http://users.auth.gr/natreas

Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5
Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6

Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marjden (πιο μαθηματικό)

Μέρος I

Ατρέας

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Έστω $\mathbb{C} = \left\{ z = \overbrace{(x, y)}^{\text{γεωμετρική παράσταση μιγαδικού}};\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $x_2 = (x_2, y_2)$, τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο $\lambda \in \mathbb{R}$ με μιγαδικό z

Αν $z = (x, y)$, τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

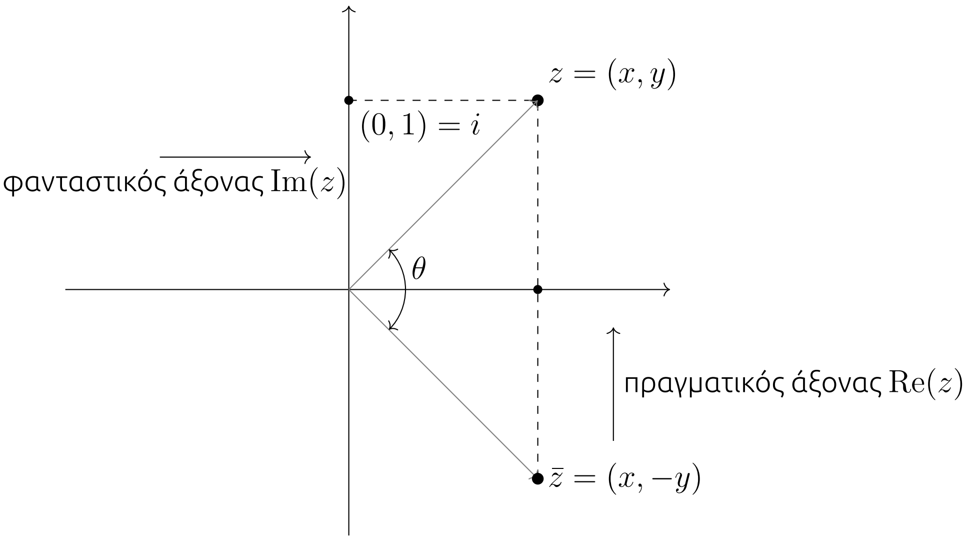
Αν $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$, τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{C}$ είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$

- $(x,0), (y,0) \in A \implies (x,0) + (y,0) = (x+y, 0) \in A$
- $(x,0)(y,0) = (xy, 0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$1 = (1,0)$$
$$x = (x,0)$$

Ορίζω:

$$i = (0,1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$$
$$\boxed{i^2 = -1}$$

Έτσι:

$$z = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$
$$\overset{x=(x,0)}{\underset{i=(0,1)}{=}} x \cdot 1 + yi$$
$$\implies \boxed{z = x + iy}$$

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z = (x,y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\overset{\text{πολικές}}{\underset{\text{του }(x,y)}{=}} \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta =$$

$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1}$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$z = |z| \underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}$$
$$= |z| \cdot e^{i\theta}$$

όπου στο εξής:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

τύπος του Euler

Τελικά:

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}}$$ (πολική μορφή μιγαδικών)

Σημείωση: $\cos\theta + i\sin\theta$

$$\overset{\text{σειρές}}{\underset{\text{McLaurin}}{=}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$\overset{i^2=-1}{=} \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right)$$

$$= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα $\mathrm{Arg}z$ (μη μηδενικού) μιγαδικού z να είναι η γωνία θ που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του $\mathbb{C}$ με την ημιευθεία OA, όπου A το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του $z = x + iy$.

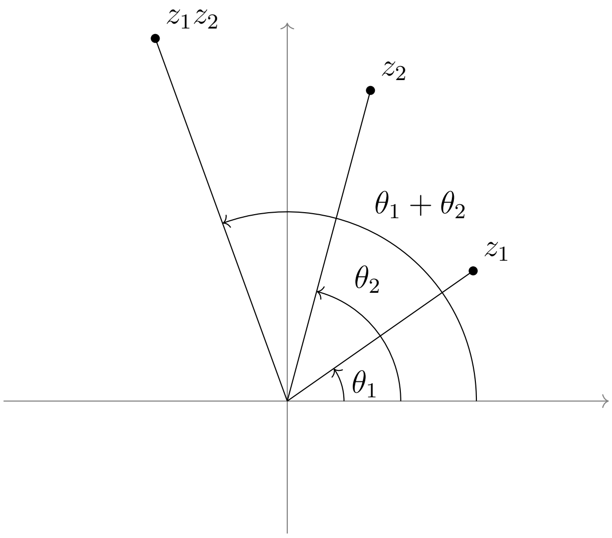
Έτσι:

$z = |z|e^{i\mathrm{Arg}\, z}$ πολική μορφή του z

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\mathrm{Arg}\, z_1}|z_2|e^{i\mathrm{Arg}\, z_2}$$

$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2)}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$$
$$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$



Ιδιότητα: $z\bar{z} = |z|^2$

Κεφάλαιο 2 Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

π.χ.

$$f(z) = z^2 \implies f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\mathrm{Re}(f)} + i\underbrace{(2xy)}_{\mathrm{Im}(f)}$$

$$\underset{\text{μορφή}}{\overset{\text{γεωμετρική}}{=}} (x^2 - y^2,\ 2xy)$$

Τελικά: $\boxed{f(x,y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)}$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

π.χ.

$$f(z) = \frac{1}{|z|\bar{z}} \overset{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z}$$

$$\overset{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\overset{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \overset{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

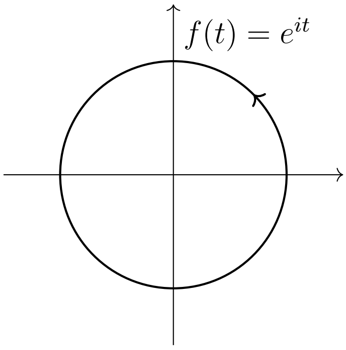
$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιγ. μεταβλ.}} \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} \begin{array}{l}\text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big)\end{array}$$

όπου u, v πραγματ. συναρτ. 2 μεταβλητών

Υπάρχουν $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής
π.χ

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{it},\ t \in (0,\pi] \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

$t \to (\cos t, \sin t)$ καμπύλη $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$



Η γραφ. παράσταση της $f(t) = e^{it},\ t \in (-\pi,\pi)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0,0)$ με αντιωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1,t) = (1,0) + t(0,1)$$

Το πεδίο ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδ. μεταβλητών υπολογίζεται ως συνήθως (με τις πραγματικές συναρτήσεις) ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ Διαφοροποιήσεις

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Πρέπει ο παρον. να είναι διάφορος του μηδενός: Έτσι $z \neq 0$ Άρα Π.Ο $= \mathbb{C} - \big\{(0,0)\big\}$

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 2}$$

Σημείωση Η g είναι **ρητή** συνάρτηση (δηλ. πηλίκο δύο (μιγαδικών) πολυωνύμων).
Κάθε συνάρτηση της μορφής $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ καλείται (μιγαδικό) πολυώνυμο.
Πρέπει παρον. $\neq 0$ δηλ:

$z^2 + 2 = 0$ (**ΠΡΟΣΟΧΗ!!** Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού N έχει ΑΚΡΙΒΩΣ N ρίζες στο $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} &z^2 + 2 = 0 \overset{i^2=-1}{\Longrightarrow} z^2 - 2i^2 = 0 \\ &\Longrightarrow \left(z - \sqrt{2}i\right)\left(z + \sqrt{2}i\right) = 0 \\ &\Longrightarrow \boxed{z = \pm\sqrt{2}i} \end{aligned}$$

Τελικά Π.Ο = $\mathbb{C} - \left\{\pm\sqrt{2}i\right\}$

$$\boxed{h(z) = \operatorname{Arg} z,\ \text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}}$$

Για $z = 0$ ΔΕΝ ορίζεται όρισμα, επειδή $0 = |0| \cdot e^{i\theta}\ \forall\theta$

Σημείωση $az^2 + bz + c = 0$

$a, b, c \in \mathbb{C}$

Λύνεται με διακρίνουσα κατά τα γνωστά.

Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα Horner για πολυώνυμα (με πραγματικούς συντελεστές) βαθμού $N \geq 3$.

$$\begin{aligned} a(z) &= e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= \left(e^x \cos y,\ e^x \sin y\right), \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

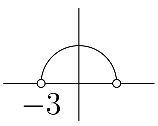
Ως διανυσματικό πεδίο προφανώς Π.Ο = $\mathbb{R}^2$

Έτσι Π.Ο = $\mathbb{C}$.

$l(z) = \operatorname{Log}$ (αντίστροφη της e^z)

$$\underbrace{\operatorname{Log}}_{\text{μιγαδικός λογάριθμος}} \overset{\text{ορισμός}}{:=} \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}$



$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(3) &= \ln|-3| = i\operatorname{Arg}(-3) \\ &= \ln 3 + i\pi \end{aligned}$$

$$\lambda(z) = \sin z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\left(\begin{array}{lll} e^{i\theta} & = \cos\theta + i\sin\theta & \theta \in (-\pi, \pi] \\ e^{-i\theta} & = \cos\theta - i\sin\theta & \\ \hline \sin\theta & = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} & \end{array}\right)$$

Π.Ο = $\mathbb{C}$

$$m(z) = \cos z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$

Όλες οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες ισχύουν στο $\mathbb{C}$ όπως στο $\mathbb{R}$.

$$h(z)=\sqrt[n]{z}:=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{2k\pi+\operatorname{Arg}z}{n}}\qquad (k=0,1,\dots,n-1)$$

(Η $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται ως το **σύνολο** όλων των λύσεων της εξίσωσης $z^n=a,\quad a\in\mathbb{C}$)

Π.Ο $=\mathbb{C}-\{0\}$

2.1 Όριο/Συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής

Ορισμός

Έστω $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ μιγ. συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο $A\subset\mathbb{C},\ z_0=x_0+iy_0$ είναι σ.συσσ. του A και έστω $a=a_0+ib_0$. Τότε

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=a\in\mathbb{C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=a_0\\ \textbf{KAI}\\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=b_0\end{cases}$$

Επίσης, αν $z_0\in A$, τότε
f συνεχής στο σημείο z_0

$$\Updownarrow$$

οι συναρτήσεις $u,v:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι ΣΥΝΕΧΕΙΣ στο σημείο $(x_0,y_0$ (ως πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

Έτσι:

$$\left.\begin{array}{l}\text{οι πολυωνυμικές}\\ \text{η εκθετική}\\ \text{οι τριγωνομετρικές }(\sin z,\cos z)\\ \text{οι υπερβολικές }(\mathrm{ch},\mathrm{sh})\end{array}\right\}\text{συνεχείς στο }\mathbb{C}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{οι ρητές}\\ \text{οι τριγωνομετρικές }(\tan z,\cot z)\end{array}\right\}\text{συνεχείς στο }\textbf{πεδίο ορισμού τους}$$

Ορίζω το ∞ του μιγαδικού επιπέδου να είναι το σύνολο σημείων που απέχουν "άπειρη" απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται ως:

$\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, όπου:

$$\infty+z=\infty\quad\forall z\in\mathbb{C}$$
$$\infty\cdot z=\infty\quad\forall z\neq 0$$
$$\frac{z}{\infty}=0\quad\forall z\neq\infty$$

Όλες οι πράξεις του ορίου που ξέρετε ισχύουν και στους μιγαδικούς (αρκεί να μην εμφανίζονται οι γνωστές απροσδιόριστες μορφές):

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Ο κανόνας De l' Hospital ισχύει στους μιγαδικούς.

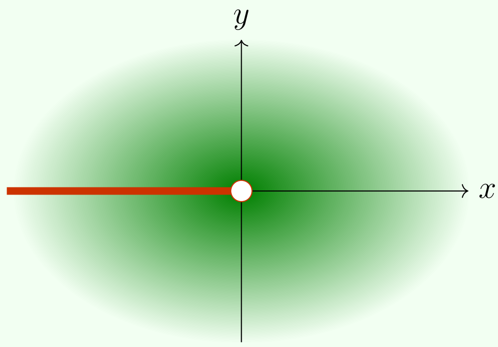
Σημείωση:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = a \in \mathbb{C} \iff \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = a \in \mathbb{C}$$
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = 0 \iff \lim_{z \to z_0} \left|f(z)\right| = 0$$

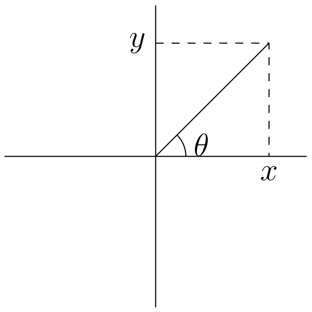
Θ.

