Σημειώσεις Στατιστική & Πιθανότητες

Καναβούρας Κωνσταντίνος
http://users.auth.gr/konkanant

2016, Εαρινό εξάμηνο

- Γ. Ζιούτας Πιθανότητες
- Δ. Κουγιουμτζής Στατιστική
- Βιβλίο: Πιθανότητες και Στατιστική για Μηχανικούς, Γ. Ζιούτας

- Εξετάσεις: 8 μονάδες (τουλάχιστον 4/8 για να περάσει)
- Test: 2 μονάδες

Μέρος I
Πιθανότητες

Κεφάλαιο 1

Είδη φαινομένων

1. **Αιτιοκρατικά** (καθοριστικά): Ξέρω το αποτέλεσμα του φαινομένου όταν γνωρίζω τα αίτια/τις προϋποθέσεις/το περιβάλλον του.
2. **Στοχαστικά**: Δεν μπορώ να προβλέψω το αποτέλεσμα, ακόμα και αν γνωρίζω τα παραπάνω.

Μπορεί να υπάρχει και αβεβαιότητα λόγω μη ιδανικών μοντέλων πρόβλεψης. Ο μηχανικός πρέπει να γνωρίζει και να μπορεί να μετρά αυτήν την αβεβαιότητα.

1.1 Πείραμα τύχης

Στοχαστικό φαινόμενο που μπορούμε να δοκιμάσουμε όσες φορές θέλουμε, ακριβώς με τις ίδιες συνθήκες, και γνωρίζουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα, αν και δε γνωρίζουμε ακριβώς το αποτέλεσμα κάθε πειράματος.

- E: Πείραμα τύχης (Experiment)
- S: $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ Δειγματοχώρος (Sample space)
- s_i: Δειγματοσημεία

  π.χ.

  E_1 $\quad S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ ρίψη ζαριού
  E_2 $\quad S_2 = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, K\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\} \rightarrow$ ρίψη κέρματος 3 φορές
  E_3 $\quad S_3 = \{0, 1, \ldots, N\} \rightarrow$ ελαττωματικά προϊόντα
  E_4 $\quad S_4 = \{0, 1, 2, 3 \ldots\} \rightarrow$ αριθμός ατόμων που εκπέμπει ραδιενεργό υλικό
  E_5 $\quad S_5 = \left\{x | x \geq 0, x \in \mathbb{R}\right\} \rightarrow$ χρόνος γενονότος

Υποσύνολα του δειγματικού χώρου, π.χ. $A = \{4, 5, 6\} \subseteq S$ ονομάζονται γεγονότα. Συνήθως συμβολίζονται A, B, W, R. Λέμε ότι ένα γεγονός πραγματοποιείται.

Το S είναι σίγουρο γεγονός.

το $\{\} \subseteq S$ ονομάζεται αδύνατο γεγονός και συμβολίζεται $\emptyset$.

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

Το δυναμοσύνολο S^* περιέχει όλα τα δυνατά υποσύνολα του S:

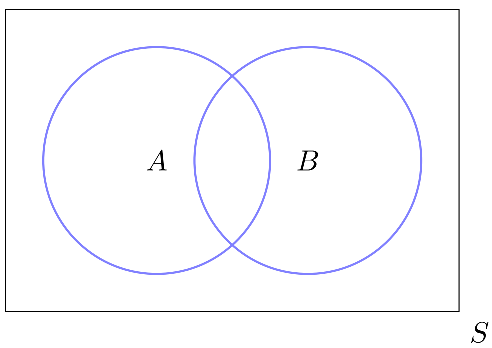
$$S^* = \{\{\}, \{s_1\}, \{s_2\}, \dots, \{s_n\}, \{s_1, s_2\}, \{s_1, s_3\}, \dots, \{s_1, s_2, s_3\} \dots\}$$

Είναι:

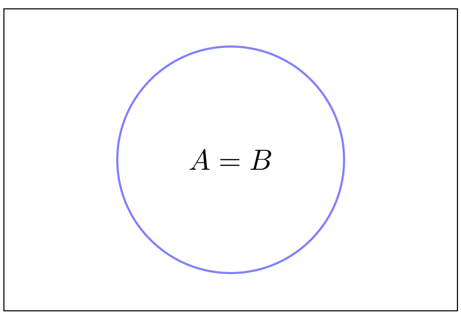
$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n \\
(1+1)^n &= \binom{n}{0} \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 1 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot 1 \\
2^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το S^* έχει 2^n στοιχεία αν το S έχει n.

