

复变函数及其应用

作者：朱华星编著

组织：浙江大学

版本：0.5

*The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain. –
Jacques Hadamard*

目录

1 复变函数的基本概念	1
1.1 复变函数的历史 and 意义	1
1.2 复数的起源	1
1.3 复数的性质及其运算	4
1.4 复变函数及其导数	7
1.5 一些初等解析函数; 多值函数的支点与割线	14
1.6 求共轭调和函数	19
1.7 复线积分的基本定理	20
2 复变函数的积分	21
2.1 复线积分和围道积分	21
2.2 复线积分的基本定理	23
2.3 柯西积分公式	27
3 复分析和流体力学	32
3.1 定常不可压缩势流	32
4 复数项级数之基础	35
4.1 复数项级数初步	35
4.2 幂级数	39
4.3 泰勒级数展开	42
4.4 洛朗展开	44
4.5 奇点的分类	46
4.6 解析延拓	48
4.7 黎曼的 ζ 函数	51
5 留数定理及其在定积分中的应用	52
5.1 留数定理	52
5.2 利用留数计算定积分和无穷级数	56
5.2.1 三角函数积分	56
5.2.2 实轴上的有理型积分	57
5.2.3 震荡型积分	59
5.2.4 带有枝点和割线的积分	60
5.2.5 无穷级数求和	61

6 傅立叶级数和傅立叶变换	64
6.1 傅立叶级数	64
6.2 傅立叶变换	70
6.3 傅立叶变换与微分方程	75
6.4 δ 函数 (分布)	76

第1章 复变函数的基本概念

本章内容：

- 复变函数论的历史和意义
- 复数的起源和必要性
- 复数及其运算的基本性质
- 复函数与映射
- 复变函数的导数与解析性（全纯性），柯西-黎曼方程
- 一些基本的初等函数及其映射
- 多值函数，割线与黎曼面

1.1 复变函数的历史和意义

一些应用：

- 围道积分，柯西定理
- 代数学基本定理，复数的代数闭域性质
- 数论，黎曼 zeta 函数
- 傅立叶变换，信号处理
- 共形变换，共形场论，相变
- 流体力学、空气动力学，静电学，机翼设计
- 量子力学
- 解析性与因果律，色散关系
- 黎曼面：椭圆曲线加密；弦论；几何图形压缩
- 控制系统稳定性原理
- 复动力学和分形

1.2 复数的起源

早在中学阶段我们就知道，二次方程

$$x^2 = -1, \quad (1.1)$$

在实数域内无解，因此引入 -1 的平方根

$$i = \sqrt{-1}, \quad (1.2)$$

原方程的解写为 $x = \pm i$ 。但是这个说法并无法说明引入复数的必要性，原因是 $x^2 = -1$ 在实数域内无解有清晰的几何意义，因此并无引入复数的十分必要性。从这个角度讲，引入复数似乎是数学家的人为发明，并非实实在在的客体，这样其重要性大减。下面我们

将见到，从三次方程的求解出发，复数不再是人为引入的发明，而是实实在在的客体。这需要从数学史的一个传奇故事说起。

卡尔达诺与三次方程的求根公式

十六世纪意大利数学家和三次方程的求解；博洛尼亚大学的费罗对三次缺项方程的求解， $x^3 + mx = n$ 。文艺复兴时代的学术挑战，费罗对三次缺项方程求根公式的保密以作为秘密武器应付学术挑战。费罗弥留之际将他的公式传授给学生心高气傲的菲奥尔。菲奥尔向布雷西亚的著名学者，伟大的“结巴”丰塔纳挑战。菲奥尔和丰塔纳互相向对方出了 30 道题，菲奥尔认为求根公式只有自己知道，丰塔纳无论如何无法解出三次缺项方程，因此孤注一掷出了 30 道三次缺项方程的题。丰塔纳日以继夜地研究三次方程的解，在挑战截止的最后时刻独立得到了求根公式，一举击败菲奥尔。

这次学术挑战事件传遍了江湖，这时传奇人物卡尔达诺出场了。卡尔达诺一生著述丰富，累计达 7000 多页，内容包罗万象。莱布尼茨恰当地使用概括了他的一生：“卡尔达诺是有许多缺点的伟人。若没有这些缺点，他定将举世无双。”卡尔达诺听闻了菲奥尔和丰塔纳的学术对决，对丰塔纳的求根公式非常感兴趣，不断写信去请求丰塔纳公开他的秘密。经过卡尔达诺持之以恒的劝说，丰塔纳决定将求根公式告诉卡尔达诺，但是使用密码文写就，并要求卡尔达诺终其一生保守其秘密。卡尔达诺以基督教徒的名义欣然同意，这件事似乎就此为止。

这时，这个故事的最后一位重要人物，费拉里登场。费拉里早年是卡尔达诺的仆人，但很快发展成了师徒关系，并一同研究高次方程的解。卡尔达诺和费拉里一道，对高次方程的求解做出了重要贡献。首先是卡尔达诺发现了一般三次方程， $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ，的求根公式。与此同时，费拉里也发现了四次方程的求根公式。这无疑是代数学史上的重大突破。但他们的方法都基于将方程首先化成三次缺项方程，因此受制于卡尔达诺向丰塔纳做出的誓言，无法将他们的重大突破向世人公开。

后来，卡尔达诺师徒去到博洛尼亚。此时费罗早已去世，但卡尔达诺和费拉里从费罗三十年前的论文中找到了三次缺项方程的求根公式。这给了卡尔达诺启示，求根公式并非丰塔纳独有，而是早就被费罗所得，因此卡尔达诺也就不再需要遵守他向丰塔纳所做过的承诺。1545 年，卡尔达诺将三次和四次方程的求解写进了他的数学杰作《大术》，标志着人类数学史上的一个惊人突破。《大术》的出版让丰塔纳极度恼怒，导致了布雷西亚和米兰之间的持续信件谩骂和公开论战，此处不表。

下面我们就来看一下这个传奇的求根公式，以及它和虚数的关系。《大术》里记载对于

$$x^3 + mx = n, \quad (1.3)$$

可以写下其中一个根的代数式解

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}. \quad (1.4)$$

为了得到这个求根公式，费罗和丰塔纳做了一个绝妙的替换。他们让

$$x = t - u, \quad m = 3tu, \quad (1.5)$$

然后代入(4.26)的左边，得到

$$(t - u)^3 + m(t - u) = (t - u)^3 + 3tu(t - u) = t^3 - u^3. \quad (1.6)$$

因此立刻得到

$$3tu = m, \quad t^3 - u^3 = n. \quad (1.7)$$

上式的第一式给出

$$u = \frac{m}{3t}, \quad (1.8)$$

从而第二式给出

$$t^3 - \frac{m^3}{27t^3} = n, \quad (1.9)$$

或者

$$t^6 - nt^3 - \frac{m^3}{27} = 0. \quad (1.10)$$

因此

$$t^3 = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + \frac{4m^3}{27}}}{2}, \text{ 或只取正根} \quad t = \sqrt[3]{\frac{n + \sqrt{n^2 + \frac{4m^3}{27}}}{2}}. \quad (1.11)$$

用同样的方法，还能从

$$u^3 - t^3 = -n \quad (1.12)$$

求得

$$u = \sqrt[3]{\frac{-n + \sqrt{n^2 + \frac{4m^3}{27}}}{2}}. \quad (1.13)$$

这样我们就得到了《大术》里的公式

$$x = t - u = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}. \quad (1.14)$$

但是这个公式又跟虚数有何关系呢？我们看一个具体的方程：

$$x^3 - 15x = 4. \quad (1.15)$$

容易验证这个方程有三个实数解， $x = 4$ 和 $-2 \pm \sqrt{3}$ 。但是通过《大术》的公式给出

$$t = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}, \quad u = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}. \quad (1.16)$$

可以验证，

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}, \quad (-2 + \sqrt{-1})^3 = -2 + \sqrt{-121}, \quad (1.17)$$

因此

$$t = 2 + \sqrt{-1}, \quad u = -2 + \sqrt{-1}. \quad (1.18)$$

t 和 u 均为复数, 但

$$x = t - u = 2 + \sqrt{-1} - (-2 + \sqrt{-1}) = 4, \quad (1.19)$$

正是原方程的一个根! 我们原来的方程是实系数方程, 其根也是实系数。但是复数横亘在我们的求解过程中。打一个比方, 如果实数是大陆, 复数是海洋, 数学家要从欧洲大陆去往美洲大陆, 发现必须穿越大西洋才能抵达。旅途的起点和终点都是实数, 但是旅途的中间必须进入复数的领地才能抵达彼岸。正是从这时开始, 数学家意识到复数不再是人类心智的发明创造, 而是真实存在的客观对象! 这个认识是人类对抽象世界理解的巨大飞跃, 因此毫无悬念其重要性很难为当时的人所理解。此时的复数犹抱琵琶半遮面, 它的面纱直到两百多年后才由欧拉、高斯、柯西等伟大数学家揭开。

1.3 复数的性质及其运算

定义 1.1. 复数

复数 $z \in \mathbb{C}$ 通常记作

$$z = x + iy, \quad (1.20)$$

其中 \mathbb{C} 是全体复数的集合, $x, y \in \mathbb{R}$ 是实数,

$$i^2 = -1$$

是虚数单位。 x 和 y 分别称作 z 的实部和虚部, 记作

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z). \quad (1.21)$$

复共轭记作

$$z^* \equiv \bar{z} = x - iy. \quad (1.22) \quad \clubsuit$$

复数加减法:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2). \quad (1.23)$$

复数乘法:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.24)$$

复数的加法和乘法满足交换律和结合律, 以及关于加法的分配律。复数模长:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.25)$$

注意复数模长总是大于等于零的实数。复数除法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.26)$$

复数乘除的模长可以写为

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \quad (1.27)$$

定义 1.2. 复数的几何表示

对于复数 $z = x + iy$, 如果设立平面笛卡尔坐标系 xOy , 则复数一一对应了平面上一个坐标为 (x, y) 的点。利用平面极坐标系,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (1.28)$$

则有

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (1.29)$$

其中 $r = |z|$ 是复数的模长, φ 称作复数 z 的幅角, 记作

$$\varphi = \operatorname{Arg}(z). \quad (1.30)$$

注意 Arg 是一个多值函数。这是由于三角函数的周期性, 对于不同的 φ 可以对应同一个 z 。例如

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1.31)$$

这里不同的 k 对应了该多值函数的不同“分支”。在本课程中讨论多值函数的时候, 常需要限定到多值函数的一个“分支”内讨论, 在该分支内多值函数是单值的。可以把幅角函数 Arg 在所有分支中的某一个选作“主值分支”, 对应的幅角记作 $\arg(z)$, 称作 z 的主幅角。对于 z 的主幅角, 有

$$-\pi < \arg(z) \leq +\pi,$$

幅角可以通过主幅角表示为

$$\varphi = \operatorname{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.32)$$

不同的 k 取值对应不同分支内的幅角。注意 $z = 0$ 时无法定义幅角。



利用复数的几何表示可以很容易证明

定理 1.1. 三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (1.33)$$

其中第一个不等式对应三角形的任两边长之和大于等于第三边, 第二个不等式对应任两边长之差小于等于第三边。

**定理 1.2. 欧拉公式**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (1.34)$$



欧拉有许多以其名字命名的公式和定理, 而这个公式常常位列十大最美妙数学公式之一。如果让 $\varphi = \pi$, 则

$$e^{i\pi} = -1 + 0i. \quad (1.35)$$

欧拉公式的一个启发式证明如下。我们知道指数函数具有级数表示:

$$e^{ix} = 1 + \frac{1}{1!}ix + \frac{1}{2!}(-1)x^2 + \frac{1}{3!}(-i)x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \quad (1.36)$$

同时三角函数有级数表示：

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots, \quad (1.37)$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots, \quad (1.38)$$

上面两式比较，令 $x = \varphi$ ，即可得欧拉公式定理1.2。利用欧拉公式，复数的几何表示又可以写为

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}. \quad (1.39)$$

复数的几何表示对于计算复数的乘积和除法特别方便。对于两个复数 $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ ，有

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (1.40)$$

显然除法只有当 $z_2 \neq 0$ 时才有定义。进一步可以给出复数的整数幂次和方根。对于 $n \in \mathbb{Z}$ ，利用主幅角，有

$$z^n = r^n e^{in(\arg(z) + 2k\pi)}, \quad z^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\arg(z) + 2k\pi)/n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.41)$$

结合欧拉公式，可以很容易证明，

定理 1.3. 第莫佛定理 (de Moivre's theorem)

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi). \quad (1.42)$$

注意复数的整数幂次是单值的，即对于一个给定的 n 和 z ，只有一个确定的 z^n 。这是因为

$$z^n = r^n e^{in(\arg(z) + 2k\pi)} = r^n e^{in \arg(z)} e^{i2nk\pi} = r^n e^{in \arg(z)}, \quad (1.43)$$

而 $\arg(z)$ 是单值的。但复数的整数次方根不是单值的。这是因为

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\arg(z) + 2k\pi)/n} = r^{1/n} e^{i \arg(z)/n} e^{i2k\pi/n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.44)$$

对于给定的整数 n ， k 取值为 $0, 1, 2, \dots, n-1$ 时（对应了 n 个不同分支内的幅角）， $z^{1/n}$ 对应了 n 个不同的值，而 $k = n$ 与 $k = 0$ 时 $z^{1/n}$ 取值相等， $k = n+1$ 与 $k = 1$ 时 $z^{1/n}$ 取值相等。当我们计算多值函数时，**必须**指明是在幅角的哪个分支内的取值，否则是有歧义的。多值函数的不同分支在数学物理中具有非常重要的意义，但通常也是容易困惑的概念，因此必须注意。在后面我们讨论多值函数及其割线时还会回到这个问题。

例 1.1 求 $\sqrt{i} = i^{1/2}$ ，并计算其所有不同取值。

选取主值分支为

$$\arg(z) \in [0, 2\pi),$$

在主值分支内 $\arg(i) = \pi/2$ ，因此利用几何表示在第 k 个分支内 i 可以记为

$$i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}. \quad (1.45)$$

因此

$$i^{1/2} = 1^{1/2} e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)/2} = e^{i\pi/4} e^{ik\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.46)$$

当 $k = 0$ 时,

$$i^{1/2} = e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1.47)$$

当 $k = 1$ 时,

$$i^{1/2} = -e^{i\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1.48)$$

k 取其它整数值与上面两种情况中的一种相等。

复数的几何表示还可用于表示平面上的几何形状。例如, 方程

$$|z| = 1 \quad (1.49)$$


代表了复平面上距原点距离为 1 的所有点的集合, 即单位圆。同理, 方程

$$|z - z_0| = R \quad (1.50)$$

代表了以 z_0 为圆心, 半径为 R 的圆。我们知道, 复数的整数 n 次方根有 n 种不同取值。因此 $\sqrt[n]{1}$ 有 n 种不同取值, 分别对应了单位圆上等间距分隔的 n 个点。

 **练习 1.1** 计算:

$$\sqrt{-i}, \quad \sqrt{1+i}, \quad \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}. \quad (1.51)$$

 **练习 1.2** 计算 $\sqrt[4]{-i}$ 的所有可能取值。

 **练习 1.3** a, b 为复数, 证明当 $|a| = 1$ 或 $|b| = 1$ 时, 有

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1. \quad (1.52)$$

 **练习 1.4** 证明柯西不等式:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2.$$

(提示: 可以用数学归纳法)。

 **练习 1.5** 化简如下表达式:

$$1 + \cos \varphi + \cos(2\varphi) + \cdots + \cos(n\varphi), \quad (1.53)$$

$$1 + \sin \varphi + \sin(2\varphi) + \cdots + \sin(n\varphi). \quad (1.54)$$

1.4 复变函数及其导数

实变量函数 $f(x)$ 可以看成实数域或其子集 (定义域) 到实数域或其子集 (值域) 的映射。对应的, 复变量函数 (简称复变函数) 可以看成复数域或其子集到复数域或其子集的映射, 记作

定义 1.3. 复变函数定义

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy, \quad u(x, y) \in \mathbb{R}, \quad v(x, y) \in \mathbb{R}. \quad (1.55)$$

为了研究复变函数的解析性质, 我们需要定义一些几何概念。

定义 1.4. 邻域

定义复平面上点 a 的 ε 邻域为以 a 为圆心, 半径为 ε 的开圆, 记为 $D_\varepsilon(a)$,

$$D_\varepsilon(a) = \{z \mid |z - a| < \varepsilon\}. \quad (1.56)$$

**定义 1.5. 区域**

如果复平面上的一个点集 D 满足如下条件:

1. 在 D 中的每一个点 a , 必存在充分小的 ε , 使得 $D_\varepsilon(a) \subset D$.
2. D 中任意两点均可以可以通过一条 D 中的折线连接。

则称 D 是复平面上的一个区域。



如果 D 是一个区域, D 的边界定义这样一些点的集合: 这些点均不在 D 内, 但它们的任意邻域均包含有 D 中的点。我们把 D 的边界用 ∂D 表示。 D 和其边界的并集记为 $\overline{D} = D \cup \partial D$ 。

定义 1.6. 扩充复平面

记无穷远点为 ∞ , 扩充复平面定义为 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 。给定复平面上的点序列 $\{z_n\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty, \text{ iff } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|z_n|} = 0. \quad (1.57)$$

注意无穷远点只有一个, 不管 z_n 以何种方向趋近无穷远点。

**定义 1.7. 单连通区域**

对于复平面上的一个区域 D , 如果对于 D 上的任意一条封闭曲线都能连续收缩成一个点, 则称 D 是单连通区域。否则则成为多连通区域。



在分析中一个最重要性质是函数的可导性 (或可微性)。以实变量函数为例, 一个实函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导指的是如下极限存在:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (1.58)$$

并称其为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$ 。注意这要求 h 从正方向或负方向趋于 0 的极限都存在且相等。我们希望把这个定义推广到复变函数, 为此我们需要在复平面上定义极限的概念。

定义 1.8. 极限

$f(z)$ 是定义在 $D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ ^a 上的复函数。如果对于任意小的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - L| < \epsilon$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处的极限存在, 记为

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L. \quad (1.59)$$

^a这个记号的意思是 z_0 的 ε 邻域再除掉 z_0 这一点。之所以要除掉 z_0 的原因是函数在 z_0 极限存在与否与函数是否在 z_0 点有定义无关。



用简单的语言描述, 如果 $f(z)$ 在 z_0 处的极限存在, 则不管 z 从哪个方向趋近 z_0 , $f(z)$ 都趋近 L 。可以看到, 实变函数极限只有两种趋近可能, 但在复变情形有无穷多种

趋近极限点的可能。

例 1.2 z/\bar{z} 在 $z=0$ 处的极限是否存在?

