

## 第 6 章 傅立叶级数和傅立叶变换

### 6.1 傅立叶级数

我们在前面讨论了泰勒级数和洛朗级数。另一类非常重要的级数是傅立叶级数，记为

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos(2z) + a_3 \cos(3z) + \cdots \\ & b_1 \sin z + b_2 \sin(2z) + b_3 \sin(3z) + \cdots \\ & f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nz) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nz) \end{aligned} \quad (6.1)$$

其中第一行称作傅立叶余弦函数，显然是周期为  $2\pi$  的偶函数；第二行称作傅立叶正弦函数，是周期为  $2\pi$  的奇函数；第三行一般不具有奇偶性，但是周期仍为  $2\pi$ 。

一个自然的问题是  $f(z)$  的收敛性问题。利用

$$\cos(nz) = \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2}, \quad \sin(nz) = \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i}, \quad (6.2)$$

并令  $w = e^{iz}$ ，我们有

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + \frac{a_1 - ib_1}{2}w + \frac{a_2 - ib_2}{2}w^2 + \cdots + \frac{a_1 + ib_1}{2}\frac{1}{w} + \frac{a_2 + ib_2}{2}\frac{1}{w^2} + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n \end{aligned} \quad (6.3)$$

显然这是关于  $w$  的洛朗级数。从前面洛朗级数理论知道，这个函数的收敛区域是一个圆环

$$\alpha < |w| < \beta \quad (6.4)$$

即

$$\alpha < |e^{ix-y}| < \beta \quad (6.5)$$

或者

$$\ln \alpha < -y < \ln \beta \quad (6.6)$$

对应到  $z$  平面是一个平行于实轴的无限长带子。如果  $\alpha = \beta$ ，则收敛区域变为一条平行于实轴的线。我们下面关心的例子是  $a_n$  和  $b_n$  均为实数的情形。我们有结论

#### 定理 6.1

实系数傅立叶级数如果收敛的话，收敛区域只能是实轴。在实轴以外必然发散。



对于实傅立叶级数，我们有

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \bar{c}_{-n}. \quad (6.7)$$

假设函数  $f(z)$  已知并且具有傅立叶级数表示

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n \quad (6.8)$$

一个自然问题是如何求得展开系数  $c_n$ 。由于这是一个  $w$  的洛朗级数，有前面的知识直接可知

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \quad (6.9)$$

其中积分围道为收敛圆环内的一个过原点的圆。如果收敛区域是一个环域，则柯西积分公式给出了这个洛朗级数的系数：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(z)}{w} dw \\ \frac{a_n - ib_n}{2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(z)}{w^{n+1}} dw, \quad n > 0 \\ \frac{a_n + ib_n}{2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} f(z) w^{n-1} dw, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

如果令  $w = e^{it}$ ，则

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{e^{it}} i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \end{aligned} \quad (6.11)$$

上面的证明不能直接用于  $a_n$  和  $b_n$  均为实数的情形，原因是此时收敛环压缩为收敛圆，但只定义在圆上的函数不是解析函数。

尽管如此，我们下面将看到，(6.11)在  $a_n$  和  $b_n$  均为实数的时候也成立。

### 定理 6.2. 傅立叶定理

设实函数  $f(x)$  在  $-\pi < x < \pi$  上只有有限个最大值或最小值，以及有限个不连续点，则如下傅立叶级数

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)) \quad (6.12)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(mt) dt \end{aligned} \quad (6.13)$$

在  $x$  处收敛于

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{f(x - \varepsilon) + f(x + \varepsilon)}{2} \quad (6.14)$$

注意在函数间断点对应的是逐点收敛，而非一致收敛。在复数表示下，傅立叶级数

具有更为易记忆的形式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (6.15)$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (6.16)$$



证明：如下证明方法基于复变函数，是柯西最早给出的。文献中通常给的是狄利克雷的证明。将(6.13)代入(6.12)，得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos[m(x-t)] dt \quad (6.17)$$

我们取该无穷级数的前  $2N+1$  项，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{m=1}^N \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos[m(x-t)] dt \\ &= \sum_{m=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{im(x-t)} dt \end{aligned} \quad (6.18)$$

