✍ **练习 5.6** 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=a} \frac{dz}{\bar{z}-b},$$

分别讨论 $a>|b|$ 和 $|b|>a>0$ 的情形。

✍ **练习 5.7** 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2(z^2+9)} dz$$

5.2 利用留数计算定积分和无穷级数

留数定理使得计算一大类定义在实变量上的定积分和无穷级数求和转化为留数求和问题，而这是一个相对简单的问题。我们下面讨论几类典型的可以通过留数定理解决的问题。

5.2.1 三角函数积分

复围道积分和三角函数的关联来自于极坐标表示，**对于模长为 1 的复数** $z=e^{i\phi}$，注意到

$$\begin{aligned} dz &= ie^{i\phi}d\phi, \qquad \Rightarrow d\phi = \frac{dz}{iz}, \\ \cos\phi &= \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{z+1/z}{2}, \\ \sin\phi &= \frac{z-1/z}{2i}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

例 5.11 计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1+a^2-2a\cos\phi}$$

其中 $|a|\neq 1$。这个条件保证被积函数不发散。

按照(5.20)中的替换规则，我们有

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz} \frac{1}{1+a^2-a(z+1/z)} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{i} \frac{1}{z(1+a^2)-az^2-a} \end{aligned} \tag{5.21}$$

令

$$f(z) = -\frac{1}{i}\frac{1}{az^2-z(1+a^2)+a}$$

则

$$I = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f, z_i) \tag{5.22}$$

其中求和求遍单位圆内的留数。令

$$az^2-(1+a^2)z+a=0$$

解得两个根为

$$z_\pm = \frac{(1+a^2) \pm \sqrt{(1+a^2)^2 - 4a^2}}{2a},$$

即

$$z_+ = 1/a, \qquad z_- = a.$$

由于 $|a| \neq 1$，显然 z_+ 和 z_- 中一个在单位圆内一个在单位圆外，而

$$f(z) = \frac{i}{a(z-z_+)(z-z_-)}. \tag{5.23}$$

当 $|a| < 1$ 时，z_- 在园内，因此

$$\text{Res}(f, z_-) = \frac{i}{a(a-1/a)}$$

当 $|a| > 1$ 时，z_+ 在园内，因此

$$\text{Res}(f, z_+) = \frac{i}{a(1/a-a)}$$

因此积分结果为

$$I = \begin{cases} -\frac{2\pi}{a^2-1} & |a| < 1 \\ -\frac{2\pi}{1-a^2} & |a| > 1 \end{cases} \tag{5.24}$$

事实上，容易证明关于三角函数积分的一般结果。如果

$$R(\cos\phi, \sin\phi)$$

是关于 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$ 的有理函数，且对于任意 $\phi \in [0, 2\pi]$ 没有奇点，则

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\phi, \sin\phi) d\phi = 2\pi i \sum_m \text{Res}\left(\frac{1}{iz} R\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right), z_m\right) \tag{5.25}$$

其中求和取遍单位圆内的留数。

5.2.2 实轴上的有理型积分

一类常见的积分是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

其中 $f(x)$ 是有理函数。为了用留数定理计算这一类积分，我们需要如下引理

推论 5.1. 大圆弧引理

如果对于充分大的 $|x|$，存在 $M > 0$，$\alpha > 1$，使得

$$|f(x)| < \frac{M}{|x|^\alpha}$$

则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0,$$

如果 $f(z)$ 在上半平面有定义，则 C_R 是上半平面的大圆弧，$C_R = Re^{i\phi}$，$0 \leq \phi le \pi$。反之，如果如果 $f(z)$ 在下半平面有定义，则 C_R 是下半平面的大圆弧，$C_R = Re^{i\phi}$，$\pi \leq \phi le 2\pi$。♡

证明：不妨设 $f(z)$ 在上半平面有定义，则

$$
\begin{aligned}
|\int_{C_R} f(z)dz| = |\int_0^{\pi} f(Re^{i\phi})Rie^{i\phi}d\phi| \\
&\leq \int_0^{\pi} |f(Re^{i\phi})|Rd\phi \\
&< \int_0^{\pi} \frac{M}{R^{\alpha-1}}d\phi \\
&= \frac{M\pi}{R^{\alpha-1}}
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