Έστω $\operatorname{Arg} z : \mathbb{C} - \{0\} \to (-\pi, \pi]$
Τότε η $\operatorname{Arg} z$ **είναι συνεχής** στο σύνολο:

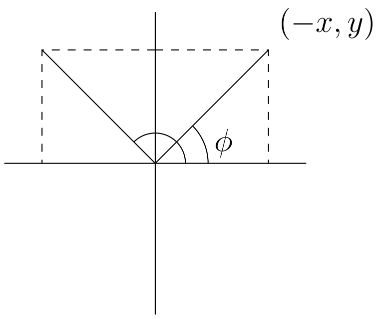
$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ ΚΑΙ } y = 0\}$$



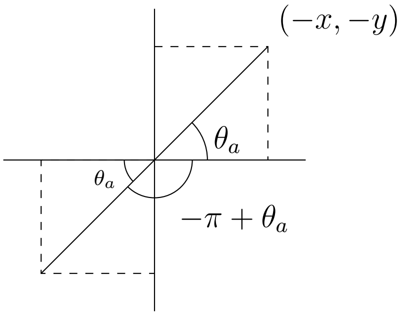
Έστω $z = x + iy$
(α) $x > 0,\ y > 0$



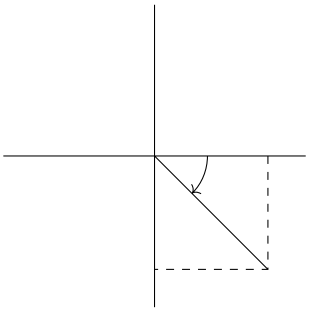
(β) $x < 0,\ y > 0$



(γ) $x < 0,\ y < 0$



(δ) $x > 0,\ y < 0$



$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x,y>0 \\ \pi - \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x<0,\ y>0 \\ -\pi + \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x<0,\ y<0 \\ -\arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x>0,\ y<0 \end{cases}$$

Για $\begin{array}{l} x=0, \quad \text{τότε } \operatorname{Arg} := \frac{\pi}{2} \text{ ή } -\frac{\pi}{2} \\ y=0, \quad \text{τότε } \operatorname{Arg} := 0 \text{ ή } \pi \end{array}$

Έστω $z_0 = x_0 < 0$

- Έστω $z = x_0 + it \quad (t>0)$

  Για $t \to 0^+,\ z \to z_0 = x_0$, αλλά:

$$\lim_{z\to z_0} \operatorname{Arg} z \overset{z=x_0+it}{=} \lim_{t\to 0^+} \operatorname{Arg}(x_0+it) \overset{\text{2ο τετ.}}{=} \lim_{t\to 0^+} \left(\pi - \arctan\left|\frac{t}{x_0}\right|\right) = \pi - \arctan 0 = \pi$$

- Για $z = x_0 + it \quad (t<0)$, τότε:

$$t \to 0^-, \quad z \to z_0, \text{ και}$$

$$\lim_{z\to z_0} \operatorname{Arg} z = \lim_{t\to 0^-} \operatorname{Arg}(x_0+it) \overset{\text{3ο τετ.}}{=} -\pi + \arctan 0 = -\pi$$

Άρα το όριο στο $z_0 = x_0$ ΔΕΝ υπάρχει, και έτσι η $\operatorname{Arg} z$ ασυνεχής στα $z = x_0$ με $x_0 \le 0$.

Αν $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$ πού είναι ασυνεχής;

2.2 Μιγαδική παράγωγος

Την εβδομάδα της 28ης θα γίνουν κανονικά τα μαθήματα του Ατρέα.