并在稍后让  $N \rightarrow \infty$ 。我们把这个有限级数分为两部分

$$\begin{aligned} U_N(x) &= \sum_{m=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x f(x) e^{im(x-t)} dt \\ V_N(x) &= \sum_{m=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_x^{\pi} f(x) e^{im(x-t)} dt \end{aligned} \quad (6.19)$$

我们下面将证明，

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_N(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2} f(x - \varepsilon), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} V_N(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2} f(x + \varepsilon). \quad (6.20)$$

为此，我们定义函数

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{e^{2\pi\zeta} - 1} \int_{-\pi}^x e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \quad (6.21)$$

这是一个关于  $\zeta$  的解析函数，奇点在  $\dots, -3i, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots$ ，并且在奇点  $im$  处的留数为

$$\text{Res}(\psi, im) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x e^{im(x-t)} f(t) dt \quad (6.22)$$

因此如果我们取一个以原点为圆心，半径为  $N+1/2$  的正定向圆围道  $C_N$ ，在围道上有  $\zeta = (N+1/2)e^{i\theta}$ ，则根据留数定理有

$$U_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \psi(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta \psi(\zeta) d\theta. \quad (6.23)$$

为了估计这个积分, 我们把之分成五部分,

$$\begin{aligned} U_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2-1/\sqrt{N}} \zeta \psi(\zeta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2-1/\sqrt{N}}^{\pi/2+1/\sqrt{N}} \zeta \psi(\zeta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2+1/\sqrt{N}}^{3\pi/2-1/\sqrt{N}} \zeta \psi(\zeta) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{3\pi/2-1/\sqrt{N}}^{3\pi/2+1/\sqrt{N}} \zeta \psi(\zeta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{3\pi/2+1/\sqrt{N}}^{2\pi} \zeta \psi(\zeta) d\theta \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned} \quad (6.24)$$

首先注意到在  $I_1$  的积分范围内, 有  $\operatorname{Re}(\zeta) > O(\sqrt{N})$ 。因此被积函数

$$\zeta \psi(\zeta) = \frac{\zeta}{e^{2\pi\zeta} - 1} \int_{-\pi}^x e^{i\zeta(x-t)} f(t) dt \quad (6.25)$$

趋于 0。同理可证  $I_5$  趋于 0。再来看  $I_2$ 。在这个区域内被积函数  $\zeta \psi(\zeta)$  总是有限的, 而  $d\theta$  的积分限无穷小, 因此也趋于零。同理也可得  $I_4$  趋于零。

因此主要的贡献来自  $I_3$ 。在积分区域内, 有  $\operatorname{Re}(\zeta) < -O(\sqrt{N})$ ,

$$\zeta \psi(\zeta) = \frac{1}{e^{2\pi\zeta} - 1} \int_{-\pi}^x \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \sim - \int_{-\pi}^x \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt = -J_1 - J_2 \quad (6.26)$$

其中

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-\pi}^{x-\frac{1}{\ln N}} \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \\ J_2 &= \int_{x-\frac{1}{\ln N}}^x \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \end{aligned} \quad (6.27)$$

对于  $J_1$  其被积函数趋于零, 积分区间有限, 因此  $J_1 \rightarrow 0$ 。而对于  $J_2$  我们作变量替换  $v = \zeta(x-t)$ ,

$$J_2 = \int_0^{\frac{\zeta}{\ln N}} e^v f\left(x - \frac{v}{\zeta}\right) dv \quad (6.28)$$

再令  $w = e^v$ ,

$$J_2 = \int_1^{\exp(\frac{\zeta}{\ln N})} f\left(x - \frac{\ln w}{\zeta}\right) dw \quad (6.29)$$

在  $d\theta$  的积分区间内,  $\exp(\zeta/\ln N) \rightarrow 0$ ,  $\ln w/\zeta \rightarrow 0$ 。因此

$$J_2 \sim \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_1^0 f(x - \varepsilon) dw = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x - \varepsilon) \quad (6.30)$$