由于 $\alpha > 1$，因此

$$
\lim_{R\to 0}\frac{M\pi}{R^{\alpha-1}} = 0\,.
$$

得证。

利用这个引理，我们可以求解一大类积分。

例 5.12 计算积分

$$
I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx\,.
$$

令 $f(z) = 1/(1+z^4)$，显然满足大圆弧引理的条件。令 $C_R = Re^{i\phi}$，$0\leq\phi\leq\pi$ 为上半圆弧，则由留数定理

$$
\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz\right] = 2\pi i\sum_m \mathrm{Res}(f,z_m) \tag{5.27}
$$

其中求和取遍上半圆弧和实轴包裹区域的奇点。由大圆弧引理知道上式左边第二项为零。函数 $f(z)$ 的极点为

$$
e^{i\pi/4}\,,\qquad e^{i3\pi/4}\,,\qquad e^{i5\pi/4}\,,\qquad e^{i7\pi/4} \tag{5.28}
$$

均为单极点，其中前两个极点位于积分围道内，其留数分别为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,e^{i\pi/4}) &= \lim_{z\to e^{i\pi/4}}\frac{z-e^{i\pi/4}}{1+z^4} \\
&= \lim_{z\to e^{i\pi/4}}\frac{1}{4z^3} \qquad \text{洛必达法则} \\
&= \frac{1}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4}(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,e^{i3\pi/4}) &= \lim_{z\to e^{i3\pi/4}}\frac{z-e^{i3\pi/4}}{1+z^4} \\
&= \lim_{z\to e^{i3\pi/4}}\frac{1}{4z^3} \qquad \text{洛必达法则} \\
&= \frac{1}{4e^{i9\pi/4}} = \frac{1}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

因此

$$
I = 2\pi i\frac{(-i\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \tag{5.31}
$$

5.2.3 震荡型积分

另一类常见积分是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x dx\,.$$

为了处理这一类积分，我们需要如下引理

推论 5.2. 约当引理

如果 $a>0$，C_R 是上半平面的半径为 R 的大半圆弧，且对于充分大的 x 有

$$|f(x)| < \frac{M}{x}\,,$$

则

$$_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0$$

如果 $a<0$ 则 C_R 去下半圆弧即可。

证明：由复线积分定义有

$$\begin{aligned}
|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz| &= |\int_0^{\pi} f(Re^{ia\phi})e^{iaRe^{i\phi}}RIe^{I\phi}d\phi| \\
&\le \int_0^{\pi} |f(R^{ia\phi}|e^{-aR\sin\phi}Rd\phi \\
&< \int_0^{\pi} \frac{M}{R}e^{-aR\sin\phi}Rd\phi \\
&= \int_0^{\pi} Me^{-aR\sin\phi}d\phi \\
&< \int_0^{\pi} Me^{-aR\phi/\pi}d\phi \\
&= -\frac{M}{aR/\pi}\left(-e^{-aR}+1\right)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

当 $R\to\infty$ 时上式等于零，得证。

例 5.13 计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2}dx\,, \qquad b>0$$

由被积分函数的对称性可以知道

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2}dx \tag{5.33}$$

令

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z^2+b^2}\,.$$

显然 $f(z)$ 满足约当引理的条件。取上半圆弧 C_R，则由留数定理

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} f(z)e^{iz}dz + \int_{C_R} f(z)e^{iz}dz\right] = 2\pi i\sum_m \mathrm{Res}(f(z)e^{iz}, z_m) \tag{5.34}$$

