# 代数

作者：Kong

时间：February 8, 2023

# 目录

# 第 1 章 行列式

## 1.1 n 维空间中的有向体积

我们先从外积和混合积的性质出发，定义高维空间中的有向体积，也是方阵的行列式. 通过计算其通式的过程中可知，其中重点问题在于研究其反对称性，即如何确定分量乘积的符号，同时也在于如何减少随着维数增加而导致的恐怖的计算量。经过进一步的抽象化我们将 n 维有向体积的性质抽取出来，得到了具有某种特殊性质的函数，即多重反对称线性泛函.（这将会成为我们研究如何简化行列式计算方法时的有力工具）

**定义 1.1 (向量的外积，有向面积)**

记 $area$ 为从数组空间 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射，它满足以下性质：

1.$area(e_1, e_2) = 1$.(单位面积)

2.$area(e_1, e_2) = -area(e_2, e_1)$.（反对称性）

3.$area(e_1, e_2)$ 的第一个位置和第二个位置是线性的.（双线性）

其中 $e_1, e_2$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的自然基，其方向满足右手系. 对于任意 $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, 我们称 $area(v_1, v_2)$ 为 $v_1, v_2$ 的有向面积.

♣

**命题 1.1 (外积计算通式)**

若 $v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$, 则

$$area(v_1, v_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

♠

**证明**

$$\begin{aligned}
area(v_1, v_2) &= area(a_{11}e_1 + a_{12}e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\
&= area(a_{11}e_1, a_{21}e_1 + a_{22}e_2) + area(a_{12}e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\
&= area(a_{11}e_1, a_{21}e_1) + area(a_{11}e_1, a_{22}e_2) + area(a_{12}e_2, a_{21}e_1) + area(a_{12}e_2, a_{22}e_2) \\
&= a_{11}a_{21}area(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}area(e_1, e_2) + a_{12}a_{21}area(e_2, e_1) + a_{12}a_{22}area(e_2, e_2) \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

为了方便记忆，我们可以将其记作如下形式：

$$area(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

后面我们会知道这是由 $v_1, v_2$ 的行坐标所组成的方阵的二阶行列式.

**定义 1.2 (向量的混合积，三维有向体积)**

记 $vol$ 为从数组空间 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射，它满足以下性质：

1.$vol(e_1, e_2, e_3) = 1$.(单位体积)

2.$vol(e_1, e_2, e_3) = -area(e_2, e_1, e_3)$ 即当其中两个位置对换时，方向改变.（反对称性）

3.$vol(e_1, e_2, e_3)$ 的每个位置都是线性的.（多重线性）

其中 $e_1, e_2, e_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的自然基，其方向满足右手系. 对于任意 $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, 我们称 $vol(v_1, v_2, v_3)$ 为 $v_1, v_2, v_3$ 的混合积或有向体积 (volume).

♣

**命题 1.2 (混合积计算通式)**

若 $v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, v_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3$, 则

$$vol(v_1, v_2, v_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

**证明**

$$\begin{aligned} vol(v_1, v_2, v_3) &= vol(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) \\ &= a_{11}a_{12}a_{13}vol(e_1, e_2, e_3) + a_{12}a_{23}a_{31}vol(e_2, e_3, e_1) + a_{13}a_{21}a_{32}vol(e_3, e_1, e_2) \\ &- a_{13}a_{22}a_{31}vol(e_3, e_2, e_1) - a_{12}a_{21}a_{33}vol(e_2, e_1, e_3) - a_{11}a_{23}a_{32}vol(e_1, e_3, e_2) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

为了方便记忆，类似地，我们可以将其记作如下形式

$$vol(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

后面我们会知道这是由 $v_1, v_2, v_3$ 的坐标为行所组成的方阵的三阶行列式.
我们可通过下面的图像来记忆该命题 (源自 “A Course in Algebra” –by E.B.Vinberg)