因此

$$U_N(x) = I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2+1/\sqrt{N}}^{3\pi/2-1/\sqrt{N}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f(x - \varepsilon) d\theta \quad (6.31)$$

因此

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_N(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2} f(x - \varepsilon) \quad (6.32)$$

同理可证

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_N(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2} f(x + \varepsilon) \quad (6.33)$$

定理得证。

**例 6.1** 计算傅立叶级数表示。在  $(-\pi, \pi)$  周期内, 函数为

$$f(x) = |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi$$

我们注意到这是一个  $(-\infty, \infty)$  上的连续偶函数, 因此可通过傅立叶余弦级数表示。记其傅立叶余弦级数为

$$f_c(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \cdots, \quad (6.34)$$

则

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}, \\ a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0, \\ a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(2x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(2x) dx = -\frac{4}{3\pi}, \\ a_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(3x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(3x) dx = 0, \\ a_4 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(4x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(4x) dx = -\frac{4}{15\pi}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

从前面几项可以估计, 傅立叶系数在  $n$  很大时的与  $1/n^2$  相关。换句话说, 该函数的傅立叶系数是一个绝对收敛级数。用前 5 项可以画出图形如下:

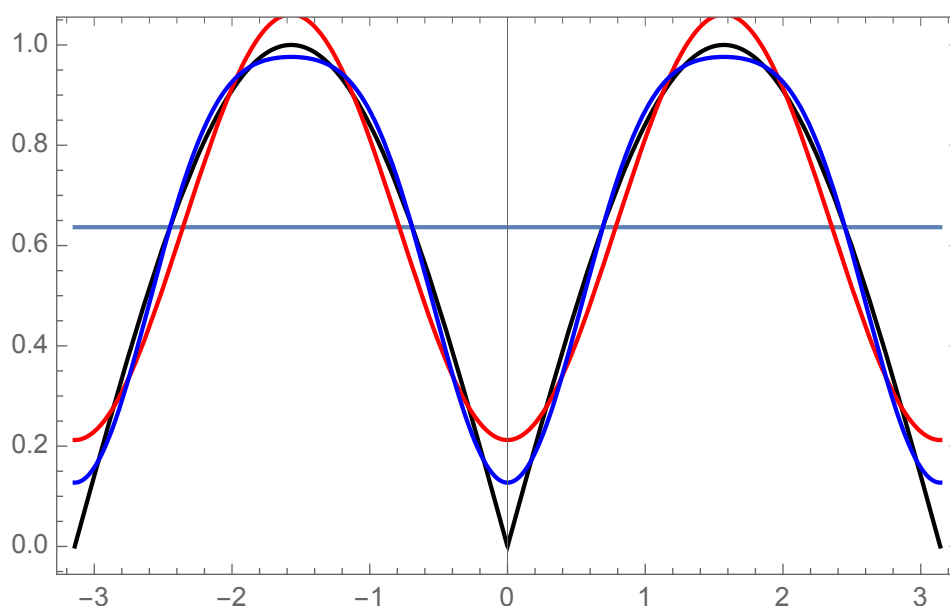


图 6.1: 黑色: 完整结果; 灰色:  $n=0$ ; 红色:  $n=0, 1, 2, 3$ ; 蓝色:  $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$

**例 6.2** 计算方波的傅立叶级数表示。在  $(-\pi, \pi)$  周期内, 方波为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

我们考虑  $f(x) - 1/2$  的傅立叶级数表示。显然这是一个奇函数, 因此用傅立叶正弦级数表示是方便的。令

$$f_s(x) = \frac{1}{2} + b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx). \quad (6.36)$$

则傅立叶系数为

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi} \\ b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx = 0 \\ b_3 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(3x) dx = \frac{2}{3\pi} \\ b_4 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(4x) dx = 0 \\ b_5 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(5x) dx = \frac{2}{5\pi} \end{aligned} \quad (6.37)$$

一般的，该傅立叶系数可以写为

$$\{b_n\} = 2\pi \left\{ \frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, 0, \dots \right\} \quad (6.38)$$

