Exercises: Two

1.11 Proof: 调和函数 $u(x,y)$ 满足：二阶偏导数是连续的，以及 $\nabla^2 u = 0$ 。因为 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ ，所以变量替换后，有

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} , \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) ,$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 , \\ &= 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} ,\end{aligned}$$

其中最后一个等号用了“二阶偏导数存在且连续，则偏导顺序可交换”。

所以，调和函数 $u(x,y)$ 形式上满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 .$$

1.12 Solution: 设 $z = \sin x$, $x, z \in \mathbb{C}$ ，则 $x = \sin^{-1} z$ 。因为

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = z , \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sqrt{1 - z^2} ,\end{aligned}$$

所以

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x = iz + \sqrt{1 - z^2} ,$$

两边取对数、除以 i 后得

$$\sin^{-1} z = x = -i \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \ .$$

对于 $\cos^{-1} z$ ：设 $z = \cos y$ ， $y, z \in \mathbb{C}$ ，则 $y = \cos^{-1} z$ 。同理有

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y = z + \sqrt{z^2 - 1} \ .$$

两边取对数、除以 i 后得

$$\cos^{-1} z = y = -i \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \ .$$

1.13 Solution:

$$\begin{aligned}\exp e^z = \exp e^{x+iy} = \exp e^x(\cos y + i \sin y) = e^{e^x \cos y} e^{ie^x \sin y} \\ = e^{e^x \cos y}\left[\cos(e^x \sin y) + i \sin(e^x \sin y)\right] \ .\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(e^{e^z}\right) &= e^{e^x \cos y} \cos(e^x \sin y) \ , \\ \mathrm{Im}\left(e^{e^z}\right) &= e^{e^x \cos y} \sin(e^x \sin y) \ .\end{aligned}$$

1.14 Solution:

$$(-1)^{2i} = \left(e^{i\pi + i2k\pi}\right)^{2i} = e^{-2\pi} e^{-4k\pi} \ ,$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$ 。

1.15 Solution: 设 $x = \tan^{-1} z$ ， $x, z \in \mathbb{C}$ ，所以 $z = \tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$ ，从中可以反解出

$$e^{i2x} = \frac{1+iz}{1-iz} \ ,$$

两边取对数得

$$x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz} \ .$$

1.16 Solution:

当绕 $z=0$ 点 3 周时，函数值复原，所以 $z=0$ 是二阶支点。

当绕 $z=1$ 点 3 周时，函数值复原，所以 $z=1$ 是二阶支点。

作足够大的闭合曲线（一定会把 $z=0,1$ 两点包括在内），沿其绕三周时函数值才会复原，所以 $z=\infty$ 也是二阶支点。

割线可以选取 $(-\infty,0]$ 和 $[1,+\infty)$ 。

1.17 Solution: 根据 $\ln z$ 的支点位置，可以很容易得到 $\ln(1-e^z)$ 的支点为 $z = i2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ 和 $z=\infty$ ，所以割线可以选取 $i2k\pi+s,\ s\in[0,\infty)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 这一组。

1.18 Solution:

$$\begin{aligned} v_y = u_x = 2e^{x^2-y^2}[x\cos(2xy) - y\sin(2xy)] \ , \\ v_x = -u_y = 2e^{x^2-y^2}[y\cos(2xy) + x\sin(2xy)] \ , \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} dv(x,y) &= v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y \\ &= \mathrm{d}\left(e^{x^2-y^2}\sin(2xy)\right) \ . \end{aligned}$$

所以

$$v(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy) + C \ .$$

综上，

$$f(z) = e^{x^2-y^2}e^{i2xy} + C \ ,$$

其中 C 是纯虚的常数。

1.19 Solution:

$$
\begin{aligned}
u_x = v_y &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\cos y \\
u_y = -v_x &= -\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\sin y \ .
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u(x,y) &= u_x \mathrm{d}x + u_y \mathrm{d}y \\
&= \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\cos y\right] \ ,
\end{aligned}
$$

所以

$$
f(z) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\cos y + \frac{i}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\sin y + C \ ,
$$

其中 C 是实常数。

2.1 Solution: 设 $z = 2e^{i\phi}$ 。所以

$$
\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 1} &= \int_{|z|=2} \frac{2ie^{i\phi}\mathrm{d}\phi}{4e^{i2\phi} - 1} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2ie^{i\phi}}{2e^{i\phi} - 1} - \frac{2ie^{i\phi}}{2e^{i\phi} + 1}\right)\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{2e^{i\phi} - 1}{2e^{i\phi} + 1}\bigg|_0^{2\pi} \\
&= 0 \ .
\end{aligned}
$$

2.2 Proof: 设 $z = e^{i\phi}$ 。所以

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} |z-1| \cdot |\mathrm{d}z| &= \int_{|z|=1} |e^{i\phi}-1| \cdot |ie^{i\phi}\mathrm{d}\phi| \\
&= \int_0^{2\pi} |e^{i\phi}-1| \ \mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos\phi} \ \mathrm{d}\phi \\
&= 8 \ .
\end{aligned}$$

2.3 Proof:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \ \mathrm{d}z = \int_C \frac{\mathrm{d}f(z)}{f(z)} = \int_C \mathrm{d}[\ln f(z)] = 0 \ .$$

最后一个等号用了“ $\ln f(z)$ 在 $|f(z)-1| < 1$ 是单值解析的”。 □