与原参数化一致，证毕。

围道积分的另一种表示形式为

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy)\,. \tag{2.4}$$

注意以这种形式进行具体计算时仍需指定 $x(t)$ 和 $y(t)$，其结果与(2.2)无异。围道积分具有性质

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz\,, \tag{2.5}$$

其中 $\int_{-\gamma}$ 指的是沿曲线的反向积分，即此时的积分起点为 $\gamma(b)$，积分终点为 $\gamma(a)$。

例 2.2 沿 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的直线计算 $\int_\gamma z^2dz$。

例 2.3 沿 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的直线计算 $\int_\gamma \bar{z}dz$。

例 2.4 沿单位圆逆时针（通常也称为正定向）计算 $\int_C z^2dz$。

例 2.5 沿单位圆逆时针计算 $\int_C z^{-1}dz$。

关于围道积分我们有如下不等式

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\cdot|dz| \le ML\,, \tag{2.6}$$

其中 M 是 $|f(z)|$ 在 γ 上的极大值，$L=\int_\gamma |dz|$ 是 γ 的长度。第二个不等式是显然的，我们只证明第一个不等式。令

$$\theta = \arg\left[\int_\gamma f(z)dz\right]. \tag{2.7}$$

则

$$\begin{aligned}
|\int_\gamma f(z)dz| &= \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}\int_\gamma f(z)dz\right] \\
&= \int_\gamma \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}f(z)dz\right] \\
&\le \int_\gamma |f(z)dz| \\
&= \int_\gamma |f(z)|\cdot|dz|\,.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

证毕。

✍ **练习 2.1** 计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=2} = \frac{dz}{z^2-1}\,.$$

✍ **练习 2.2** 计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=1} = |z-1|\cdot|dz|\,.$$

✍ **练习 2.3** 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析且处处满足 $|f(z)-1|<1$。证明对 D 中的任意封闭曲线 C 有

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0\,.$$

（假设 $f'(z)$ 连续）。

2.2 复线积分的基本定理

单变量微积分的基本定理将函数积分通过原函数的差表示，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,, \tag{2.9}$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，$F'(x) = f(x)$。复线积分也有类似的基本定理：

定理 2.2. 复线积分的基本定理

$f(z)$ 是区域 D 上的解析函数，γ 是 D 上从 z_0 到 z_1 的曲线，$f(z)$ 在 D 上的原函数为 $F(z)$，即 $F'(z) = f(z)$，则

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)\,. \tag{2.10}$$

♡

证明：等式左边可以写为

$$\begin{aligned}\int_\gamma F'(z)dz &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt}dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ &= F(z_1) - F(z_0)\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

证毕。有了这个定理，我们之前的一些例子可以用这个定理直接得到答案。

定理 2.3. 解析函数积分的路径独立性

如果解析函数在区域 D 内解析且有原函数，则复线积分

$$\int_\gamma f(z)dz$$

的取值只依赖于 γ 的端点，而与 γ 的具体形状无关。

♡

这个定理是显然的。进一步我们有如下定理：

定理 2.4. 路径独立和闭围道积分退化的等价性

如下两个命题等价：

1. 复线积分 $\int_\gamma f(z)dz$ 是路径独立的。
2. 对于任何封闭围道 C，$\int_C f(z)dz = 0$。

♡

例 2.6 计算下述积分，其中积分路径沿单位圆周正向（逆时针）。

$$\text{a)}\ \int_{|z|=1} \frac{1}{z^n}dz\,,\quad n \in \mathbb{Z}\,,\qquad \text{b)}\ \int_{|z|=1} \ln z dz\,,$$

其中第二个积分定义在主值分支内。

下述定理是本节的主要定理。

定理 2.5. 柯西定理

如果 $f(z)$ 是单连通区域 D 上的解析函数，C 是 D 上的任意封闭围道，则有

$$\int_C f(z)dz = 0\,. \tag{2.12}$$

关于这个定理的证明有不同的方法。第一种方法利用平面积分的格林定理，需要假定 $f(z)$ 的一阶导数连续。更绝妙的方法是 Goursat 的证明，其中不需要假定导数连续，而且 D 可以是闭区域。我们先看利用格林定理的证明。为此我们先回忆格林定理：