实变函数中关于极限的运算规则也能应用到复变函数:

$$\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g, \quad (1.60)$$

$$\lim(fg) = \lim(f) \lim(g), \quad (1.61)$$

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}, \text{ if } \lim g \neq 0. \quad (1.62)$$

定义 1.9. 连续性

如果 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内有定义, 而且

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续。如果 $f(z)$ 在区域 D 上的每个点都连续, 则称 $f(z)$ 在 D 上连续。用简单的语言来说, 连续性代表了函数取值没有跳跃性。



有了极限概念后, 我们可以定义复变函数的导数。

定义 1.10. 复导数

复变函数 $f(z)$ 在 z_0 处的导数定义为

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (1.63)$$

如果上述极限存在, 我们称 $f(z)$ 在 z_0 可导, 或可微。如果 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析。



例 1.3 函数 \bar{z} 在 $\bar{z}=0$ 处不可导。

如果某个函数 $f(z)$ 在区域 D 上处处可导, 则把 $f(z)$ 称作 D 上的解析函数 (analytic function)。更多时候, 为了与实变量函数的可导性区分, 也把复变函数情形下的解析函数称作全纯函数 (holomorphic function)。注意函数在某点 z 解析相比在 z 可导是一个更强的条件, 因为解析性要求函数在 z 的某个邻域内处处可导。

如果把复变函数记作

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (1.64)$$

一个自然问题是可导性用 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 如何表示。

定理 1.4. 复变函数解析性条件和柯西-黎曼方程

函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 上解析 (即处处可导) 的充要条件是:

1. u 和 v 及其一阶偏导数在 D 上存在且连续;
2. u 和 v 在 D 上处处满足柯西-黎曼方程^a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.65)$$

为了方便书写, 我们约定将偏导数记为 $\partial u / \partial x = u_x$, 因此柯西-黎曼方程也

记为

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (1.66)$$

^a历史上, 柯西-黎曼方程首先出现在达朗博尔 1752 年研究流体力学的工作中, 1979 年欧拉将其引入到解析函数的研究。1814 年柯西用其构造他的函数论。黎曼关于函数论的博士论文直到 1851 年才出现。



在证明上述定理前, 我们先用看一下可导性的例子。

例 1.4 函数 $f(z) = \bar{z}$ 处处不可导。

例 1.5 函数 $f(z) = e^z$ 在全平面可导。在全平面处处可导的函数也称作整函数 (entire function)。

例 1.6 函数 $f(z) = x^2 + y + i(y^2 - x)$ 在直线 $y = x$ 上可导, 但处处不解析。

例 1.7 函数

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \quad (1.67)$$

处处满足柯西-黎曼方程但在 $z = 0$ 处不解析。

下面我们尝试证明定理 1.4。首先我们证明必要性: 设

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (1.68)$$

存在。则 h 以任何方式区域零上述极限都相等。首先令 $h = s \rightarrow 0, s \in \mathbb{R}$ 。此时

$$f'(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x+s, y) - u(x, y)}{s} + i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x+s, y) - v(x, y)}{s} = u_x + iv_x. \quad (1.69)$$

其次令 $h = it \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}$ 。此时

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{it} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{it} = -iu_y + v_y. \quad (1.70)$$

由于导数取值不依赖以何种方式趋于零, 因此有

$$u_x + iv_x = -iu_y + v_y, \quad (1.71)$$

或者写成

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (1.72)$$

接着证明充分性: 令 $h = s + it$, 由偏导数的存在性和连续性可知

$$u(x+s, y+t) = u(x, y) + su_x + tv_y + \alpha|h|, \quad (1.73)$$

$$v(x+s, y+t) = v(x, y) + sv_x + tv_y + \beta|h|, \quad (1.74)$$

其中 α 与 β 随着 $|h|$ 趋于零而趋于零。从而有

$$f(z+h) - f(z) = s(u_x + iv_x) + t(u_y + iv_y) + (\alpha + \beta)|h| \quad (1.75)$$

$$= (s + it)u_x - i(s + it)u_y + (\alpha + \beta)|h| \quad (1.76)$$

$$= h(u_x - iu_y) + (\alpha + \beta)|h|. \quad (1.77)$$

因此有

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = u_x - iu_y. \quad (1.78)$$

注 上述证明只给出了 $f(z)$ 在 z 点可导的充分条件。为了证明在 z 点解析, 还需要证明在 z 的某个邻域内处处可导。由条件易得。

复变函数的导数具有与实变函数类似的运算规则:

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (1.79)$$

$$\{f[g(z)]\}' = f'[g(z)]g'(z). \quad (1.80)$$

因此, 柯西-黎曼方程是判断一个复变函数在一点是否可导, 进而是否解析的重要工具。注意上式给出的柯西-黎曼方程是直角坐标下的形式。下面我们写出在极坐标系 $z = r \exp(i\phi)$ 下的柯西-黎曼方程。为此我们只需考虑 (各方向) 导数的存在性条件。 z 的径向微分可以写为 $\exp(i\phi)dr$, 因此沿径向导数可以写为

$$\frac{1}{e^{i\phi}} \frac{\partial f(z)}{\partial r} = \frac{1}{e^{i\phi}} u_r + \frac{1}{e^{i\phi}} i v_r, \quad (1.81)$$

而 z 的切向微分可以写为 $ir \exp(i\phi)d\phi$, 因此沿切向导数可以写为

$$\frac{1}{ire^{i\phi}} \frac{\partial f(z)}{\partial \phi} = \frac{1}{ire^{i\phi}} u_\phi + \frac{1}{ire^{i\phi}} i v_\phi, \quad (1.82)$$

要求沿径向和沿切向的导数相等立刻得到

引理 1.1. 极坐标下的柯西-黎曼方程

$$u_r = \frac{1}{r} v_\phi, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\phi. \quad (1.83)$$

柯西-黎曼方程的另一种方便形式是通过 Wirtinger 微分。

定义 1.11. Wirtinger 微分

Wirtinger 微分指的是如下定义的复求导记号:

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (1.84)$$

Wirtinger 微分可以通过微积分的链式法则理解。由于 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, 因此有

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.85)$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1.87)$$

利用 Wirtinger 微分柯西-黎曼方程又可以写为:

引理 1.2. Wirtinger 微分下的柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (1.88)$$

即 $f(z)$ 是独立于变量 \bar{z} 的复变函数。正是因为这个条件, 我们可以将复解析函数看作单个独立复变量 z 的函数, 而不仅仅是两个实变量 x, y 的函数。

由于复解析函数的导数与方向无关，因此可以写为

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y). \quad (1.89)$$

因此又可以写作

$$f'(z) = \frac{1}{2}(u_x - iu_y) + \frac{i}{2}(v_x - iv_y) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \quad (1.90)$$

即复解析函数的导数计算可以直接利用单变量微积分中的微分规则求解。

下面我们简单讨论一下柯西-黎曼方程的解释。

与共形映射的关系。对于平面上的两组直角坐标系 xOy 和 uOv ，如果 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是区域 D 上的函数，则定义了一个从 xOy 上的区域到 uOv 上的区域的映射。共形映射指的是一类保持映射区域中任意两条曲线的夹脚和定向不变的映射。共形映射的一个直观例子如下图所示：

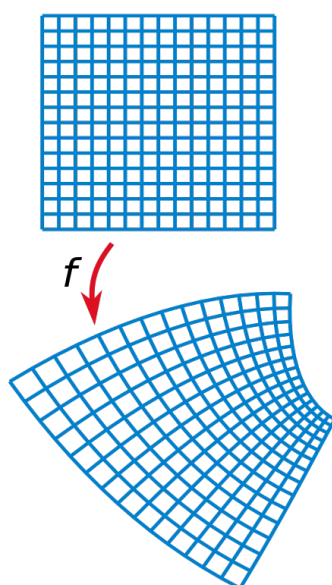


图 1.1: 一个共形变换的例子。图形取自: https://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_map#Pseudo-Riemannian_geometry。

定理 1.5. 共形映射定理

一个映射是共形映射的充要条件是 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是区域 D 上关于 $z = x + iy$ 的解析函数。



为了理解这一点，我们考虑 xOy 平面上的一条光滑参数曲线 $(x(t), y(t))$ ， $t \in [0, 1]$ 。在 $t = 0$ 处该曲线的切矢量为

$$V = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

映射后的曲线具有参数形式 $(u[x(t), y(t)], v[x(t), y(t)])$ 。由微积分的链式法则，在 $t = 0$ 处对应的切矢量为

$$U = \begin{pmatrix} u_x x'(0) + u_y y'(0) \\ v_x x'(0) + v_y y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

当 $f(z)$ 是解析函数且在 $z = x(0) + iy(0)$ 处导数不为零时, 变换矩阵可以写作

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

即切矢量具有变换关系

$$U = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} V \quad (1.94)$$

因此以解析函数的实部和虚部构成的映射相当于对曲线做了一个 r 倍的伸缩和 θ 角的旋转。如果有两条光滑曲线以 ϕ 角相交, 则同时旋转 θ 角后夹角仍是 ϕ 。

推论 1.1. 曲线族的正交性

对于解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $u(x, y) = C_1$ 和 $v(x, y) = C_2$ 定义了 uOv 平面上的两族正交曲线。由共形映射定理可知在 xOy 平面上由这两组方程定义的曲线也是正交的。




与调和函数的关系。 我们把拉普拉斯方程的解称作调和函数。在二维拉普拉斯方程可以写成

$$\nabla^2 g(x, y) := (\partial_x^2 + \partial_y^2)g(x, y) = 0. \quad (1.95)$$

如果 $u(x, y)$ 是解析函数的实部, 由柯西-黎曼方程很容易得到

$$\nabla^2 u(x, y) = \partial_x u_x + \partial_y u_y = \partial_x v_y - \partial_y v_x = (\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x)v(x, y) = 0, \quad (1.96)$$

因此解析函数的实部是调和函数。同理很容易证明解析函数的虚部 $v(x, y)$ 也是调和函数。我们把 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 称作一对共轭调和函数, 或者互为对方的 Bäcklund 变换。

 **练习 1.6** 极限 $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$ 是否存在? 请说明。

 **练习 1.7** 函数


$$f(x + iy) = -4xy + 2i(x^2 - y^2 + 3)$$

是否是解析函数? 如是请给出其解析区域。


 **练习 1.8** 函数

$$g(x + iy) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{for } z \neq 0 \\ 0 & \text{for } z = 0 \end{cases}$$

在 $z = 0$ 处是否解析? 请给出理由。

 **练习 1.9** 如果 $g(w)$ 和 $f(z)$ 是解析函数, 证明 $g[f(z)]$ 也是解析函数。

 **练习 1.10** $f(z)$ 是解析函数, 如果 $|f(z)| = \text{常数}$, 则 $f(z) = \text{常数}$ 。

 **练习 1.11** 证明调和函数形式上满足微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

1.5 一些初等解析函数；多值函数的支点与割线

这一节我们介绍一些大家熟知的初等函数推广到复变函数时的行为。我们先从单值函数说起。

整数幂次函数。 整数幂次函数 z^n ，其中 $n \in \mathbb{Z}$ ，我们在前面已经提到过。整幂次函数是全复平面上的解析函数，即整函数。其导数为 $(z^n)' = nz^{n-1}$ 。下图给出了从映射的观点给出整幂次函数在 $n = 2$ 时的行为。

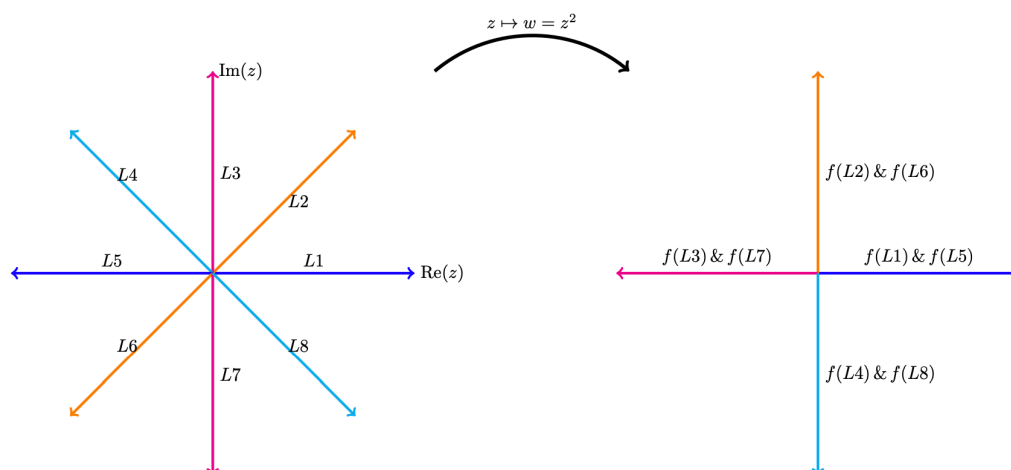


图 1.2: 极坐标格点在 $z \mapsto w = f(z) = z^2$ 下的映射。图形取自: <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic1.pdf>。

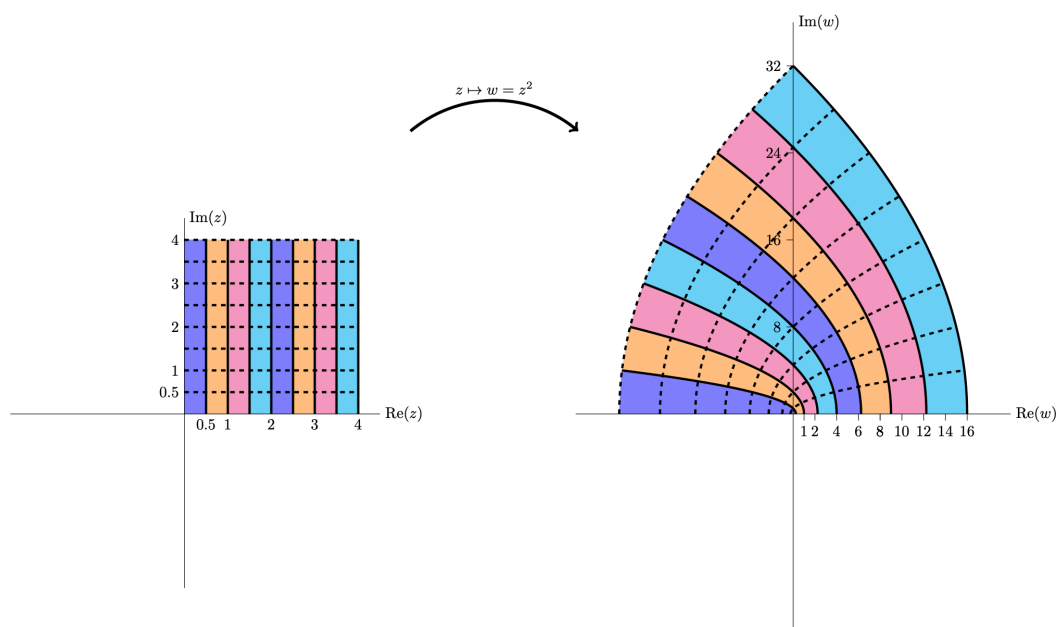


图 1.3: 直角坐标格点在 $z \mapsto w = z^2$ 下的映射。图形取自: <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic1.pdf>。

复指数函数。 我们定义复指数函数为

$$\exp(z) := e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.97)$$

也可从无穷幂次级数出发定义：

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k. \quad (1.98)$$

复指数函数也是周期函数：

$$\exp(z + i2k\pi) = \exp(z), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.99)$$

复指数函数也是在全复平面解析，因此也是整函数。复指数函数有如下性质：

1. $e^{z+w} = e^z e^w$, $z, w \in \mathbb{C}$ 。
2. $e^0 = 1$ 。
3. $e^z \neq 0$ 。
4. $\frac{d}{dz} e^z = e^z$ 。
5. 当 $n \in \mathbb{Z}$ 时, $(e^z)^n = e^{nz}$ 。

其中最后一条性质有必要简单解释一下。对于实指数函数，等式

$$(e^x)^y = e^{xy}, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.100)$$

总是成立的。但下面的互悖的命题表明这在复指数时失效。对于 $k \in \mathbb{Z}$,

1. $e^{1+2\pi ik} = e^1 e^{2\pi ik} = e \cdot 1 = e$
2. $(e^{1+2\pi ik})^{1+2\pi ik} = e$
3. $e^{1+4\pi ik-4\pi^2 k^2} = e$
4. $e^1 e^{4\pi i n} e^{-4\pi^2 n^2} = e$
5. $e^{-4\pi^2 k^2} = 1$

显然上述命题不可能同时为真。出现这种错误的原因是盲目使用了等式(1.100)。指数函数的映射如下图：

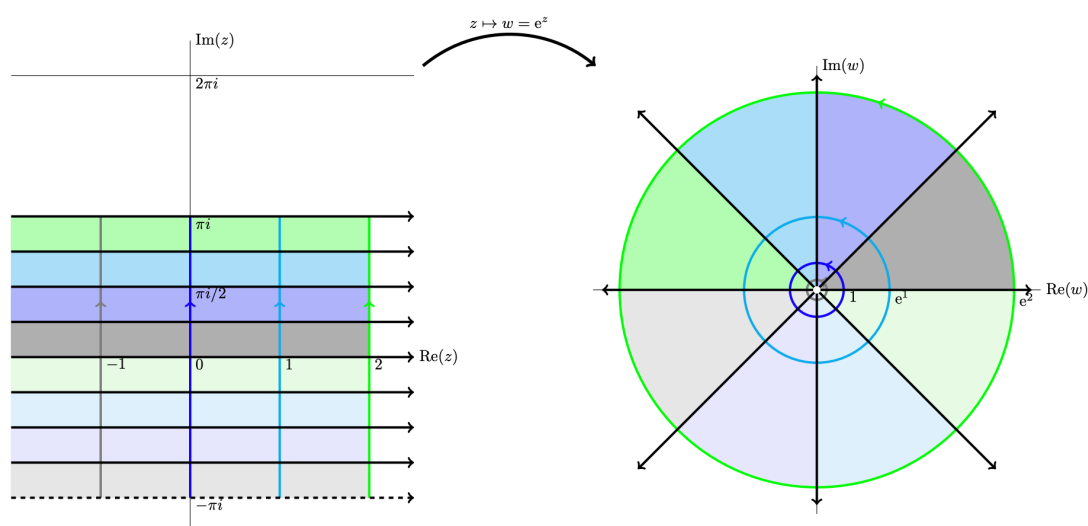


图 1.4: 复指数映射将一个水平周期带 $-\pi < y \leq \pi$ 映射到带孔复平面 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 。图形取自: <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic1.pdf>。

复三角函数。可以通过复指数函数定义如下三角函数：

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (1.101)$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (1.102)$$

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad (1.103)$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \quad (1.104)$$

另外复三角函数也可通过无穷级数定义。当 z 是实数时，这些函数过渡到实的三角余弦、正弦、双曲余弦和双曲正弦函数。与实的三角函数类似，复的三角函数满足

$$\frac{d}{dz} \cos(z) = -\sin(z), \quad \frac{d}{dz} \sin(z) = \cos(z), \quad (1.105)$$

$$\frac{d}{dz} \cosh(z) = \sinh(z), \quad \frac{d}{dz} \sinh(z) = \cosh(z). \quad (1.106)$$

以及

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1, \quad \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1. \quad (1.107)$$

复三角函数也是全复平面上的解析函数，即整函数。注意，实的正弦和余弦函数是有界函数，但是复的正余弦函数的模没有上界。复正弦函数出现在黎曼 zeta 函数的解析延拓中。

我们前面讲过开根号函数是多值函数。为了研究多值函数我们需要引入枝点 (branch point) 和割线 (branch cut) 的概念。我们以开根号函数为例来引入这些概念。

定义 1.12. 枝点

$f(z)$ 是定义在复平面上的多值解析函数。如果在 z 在 z_0 的任意小邻域内绕行 z_0 一周， $f(z)$ 的取值与出发时不等，则称 z_0 是 $f(z)$ 的枝点。

如果 $z = 0$ 是 $f(1/z)$ 的枝点，则 ∞ 是 $f(z)$ 的枝点。

如果 z_0 是 $f(z)$ 的枝点， $f(z)$ 的取值在绕行 z_0 点一到 $N-1$ 周都取不同值，但在第 N 周后复原，则称 z_0 是 $N-1$ 阶枝点。



定义 1.13. 割线

对于复平面上的多值函数 $f(z)$ ，其割线 P 定义为复平面上的曲线，使得 $f(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus P$ 上是单值的。通常将多值函数枝点取作割线的端点。注意割线并没有唯一的选取方法。



割线将多值函数 $f(z)$ 的自变量 z 的不同分支分隔开来，不同分支称作多值函数的不同叶。枝点是不同叶相交的点。在我们讨论多值函数的计算时，必须指明选取的是多值函数的哪一叶。这可通过给定多值函数在一个点的取值指定。

开根号函数 $w = \sqrt{z}$ 。 \sqrt{z} 是最简单的多值函数。有两个枝点， $z = 0$ 和 $z = \infty$ 。为了看出 $z = 0$ 是枝点，可以选取一个无穷小的绕行路径， $z(t) = \varepsilon e^{it}$ ， $0 \leq t \leq 4\pi$ 。 $t = 0$ 时， $\sqrt{z(t)}|_{t=0} = \sqrt{\varepsilon}$ 。绕行一周后， $t = 2\pi$ ， $\sqrt{z(t)}|_{t=2\pi} = \sqrt{\varepsilon} e^{i\pi} = -\sqrt{\varepsilon}$ 。继续再绕行一周后， $t = 4\pi$ ， $\sqrt{z(t)}|_{t=4\pi} = \sqrt{\varepsilon} e^{i2\pi} = \sqrt{\varepsilon}$ ，与初始值相等。因此 $z = 0$ 是开根号函数的

一阶枝点。 \sqrt{z} 的割线通常取为负实轴。

例 1.8 $\sqrt{1-z^2}$ 分别有哪些枝点，是几阶枝点，并给出一种割线作法。

例 1.9 $\sqrt[3]{z(z-1)(z-i)}$ 分别有哪些枝点，是几阶枝点，并给出一种割线作法。

\sqrt{z} 有两叶。将其沿割线按照函数值连续粘合得到的二维曲面称作 \sqrt{z} 的黎曼面，形如下图：

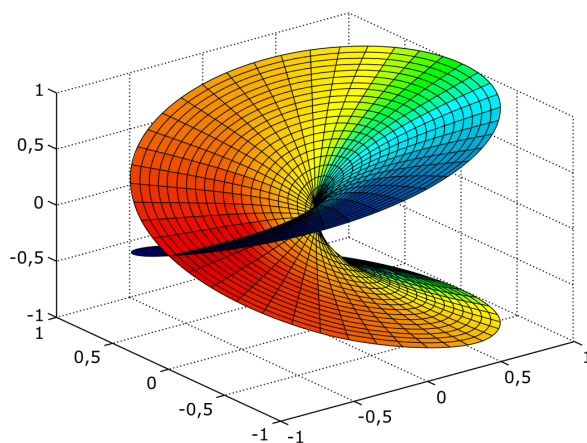


图 1.5: \sqrt{z} 的黎曼面。

复对数函数。复对数函数定义作复指数函数的反函数。即如果 $\exp(w) = z$ ，则定义 $w = \ln z$ 。由于复指数函数是周期函数，因此复指数函数是多值函数。利用幅角函数复对数可以写作

$$\ln(z) = \text{Ln}(|z|) + \text{Arg}(z). \quad (1.108)$$

其中 Ln 定义作对数函数取主值分支 ($k = 0$ 分支)。当其宗量为正实数时，即通常的实对数函数。利用主幅角，又可以写作

$$\ln(z) = \text{Ln}(|z|) + \arg(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.109)$$

可以看到，对于同一个 $z \neq 0$ ，复对数函数有无穷多种可能的取值。 $z = 0$ 和 $z = \infty$ 是 $\ln(z)$ 的对数枝点（无穷阶枝点）。复对数函数的割线通常取作负实轴。在除掉负实轴和原点后复对数函数是单值解析的，其导数为

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}. \quad (1.110)$$

与指数函数类似，一些实对数函数中常用的等式在复对数时不再成立。例如，

$$\ln(e^z) \neq z, \quad (1.111)$$

但

$$\ln(e^z) = z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.112)$$

图1.6给出了定义在主值分支 $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ 上的单值复对数函数定义的映射。