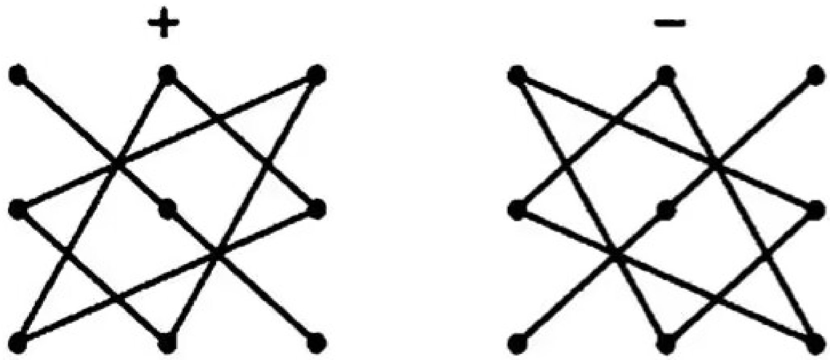


**图 1.1:** “对角线刺穿了一颗六芒星.” 可结合手性一起记忆，右手性即为右上角是星星的角.

**定义 1.3 (n 维有向体积，行列式)**

记 $det$ 为从数组空间 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射，它满足以下性质：

1.$det(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$, 其中 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的自然基，其方向满足右手系.(单位体积)

2.$det(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 其中两个位置对换时，方向改变.（反对称性）

3.$det(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的每个位置都是线性的.（多重线性）

其中 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的自然基，其方向满足右手系. 对于任意 $v_1, v_2, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$, 我们称 $det(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的 n 维有向体积.

特别地，我们将由 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的坐标为行所组成的方阵 (第 i 行为 $v_i$ 的坐标) 的 n 阶行列式 (Determinant) 定义为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的 n 维有向体积.

接着我们可以尝试推出 n 维有向体积计算通式.

**命题 1.3 (n 维有向体积的计算表达式)**

对于 $R^n$ 中的 $n$ 个向量，记第 $i$ 个向量的分量为 $a_{ij_i}$，则

$$det(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \sum_{A(j_i)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} det(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_n})$$

其中 $i \in 1, 2, \cdots, n\backslash\{0\}$，$j_i \in 1, 2, \cdots, n\backslash\{0\}$，$A(j_i)$ 表示 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列（Arrangement）的集合. ♠

在尝试的过程中，我们发现了两个问题：

第一个是关于确定每一项是否要乘上 $-1$，因为我们暂时不清楚将 $det(e_{j_1}, e_{j_2}\cdots, e_{j_n})$ 转化为 $det(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 后要不要乘上 $-1$.

第二个是关于计算量，我们不难得出在计算 n 维有向体积时会出现 $n!$ 的项，这是一个非常恐怖的计算量，这意味着 4 维的情况有 24 项，5 维的情况会有 120 项！所以我们接下来需要研究的重点便在于找到一个有效地正确变号和减少计算量的方法。目前我们可以给出的只能时 n 维有向体积的计算表达式.

虽然无法根据这个表达式直接地进行计算，但是通过这个表达式我们可以知道这样一件事实：n 维有向体积其实也是相应的 n 个向量中每个向量的分量与其他向量的分量进行排列后得到的乘积的代数和。

接着我们可以定义一类拥有 n 维有向体积（行列式）所具有的性质的映射，在后面我们会发现这些的映射和行列式有很大的联系，它来由于我们的 n 维有向体积（行列式），但比 n 维有向体积的更具有普遍性. “青出于蓝而胜于蓝.” 在后面我们可以通过构造出这样的映射来帮助我们简洁地推导出简化行列式计算的一些方法.

我们不难发现 n 维有向体积是一个定义域在数组空间中，陪域（映上域）在数域中的多元映射，即它将 n 个 n 维向量空间中的向量对应了一个数，

**定义 1.4 (多重反对称线性函数)**

我们称这样的映射为 n 重反对称线性函数：

$$f : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$$

1. 具有多重线性
2. 具有反对称性

♣

**定理 1.1 (反对称性的等价条件)**

一个多重线性函数具有反对称性当且仅当它作用的不同位置出现同一个向量时，它的值为 0.