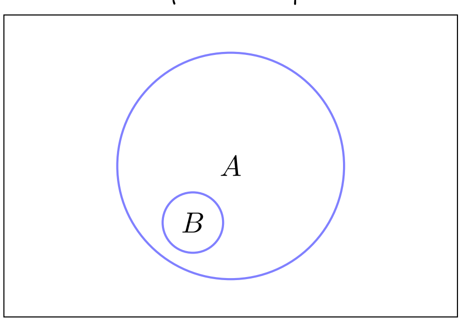
Διαγράμματα Venn



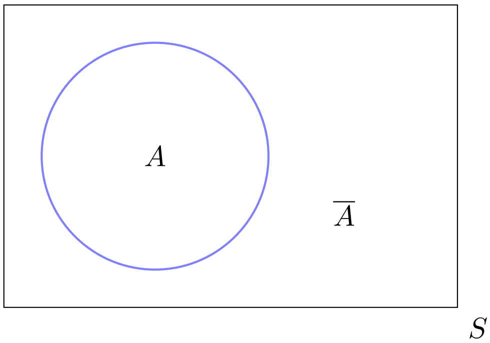
Ισότητα



Περιεκτικότητα

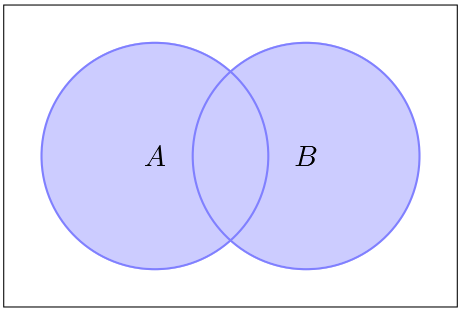


Συμπλήρωμα

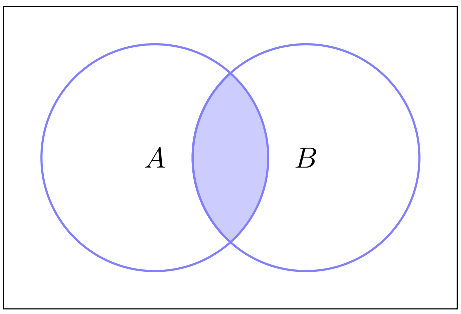


1.1.1 Πράξεις

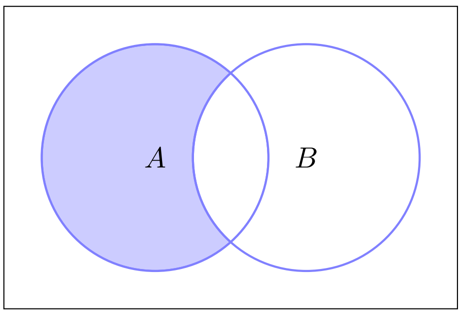
Ένωση $A \cup B$



Τομή $A \cap B$



Διαφορά $A - B$



Παρατηρώ ότι:

$$(x - y) + y = x$$
$$(A - B) \cup B = A \cup B$$

1.1.2 Ιδιότητες

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B)\,\Gamma$
- $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

1.1.3

$$\begin{aligned} S &= \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\} \\ A &= \{KK, K\Gamma, \Gamma K\} \leftarrow \text{ τουλάχιστον μία κεφαλή} \\ B &= \{KK, \Gamma K\} \leftarrow \text{ κεφαλή στη 2η ρίψη} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{KK, K\Gamma, \Gamma K\} \\ A \cap B &= \{KK, \Gamma K\} \\ A - B &= \{K\Gamma\} \end{aligned}$$

1.1.4

$$S, A, B, \Gamma$$

- Τουλάχιστον ένα από A, B, Γ: $A \cup B \cup \Gamma$
- Μόνο ένα από τα A, B, Γ: $\big(A - (B \cup \Gamma)\big) \cup \big(B - (A \cup \Gamma)\big) \cup \big(\Gamma - (A \cup B)\big) = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cap \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cap \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$
- Ακριβώς δύο από τα $A, B\Gamma$: $(A \cap B - \Gamma) \cap (A \cap \Gamma - B) \cap (B \cap \Gamma - A)$
- Το πολύ δύο από τα A, B, Γ: $\overline{A \cap B \cap \Gamma} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

π.χ.

$$A, B, \Gamma$$

Σε ένα παιχνίδι όπου κερδίζει ο παίκτης που πρώτος φέρνει κεφαλή, ποιο είναι το γεγονός να κερδίσει ο A, αν A_i, B_i, Γ_i τα ενδεχόμενα στην i-οστή ρίψη να κερδίσει ένας παίκτης.

$$WA = A_1 \cup \left(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{\Gamma_3} \cap A_4\right) \cup \left(\overline{A_4} \cap \overline{B_5} \cap \overline{\Gamma_6} \cap A_7\right) \cup \cdots$$

H/W: Να βρεθούν τα $WB, W\Gamma$.