定理 2.6. 格林定理

C 是平面上的正定向封闭曲线，D 是 C 所包围的区域，$L(x,y)$ 和 $M(x,y)$ 在包含 C 及其内部的某个区域上的偏导数存在且连续，则

$$\int_C (Ldx + Mdy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dxdy\,.$$

关于格林定理有一个物理的理解。把积分左侧写成

$$\int_C \vec{v}\cdot d\vec{s}\,, \tag{2.13}$$

其中 $\vec{v}(x,y) = (L(x,y), M(x,y))$ 是一个流速场，$d\vec{s} = (dx, dy)$ 是流线微元。因此这个积分的物理意义可以看成是某种宏观速度场的闭曲线积分。如果想象宏观速度场是由无穷多小的涡旋构成，则这个线积分也能写成这些小的涡旋的面积分，或者更准确说是速度场的旋度的面积分，

$$\int_C \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint_D (\mathrm{curl}\vec{v})\, dxdy\,, \tag{2.14}$$

其中

$$\mathrm{curl}\vec{v} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ L & M \end{vmatrix} = M_x - L_y\,. \tag{2.15}$$

有了格林定理后，柯西定理的证明顺理成章。

证明（柯西定理）：令 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，$z = x + iy$，则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy) \\ &= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy + v\,dx) \\ &\overset{\text{格林定理}}{=} \iint (-u_y - v_x)dxdy + i\iint (u_x - v_y)dxdy \\ &\overset{\text{柯西-黎曼方程}}{=} 0\,.\end{aligned} \tag{2.16}$$

其中二重积分的区域是 C 的内部。定理得证。

下面我们给出 Goursat 对柯西定理的绝妙证明。这个证明的强大之处在于无须用到函数导数的连续性条件[1]。因此这个定理人们也称作 Cauchy-Goursat 定理。事实上，Goursat 证明的并非一般的封闭围道，而是一个矩形围道。我们下面的证明针对的也是矩形围道。

[1]事实上，柯西一直想给出一个不用到导数连续性的证明，但直到柯西去世时这个证明也还没找到。这个证明直到 Goursat 出现才找到。巧合的是，Goursat 出生在柯西去世后的一年。

当然，有了矩形围道和三角形围道后可以构造出任意围道。

证明（柯西-Goursat 定理）：我们考虑由如下不等式定义的矩形闭区域 R

$$a \le x \le b\,, \qquad c \le y \le d\,.$$

矩形的边界线记为 ∂R。我们的积分围道即沿着 ∂R 正向绕行。我们要证明的柯西-Goursat 定理是对于 R 上的解析函数 $f(z)$，有

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0\,.$$

我们定义

$$\eta(R) = \int_{\partial R} f(z)dz\,. \tag{2.17}$$

将 R 等分为四个更小的矩形，记为 $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$。此时原积分可以写为

$$\eta(R) = \eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)})\,. \tag{2.18}$$

由三角不等式有

$$|\eta(R)| \le |\eta(R^{(1)})| + |\eta(R^{(2)})| + |\eta(R^{(3)})| + |\eta(R^{(4)})| \le 4|\eta(R^{(k)})|\,, \tag{2.19}$$

