

<http://users.auth.gr/natreas>

Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5

Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6

Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marsden (πιο μαθηματικό)

## Μέρος I

# Ατρέας

### Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί Αριθμοί

$$\text{Έστω } \mathbb{C} = \left\{ \begin{array}{c} \text{γεωμετρική παράσταση μιγαδικού} \\ z = \overbrace{(x, y)}; x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν  $z_1 = (x_1, y_1)$  και  $z_2 = (x_2, y_2)$ , τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο  $\lambda \in \mathbb{R}$  με μιγαδικό  $z$

Αν  $z = (x, y)$ , τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

Αν  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ , τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του  $\mathbb{C}$  είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{1-1} A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

- $(x, 0), (y, 0) \in A \implies (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in A$
- $(x, 0)(y, 0) = (xy, 0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$1 = (1, 0)$$

$$x = (x, 0)$$

**Ορίζω:**

$$i = (0, 1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

**Έτσι:**

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$\stackrel{x=(x,0)}{=} x \cdot 1 + y \underset{i=(0,1)}{i}$$

$$\implies \boxed{z = x + iy}$$

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z = (x, y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω  $z = x + iy$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\substack{\text{πολικές} \\ \text{του } (x,y)}}{=} \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \\ &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} z &= |z| \underbrace{(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= |z| \cdot e^{i\theta} \end{aligned}$$

όπου στο εξής:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

τύπος του Euler

Τελικά:

$$z = |z| e^{i\theta} \quad (\text{πολική μορφή μιγαδικών})$$

**Σημείωση:**  $\cos \theta + i \sin \theta$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\substack{\text{σειρές} \\ \text{McLaurin}}}{=} \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + i \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \\ &\stackrel{i^2=-1}{=} \left( 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \right) + \left( i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \right) \\ &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta} \end{aligned}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα  $\text{Arg} z$  (μη μηδενικού) μιγαδικού  $z$  να είναι η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του  $\mathbb{C}$  με την ημιευθεία  $OA$ , όπου  $A$  το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του  $z = x + iy$ .

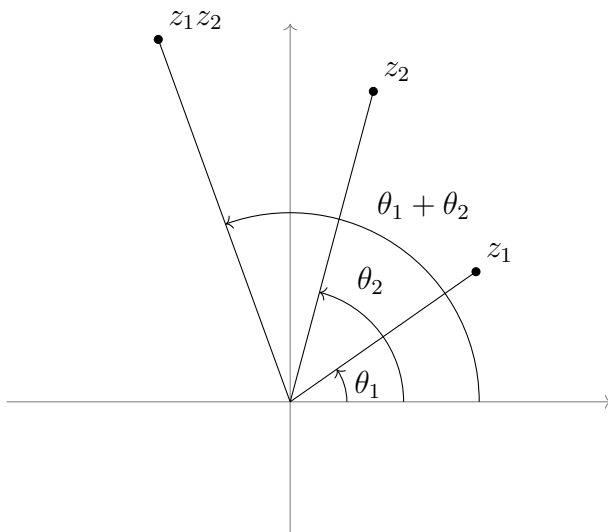
**Έτσι:**

$$z = |z| e^{i \text{Arg } z} \quad \text{πολική μορφή του } z$$

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i \text{Arg } z_1} |z_2| e^{i \text{Arg } z_2}$$

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2)}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} \\ &= \left| \frac{z_1}{z_2} \right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$



**Ιδιότητα:**  $z\bar{z} = |z|^2$

## Κεφάλαιο 2 Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

**π.χ.**

$$f(z) = z^2 \implies f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{Re}(f)} + i \underbrace{(2xy)}_{\text{Im}(f)}$$

$$\stackrel{\text{γεωμετρική}}{\equiv} \stackrel{\text{μορφή}}{(x^2 - y^2, 2xy)}$$

**Τελικά:**  $\boxed{f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)} \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