$$\begin{aligned} WB &= \bar{A}_1 \cap B_2 \cup \left(\overline{B_2} \cap \overline{C_3} \cap \overline{A_4} \cap B_5\right) \cup \left(\overline{B_5} \cap \overline{C_6} \cap \overline{A_7} \cap B_8\right) \cup \cdots \\ WC &= \bar{A}_1 \cap \overline{B_2} \cap C_3 \cup \left(\overline{C_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{B_5} \cap C_6\right) \cup \left(\overline{C_6} \cap \overline{A_7} \cap \overline{B_8} \cap C_9\right) \cup \cdots \end{aligned}$$

1.2 Πιθανότητα

S, A Πιθανότητα είναι να η βεβαιότητα να πραγματοποιηθεί ένα γεγονός.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

π.χ. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρει ζυγό αριθμό το ζάρι.

- $S = \{1,2,3,4,5,6\}\,, \quad A = \{2,4,6\}$. Άρα, αν χρησιμοποιήσουμε την κλασική μέθοδο για την εύρεση της πιθανότητας:

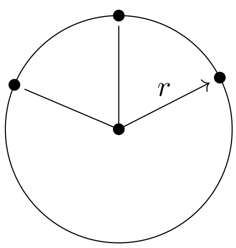
  $$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{3}{6} = 0,50$$

  Η κλασική μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν είναι ισοπίθανα τα αποτελέσματα.

  Σχετική Συχνότητα Μπορώ να ρίξω πολλές (N) φορές το ζάρι:

  $$f(A) = \frac{N(A)}{N}$$

  $$P_A = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$



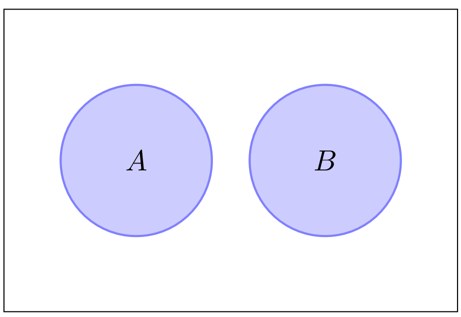
Ποια είναι η $P(AB \leq r)$·

$$S = \{1,2,3,\ldots,360\}$$

$$AB = \{1,2,3,\ldots,120\} \rightarrow \text{ προκύπτει από γεωμετρία}$$

1.3 Αξιώματα Kolmogorov

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$



3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$S = \{\text{ΚΑ}, \text{ΣΠ}, \text{ΜΠ}, \text{ΚΟ}\}$, $A = \{\text{ΚΑ}, \text{ΣΠ}\}$. $P(A) =;$

$P(A) = \frac{2}{4}$ (από κλασικό τρόπο), ή $P(\text{ΚΑ} \cup \text{ΣΠ}) = P(\text{ΚΑ}) + P(\text{ΣΠ}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, από το 3ο αξίωμα Kolmogorov.

1.4

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   Απόδειξη. $P(\overline{A} \cup A) = P(S) \implies P(A) + P(\overline{A}) = 1$ □

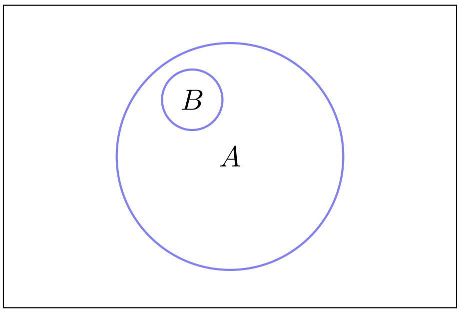
2. $P(\emptyset) = 0$

   Απόδειξη.

$$\begin{aligned} P(\emptyset) &= 1 - P(\overline{\emptyset}) \\ &= 1 - P(S) \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

□

3. $P(A) \leq P(B)$

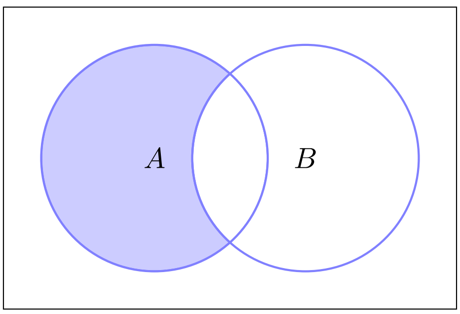


   Απόδειξη.

$$\begin{aligned} B = (B - A) \cup A \implies & \\ P(B) &= P\big((B - A) \cup A\big) \\ &= P(B - A) + P(A) \geq 0 \end{aligned}$$