上式左侧第二项由约当引理结果为零。$f(z)$ 在上半平面的奇点为

$$ib \tag{5.35}$$

且为单极点，其留数为

$$\text{Res}(fe^{iz}, ib) = \frac{e^{-b}}{4ib} \tag{5.36}$$

因此

$$I = 2\pi i \frac{e^{-b}}{4ib} = \frac{e^{-b}\pi}{2b}\,. \tag{5.37}$$

5.2.4 带有枝点和割线的积分

对于这一类积分需要在围道选取上有一定的创造性。我们以具体例子演示。

例 5.14 计算积分

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2} dx$$

令

$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{1+z^2}$$

将 $f(z)$ 的割线取在 $(-\infty, 0]$ 上，并选取主值分支 $-\pi < \arg(z) \le \pi$。选取如图所示围道，其中大圆弧的半径为 R，小圆弧的半径为 r。由留数定理在整个围道上的积分可以写为

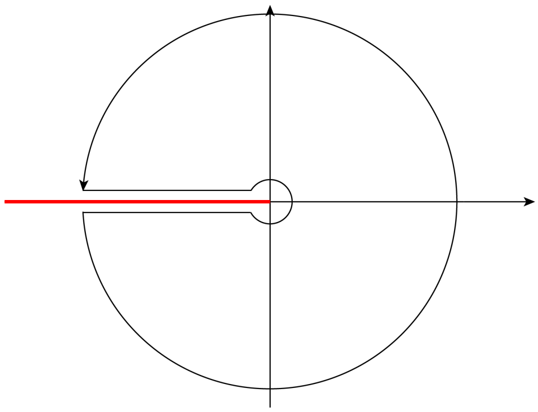

图 5.2: 带割线的围道积分

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_m \text{Res}(f, z_m) \tag{5.38}$$

被积函数的极点在 $e^{i\pi/2}$ 和 $e^{-i\pi/2}$，留数分别为

$$\frac{e^{i\pi/6}}{2i}, \qquad \frac{e^{-i\pi/6}}{-2i} \tag{5.39}$$

因此

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_C f(z)dz = 2\pi i \sin(\pi/6) = i\pi \tag{5.40}$$

另外有

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_C f(z)dz = \int_{\text{小圆弧}} f(z)dz + \int_{\text{大圆弧}} f(z)dz + \int_\infty^0 \frac{\rho^{1/3}e^{i\pi/3}}{1+\rho^2} e^{i\pi} d\rho + \int_0^\infty \frac{\rho^{1/3}e^{-i\pi/3}}{1+\rho^2} e^{-i\pi} d\rho \tag{5.41}$$

易知在大圆弧和小圆弧上的积分趋于零。因此

$$i\pi = (e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}) \int_0^\infty \frac{\rho^{1/3}}{1+\rho^2} d\rho \tag{5.42}$$

因此我们求得

$$\int_0^\infty \frac{\rho^{1/3}}{1+\rho^2} d\rho = \frac{i\pi}{2\sin(\pi/3)i} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tag{5.43}$$

这个题目里更自然的是让割线取在 $[0,+\infty)$ 上。

例 5.15 计算积分

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

例 5.16 计算积分

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2} dx$$

5.2.5 无穷级数求和

利用留数定理求和无穷级数的思想在于找到一个函数，使其留数与所求级数的每一项一一对应。这样求和留数就等于求和级数。而另一方面留数之和可通过围道积分得到。因此把无穷级数求和问题转化为围道积分问题。最常用的两个函数为

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \qquad \pi\cot(\pi z)$$

这两个函数在所有整数点上均有留数，分别为

$$\text{Res}(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}, n) = (-1)^n, \qquad \text{Res}(\pi\cot(\pi z), n) = 1$$

例 5.17 巴塞尔问题。求和级数

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

我们考虑如下围道积分，

$$I = \lim_{k\to\infty} \int_{C_k} \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2} dz \tag{5.44}$$

其中围道取作连接如下四点的正定向矩形，

$$\pi(k+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}), \quad \pi(-k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}), \quad \pi(-k-\frac{1}{2}, -k-\frac{1}{2}), \quad \pi(k+\frac{1}{2}, -k-\frac{1}{2}) \tag{5.45}$$

。由留数定理我们有

$$I = 2\pi i \sum_m \text{Res}(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}, z_m) \tag{5.46}$$

