http://users.auth.gr/natreas

Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5

Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6

Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marjden (πιο μαθηματικό)

Μέρος I

Ατρέας

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Έστω $\mathbb{C} = \left\{ z = \overbrace{(x,y)}^{\text{γεωμετρική παράσταση μιγαδικού}};\ x,y \in \mathbb{R} \right\}$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $x_2 = (x_2, y_2)$, τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο $\lambda \in \mathbb{R}$ με μιγαδικό z

Αν $z = (x, y)$, τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

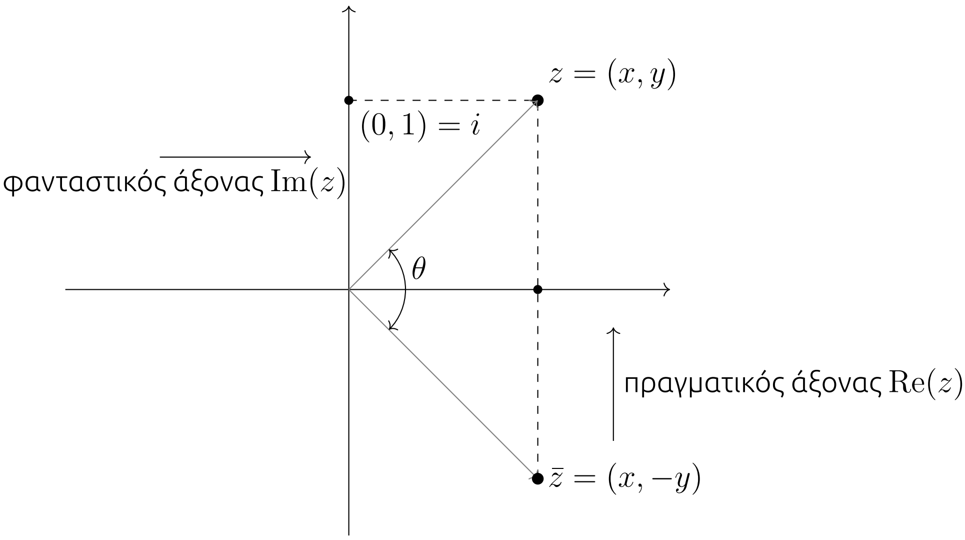
Αν $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$, τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{C}$ είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} A = \big\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\big\}$$

- $(x,0),(y,0) \in A \implies (x,0)+(y,0)=(x+y,0) \in A$
- $(x,0)(y,0)=(xy,0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$1=(1,0)$$
$$x=(x,0)$$

Ορίζω:

$$i=(0,1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2=(0,1)(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1$$
$$\boxed{i^2=-1}$$

Έτσι:

$$z=(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$$
$$\overset{x=(x,0)}{\underset{i=(0,1)}{=}} x\cdot 1+yi$$
$$\implies \boxed{z=x+iy}$$

$$\underbrace{z=x+iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z=(x,y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\overset{\text{πολικές}}{\underset{\text{του } (x,y)}{=}} \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta =$$

$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1}$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$z = |z|\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$= |z| \cdot e^{i\theta}$$

όπου στο εξής:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$\boxed{\text{τύπος του Euler}}$

Τελικά:

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}} \text{(πολική μορφή μιγαδικών)}$$

Σημείωση: $\cos\theta + i\sin\theta$

$$\overset{\text{σειρές}}{\underset{\text{McLaurin}}{=}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$\overset{i^2=-1}{=} \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right)$$

$$= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots = e^{i\theta}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα $\mathrm{Arg} z$ (μη μηδενικού) μιγαδικού z να είναι η γωνία θ που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του $\mathbb{C}$ με την ημιευθεία OA, όπου A το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του $z = x + iy$.