以双线性泛函为例：

$$f(a, a) = 0$$

♡

**证明** 不失一般性，我们在这里只证明双线性泛函：

1. 必要性，假设 $f$ 是一个反对称双线性泛函，则：$\forall c \in \mathbb{R}^2$

$$f(c, c) = -f(c, c) \Leftrightarrow f(c, c) = 0$$

2. 充分性，假设 $f$ 是一个满足上述性质的双线性泛函，则：$\forall a, b \in \mathbb{R}^2$

$$f(a, b) + f(b, a) = f(a, b) + f(a, a) + f(b, b) + f(b, a) = f(a + b, a + b) = 0$$

**注** 若一个映射满足 $f(a, a) = 0$, 可称它满足“交错性”.

**注** 该证明中的必要性利用了实数域的一个性质,$\mathbb{R}$ 的域特征不为 2. 实际上，我们可以将其推广到任何域特征不为 2 的域中.

## 1.2 自然数的排列方式

由第一节推导命题 1.3 的过程中，我们知道 n 维有向体积展开后，接着要将 $det(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_n})$ 转化为 $det(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，由反对称性可知，在这个转化的过程中，我们每将两个位置对换，行列式就会乘上一个 $-1$,

那么我们该怎么确定最后是否应该乘上 −1 呢？接下来，我们通过研究排列 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 与排列 $123\cdots n$ 的关系，得到一个通过排列 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 的排列类型来确定是否变号的方法.

$$det(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_n}) = \pm det(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

**定义 1.5 (自然排列)**

我们称 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 中元素的这种排列方式

$$123\cdots n$$

为自然排列，，我们称自然排列之外的其它排列方式为非自然排列.

容易观察到，自然排列与其他排列方式最大不同的地方在于它具有"严格单调递增性"，这将会成为我们区分自然排列和其他排列的一个方式. 为了更好地将其与其他排列方式进行比较，我们可以引入这样的一种映射：

**定义 1.6 (置换)**

记 P 为从 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 到其自身的一个双射, 我们通常用一个 2x2 矩阵去刻画它的对应法则：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & p(3) & \cdots & P(n) \end{pmatrix}$$

我们称 $P$ 为置换. 特别地，我们有

单位置换 I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

若仅仅使两个元素交换位置，我们称其为对换, 记作小写 $p$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & x & \cdots & y & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & y & \cdots & x & \cdots & n \end{pmatrix}$$

我们也将对换 $p$ 记作 $p_{xy}$ 来表示它作用于第 $x$ 和第 $y$ 个位置.

那我们现在便可以严格描述自然排列与其它排列的区别了.

**定理 1.2 (自然排列的刻画)**

集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 中的一种排列方式 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 为自然排列当且仅当对于置换

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

满足

$$\forall x \neq y, [P(x) - P(y)](x - y) > 0$$

**证明** 必要性显然成立，下证充分性：

$$[P(1) - P(2)](1 - 2) > 0 \Rightarrow j_1 > j_2$$

$$[P(2) - P(3)](2 - 3) > 0 \Rightarrow j_2 > j_3$$

$$\cdots$$

$$[P(n-1) - P(n)][(n-1) - n] > 0 \Rightarrow j_n > j_{n-1}$$

由归纳可知 $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$, 又因为 $max\{j_1, j_2, \cdots, j_n\} = n$, 所以 $j_1 = 1, j_2 = 2, \cdots, j_n = n$, 即 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 是自然排列.

现在我们已经将自然排列与其它排列方式严格区分开来了，那么其他排列方式之间是否有什么"特征"能

让我们区分它们呢？由上述定理，我们可知道若一种排列不是自然排列，那么就

$$\exists x \neq y, [P(x) - P(y)](x - y) < 0$$

因为 P 是双射，故取不到等号. 若由这一点出发，我们想要区分其它排列方式，可通过研究排列中满足上述式子的数对 $(x, y)$ 的数量. 通俗地来说，每一种非自然排列的排列方式，实际是某个置换将自然数列的“严格单调递增性”破坏后得到的结果，我们将用逆序对来描述这种“破坏”，用“逆序数”来描述“破坏的程度”.

**定义 1.7 (逆序对，逆序数)**

对于集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 中的一种非自然排列 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$，我们称数对 $(j_x, j_y)$ 为它的一个逆序对，当置换

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

满足

$$[P(x) - p(y)](x - y) < 0, \quad (j_x - j_y)(x - y) < 0$$

我们称这些逆序对的数量，为 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ 的逆序数，为了方便，我们可将 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ 记为 A，则它的逆序数可记为 $N(A)$.