沿割线按找函数值连续粘合后可以得到复对数函数的黎曼面，形如图1.7。

例 1.10 函数 $\ln \frac{1-z}{1+z}$ 有哪些枝点，给出一种割线的方式。

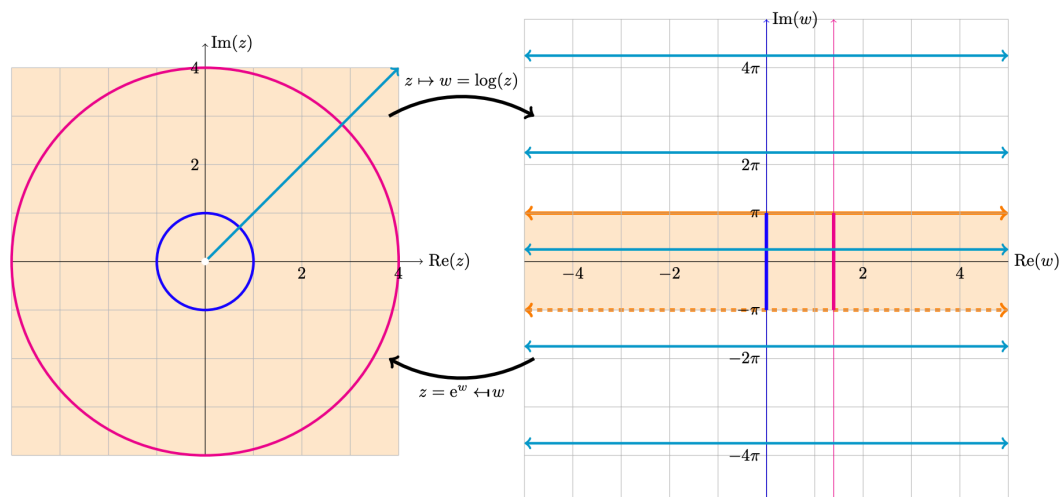


图 1.6: 主值分支上的复对数函数定义的映射。图形取自: <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic1.pdf>。

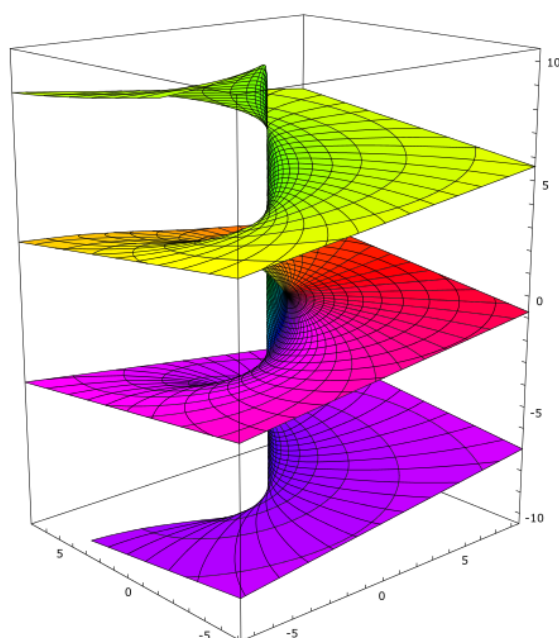


图 1.7: 对数函数的黎曼面

广义幂次函数。借助对数函数和指数函数可以定义广义幂次函数，

$$z^a := \exp(a \ln(z)), \quad z, a \in \mathbb{C}. \quad (1.113)$$

由于指数函数是单值函数，只需指定 $\ln(z)$ 的取值分支即可得到确定的函数值。

例 1.11 计算 i^i 。

例 1.12 在主值分支内计算 $\sqrt[3]{-1}$ 。

- 练习 1.12 用复对数和开根号函数表示三角函数的反函数 $\sin^{-1} z$ 和 $\cos^{-1} z$ 。
- 练习 1.13 计算 $\exp e^z$ 的实部和虚部。
- 练习 1.14 计算 $(-1)^{2i}$ 的所有取值。
- 练习 1.15 用对数函数表示 $\tan^{-1} z$ 。
- 练习 1.16 求 $\sqrt[3]{z(1-z)}$ 在延展复平面上的所有枝点, 并给出割线。
- 练习 1.17 求 $\ln(1-e^z)$ 在延展复平面上的所有枝点, 并给出割线。

1.6 求共轭调和函数

梁昆淼老师书中有一部分内容是关于已知解析函数的实部 (或虚部), 求虚部 (或实部)。这相当于已知两个共轭调和函数中的一个, 求另外一个。梁书中已给出三种解法, 这里不再重复。这里提出一种可以回避微分和积分运算的可能的解法。

这一新解法的思想是基于柯西-黎曼方程的 Wirtinger 微分表示:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (1.114)$$

利用这个结论, 在给定了 $u(x, y) = u((z + \bar{z})/2, i(\bar{z} - z)/2)$, 我们可以尝试对 u 做加法或减法, 从中移除所有的 \bar{z} 依赖, 则剩下的必是解析函数。我们以具体例子来讲解这个方法。

例 1.13 一直解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x, y) = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$, 求 $f(z)$ 。

解: 我们将 $v(x, y)$ 写作

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \sqrt{-\frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \sqrt{z\bar{z}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-(z - 2\sqrt{z\bar{z}} + \bar{z})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-(\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}})^2} \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}}). \end{aligned} \quad (1.115)$$

其中我们取了负根, 这是为了使 v 为正。因此

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(x, y) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}}), \quad (1.116)$$

显然为了使得 $f(z)$ 解析, $u(x, y)$ 应具有形式

$$u(x, y) = g(z) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\bar{z}}. \quad (1.117)$$

又知 $u(x, y)$ 应为实数, 容易猜得

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{z}, \quad (1.118)$$

这样就完全确定了

$$f(z) = \sqrt{2z} + C, \quad (1.119)$$

此处补回了加法常数。因为在这个过程中利用 $u(x, y)$ 的实性确定 $g(z)$ 的过程有猜想的猜

测的成分, 最后还需从结果 $f(z)$ 反推出实部或虚部与题干比较验证。

我们再来看一个更复杂的例子。

例 1.14 已知解析函数 $f(z)$ 的实部

$$u = \frac{2 \sin(2x)}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos(2x)},$$

且 $f(\pi/2) = 0$ 。求 $f(z)$ 。

解: 已知

$$\begin{aligned} u &= \frac{\frac{2}{2i}(e^{i(z+\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})})}{e^{i(\bar{z}-z)} + e^{-i(\bar{z}-z)} - (e^{i(z+\bar{z})} + e^{-i(z+\bar{z})})} \\ &= \frac{\frac{1}{i}(e^{i(z+\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})})}{(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}})(e^{-iz} - e^{iz})} \\ &= \frac{1}{i} \frac{[e^{iz}(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}) - e^{-iz}(e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}} + e^{i\bar{z}})]}{(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}})(e^{-iz} - e^{iz})} \\ &= \frac{1}{i} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{-iz} - e^{iz}} + \frac{1}{i} \frac{e^{i(z-\bar{z})} - e^{-i(z-\bar{z})}}{(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}})(e^{-iz} - e^{iz})}. \end{aligned} \quad (1.120)$$


另外我们知道

$$u(x, y) = f(z) - iv(x, y). \quad (1.121)$$

注意到(1.120)中最后一个等式右边第一项是解析函数, 第二项恰好是纯虚的, 因此可以当成 $-iv$ 。但是可以想象因此我们定下


$$f(z) = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{-iz} - e^{iz}} + C = \frac{\cos z}{\sin z} + C. \quad (1.122)$$

又通过 $f(\pi/2) = 0$ 得到 $C = 0$ 。这里如何凑得 $-iv$ 使之纯虚是关键。在这个问题里是自然蹦出来的, 但可以想象有例外的情况, 这时如何系统的进行这个工作有待探究。

 **练习 1.18** 已知解析函数 $f(z)$ 的实部

$$u = e^{x^2-y^2} \cos(2xy),$$

求 $f(z)$ 。

 **练习 1.19** 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部

$$v = \frac{(e^x - e^{-x}) \sin y}{2},$$

求 $f(z)$ 。

1.7 复线积分的基本定理

单变量微积分的基本定理将函数积分通过原函数的差表示,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1.123)$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, $F'(x) = f(x)$ 。

第2章 复变函数的积分

2.1 复线积分和围道积分

定义 2.1. 光滑曲线

复平面上的光滑曲线用 γ 标记。设其具有参数化形式：

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (2.1)$$

其中 $\gamma(t)$ 一般取复值。当 $\gamma(a) = \gamma(b)$ 时，这是一条封闭曲线，这时用记号 C 来标记。注意对于同一曲线可以又有无穷多种参数化形式。



例 2.1 复平面上连接 $z = 0$ 和 $z = 1 + i$ 的直线可以参数化为

$$\gamma_1(t) = (1 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

或者

$$\gamma_2(t) = (1 + i) \frac{e^t - 1}{e - 1}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

定义 2.2. 围道积分

$f(z)$ 是复变函数，其沿曲线 γ 的积分定义为

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt, \quad (2.2)$$

又称作 $f(z)$ 的围道积分。注意这里的 $f(z)$ 不需要是解析函数。



由于曲线参数化的任意性，我们希望围道积分的值与曲线参数化无关，但这在上述定义中并不显然。为此我们需要如下定理。

定理 2.1. 围道积分的参数化独立性

复变函数围道积分的取值与参数化的具体形式无关。这个性质称作重参数不变性。❤

证明：设 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ 是 γ 的一种参数化形式。一个新的参数化形式可通过单调递增函数 $t = g(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$ 表示，使得

$$g(\alpha) = a, \quad g(\beta) = b.$$

这时的参数曲线写为

$$\gamma(g(\tau)) : x(g(\tau)) + iy(g(\tau)), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta.$$

利用 τ 参数化的围道积分写作

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(g(\tau))) \gamma'(g(\tau)) g'(\tau) d\tau &= \int_a^b f(\gamma(g(\tau))) \gamma'(g(\tau)) dg(\tau) \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

与原参数化一致，证毕。

围道积分的另一种表示形式为

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy). \quad (2.4)$$

注意以这种形式进行具体计算时仍需指定 $x(t)$ 和 $y(t)$ ，其结果与(2.2)无异。围道积分具有性质

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz, \quad (2.5)$$

其中 $\int_{-\gamma}$ 指的是沿曲线的反向积分，即此时的积分起点为 $\gamma(b)$ ，积分终点为 $\gamma(a)$ 。

例 2.2 沿 $z = 0$ 到 $z = 1 + i$ 的直线计算 $\int_{\gamma} z^2 dz$ 。

例 2.3 沿 $z = 0$ 到 $z = 1 + i$ 的直线计算 $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ 。

例 2.4 沿单位圆逆时针（通常也称为正定向）计算 $\int_C z^2 dz$ 。

例 2.5 沿单位圆逆时针计算 $\int_C z^{-1} dz$ 。

关于围道积分我们有如下不等式

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz| \leq ML, \quad (2.6)$$


其中 M 是 $|f(z)|$ 在 γ 上的极大值， $L = \int_{\gamma} |dz|$ 是 γ 的长度。第二个不等式是显然的，我们只证明第一个不等式。令

$$\theta = \arg \left[\int_{\gamma} f(z) dz \right]. \quad (2.7)$$


则

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta} \int_{\gamma} f(z) dz \right] \\ &= \int_{\gamma} \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta} f(z) dz \right] \\ &\leq \int_{\gamma} |f(z) dz| \\ &= \int_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz|. \end{aligned} \quad (2.8)$$


证毕。

 **练习 2.1** 计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1}.$$

 **练习 2.2** 计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=1} |z - 1| \cdot |dz|.$$

 **练习 2.3** 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析且处处满足 $|f(z) - 1| < 1$ 。证明对 D 中的任意封闭曲线 C 有

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

(假设 $f'(z)$ 连续)。

2.2 复线积分的基本定理

单变量微积分的基本定理将函数积分通过原函数的差表示,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (2.9)$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, $F'(x) = f(x)$. 复线积分也有类似的基本定理:

定理 2.2. 复线积分的基本定理

$f(z)$ 是区域 D 上的解析函数, γ 是 D 上从 z_0 到 z_1 的曲线, $f(z)$ 在 D 上的原函数为 $F(z)$, 即 $F'(z) = f(z)$, 则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0). \quad (2.10)$$

证明: 等式左边可以写为

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F'(z)dz &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt}dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ &= F(z_1) - F(z_0). \end{aligned} \quad (2.11)$$

证毕。有了这个定理, 我们之前的一些例子可以用这个定理直接得到答案。

定理 2.3. 解析函数积分的路径独立性

如果解析函数在区域 D 内解析且有原函数, 则复线积分

$$\int_{\gamma} f(z)dz$$

的取值只依赖于 γ 的端点, 而与 γ 的具体形状无关。

这个定理是显然的。进一步我们有如下定理:

定理 2.4. 路径独立和闭围道积分退化的等价性

如下两个命题等价:

1. 复线积分 $\int_{\gamma} f(z)dz$ 是路径独立的。
2. 对于任何封闭围道 C , $\int_C f(z)dz = 0$ 。

例 2.6 计算下述积分, 其中积分路径沿单位圆周正向 (逆时针)。

$$\text{a) } \int_{|z|=1} \frac{1}{z^n} dz, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{b) } \int_{|z|=1} \ln z dz,$$

其中第二个积分定义在主值分支内。

下述定理是本节的主要定理。

定理 2.5. 柯西定理

如果 $f(z)$ 是单连通区域 D 上的解析函数, C 是 D 上的任意封闭围道, 则有

$$\int_C f(z)dz = 0. \quad (2.12)$$



关于这个定理的证明有不同的方法。第一种方法利用平面积分的格林定理, 需要假定 $f(z)$ 的一阶导数连续。更绝妙的方法是 Goursat 的证明, 其中不需要假定导数连续, 而且 D 可以是闭区域。我们先看利用格林定理的证明。为此我们先回忆格林定理:

定理 2.6. 格林定理

C 是平面上的正定向封闭曲线, D 是 C 所包围的区域, $L(x, y)$ 和 $M(x, y)$ 在包含 C 及其内部的某个区域上的偏导数存在且连续, 则

$$\int_C (Ldx + Mdy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dxdy.$$



关于格林定理有一个物理的理解。把积分左侧写成

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s}, \quad (2.13)$$

其中 $\vec{v}(x, y) = (L(x, y), M(x, y))$ 是一个流速场, $d\vec{s} = (dx, dy)$ 是流线微元。因此这个积分的物理意义可以看成是某种宏观速度场的闭曲线积分。如果想象宏观速度场是由无穷多小的涡旋构成, 则这个线积分也能写成这些小的涡旋的面积分, 或者更准确说是速度场的旋度的面积分,

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_D (\text{curl} \vec{v}) dxdy, \quad (2.14)$$

其中

$$\text{curl} \vec{v} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ L & M \end{vmatrix} = M_x - L_y. \quad (2.15)$$

有了格林定理后, 柯西定理的证明顺理成章。

证明 (柯西定理): 令 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, 则

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx) \\ &\stackrel{\text{格林定理}}{=} \iint_D (-u_y - v_x) dxdy + i \iint_D (u_x - v_y) dxdy \\ &\stackrel{\text{柯西-黎曼方程}}{=} 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中二重积分的区域是 C 的内部。定理得证。

下面我们给出 Goursat 对柯西定理的绝妙证明。这个证明的强大之处在于无须用到函数导数的连续性条件¹。因此这个定理人们也称作 Cauchy-Goursat 定理。事实上, Goursat 证明的并非一般的封闭围道, 而是一个矩形围道。我们下面的证明针对的也是矩形围道。

¹事实上, 柯西一直想给出一个不用到导数连续性的证明, 但直到柯西去世时这个证明也还没找到。这个证明直到 Goursat 出现才找到。巧合的是, Goursat 出生在柯西去世后的一年。

当然，有了矩形围道和三角形围道后可以构造出任意围道。

证明（柯西-Goursat 定理）：我们考虑由如下不等式定义的矩形闭区域 R

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

矩形的边界线记为 ∂R 。我们的积分围道即沿着 ∂R 正向绕行。我们要证明的柯西-Goursat 定理是对于 R 上的解析函数 $f(z)$ ，有

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

我们定义

$$\eta(R) = \int_{\partial R} f(z) dz. \quad (2.17)$$

将 R 等分为四个更小的矩形，记为 $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$ 。此时原积分可以写为

$$\eta(R) = \eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)}). \quad (2.18)$$

由三角不等式有

$$|\eta(R)| \leq |\eta(R^{(1)})| + |\eta(R^{(2)})| + |\eta(R^{(3)})| + |\eta(R^{(4)})| \leq 4|\eta(R^{(k)})|, \quad (2.19)$$

其中 $\eta(R^{(k)})$ 是四个小矩形的绝对值中最大的一个。我们得到不等式

$$|\eta(R^{(k)})| \geq \frac{1}{4} |\eta(R)|. \quad (2.20)$$

我们选取 $R^{(k)}$ 继续这个四等分过程，并再从中选取一个绝对值最大的矩形，然后再把四等分过程无限进行下去。这个过程给出一个不断缩小的矩形序列： $R \supset R_1 \supset R_2 \supset R_3 \cdots \supset R_n \supset \cdots$ 。这个序列满足

$$\eta(R_n) \geq \frac{1}{4} \eta(R_{n-1}),$$

或

$$\eta(R_n) \geq \frac{1}{4^n} \eta(R). \quad (2.21)$$

这个无穷矩形序列收敛于一个点 z_0 ，

$$\{z_0\} = \cap_{n=1}^{\infty} R_n.$$

$f(z)$ 在 z_0 可导给出条件

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0). \quad (2.22)$$

我们回忆这个极限的定义是对于任意 $\epsilon > 0$ ，总是存在 $\delta > 0$ ，使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon, \quad (2.23)$$

或者写成

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0|. \quad (2.24)$$

对于沿序列中第 n 个矩形 R_n 边界线的积分有

$$\int_{\partial R_n} dz = 0, \quad \int_{\partial R_n} z dz = 0. \quad (2.25)$$

这两个等式可以通过直接线积分或从原函数得到。利用这两个结果我们有

$$\eta(R_n) = \int_{\partial R_n} f(z) dz = \int_{\partial R_n} [(f(z) - f(z_0)) - f'(z_0)(z - z_0)] dz. \quad (2.26)$$

利用(2.24)中的不等式我们得到对于任意小的 ϵ ，我们总能找到 n 使得

$$\eta(R_n) < \epsilon \int_{\partial R_n} |z - z_0| \cdot |dz| \leq \epsilon d_n L_n, \quad (2.27)$$

其中 d_n 是 R_n 的对角线长度， L_n 是 ∂R_n 的长度，满足

$$d_n = \frac{1}{2^n} d, \quad L_n = \frac{1}{2^n} L, \quad (2.28)$$

其中 d 是 R 的对角线长度， L 是 ∂R 的长度。综上我们有不等式

$$\eta(R_n) < \epsilon \frac{1}{4^n} dL. \quad (2.29)$$

与(2.21)结合我们得到

$$\epsilon \frac{1}{4^n} dL > \frac{1}{4^n} \eta(R). \quad (2.30)$$

或

$$\epsilon dL > \eta(R). \quad (2.31)$$

由于 ϵ 可以任意小，而 d 和 R 有限，因此必有

$$\eta(R) = 0. \quad (2.32)$$

得证。

例题 2.1 思考如何从矩形和三角形的柯西定理得到任意封闭曲线的柯西定理。

事实上，单连通区域中的柯西定理可以表述为下述等价命题：

定理 2.7. 单连通区域中的柯西定理

设 D 是单连通区域， $f(z)$ 在 D 上解析， C 是 D 上任意封闭曲线，则下述命题等价：

1. $\int_C f(z) dz = 0$ 。
2. $f(z)$ 在 D 上的任意复线积分都是路径独立的。
3. $f(z)$ 在 D 上有原函数。



关于这三个命题的等价性证明此处从略。

定理 2.8. 复连通区域上的柯西定理

设 D 是复连通区域，其边界为 $\partial D = C_1 \cup C_2 \cdots \cup C_n$ 。 $f(z)$ 在 D 上解析。则

$$\int_{C_1 + C_2 + \cdots + C_n} f(z) dz = 0, \quad (2.33)$$

其中积分路径沿这 C_k 的正定向。



注 沿着某个围道积分的过程中，如果解析区域总是在前进方向的左手边，则称为正定向。

柯西得到柯西定理的一个重要动机是用其来求积分。我们看一些例子。一些常见的积分围道。

例 2.7 证明:

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx. \quad (2.34)$$

例 2.8 证明

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{\pi}{2}. \quad (2.35)$$

定理 2.9. 复连通区域上的柯西定理

设 D 是 \mathbb{C} 上的复连通区域, C_1, C_2, \dots, C_n 是 D 上的闭曲线, R 是 C_1, C_2, \dots, C_n 所包围的区域, $f(z)$ 在 R 上解析, 定义沿围道 C_k 前进时 R 在 C_k 的左侧为正定向, 则下述正定向积分为零,


$$\int_{C_1+C_2+\dots+C_n} f(z) dz = 0. \quad (2.36)$$



 **练习 2.4** 计算

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz,$$

其中积分围道是从 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的直线。

 **练习 2.5** 证明当 $|a| < r < |b|$ 时,

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2\pi i}{a-b},$$

其中积分围道取正定向。

 **练习 2.6** 计算


$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

 **练习 2.7** 计算

$$\int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^2}.$$

且 $r \neq |a|$ 。提示: 由方程 $z\bar{z} = r^2$ 有

$$|dz| = -ir \frac{dz}{z}.$$

 **练习 2.8** 证明菲涅尔积分公式:

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

2.3 柯西积分公式

柯西积分公式是解析函数理论的核心内容。如果学完这门课有什么一定要记住的话, 柯西积分公式必居其中。

定理 2.10. 柯西积分公式

设 $f(z)$ 是单连通区域 D 上的解析函数, C 是 D 上任意封闭曲线, z_0 是 C 所包裹区域内的任意内点。则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (2.37)$$