Ορισμός

Έστω $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο σημείο z_0, αν υπάρχει το ΟΡΙΟ:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a \in \mathbb{C}$$

(ή ισοδύναμα $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = a \in \mathbb{C}$)
Στο εξής το όριο αυτό συμβολίζουμε με $f'(z_0)$ ή $\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z}$

Ορισμός

Αν $f : A \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$, θα λέμε στο εξής ότι η f είναι ΟΛΟΜΟΡΦΗ (ή ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - holomorphic/analytic) **στο σημείο $\mathbf{z_0}$**, εάν η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **ΣΕ ΚΑΘΕ ΣΗΜΕΙΟ** του ανοικτού δίσκου 

$$D_\epsilon(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon \right\}$$

για κάποιο $\epsilon > 0$

Αν f ολόμορφη σε ΚΑΘΕ σημείο του A λέμε ότι η f ολόμορφη στο A.

Ορισμός

Αν A μη ανοικτό, λέμε ότι η f ολόμορφη στο A, αν υπάρχει $B \supset A$, B ανοικτό ώστε η f στο B.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες της παραγώγου που γνωρίζετε ισχύουν και για τη μιγαδική παράγωγο

π.χ. Έστω f, g **μιγαδικά** παραγωγίσιμες σε σημείο z_0. Τότε:

- f παραγ. στο $z_0 \implies f$ συνεχής στο z_0
- $\left(af \pm by\right)'(z_0) = af'(z_0) + bg'(z_0)\ \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $\left(fg\right)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \qquad \left(g(z_0) \neq 0\right)$
- Ο κανόνας αλυσίδας ισχύει στις μιγαδικές συναρτήσεις:

  $$\left(h \circ g\right)'(z_0) = h'\left(g(z_0)\right) g'(z_0)$$

  υπό την προϋπόθεση ότι η σύνθεση καλά ορισμένη

Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης Έστω f ολόμορφη σε σημείο z_0 με $f'(z_0) \neq 0$.
Αν $w_0 = f(z_0)$, τότε υπάρχουν $\epsilon, \epsilon' > 0$ ώστε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : \mathrm{D}_\epsilon(w_0) \to \mathrm{D}_{\epsilon'}(z_0)$ καλά ορισμένη, ολόμορφη στο w_0 και

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Θ.: Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = f(x+iy) = u(x+y)+iv(x,y)$.
Θεωρώ $z = x+iy,\ z_0 = x_0 + iy_0$ και A ανοικτό.
Τότε:
f μιγαδικά παραγωγίσιμη στο z_0

$$\Updownarrow$$

(α) Η $\mathbf{F}(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big)$ είναι **διαφορίσιμο** διανυσμ. πεδίο στο σημείο (x_0, y_0)

$$\boxed{\text{ΚΑΙ}}$$

(β)

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases} \xleftarrow{\text{εξισώσεις C-R}}$$

Πόρισμα (ΠΡΑΚΤΙΚΟΤΑΤΟ) Αν $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι έτσι ώστε:

(α) u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0) και "κοντά" στο (x_0, y_0)

(β) $\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases} \xleftarrow{\text{C-R}}$

Τότε ($\Longrightarrow$) η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$

Παρ.

$$\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy), \text{ άρα} \end{aligned}$$

$$f = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right.$$

Παρατηρήσεις

(α) Έστω f μιγαδικά παραγ. συνάρτηση σε σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

- Έστω $z = x + iy_0 \quad (x \in \mathbb{R})$ είναι τυχαίο σημείο της "οριζόντιας" ευθείας που διέρχεται από το z_0
- Για $x \to x_0$, τότε $z = x + iy_0 \to x_0 + iy_0 = z_0$ (δηλ. $z \to z_0$ όταν $x \to x_0$ πάνω στην οριζόντια ευθεία)

Τότε για $z = x + iy_0$ έχω:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - \big(u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\big)}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
&= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\
&\implies \boxed{f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)} := \tfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}
\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, αν εργαστούμε κατά μήκος της "κάθετης" ευθείας που διέρχεται από το z_0, έχουμε:

$$\boxed{f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)} := -i\tfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

(β) Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} \\
\implies &\boxed{\mathrm{d}f(z_0) = f'(z_0)\,\mathrm{d}z}
\end{aligned}$$