其中 $\eta(R^{(k)})$ 是四个小矩形的绝对值中最大的一个。我们得到不等式

$$|\eta(R^{(k)})| \ge \frac{1}{4}|\eta(R)|\,. \tag{2.20}$$

我们选取 $R^{(k)}$ 继续这个四等分过程，并再从中选取一个绝对值最大的矩形，然后再把四等分过程无限进行下去。这个过程给出一个不断缩小的矩形序列：$R \supset R_1 \supset R_2 \supset R_3 \cdots \supset R_n \supset \cdots$。这个序列满足

$$\eta(R_n) \ge \frac{1}{4}\eta(R_{n-1})\,,$$

或

$$\eta(R_n) \ge \frac{1}{4^n}\eta(R)\,. \tag{2.21}$$

这个无穷矩形序列收敛于一个点 z_0，

$$\{z_0\} = \cap_{n=1}^{\infty} R_n\,.$$

$f(z)$ 在 z_0 可导给出条件

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)\,. \tag{2.22}$$

我们回忆这个极限的定义是对于任意 $\epsilon > 0$，总是存在 $\delta > 0$，使得当 $|z-z_0| < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \epsilon\,, \tag{2.23}$$

或者写成

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| < \epsilon|z-z_0|\,. \tag{2.24}$$

对于沿序列中第 n 个矩形 R_n 边界线的积分有

$$\int_{\partial R_n} dz = 0\,, \qquad \int_{\partial R_n} zdz = 0\,. \tag{2.25}$$

这两个等式可以通过直接线积分或从原函数得到。利用这两个结果我们有

$$\eta(R_n) = \int_{\partial R_n} f(z)dz = \int_{\partial R_n} \Big[(f(z) - f(z_0)) - f'(z_0)(z - z_0)\Big] dz\,. \tag{2.26}$$

利用(2.24)中的不等式我们得到对于任意小的 ϵ，我们总能找到 n 使得

$$\eta(R_n) < \epsilon \int_{\partial R_n} |z - z_0| \cdot |dz| \leq \epsilon d_n L_n\,, \tag{2.27}$$

其中 d_n 是 R_n 的对角线长度，L_n 是 ∂R_n 的长度，满足

$$d_n = \frac{1}{2^n} d\,, \qquad L_n = \frac{1}{2^n} L\,, \tag{2.28}$$

其中 d 是 R 的对角线长度，L 是 ∂R 的长度。综上我们有不等式

$$\eta(R_n) < \epsilon \frac{1}{4^n} dL\,. \tag{2.29}$$

与(2.21)结合我们得到

$$\epsilon \frac{1}{4^n} dL > \frac{1}{4^n} \eta(R)\,. \tag{2.30}$$

或

$$\epsilon dL > \eta(R)\,. \tag{2.31}$$

由于 ϵ 可以任意小，而 d 和 R 有限，因此必有

$$\eta(R) = 0\,. \tag{2.32}$$

得证。

例题 2.1 思考如何从矩形和三角形的柯西定理得到任意封闭曲线的柯西定理。

事实上，单连通区域中的柯西定理可以表述为下述等价命题：

定理 2.7. 单连通区域中的柯西定理

设 D 是单连通区域，$f(z)$ 在 D 上解析，C 是 D 上任意封闭曲线，则下述命题等价：

1. $\int_C f(z)dz = 0$。
2. $f(z)$ 在 D 上的任意复线积分都是路径独立的。
3. $f(z)$ 在 D 上有原函数。

♡

关于这三个命题的等价性证明此处从略。

定理 2.8. 复连通区域上的柯西定理

设 D 是复连通区域，其边界为 $\partial D = C_1 \cup C_2 \cdots \cup C_n$。$f(z)$ 在 D 上解析。则

$$\int_{C_1+C_2+\cdots+C_n} f(z)dz = 0\,, \tag{2.33}$$

其中积分路径沿这 C_k 的正定向。

♡

注 沿着某个围道积分的过程中，如果解析区域总是在前进方向的左手边，则称为正定向。

柯西得到柯西定理的一个重要动机是用其来求积分。我们看一些例子。一些常见的积分围道。

例 2.7 证明：

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx\,. \tag{2.34}$$

例 2.8 证明

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\pi}{2}\,. \tag{2.35}$$

定理 2.9. 复连通区域上的柯西定理

设 D 是 $\mathbb{C}$ 上的复连通区域，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是 D 上的闭曲线，R 是 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 所包围的区域，$f(z)$ 在 R 上解析，定义沿围道 C_k 前进时 R 在 C_k 的左侧为正定向，则下述正定向积分为零，