其中积分围道沿 C 的正定向。

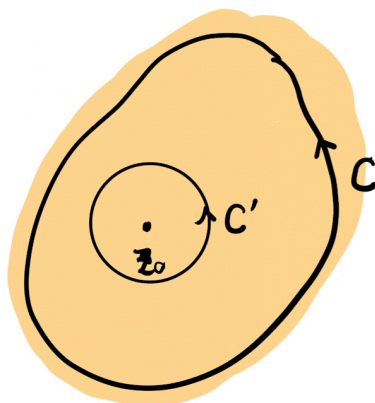


图 2.1: 证明柯西积分公式的围道

证明: 取图 2.1 中围道 C 和 C' , 其中 C' 是以 z_0 为圆心的任一小圆。被积函数 $f(z)/(z - z_0)$ 在 C 和 C' 所包裹的区域内解析, 由复连通区域的柯西公式有

$$\int_{C-C'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 = \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{C'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (2.38)$$

换句话说

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (2.39)$$

不妨将 C' 取作

$$C'(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (2.40)$$

并让 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。由复线积分的定义有

$$\begin{aligned} \int_{C'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(z_0) i dt \\ &= 2\pi i f(z_0), \end{aligned} \quad (2.41)$$

即

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (2.42)$$

因此柯西公式得证。

例 2.9 计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

柯西公式的一个强大之处在于将 $f(z_0)$ 的 z_0 依赖关系用很简单的代数函数表示出来

了, 不管 $f(z)$ 是多复杂的函数。例如, 我们可以从中得到如下重要结论:

定理 2.11. 柯西求导公式

设 $f(z)$ 是区域 D 上的解析函数, z_0 是 D 上的内点, C 是将 z_0 包裹在内的任意封闭曲线, $f(z)$ 在 D 上无穷次可导, 且 n 阶导数可以写为

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (2.43)$$



证明: 我们用归纳法进行证明。 $n = 0$ 的情形直接对应柯西积分公式, 因此无须再证明。设(2.43)对于 $n - 1$ 阶导数成立, 即

$$f^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} dz, \quad (2.44)$$

我们要证明第 n 阶导数也成立而且可以写成式(2.43)的形式。从导数的定义出发我们有

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(z_0 + h) - f^{(n-1)}(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{2\pi i h} \int_C f(z) \left(\frac{1}{(z - z_0 - h)^n} - \frac{1}{(z - z_0)^n} \right) dz \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{2\pi i h} \int_C f(z) \left(\frac{(z - z_0)^n - (z - z_0 - h)^n}{(z - z_0 - h)^n (z - z_0)^n} \right) dz. \end{aligned} \quad (2.45)$$

利用

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + B^{n-1}). \quad (2.46)$$

我们有

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{2\pi i h} \int_C f(z) \frac{h[(z - z_0)^{n-1} + (z - z_0)^{n-2}(z - z_0 - h) + \cdots + (z - z_0 - h)^{n-1}]}{(z - z_0)^n (z - z_0 - h)^n} dz \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \end{aligned} \quad (2.47)$$

得证。这个结果告诉我们, 解析函数一定是无穷次可导的。对于实变量函数这个结论不成立。

例 2.10 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz.$$

从柯西积分公式出发可以得到许多有趣的结果。

推论 2.1. 柯西估计

设 $f(z)$ 在区域 D 上解析, 以 z_0 为圆心, 半径为 R 的圆盘在 D 上, 则

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \|f\|_C}{R^n}, \quad (2.48)$$

其中 C 是圆盘边界, $\|f\|_C = \sup_{z \in C} |f(z)|$ 是 $f(z)$ 在 C 的最小上确界。



证明：由柯西积分公式可知，

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}} Re^{it} dt \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{\|f\|_C}{R^n} 2\pi. \end{aligned} \quad (2.49)$$

证毕。当 $n=0$ 时，有

$$|f(z_0)| \leq \|f\|_C, \quad (2.50)$$

由柯西估计我们立刻得到

定理 2.12. 最大模原理

设 $f(z)$ 在区域 D 上解析。如果 $f(z)$ 不是常函数，则 $|f(z)|$ 在 D 上没有最大值。 

证明：利用反证法，设 z_0 是 D 上一点， $|f(z_0)|$ 在 D 上取最大值。我们想要证明这是 $f(z)$ 一定是常函数。我们以 z_0 为圆心取一半径为 r 的小圆 C ，使得 C 也在 D 上。令 $z = z_0 + re^{i\varphi}$ ，由柯西积分公式我们有

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned} \quad (2.51)$$

左边取绝对值后有不等式

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})| d\varphi. \quad (2.52)$$

由我们的假设应有


$$|f(z_0)| \geq |f(z_0 + re^{i\varphi})|. \quad (2.53)$$

为了使这两个不等式(2.52)和(2.53)同时成立，(2.53)中的严格大于号只可能对孤立的 φ 值成立。但又由连续性可知，如果有某个 φ_0 使得

$$|f(z_0)| > |f(z_0 + re^{i\varphi_0})|, \quad (2.54)$$

则必然存在某个包含 φ_0 的开区间 $(\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon)$ ，使得(2.54)在这个区间内都成立。因此我们得到结论(2.53)中的大于号不能取到，从而 $f(z)$ 只能是常函数。证毕。

定理 2.13. 刘维定理

定义在整个复平面上的有界解析函数必然是常函数。 

证明：设 $f(z)$ 是 \mathbb{C} 上的解析函数且 $f(z) \leq M$ 。对任意 $z_0 \in \mathbb{C}$ ，以 z_0 为圆心作以半径为 R 的圆，由柯西估计有

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}, \quad (2.55)$$

令 $R \rightarrow \infty$, 则得到

$$|f'(z_0)| = 0. \quad (2.56)$$

由于 z_0 是任意一点, 因此 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上的导数处处为零, 因此必然是常函数。

由刘维定理立刻可以得到代数学基本定理的一个简单证明。

定理 2.14. 代数学基本定理

$P_n(z)$ 是 n 次 ($n > 0$) 复系数多项式函数,

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n, \quad (2.57)$$

则 $P_n(z)$ 在 \mathbb{C} 中必有一个根。



证明: 用反证法, 设 $P_n(z)$ 在 \mathbb{C} 上没有根。考虑函数

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)}. \quad (2.58)$$

显然 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上解析。且由于

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0, \quad (2.59)$$

因此 $f(z)$ 是 \mathbb{C} 上的有界函数。由刘维定理可得 $f(z)$ 是常函数。但 $f(z)$ 显然不是常函数, 因此 $P_n(z)$ 必有根, 得证。

练习 2.9 计算积分

$$\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m d\Omega$$

其中 n, m 是整数。

练习 2.10 计算积分

$$\int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^4}, \quad |a| \neq r.$$

练习 2.11 (a) $f(z)$ 在包含半径为 R_0 , 圆心在原点的圆盘的某个区域上解析。证明当 $R < R_0$, 且 $|z| < R$ 时,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \operatorname{Re} \left(\frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} \right) d\varphi.$$

(b) 证明

$$\operatorname{Re} \left(\frac{Re^{i\theta} + r}{Re^{i\theta} - r} \right) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2}.$$

练习 2.12 设 $u(r, \varphi)$ 是单位圆盘上的调和函数, 因此是某个单位圆盘上解析的复函数的实部 (或虚部)。用柯西积分公式证明其具有如下积分表示:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) u(1, \varphi) d\varphi$$

其中

$$P_r(\gamma) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \gamma + r^2}.$$

这个积分表示称为泊松积分表示。

第3章 复分析和流体力学

给定一个解析函数 $f(z) = u + iv$, 我们知道 u 和 v 是调和函数, 满足

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = 0, \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2)v = 0, \quad (3.1)$$

或

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} u = 0, \quad \partial_z \partial_{\bar{z}} v = 0. \quad (3.2)$$

同时, 调和函数是物理和工程中经常碰到的函数, 出现在流体力学, 静电和静磁学, 热传导等等。这一章以流体力学为例简介复变函数的应用。

3.1 定常不可压缩势流

流体力学的研究可以部分归结为对流速场的研究。对于二维平面流体, 流速场可以记为

$$\vec{V}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)). \quad (3.3)$$

这里 u 和 v 是速度场的 x 和 y 分量。定常体现为速度场不含时间依赖。不可压缩性要求流体流动时体积不发生显著的压缩或膨胀。用数学公式可以表示为

$$\operatorname{div} \vec{V} := \partial_x u + \partial_y v = 0. \quad (3.4)$$

上式左边称作 \vec{V} 的散度。散度的物理意义可以通过通量理解。给定一条封闭曲线 C , 流线经过 C 的通量定义为

$$\operatorname{Flux}(C) := \int_C \vec{V} \cdot \vec{n} ds, \quad (3.5)$$

其中 \vec{n} 是 C 上线元的单位法向量, 方向由 C 的内部指向外部。由格林定理, 这又可以写为

$$\int_C \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \iint \operatorname{div} \vec{V} dxdy. \quad (3.6)$$

如果 $\operatorname{Flux}(C) > 0$, 表明不断有流体从 C 的内部流出, 因此不是不可压缩流体。同样, 如果 $\operatorname{Flux}(C) < 0$, 表明不断有流体流进 C 的内部。

例 3.1 令

$$\vec{V} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

\vec{V} 在原点之外处处散度为零。但在原点处 \vec{V} 没有定义, 因此其散度也没有定义。

流速场在某一点处的旋度记为

$$\operatorname{curl} \vec{V} := \partial_x v - \partial_y u. \quad (3.7)$$

势流定义为在空间中流速场的旋度处处为零的流。物理上理解, 如果在放置一片树叶在流体上, 随着流体的流动树叶没有发生自旋的话就对应了势场。

例 3.2 涡旋 (Eddy) 定义

$$\vec{V} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

注意 Eddy 是在除原点外是处处无旋的。

注 一个典型的有旋流体是层流，例如

$$\vec{V} = (y^2, 0).$$

我们下面讨论的都是不可压缩势流。按照上面散度和旋度为零的定义我们有

$$0 = \partial_x u + \partial_y v, \quad 0 = \partial_x v - \partial_y u. \quad (3.8)$$

这个结果与柯西-黎曼方程非常接近，仅差一个负号。我们立刻得到如下定义的函数

$$g(z) = u - iv \quad (3.9)$$

是解析函数。由柯西定理知道，在 $g(z)$ 的解析区域内必定存在其原函数，记为

$$\Phi(z) = \varphi + i\psi, \quad (3.10)$$

且 $\Phi'(z) = g(z)$ 。我们把 φ 称作流速场的势函数，把 ψ 称作流函数，把 Φ 称作复势，把 Φ' 称作复速度。我们有

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= \partial_x \varphi + i \partial_x \psi \\ &\stackrel{\text{C-R}}{=} \partial_x \varphi - i \partial_y \varphi \\ &= u - iv, \end{aligned} \quad (3.11)$$

因此

$$\nabla \varphi := (\partial_x \varphi, \partial_y \varphi) = (u, v) = \vec{V}, \quad (3.12)$$

即 φ 的梯度正好给出流速。

例 3.3 已知流体速度场

$$\vec{V} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

求复势函数。

下面我们解释为什么将 ψ 称作流函数。我们前面证明过，作为一对共轭函数，

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2$$

所定义的等高线互相垂直。另外由多变量微积分我们知道 $\nabla \varphi$ 与 φ 的等高线垂直。为了看出这一点，我们参数化某一条 φ 的等高线为

$$\gamma(t) : (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b. \quad (3.13)$$

则

$$\varphi(x(t), y(t)) = C_1. \quad (3.14)$$

由微积分的链式法则我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (\partial_x \varphi, \partial_y \varphi) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

而 $(dx/dt, dy/dt)$ 刚好是等高线的切线方向, 因此梯度与等高线垂直。因此我们得到结论, \vec{V} , $\nabla \varphi$, ψ 的等高线互相平行。因此求出 ψ 的等高线也就求出了流体的流线。这正是流函数这一名字的来源。

例 3.4 已知复势函数 $\Phi(z) = (a + ib)z$, 求速度场和流线。

例 3.5 已知复势函数 $\Phi(z) = \text{Ln} z$, 求速度场和流线。

例 3.6 已知复势函数 $\Phi(z) = i \text{Ln} z$, 求速度场和流线。

流速为零的点成为驻点。由

$$\Phi'(z) = \partial_x \varphi - i \partial_y \varphi = u - iv \quad (3.16)$$

知道, 在驻点亦即 $\Phi'(z) = 0$ 的点。

例 3.7 求出 $\Phi(z) = z^2$ 的流线和驻点。

例 3.8 已知复势函数 $\Phi(z) = \text{Ln}(z - 1) + \text{Ln}(z + 1)$, 画出驻点和流线。

复分析方法常被用来处理定常不可压缩势流绕固体边界的流动问题。用复势处理这类问题的简便之处在于, 流线在固体的边界处的指向应与边界的切线一致。换言之, 绕流固体的边界曲线本身就是一条流线, 因此 Ψ 在固体边界处应为常数。不失一般性, 可以设这个常数为零。这样给定边界线的绕流问题转化为寻找这样一个复势函数 $\Phi(z)$, 使得其在给定边界上取实数值。

例 3.9 无穷远处的均匀流体流经一个圆形边界的复势由下式给出

$$\Phi(z) = z\bar{U} + \frac{R^2}{z}U,$$

其中 R 是圆的半径。

第4章 复数项级数之基础

这一章我们学习复数项级数的一般理论并将其应用到复解析函数中。研究无穷级数的一个重要动机是,解析函数在其解析邻域总可以展开称泰勒级数(证明在这一章给出),因此即使对于不能通过初等函数表示的解析函数,我们也可通过级数来表示。如果我们需要在孤立奇点附近展开解析函数,这时我们需要洛朗展开。

4.1 复数项级数初步

形如

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (4.1)$$

的无穷项求和称为无穷级数。出现无穷的地方往往都有一些违反直觉的现象。这里的无穷指的是求和的项数是无穷多的。在给出无穷级数收敛性的定义和判据前,我们先来看一些例子。

例 4.1 有任意多个长度为 L 的砖块,能否将这些砖块依次垒起来,要求每一层只有一块砖块,但是使得总长度任意长?

将第一块砖块的左侧放置在坐标原点,其右侧的坐标记为 C_1 ,显然有 $C_1 = L$ 。第二块砖块要垒在第一块之上,我们要尽量往右垒,记第二块最右侧的坐标为 C_2 。类似的,记第 n 块砖块的最右侧坐标为 C_n 。我们要找的就是这样一种垒法,使得 C_n 最大。解决这个问题关键不是考虑如何从下往上垒,而是考虑从上往下每块砖块的关系。

首先,第 n 块砖块的一半可以超出第 $n-1$ 块砖块而不掉下来。因此我们最多可以有

$$C_n = C_{n-1} + \frac{L}{2}. \quad (4.2)$$

第 $n-1$ 块砖块要垒在第 $n-2$ 块之上。为了保证不坍塌,要求第 $n-1$ 和 n 块砖块的整体重心应落在第 $n-2$ 块砖块的右侧边缘以内,不妨就选在边缘以使得突出的长度最长。这样我们得到关系

$$\begin{aligned} C_{n-2} &= \frac{C_n - \frac{L}{2} + C_{n-1} - \frac{L}{2}}{2} \\ &= C_{n-1} - \frac{L}{4}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

或者

$$C_n = C_{n-2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{4}. \quad (4.4)$$

再来看第 $n-2$ 块如何垒在第 $n-3$ 块之上最好。重复上面的逻辑应有

$$\begin{aligned} C_{n-3} &= \frac{1}{3} \left[C_n - \frac{L}{2} + C_{n-1} - \frac{L}{2} + C_{n-2} - \frac{L}{2} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[C_{n-2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{4} - \frac{L}{2} + C_{n-2} + \frac{L}{4} - \frac{L}{2} + C_{n-2} - \frac{L}{2} \right] \\ &= C_{n-2} - \frac{L}{6}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

或者

$$C_n = C_{n-3} + \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right). \quad (4.6)$$

到这里规律已经明显。容易求的 C_n 的一般表达式

$$C_n = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \right). \quad (4.7)$$

我们的问题是, $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ 是否有限。答案是否定的。

定理 4.1. 调和级数发散

无穷级数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad (4.8)$$

是发散级数。



为了证明这一点, 我们注意到

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &= \infty. \end{aligned} \quad (4.9)$$

如果对调和级数添加负号则可以得到一个有限的交错级数,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2. \quad (4.10)$$

但是处理交错级数需要非常小心, 因为黎曼重排定理告诉我们, 对收敛的交错级数重排列后可以得到任意值。以 (4.10) 为例, 作如下重排

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \cdots \\ \stackrel{\text{重排}}{=} &1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

欧拉是应用无穷级数的大师, 但他并没有发展出一套严格的无穷级数理论, 无穷级数在他手上更像是变魔术般帮助他得到正确结果。严格的无穷级数理论到了柯西手上才建立。

定理 4.2. 柯西判据

设有实或复无穷项级数

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots \quad (4.12)$$

假如其满足如下柯西判据：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ such that $\forall n > N$ and $\forall p \geq 1$, 有

$$|w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots + w_{n+p}| < \varepsilon. \quad (4.13)$$



为了理解柯西判据的起源需要从无穷级数的部分和和柯西序列说起，此处不赘述。注意满足柯西判据的收敛级数必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| \rightarrow 0$ ，但反过来满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| \rightarrow 0$ 的级数并不一定收敛。调和级数就是这样一个例子。

无穷级数更强的收敛条件是绝对收敛。对于无穷级数

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots \quad (4.14)$$

如若对每一项求绝对值后的级数

$$|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| + \cdots \quad (4.15)$$

满足柯西判据，则称(4.14)是**绝对收敛级数**。绝对收敛级数本身一定是收敛的，这是因为对于部分和我们总是有三角不等式

$$|w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots + w_{n+p}| \leq |w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \cdots + |w_{n+p}|. \quad (4.16)$$

我们今后讨论的主要是绝对收敛级数。

例 4.2 当 $|r| < 1$ 时，几何级数

$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots \quad (4.17)$$

绝对收敛。

我们记该几何级数各项绝对值的部分和

$$S_n = 1 + |r| + |r|^2 + |r|^3 + \cdots + |r|^n. \quad (4.18)$$

容易求得

$$S_n = \frac{1 - |r|^{n+1}}{1 - |r|}. \quad (4.19)$$

当 $|r| < 1$ 时显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - |r|}. \quad (4.20)$$

因此几何级数各项绝对值部分和是收敛序列，因此几何级数绝对收敛。在这个例子里我们并没有直接用到柯西判据，原因是部分和的解析表达式可以求出。在部分和无法解析求出时，柯西判据就变得有用。

绝对收敛级数具有一些好的性质：

- 对绝对收敛级数重排不改变结果。
- 绝对收敛级数之和和乘积仍绝对收敛。

对于无穷级数

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots, \quad (4.21)$$

有如下常用的绝对收敛判据:

- **比较法**: 设有正项收敛级数 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$, 且 $|a_n| < b_n$, 则 S 绝对收敛。
- **比值法**: 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = L$ 存在, 则当 $L < 1$ 时级数绝对收敛; 当 $L > 1$ 时级数发散; 当 $L = 1$ 时无从判断。
- **根式法**: 如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = L$ 存在, 则当 $L < 1$ 时级数绝对收敛; 当 $L > 1$ 时级数发散; 当 $L = 1$ 时无从判断。

例 4.3 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \quad (4.22)$$

是否收敛。

例 4.4 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad (4.23)$$

是否收敛。(提示: 斯特林公式: $\ln n! = n \ln n - n + O(\ln n)$)

当无穷级数

$$w_1(z) + w_2(z) + w_3(z) + \cdots + w_n(z) + \cdots \quad (4.24)$$

的每一项本身也是函数时, 称为函数项级数。函数项级数在某一确定点 z_0 变为常数项级数, 其收敛判据与常数项级数也一致。定义在某个区域 D 上的函数项级数有两种可能的收敛形式。

- **逐点收敛**: 对于 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z)$, 当下列条件满足时,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(z), \quad \text{s.t. } \forall n > N(z), p \geq 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} w_k \right| < \varepsilon \quad (4.25)$$

则称该函数项级数逐点收敛。

- **一致收敛**: 对于 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z)$, 当下列条件满足时,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \text{s.t. } \forall n > N, p \geq 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} w_k \right| < \varepsilon \quad (4.26)$$

则称该函数项级数一致收敛。

对于一致收敛级数, 级数给出的函数

$$f(z) = w_1(z) + w_2(z) + \cdots + w_n(z) + \cdots \quad (4.27)$$

也是连续的。而对于逐点收敛级数则不然。

例 4.5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (4.28)$$


在 \mathbb{R} 上逐点收敛, 但在 $x = 0$ 出不连续。

如果一个函数项级数在某个区域上既是一致收敛的也是绝对收敛的, 则称为一致绝

对收敛级数。魏尔斯特拉斯给出了一致收敛级数的 **M 判别法**。对于区域 D 上的函数项级数 $\sum w_n(z)$ ，如果一个绝对收敛常数项级数 $\sum a_n$ 和某个常数 M ，使得当 n 充分大时，

$$|w_n(z)| < Ma_n \quad (4.29)$$

在 D 上恒成立，则 $\sum w_n(z)$ 一致绝对收敛。对于一致绝对收敛级数允许我们逐项积分或逐项求导。

 **练习 4.1** 证明对于下列函数项级数在 $x \in \mathbb{R}$ 上一致收敛。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

4.2 幂级数

一类非常重要的函数项级数是幂级数，定义为

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots \quad (4.30)$$

其中 a_k 是复系数。更一般的可以定义在 z_0 附近展开的幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \quad (4.31)$$

几何级数

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots \quad (4.32)$$

是最简单的一类幂级数。前面我们知道，当 $|z| < 1$ 是几何级数收敛，

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1. \quad (4.33)$$

因此，几何级数在以 $z = 0$ 为圆心，1 为半径的圆内收敛，在圆上及其外部发散，其和函数在该圆上有奇点。

例 4.6 对于任何 $r > 0$ ，幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (4.34)$$