这个系数级数与调和级数的收敛性质类似，因此是不收敛的。傅立叶级数前 5 项的图形可以画为 对于不连续函数，傅立叶级数会出现所谓的吉布斯现象，即在不连续点，傅立

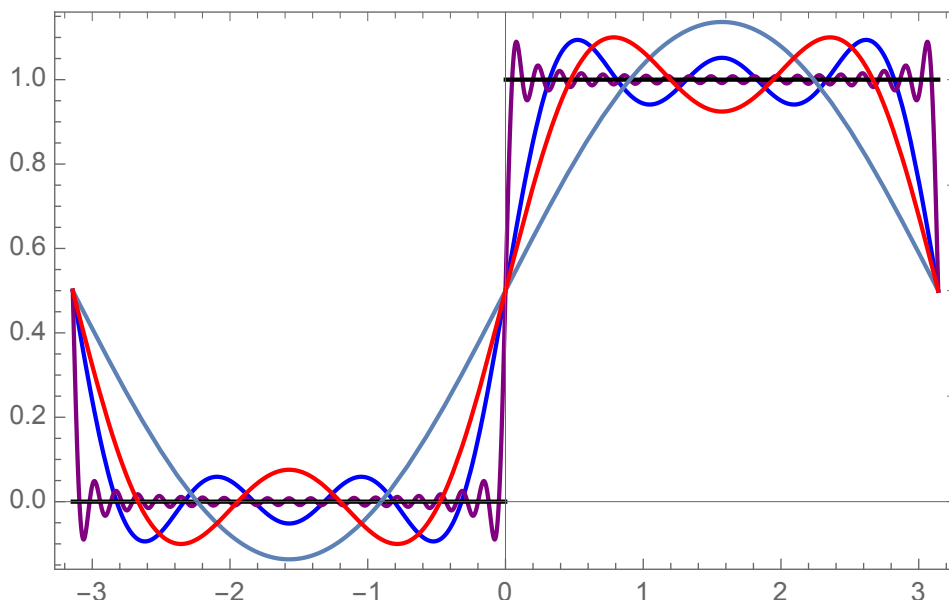


图 6.2: 黑色：完整结果；灰色：n=0；红色：n=0,1,2,3；蓝色：n=0,1,2,3,4,5；紫色：前 40 项和

叶级数的部分和会比原来函数高出大约 18%。但是这与傅立叶定理并不违背，因为在这一点傅立叶级数只是逐点收敛，而非一致收敛。

**注** 一般的，如果傅立叶级数的系数是绝对收敛的，则对应的傅立叶级数是一致绝对收敛的；如果傅立叶级数的系数只是条件收敛的，则对应的傅立叶级数是逐点收敛的。

另外，傅立叶级数系数的大  $n$  衰变行为也反映了对应函数的光滑性质。越光滑的函数其傅立叶系数随  $n$  增大衰变的越快。


**练习 6.1** 对于如下定义在  $-\pi \leq x \leq \pi$  上的函数，计算其傅立叶级数：

1.  $f(x) = |\sin x|$
2.  $f(x) = |x|$


3.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

4.  $f(x) = x \cos x$ 

 **练习 6.2** 在  $-\pi \leq x \leq \pi$  上计算  $f(x) = x^2$  的傅立叶级数, 并用其计算如下无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

 **练习 6.3** 在  $-\pi \leq x \leq \pi$  上计算  $f(x) = x^4$  的傅立叶级数, 并用其计算如下无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

## 6.2 傅立叶变换

上一节的结果可以推广到周期为  $2T$  的函数  $f(t)$ , 此时的傅立叶级数应写为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n t}{L} \quad (6.39)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{\pi n t}{T} dt \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin \frac{\pi n t}{T} dt \end{aligned} \quad (6.40)$$

或者写成复数形式

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \frac{i \pi n t}{T}, \\ c_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \exp \left( -i \frac{\pi n t}{T} \right) dt \end{aligned} \quad (6.41)$$