$$\int_{C_1+C_2+\cdots+C_n} f(z)\, dz = 0\,. \tag{2.36}$$

♡

✍ **练习 2.4** 计算

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz\,,$$

其中积分围道是从 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的直线。

✍ **练习 2.5** 证明当 $|a|<r<|b|$ 时，

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2\pi i}{a-b}\,,$$

其中积分围道取正定向。

✍ **练习 2.6** 计算

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}\,.$$

✍ **练习 2.7** 计算

$$\int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^2}\,.$$

且 $r \neq |a|$。提示：由方程 $z\bar{z}=r^2$ 有

$$|dz| = -ir\frac{dz}{z}\,.$$

✍ **练习 2.8** 证明菲涅尔积分公式：

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\,.$$

2.3 柯西积分公式

柯西积分公式是解析函数理论的核心内容。如果学完这门课有什么一定要记住的话，柯西积分公式必居其中。

定理 2.10. 柯西积分公式

设 $f(z)$ 是单连通区域 D 上的解析函数，C 是 D 上任意封闭曲线，z_0 是 C 所包裹区域内的任意内点。则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz\,, \tag{2.37}$$

其中积分围道沿 C 的正定向。♡

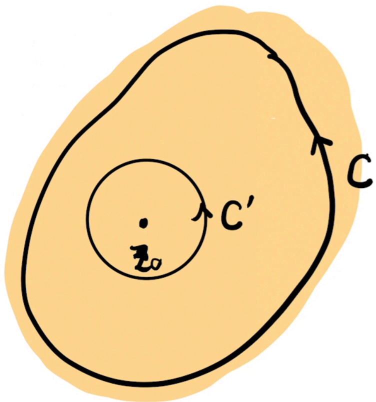

图 2.1: 证明柯西积分公式的围道

证明: 取图2.1中围道 C 和 C'，其中 C' 是以 z_0 为圆心的任一小圆。被积函数 $f(z)/(z-z_0)$ 在 C 和 C' 所包裹的区域内解析，由复连通区域的柯西公式有

$$\int_{C-C'}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=0=\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\int_{C'}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\,, \tag{2.38}$$

换句话说

$$\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{C'}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\,. \tag{2.39}$$

不妨将 C' 取作

$$C'(t)=z_0+\varepsilon e^{it}\,,\qquad 0\le t\le 2\pi\,, \tag{2.40}$$

并让 $\varepsilon\to 0$。由复线积分的定义有

$$\begin{aligned}\int_{C'}\frac{f(z)}{z-z_0}dz&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\varepsilon i e^{it}dt\\&=\int_0^{2\pi}f(z_0)idt\\&=2\pi i f(z_0)\,,\end{aligned} \tag{2.41}$$

即

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\,, \tag{2.42}$$

因此柯西公式得证。

例 2.9 计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz\,,\qquad \int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}\,.$$

柯西公式的一个强大之处在于将 $f(z_0)$ 的 z_0 依赖关系用很简单的代数函数表示出来

了，不管 $f(z)$ 是多复杂的函数。例如，我们可以从中得到如下重要结论：

定理 2.11. 柯西求导公式

设 $f(z)$ 是区域 D 上的解析函数，z_0 是 D 上的内点，C 是将 z_0 包裹在内的任意封闭曲线，$f(z)$ 在 D 上无穷次可导，且 n 阶导数可以写为

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,. \tag{2.43}$$

♡

证明：我们用归纳法进行证明。$n=0$ 的情形直接对应柯西积分公式，因此无须再证明。设(2.43)对于 $n-1$ 阶导数成立，即

$$f^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n}}dz\,, \tag{2.44}$$

我们要证明第 n 阶导数也成立而且可以写成式(2.43)的形式。从导数的定义出发我们有

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(z_0+h)-f^{(n-1)}(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(n-1)!}{2\pi i h}\int_C f(z)\left(\frac{1}{(z-z_0-h)^n}-\frac{1}{(z-z_0)^n}\right)dz \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(n-1)!}{2\pi i h}\int_C f(z)\left(\frac{(z-z_0)^n-(z-z_0-h)^n}{(z-z_0-h)^n(z-z_0)^n}\right)dz\,. \end{aligned} \tag{2.45}$$