在 $|z| \leq r$ 一致绝对收敛。事实上，这个级数给出的正是指数函数 $\exp(z)$ 。

关于幂级数的一个重要定理是由阿贝尔证明的。

定理 4.3. 阿贝尔定理

对于任意幂级数(4.30)，总存在实数 R ， $0 \leq R \leq \infty$ ， R 称为该级数的收敛半径，该级数有如下性质，

- 该级数对于 $|z| < R$ 上的任意一点绝对收敛。如果有 $0 \leq \rho < R$ ，则该级数在 $|z| \leq \rho$ 上一致绝对收敛。
- 当 $|z| > R$ 时该级数发散。
- 该级数在 $|z| < R$ 上是解析函数，该解析函数的导数可通过对级数逐项求导得到，且导数的收敛半径不变。

$|z| = R$ 称为收敛圆。



注意这个定理无法判断在收敛圆上的级数收敛行为。通过根式判别法可以给出 R 的具体表达式，称作阿达玛的收敛半径公式，

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}, \quad (4.35)$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ 称作序列 $\{|a_n|\}$ 的 **limit superior**。如果定义 $\alpha_n = \sup\{|a_k| \mid k \geq n\}$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n. \quad (4.36)$$

当极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 存在时，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (4.37)$$

lim superior 的好处是不管极限存不存在，**lim superior** 肯定存在。下面我们证明阿贝尔定理。

首先我们证明对于 $|z| < R$ 上的任意点级数绝对收敛。为此我们选取 ρ 使得 $|z| < \rho < R$ 。因此

$$\frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}. \quad (4.38)$$

由(4.35)可知存在 n_0 ，当 $n > n_0$ 时

$$\frac{1}{\rho} > \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (4.39)$$

因此当 $n > n_0$ 时有

$$|a_n||z|^n < \frac{|z|^n}{\rho^n}. \quad (4.40)$$

由于 $|z| < \rho$ ，不等号右侧是一个收敛几何级数的第 n 项。由比较判别法知道级数绝对收敛。为了证明级数在 $|z| \leq \rho < R$ 上一致收敛，我们可以选取 ρ' ，使得 $\rho < \rho' < R$ 。对于充分大的 n 我们同样有

$$|a_n||z|^n < \frac{|z|^n}{\rho'^n} \leq \frac{\rho^n}{\rho'^n}. \quad (4.41)$$

上面不等式最右端是一个绝对收敛的常数项级数，由魏尔斯特拉斯 **M** 判别法知道级数在 $|z| \leq \rho < R$ 上一致收敛。

为了证明当 $|z| > R$ 是级数发散，我们取 ρ 使得 $R < \rho < |z|$ ，此时有

$$\frac{1}{R} > \frac{1}{\rho}, \quad (4.42)$$

因此对于充分大的 n 总是有

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{\rho}. \quad (4.43)$$

因此

$$|a_n||z|^n > \frac{z^n}{\rho^n} \rightarrow \infty. \quad (4.44)$$

因此这个级数显然不收敛。

幂级数在其一致绝对收敛区域内的导数可以记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \quad (4.45)$$

为了证明导数具有同样的收敛半径 R ，只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{n} = 1. \quad (4.46)$$

为此我们令 $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$ ，显然 $\delta_n > 0$ 。两边求 n 次方得到

$$n = (1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 + \cdots > 1 + \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 \quad (4.47)$$

由此得到

$$\delta_n^2 < \frac{2}{n-1}, \quad (4.48)$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ 。

注

- 当 $R = \infty$ 时，级数对应的解析函数是整函数。
- 当 $R = 0$ 是级数仅在一点收敛，此时级数没有对应的解析函数。
- 除了根式判别法给出的收敛半径外，有时也能用比值判别法求收敛半径，

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (4.49)$$

例 4.7 求下述级数的收敛半径。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n. \quad (4.50)$$


注意不管幂级数在收敛圆上收敛与否，其所对应的解析函数在其收敛圆上必然存在奇点。此处不作证明，但给出一些例子。


- $1 + z + z^2 + \cdots = 1/(1-z)$ 在 $|z| = 1$ 上不收敛。 $z = 1$ 是对应解析函数的奇点。
- $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n = -\ln(1-z)$ 在 $z = 1$ 发散，其余各处收敛。

•


$$\frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{z^n}{n(n-1)} + \cdots = z + (1-z)\ln(1-z) \quad (4.51)$$

在 $|z| = 1$ 处处收敛，但其对应解析函数在 $z = 1$ 处有奇点。

 **练习 4.2** 求 $\frac{2z+3}{z+1}$ 在 $z_0 = 1$ 处的幂级数展开，并求其收敛半径。

 **练习 4.3** 求下列级数的收敛半径：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^n \quad (|q| < 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}.$$

 **练习 4.4** 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R ，求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$ 的收敛半径。

 **练习 4.5** z 取何值时级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n$$

收敛？

4.3 泰勒级数展开

定理 4.4. 泰勒展开定理

设复变函数 $f(z)$ 在区域 D 上解析, z_0 是 D 上一点. 则 $f(z)$ 在 z_0 处有幂级数表示

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (4.52)$$

该幂级数的收敛半径是 z_0 离 D 的边界的最短距离, 记为 r . 因此上述泰勒展开只对 $|z - z_0| < r$ 有效. 幂级数的系数由下式唯一确定

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (4.53)$$

其中 C 是 D 上以正定向绕 z_0 的简单封闭围道.



证明: 对于以 z_0 为圆心, r 为半径的开圆盘 $D_r(z_0)$ 内任意一点 z , 总可以选取 r_1 和 r_2 , 使得

$$|z - z_0| < r_1 < r_2 < r. \quad (4.54)$$

有柯西公式知道

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad (4.55)$$

其中 C 是以 z_0 为圆心, r_2 为半径的正定向圆, 显然在积分围道上有 $|w - z_0| = r_2$, 因此

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} < 1. \quad (4.56)$$

因此对(4.55)的分母有

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n. \quad (4.57)$$

将其带入柯西积分公式后得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw (z - z_0)^n. \quad (4.58)$$

与(4.52)比较得到

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (4.59)$$

得证。

我们看到解析函数在解析邻域内一定有泰勒级数展开表示. 事实上这正是“解析”一词的来源. 对于复变函数其神奇之处在于:

- 在一个区域上只要一次导数处处存在, 则任意阶导数也处处存在;
- 一定存在泰勒级数表示, 而且其系数由柯西公式唯一确定; 换句话说, 解析函数的泰勒级数是唯一的。

注意上述性质在实变量函数里并不存在. 事实上, 对于实函数, 甚至无穷阶导数存在也不能一定得到泰勒级数表示存在。

例 4.8 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

的所有阶导数存在且连续, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处没有泰勒级数展开。

泰勒展开提供了对任意复杂解析函数在解析邻域内计算的方便手段。对于多值函数, 在指定了分支和割线后, 同样能在解析邻域内做泰勒展开。

例 4.9 求 $\sin(z)$ 在 $z = 0$ 处的泰勒展开并给出收敛半径。

例 4.10 求

$$f(z) = \frac{e^z}{1-z}$$

在 $z = 0$ 处的泰勒展开并给出收敛半径。

例 4.11 求出

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

在 $z = 5$ 处的泰勒展开并给出收敛半径。

例 4.12 求

$$f(z) = \ln(1+z)$$

在 $z = 0$ 的泰勒展开和收敛半径。

定理 4.5. 解析函数的零点孤立性定理

如果 $f(z)$ 是区域 D 上的解析函数且不恒为零, 则 $f(z)$ 在 D 上的零点一定是孤立零点, 即对 $f(z)$ 的任意零点 z_0 , 一定能找到一个邻域 $D_\varepsilon(z_0)$, 使得 $f(z)$ 在 $D_\varepsilon(z_0)$ 上除了 z_0 外不再有零点。




证明: 设 z_0 是 $f(z)$ 的零点, $f(z)$ 在 z_0 处有泰勒级数展开


$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (4.61)$$

由于 $f(z)$ 不恒为零, 故其展开系数 a_n 不能恒为零。不妨令第一个非零的 a_n 为 a_N , 则

$$f(z) = (z - z_0)^N \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n} (z - z_0)^n \right) := (z - z_0)^N g(z). \quad (4.62)$$


由于 $a_N \neq 0$, 因此 $g(z_0) \neq 0$ 。由 $g(z)$ 的连续性可知一定存在 z_0 的某个邻域使得 $g(z_0) \neq 0$, 因此在这个邻域内 $f(z) \neq 0$ 。证毕。

 **练习 4.6** 求 $1/(1+z^2)$ 在 $z_0 = a$ 处的泰勒展开通式, 其中 a 是实数。

 **练习 4.7** 勒让德多项式是如下生成函数在原点处的泰勒展开,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+z^2}} = 1 + P_1(\alpha)z + P_2(\alpha)z^2 + \cdots$$

求出 $P_1(\alpha)$, $P_2(\alpha)$, $P_3(\alpha)$, $P_4(\alpha)$ 。

 **练习 4.8** 对 $\ln(\frac{\sin z}{z})$ 在原点处做泰勒展开到 z^6 。

4.4 洛朗展开

泰勒展开对于解析函数在解析邻域内的计算非常有用，但实际情况中我们也会碰到解析函数在非解析邻域内的计算问题。一个简单的例子是

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

在 $z=0$ 处的展开。显然 $0 < |z| < 1$ 是这个函数的解析邻域，但这是一个复连通区域， $z=0$ 是函数的奇点。为了讨论解析函数在孤立奇点（关于孤立奇点的定义我们后面再讨论，此处只需从字面上理解）处的展开问题，我们需要洛朗展开。

定理 4.6. 洛朗级数展开定理

设函数 $f(z)$ 在带形区域

$$D: r_1 < |z - z_0| < r_2$$

上解析，则 $f(z)$ 在该带形区域上可展开成如下无穷级数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (4.63)$$

或者统一写为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (4.64)$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

称作该洛朗级数的解析部分或正规部分，其收敛区域是 $|z - z_0| < r_2$ 。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

称作主要部分或奇异部分，其收敛区域是 $|z - z_0| > r_1$ 。洛朗级数的展开系数可由如下积分公式给出

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \geq 0 \quad (4.65)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) (z - z_0)^{n-1} dz, \quad n \geq 1 \quad (4.66)$$

或者统一的

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad -\infty < n < \infty. \quad (4.67)$$

其中 C 是在带形区域 $r_1 < |z - z_0| < r_2$ 中绕 z_0 一周的简单封闭正定向围道。

证明：对于解析区域内的任意一点 z ，选取如图4.1所示积分围道 C_1, C_2, C_3, C_4 ，其定向如图所示。有柯西积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (4.68)$$

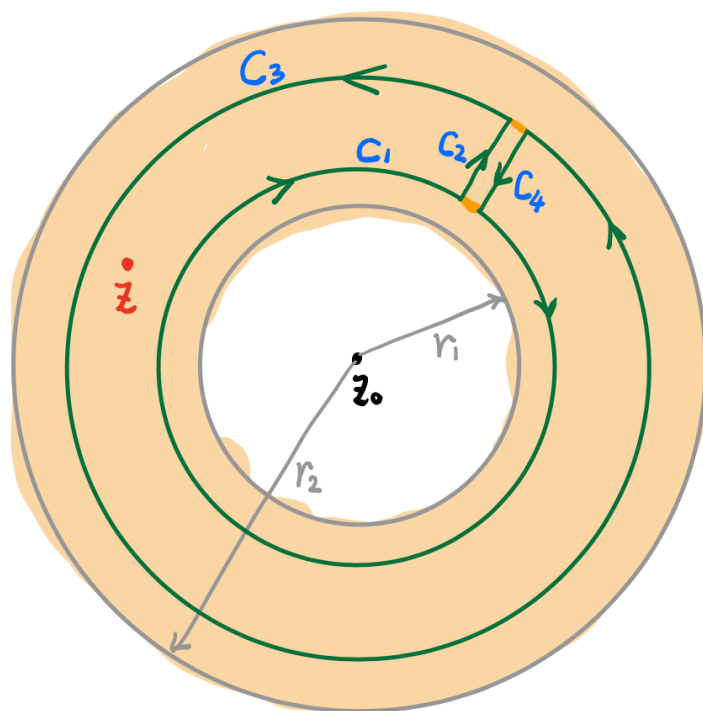


图 4.1: 计算洛朗级数的围道

由于 C_2 和 C_4 互为相反围道，其贡献抵消，因此有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+C_3} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (4.69)$$

我们分别计算这两个积分。对于 C_3 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(w)}{w-z_0-(z-z_0)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{1}{w-z_0} \frac{f(w)}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right] (z-z_0)^n \end{aligned} \quad (4.70)$$

同理对于 C_1 围道，有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_1} \frac{f(w)}{z-z_0-(w-z_0)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_1} \frac{1}{z-z_0} \frac{f(w)}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_1} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_1} f(w) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} dw \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-C_1} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw \right] \frac{1}{(z-z_0)^n} \end{aligned} \quad (4.71)$$

有于 C_3 和 $-C_1$ 都是绕 z_0 的正定向围道, 柯西定理的围道积分独立性告诉我们对于带形区域中的解析函数有

$$\int_C = \int_{C_3} = \int_{-C_1} \quad (4.72)$$

因此

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C f(w)(w-z_0)^{n-1} dw \right] \frac{1}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right] (z-z_0)^n. \quad (4.73)$$

此即我们要证明的定理。显然, 一旦指定了洛朗级数的展开点和带形区域, 其系数就是唯一确定的。在实际计算问题中, 除了直接应用洛朗级数系数的积分表示外, 通常有更简便的代数技巧能直接得到系数。

例 4.13 计算

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)}$$

在 $z_0 = 1$ 处的洛朗展开, 展开区域分别为环域 $0 < |z-1| < 3$ 和 $3 < |z-1|$ 。

例 4.14 计算


$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

在 $z_0 = 0$ 处的洛朗展开。


例 4.15 计算

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2}x(z-1/z)\right)$$


在收敛环上的洛朗展开。

 **练习 4.9** 求下列函数在对应环域上的洛朗展开:

- $z/(z+2)$, $2 < |z|$
- $\sin(1/z)$, $0 < |z|$
- $\cos(1/z)$, $0 < |z|$
- $1/(z-3)$, $3 < |z|$

 **练习 4.10** 令 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, 求 f 在下述环域上的洛朗展开:

- $|z| < 1$
- $1 < |z| < 2$
- $2 < |z|$

 **练习 4.11** 证明 $1/(e^z - 1)$ 在原点处的洛朗展开具有形式

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} z^{2k-1}$$

其中 B_k 称作伯努利数。求出 B_1, B_2, B_3 。

4.5 奇点的分类

洛朗展开适用于孤立奇点或非奇异点处的展开。为此我们需要定义何为孤立奇点。

定义 4.1. 孤立起点

z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则一定有 z_0 的某个充分小邻域内使得 z_0 是其中的唯一奇点。反之则称为非孤立奇点。



如果 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则一定存在某个 r , 使得 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < r$ 上解析, 并且有洛朗展开

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (4.74)$$

此时奇点 z_0 又可以分为如下几类:

- **可去奇点:** 如果所有 $b_n = 0$, 则 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点。另外还有一些等价的可去奇点表述
 - $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在且有限。
 - $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ 。
 - 存在一个邻域 $D_\varepsilon(z_0)$, 使得 $f(z)$ 在 $D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ 有界。
- **极点:** 如果只有有限个 b_n 不为零, 则 z_0 是 $f(z)$ 的极点。如果 $b_n \neq 0, b_m = 0, \forall m > n$, 则 z_0 是 n 阶极点。一阶极点又称为单极点。另外还有一些等价的 m 阶极点判断方法:
 - $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$, g 在 z_0 解析, 且 $g(z_0) \neq 0$ 。
 - $\frac{1}{f(z)}$ 在 z_0 是 m 阶零点。
 - $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m+1} f(z) = 0$ 但 $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$
- **本性奇点:** 如果有无穷多个 b_n 不为零, 则 z_0 是本性奇点。另外一个判断方法是, 如果一个奇点既非可去奇点也非极点, 则肯定是本性奇点。
- **留数:** b_1 (或 a_{-1}) 称作 $f(z)$ 在 z_0 的留数, 记作 $\text{res} f(z_0)$ 。

关于本性奇点, 一个重要的定理是

定理 4.7. Casorati-魏尔斯特拉斯定理

设 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点, 令 D 是 z_0 的某个邻域, 使得 $f(z)$ 在 $U = D \setminus \{z_0\}$ 上解析。则 $f(z)$ 在 U 上的取值是在 \mathbb{C} 中处处稠密的, 即对于 \mathbb{C} 中任何复数, $f(z)$ 在 U 上都可无限逼近。



证明: 用反证法, 设存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 及 $s > 0$, 使得

$$|f(z) - \alpha| > s, \quad \forall z \in U$$

定义函数


$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}, \quad (4.75)$$

显然 $g(z)$ 在 U 上是解析函数且有界, 因此 z_0 最多是 $g(z)$ 的可去奇点, 因此可将 $g(z)$ 延拓成 D 上的解析函数。从而 z_0 至多是 $\frac{1}{g(z)} = f(z) - \alpha$ 的极点。但这与 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点矛盾, 得证。

例 4.16 判断下列函数在 $z_0 = 0$ 处的奇点性质。对于孤立奇点, 其留数是多少?

- $f(z) = \frac{1}{z^5}$

- $f(z) = \frac{\sin z}{z}$
- $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$
- $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$
- $f(z) = \ln z$
- $f(z) = e^{1/z}$

 **练习 4.12** ∞ 是整函数 $f(z)$ 的可去奇点当且仅当 f 是常函数。

4.6 解析延拓

不管是泰勒级数还是洛朗级数，它们一个共同的特征是在收敛圆或收敛环上必定存在至少一个奇点。但奇点并不一定在收敛圆或收敛环上处处存在。一个自然的问题是，如果在收敛圆或收敛环上存在解析邻域，能否在这个解析邻域处进一步进行泰勒展开从而延拓该函数的定义域？这就是我们这一节要研究的问题。

定理 4.8. 解析延拓

如果 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上的某个连通区域 D 上解析。如果 V 是 \mathbb{C} 上包含 D 的连通区域， $V \supset D$ ， $F(z)$ 是定义在 V 上的解析函数，且当 $z \in D$ 时， $F(z) = f(z)$ ，则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 V 上的解析延拓。



如果一个函数存在解析延拓，则这个解析延拓是唯一的。可以用反证法证明这一点。假设 $f(z)$ 定义在 D 上，在 $V \supset D$ 上 $f(z)$ 有两个不同的解析延拓 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 。定义一个新的函数 $g(z) = F_1(z) - F_2(z)$ ，则 g 在 V 上解析，且在 D 上恒为零。则有解析函数的零点孤立性定理可知， g 在 V 上也是零函数，从而 $F_1 = F_2$ 。得证。

我们以维基百科中的一个例子来看解析延拓是如何进行的。考虑如下的幂级数

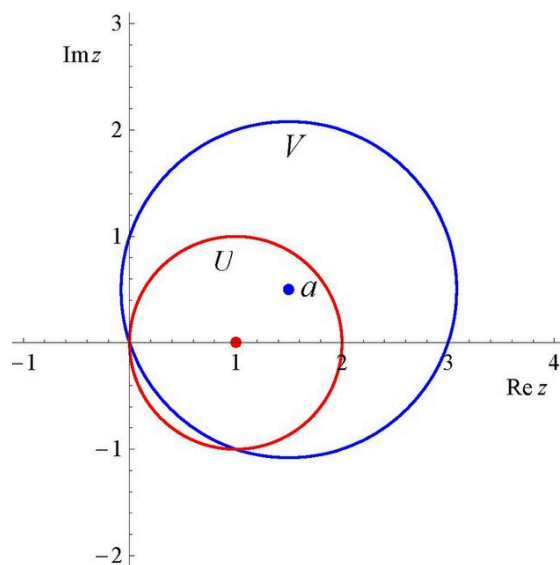


图 4.2: 解析延拓。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n. \quad (4.76)$$

这个函数在 $U = \{|z - 1| < 1\}$ 上一致绝对收敛, 收敛半径为 $R = 1$ 。事实上, 可以看出这个幂级数是

$$g(z) = \frac{1}{z} \quad (4.77)$$

在 $z = 1$ 处的泰勒展开。显然 $g(z)$ 是在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上解析的。但假设我们不知道 $g(z)$ 的存在, 我们希望从 $f(z)$ 出发将其延拓到复平面的其余区域。为此我们选取 U 上一点 a , 并考虑 $f(z)$ 在 a 点处的幂级数展开,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (4.78)$$

我们的目标是计算新的展开系数 a_n , 并求出其收敛区域 V 。如果新的收敛区域不完全包含在 U 内, 则我们得到了 $f(z)$ 在 $V \cup U$ 上的解析延拓。注意到 a 离 U 的边界 ∂U 的最短距离为 $\rho = 1 - |a - 1|$ 。我们可以选取一个 $0 < r < \rho$, 并以 r 为半径, a 为圆心做一圆 $|w - a| = r$ 。显然这个圆完全包含在 U 内。利用柯西积分公式, 我们可以求得 $f(z)$ 在 a 点的泰勒展开系数为

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (w-1)^k}{(w-a)^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{|w-a|=r} \frac{(a + re^{i\phi} - 1)^k r i e^{i\phi}}{(re^{i\phi})^{n+1}} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{|w-a|=r} \frac{\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (a-1)^{k-m} (re^{i\phi})^m r i e^{i\phi}}{(re^{i\phi})^{n+1}} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{|w-a|=r} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (a-1)^{k-m} (re^{i\phi})^{m-n} d\phi \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \binom{k}{n} (a-1)^{k-n} \\ &= (-1)^n a^{-1-n}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