注意到  $2\pi/(2T) = \omega_1$  具有频率单位, 是在  $2T$  周期内的正弦/余弦波的最小非零频率单元。因此自然可以定义  $\omega_n = n\omega_1$  作为最小基元的  $n$  倍频, 频率改变的最小单元为  $\Delta\omega = \pi/T$ 。因此复的傅立叶级数可以写为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t), \\ c_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \exp(-i\omega_n t) dt \end{aligned} \quad (6.42)$$

我们把(6.42)的第二行代入第一行, 得到

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t') \exp(-i\omega_n t') dt' \exp(i\omega_n t) \quad (6.43)$$

对于非周期函数, 可以认为  $T \rightarrow \infty$ 。此时频率单元  $\omega_1 \rightarrow 0$ , 而  $n$  倍频成为一个连续变

量, 记为  $\omega = \omega_n$ 。另外

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{2T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \quad (6.44)$$

因此(6.43)可以写为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-i\omega t') dt' \right] \exp(i\omega t) \quad (6.45)$$

### 定义 6.1. 傅立叶变换

我们把方括号中的量称作  $f(t)$  的傅立叶变换, 记为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (6.46)$$

而

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (6.47)$$

称为反傅立叶变换或逆傅立叶变换。当  $\hat{f}(\omega)$  在实轴上有奇点时, 傅立叶逆变换应理解为主值积分:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (6.48)$$

当傅立叶变换  $\hat{f}(\omega)$  已知时, 我们把(6.47)或(6.48)称作函数  $f(t)$  的傅立叶积分表示。同样还能定义高维函数的傅立叶变换。例如, 对于三维函数  $f(x, y, z)$ , 其三维傅立叶变换定义为

$$f(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} dx dy dz \quad (6.49)$$



如果一个时间域内的函数  $f(t)$  能展开成简谐波的话, 则其傅立叶变换  $\hat{f}(\omega)$  给出了对应频率的振幅。

**例 6.3** 定义 Heaviside 阶跃函数为

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (6.50)$$

求  $e^{-ax}H(x)$ ,  $a > 0$  的傅立叶变换, 并验证其逆变换给出原来的函数。

令  $f(x) = e^{-ax}H(x)$ , 我们要求

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} (e^{-ax-i\omega x}) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+i\omega} \end{aligned} \quad (6.51)$$

其逆傅立叶变换为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a+i\omega} \exp(i\omega x) d\omega \end{aligned} \quad (6.52)$$



令

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{a + i\omega} \quad (6.53)$$

这是  $\mathbb{C}$  上的半纯函数（除了孤立奇点外处处解析），具有单极点位于  $\omega = ia$ 。我们分情况来讨论这个积分。利用复变函数知识，当  $x < 0$  的时候，我们将  $\omega$  沿下半平面绕一个大圆弧构成封闭围道，由约当引理大圆弧积分等于零，而围道内没有奇点，因此此时积分为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + i\omega} \exp(i\omega x) d\omega = 0, \quad x < 0 \quad (6.54)$$

当  $x > 0$  时，我们将  $\omega$  沿上半平面绕一个大圆弧构成封闭围道，同样约当引理告诉我们大圆弧积分为零，而围道内有奇点  $\omega = ia$ ，在奇点处的留数为

$$\text{Res}\left(\frac{1}{2\pi} \frac{1}{a + i\omega} \exp(i\omega x), ia\right) = \frac{\exp(-ax)}{2\pi i} \quad (6.55)$$

因此

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + i\omega} \exp(i\omega x) d\omega = \exp(-ax), \quad x > 0 \quad (6.56)$$

当  $x = 0$  时，(6.52) 是发散的。此时我们定义傅立叶逆变换为主值积分

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{a + i\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} i (\ln(a - iR) - \ln(a + iR)) \end{aligned} \quad (6.57)$$

对数函数是多值函数，我们选取主值分支

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi \quad (6.58)$$

此时(6.57)可以写成

$$\frac{1}{2\pi} i \left( -i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad (6.59)$$

综上所述我们得到逆傅立叶变换为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + i\omega} \exp(i\omega x) d\omega = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ e^{-ax} & x > 0 \end{cases} \quad (6.60)$$

跟原始函数比较我们发现在间断点处逆变换给出的函数值为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{f(-\varepsilon) + f(\varepsilon)}{2} \quad (6.61)$$