**π.χ.**

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{|z|\bar{z}} \stackrel{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z} \\ &\stackrel{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &\stackrel{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x, y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \stackrel{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}} \end{aligned}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

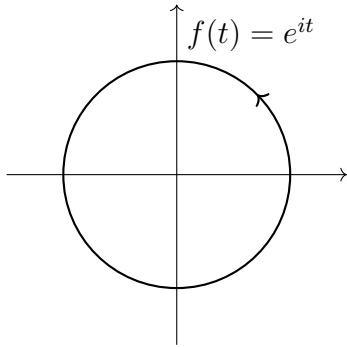
$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιν. μεταβλ.}} \xleftrightarrow{1-1} \begin{matrix} \text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \end{matrix}$$

όπου  $u, v$  πραγμ. συναρτ. 2 μεταβλητών

**Υπάρχουν**  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής  
π.χ

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{it}, t \in (0, \pi] \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

$$t \rightarrow (\cos t, \sin t) \quad \text{καμπύλη } x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$



Η γραφ. παράσταση της  $f(t) = e^{it}$ ,  $t \in (-\pi, \pi)$  είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου  $(0, 0)$  με αντιωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1, t) = (1, 0) + t(0, 1)$$

Το πεδίο ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδ. μεταβλητών υπολογίζεται ως συνήθως (με τις πραγματικές συναρτήσεις) ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ Διαφοροποιήσεις

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Πρέπει ο παρον. να είναι διάφορος του μηδενός: Έτσι  $z \neq 0$  Άρα Π.Ο =  $\mathbb{C} - \{(0, 0)\}$

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 2}$$

**Σημείωση** Η  $g$  είναι **ρητή** συνάρτηση (δηλ. πηλίκο δύο (μιγαδικών) πολυωνύμων).

Κάθε συνάρτηση της μορφής  $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  καλείται (μιγαδικό) πολυώνυμο.

Πρέπει παρον.  $\neq 0$  δηλ:

$$z^2 + 2 = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \textbf{ΠΡΟΣΟΧΗ!!} \text{ Κάθε μιγαδικό} \\ \text{πολυώνυμο βαθμού } N \text{ έχει} \\ \text{ΑΚΡΙΒΩΣ } N \text{ ρίζες στο } \mathbb{C} \end{array} \right)$$

$$z^2 + 2 = 0 \xrightarrow{i^2 = -1} z^2 - 2i^2 = 0$$

$$\implies (z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i) = 0$$

$$\implies \boxed{z = \pm \sqrt{2}i}$$

**Τελικά** Π.Ο =  $\mathbb{C} - \{\pm \sqrt{2}i\}$

$$h(z) = \operatorname{Arg} z, \text{ Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}$$

Για  $z = 0$  ΔΕΝ ορίζεται όρισμα, επειδή  $0 = |0| \cdot e^{i\theta} \forall \theta$

**Σημείωση**  $az^2 + bz + c = 0$

$$a, b, c \in \mathbb{C}$$

Λύνεται με διακρίνουσα κατά τα γνωστά.

Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα Horner για πολυώνυμα (με πραγματικούς συντελεστές) βαθμού  $N \geq 3$ .

$$\begin{aligned} a(z) &= e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= (e^x \cos y, e^x \sin y), \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

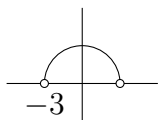
Ως διανυσματικό πεδίο προφανώς  $\text{Π.Ο} = \mathbb{R}^2$   
Έτσι  $\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$ .

$$l(z) = \operatorname{Log} (\text{αντίστροφη της } e^z)$$

$$\underbrace{\operatorname{Log}}_{\text{μινιαδικός λογάριθμος}} \stackrel{\text{ορισμός}}{:=} \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