♣

自然排列并没有“被破坏”，其逆序数自然是“0”. 我们将排列 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ 置换成 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的过程，实际上是将 $N(A)$ 转化为 0 的过程. 通俗地来讲，置换 $P$ “恢复”了 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ 的“严格单调递增性”，将“破坏程度” $N(A)$” 恢复” 成 0.

$$N(A) \xrightarrow{P} 0$$

不难想到，置换 $P$ 应该可以被分解成有限个对换的复合，即 $k$ 个对换的复合 $(k \in \mathbb{N}^*)$.$j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ 经过一次对换作用，对应的行列式中的项乘上一个 $-1$, 那么经过 $k$ 次对换作用，乘上 $k$ 个 $-1$，这表明我们并不需要知道具体的 $k$ 是哪个数，我们只需要知道 $k$ 的奇偶性便可以确定是否需要乘上 $-1$.

$$P = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k, \quad j_1 j_2 j_3 \cdots j_n \xrightarrow{P = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k} 12 \cdots n$$

$$det(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_n}) = (-1)^k det(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

同时，若将对换与逆序数联系起来，我们将会发现 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ 经过一次对换作用，其逆序数的奇偶性将改变一次，经过 $k$ 对换作用，逆序数的奇偶性就会改变 $k$ 次. 又因为奇数的奇偶性改变奇数次后，就变为偶的，偶数改变偶数次后，也变为偶的. 将以上想法都联系在一起，可得到

$$N(A)(odd) \xrightarrow{k(odd)} 0(even)$$
$$N(A)(even) \xrightarrow{k(even)} 0(even)$$

这表明逆序数的奇偶性与 $k$ 的奇偶性是一致的！也就是说，通过判断逆序数的奇偶性我们便可知是否需要乘上 $-1$！（其中 $(odd)$ 表示奇的，$(even)$ 表示偶的）.

接下来我们开始验证我们的想法.

**引理 1.1 (置换分解)**

任何一个置换都可以被分解成有限个对换的复合，即

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, P = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k$$

♡

**证明** 对于集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$, $n = 1$ 时，结论显然成立. $n = r$ 时，假设存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$P = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k$$

$n=r+1$ 时，对于置换

$$P'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & r+1\\ P(1) & P(2) & P(3) & \cdots & P(r+1)\end{pmatrix}$$

存在 $i\in\{1,2,\cdots,r+1\}$, 使得 $P(i)=r+1$, 不失一般性，我们可设 $i\neq r+1$. 那么

$$P'p_{i(r+1)}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & i & \cdots & r+1\\ P(1) & P(2) & P(3) & \cdots & P(r+1) & \cdots & P(i)=r+1\end{pmatrix}$$

由假设可知存在 $k\in\mathbb{N}^*$，使得

$$P'p_{i(r+1)}=p_1p_2p_3\cdots p_k$$

$$P'p_{i(r+1)}p_{i(r+1)}=p_1p_2p_3\cdots p_kp_{i(r+1)}$$

$$P'=p_1p_2p_3\cdots p_kp_{i(r+1)}$$

由归纳可知，结论成立.

**引理 1.2 (对换与逆序数的奇偶性)**

对于任意一个排列 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 作用一次对换后，其逆序数的奇偶性改变.

**证明** 对于任意一个排列 $j_1j_2\cdots j_x\cdots j_y\cdots j_n$(记为 A), 考虑对换

$$p=\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_x & \cdots & j_y & \cdots & j_n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_y & \cdots & j_x & \cdots & j_n\end{pmatrix}$$

设 $y=x+s$, 则数对 $(j_x,j_{x+1}),(j_x,j_{x+2}),\cdots,(j_x,j_{x+s})$ 以及数对 $(j_{x+s},j_{x+1}),(j_{x+s},j_{x+2}),\cdots,(j_{x+s},j_{x+s-1})$ 要么由逆序对转化为普通数对 (有 $k_1$ 对)，要么由普通数对转化为逆序对（有 $k_2$ 对). 且

$$k_1+k_2=2s+1$$

可知逆序数 $N(A)$ 的奇偶性改变了 $2s+1$ 次，即该命题成立.

