Projekt metody numeryczne - metoda potęgowa z deflacją

Konrad Burdach, 333183, grupa 1b, środa 14:15, projekt 2, zadanie 3

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Styczeń, 2025

Spis treści

Wstęp

Moim zadaniem była próba znalezienia kolejnych, największych co do modułu wartości własnych macierzy $A \in R^{nxn}$ metodą potęgową z deflacją drugiego rodzaju używającą obrotów Givensa.

Metoda Potęgowa

Metoda potęgowa jest określona w nastpępujący sposób:

$$\tilde{x}^k = \frac{x^k}{\|x^k\|}; \quad x^{k+1} = A\tilde{x}^k; \quad x^0 = rand(length(A), 1)$$

,gdzie w moim przypadku $A \in R^{nxn}$. Jeżeli A ma dominującą co do modułu wartość własną to wtedy wraz ze wzrotem k będziemy otzymywali, co raz to dokładniejsze przybliżenia wektorów własnych.

Zastrzeżenia

- **Te same co do modułu rzeczywiste wartości własne**
  Jeżeli macierz ma rzeczywiste współczynniki, to wtedy jeżeli a + bi jest wartością własną, to jest też nią a - bi, zatem mają ten sam moduł i metoda potęgowa nie będzie zbieżna, gdyż nasz wektor będzie oscylował w rzeczywistej podprzestrzeni. Jeżeli natomiast mamy algebraiczną krotność rzeczywistej wartości własnej to wtedy wektor będzie dążył do podprzesterzni generowanej przez wektory własne przypisane do tej wartości własnej.
- **Bliskie co do modułu wartości własne**
  Jeżeli wartości wlasne mają moduł bliskej wartości, to wtedy zbieżność metody jest bardzo wolna.

Konstrukcja modelu

- **Zły wektor początkowy**
  Może istnieć taki wektor początkowy dla którego metoda nie jest zbieżna natomiast zbiór takich wektorów ma miarę zero.
- **Zerowe wartości własne**
  Jeżeli macierz A ma tylko zerowe wartości własne to oznacza, że macierz A jest nilpotentna (Własność łatwo wynika z postaci wielomianu charakterystycznego i twierdzenia Cayleya-Hamiltona). Oznacza to, że $\exists k \in N, A^k = 0$. Może być to niebezpieczne dlatego ze w pewnym momencie wektor będzie na tyle mały, że będziemy dzielić przez zero. Ominiemy ten problem sprawdzając co każdą iteracje, czy nie dostaniemy wektora zerowego. Dodatkowo, warto zauważyć, że jeżeli zostanie znaleziona wartość własna równa zero to wtedy reszta też musi być zerem, gdyż jest to najmniejsza wartość własna.

Warunek stopu

Jeżeli nasza aproksymowana wartość jest już bliska tej analitycznej nie ma sensu liczyć dalej dlatego ustalimy warunek stopu.

$$\left\| \left(\tilde{x}_m^{(k+1)}\right)^{-1} \left|\tilde{x}_m^{(k+1)}\right| \tilde{x}^{(k+1)} - \left(\tilde{x}_m^{(k)}\right)^{-1} \left|\tilde{x}_m^{(k)}\right| \tilde{x}^{(k)} \right\|$$

jest mniejsza, niż określony wcześniej współczynnik toleracji przerywamy dalsze liczenie, gdzie m jest taki, że

$$\left|\tilde{x}_m^{(k)}\right| = \max_{1\leq j\leq n} \left|\tilde{x}_j^{(k)}\right|.$$

Ponadto, jeżeli nasz program przekroczy narzuconą z góry liczbę iteracji to wtedy kończymy działanie.

Deflacja

Metoda potęgowa pozwala nam na znalezenie tylko największej wartości własnej. Aby spróbować znaleźć wszysktie zastosujemy deflację, która przekształci naszą macierz $Z \in R^{NxN}$ na $B \in R^{(N-1)x(N-1)}$, która będzie zawierała nieznalezione dotychczas wartości własne. Aby tego dokonać musimy znaleć taką macierz nieosobliwą P, żę $Pv = \beta e_1$, gdzie v jest naszym największym znalezionym wektorem własnym macierzy Z. Wtedy macierz PZP^{-1} z obciętym pierwszym wierszem i kolumną da nam szukaną macierz B.