□

4. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



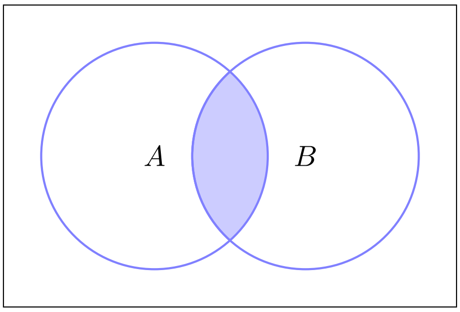
Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
A = (A-B)\cup(A\cap B) \implies & \\
P(A) &= P\left[(A-B)\cup(A\cap B)\right] \\
&= P(A-B) + P(A\cap B)
\end{aligned}
$$

□

5. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

Τομή $A\cap B$



Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
A\cup B = (A-B)\cup B \implies & \\
P(A\cup B) &= P\left[(A-B)\cup B\right] \\
&= P(A-B) + P(B) \\
&= P(A) - P(A\cap B) + P(B)
\end{aligned}
$$

□

Μπορεί η παραπάνω σχέση να αποδειχθεί και για περισσότερα από δύο γεγονότα:

$$P(A\cap B\cap \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A\cap B) - P(A\cap\Gamma) - P(B\cap\Gamma) + P(A\cap B\cap\Gamma)$$

$P(\Delta_1) = 0.5, \quad P(\Delta_1) = 0.3, P(\Delta_1\cap\Delta_3) = 0.1.$
Τότε $P(\Delta) = P(\Delta_1\cup\Delta_2) = P(\Delta_1) + P(\Delta_2) - P(\Delta_1\cap\Delta_2) = 0.7.$

$$S = \left\{\Delta_1\cap\Delta_2, \overline{\Delta_1}\cap\Delta_2, \Delta_1\cap\overline{\Delta_2}, \overline{\Delta_1}\cap\overline{\Delta_2}\right\}$$

1.4.1

Για τρία σύνολα A, B, Γ: Η πιθανότητα να συμβεί μόνο ένα από αυτά είναι:

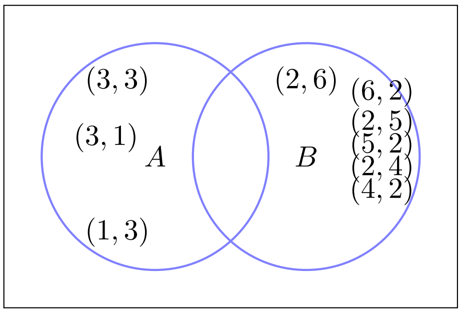
$$
\begin{aligned}
&P\left[\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cap\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cap\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\right]\\
&= P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})+\dots\\
&= P\left[A-(B\cap\Gamma)\right]-P(A)-P\left[A\cap(B\cap\Gamma)\right]+\dots\\
&= P(A)-P\left[(A\cap B)\cup(A\cup\Gamma\right]+\dots\\
&= P(A)-\big(P(A\cap B)+P(A\cap\Gamma)-P(A\cap B\cap\Gamma)\big)+\dots\\
&= P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap\Gamma)+P(A\cap B\cap\Gamma)+\dots
\end{aligned}
$$

1.5 Δεσμευμένη πιθανότητα

$P(A\cap B)=;$

$P(A|B)$: η πιθανότητα να συμβεί το A με την προϋπόθεση ότι B, ή η πιθανότητα να συμβεί το A, αν γνωρίζουμε ότι συμβαίνει το B, σε μια εκτέλεση του πειράματος.

π.χ.



$P(A)=\frac{5}{36},\ P(B)=\frac{11}{36}$
Παρατηρώ ότι $P(A)=\frac{2}{11}=\frac{\frac{N(A\cap B)}{n(s)}}{\frac{N(B)}{N(S)}}$.

Άρα, γενικά:

$$P\left(A|B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Επομένως:

$$
\begin{aligned}
P(A\cap B)&=P(B)P(A|B)\\
&=P(A)P(B|A)
\end{aligned}
$$

- Αν $A\cap B=\emptyset$, τότε $P(A|B)=\emptyset$.
- Αν $A\subseteq B$, τότε $P(B|A)=1$.

1.5.1 Πολλαπλαστιαστικός Κανόνας

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) &= \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots A_n) \end{aligned}$$

Μπορώ με τη χρήση του πολλαπλασιαστικού κανόνα να εντοπίσω την πιθανότητα 6 ρίψεις ζαριού να έχουν διαφορετικά νούμερα.

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{στην 1η ρίψη κάποιο νούμερο}\} \\ A_{i\geq 2} &= \{\text{στην } i \text{ ρίψη νούμερο διάφορο από } A_{i-1}, A_{i-2}, \ldots, A_1 \text{ ρίψη}\} \end{aligned}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots$$