μινιαδικός λογάριθμος

$$\text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(3) &= \ln |-3| = i \operatorname{Arg}(-3) \\ &= \ln 3 + i\pi \end{aligned}$$

$$\lambda(z) = \sin z \stackrel{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\left( \begin{array}{lcl} e^{i\theta} & = & \cos \theta + i \sin \theta \quad \theta \in (-\pi, \pi] \\ e^{-i\theta} & = & \cos \theta - i \sin \theta \\ \hline \sin \theta & = & \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right)$$

$$\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$$

$$m(z) = \cos z \stackrel{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$$

Όλες οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες ισχύουν στο  $\mathbb{C}$  όπως στο  $\mathbb{R}$ .

$$h(z) = \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{2k\pi + \text{Arg } z}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

(Η  $\sqrt[n]{a}$  ορίζεται ως το **σύνολο** όλων των λύσεων της εξίσωσης  $z^n = a$ ,  $a \in \mathbb{C}$ )

$$\Pi.O = \mathbb{C} - \{0\}$$

## 2.1 Όριο/Συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής

### Ορισμός

Έστω  $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  μιγ. συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$  είναι σ.συσσ. του  $A$  και έστω  $a = a_0 + ib_0$ . Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) &= a \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow & \\ \left\{ \begin{array}{l} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a_0 \\ \textbf{ΚΑΙ} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b_0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

**Επίσης**, αν  $z_0 \in A$ , τότε

$f$  συνεχής στο σημείο  $z_0$

$$\Leftrightarrow$$

οι συναρτήσεις  $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ΣΥΝΕΧΕΙΣ στο σημείο  $(x_0, y_0)$  (ως πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

**Έτσι:**

$$\left. \begin{array}{l} \text{οι πολυωνυμικές} \\ \text{η εκθετική} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\sin z, \cos z) \\ \text{οι υπερβολικές } (\text{ch}, \text{sh}) \end{array} \right\} \text{συνεχείς στο } \mathbb{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{οι ρητές} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\tan z, \cot z) \end{array} \right\} \text{συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους}$$

Ορίζω το  $\infty$  του μιγαδικού επιπέδου να είναι το σύνολο σημείων που απέχουν "άπειρη" απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται ως:

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{ όπου:}$$

$$\infty + z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\infty \cdot z = \infty \quad \forall z \neq 0$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \neq \infty$$

Όλες οι πράξεις του ορίου που ξέρετε ισχύουν και στους μιγαδικούς (αρκεί να μην εμφανίζονται οι γνωστές απροσδιόριστες μορφές):

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Ο κανόνας De l' Hospital ισχύει στους μιγαδικούς.

**Σημείωση:**

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \in \mathbb{C} \iff \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = a \in \mathbb{C}$$

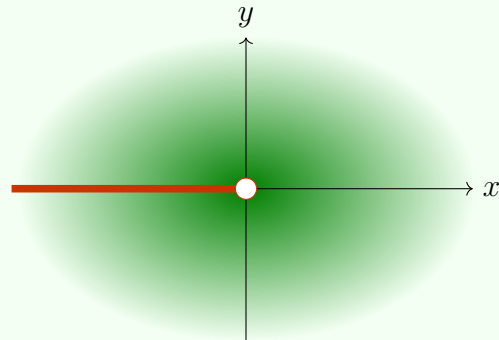
$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$$

**Θ.**

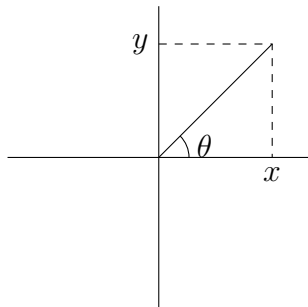
Έστω  $\text{Arg } z : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$   
Τότε η  $\text{Arg } z$  **είναι συνεχής** στο σύνολο:

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ ΚΑΙ } y = 0\}$$

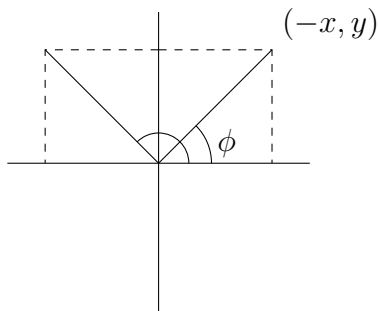


Έστω  $z = x + iy$

(α)  $x > 0, y > 0$

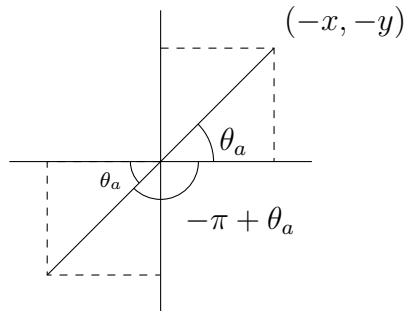


(β)  $x < 0, y > 0$

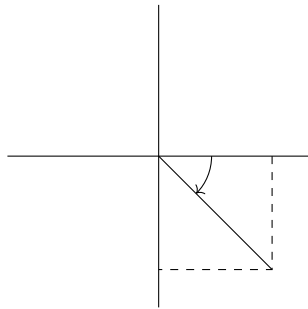




(γ)  $x < 0, y < 0$



(δ)  $x > 0, y < 0$



$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x, y > 0 \\ \pi - \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x < 0, y > 0 \\ -\pi + \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x < 0, y < 0 \\ -\arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

Για  $x = 0$ , τότε  $\operatorname{Arg} := \frac{\pi}{2}$  ή  $-\frac{\pi}{2}$   
 Για  $y = 0$ , τότε  $\operatorname{Arg} := 0$  ή  $\pi$

Έστω  $z_0 = x_0 < 0$

• Έστω  $z = x_0 + it$  ( $t > 0$ )

Για  $t \rightarrow 0^+$ ,  $z \rightarrow z_0 = x_0$ , αλλά:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Arg} z \stackrel{z=x_0+it}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \operatorname{Arg} (x_0 + it) \stackrel{\text{2ο τετ.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \pi - \arctan \left| \frac{t}{x_0} \right| \right) = \pi - \arctan 0 = \pi$$

• Για  $z = x_0 + it$  ( $t < 0$ ), τότε:

$$t \rightarrow 0^-, \quad z \rightarrow z_0, \text{ και}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Arg} z = \lim_{t \rightarrow 0^-} \operatorname{Arg} (x_0 + it) \stackrel{\text{3ο τετ.}}{=} -\pi + \arctan 0 = -\pi$$

Άρα το όριο στο  $z_0 = x_0$  ΔΕΝ υπάρχει, και έτσι η  $\operatorname{Arg} z$  ασυνεχής στα  $z = x_0$  με  $x_0 \leq 0$ .

Αν  $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$  πού είναι ασυνεχής;

## 2.2 Μιγαδική παράγωγος

Την εβδομάδα της 28<sup>ης</sup> θα γίνουν κανονικά τα μαθήματα του Ατρέα.

### Ορισμός

Έστω  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  ανοικτό,  $z_0 \in A$ . Λέμε ότι η  $f$  είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο σημείο  $z_0$ , αν υπάρχει το ΟΡΙΟ:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a \in \mathbb{C}$$

(ή ισοδύναμα  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = a \in \mathbb{C}$ )

Στο εξής το όριο αυτό συμβολίζουμε με  $f'(z_0)$  ή  $\frac{df(z_0)}{dz}$

### Ορισμός

Αν  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  ανοικτό,  $z_0 \in A$ , θα λέμε στο εξής ότι η  $f$  είναι ΟΛΟΜΟΡΦΗ (ή ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - holomorphic/analytic) **στο σημείο  $z_0$** , εάν η  $f$  είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **ΣΕ ΚΑΘΕ**

**ΣΗΜΕΙΟ** του ανοικτού δίσκου



$$D_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

για κάποιο  $\epsilon > 0$

Αν  $f$  ολόμορφη σε ΚΑΘΕ σημείο του  $A$  λέμε ότι η  $f$  ολόμορφη στο  $A$ .