$\mathrm{d}z :=$ στοιχειώδης όγκος στο επίπεδο xy

$\mathrm{d}f(z_0) :=$ στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο uv στο οποίο μετασχηματίζεται το $\mathrm{d}z$ μέσω της απεικόνισης f

$$\mathrm{d}f(z_0) = \left|f'(z_0)\right| e^{i \operatorname{Arg} f'(z_0)}\,\mathrm{d}z \quad \big(f'(z_0) \neq 0\big)$$

Μέρος II
Κεχαγιάς

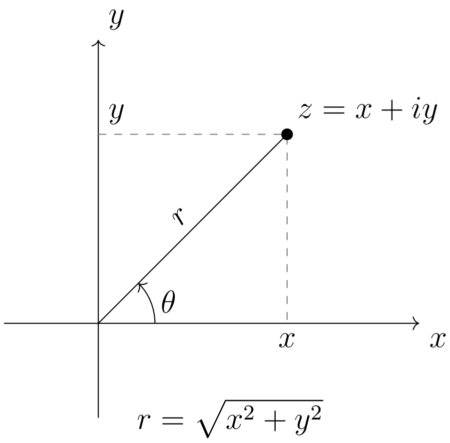
Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί αριθμοί

$$\begin{aligned} z =& x + iy \in \mathbb{C} \\ & x, y \in \mathbb{R} \qquad i^2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1 + iy_1 \\
z_2 &= x_2 + iy_2 \\
z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\
&= x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy^2)(x_2 - iy_2)} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2} \\
z &= x + iy \\
\bar{z} &= x - iy \\
\mathrm{Re}(z) &= x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{Im}(z) &= y \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \tfrac{y}{x}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow$ μέτρο του z

γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ. $z = x \in \mathbb{R},\ |z| = \sqrt{x^2} = |x|$)

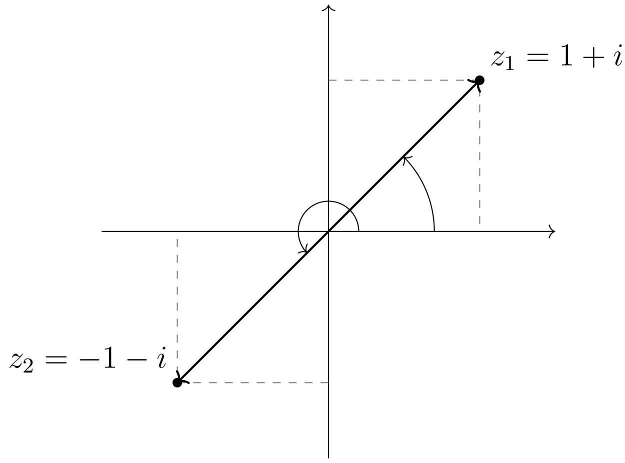
$$\begin{aligned} z = x + iy &= r \cdot \cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \quad \text{(Euler)} \end{aligned}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ διότι

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ &= r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r\cos\theta + ir\sin\theta \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
&z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} \\
&r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
&\theta_1 = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}e^{i\cdot\left(-3\pi/4 = \sqrt{2}e^{i13\pi/4}\right)} \\
&r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\
&\theta_2 = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Γενικά: $-1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

1.1 Συναρτήσεις

$$
\mathbb{C} \to \mathbb{R}
$$

$$
\begin{aligned}
&z = x + iy \\
&\operatorname{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2} \\
&\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^\circ \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \qquad \theta_0 = \arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right) \\
&\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \ \operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi)
\end{aligned}
$$

Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση $\arg(z) = \big\{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\big\}$

$$
\begin{aligned}
z = x + iy &= \operatorname{mod}(z) \cdot e^{i\operatorname{Arg}(z)} \\
&= \operatorname{mod}(z) \cdot e^{i\left(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \operatorname{mod}(z_1)e^{i\operatorname{Arg}(z_1)} \\
z_2 &= \operatorname{mod}(z_2)e^{i\operatorname{Arg}(z_2)} \\
z_1 z_2 &= \operatorname{mod}(z_1)\operatorname{mod}(z_2)e^{i\cdot\left(\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)\right)} \\
\operatorname{Arg}(z_1 z_2) &\neq \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \text{ επειδή} \\
\operatorname{Arg}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) &= \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi
\end{aligned}
$$