**定理 1.3 (逆序数与对换)**

集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中的任意一种排列方式 $j_1j_2j_3\cdots j_n$，都可由 $k$ 个对换后可转化为自然排列，其中 $k\in N^*$ 则这个排列的逆序数与 $k$ 具有相同的奇偶性.

**证明** 集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中的任意一种排列方式 $j_1j_2j_3\cdots j_n$(记为 A)，可由置换

$$P=\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

将其转化为自然排列. 由引理 1.1 可知存在 $k\in\mathbb{N}^*$, 使得

$$P=p_1p_2p_3\cdots p_k$$

又由引理 1.2 可知，$N(A)$ 的奇偶性改变了 $k$ 次，且改变了 $k$ 次后变为偶数，也就是说 $N(A)$ 与 $k$ 具有相同的奇偶性.

这表明了我们应该按照逆序数的奇偶性将排列划分为两大类，

**定义 1.8 (奇排列和偶排列)**

1. 若 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 为奇数，我们称排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列.
2. 若 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 为偶数，我们称排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列.

于是，现在我们若要判断

$$det(e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_n})=\pm det(e_1,e_2,...,e_n)$$

只需判断 $j_1j_2\cdots j_n$ 是什么类型的排列. 为了更方便地表示 n 维有向体积的计算通式，我们再引入这样的一

个函数.

**定义 1.9 (符号函数)**

记 sgn 为从 $A(j_i)$ 到 $\{1,-1\}$ 的一个映射，它满足：

1. 当 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 为奇数，即 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，$sgn(j_1j_2\cdots j_n)=-1$
2. 当 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 为偶数，即 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，$sgn(j_1j_2\cdots j_n)=1$

**定理 1.4 (n 维有向体积的计算通式)**

对于 $R^n$ 中的 $n$ 个向量，记第 $i$ 个向量的分量为 $a_{ij_i}$，则

$$det(v_1,v_2,\cdots,v_n)=\sum_{A(j_i)} sgn(j_1j_2\cdots j_n)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $i\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$，$j_i\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$，$A(j_i)$ 表示 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列（Arrangement）的集合.

## 1.3 简化行列式的计算

经过上一章的学习，我们知道行列式是 n 维有向体积，它可以作为方阵的一个决定因素，现在我们成功地将方阵的“信息”压缩成了一个数字，后面我们可以看到它在矩阵中有非常广泛的应用。我们已经算出了 n 维有向体积的计算通式，但是我们还没解决怎样简化运算。在这一章里，我们将利用多重反对称线性泛函的性质来给出可以化简行列式的方法，不难想到，这个方法应该是能对高阶行列式进行“降维打击”，也就是降低它的阶数.

首先我们很自然的会去思考由 n 个向量的坐标组成列的方阵的行列式是否等于由这些向量的坐标组成行的方阵.

**定理 1.5 (转置后行列式不变)**

由 $v_1,v_2,...,v_n$ 的坐标为列所组成的方阵 (第 i 行为 $v_i$ 的坐标) 的 n 阶行列式与以它们的坐标为行的方阵的行列式相同，即：

$$det(A^T)=det(A)$$

其中 $A$ 为 n 阶方阵.

**证明** 设矩阵 $A$ 的代表元为 $a_{ij}$, 矩阵 $A^T$ 的代表元为 $b_{ij}$, 则 $b_{ij}=a_{ji}$, 即有

$$\begin{aligned}
det(A)&=\sum_{A(j_i)} sgn(j_1j_2\cdots j_n)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\
&=\sum_{A(j_i)} sgn(j_1j_2\cdots j_n)b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}\\
&=\sum_{A(j_i)} sgn(j_1j_2\cdots j_n)b_{1i_1}b_{2i_2}\cdots b_{ni_n}\\
&=\sum_{A(i_j)} sgn(i_1i_2\cdots i_n)b_{1i_1}b_{2i_2}\cdots b_{ni_n}\\
&=det(A^T).
\end{aligned}$$

上述连等式中，第三个等号是将 $b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}$ 重新进行排列后得到的结果，第四个等号是因为若 $j_1j_2\cdots j_n$ 经过 $k$ 次对换后变为自然排列，那么可知自然排列经过 $k$ 次相同的对换后变为 $i_1i_2\cdots i_n$，即 $sgn(j_1j_2\cdots j_n)=sgn(i_1i_2\cdots i_n)$.