Έτσι:

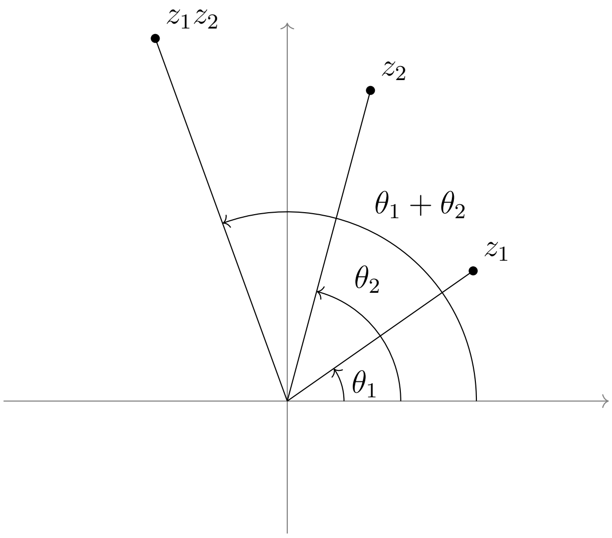
$z = |z|e^{i\mathrm{Arg}z}$ πολική μορφή του z

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\mathrm{Arg}z_1}|z_2|e^{i\mathrm{Arg}z_2}$$

$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2)}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$$

$$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$



Ιδιότητα: $z\bar{z} = |z|^2$

Κεφάλαιο 2 Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

π.χ.

$$f(z) = z^2 \implies f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\mathrm{Re}(f)} + i\underbrace{(2xy)}_{\mathrm{Im}(f)}$$

$$\underset{\text{μορφή}}{\overset{\text{γεωμετρική}}{=}} (x^2 - y^2,\ 2xy)$$

Τελικά: $\boxed{f(x,y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)}$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

π.χ.

$$f(z) = \frac{1}{|z|\bar{z}} \overset{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z}$$

$$\overset{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\overset{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \overset{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

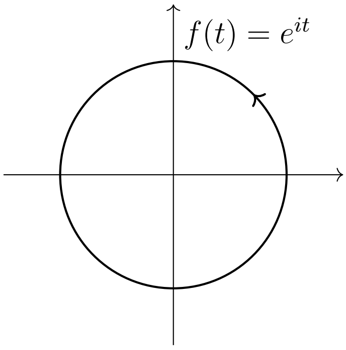
$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιγ. μεταβλ.}} \xleftrightarrow{\text{1-1}} \begin{array}{l}\text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big)\end{array}$$

όπου u, v πραγματ. συναρτ. 2 μεταβλητών

Υπάρχουν $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής
π.χ

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{it},\ t \in (0,\pi] \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

$t \to (\cos t, \sin t)$ καμπύλη $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$



Η γραφ. παράσταση της $f(t) = e^{it},\ t \in (-\pi, \pi)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0,0)$ με αντιωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1,t) = (1,0) + t(0,1)$$

Το πεδίο ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδ. μεταβλητών υπολογίζεται ως συνήθως (με τις πραγματικές συναρτήσεις) ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ Διαφοροποιήσεις

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Πρέπει ο παρον. να είναι διάφορος του μηδενός: Έτσι $z \neq 0$ Άρα Π.Ο $= \mathbb{C} - \{(0,0)\}$

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 2}$$

Σημείωση Η g είναι **ρητή** συνάρτηση (δηλ. πηλίκο δύο (μιγαδικών) πολυωνύμων).
Κάθε συνάρτηση της μορφής $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ καλείται (μιγαδικό) πολυώνυμο.
Πρέπει παρον. $\neq 0$ δηλ:

$z^2 + 2 = 0$ (**ΠΡΟΣΟΧΗ!!** Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού N έχει ΑΚΡΙΒΩΣ N ρίζες στο $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} & z^2 + 2 = 0 \xRightarrow{i^2=-1} z^2 - 2i^2 = 0 \\ & \Longrightarrow \left(z - \sqrt{2}i\right)\left(z + \sqrt{2}i\right) = 0 \\ & \Longrightarrow \boxed{z = \pm\sqrt{2}i} \end{aligned}$$

Τελικά Π.Ο = $\mathbb{C} - \left\{\pm\sqrt{2}i\right\}$

$$\boxed{h(z) = \mathrm{Arg} z,\ \text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}}$$

Για $z = 0$ ΔΕΝ ορίζεται όρισμα, επειδή $0 = |0| \cdot e^{i\theta}\ \forall\theta$

Σημείωση $az^2 + bz + c = 0$

$a, b, c \in \mathbb{C}$

Λύνεται με διακρίνουσα κατά τα γνωστά.

Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα Horner για πολυώνυμα (με πραγματικούς συντελεστές) βαθμού $N \geq 3$.

$$\begin{aligned} a(z) = e^z = e^{x+iy} &= e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i\sin y) \\ &= (e^x\cos y,\ e^x\sin y)\,, \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ως διανυσματικό πεδίο προφανώς Π.Ο = $\mathbb{R}^2$

Έτσι Π.Ο = $\mathbb{C}$.

$l(z) = \mathrm{Log}$ (αντίστροφη της e^z)

$$\underbrace{\mathrm{Log}}_{\text{μιγαδικός λογάριθμος}} \overset{\text{ορισμός}}{:=} \ln|z| + i\mathrm{Arg} z$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(3) &= \ln|-3| = i\mathrm{Arg}(-3) \\ &= \ln 3 + i\pi \end{aligned}$$

$$\lambda(z) = \sin z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\left(\begin{array}{ll} e^{i\theta} & = \cos\theta + i\sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi] \\ e^{-i\theta} & = \cos\theta - i\sin\theta \\ \hline \sin\theta & = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right)$$

Π.Ο = $\mathbb{C}$

$$m(z) = \cos z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$

Όλες οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες ισχύουν στο $\mathbb{C}$ όπως στο $\mathbb{R}$.

$$h(z) = \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{2k\pi + \mathrm{Arg}z}{n}} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

(Η $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται ως το **σύνολο** όλων των λύσεων της εξίσωσης $z^n = a, \quad a \in \mathbb{C}$)

Π.Ο $= \mathbb{C} - \{0\}$

2.1 Όριο/Συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής

Ορισμός

Έστω $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ μιγ. συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι σ.συσσ. του A και έστω $a = a_0 + ib_0$. Τότε

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a_0 \\ \textbf{ΚΑΙ} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b_0 \end{cases}$$

Επίσης, αν $z_0 \in A$, τότε
f συνεχής στο σημείο z_0

$$\Updownarrow$$

οι συναρτήσεις $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ΣΥΝΕΧΕΙΣ στο σημείο $(x_0, y_0$ (ως πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

Έτσι:

$$\left.\begin{array}{l} \text{οι πολυωνυμικές} \\ \text{η εκθετική} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\sin z, \cos z) \\ \text{οι υπερβολικές } (\mathrm{ch}, \mathrm{sh}) \end{array}\right\} \text{συνεχείς στο } \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{οι ρητές} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\tan z, \cot z) \end{array}\right\} \text{συνεχείς στο } \textbf{πεδίο ορισμού τους}$$

Ορίζω το ∞ του μιγαδικού επιπέδου να είναι το σύνολο σημείων που απέχουν "άπειρη" απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται ως:

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, όπου:

$$\infty + z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
$$\infty \cdot z = \infty \quad \forall z \neq 0$$
$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \neq \infty$$

Όλες οι πράξεις του ορίου που ξέρετε ισχύουν και στους μιγαδικούς (αρκεί να μην εμφανίζονται οι γνωστές απροσδιόριστες μορφές):

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Ο κανόνας De l' Hospital ισχύει στους μιγαδικούς.

Σημείωση:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \mathbb{C} \iff \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = a \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = -$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \iff \lim_{z\to z_0} \left|f(z)\right| = 0$$

Θεώρημα

Έστω $\mathrm{Arg}z : \mathbb{C} - \{0\} \to (-\pi, \pi]$
Τότε η $\mathrm{Arg}z$ **είναι συνεχής** στο σύνολο:

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ ΚΑΙ } y = 0\}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\mathrm{Arg}z = \begin{cases} \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x, y > 0 \\ \pi - \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y > 0 \\ -\pi + \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y < 0 \\ -\arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x > 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Για $\begin{array}{ll} x = 0, & \text{τότε } \mathrm{Arg} := \frac{\pi}{2} \text{ ή } -\frac{\pi}{2} \\ y = 0, & \text{τότε } \mathrm{Arg} := 0 \text{ή} \pi \end{array}$
Έστω $z_0 = x_0 < 0$