### Ορισμός

Αν  $A$  μη ανοικτό, λέμε ότι η  $f$  ολόμορφη στο  $A$ , αν υπάρχει  $B \supset A$ ,  $B$  ανοικτό ώστε η  $f$  στο  $B$ .

Όλες οι γνωστές ιδιότητες της παραγώγου που γνωρίζετε ισχύουν και για τη μιγαδική παράγωγο

**π.χ.** Έστω  $f, g$  **μιγαδικά** παραγωγίσιμες σε σημείο  $z_0$ . Τότε:

- $f$  παραγ. στο  $z_0 \implies f$  συνεχής στο  $z_0$
- $(af \pm bg)'(z_0) = af'(z_0) \pm bg'(z_0) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \quad (g(z_0) \neq 0)$
- Ο κανόνας αλυσίδας ισχύει στις μιγαδικές συναρτήσεις:

$$(h \circ g)'(z_0) = h'(g(z_0)) g'(z_0)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σύνθεση καλά ορισμένη

**Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης** Έστω  $f$  ολόμορφη σε σημείο  $z_0$  με  $f'(z_0) \neq 0$ .

Αν  $w_0 = f(z_0)$ , τότε υπάρχουν  $\epsilon, \epsilon' > 0$  ώστε η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1} : D_\epsilon(w_0) \rightarrow D_{\epsilon'}(z_0)$  καλά ορισμένη, ολόμορφη στο  $w_0$  και

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

### Θ.: Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ .

Θεωρώ  $z = x + iy$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$  και  $A$  ανοικτό.

Τότε:

$f$  μιγαδικά παραγωγίσιμη στο  $z_0$



(α) Η  $\mathbf{F}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$  είναι **διαφορίσιμο** διανυσμ. πεδίο στο σημείο  $(x_0, y_0)$

ΚΑΙ

(β)

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{εξισώσεις C-R}}$$

**Πόρισμα (ΠΡΑΚΤΙΚΟΤΑΤΟ)** Αν  $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$  είναι έτσι ώστε:

(α)  $u, v$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο  $(x_0, y_0)$  και "κοντά" στο  $(x_0, y_0)$

$$(\beta) \quad \begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{C-R}}$$

Τότε ( $\implies$ ) η  $f$  είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο  $z_0 = x_0 + iy_0$

**Παρ.**

$$\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy), \text{ άρα} \end{aligned}$$

$$f = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right.$$

### Παρατηρήσεις

(α) Έστω  $f$  μιγαδικά παραγ. συνάρτηση σε σημείο  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Τότε εξ' ορισμού υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

- Έστω  $z = x + iy_0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) είναι τυχαίο σημείο της "οριζόντιας" ευθείας που διέρχεται από το  $z_0$
- Για  $x \rightarrow x_0$ , τότε  $z = x + iy_0 \rightarrow x_0 + iy_0 = z_0$  (δηλ.  $z \rightarrow z_0$  όταν  $x \rightarrow x_0$  πάνω στην οριζόντια ευθεία)

Τότε για  $z = x + iy_0$  έχω:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ &\implies \boxed{f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)} := \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, αν εργαστούμε κατά μήκος της "κάθετης" ευθείας που διέρχεται από το  $z_0$ , έχουμε:

$$\boxed{f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)} := -i \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

(β) Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{df(z_0)}{dz} \\ \implies \boxed{df(z_0) = f'(z_0) dz} \end{aligned}$$

$dz :=$  στοιχειώδης όγκος  
στο επίπεδο  $xy$

$df(z_0) :=$  στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο  $uv$   
στο οποίο μετασχηματίζεται το  $dz$   
μέσω της απεικόνισης  $f$

$$df(z_0) = |f'(z_0)| e^{i \operatorname{Arg} f'(z_0)} dz \quad (f'(z_0) \neq 0)$$

Για τις παραγώγους στοιχειωδών συναρτήσεων ισχύουν τα συνήθη από την πραγματική ανάλυση.