最后一步可通过符号计算软件如 **Mathematica** 求得。从而 $f(z)$ 在 a 处的幂级数展开可以写为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{-1-n} (z - a)^n \quad (4.80)$$

这个幂级数的收敛半径为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = |a|, \quad (4.81)$$

收敛区域为 $V = |z - a| < a$ 。如果我们选取 $a \in U$ 且 $|a| > 1$, 显然 V 不包含在 U 内, 因此我们得到了原幂级数在 U 外的解析延拓。

尽管通过幂级数的方法可以实现解析延拓, 但在实际问题中通常有更简便的方法。我们以伽马函数来举例。伽马函数是最常见的特殊函数之一, 在概率论, 数论, 几何, 物

理等都有广阔应用。伽马函数由下述积分表示定义：

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (4.82)$$

首先我们证明这个积分定义在 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 时收敛。为此，注意到

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-t} t^{z-1}| dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt. \quad (4.83)$$

而

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt \quad (4.84)$$

对于 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 时收敛，这是因为对于积分的上限， e^{-t} 的衰减总是比 $t^{\operatorname{Re}(z)-1}$ 的增长快很多，因此是收敛的，而对于积分的下限， $e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} \geq t^{\operatorname{Re}(z)-1}$ ，而后者是收敛的。另外，在区域 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 内，由于积分的绝对收敛性，积分号和求导可交换，因此

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln t dt \quad (4.85)$$

而右边也是一个在 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 时绝对收敛的积分，因此我们得到 $\Gamma(z)$ 在右半平面解析。我们的目标是将之解析延拓到整个复平面（除了奇点外）。我们注意到

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z+1-1} dt \\ &= -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} z t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned} \quad (4.86)$$

这给出了 $\Gamma(z)$ 的一个函数方程。对于正整数值，显然有

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1, \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2, \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1, \\ \Gamma(n) &= (n-1)!. \end{aligned} \quad (4.87)$$

因此伽马函数在右半平面可以看成阶乘函数的解析延拓。为了将伽马函数延拓到左半平面，我们注意到

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1+z)}{z} \quad (4.88)$$

我们将这个公式看成伽马函数在 $D_1 = \{\operatorname{Re}(z) > -1\}$ 的**定义**。显然等式右边在 $D_1 \setminus \{0\}$ 是解析的，从而我们将 $\Gamma(z)$ 解析延拓到了 $D_1 \setminus \{0\}$ 。因此 0 是 $\Gamma(z)$ 的单极点。事实上这个过程可以一直进行下去，对于任意正整数 m ，我们可以定义

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(m+z)}{z(z+1)\cdots(z+m-1)}, \quad (4.89)$$

这个函数在 $D_m = \{\operatorname{Re} z > -m\}$ 上除了负整数点和 0 外是解析的。由于这个函数在 D_0 上与原始积分定义一致，因此由解析延拓的唯一性可知这个结果就是我们想要的解析延拓。因此我们找到了将 $\Gamma(z)$ 延拓到整个复平面除掉 0 和负整数点。

4.7 黎曼的 ζ 函数

学到复变函数不能不提黎曼的 ζ 函数。它定义作

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it. \quad (4.90)$$

我们前面讲过这个无穷级数在 $\operatorname{Re}(s) > 1$ 时时绝对收敛的。一个重要问题是如何将其解析延拓到整个复平面上。这个问题留作大作业，我们这里仅仅讨论黎曼 ζ 函数和素数的一个很小的联系。感兴趣的读者还可以取看看如何通过 ζ 函数证明素数分布定理。 ζ 函数和素数的关系源自欧拉发现的如下无穷乘积表示：

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \text{primes}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1. \quad (4.91)$$

为了看出这一点，我们对右边作几何级数展开，

$$\prod_{p \in \text{primes}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \in \text{primes}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (4.92)$$

其中最后一个等式用了素数分解的唯一性。从这个结果我们立刻得到素数有无穷多个的证明：假如素数只有有限个，则

$$\prod_{p \in \text{primes}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (4.93)$$

必然是一个有理数。但我们知道

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad (4.94)$$

是无理数。因此素数必有无穷多个。

第5章 留数定理及其在定积分中的应用

5.1 留数定理

上一章我们介绍了解析函数在孤立奇点 z_0 附近可以作洛朗级数展开:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+1}, \quad (5.1)$$

其中上述洛朗展开的收敛区域是 $0 < |z-z_0| < r_1$, 其中 $0 < r_1 \leq \infty$ 。

定义 5.1. 留数

$f(z)$ 在 z_0 处的留数 (residue) 定义为 b_1 , 记为

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := b_1. \quad (5.2)$$



注意在留数的定义中要求洛朗展开的区域必须是 $0 < |z-z_0| < r_1$, 即紧邻孤立奇点的环境上的洛朗展开。

例 5.1 求

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

在 $z_0 = 0$ 处的留数。

定理 5.1. 留数定理

设 D 是 \mathbb{C} 上的单连通区域, $f(z)$ 是定义在 $D \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 上的解析函数, 即 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是 $f(z)$ 在 D 上的孤立奇点。则对于 D 上的任意不经过奇点的简单封闭正定向围道 C , 有

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, a_k). \quad (5.3)$$

其中求和遍历在 C 所包裹的区域内的奇点 a_k 。5.1。



证明: 绕 C 包裹区域中的奇点 a_k 作一小正定向圆围道 C_k , 使得 a_k 是 C_k 包裹的唯一奇点。则由复连通区域上的柯西定理可知,

$$\int_{C-C_1-C_2-\dots-C_m} f(z) dz = 0, \quad (5.4)$$

其中 m 是 C 包裹奇点的个数。有

$$\int_{C-C_1-C_2-\dots-C_k} f(z) dz = \int_C f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \dots - \int_{C_m}$$

即

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{C_k} f(z) dz. \quad (5.5)$$

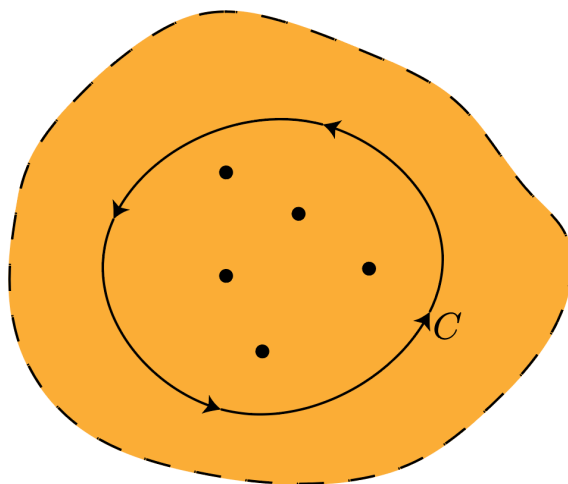


图 5.1: 留数定理

由于 C_k 仅包含孤立奇点 a_k , 我们可以对 $f(z)$ 在 a_k 处作洛朗展开,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{k,n}}{(z-a_k)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n}(z-a_k)^n. \quad (5.6)$$

因此有

$$\int_{C_k} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C_k} \frac{b_{k,n}}{(z-a_k)^n} dz + \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} \int_{C_k} (z-a_k)^n dz = b_{k,1} = \text{Res}(f, a_k). \quad (5.7)$$

得证。

通过留数定理计算围道积分的问题就转化为了更简单的计算留数的问题。

- 如果 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $\text{Res}(f, z_0) = 0$ 。
- 如果 z_0 是 $f(z)$ 的单极点, 则计算其留数的一个有用公式是

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (5.8)$$

例 5.2 求

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)(z - 2)}$$

在单极点处的留数。

对于单极点, 另一个有用的公式如下。如果 z_0 是 $g(z)$ 的单零点, 则 z_0 是 $1/g(z)$ 的单极点, 其留数为

$$\text{Res}(1/g, z_0) = \frac{1}{g'(z_0)}. \quad (5.9)$$

为了证明这一点, 注意到由于 z_0 是 $g(z)$ 的单零点, 因此

$$g(z) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_2) + \cdots \quad (5.10)$$

且 $a_1 = g'(z_0) \neq 0$ 。因此

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{a_1(1-z) \left[1 + a_2(1-z) + \cdots \right]} = \frac{1}{a_1(1-z)} + \text{正规部分} \quad (5.11)$$

得证。

例 5.3 求

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

的所有单极点并求其留数。

例 5.4 求

$$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

的所有单极点并求其留数。

- 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $k > 1$ 阶极点, 则

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]. \quad (5.12)$$

为了证明这一点, 注意到

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \text{正规部分} \\ (z - z_0)^k f(z) &= b_k + b_{k-1}(z - z_0) + \cdots + b_1(z - z_0)^{k-1} + \text{正规部分} \end{aligned} \quad (5.13)$$

因此得证。

例 5.5 求

$$f(z) = \frac{z + 2i}{z^5 + 4z^3}$$

的极点和留数。

但更多时候, 对于高阶极点直接计算洛朗展开是求留数的更简便方法。

例 5.6 求

$$f(z) = \frac{\sinh z}{z^5}$$

在 $z_0 = 0$ 的留数。

例 5.7 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz$$

例 5.8 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin(1/z) dz.$$

例 5.9 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{az^2 + 2z + a} dz, \quad (0 < a < 1)$$

另一个有用的概念是无穷远处的留数。设 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上除了有限个奇点 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 外是解析的。 C 是包含所有这些奇点的一个正定向大圆, 则按留数定理

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k). \quad (5.14)$$

我们定义 $f(z)$ 在无穷远处的留数为

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz. \quad (5.15)$$

因此无穷远处的留数与有限远处的留数有关系

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0. \quad (5.16)$$

为了使得这个概念有用, 我们必须有直接求无穷远处留数的方法, 否则就只是一个概念的替换而已。我们有如下定理

定理 5.2. 无穷远处留数

如果定义在 \mathbb{C} 上的解析函数只有有限个奇点, 则

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{w^2} f(1/w), 0\right) \quad (5.17)$$

证明: 我们从定义出发, 令 $w = 1/z$, 则

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} f(1/w) \frac{dw}{-w^2}. \quad (5.18)$$

其中 \tilde{C} 在 w 平面成为了反定向的围道, $f(1/w)$ 的所有的奇点都在 C 外, 唯一的奇点来自因子 $1/w^2$ 。因此我们有

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} f(1/w) \frac{dw}{-w^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\tilde{C}} f(1/w) \frac{dw}{w^2} = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{w^2} f(1/w), 0\right) \quad (5.19)$$


其中 $-\tilde{C}$ 具有正定向因而可用留数定理。证毕。

例 5.10 计算积分


$$\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz.$$

 **练习 5.1** 求出下列函数在延展复平面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的所有奇点和留数。


1. $f(z) = 1/(z^3 - z^5)$
2. $f(z) = z^{2n}/(1+z)^n, n \in \mathbb{N}$.
3. $f(z) = (z^2 + z - 1)/(z^2(z-1))$
4. $f(z) = e^z/(z^2(z^2+9))$

 **练习 5.2** 求出下列函数在复平面 \mathbb{C} 上的所有奇点, 判断其是本性奇点还是极点, 求出其极点阶数和留数。


1. $f(z) = \frac{\sin z - z}{z \sinh z}$
2. $f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$
3. $f(z) = \frac{\cos(1/z)}{\sin z}$
4. $f(z) = \frac{1}{e^{2z} + e^z + 1}$

 **练习 5.3** 用留数定理计算积分 (如不作说明围道均为正定向, 下同)


$$\int_{|z|=2} \frac{z^2+4}{(z-i)(z+i)} dz$$

 **练习 5.4** 用留数定理计算积分

$$\int_{|z-i|=3} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(z+i)^n (n+6)!} dz$$


 **练习 5.5** 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=2} z \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz$$

 **练习 5.6** 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=a} \frac{dz}{\bar{z} - b},$$

分别讨论 $a > |b|$ 和 $|b| > a > 0$ 的情形。

 **练习 5.7** 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2(z^2 + 9)} dz$$

5.2 利用留数计算定积分和无穷级数

留数定理使得计算一大类定义在实变量上的定积分和无穷级数求和转化为留数求和问题，而这是一个相对简单的问题。我们下面讨论几类典型的可以通过留数定理解决的问题。

5.2.1 三角函数积分

复围道积分和三角函数的关联来自于极坐标表示，对于模长为 1 的复数 $z = e^{i\phi}$ ，注意到

$$\begin{aligned} dz &= ie^{i\phi} d\phi, \quad \Rightarrow d\phi = \frac{dz}{iz}, \\ \cos \phi &= \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}, \\ \sin \phi &= \frac{z - 1/z}{2i}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

例 5.11 计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 + a^2 - 2a \cos \phi}$$

其中 $|a| \neq 1$ 。这个条件保证被积函数不发散。

按照(5.20)中的替换规则，我们有

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz} \frac{1}{1 + a^2 - a(z + 1/z)} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{i} \frac{1}{z(1 + a^2) - az^2 - a} \end{aligned} \quad (5.21)$$

令

$$f(z) = -\frac{1}{i} \frac{1}{az^2 - z(1 + a^2) + a}$$

则

$$I = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i) \quad (5.22)$$

其中求和求遍单位圆内的留数。令

$$az^2 - (1 + a^2)z + a = 0$$

解得两个根为

$$z_{\pm} = \frac{(1+a^2) \pm \sqrt{(1+a^2)^2 - 4a^2}}{2a},$$

即

$$z_+ = 1/a, \quad z_- = a.$$

由于 $|a| \neq 1$, 显然 z_+ 和 z_- 中一个在单位圆内一个在单位圆外, 而

$$f(z) = \frac{i}{a(z-z_+)(z-z_-)}. \quad (5.23)$$

当 $|a| < 1$ 时, z_- 在园内, 因此

$$\operatorname{Res}(f, z_-) = \frac{i}{a(a-1/a)}$$

当 $|a| > 1$ 时, z_+ 在园内, 因此

$$\operatorname{Res}(f, z_+) = \frac{i}{a(1/a-a)}$$

因此积分结果为

$$I = \begin{cases} -\frac{2\pi}{a^2-1} & |a| < 1 \\ -\frac{2\pi}{1-a^2} & |a| > 1 \end{cases} \quad (5.24)$$

事实上, 容易证明关于三角函数积分的一般结果。如果

$$R(\cos \phi, \sin \phi)$$

是关于 $\cos \phi$ 和 $\sin \phi$ 的有理函数, 且对于任意 $\phi \in [0, 2\pi]$ 没有奇点, 则

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \phi, \sin \phi) d\phi = 2\pi i \sum_m \operatorname{Res} \left(\frac{1}{iz} R \left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i} \right), z_m \right) \quad (5.25)$$

其中求和取遍单位圆内的留数。

5.2.2 实轴上的有理型积分

一类常见的积分是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

其中 $f(x)$ 是有理函数。为了用留数定理计算这一类积分, 我们需要如下引理

推论 5.1. 大圆弧引理

如果对于充分大的 $|x|$, 存在 $M > 0$, $\alpha > 1$, 使得

$$|f(x)| < \frac{M}{|x|^\alpha}$$

则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0,$$

如果 $f(z)$ 在上半平面有定义, 则 C_R 是上半平面的大圆弧, $C_R = Re^{i\phi}$, $0 \leq \phi \leq \pi$ 。

反之, 如果 $f(z)$ 在下半平面有定义, 则 C_R 是下半平面的大圆弧, $C_R = Re^{i\phi}$, $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ 。



证明：不妨设 $f(z)$ 在上半平面有定义，则

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\phi}) Rie^{i\phi} d\phi \right| \\
 &\leq \int_0^\pi |f(Re^{i\phi})| R d\phi \\
 &< \int_0^\pi \frac{M}{R^{\alpha-1}} d\phi \\
 &= \frac{M\pi}{R^{\alpha-1}}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

由于 $\alpha > 1$ ，因此

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M\pi}{R^{\alpha-1}} = 0.$$

得证。

利用这个引理，我们可以求解一大类积分。

例 5.12 计算积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

令 $f(z) = 1/(1+z^4)$ ，显然满足大圆弧引理的条件。令 $C_R = Re^{i\phi}$ ， $0 \leq \phi \leq \pi$ 为上半圆弧，则由留数定理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz \right] = 2\pi i \sum_m \text{Res}(f, z_m) \tag{5.27}$$

其中求和取遍上半圆弧和实轴包裹区域的奇点。由大圆弧引理知道上式左边第二项为零。函数 $f(z)$ 的极点为

$$e^{i\pi/4}, \quad e^{i3\pi/4}, \quad e^{i5\pi/4}, \quad e^{i7\pi/4} \tag{5.28}$$

均为单极点，其中前两个极点位于积分围道内，其留数分别为

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, e^{i\pi/4}) &= \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} \frac{z - e^{i\pi/4}}{1 + z^4} \\
 &= \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} \frac{1}{4z^3} \quad \text{洛必达法则} \\
 &= \frac{1}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, e^{i3\pi/4}) &= \lim_{z \rightarrow e^{i3\pi/4}} \frac{z - e^{i3\pi/4}}{1 + z^4} \\
 &= \lim_{z \rightarrow e^{i3\pi/4}} \frac{1}{4z^3} \quad \text{洛必达法则} \\
 &= \frac{1}{4e^{i9\pi/4}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

因此

$$I = 2\pi i \frac{(-i\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \tag{5.31}$$

5.2.3 震荡型积分

另一类常见积分是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx.$$

为了处理这一类积分, 我们需要如下引理

推论 5.2. 约当引理

如果 $a > 0$, C_R 是上半平面的半径为 R 的大半圆弧, 且对于充分大的 x 有

$$|f(x)| < \frac{M}{x},$$

则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$$

如果 $a < 0$ 则 C_R 去下半圆弧即可。



证明: 由复线积分定义有

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\phi}) e^{iaRe^{i\phi}} R I e^{I\phi} d\phi \right| \\ &\leq \int_0^\pi |f(Re^{i\phi})| e^{-aR \sin \phi} R d\phi \\ &< \int_0^\pi \frac{M}{R} e^{-aR \sin \phi} R d\phi \\ &= \int_0^\pi M e^{-aR \sin \phi} d\phi \\ &< \int_0^\pi M e^{-aR\phi/\pi} d\phi \\ &= -\frac{M}{aR/\pi} (-e^{-aR} + 1) \end{aligned} \quad (5.32)$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时上式等于零, 得证。

例 5.13 计算积分

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx, \quad b > 0$$

由被积分函数的对称性可以知道

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx \quad (5.33)$$

令

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z^2 + b^2}.$$

显然 $f(z)$ 满足约当引理的条件。取上半圆弧 C_R , 则由留数定理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R f(z) e^{iz} dz + \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz \right] = 2\pi i \sum_m \text{Res}(f(z) e^{iz}, z_m) \quad (5.34)$$

上式左侧第二项由约当引理结果为零。 $f(z)$ 在上半平面的奇点为

$$ib \quad (5.35)$$

且为单极点，其留数为

$$\operatorname{Res}(fe^{iz}, ib) = \frac{e^{-b}}{4ib} \quad (5.36)$$

因此

$$I = 2\pi i \frac{e^{-b}}{4ib} = \frac{e^{-b}\pi}{2b}. \quad (5.37)$$

5.2.4 带有枝点和割线的积分

对于这一类积分需要在围道选取上有一定的创造性。我们以具体例子演示。

例 5.14 计算积分

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2} dx$$

令

$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{1+z^2}$$

将 $f(z)$ 的割线取在 $(-\infty, 0]$ 上，并选取主值分支 $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ 。选取如图所示围道，其中大圆弧的半径为 R ，小圆弧的半径为 r 。由留数定理在整个围道上的积分可以写为

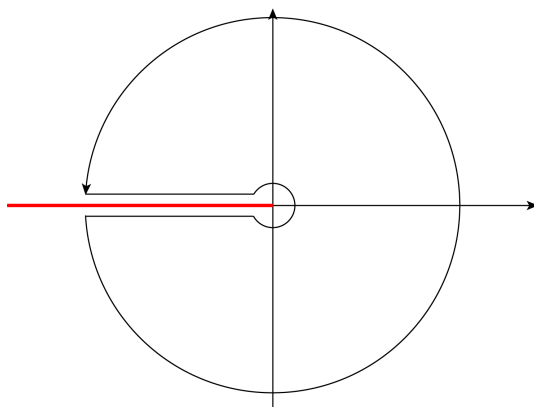


图 5.2: 带割线的围道积分

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_m \operatorname{Res}(f, z_m) \quad (5.38)$$

被积函数的极点在 $e^{i\pi/2}$ 和 $e^{-i\pi/2}$ ，留数分别为

$$\frac{e^{i\pi/6}}{2i}, \quad \frac{e^{-i\pi/6}}{-2i} \quad (5.39)$$

因此

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_C f(z) dz = 2\pi i \sin(\pi/6) = i\pi \quad (5.40)$$

另外有

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_C f(z) dz = \int_{\text{小圆弧}} f(z) dz + \int_{\text{大圆弧}} f(z) dz + \int_0^\infty \frac{\rho^{1/3} e^{i\pi/3}}{1+\rho^2} e^{i\pi} d\rho + \int_0^\infty \frac{\rho^{1/3} e^{-i\pi/3}}{1+\rho^2} e^{-i\pi} d\rho \quad (5.41)$$

易知在大圆弧和小圆弧上的积分趋于零。因此

$$i\pi = (e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}) \int_0^\infty \frac{\rho^{1/3}}{1 + \rho^2} d\rho \quad (5.42)$$

因此我们求得

$$\int_0^\infty \frac{\rho^{1/3}}{1 + \rho^2} d\rho = \frac{i\pi}{2\sin(\pi/3)i} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (5.43)$$