利用

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots+B^{n-1})\,. \tag{2.46}$$

我们有

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{(n-1)!}{2\pi i h}\int_C f(z)\frac{h\left[(z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(z-z_0-h)+\cdots+(z-z_0-h)^n\right]}{(z-z_0)^n(z-z_0-h)^n} \\ &= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,. \end{aligned} \tag{2.47}$$

得证。这个结果告诉我们，解析函数一定是无穷次可导的。对于实变量函数这个结论不成立。

例 2.10 计算

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n}dz\,.$$

从柯西积分公式出发可以得到许多有趣的结果。

推论 2.1. 柯西估计

设 $f(z)$ 在区域 D 上解析，以 z_0 为圆心，半径为 R 的圆盘在 D 上，则

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!\,\|f\|_C}{R^n}\,, \tag{2.48}$$

其中 C 是圆盘边界，$\|f\|_C = \sup_{z\in C}|f(z)|$ 是 $f(z)$ 在 C 的最小上确界。

♡

证明：由柯西积分公式可知，

$$
\begin{aligned}
|f^{(n)}(z_0)| &= \frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \\
&= \frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}}Rie^{it}dt\right| \\
&\le \frac{n!}{2\pi}\frac{\|f\|_C}{R^n}2\pi\,.
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

证毕。当 $n=0$ 时，有

$$
|f(z_0)| \le \|f\|_C\,, \tag{2.50}
$$

由柯西估计我们立刻得到

定理 2.12. 最大模原理

设 $f(z)$ 在区域 D 上解析。如果 $f(z)$ 不是常函数，则 $|f(z)|$ 在 D 上没有最大值。♡

证明：利用反证法，设 z_0 是 D 上一点，$|f(z_0)|$ 在 D 上取最大值。我们想要证明这是 $f(z)$ 一定是常函数。我们以 z_0 为圆心取一半径为 r 的小圆 C，使得 C 也在 D 上。令 $z=z_0+re^{i\varphi}$，由柯西积分公式我们有

$$
\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}}rie^{i\varphi}d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\varphi})d\varphi\,.
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

左边取绝对值后有不等式

$$
|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{i\varphi})|d\varphi\,. \tag{2.52}
$$

由我们的假设应有

$$
|f(z_0)| \ge |f(z_0+re^{i\varphi})|\,. \tag{2.53}
$$

为了使这两个不等式(2.52)和(2.53)同时成立，(2.53)中的严格大于号只可能对孤立的 φ 值成立。但又由连续性可知，如果有某个 φ_0 使得

$$
|f(z_0)| > |f(z_0+re^{i\varphi_0})|\,, \tag{2.54}
$$

则必然存在某个包含 φ_0 的开区间 $(\varphi_0-\varepsilon, \varphi_0+\varepsilon)$，使得(2.54)在这个区间内都成立。因此我们得到结论(2.53)中的大于号不能取到，从而 $f(z)$ 只能是常函数。证毕。

定理 2.13. 刘维定理

定义在整个复平面上的有界解析函数必然是常函数。♡

证明：设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数且 $f(z)\le M$。对任意 $z_0\in\mathbb{C}$，以 z_0 为圆心作以半径为 R 的圆，由柯西估计有

$$
|f'(z_0)| \le \frac{M}{R}\,, \tag{2.55}
$$

令 $R \to \infty$，则得到

$$|f'(z_0)| = 0\,. \tag{2.56}$$

由于 z_0 是任意一点，因此 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的导数处处为零，因此必然是常函数。