Γενικά, αν $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, τότε:

$$
\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)
$$

Όμως:

$$
\begin{aligned}
\arg(z^z) &= \arg(z) + \arg(z) \\
&\neq 2\arg(z)
\end{aligned}
$$

διότι:

$$
\begin{aligned}
&A = \{a_1, a_2, \dots\} \\
&B = \{b_1, b_2, \dots\} \\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \\
&A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\} \\
&2A = \{2a : a \in A\} \\
&A = \{1, 2, 3\} \\
&B = \{4, 5\} \\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \{1+4, 1+5, 2+4, 2+5, 3+4, 3+5\} = \{5, 6, 7, 8\} \\
&A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\} \\
&2A = \{2, 4, 6\}
\end{aligned}
$$

1.2 n-οστές ρίζες

$$z = a^{1/n} \iff z^n = a$$

Δηλ. ποιο z ικανοποιεί αυτή

$$
\begin{aligned}
&a = |a|e^{i\theta} \\
&z = re^{i\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(re^{i\phi}\right)^n = |a|e^{i\theta} \\
\implies &r^n \cdot e^{in\phi} = |a|e^{i\theta} \\
\implies &r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi) = |a| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\
\implies &\begin{cases} r^n = |a| \implies r = \sqrt[n]{|a|} \\ \left.\begin{array}{l} \cos(n\phi) = \cos\theta \\ \sin(n\phi) = \sin\theta \implies \end{array}\right| \implies n\phi = \theta + 2k\pi \ \in \mathbb{Z} \implies \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \\
\implies &z = a^{1/n} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\theta\,+\,2k\pi)/n} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

(Όμως αρκεί να πάρω $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$)

$$a^{1/n} = \Big\{ \quad \sqrt[n]{|a|}e^{i\theta/n},\ \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\theta + 2\pi}{n}}, \dots$$

Παρ. $a^{1/2} = 1^{1/2}$

$$
\begin{aligned}
&a = 1 = 1 \cdot e^{i0} \quad |a| = 1, \theta = 0 \\
&u_0 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0 + 2\cdot 0 \cdot \pi}{2}\right)} = e^{i0} = 1 \\
&u_1 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0 + 2\cdot\pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1
\end{aligned}
$$

Παρ. $a^{1/3} = 1^{1/3} = z$

$$
\begin{aligned}
&a = 1 = e^{i0}, |a| = 1, \theta = 0 \\
&u_0 = 1 \\
&u_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\
&u_2 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Διαφορετικά

$$
\begin{aligned}
&1^{1/3} = z \iff 1 = z^3 \\
&\iff z^3 - 1 = 0 \\
&\iff (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \\
&\iff (z-1)\left(z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Παρ. $1^{1/11} = z \iff 1 = z^{11}$

$$
\begin{aligned}
&\iff z^{11} - 1 = 0 \\
&\iff (z-1)(z^{11} + z^{10} + \cdots + z^1 + 1) = 0 \\
&\{u_0, u_1, \ldots, u_{10}\}
\end{aligned}
$$

Κεφάλαιο 2 Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$e^z, \log(z)$

$$e^z \overset{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Ήξερα $\begin{array}{l} e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ e^{iy} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \end{array}$.

Τώρα η νέα συνάρτηση $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

Παρ.

$$
\begin{aligned}
e^{1+i} = ee^i &= e \cdot (\cos 1 + i \sin 1) \\
&= e \cdot \cos 1 + i \cdot e \cdot \sin 1 \\
\operatorname{Re}\left(e^{1+i}\right) &= e \cos 1 \\
\operatorname{Im}\left(e^{1+i}\right) &= e \sin 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log(e) &= 1 \\
\log(-1) &= \log\left(e^{i(\pi + 2k\pi)}\right) = i(\pi + 2k\pi)
\end{aligned}
$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$
\begin{aligned}
z &= |z|e^{i\theta} \\
\log(z) &= \ln\left(|z|\right) + i\theta
\end{aligned}
$$