这个题目里更自然的是让割线取在 $[0, +\infty)$ 上。

例 5.15 计算积分

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

例 5.16 计算积分

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + a^2)^2} dx$$

5.2.5 无穷级数求和

利用留数定理求和无穷级数的思想在于找到一个函数，使其留数与所求级数的每一项一一对应。这样求和留数就等于求和级数。而另一方面留数之和可通过围道积分得到。因此把无穷级数求和问题转化为围道积分问题。最常用的两个函数为

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \pi \cot(\pi z)$$

这两个函数在所有整数点上均有留数，分别为

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}, n\right) = (-1)^n, \quad \operatorname{Res}(\pi \cot(\pi z), n) = 1$$

例 5.17 巴塞尔问题。求和级数

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

我们考虑如下围道积分，

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C_k} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} dz \quad (5.44)$$

其中围道取作连接如下四点的正定向矩形，

$$\pi\left(k + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right), \quad \pi\left(-k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right), \quad \pi\left(-k - \frac{1}{2}, -k - \frac{1}{2}\right), \quad \pi\left(k + \frac{1}{2}, -k - \frac{1}{2}\right) \quad (5.45)$$

。由留数定理我们有

$$I = 2\pi i \sum_m \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}, z_m\right) \quad (5.46)$$

其中留数取遍 C_k 所包裹区域内的奇点。注意到

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}, n\right) &= \frac{1}{n^2}, \quad n \neq 0 \\ \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}, 0\right) &= -\frac{\pi^2}{3}, \quad n = 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

因此我们得到

$$I = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3}. \quad (5.48)$$

我们接下来要直接对围道积分进行估计。令 $z = x + iy$, 注意到

$$\begin{aligned} |\cot(\pi z)|^2 &= \frac{|\cos(\pi z)|^2}{|\sin(\pi z)|^2} \\ |\cos(\pi z)|^2 &= \cos^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y) \\ |\sin(\pi z)|^2 &= \cosh^2(\pi y) - \cos^2(\pi x) \end{aligned} \quad (5.49)$$

因此

$$|\cot(\pi z)|^2 = \frac{\cos^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)}{\cosh^2(\pi y) - \cos^2(\pi x)} \quad (5.50)$$

在直线 $\pi(k + \frac{1}{2}, -k - \frac{1}{2}) - \pi(k + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ 上, 由于 $\cos(\pi(k + 1/2)) = 0$, 因此

$$|\cot(\pi z)|^2 = \tanh^2(\pi y) \leq 1 \quad (5.51)$$

在水平线 $\pi(k + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - \pi(-k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ 上,

$$|\cot(\pi z)|^2 \leq \frac{1 + \sinh^2(\pi y)}{\cosh^2(\pi y) - 1} = \frac{\cosh^2(\pi y)}{\sinh^2(\pi y)} = \coth^2(\pi k + \pi/2) = \coth^2(\pi/2) \quad (5.52)$$

因此我们有估计

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C_k} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} dz \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C_k} \frac{|\pi \cot(\pi z)|}{|z|^2} |dz| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C_k} \frac{\pi |\coth(\pi/2)|}{|z|^2} |dz| = 0 \quad (5.53)$$

因此

$$I = 0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} \quad (5.54)$$

换句话说

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (5.55)$$

练习 5.8 计算积分

$$\int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos t)^n \cos(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

练习 5.9 计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 3 \sin \theta}$$

练习 5.10 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

练习 5.11 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

练习 5.12 计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3} dx, \quad -1 < p < 2$$

 **练习 5.13** 计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

第 6 章 傅立叶级数和傅立叶变换

6.1 傅立叶级数

我们在前面讨论了泰勒级数和洛朗级数。另一类非常重要的级数是傅立叶级数，记为

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos(2z) + a_3 \cos(3z) + \cdots \\ & b_1 \sin z + b_2 \sin(2z) + b_3 \sin(3z) + \cdots \\ & f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nz) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nz) \end{aligned} \quad (6.1)$$

其中第一行称作傅立叶余弦函数，显然是周期为 2π 的偶函数；第二行称作傅立叶正弦函数，是周期为 2π 的奇函数；第三行一般不具有奇偶性，但是周期仍为 2π 。

一个自然的问题是 $f(z)$ 的收敛性问题。利用

$$\cos(nz) = \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2}, \quad \sin(nz) = \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i}, \quad (6.2)$$

并令 $w = e^{iz}$ ，我们有

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + \frac{a_1 - ib_1}{2}w + \frac{a_2 - ib_2}{2}w^2 + \cdots + \frac{a_1 + ib_1}{2}\frac{1}{w} + \frac{a_2 + ib_2}{2}\frac{1}{w^2} + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n \end{aligned} \quad (6.3)$$

显然这是关于 w 的洛朗级数。从前面洛朗级数理论知道，这个函数的收敛区域是一个圆环

$$\alpha < |w| < \beta \quad (6.4)$$

即

$$\alpha < |e^{ix-y}| < \beta \quad (6.5)$$

或者

$$\ln \alpha < -y < \ln \beta \quad (6.6)$$

对应到 z 平面是一个平行于实轴的无限长带子。如果 $\alpha = \beta$ ，则收敛区域变为一条平行于实轴的线。我们下面关心的例子是 a_n 和 b_n 均为实数的情形。我们有结论

定理 6.1

实系数傅立叶级数如果收敛的话，收敛区域只能是实轴。在实轴以外必然发散。



对于实傅立叶级数，我们有

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \bar{c}_{-n}. \quad (6.7)$$

假设函数 $f(z)$ 已知并且具有傅立叶级数表示

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n \quad (6.8)$$

一个自然问题是如何求得展开系数 c_n 。由于这是一个 w 的洛朗级数，有前面的知识直接可知

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \quad (6.9)$$

其中积分围道为收敛圆环内的一个过原点的圆。如果收敛区域是一个环域，则柯西积分公式给出了这个洛朗级数的系数：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(z)}{w} dw \\ \frac{a_n - ib_n}{2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(z)}{w^{n+1}} dw, \quad n > 0 \\ \frac{a_n + ib_n}{2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} f(z) w^{n-1} dw, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

如果令 $w = e^{it}$ ，则

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{e^{it}} i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \end{aligned} \quad (6.11)$$

上面的证明不能直接用于 a_n 和 b_n 均为实数的情形，原因是此时收敛环压缩为收敛圆，但只定义在圆上的函数不是解析函数。

尽管如此，我们下面将看到，(6.11)在 a_n 和 b_n 均为实数的时候也成立。

定理 6.2. 傅立叶定理

设实函数 $f(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 上只有有限个最大值或最小值，以及有限个不连续点，则如下傅立叶级数

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)) \quad (6.12)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(mt) dt \end{aligned} \quad (6.13)$$

在 x 处收敛于

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{f(x - \varepsilon) + f(x + \varepsilon)}{2} \quad (6.14)$$

注意在函数间断点对应的是逐点收敛，而非一致收敛。在复数表示下，傅立叶级数

具有更为易记忆的形式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (6.15)$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (6.16)$$



证明：如下证明方法基于复变函数，是柯西最早给出的。文献中通常给的是狄利克雷的证明。将(6.13)代入(6.12)，得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos[m(x-t)] dt \quad (6.17)$$

我们取该无穷级数的前 $2N+1$ 项，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{m=1}^N \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos[m(x-t)] dt \\ &= \sum_{m=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{im(x-t)} dt \end{aligned} \quad (6.18)$$

并在稍后让 $N \rightarrow \infty$ 。我们把这个有限级数分为两部分

$$\begin{aligned} U_N(x) &= \sum_{m=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x f(x) e^{im(x-t)} dt \\ V_N(x) &= \sum_{m=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_x^{\pi} f(x) e^{im(x-t)} dt \end{aligned} \quad (6.19)$$

我们下面将证明，

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_N(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2} f(x - \varepsilon), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} V_N(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2} f(x + \varepsilon). \quad (6.20)$$

为此，我们定义函数

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{e^{2\pi\zeta} - 1} \int_{-\pi}^x e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \quad (6.21)$$

这是一个关于 ζ 的解析函数，奇点在 $\dots, -3i, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots$ ，并且在奇点 im 处的留数为

$$\text{Res}(\psi, im) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x e^{im(x-t)} f(t) dt \quad (6.22)$$

因此如果我们取一个以原点为圆心，半径为 $N+1/2$ 的正定向圆围道 C_N ，在围道上有 $\zeta = (N+1/2)e^{i\theta}$ ，则根据留数定理有

$$U_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \psi(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta \psi(\zeta) d\theta. \quad (6.23)$$

为了估计这个积分, 我们把之分成五部分,

$$\begin{aligned} U_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2-1/\sqrt{N}} \zeta \psi(\zeta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2-1/\sqrt{N}}^{\pi/2+1/\sqrt{N}} \zeta \psi(\zeta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2+1/\sqrt{N}}^{3\pi/2-1/\sqrt{N}} \zeta \psi(\zeta) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{3\pi/2-1/\sqrt{N}}^{3\pi/2+1/\sqrt{N}} \zeta \psi(\zeta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{3\pi/2+1/\sqrt{N}}^{2\pi} \zeta \psi(\zeta) d\theta \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned} \quad (6.24)$$

首先注意到在 I_1 的积分范围内, 有 $\operatorname{Re}(\zeta) > O(\sqrt{N})$ 。因此被积函数

$$\zeta \psi(\zeta) = \frac{\zeta}{e^{2\pi\zeta} - 1} \int_{-\pi}^x e^{i\zeta(x-t)} f(t) dt \quad (6.25)$$

趋于 0。同理可证 I_5 趋于 0。再来看 I_2 。在这个区域内被积函数 $\zeta \psi(\zeta)$ 总是有限的, 而 $d\theta$ 的积分限无穷小, 因此也趋于零。同理也可得 I_4 趋于零。

因此主要的贡献来自 I_3 。在积分区域内, 有 $\operatorname{Re}(\zeta) < -O(\sqrt{N})$,

$$\zeta \psi(\zeta) = \frac{1}{e^{2\pi\zeta} - 1} \int_{-\pi}^x \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \sim - \int_{-\pi}^x \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt = -J_1 - J_2 \quad (6.26)$$

其中

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-\pi}^{x-\frac{1}{\ln N}} \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \\ J_2 &= \int_{x-\frac{1}{\ln N}}^x \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \end{aligned} \quad (6.27)$$

对于 J_1 其被积函数趋于零, 积分区间有限, 因此 $J_1 \rightarrow 0$ 。而对于 J_2 我们作变量替换 $v = \zeta(x-t)$,

$$J_2 = \int_0^{\frac{\zeta}{\ln N}} e^v f(x - \frac{v}{\zeta}) dv \quad (6.28)$$

再令 $w = e^v$,

$$J_2 = \int_1^{\exp(\frac{\zeta}{\ln N})} f(x - \frac{\ln w}{\zeta}) dw \quad (6.29)$$

在 $d\theta$ 的积分区间内, $\exp(\zeta/\ln N) \rightarrow 0$, $\ln w/\zeta \rightarrow 0$ 。因此

$$J_2 \sim \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_1^0 f(x - \varepsilon) dw = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x - \varepsilon) \quad (6.30)$$

因此

$$U_N(x) = I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2+1/\sqrt{N}}^{3\pi/2-1/\sqrt{N}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f(x - \varepsilon) d\theta \quad (6.31)$$

因此

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_N(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2} f(x - \varepsilon) \quad (6.32)$$

同理可证

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_N(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2} f(x + \varepsilon) \quad (6.33)$$

定理得证。

例 6.1 计算傅立叶级数表示。在 $(-\pi, \pi)$ 周期内, 函数为

$$f(x) = |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi$$

我们注意到这是一个 $(-\infty, \infty)$ 上的连续偶函数, 因此可通过傅立叶余弦级数表示。记其傅立叶余弦级数为

$$f_c(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \cdots, \quad (6.34)$$

则

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}, \\ a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0, \\ a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(2x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(2x) dx = -\frac{4}{3\pi}, \\ a_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(3x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(3x) dx = 0, \\ a_4 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(4x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(4x) dx = -\frac{4}{15\pi}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

从前面几项可以估计, 傅立叶系数在 n 很大时的与 $1/n^2$ 相关。换句话说, 该函数的傅立叶系数是一个绝对收敛级数。用前 5 项可以画出图形如下:

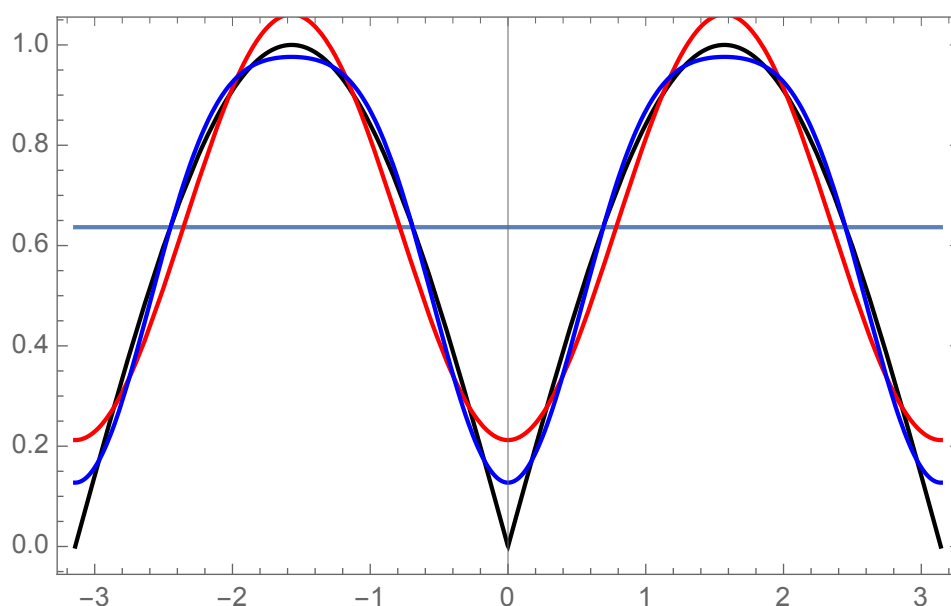


图 6.1: 黑色: 完整结果; 灰色: $n=0$; 红色: $n=0, 1, 2, 3$; 蓝色: $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$

例 6.2 计算方波的傅立叶级数表示。在 $(-\pi, \pi)$ 周期内, 方波为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

我们考虑 $f(x) - 1/2$ 的傅立叶级数表示。显然这是一个奇函数, 因此用傅立叶正弦级数表示是方便的。令

$$f_s(x) = \frac{1}{2} + b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx). \quad (6.36)$$

则傅立叶系数为

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi} \\ b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx = 0 \\ b_3 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(3x) dx = \frac{2}{3\pi} \\ b_4 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(4x) dx = 0 \\ b_5 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(5x) dx = \frac{2}{5\pi} \end{aligned} \quad (6.37)$$

一般的，该傅立叶系数可以写为

$$\{b_n\} = 2\pi \left\{ \frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, 0, \dots \right\} \quad (6.38)$$

这个系数级数与调和级数的收敛性质类似，因此是不收敛的。傅立叶级数前 5 项的图形可以画为 对于不连续函数，傅立叶级数会出现所谓的吉布斯现象，即在不连续点，傅立

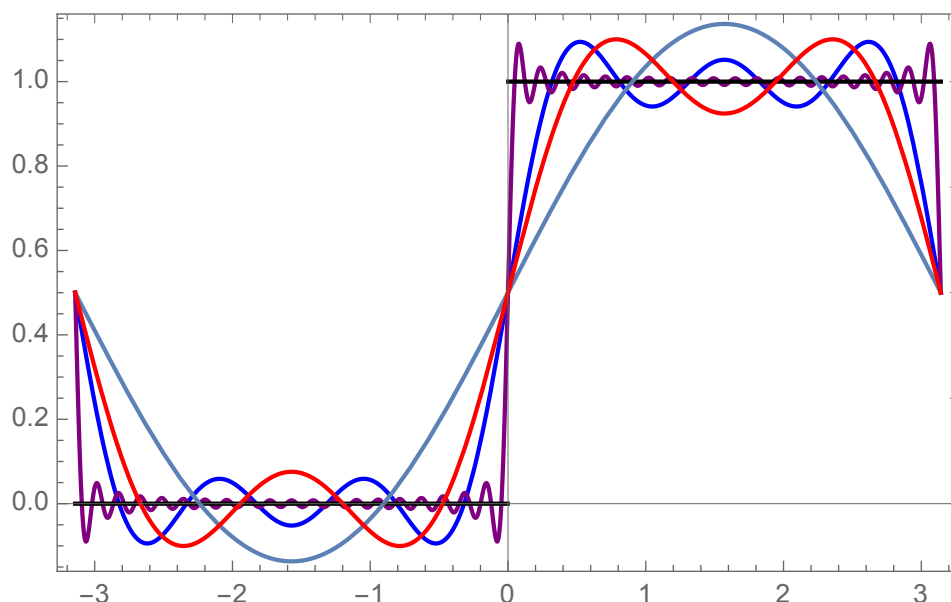


图 6.2: 黑色：完整结果；灰色：n=0；红色：n=0,1,2,3；蓝色：n=0,1,2,3,4,5；紫色：前 40 项和

叶级数的部分和会比原来函数高出大约 18%。但是这与傅立叶定理并不违背，因为在这一点傅立叶级数只是逐点收敛，而非一致收敛。

注 一般的，如果傅立叶级数的系数是绝对收敛的，则对应的傅立叶级数是一致绝对收敛的；如果傅立叶级数的系数只是条件收敛的，则对应的傅立叶级数是逐点收敛的。

另外，傅立叶级数系数的大 n 衰变行为也反映了对应函数的光滑性质。越光滑的函数其傅立叶系数随 n 增大衰变的越快。


练习 6.1 对于如下定义在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上的函数，计算其傅立叶级数：

1. $f(x) = |\sin x|$
2. $f(x) = |x|$


3.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

4. $f(x) = x \cos x$

 **练习 6.2** 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上计算 $f(x) = x^2$ 的傅立叶级数, 并用其计算如下无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

 **练习 6.3** 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上计算 $f(x) = x^4$ 的傅立叶级数, 并用其计算如下无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

6.2 傅立叶变换

上一节的结果可以推广到周期为 $2T$ 的函数 $f(t)$, 此时的傅立叶级数应写为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n t}{L} \quad (6.39)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{\pi n t}{T} dt \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin \frac{\pi n t}{T} dt \end{aligned} \quad (6.40)$$

或者写成复数形式

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \frac{i \pi n t}{T}, \\ c_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \exp \left(-i \frac{\pi n t}{T} \right) dt \end{aligned} \quad (6.41)$$

注意到 $2\pi/(2T) = \omega_1$ 具有频率单位, 是在 $2T$ 周期内的正弦/余弦波的最小非零频率单元。因此自然可以定义 $\omega_n = n\omega_1$ 作为最小基元的 n 倍频, 频率改变的最小单元为 $\Delta\omega = \pi/T$ 。因此复的傅立叶级数可以写为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t), \\ c_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \exp(-i\omega_n t) dt \end{aligned} \quad (6.42)$$

我们把(6.42)的第二行代入第一行, 得到

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t') \exp(-i\omega_n t') dt' \exp(i\omega_n t) \quad (6.43)$$

对于非周期函数, 可以认为 $T \rightarrow \infty$ 。此时频率单元 $\omega_1 \rightarrow 0$, 而 n 倍频成为一个连续变

量, 记为 $\omega = \omega_n$ 。另外

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{2T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \quad (6.44)$$

因此(6.43)可以写为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-i\omega t') dt' \right] \exp(i\omega t) \quad (6.45)$$

定义 6.1. 傅立叶变换

我们把方括号中的量称作 $f(t)$ 的傅立叶变换, 记为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (6.46)$$

而

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (6.47)$$

称为反傅立叶变换或逆傅立叶变换。当 $\hat{f}(\omega)$ 在实轴上有奇点时, 傅立叶逆变换应理解为主值积分:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (6.48)$$

当傅立叶变换 $\hat{f}(\omega)$ 已知时, 我们把(6.47)或(6.48)称作函数 $f(t)$ 的傅立叶积分表示。同样还能定义高维函数的傅立叶变换。例如, 对于三维函数 $f(x, y, z)$, 其三维傅立叶变换定义为

$$f(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} dx dy dz \quad (6.49)$$



如果一个时间域内的函数 $f(t)$ 能展开成简谐波的话, 则其傅立叶变换 $\hat{f}(\omega)$ 给出了对应频率的振幅。

例 6.3 定义 Heaviside 阶跃函数为

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (6.50)$$

求 $e^{-ax}H(x)$, $a > 0$ 的傅立叶变换, 并验证其逆变换给出原来的函数。

令 $f(x) = e^{-ax}H(x)$, 我们要求

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} (e^{-ax-i\omega x}) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+i\omega} \end{aligned} \quad (6.51)$$

其逆傅立叶变换为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a+i\omega} \exp(i\omega x) d\omega \end{aligned} \quad (6.52)$$

令

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{a + i\omega} \quad (6.53)$$

这是 \mathbb{C} 上的半纯函数（除了孤立奇点外处处解析），具有单极点位于 $\omega = ia$ 。我们分情况来讨论这个积分。利用复变函数知识，当 $x < 0$ 的时候，我们将 ω 沿下半平面绕一个大圆弧构成封闭围道，由约当引理大圆弧积分等于零，而围道内没有奇点，因此此时积分为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + i\omega} \exp(i\omega x) d\omega = 0, \quad x < 0 \quad (6.54)$$

当 $x > 0$ 时，我们将 ω 沿上半平面绕一个大圆弧构成封闭围道，同样约当引理告诉我们大圆弧积分为零，而围道内有奇点 $\omega = ia$ ，在奇点处的留数为

$$\text{Res}\left(\frac{1}{2\pi} \frac{1}{a + i\omega} \exp(i\omega x), ia\right) = \frac{\exp(-ax)}{2\pi i} \quad (6.55)$$