由刘维定理立刻可以得到代数学基本定理的一个简单证明。

定理 2.14. 代数学基本定理

$P_n(z)$ 是 n 次 $(n > 0)$ 复系数多项式函数，

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n\,, \tag{2.57}$$

则 $P_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中必有一个根。

证明：用反证法，设 $P_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有根。考虑函数

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)}\,. \tag{2.58}$$

显然 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析。且由于

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0\,, \tag{2.59}$$

因此 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有界函数。由刘维定理可得 $f(z)$ 是常函数。但 $f(z)$ 显然不是常函数，因此 $P_n(z)$ 必有根，得证。

练习 2.9 计算积分

$$\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m \, d\Omega$$

其中 $n\,, m$ 是整数。

练习 2.10 计算积分

$$\int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^4}\,, \qquad |a| \neq r\,.$$

练习 2.11 (a) $f(z)$ 在包含半径为 R_0，圆心在原点的圆盘的某个区域上解析。证明当 $R < R_0$，且 $|z| < R$ 时，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right) d\varphi\,.$$

(b) 证明

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\theta}+r}{Re^{i\theta}-r}\right) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\,.$$

练习 2.12 设 $u(r,\varphi)$ 是单位圆盘上的调和函数，因此是某个单位圆盘上解析的复函数的实部（或虚部）。用柯西积分公式证明其具有如下积分表示：

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)u(1,\varphi)d\varphi$$

其中

$$P_r(\gamma) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2}\,.$$

这个积分表示称为泊松积分表示。

第 3 章 复分析和流体力学

给定一个解析函数 $f(z)=u+iv$，我们知道 u 和 v 是调和函数，满足

$$(\partial_x^2+\partial_y^2)u=0\,,\qquad (\partial_x^2+\partial_y^2)v=0\,,\tag{3.1}$$

或

$$\partial_z\partial_{\bar z}u=0\,,\qquad \partial_z\partial_{\bar z}v=0\,.\tag{3.2}$$

同时，调和函数是物理和工程中经常碰到的函数，出现在流体力学，静电和静磁学，热传导等等。这一章以流体力学为例简介复变函数的应用。

3.1 定常不可压缩势流

流体力学的研究可以部分归结为对流速场的研究。对于二维平面流体，流速场可以记为

$$\vec V(x,y)=(u(x,y),v(x,y))\,.\tag{3.3}$$

这里 u 和 v 是速度场的 x 和 y 分量。定常体现为速度场不含时间依赖。不可压缩性要求流体流动时体积不发生显著的压缩或膨胀。用数学公式可以表示为

$$\mathrm{div}\vec V:=\partial_x u+\partial_y v=0\,.\tag{3.4}$$

上式左边称作 $\vec V$ 的散度。散度的物理意义可以通过通量理解。给定一条封闭曲线 C，流线经过 C 的通量定义为

$$\mathrm{Flux}(C):=\int_C\vec V\cdot\vec n ds\,,\tag{3.5}$$

其中 $\vec n$ 是 C 上线元的单位法向量，方向由 C 的内部指向外部。由格林定理，这又可以写为

$$\int_C\vec V\cdot\vec n ds=\iint\mathrm{div}\vec V\,dxdy\,.\tag{3.6}$$

如果 $\mathrm{Flux}(C)>0$，表明不断有流体从 C 的内部流出，因此不是不可压缩流体。同样，如果 $\mathrm{Flux}(C)<0$，表明不断有流体流进 C 的内部。

例 3.1 令

$$\vec V=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)\,,$$

$\vec V$ 在原点之外处处散度为零。但在原点处 $\vec V$ 没有定义，因此其散度也没有定义。

流速场在某一点处的旋度记为

$$\mathrm{curl}\vec V:=\partial_x v-\partial_y u\,.\tag{3.7}$$

势流定义为在空间中流速场的旋度处处为零的流。物理上理解，如果在放置一片树叶在流体上，随着流体的流动树叶没有发生自旋的话就对应了势场。

例 3.2 涡旋 (Eddy) 定义

$$\vec{V} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

注意 Eddy 是在除原点外是处处无旋的。

注 一个典型的有旋流体是层流，例如

$$\vec{V} = (y^2, 0).$$

我们下面讨论的都是不可压缩势流。按照上面散度和旋度为零的定义我们有

$$0 = \partial_x u + \partial_y v, \qquad 0 = \partial_x v - \partial_y u. \tag{3.8}$$