其中留数取遍 C_k 所包裹区域内的奇点。注意到

$$\text{Res}(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}, n) = \frac{1}{n^2}, \qquad n \neq 0$$

$$\text{Res}(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}, 0) = -\frac{\pi^2}{3}, \qquad n = 0 \tag{5.47}$$

因此我们得到

$$I = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3}\,. \tag{5.48}$$

我们接下来要直接对围道积分进行估计。令 $z = x + iy$，注意到

$$\begin{aligned} |\cot(\pi z)|^2 &= \frac{|\cos(\pi z)|^2}{|\sin(\pi z)|} \\ |\cos(\pi z)|^2 &= \cos^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y) \\ |\sin(\pi z)|^2 &= \cosh^2(\pi y) - \cos^2(\pi x) \end{aligned} \tag{5.49}$$

因此

$$|\cot(\pi z)|^2 = \frac{\cos^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)}{\cosh^2(\pi y) - \cos^2(\pi x)} \tag{5.50}$$

在直线 $\pi(k+\frac{1}{2}, -k-\frac{1}{2})$–$\pi(k+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})$ 上，由于 $\cos(\pi(k+1/2) = 0$，因此

$$|\cot(\pi z)|^2 = \tanh^2(\pi y) \le 1 \tag{5.51}$$

在水平线 $\pi(k+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})$–$\pi(-k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})$ 上，

$$|\cot(\pi z)|^2 \le \frac{1+\sinh^2(\pi y)}{\cosh^2(\pi y) - 1} = \frac{\cosh^2(\pi y)}{\sinh^2(\pi y)} = \coth^2(\pi k + \pi/2) = \coth^2(\pi/2) \tag{5.52}$$

因此我们有估计

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C_k}\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}dz \le \lim_{k\to\infty}\int_{C_k}\frac{|\pi\cot(\pi z)|}{|z|^2}|dz| \le \lim_{k\to\infty}\int_{C_k}\frac{\pi|\coth(\pi/2)|}{|z|^2}|dz| = 0 \tag{5.53}$$

因此

$$I = 0 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} \tag{5.54}$$

换句话说

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,. \tag{5.55}$$

✍ **练习 5.8** 计算积分

$$\int_0^{2\pi}(1+2\cos t)^n\cos(nt)dt\,,\qquad n\in\mathbb{N}$$

✍ **练习 5.9** 计算积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-3\sin\theta}$$

✍ **练习 5.10** 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

✍ **练习 5.11** 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx$$

✍ **练习 5.12** 计算积分

$$\int_0^1\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}dx\,,\qquad -1<p<2$$

✍ **练习 5.13** 计算积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

第 6 章 傅立叶级数和傅立叶变换

6.1 傅立叶级数

我们在前面讨论了泰勒级数和洛朗级数。另一类非常重要的级数是傅立叶级数，记为

$$a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos(2z) + a_3 \cos(3z) + \cdots$$

$$b_1 \sin z + b_2 \sin(2z) + b_3 \sin(3z) + \cdots$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nz) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nz) \tag{6.1}$$

其中第一行称作傅立叶余弦函数，显然是周期为 2π 的偶函数；第二行称作傅立叶正弦函数，是周期为 2π 的奇函数；第三行一般不具有奇偶性，但是周期仍为 2π。

一个自然的问题是 $f(z)$ 的收敛性问题。利用

$$\cos(nz) = \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2}, \qquad \sin(nz) = \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i}, \tag{6.2}$$

并令 $w = e^{iz}$，我们有

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + \frac{a_1 - ib_1}{2} w + \frac{a_2 - ib_2}{2} w^2 + \cdots + \frac{a_1 + ib_1}{2} \frac{1}{w} + \frac{a_2 + ib_2}{2} \frac{1}{w^2} + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n \end{aligned} \tag{6.3}$$

显然这是关于 w 的洛朗级数。从前面洛朗级数理论知道，这个函数的收敛区域是一个圆环

$$\alpha < |w| < \beta \tag{6.4}$$

即

$$\alpha < |e^{ix-y}| < \beta \tag{6.5}$$

或者

$$\ln \alpha < -y < \ln \beta \tag{6.6}$$

对应到 z 平面是一个平行于实轴的无限长带子。如果 $\alpha = \beta$，则收敛区域变为一条平行于实轴的线。我们下面关心的例子是 a_n 和 b_n 均为实数的情形。我们有结论