**n.x** Αν  $f(z) = e^z$ , τότε  $(e^z)' = e^z \forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) = e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{(e^x \sin y)}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

$$\text{Ορίζω} \begin{cases} u(x, y) = \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y \\ v(x, y) = \operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y \end{cases}$$

- $u, v$  καλά ορισμένες  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , και επιπλέον  $u, v$  είναι **ΣΥΝΕΧΕΙΣ**  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $u_x = e^x \cos y \quad u_y = -e^x \sin y$   
 $v_x = e^x \sin y \quad v_y = e^x \cos y$ , έτσι παρατηρώ ότι  $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\xRightarrow{\text{πόρισμα}} f(z) = e^z$  μιγαδικά παραγωγίσιμη  $\forall z \in \mathbb{C}$

- Γνωρίζω ότι αν η  $f = u + iv$  είναι μιγ. παραγ., τότε  $f'(z) = u_x + iv_x$ .

**Έτσι** στην προκειμένη περίπτωση:

$$f'(z) = (e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^z$$

**π.χ**  $\text{Log} z = \frac{1}{z} \forall z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 0\}$  (υπό την προϋπόθεση ότι  $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$ )

διότι  $\text{Log} z = w \stackrel{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} z = e^w$ , άρα  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ , από το θεώρ. παραγωγίσιμης αντίστροφης συνάρτησης έχουμε:  $(\text{Log} z)' = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$

Με την ίδια λογική (και με χρήση των ιδιοτήτων παραγώγου) αποδεικνύεται ότι

- $(z^n)' = nz^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(z^{-n})' = -nz^{-n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$
- $(z^a)' = az^{a-1} \quad \forall a \in \mathbb{Q} \text{ ή } a \text{ άρρητος ή } a \text{ έχει μη μηδενικό φανταστικό μέρος} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* (\mathbb{C}^* \text{ όπως στο λογάρισμα})$
- $(\sin z)' = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cos z)' = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\sinh z)' = \cosh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cosh z)' = \sinh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(a^z)' = a^z \text{Log} a \quad \forall z \in \mathbb{C}$

κλπ.

## 2.3 Ασκήσεις

ΝΔΟ η  $f(z) = \bar{z}$  ΔΕΝ είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **σε κανένα** σημείο του  $\mathbb{C}$ .

- $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ , ορίζω  $\left| \begin{array}{l} u(x, y) = x \\ v(x, y) = -y \end{array} \right.$
- Προφανώς  $u$  και  $v$  καλά ορισμένες και συνεχείς  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , αλλά:

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , άρα αφού η μία από τις δύο εξισ. C-R δεν ισχύει  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , η  $f(z) = \bar{z}$  **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγ.  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$\left| \begin{array}{l} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{array} \right.$$

**Άσκ. 2** Η συνάρτηση  $f(z) = |z|$  **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε **ΚΑΝΕΝΑ** σημείο του  $\mathbb{C}$ .

Οι εξισώσεις C-R σε πολικές συντ/νες είναι οι εξής:

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\theta & \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi] \\ u_\theta = -\rho v_\rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) \\ &= f(|z|e^{i\text{Arg} z}) = f(\rho e^{i\theta}) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta) \end{aligned}$$

$$f(z) = |z| = \rho, \text{ άρα } \begin{cases} u(\rho, \theta) = \rho \\ v(\rho, \theta) = 0 \end{cases}$$

Οι  $u, v$  καλά ορισμένες και συνεχείς  $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$  αλλά

$$u_\rho = 1 \neq \frac{1}{\rho} \cdot 0 = \frac{1}{\rho} v_\theta \quad \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$$

και αφού μία από τις εξισώσεις C-R δεν ισχύει  $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$  αναγκαστικά η  $f(z) = |z|$  δεν είναι μιγαδικά παραγ. σε κανένα σημείο του  $\mathbb{C}$ .