Obroty Givensa

W celu znaleznienia takiej macierzy P, użyjemy obrotów Givensa. Intuicyjnie jeden obrót Givensa, to rotacja w płaszczyźnie rozpinanej przez dwie współrzędne. Za pomocą złożenia $N-1$ obrótów givensa będziemy mogli skonstruować macierz P.
Jako, że macierz Givensa zmienia tylko dwie współrzędne, to możemy rozpatrzeć ją jako obrót wektora o dwóch współrzednych. Szukamy takich $s, c \in R$, że

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Konstrukcja modelu

oraz

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

z tego warunku będzie wynikać, żę nasza macierz Givensa będzie ortogonalna.
Takie warunki spełniają:

$$r = -\frac{x_1}{x_2}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}}, \quad c = sr, \quad \beta = -\frac{x_2}{s},$$

jeżeli $|x_2| \geq |x_1|$. Natomiast wpp. :

$$r = -\frac{x_2}{x_1}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}}, \quad s = cr, \quad \beta = \frac{x_1}{c}.$$

Konstrukcja modelu

Rozszerzając naszą macierz Givensa do wymiaru naszej porządanej macierzy, tworząc $N-1$ obrotów między x_1 i x_j współrzędną, gdzie $2 \leq\ j \leq N$, a następnie mnożąc je przez siebie otrzymamy naszą macierz P.
Istotne jest to, żeby po każdym obrocie zmieniać długośc naszego obracanego wektora, gdyż w przeciwnym przypadku obracalibyśmy inny wektor.
Zuważmy dodatkowo, że złożenie macierzy orotognalnych jest macierzą otogonalną. Itotnie jeżeli

$$A^T A = AA^T = I, \quad B^T B = BB^T = I$$

to wtedy,

$$(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = I$$

zatem $P^{-1} = P^T$

Konstrukcja modelu

Zauważmy dodatkowo, że wykonując mnożenie PZP^{-1} otrzymujemy złożoność $O(n^3)$ wynikającą z klasycznego mnożenia macierzy. Jeżeli natomiast będziemy bezpośrednio modyfikować macierz Z otrzymamy złożoność równą $O(n^2)$ wynikająca z tego, pojedyńczy obrót Givensa ma złożoność $O(n)$.

Podstawowe macierze

Macierz zerowa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wyznaczone wartości własne: 0, 0, 0, 0, 0
Oczekiwane wartości własne: 0, 0, 0, 0, 0
toleracja: 10^{-9}
iteracja: 10^4

Macierz jednostkowa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznaczone wartości własne: 1, 1, 1, 1, 1
Oczekiwane wartości własne: 1, 1, 1, 1, 1
toleracja: 10^{-9}
iteracja: 10^{4}

Macierz z $\dim \mathrm{Im} = 1$ i $\dim \ker = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Wyznaczone wartości własne: 10, 0, 0, 0
Oczekiwane wartości własne: 10, 0, 0, 0
toleracja: 10^{-9}
iteracja: 10^{4}

Macierz diagonalna

$$B = \text{diag}(1, 2, \ldots, 300)$$

Wyznaczone wartości własne: $1, 2, \ldots, 300$
Oczekiwane wartości własne: $1, 2, \ldots, 300$
toleracja: 10^{-9}
iteracja: 10^4

Macierz nilpotentna

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Wyznaczone wartości własne:
$-0.1776 \cdot 10^{-14}, 0.1184 \cdot 10^{-14}, 0.0647 \cdot 10^{-14}$
Oczekiwane wartości własne:
0, 0, 0
toleracja: 10^{-9}
iteracja: 10^4
Co ciekawe wbudowana funkcja w środowkisku matlab "eig"otrzymuje poniższe wyniki: $0.1705 \cdot 10^{-6}, -0.1705 \cdot 10^{-6}, 0$

Macierz nilpotentna taka, że $B^4 = 0$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczone wartości własne: $0, 0, 0, 0$
Oczekiwane wartości własne: $0, 0, 0, 0$
toleracja: 10^{-9}
iteracja: 10^4

Macierz z krotonością algebraiczna większą niż krotnością geometryczną

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczone wartości własne:
1.999999999712178, 1.000045277911388, 0.999954722376434
Oczekiwane wartości własne:
2, 1, 1
,przy czym krotność gemetryczna dla 2 i 1 wynosi jeden.
toleracja: 10^{-9}
iteracja: 10^{5}