- Έστω $z = x_0 + it \quad (t > 0)$
  Για $t \to 0^+,\ z \to z_0 = x_0$, αλλά:

$$\lim_{z\to z_0} \mathrm{Arg}z \overset{z=x_0+it}{=} \lim_{t\to 0^+} \mathrm{Arg}(x_0 + it) \overset{\text{2ο τετ.}}{=} \lim_{t\to 0^+} \left(\pi - \arctan\left|\frac{t}{x_0}\right|\right) = \pi - \arctan 0 = \pi$$

- Για $z = x_0 + it \quad (t < 0)$, τότε:

$$t \to 0^-, \quad z \to z_0, \text{ και}$$

$$\lim_{z\to z_0} \mathrm{Arg}z = \lim_{t\to 0^-} \mathrm{Arg}(x_0 + it) \overset{\text{3ο τετ.}}{=} -\pi + \arctan 0 = -\pi$$

Άρα το όριο στο $z_0 = x_0$ ΔΕΝ υπάρχει, και έτσι η $\mathrm{Arg}z$ ασυνεχής στα $z = x_0$ με $x_0 \leq 0$.
Αν $\mathrm{Arg}z \in [0, 2\pi)$ πού είναι ασυνεχής;

Μέρος II
Κεχαγιάς

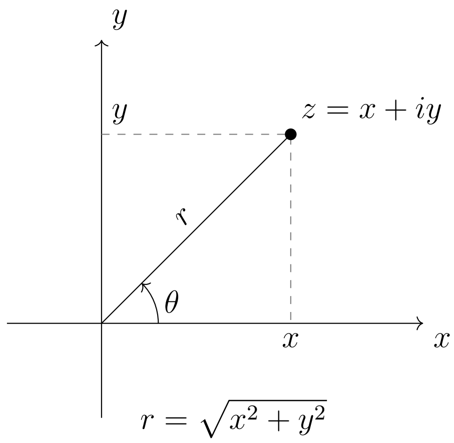
Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί αριθμοί

$$\begin{aligned} z =& x + iy \in \mathbb{C} \\ & x, y \in \mathbb{R} \qquad i^2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + iy_1 y_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy^2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \\ z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \\ \mathrm{Re}(z) &= x \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Im}(z) &= y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \tfrac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow \text{μέτρο του } z$$

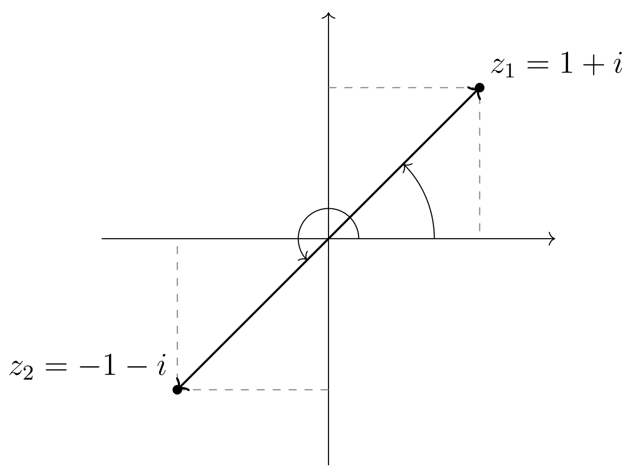
γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ. $z = x \in \mathbb{R},\ |z| = \sqrt{x^2} = |x|$)

$$\begin{aligned} z = x + iy &= r \cdot \cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \quad \text{(Euler)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \text{ διότι} \\ e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r\cos\theta + ir\sin\theta \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
&z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} \\
&r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
&\theta_1 = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}e^{i\cdot\left(-3\pi/4 = \sqrt{2}e^{i13\pi/4}\right)} \\
&r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\
&\theta_2 = \arctan\frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Γενικά: $-1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

1.1 Συναρτήσεις

$$
\mathbb{C} \to \mathbb{R}
$$

$$
\begin{aligned}
&z = x + iy \\
&\operatorname{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2} \\
&\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \qquad \theta_0 = \arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right) \\
&\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \ \operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi)
\end{aligned}
$$

Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση $\arg(z) = \big\{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\big\}$

$$
\begin{aligned}
z = x + iy &= \operatorname{mod}(z) \cdot e^{i\operatorname{Arg}(z)} \\
&= \operatorname{mod}(z) \cdot e^{i\left(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \operatorname{mod}(z_1)e^{i\operatorname{Arg}(z_1)} \\
z_2 &= \operatorname{mod}(z_2)e^{i\operatorname{Arg}(z_2)} \\
z_1z_2 &= \operatorname{mod}(z_1)\operatorname{mod}(z_2)e^{i\cdot\left(\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)\right)} \\
\operatorname{Arg}(z_1z_2) &\neq \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \text{ επειδή} \\
\operatorname{Arg}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) &= \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi
\end{aligned}
$$

Γενικά, αν $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, τότε:

$$
\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)
$$

Όμως:

$$
\begin{aligned}
\arg(z^z) &= \arg(z) + \arg(z) \\
&\neq 2\arg(z)
\end{aligned}
$$

διότι:

$$
\begin{aligned}
&A = \{a_1, a_2, \dots\} \\
&B = \{b_1, b_2, \dots\} \\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \\
&A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\} \\
&2A = \{2a : a \in A\} \\
&A = \{1, 2, 3\} \\
&B = \{4, 5\} \\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \{1+4, 1+5, 2+4, 2+5, 3+4, 3+5\} = \{5, 6, 7, 8\} \\
&A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\} \\
&2A = \{2, 4, 6\}
\end{aligned}
$$

1.2 n-οστές ρίζες

$$z = a^{1/n} \iff z^n = a$$

Δηλ. ποιο z ικανοποιεί αυτή

$$
\begin{aligned}
&a = |a|e^{i\theta} \\
&z = re^{i\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(re^{i\phi}\right)^n = |a|e^{i\theta} \\
\implies &r^n \cdot e^{in\phi} = |a|e^{i\theta} \\
\implies &r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi) = |a| \cdot (\cos\theta + i \sin\theta) \\
\implies &\begin{cases} r^n = |a| \implies r = \sqrt[n]{|a|} \\ \cos(n\phi) = \cos\theta \\ \sin(n\phi) = \sin\theta \implies \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right| \implies n\phi = \theta + 2k\pi \ \in \mathbb{Z} \implies \phi = \tfrac{\theta + 2k\pi}{n} \\
\implies &z = a^{1/n} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\theta\,+\,2k\pi)/n} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

(Όμως αρκεί να πάρω $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$)

$$a^{1/n} = \Big\{ \quad \sqrt[n]{|a|}e^{i\theta/n},\ \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\theta + 2\pi}{n}}, \dots$$

Παρ. $a^{1/2} = 1^{1/2}$

$$
\begin{aligned}
&a = 1 = 1 \cdot e^{i0} \quad |a| = 1, \theta = 0 \\
&u_0 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2}\right)} = e^{i0} = 1 \\
&u_1 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0 + 2 \cdot \pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1
\end{aligned}
$$

Παρ. $a^{1/3} = 1^{1/3} = z$

$$
\begin{aligned}
&a = 1 = e^{i0}, |a| = 1, \theta = 0 \\
&u_0 = 1 \\
&u_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\
&u_2 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Διαφορετικά

$$
\begin{aligned}
&1^{1/3} = z \iff 1 = z^3 \\
&\iff z^3 - 1 = 0 \\
&\iff (z-1)(z^2+z+1) = 0 \\
&\iff (z-1)\left(z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Παρ. $1^{1/11} = z \iff 1 = z^{11}$

$$
\begin{aligned}
&\iff z^{11} - 1 = 0 \\
&\iff (z-1)(z^{11} + z^{10} + \cdots + z^1 + 1) = 0 \\
&\{u_0, u_1, \ldots, u_{10}\}
\end{aligned}
$$

Κεφάλαιο 2 Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$e^z, \ \log(z)$

$$e^z \overset{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Ήξερα $\begin{array}{l} e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ e^{iy} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \end{array}$.
Τώρα η νέα συνάρτηση $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

