldsymbol{w}}|^2\boldsymbol{R} + c\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{R}\Bigg] && (5.184)\\
=& \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^3}\Bigg[c^2(\boldsymbol{R}c - R\dot{\boldsymbol{w}}) + \cancel{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}c\dot{\boldsymbol{w}}} + \cancel{c^2R\dot{\boldsymbol{w}}} - \cancel{c\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\dot{\boldsymbol{w}}} - cR^2\ddot{\boldsymbol{w}} && (5.185)\\
& + R\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\ddot{\boldsymbol{w}} - \cancel{c^2R\dot{\boldsymbol{w}}} + |\dot{\boldsymbol{w}}|^2(R\dot{\boldsymbol{w}} - c\boldsymbol{R}) - R\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}}\dot{\boldsymbol{w}} + c\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{R}\Bigg] && (5.186)\\
=& \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(c^2-|\dot{\boldsymbol{w}}|^2)}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^3}(\boldsymbol{R}c - R\dot{\boldsymbol{w}}) && (5.187)\\
& + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^3}\Big[R[\boldsymbol{R}\times(\ddot{\boldsymbol{w}}\times\dot{\boldsymbol{w}})] + c\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{R}\times\ddot{\boldsymbol{w}})\Big] && (5.188)\\
=& \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(c^2-|\dot{\boldsymbol{w}}|^2)}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^3}(\boldsymbol{R}c - R\dot{\boldsymbol{w}}) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}\times[(\boldsymbol{R}c-\dot{\boldsymbol{w}}R)\times\ddot{\boldsymbol{w}}]}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^3} && (5.189)
\end{aligned}$$

这个结果有明确的物理意义。第一项与加速度无关，通常称作广义库伦场或速度场。第二项与加速度成正比，称作加速场或辐射场。我们在后面将看到，第二项与加速粒子辐射的电磁波相关。

用同样的方法我们可以计算磁场。其结果可以写为

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{R}}{R}\times\boldsymbol{E}\,. \tag{5.190}$$

例：计算匀速运动点电荷的电磁场。

解：对于匀速运动粒子，加速度为零，电场可以写为

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(c^2-|\dot{\boldsymbol{w}}|^2)}{(Rc-\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{w}})^3}(\boldsymbol{R}c - R\dot{\boldsymbol{w}})\,. \tag{5.191}$$

不妨令 $\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{v}t$，推迟时间定义为

$$c(t-t_{\mathrm{ret}}) = R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t_{\mathrm{ret}}|\,. \tag{5.192}$$

注意到

$$\boldsymbol{R}c - R\boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t_{\mathrm{ret}}) - R\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{r} - (ct_{\mathrm{ret}} + R)\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{r} - ct\boldsymbol{v}\,. \tag{5.193}$$

定义矢量

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{p}} \equiv \boldsymbol{R} - R\boldsymbol{v}/c = \boldsymbol{r} - t\boldsymbol{v}\,, \tag{5.194}$$

这是在当前时刻 t 从粒子所在位置到观测点 $\boldsymbol{r}$ 的矢量。注意到

$$c\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}_p = cR^2 - R\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v} = R(cR - \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})\,, \tag{5.195}$$

因此

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(c^2-v^2)R^3}{(c\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}_p)^3}c\boldsymbol{R}_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1-v^2/c^2)R^3}{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}_p)^3}\boldsymbol{R}_p \tag{5.196}$$

注意到

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}_p = RR_p\cos\alpha\,. \tag{5.197}$$

利用正弦关系

$$\frac{\sin\alpha}{v(t-t_{\rm ret})} = \frac{\sin\alpha}{Rv/c} = \frac{\sin\beta}{R_p}\,, \tag{5.198}$$

有

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\beta\frac{R^2}{R_p^2}}\,. \tag{5.199}$$

一个显然的几何关系是

$$R\sin\beta = R_p\sin\theta\,, \tag{5.200}$$

因此

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}\,. \tag{5.201}$$

故

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1-v^2/c^2)}{(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta)^{3/2}}\frac{\boldsymbol{R}_p}{R_p^3}\,. \tag{5.202}$$

因此在时刻 t，$\boldsymbol{r}$ 处的电场的方向与在 t 时刻从粒子所在位置指向 $\boldsymbol{r}$ 的矢量方向一致。注意到在 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 点接受到的电场信号实际上是来自推迟时刻的粒子的，因此这个结论还是有点让人吃惊。我们看两个极端情况。当 $\theta=0$ 时，观测点就在粒子的正前方，这时

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(1-v^2/c^2)\frac{\boldsymbol{R}_p}{R_p^3}\,. \tag{5.203}$$

与库伦场相比，多了一个压低因子 $(1-v^2/c^2)$。如果观测点刚好与 t 时刻的粒子平行，$\theta=\pi/2$，这时

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\boldsymbol{R}_p}{R_p^3}\,. \tag{5.204}$$

因此多了一个增强因子 $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$。

例：设有初始静止的点电荷，在 $t=0$ 时刻在短时间内加速到 $0.8c$，其后做匀速运动。刻画出从静止到匀速运动这段时间内的电场变化。

reference