这个结果与柯西-黎曼方程非常接近，仅差一个负号。我们立刻得到如下定义的函数

$$g(z) = u - iv \tag{3.9}$$

是解析函数。由柯西定理知道，在 $g(z)$ 的解析区域内必定存在其原函数，记为

$$\Phi(z) = \varphi + i\psi, \tag{3.10}$$

且 $\Phi'(z) = g(z)$。我们把 φ 称作流速场的势函数，把 ψ 称作流函数，把 Φ 称作复势，把 Φ' 称作复速度。我们有

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= \partial_x\varphi + i\partial_x\psi \\ &\overset{\text{C-R}}{=} \partial_x\varphi - i\partial_y\varphi \\ &= u - iv, \end{aligned} \tag{3.11}$$

因此

$$\nabla\varphi := (\partial_x\varphi, \partial_y\varphi) = (u, v) = \vec{V}, \tag{3.12}$$

即 φ 的梯度正好给出流速。

例 3.3 已知流体速度场

$$\vec{V} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right),$$

求复势函数。

下面我们解释为什么将 ψ 称作流函数。我们前面证明过，作为一对共轭函数，

$$\varphi(x, y) = C_1, \qquad \psi(x, y) = C_2$$

所定义的等高线互相垂直。另外由多变量微积分我们知道 $\nabla\varphi$ 与 φ 的等高线垂直。为了看出这一点，我们参数化某一条 φ 的等高线为

$$\gamma(t) : (x(t), y(t)), \qquad a \le t \le b. \tag{3.13}$$

则

$$\varphi(x(t), y(t)) = C_1. \tag{3.14}$$

由微积分的链式法则我们得到

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d\varphi(x(t),y(t))}{dt} \\
&= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= (\partial_x\varphi, \partial_y\varphi)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

而 $(dx/dt, dy/dt)$ 刚好是等高线的切线方向，因此梯度与等高线垂直。因此我们得到结论，$\vec{V}$，$\nabla\varphi$，ψ 的等高线互相平行。因此求出 ψ 的等高线也就求出了流体的流线。这正是流函数这一名字的来源。

例 3.4 已知复势函数 $\Phi(z) = (a+ib)z$，求速度场和流线。

例 3.5 已知复势函数 $\Phi(z) = \mathrm{Ln}z$，求速度场和流线。

例 3.6 已知复势函数 $\Phi(z) = i\mathrm{Ln}z$，求速度场和流线。

流速为零的点成为驻点。由

$$
\Phi'(z) = \partial_x\varphi - i\partial_y\varphi = u - iv \qquad (3.16)
$$

知道，在驻点亦即 $\Phi'(z) = 0$ 的点。

例 3.7 求出 $\Phi(z) = z^2$ 的流线和驻点。

例 3.8 已知复势函数 $\Phi(z) = \mathrm{Ln}(z-1) + \mathrm{Ln}(z+1)$，画出驻点和流线。

复分析方法常被用来处理定常不可压缩势流绕固体边界的流动问题。用复势处理这类问题的简便之处在于，流线在固体的边界处的指向应与边界的切线一致。换言之，绕流固体的边界曲线本身就是一条流线，因此 Ψ 在固体边界处应为常数。不失一般性，可以设这个常数为零。这样给定边界线的绕流问题转化为寻找这样一个复势函数 $\Phi(z)$，使得其在给定边界上取实数值。

例 3.9 无穷远处的均匀流体流经一个圆形边界的复势由下式给出

$$
\Phi(z) = z\bar{U} + \frac{R^2}{z}U,
$$

其中 R 是圆的半径。