Παρ.

$$
\begin{aligned}
e^{1+i} &= ee^i = e \cdot (\cos 1 + i \sin 1) \\
&= e \cdot \cos 1 + i \cdot e \cdot \sin 1
\end{aligned}
$$

$$\operatorname{Re}\left(e^{1+i}\right) = e \cos 1$$

$$\operatorname{Im}\left(e^{1+i}\right) = e \sin 1$$

$$
\begin{aligned}
\log(e) &= 1 \\
\log(-1) &= \log\left(e^{i(\pi+2k\pi)}\right) = i(\pi + 2k\pi)
\end{aligned}
$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$
\begin{aligned}
z &= |z|e^{i\theta} \\
\log(z) &= \ln\left(|z|\right) + i\theta
\end{aligned}
$$

Ορίζω

Πλειότιμη $\log(z) = \ln\left(|z|\right) + i\arg(z)$

Μονότιμη $\mathrm{Log}(z) = \ln\left(|z|\right) + i\mathrm{Arg}(z)$ είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$\begin{aligned}\log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i\left(\pi/4+2k\pi\right)}\right)\\ &= \log\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\end{aligned}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right\}$$

2.1

Από σήμερα: $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Πριν 7 ημέρες: $\cancel{e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i\sin y}$

Σήμερα: $\exp(z) \overset{\text{ορ}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Θεώρημα

Η $\exp(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z \in \mathbb{C}$ και ικανοποιεί:

(1) $\forall z : \left(\exp(z)\right)' = \exp(z)$

(2) $\forall z_1, z_2 : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

(3) $\forall \theta \in \mathbb{R} : \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

Απόδ.

(1)

$$\begin{aligned}\left(\exp(z)\right)' &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)'\\ &= 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \exp(z)\end{aligned}$$

(2) $g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} = \exp(z)\exp(\zeta - z) + \exp(z)\exp(\zeta - z)(-1) = 0$$
$$\implies g(z) = c \implies c = g(0) = \exp(\zeta)$$
$$\implies \exp(\zeta) = g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)$$

Θέτω: $z = z_1,\ \zeta = z_1 + z_2$

Οπότε:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

(3)

$$\begin{aligned}\exp(i\theta) &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta\end{aligned}$$

$\exp(z) \quad e^z$

$$\begin{aligned}\exp(1+i) &= 1 + (1+i) + \frac{(1+i)^2}{2!} + \dots \\ e^{1+i} &= 1 + (i+1) + \dots\end{aligned}$$

ή ο αρ. $e = 2.718$ υψωμένος στη μιγαδική δύναμη $1+i$

Θεώρημα

Η $\exp(z)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$

Απόδ.

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)\exp(2\pi i) = \exp(z)$$

Η εικόνα του συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}$ υπό την συνάρτηση $f(z)$ Δηλ.

$$f(A) = \big\{w = f(z),\ z \in A\big\}$$

Παρ. Να δειχθεί ότι $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Διότι: έστω $w = re^{i\phi} \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Θα βρω $z = \rho e^{i\theta} = x + iy$ τ.ώ: $\exp(z) = w$.

$$\begin{aligned}&\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy) \\ &w = re^{i\phi} \\ &\exp(x) = \big|\exp(z)\big| = |w| = r \implies \boxed{x = \ln(r)} \\ &\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}(w) \\ &\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}\big(\exp(x)\exp(iy)\big) = y \\ &\operatorname{Arg}(w) = \operatorname{Arg}(re^{i\phi}) = \phi \\ &\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}(w) \implies \boxed{y = \phi}\end{aligned}$$

Τελικά $z = x + iy = \ln(r) + i\phi$ ικανοποιεί $\exp(z) = re^{i\phi} = w$. Άρα $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Στην πραγματικότητα, δεν χρειάζομαι όλο το $\mathbb{C}$ διότι:

$$\exp(U) = \mathbb{C} - \{0\}\,, \quad \text{όπου } U = \big\{x + iy : x \in \mathbb{R}.y \in (-\pi, \pi]\big\}$$