与傅立叶定理一致。

从物理角度，我们一般考虑绝对可积函数，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (6.62)$$

容易知道，此时傅立叶变换一定存在。 $f(t)$  和  $\hat{f}(\omega)$  称为傅立叶变换对，或者称作互为（傅立叶）对偶函数。 $f(t)$  通常称为时域函数，而  $\hat{f}(\omega)$  通常称为频域函数。傅立叶变换的一个有用之处在于对一个对时域或频域函数的操作在对偶函数空间会变得更简单。傅立叶变换的如下性质是重要的。

**线性性：**对于任意复数  $a, b$ ，如果  $h(t) = af(t) + bg(t)$ ，则  $\hat{h}(\omega) = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega)$ 。

位移定理:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\omega t}d\omega = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega) \quad (6.63)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega-a)e^{i\omega t}d\omega = e^{iat}f(t) \quad (6.64)$$

伸缩定理:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (6.65)$$

求导:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(t)}{dt^n} e^{-i\omega t}dt = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) \quad (6.66)$$

乘积:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)e^{-i\omega t}dt = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega) \quad (6.67)$$

卷积定理: 定义两个函数的卷积为

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (6.68)$$

则卷积的傅立叶变换可以写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f \star g)(t)e^{-i\omega t}dt = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \quad (6.69)$$

### 定理 6.3. Plancherel 定理

对于平方可积函数  $f(t)$ ,  $g(t)$ , 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega \quad (6.70)$$

这个定理的证明留待讲了  $\delta$  函数后再给出。从这个定理出发很容易得到 Parseval 定理。

### 定理 6.4. Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (6.71)$$

我们说一个函数  $f(x)$  是平方可积, 指的是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (6.72)$$

设  $f(x)$  既是可积函数也是平方可积函数, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad (6.73)$$

是  $f(x)$  的平均值,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (6.74)$$

称为  $f(x)$  在  $x=0$  的一次矩, 而

$$D_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \quad (6.75)$$

称为  $f(x)$  在  $x=0$  的二次矩。二次矩表征了函数的展宽。例如对于高斯函数  $e^{-x^2}$ , 其二次矩为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \quad (6.76)$$

#### 定理 6.5. 傅立叶变换的不确定原理

如果  $f(t)$ ,  $tf(t)$ ,  $\omega\hat{f}(\omega)$  均为平方可积函数, 则

$$D_0(|f|)D_0(|\hat{f}|) \geq \frac{\pi}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^2 \quad (6.77)$$

这意味着,  $f$  记起傅立叶对偶的展宽不能同时非常小。当  $f$  的展宽变小, 相应的  $\hat{f}$  的展宽要增大。反之亦然。



证明: 由于  $\omega\hat{f}(\omega)$  是平方可积的, 由 Parseval 定理知道  $f'(t)$  也是平方可积的。我们定义参数积分

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda t f(t) + f'(t)|^2 dt \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6.78)$$

由于  $tf(t)$  和  $f'(t)$  均为平方可积函数, 因此  $I(\lambda)$  也是平方可积函数。我们有

$$|\lambda t f(t) + f'(t)|^2 = \lambda^2 t^2 |f(t)|^2 + \lambda t [f(t)\overline{f'(t)} + \overline{f(t)}f'(t)] + |f'(t)|^2 \quad (6.79)$$

因此

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} [t^2 |f(t)|^2 + \lambda t [f(t)\overline{f'(t)} + \overline{f(t)}f'(t)] + |f'(t)|^2] dt \\ &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} t [f(t)\overline{f'(t)} + \overline{f(t)}f'(t)] dt + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \\ &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt + \lambda t |f(t)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (6.80)$$

由于  $f(t)$  是平方可积的, 因此  $\lambda t |f(t)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ 。因此

$$I(\lambda) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \geq 0 \quad (6.81)$$

由于  $I(\lambda)$  是  $\lambda$  的二次多项式, 因此其二次方程判别式必须小于等于零, 即

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^2 &\leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \\ &= 4 D_0(|f|^2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} D_0(|f|^2) D_0(|\hat{f}|^2) \end{aligned} \quad (6.82)$$