定理 6.1

实系数傅立叶级数如果收敛的话，收敛区域只能是实轴。在实轴以外必然发散。♡

对于实傅立叶级数，我们有

$$c_0 = a_0, \qquad c_n = \bar{c}_{-n}. \tag{6.7}$$

假设函数 $f(z)$ 已知并且具有傅立叶级数表示

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inz}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n \tag{6.8}$$

一个自然问题是如何求得展开系数 c_n。由于这是一个 w 的洛朗级数，有前面的知识直接可知

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw \tag{6.9}$$

其中积分围道为收敛圆环内的一个过原点的圆。如果收敛区域是一个环域，则柯西积分公式给出了这个洛朗级数的系数：

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f(z)}{w}dw \\
\frac{a_n-ib_n}{2} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f(z)}{w^{n+1}}dw\,, \qquad n>0 \\
\frac{a_n+ib_n}{2} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(z)w^{n-1}dw\,, \qquad n>0
\end{aligned} \tag{6.10}$$

如果令 $w=e^{it}$，则

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{e^{it}}ie^{it}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\,, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)dt
\end{aligned} \tag{6.11}$$

上面的证明不能直接用于 a_n 和 b_n 均为实数的情形，原因是此时收敛环压缩为收敛圆，但只定义在圆上的函数不是解析函数。

尽管如此，我们下面将看到，(6.11)在 a_n 和 b_n 均为实数的时候也成立。

定理 6.2. 傅立叶定理

设实函数 $f(x)$ 在 $-\pi<x<\pi$ 上只有有限个最大值或最小值，以及有限个不连续点，则如下傅立叶级数

$$a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos(mx)+b_m\sin(mx)) \tag{6.12}$$

其中

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\,, \\
a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(mt)dt \\
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(mt)dt
\end{aligned} \tag{6.13}$$

在 x 处收敛于

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x-\varepsilon)+f(x+\varepsilon)}{2} \tag{6.14}$$

♡

证明：如下证明方法基于复变函数，是柯西最早给出的。文献中通常给的是狄利克雷的

证明。将(6.13)代入(6.12)，得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos[m(x-t)]dt \tag{6.15}$$

我们取该无穷级数的前 $2N+1$ 项，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos[m(x-t)]dt\\ =&\sum_{m=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{im(x-t)}dt\end{aligned} \tag{6.16}$$

并在稍后让 $N\to\infty$。我们把这个有限级数分为两部分

$$\begin{aligned}U_N(x) &= \sum_{m=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x} f(x)e^{im(x-t)}dt\\ V_N(x) &= \sum_{m=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{x}^{\pi} f(x)e^{im(x-t)}dt\end{aligned} \tag{6.17}$$

我们下面将证明，

$$\lim_{N\to\infty} U_N(x) = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{1}{2}f(x-\varepsilon)\,, \qquad \lim_{N\to\infty} V_N(x) = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{1}{2}f(x+\varepsilon)\,. \tag{6.18}$$

为此，我们定义函数

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{e^{2\pi\zeta}-1}\int_0^x e^{\zeta(x-t)}f(t)dt \tag{6.19}$$

这是一个关于 ζ 的解析函数，奇点在 $\cdots,-3i,-2i,-i,0,i,2i,3i,\cdots$，并且在奇点 im 处的留数为

$$\text{Res}(\psi, im) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{im(x-t)}f(t)dt \tag{6.20}$$

因此如果我们取一个以原点为圆心，半径为 $N+1/2$ 的正定向圆围道 C_N，在围道上有 $\zeta=(N+1/2)e^{i\theta}$，则根据留数定理有

$$U_N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\psi(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\zeta\psi(\zeta)d\theta\,. \tag{6.21}$$