**π.χ**

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad z \neq 0 \\ |z|^2 &= z\bar{z} \quad \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη.

**Άσκ. 3** Υπολογίστε τα όρια:

$$(a) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2}$$

$$(\beta) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1}$$

$$(\gamma) \lim_{z \rightarrow \infty} e^z$$

Στα όρια ισχύει ο De L' Hospital

(a)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2} \quad \underbrace{\left( \frac{0}{0} \right)}_{\text{L'Hospital}} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2ze^{z^2} - 0}{2z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{z^2} = e^0 = 1$$

διότι  $e^{z^2} - 1$  και  $z^2$  μιγ. παραγ.

(β) Θα προσπαθήσω να αποδείξω ότι το όριο δεν υπάρχει, κάτι που φαντάζομαι επειδή μέσα στο όριο υπάρχει ο  $\bar{z}$ .

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του οριζώντιου άξονα" που διέρχεται από το  $z_0 = 1$ .  
**Δηλ.** θεωρώ σημεία  $z$  της μορφής

$$z = x + i0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Προφανώς για  $x \rightarrow 1$ , έχω:  $z \rightarrow z_0 = 1$ .

Τότε  $\forall z = x$  έχω:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1} \underset{\substack{\text{κατα μήκος} \\ \text{του οριζ. άξονα}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 1$$

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του κάθετου άξονα" που διέρχεται από το  $z_0 = 1$ , δηλαδή σημεία:

$$z = 1 + ix \quad (x \in \mathbb{R})$$

Προφανώς για  $x \rightarrow 0$ , έχω  $z \rightarrow z_0 = 1$ , και

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1} &\underset{\substack{\text{κατα μήκος} \\ \text{του κατακόρυφου άξονα}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + ix)^2 - 1}{(1 - ix)^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2ix - x^2 - 1}{1 - 2ix - x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ix - x^2}{-2ix - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2i - x}{-2i - x} = \frac{2i}{-2i} = -1 \end{aligned}$$

Εφόσον  $1 \neq -1$  το όριο ΔΕΝ υπάρχει.

(γ)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = ?$

- Έστω  $z = x$  ( $x < 0$ ), για  $x \rightarrow -\infty$ , τότε  $z \rightarrow \infty$  και  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- Έστω  $z = x$  ( $x > 0$ ), για  $x \rightarrow +\infty$ , τότε  $z \rightarrow \infty$ , αλλά:  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , συνεπώς το  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$  ΔΕΝ υπάρχει.

**Άσκ. 4** Αν  $f(z) = u + iv$  είναι ακεραία (ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$ ) και αν

$$au + bv = c$$

όπου  $a, b, c \in \mathbb{R}$  σταθερές όχι όλες ίσες με μηδέν, ΝΔΟ  $f(z) = A$ ,  $A \in \mathbb{C}$  σταθερά.

- Έστω  $\underline{c} = 0$ , εξ' υποθέσεως  $a^2 + b^2 \neq 0$
- Έστω  $c \neq 0$ , πάλι πρέπει  $a^2 + b^2 \neq 0$  (διότι αλλιώς  $0 = c$ , άτοπο)
- Τελικά  $a^2 + b^2 \neq 0$  σε κάθε περίπτωση.

$$\begin{aligned} \begin{cases} au_x + bv_x = 0 \\ au_y + bv_y = 0 \end{cases} &\implies \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[u_y = -v_x \text{ αφού } f \text{ ακεραία}]{u_x = v_y} \begin{bmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2$$

και επειδή  $a^2 + b^2 \neq 0$ , πρέπει  $u_x^2 + u_y^2 = 0$  για να έχει λύση το σύστημα  $\implies u_x = 0$  και  $u_y = 0 \xrightarrow{\mathbb{C}-R} u_x = u_y = v_x = v_y = 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \implies f(z) = A \in \mathbb{C}$  σταθερά.