因此

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + i\omega} \exp(i\omega x) d\omega = \exp(-ax), \quad x > 0 \quad (6.56)$$

当 $x = 0$ 时，(6.52) 是发散的。此时我们定义傅立叶逆变换为主值积分

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{a + i\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} i (\ln(a - iR) - \ln(a + iR)) \end{aligned} \quad (6.57)$$

对数函数是多值函数，我们选取主值分支

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi \quad (6.58)$$

此时(6.57)可以写成

$$\frac{1}{2\pi} i \left(-i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad (6.59)$$

综上所述我们得到逆傅立叶变换为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + i\omega} \exp(i\omega x) d\omega = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ e^{-ax} & x > 0 \end{cases} \quad (6.60)$$

跟原始函数比较我们发现在间断点处逆变换给出的函数值为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{f(-\varepsilon) + f(\varepsilon)}{2} \quad (6.61)$$

与傅立叶定理一致。

从物理角度，我们一般考虑绝对可积函数，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (6.62)$$

容易知道，此时傅立叶变换一定存在。 $f(t)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 称为傅立叶变换对，或者称作互为（傅立叶）对偶函数。 $f(t)$ 通常称为时域函数，而 $\hat{f}(\omega)$ 通常称为频域函数。傅立叶变换的一个有用之处在于对一个对时域或频域函数的操作在对偶函数空间会变得更简单。傅立叶变换的如下性质是重要的。

线性性：对于任意复数 a, b ，如果 $h(t) = af(t) + bg(t)$ ，则 $\hat{h}(\omega) = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega)$ 。

位移定理:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\omega t}d\omega = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega) \quad (6.63)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega-a)e^{i\omega t}d\omega = e^{iat}f(t) \quad (6.64)$$

伸缩定理:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (6.65)$$

求导:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(t)}{dt^n} e^{-i\omega t}dt = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) \quad (6.66)$$

乘积:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)e^{-i\omega t}dt = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega) \quad (6.67)$$

卷积定理: 定义两个函数的卷积为

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (6.68)$$

则卷积的傅立叶变换可以写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f \star g)(t)e^{-i\omega t}dt = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \quad (6.69)$$

定理 6.3. Plancherel 定理

对于平方可积函数 $f(t)$, $g(t)$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega \quad (6.70)$$

这个定理的证明留待讲了 δ 函数后再给出。从这个定理出发很容易得到 Parseval 定理。

定理 6.4. Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (6.71)$$

我们说一个函数 $f(x)$ 是平方可积, 指的是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (6.72)$$

设 $f(x)$ 既是可积函数也是平方可积函数, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad (6.73)$$

是 $f(x)$ 的平均值,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (6.74)$$

称为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一次矩, 而

$$D_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \quad (6.75)$$

称为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的二次矩。二次矩表征了函数的展宽。例如对于高斯函数 e^{-x^2} , 其二次矩为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \quad (6.76)$$

定理 6.5. 傅立叶变换的不确定原理

如果 $f(t)$, $tf(t)$, $\omega \hat{f}(\omega)$ 均为平方可积函数, 则

$$D_0(|f|)D_0(|\hat{f}|) \geq \frac{\pi}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^2 \quad (6.77)$$

这意味着, f 记起傅立叶对偶的展宽不能同时非常小。当 f 的展宽变小, 相应的 \hat{f} 的展宽要增大。反之亦然。



证明: 由于 $\omega \hat{f}(\omega)$ 是平方可积的, 由 Parseval 定理知道 $f'(t)$ 也是平方可积的。我们定义参数积分

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda t f(t) + f'(t)|^2 dt \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6.78)$$

由于 $tf(t)$ 和 $f'(t)$ 均为平方可积函数, 因此 $I(\lambda)$ 也是平方可积函数。我们有

$$|\lambda t f(t) + f'(t)|^2 = \lambda^2 t^2 |f(t)|^2 + \lambda t [f(t) \overline{f'(t)} + \overline{f(t)} f'(t)] + |f'(t)|^2 \quad (6.79)$$

因此

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} [t^2 |f(t)|^2 + \lambda t [f(t) \overline{f'(t)} + \overline{f(t)} f'(t)] + |f'(t)|^2] dt \\ &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|^2 dt + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} t [f(t) \overline{f'(t)} + \overline{f(t)} f'(t)] dt + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \\ &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|^2 dt + \lambda t |f(t)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (6.80)$$

由于 $f(t)$ 是平方可积的, 因此 $\lambda t |f(t)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ 。因此

$$I(\lambda) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|^2 dt - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \geq 0 \quad (6.81)$$

由于 $I(\lambda)$ 是 λ 的二次多项式, 因此其二次方程判别式必须小于等于零, 即

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^2 &\leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \\ &= 4 D_0(|f|^2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} D_0(|f|^2) D_0(|\hat{f}|^2) \end{aligned} \quad (6.82)$$

得证。

例 6.4 定义矩形函数

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{1}{2} \\ 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.83)$$

求 $f(t) = a \cdot \text{rect}(at)$, $a > 0$ 的傅立叶变换。

6.3 傅立叶变换与微分方程

傅立叶变换的一个重要应用是求解常微分方程。其核心是如下关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} f(t) dt = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) \quad (6.84)$$

定义微分算符

$$D = \frac{d}{dt} \quad (6.85)$$

我们考虑形如

$$P(D)y(t) = f(t) \quad (6.86)$$

的常微分方程，其中 $P(x)$ 是一个多项式函数， $f(t)$ 是已知函数， $y(t)$ 是要求的解。例如，如果

$$P(x) = x^2 + 8x + 7 \quad (6.87)$$

则对应的微分方程为

$$y''(t) + 8y'(t) + 7y(t) = f(t) \quad (6.88)$$

我们下面就以

$$f(t) = H(t)e^{-at}, \quad a > 0 \quad (6.89)$$

为例来求解这个方程。设 $y(t)$ 的傅立叶变换为 $\hat{y}(\omega)$ 。对(6.87)左右边做傅立叶变换，得到

$$i^2\omega^2\hat{y} + 8i\omega\hat{y} + 7\hat{y} = \hat{f}(\omega) \quad (6.90)$$

我们在前面的例题知道

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a + i\omega} \quad (6.91)$$

代入上式，可以求解出 $\hat{y}(\omega)$ ，

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{(a + i\omega)(1 + i\omega)(7 + i\omega)} \quad (6.92)$$

因此我们的问题化为求解傅立叶逆变换，而我们有留数定理这一利器来做这件事情。如果将 ω 看成复变量，则 $\hat{y}(\omega)$ 是一个半纯函数。其逆傅立叶变换为

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.93)$$

\hat{y} 在复平面上只有单极点，分别位于

$$ia, \quad i, \quad 7i \quad (6.94)$$

均在上半平面。当 $t > 0$ 时，我们取上半大圆弧构成封闭围道，并由约当引理知道圆弧积分为零，因此

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = i \sum \text{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, \omega_m) \quad (6.95)$$

其中 ω_m 是上半平面内的留数。容易得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, ia) &= \frac{1}{i(1-a)(7-a)}e^{-at} \\ \operatorname{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, i) &= \frac{1}{i(a-1)6}e^{-t} \\ \operatorname{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, 7i) &= \frac{1}{i(a-7)(-6)}e^{-7t}\end{aligned}\quad (6.96)$$

因此


$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \left(\frac{e^{-at}}{(1-a)(7-a)} + \frac{e^{-t}}{6(a-1)} - \frac{e^{-7t}}{6(a-7)} \right) \quad (6.97)$$

当 $t < 0$ 时, 我们可以取下半大圆弧构成封闭围道。但此时围道内没有奇点, 因此积分恒为零。我们因此得到

$$y(t) = \begin{cases} \left(\frac{e^{-at}}{(1-a)(7-a)} + \frac{e^{-t}}{6(a-1)} - \frac{e^{-7t}}{6(a-7)} \right) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6.98)$$

例 6.5 求解微分方程

$$x''(t) + x(t) = f(t) = H(t)e^{-at}, \quad a > 0 \quad (6.99)$$


 **练习 6.4** 计算双边指数衰减函数的傅立叶变换

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad (6.100)$$

并计算其逆变换。


 **练习 6.5** 计算平移矩形函数的傅立叶变换

$$f(t) = \operatorname{rect}(t-1)$$

 **练习 6.6** 求三角脉冲的傅立叶变换:

$$f(x) = \begin{cases} (1-a|x|)h & |x| < 1/a \\ 0 & |x| > 1/a \end{cases} \quad (6.101)$$

其中 $a > 0$ 。

 **练习 6.7** 对于径向对称函数 $f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|^2}$, $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求其三维傅立叶变换。

6.4 δ 函数 (分布)

我们在讲傅立叶级数的时候提到这样一个现象。通常, 如果一个函数的傅立叶级数系数的渐近行为是 $1/n$, 则这个函数是不连续的; 如果是 $1/n^2$, 则这个函数的导数是不连续的; 如果是 $1/n^3$, 则这个函数的二阶导数是不连续的; 依此类推。对于傅立叶级数系数是多项式衰减的, 其函数的某阶导数一般不连续。当系数以指数衰减时 $1/r^n$, 这个函数就是所有阶可导且连续, 因而一般是 (实) 解析的。

这个现象也同样适用于傅立叶变换。一个自然的问题是, 如果函数的傅立叶变换趋于一个非零常数, 例如 1, 这个函数的行为如何? 从傅立叶变换的不确定原理我们知道, 这时傅立叶变换模方的二次矩无穷大, 因此原函数模方的二次矩应无穷小。从函数图像上看应该是一个无穷窄的函数。我们以前面给出的一个具体例子来看。

傅立叶变换渐近行为	函数行为
1	???
$\frac{1}{\omega}$	函数不连续
$\frac{1}{\omega^2}$	函数一次导不连续
$\frac{1}{\omega^3}$	函数二次导不连续

表 6.1: 傅立叶变换的衰减行为

例 6.6 带参量的矩形函数

$$f(t, a) = \frac{1}{a} \text{rect}(t/a), \quad (6.102)$$

其傅立叶变换为

$$\hat{f}(\omega, a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, a) e^{-i\omega t} dt = \frac{2 \sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega} \quad (6.103)$$

当 $a \neq 0$ 时, $\hat{f}(\omega, a)$ 至少是以 $1/\omega$ 衰减。但当 $a \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega} = 1 \quad (6.104)$$

这时 $\lim_{a \rightarrow 0} f(t, a)$ 是一个无穷窄的函数, 当 $t \neq 0$ 时, $\lim_{a \rightarrow 0} f(t, a) = 0$, 且

$$\int_{-1}^1 \lim_{a \rightarrow 0} f(t, a) dt = 1. \quad (6.105)$$

定义 6.2. δ 函数

满足如下两个性质的函数称为 δ 函数, 记作 $\delta(x)$ 。

1. 当 $x \neq 0$ 时, $\delta(x) = 0$
2. 对于任意 $a < 0 < b$, $\int_a^b \delta(x) dx = 1$



这个定义中没有指定 $\delta(x)$ 在 $x = 0$ 处的值。但利用第二个性质,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \quad (6.106)$$

由于积分区域是无穷小区域, 因此要求 $\delta(0) = \infty$ 。

定义 6.3. 高维 δ 函数

如果 $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是一个 n 维矢量, 则

$$\delta^{(n)}(\vec{x}) := \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n) \quad (6.107)$$



δ 函数提供了表述质点、点电荷等理想物理对象的数学工具。例如, 在静电学中, 我们要考虑空间中的电荷密度分布, $\rho(\vec{x})$ 。如果空间电荷是连续分布的, 则 $\rho(\vec{x})$ 也是空间坐标的连续函数。但如果空间中只有一个点电荷 Q , 则 $\rho(\vec{x}) = Q\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$, 其中 x_0 是点电荷的坐标。

显然(6.102)中的矩形函数只是 δ 函数的一种表示。其它常见的 δ 函数表示包括:

例 6.7 高斯脉冲:

$$G_n(x) := \sqrt{\frac{n^2}{\pi}} \exp(-n^2 x^2)$$

显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = 0, \quad x \neq 0$$

且满足积分条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \quad (6.108)$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = \delta(x)$$

例 6.8 洛伦兹脉冲:

$$L_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$$

显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = 0, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} L_n(x) dx = 1$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = \delta(x)$$

例 6.9 正弦脉冲:

$$S_n = \frac{\sin(nx)}{\pi x}$$

下面我们讨论 δ 函数的一些重要性质。注意 δ 函数的性质**必须**在积分意义下理解,通俗的说, δ 函数总是生活在积分号的阴影下。

1. 从 δ 函数的极限定义可以看出, $\delta(x)$ 是偶函数, 即 $\delta(-x) = \delta(x)$ 。也可以从 δ 函数的定义性质证明。显然当 $x \neq 0$ 时 $\delta(-x) = 0$ 。另外

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(-x) dx &= - \int_a^b \delta(-x) d(-x), \quad a < 0 < b \\ &= - \int_{-a}^{-b} \delta(u) du \\ &= \int_{-b}^{-a} \delta(u) du = 1, \quad -b < 0 < -a \end{aligned} \quad (6.109)$$

因此 $\delta(-x)$ 满足跟 $\delta(x)$ 一样的性质, 因此是同一个函数 (分布)。

2. 如果定义阶跃函数为

定义 6.4. 阶跃函数

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (6.110)$$



则 δ 函数和阶跃函数有关系

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}. \quad (6.111)$$

为了证明这一点, 我们只需验证 $dH(x)/dx$ 满足 δ 函数的性质。显然当 $x \neq 0$ 时, $dH(x)/dx = 0$ 。而对于积分性质

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dH(x)}{dx} dx &= \int_a^b d[H(x)] \\ &= H(b) - H(a) = 1, \quad a < 0 < b \end{aligned} \quad (6.112)$$

利用这个表示, 我们可以证明 δ 函数的一个重要性质。

3. 对于光滑函数 $f(x)$, 有

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad a < 0 < b \quad (6.113)$$

为了证明这一点, 我们注意到

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\delta(x)dx &= \int_a^b f(x)H'(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)d[H(x)] \\ &= H(x)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b H(x)f'(x)dx \\ &= f(b) - \int_0^b f'(x)dx \\ &= f(b) - [f(b) - f(0)] \\ &= f(0) \end{aligned} \quad (6.114)$$

这个性质是你们以后用到最多的性质。它也可以写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad (6.115)$$

而对于多维的情况,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)d^n\vec{r} = f(\vec{r}_0) \quad (6.116)$$

4. 对于 $a \neq 0$, 有

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad (6.117)$$

证明如下。令 $u = ax$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\frac{1}{a}du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x)}{|a|}dx \quad (6.118)$$

从这个结果知道, $\delta(x)$ 具有与 x 相反的量纲。即如果 x 具有长度量纲的话, $\delta(x)$ 具有长度⁻¹量纲。

5. 如果实函数 $g(x) = 0$ 在实区间 (a, b) 内只有一个单根 x_0 , 则

$$\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx = \int_a^b f(x)\frac{\delta(x)}{g'(x_0)}dx = \frac{f(x_0)}{g'(x_0)} \quad (6.119)$$

为了证明这一点, 我们取 $\varepsilon \rightarrow 0_+$, 则

$$\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx \quad (6.120)$$

在上述积分区域内, $g(x)$ 可做泰勒展开,

$$g(x) = 0 + (x - x_0)g'(x_0) + \dots \quad (6.121)$$

其中忽略的项是 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 的。因此

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta((x - x_0)g'(x_0))dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x) \frac{\delta(x - x_0)}{g'(x_0)} dx = \frac{f(x_0)}{g'(x_0)} \end{aligned} \quad (6.122)$$

更一般的, 如果 $g(x)$ 有 n 个不同的单根, 我们有分布等式:

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (6.123)$$

其中 $x_i, i = 1, \dots, n$ 是 $g(x) = 0$ 的不同单根。

6. δ 函数的导数通过分部积分定义。对于光滑函数 $f(x)$, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\delta(x) \\ &= \left[f(x)\delta(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx \\ &= -f'(0) \end{aligned} \quad (6.124)$$

7. δ 函数的傅立叶变换是常数 1。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \exp(-ixk)dx = \exp(-i0k) = 1 \quad (6.125)$$

反过来, δ 函数具有傅立叶变换表示

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixk)dk \quad (6.126)$$

例 6.10 阶跃函数的傅立叶变换。我们想求

$$\hat{H}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)e^{-ikx}dx \quad (6.127)$$

换句话说, 我们想求得 $\hat{H}(k)$, 使得

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(k)e^{ikx}dk \quad (6.128)$$

注意到

$$H'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ik\hat{H}(k)e^{ikx}dk = \delta(x) \quad (6.129)$$

与(6.126)比较可以得到一个猜测解 $\hat{H}(k) = -i/k$ 。我们将之代入(6.127)去看是否自治,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i}{k} e^{ikx} dk \quad (6.130)$$

被积函数在 $k = 0$ 处奇异, 因此这个积分是发散的, 无法给出我们想要的结果。因此我

们修正我们的猜测解为 $\hat{H}(k) = -\mathcal{P}[i/k]$, 即取柯西主值积分 \mathcal{P} 。代入(6.127)发现

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i}{k} e^{ikx} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{-i}{k} e^{ikx} dk \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & x > 0 \\ -\frac{1}{2} & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.131)$$

其中第二个等式可通过围道积分求得。这个结果离我们想要的还差一点。因此我们再次修正猜测解,

$$\boxed{\hat{H}(k) = -\mathcal{P} \frac{i}{k} + \pi \delta(k)} \quad (6.132)$$

将其代入(6.127)可以验证这就是我们想要的结果。

例 6.11 计算积分

$$\int_{-1}^1 9x^2 \delta(3x+1) dx \quad (6.133)$$

例 6.12 $f(x)$ 是光滑函数, 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x^2 - a^2) dx, \quad a > 0 \quad (6.134)$$

令 $g(x) = x^2 - a^2$ 。 $g(x) = 0$ 有两个单根, $x = -a$ 和 $x = a$ 。将该积分分为两段

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(g(x)) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) \delta(g(x)) dx + \int_0^{\infty} f(x) \delta(g(x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) \frac{\delta(x)}{g'(-a)} dx + \int_0^{\infty} f(x) \frac{\delta(x)}{g'(a)} dx \\ &= -\frac{f(-a)}{2a} + \frac{f(a)}{2a} \end{aligned} \quad (6.135)$$

例 6.13 极坐标下的 δ 函数。二维 δ 函数在直角坐标系 $\vec{r} = (x, y)$ 下表示为

$$\delta^{(2)}(\vec{r}) := \delta(x) \delta(y) \quad (6.136)$$

在极坐标系下, $\vec{r} = r(\cos \theta, \sin \theta)$, 其中 $r = |\vec{r}|$ 。不失一般性, 设极坐标下的 δ 函数为

$$\delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = f(r, \theta) \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \quad (6.137)$$

由 δ 函数的定义应有

$$\int \delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_0) d\tau = 1 \quad (6.138)$$

其中

$$d\tau = r dr d\theta \quad (6.139)$$

因此

$$1 = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta f(r, \theta) \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) = r_0 f(r_0, \theta_0) \quad (6.140)$$

由于 r_0 和 θ_0 可取任意值, 上式成立的条件是

$$f(r, \theta) = \frac{1}{r} \quad (6.141)$$

因此我们得到极坐标下的 δ 函数

$$\delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \quad (6.142)$$

例 6.14 对于二维矢量 $\vec{r} = (x, y)$, 有

$$\nabla^2 \ln \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -2\pi \delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (6.143)$$

为了证明这一点, 不妨设 $\vec{r}_0 = 0$, 我们需要证明当 $\vec{r} \neq 0$ 时,

$$\nabla^2 \ln \frac{1}{|\vec{r}|} = 0 \quad (6.144)$$

这可通过简单代数运算验证。此外, 我们还需验证积分等式

$$\int_{\Omega} dS \nabla^2 \ln \frac{1}{|\vec{r}|} = -2\pi \quad (6.145)$$

其中 $dS = dxdy = r dr d\theta$ 是二维面积元, Ω 是包含原点的任意单连通区域。为了证明(6.144), 利用二维散度定理

$$\int_{\Omega} dS \nabla \cdot \vec{F} = \int_{\partial\Omega} dl (\vec{n} \cdot \vec{F}) \quad (6.146)$$

其中 dl 是 Ω 边界线元, \vec{n} 垂直于积分边界。不妨取 Ω 为半径为 r 的圆, 因此 $\vec{n} = \vec{r}/r$ 。因此

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dS \nabla^2 \ln \frac{1}{|\vec{r}|} &= \int_{\partial\Omega} dl \frac{\vec{r}}{r} \cdot \nabla \ln \frac{1}{|\vec{r}|} \\ &= \int_{\partial\Omega} dl \frac{\vec{r}}{r} \cdot \left(\frac{-\vec{r}}{r^2} \right) \\ &= - \int_{\partial\Omega} dl \frac{1}{r} \\ &= -2\pi r \frac{1}{r} = -2\pi \end{aligned} \quad (6.147)$$

证毕。

利用复坐标 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$,

$$z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial\bar{z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \quad (6.148)$$

定义

$$\delta^{(2)}(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \quad (6.149)$$

则(6.142)可以写为

$$4\partial_z\partial_{\bar{z}} \ln \frac{1}{|z - z_0|} = -2\pi \delta^{(2)}(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0) \quad (6.150)$$

对于三维矢量 $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 有

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.151)$$

例 6.15 求解微分方程

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= ay(t) + \delta(t - t_0), \\ y(0) &= 0, \quad t_0 > 0, \quad a > 0 \end{aligned} \quad (6.152)$$