这意味着后面我们所有关于行列式的证明都可以不失一般性地只讨论以 n 个向量的坐标组成行的方阵的行列式. 我们先来看几个比较简单的情况.

**命题 1.4 (行列式为 0 的充分条件)**

若 $n$ 阶方阵 $A$ 满足如下条件中的其中一个，则

$$det(A) = 0$$

1. 有一行 (列) 所表示的向量为零向量.
2. 任意两行 (列) 所表示的向量线性相关.

**证明**

1. 由行列式的计算通式可证得.
2. 由行列式的多重线性和反对称性可证得.

**命题 1.5 (上三角矩阵的行列式)**

若 $n$ 阶方阵 $A$ 是上 (下) 三角矩阵，则其行列式为其对角元之积.

即若

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

**证明** 由行列式的计算通式可证得.

这意味着我们可以通过初等变换将一个矩阵化为上三角矩阵后，再对其求行列式. 那么初等变换对这个矩阵的行列式有什么影响呢?

**命题 1.6 (方阵的初等变换对其行列式的影响)**

对于 $n$ 阶方阵:

1. 进行一次第一类初等变换，其行列式乘上一次 $-1$.
2. 进行第二类初等变换，其行列式乘上相应的一个数的倒数.
3. 进行第三类初等变换，其行列式不变.

**证明**

1. 由行列式的反对称性可证得.
2. 由行列式的多重线性可证得.
3. 由行列式的多重线性和命题 1.4 可证得.

但是对于一些较为复杂的矩阵，我们很难仅仅依靠初等变换来求它的行列式. 下面我们借助反对称多重线性泛函的性质来得到几个重要的可以简化行列式计算的定理.

**定理 1.6 (多重反对称线性函数的具体形式)**
对于任意的 $r \in \mathbb{R}$, 都存在一个唯一的在 $\mathbb{R}^n$ 上的反对称多重线性函数，使得

$$f(e_1, e_2, \cdots, e_n) = r,$$

且它可化为如下形式：

$$f(v_1, v_2, \cdots, v_n) = r \sum_{A(j_i)} sgn(j_1 j_2 \cdots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的自然基, 记第 $i$ 个位置向量的分量为 $a_{ij_i}$，$i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，$j_i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，$A(j_i)$ 表示 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列（Arrangement）的集合.

**证明**
先证明唯一性：假设存在一个反对称多重线性函数 $f$ 满足 $f(e_1, e_2, \cdots, e_n) = r,$, 则

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2, \cdots, v_n) &= f\left(\sum_{j_1} a_1 j_1, \sum_{j_2} a_2 j_2, \cdots, \sum_{j_n} a_n j_n\right) \\ &= \sum_{A(j_i)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} f(e_j 1, e j_2, \cdots e_j) \end{aligned}$$

再证明存在性：

**推论 1.1**
若 $f$ 是一个关于 n 阶方阵 $A$ 的各行的反对称多重线性函数，则有

$$f(A) = f(I_n) det(A).$$

**定理 1.7 (方阵乘积的行列式)**

$$det(AB) = det(A) det(B).$$

**定理 1.8 (一类分块对角矩阵的行列式)**
对于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

我们有

$$det(A) = det(B) det(D).$$

该定理的最后一个式子建立了行列式与反对称多重线性泛函的联系，接下来我们就利用它来证明如下几个可以简化行列式计算的重要的命题和定理.

**命题 1.7 ($Vandermonde$ 行列式)**
对于矩阵

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^n \\ 1 & x_1 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^n \end{pmatrix}$$

我们有

$$det(V) = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

**引理 1.3 (余子式与代数余子式)**

♡

**定理 1.9 (行列式按一行或一列展开)**

♡

**引理 1.4 (k 阶余子式)**

♡

**定理 1.10 (Laplace 定理)**

♡

## 1.4 行列式的应用