为了估计这个积分，我们把之分成五部分，

$$\begin{aligned}U_N(x) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2-1/\sqrt{N}}\zeta\psi(\zeta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2-1/\sqrt{N}}^{\pi/2+1/\sqrt{N}}\zeta\psi(\zeta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2+1/\sqrt{N}}^{3\pi/2-1/\sqrt{N}}\zeta\psi(\zeta)d\theta\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{3\pi/2-1/\sqrt{N}}^{3\pi/2+1/\sqrt{N}}\zeta\psi(\zeta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{3\pi/2+1/\sqrt{N}}^{2\pi}\zeta\psi(\zeta)d\theta\\ =&I_1+I_2+I_3+I_4+I_5\end{aligned} \tag{6.22}$$

首先注意到在 I_1 的积分范围内，有 $\text{Re}(\zeta) > O(\sqrt{N})$。因此被积函数

$$\zeta\psi(\zeta) = \frac{\zeta}{e^{2\pi\zeta}-1}\int_0^x e^{i\zeta(x-t)}f(t)dt \tag{6.23}$$

趋于 0。同理可证 I_5 趋于 0。再来看 I_2。在这个区域内被积函数 $\zeta\psi(\zeta)$ 总是有限的，而 $d\theta$ 的积分限无穷小，因此也趋于零。同理也可得 I_4 趋于零。

因此主要的贡献来自 I_3。在积分区域内，有 $\mathrm{Re}(\zeta) < -O(\sqrt{N})$，

$$\zeta\psi(\zeta) = \frac{1}{e^{2\pi\zeta}-1}\int_0^t \zeta e^{\zeta(x-t)}f(t)dt \sim -\int_0^t \zeta e^{\zeta(x-t)}f(t)dt = -J_1 - J_2 \tag{6.24}$$

其中

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{x-\frac{1}{\ln N}} \zeta e^{\zeta(x-t)}f(t)dt \\ J_2 &= \int_{x-\frac{1}{\ln N}}^{x} \zeta e^{\zeta(x-t)}f(t)dt \end{aligned} \tag{6.25}$$

对于 J_1 其被积函数趋于零，积分区间有限，因此 $J_1 \to 0$。而对于 J_2 我们作变量替换 $v = \zeta(x-t)$，

$$J_2 = \int_0^{\frac{\zeta}{\ln N}} e^v f(x - \frac{v}{\zeta})dv \tag{6.26}$$

再令 $w = e^v$，

$$J_2 = \int_1^{\exp(\frac{\zeta}{\ln N})} f(x - \frac{\ln w}{\zeta})dw \tag{6.27}$$

在 $d\theta$ 的积分区间内，$\exp(\zeta/\ln N) \to 0$，$\ln w/\zeta \to 0$。因此

$$J_2 \sim \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_1^0 f(x-\varepsilon)dw = -\lim_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon) \tag{6.28}$$

因此

$$U_N(x) = I_3 = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2+1/\sqrt{N}}^{3\pi/2-1/\sqrt{N}} \lim_{\varepsilon\to 0_+} f(x-\varepsilon)d\theta \tag{6.29}$$

因此

$$\lim_{N\to\infty} U_N(x) = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{1}{2}f(x-\varepsilon) \tag{6.30}$$

同理可证

$$\lim_{N\to\infty} V_n(x) = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{1}{2}f(x+\varepsilon) \tag{6.31}$$

定理得证。

例 6.1 计算锯齿波的傅立叶级数表示。在 $(-\pi,\pi)$ 周期内，锯齿波为

$$f(x) = x\,, \qquad -\pi < x < \pi$$

例 6.2 计算方波的傅立叶级数表示。在 $(-\pi,\pi)$ 周期内，方波为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \le 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

练习 6.1 对于如下定义在 $-\pi \le x \le \pi$ 上的函数，计算其傅立叶级数：

1. $f(x) = |\sin x|$
2. $f(x) = |x|$
3.
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ \sin x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$
4. $f(x) = x\cos x$

✍ **练习 6.2** 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上计算 $f(x)=x^2$ 的傅立叶级数，并用其计算如下无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

✍ **练习 6.3** 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上计算 $f(x)=x^4$ 的傅立叶级数，并用其计算如下无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$