Macierz z krotonością algebraiczną większą niż krotnością geometryczną

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczone wartości własne:

1.000031622255500 0.999968377744500

Oczekiwane wartości własne:

1, 1

,przy czym krotność gemetryczna dla 1 wynosi jeden.

toleracja: 10^{-9}

iteracja: 10^{5}

Testowanie kolejnych etapów deflacji

Macierz symertryczna o analitycznych wartościach własnych:

5.0729, 1.1396, -1.0961, 0.4696, -0.0626

$$A = \begin{bmatrix} 5.0729 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.3763 & 0.2646 & 0.9443 & 0.1484 \\ -0.0000 & 0.2646 & 0.2466 & -0.4634 & -0.1144 \\ -0.0000 & 0.9443 & -0.4634 & -0.1807 & 0.1823 \\ -0.0000 & 0.1484 & -0.1144 & 0.1823 & 0.0084 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.1396 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.3321 & -0.4110 & -0.0917 \\ 0.0000 & -0.4110 & -0.9776 & 0.0406 \\ -0.0000 & -0.0917 & 0.0406 & -0.0435 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1.0961 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.4504 & -0.0993 \\ -0.0000 & -0.0993 & -0.0434 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.4696 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0626 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.0626 \end{bmatrix}$$

Testowanie kolejnych etapów deflacji

Macierz diag(1, 2, . . . , 5)

$$A = \begin{bmatrix} 5.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 2.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 3.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 4.0000 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 2.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 3.0000 \end{bmatrix}$$

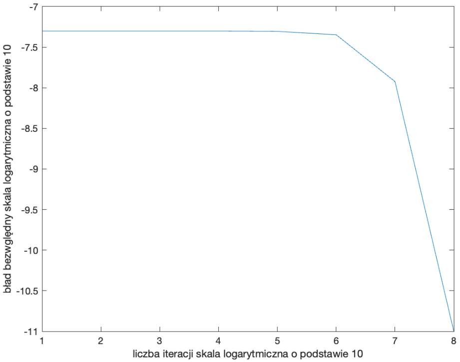
$$A = \begin{bmatrix} 3.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

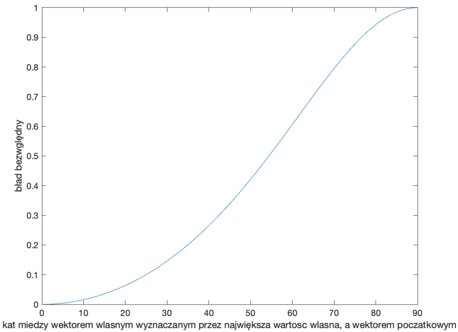
Zależność błędu od iteracji dla macierzy o bliskich wartościach własnych

$$B = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1 + 10^{-7} \end{bmatrix}$$



Zależność błędu od wektora początkowego dla macierzy o bliskich wartościach własnych

$$B = \begin{bmatrix} 3000 & 0 \\ 0 & 2999 \end{bmatrix}$$



Ekspryment jest wykonywany dla każdego wektora z tą samą ilością iteracji.

Zależność stosunku wartości włąsnych od liczby zajdowanych wartości własnych

Stosunek wartości kolejnych co do wielkości wartości własnych	Liczba iteracji potrzebna, żeby znaleźć wszystkie (10)	Wskaźnik uwarunkowania macierzy
1.0010	2^{16}	1.3399
1.2231	2^{8}	$5.7737 \cdot 10^{3}$
1.4452	2^{7}	$4.5418 \cdot 10^{4}$
1.6673	2^{7}	$1.9432 \cdot 10^{5}$
1.8894	2^{7}	$6.1285 \cdot 10^{5}$
2.1116	2^{6}	$1.6062 \cdot 10^{6}$
2.3337	2^{6}	$3.7125 \cdot 10^{6}$
2.5558	2^{6}	$7.8266 \cdot 10^{6}$
2.7779	2^{6}	$1.5374 \cdot 10^{7}$
3	2^{6}	$2.8554 \cdot 10^{7}$

Obroty Givensa a macierze typu Sparse

Jako, że jeden obrót Givensa zamienia tylko dwa wiersze, zacząłem się zastanawiać, jak cała deflacja wpływa na stosunek niezerowych elementów do wszystkich elementów.

Wymiar macierzy	Przed deflacją	Po deflacji
100x100	0.0194	0.9890
1000x1000	0.0020	0.9904