Ορίζω

Πλειότιμη $\log(z) = \ln\left(|z|\right) + i\arg(z)$

Μονότιμη $\operatorname{Log}(z) = \ln\left(|z|\right) + i\operatorname{Arg}(z)$ είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$\begin{aligned}\log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i\left(\pi/4+2k\pi\right)}\right)\\ &= \log\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\end{aligned}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right\}$$

2.1

Από σήμερα: $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Πριν 7 ημέρες: $\cancel{e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i\sin y}$

Σήμερα: $\exp(z) \overset{\text{ορ}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

Θ. Η $\exp(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z \in \mathbb{C}$ και ικανοποιεί:

(1) $\forall z : \left(\exp(z)\right)' = \exp(z)$

(2) $\forall z_1, z_2 : \exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

(3) $\forall \theta \in \mathbb{R} : \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

Απόδ.

(1)

$$\begin{aligned}\left(\exp(z)\right)' &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)'\\ &= 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \exp(z)\end{aligned}$$

(2) $g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} &= \exp(z)\exp(\zeta-z) + \exp(z)\exp(\zeta-z)(-1) = 0\\ &\implies g(z) = c \implies c = g(0) = \exp(\zeta)\\ &\implies \exp(\zeta) = g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)\end{aligned}$$

Θέτω: $z = z_1,\ \zeta = z_1 + z_2$

Οπότε:

$$\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$$

(3)

$$\begin{aligned}\exp(i\theta) &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta\end{aligned}$$

$\exp(z) \quad e^z$

$$\begin{aligned}\exp(1+i) &= 1 + (1+i) + \frac{(1+i)^2}{2!} + \dots \\ e^{1+i} &= 1 + (i+1) + \dots\end{aligned}$$

ή ο αρ. $e = 2.718$ υψωμένος στη μιγαδική δύναμη $1+i$

Θ. Η $\exp(z)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$

Απόδ.

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)\exp(2\pi i) = \exp(z)$$

Η εικόνα του συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}$ υπό την συνάρτηση $f(z)$ Δηλ.

$$f(A) = \big\{w = f(z),\ z \in A\big\}$$

Παρ. Να δειχθεί ότι $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Διότι: έστω $w = re^{i\phi} \in \mathbb{C} - \{0\}$.

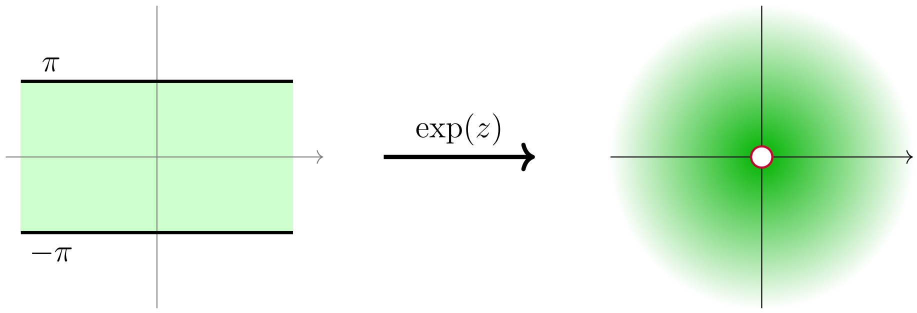
Θα βρω $z = \rho e^{i\theta} = x + iy$ τ.ώ: $\exp(z) = w$.

$$\begin{aligned}&\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy) \\ &w = re^{i\phi} \\ &\exp(x) = \big|\exp(z)\big| = |w| = r \implies \boxed{x = \ln(r)} \\ &\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}(w) \\ &\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}\big(\exp(x)\exp(iy)\big) = y \\ &\operatorname{Arg}(w) = \operatorname{Arg}(re^{i\phi}) = \phi \\ &\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}(w) \implies \boxed{y = \phi}\end{aligned}$$

Τελικά $z = x + iy = \ln(r) + i\phi$ ικανοποιεί $\exp(z) = re^{i\phi} = w$. Άρα $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Στην πραγματικότητα, δεν χρειάζομαι όλο το $\mathbb{C}$ διότι:

$$\exp(U) = \mathbb{C} - \{0\}, \quad \text{όπου } U = \big\{x + iy : x \in \mathbb{R},\ y \in (-\pi, \pi]\big\}$$


π
$-\pi$
$\exp(z)$