得证。

#### 例 6.4 定义矩形函数

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{1}{2} \\ 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.83)$$

求  $f(t) = a \cdot \text{rect}(at)$ ,  $a > 0$  的傅立叶变换。

## 6.3 傅立叶变换与微分方程

傅立叶变换的一个重要应用是求解常微分方程。其核心是如下关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} f(t) dt = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) \quad (6.84)$$

定义微分算符

$$D = \frac{d}{dt} \quad (6.85)$$

我们考虑形如

$$P(D)y(t) = f(t) \quad (6.86)$$

的常微分方程, 其中  $P(x)$  是一个多项式函数,  $f(t)$  是已知函数,  $y(t)$  是要求的解。例如, 如果

$$P(x) = x^2 + 8x + 7 \quad (6.87)$$

则对应的微分方程为

$$y''(t) + 8y'(t) + 7y(t) = f(t) \quad (6.88)$$

我们下面就以

$$f(t) = H(t)e^{-at}, \quad a > 0 \quad (6.89)$$

为例来求解这个方程。设  $y(t)$  的傅立叶变换为  $\hat{y}(\omega)$ 。对(6.87)左右边做傅立叶变换, 得到

$$i^2\omega^2\hat{y} + 8i\omega\hat{y} + 7\hat{y} = \hat{f}(\omega) \quad (6.90)$$

我们在前面的例题知道

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a + i\omega} \quad (6.91)$$

代入上式, 可以求解出  $\hat{y}(\omega)$ ,

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{(a + i\omega)(1 + i\omega)(7 + i\omega)} \quad (6.92)$$

因此我们的问题化为求解傅立叶逆变换, 而我们有留数定理这一利器来做这件事情。如果将  $\omega$  看成复变量, 则  $\hat{y}(\omega)$  是一个半纯函数。其逆傅立叶变换为

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.93)$$

$\hat{y}$  在复平面上只有单极点, 分别位于

$$ia, \quad i, \quad 7i \quad (6.94)$$

均在上半平面。当  $t > 0$  时, 我们取上半大圆弧构成封闭围道, 并由约当引理知道圆弧积分为零, 因此

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = i \sum \text{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, \omega_m) \quad (6.95)$$

其中  $\omega_m$  是上半平面内的留数。容易得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, ia) &= \frac{1}{i(1-a)(7-a)}e^{-at} \\ \operatorname{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, i) &= \frac{1}{i(a-1)6}e^{-t} \\ \operatorname{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, 7i) &= \frac{1}{i(a-7)(-6)}e^{-7t}\end{aligned}\quad (6.96)$$

因此


$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \left( \frac{e^{-at}}{(1-a)(7-a)} + \frac{e^{-t}}{6(a-1)} - \frac{e^{-7t}}{6(a-7)} \right) \quad (6.97)$$

当  $t < 0$  时, 我们可以取下半大圆弧构成封闭围道。但此时围道内没有奇点, 因此积分恒为零。我们因此得到

$$y(t) = \begin{cases} \left( \frac{e^{-at}}{(1-a)(7-a)} + \frac{e^{-t}}{6(a-1)} - \frac{e^{-7t}}{6(a-7)} \right) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6.98)$$

**例 6.5** 求解微分方程


$$x''(t) + x(t) = f(t) = H(t)e^{-at}, \quad a > 0 \quad (6.99)$$


 **练习 6.4** 计算双边指数衰减函数的傅立叶变换

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad (6.100)$$

并计算其逆变换。


 **练习 6.5** 计算平移矩形函数的傅立叶变换

 **练习 6.6**  $f(t) = \operatorname{rect}(t-1)$

 **练习 6.7** 求三角脉冲的傅立叶变换:

$$f(t) = \begin{cases} H(1-a|x|) & |x| < 1/a \\ 0 & |x| > 1/a \end{cases} \quad (6.101)$$

其中  $a > 0$ 。

 **练习 6.8** 对于径向对称函数  $f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|^2}$ ,  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 求其三维傅立叶变换。