**Άσκ.** Βρείτε τα σημεία ολομορφίας των συναρτήσεων:

(α)  $f(z) = \text{Log}(z - i)$

(β)  $g(z) = \tan z$

(α) Έστω ότι  $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$ . Τότε είναι γνωστό ότι η  $\text{Log } z$  είναι μιγαδικά παραγ. στο  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 0\}$ .

Έτσι η  $\text{Log}(z - i)$  είναι μιγ. παραγ. στο σύνολο

$$\begin{aligned} & \mathbb{C} - \{x + iy : \text{Re}(z - i) \leq 0 \text{ και } \text{Im}(z - i) = 1\} \\ & \stackrel{z=x+iy}{=} \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y - 1 = 0\} \\ & = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 1\} \end{aligned}$$

(β)  $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ , η  $g$  είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  εκτός των σημείων που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

$$\begin{aligned} \bullet \cos z = 0 & \iff \cos(x + iy) = 0 \iff \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = 0 \xrightarrow{\text{ορ. sin \& cos}} \\ & \cos x \cdot \frac{e^{-y} + e^y}{2} - \sin x \cdot \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = 0 \iff \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y = 0 \iff \\ & \left| \begin{array}{l} \cos x \cdot \cosh y = 0 \\ \text{και} \\ \sin x \cdot \sinh y = 0 \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sin x = 0 \end{array} \right| \text{ ή } \left| \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sinh y = 0 \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{l} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{array} \right|, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Τελικά**  $\cos z \iff \boxed{z = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$  και έτσι  $g$  είναι ολόμορφη στο

$$\mathbb{C} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Άσκ.** Έστω  $f(x + iy) = (x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$

(i) Να γραφεί η  $f$  συναρτήσει του  $z = x + iy$

(ii) Να βρείτε όλα τα σημεία, όπου η  $f$  είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη

(iii) Να βρείτε όλα τα σημεία στα οποία η  $f$  είναι ολόμορφη

(i)  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$   
 $(z = x + iy)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left(\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2\right) \\ &= \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - i(z - \bar{z}) + i\left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4}\right) \\ &= \frac{z^2 + 2|z|^2 + \bar{z}^2}{4} - i(z - \bar{z} - |z|^2) \end{aligned}$$

(ii) Προφανώς  $\left| \begin{array}{l} \text{Re}(f) := u(x, y) = x^2 + 2y \\ \text{Im}(f) := v(x, y) = x^2 + y^2 \end{array} \right|$



- Οι  $u$  και  $v$  είναι συνεχείς (ως πολυωνυμικές)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\bullet \begin{cases} u_x = v_y \\ \text{ΚΑΙ} \\ u_y = -v_x \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = 2y \\ \text{ΚΑΙ} \\ 2 = -2x \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ \text{ΚΑΙ} \\ x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ \text{ΚΑΙ} \\ y = -1 \end{cases}$$

Άρα η  $f$  είναι μιγαδ. παραγ. **μόνον** στο  $z = -1 - i$ , και μάλιστα εφ' όσον  $f(z) = f'(x + iy) = u_x + iv_x$ :

$$f'(-1 - i) = 2(-1) + i2(-1) = \underline{-2 - i2}$$

(iii) ΔΕΝ υπάρχουν σημεία όπου η  $f$  είναι ολόμορφη.

## Κεφάλαιο 3 Μιγαδική ολοκλήρωση

### Εισαγωγή

#### Ορισμός

Καλούμε **καμπύλη** στο μιγαδικό επίπεδο κάθε συνεχή συνάρτηση

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

όπου  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.

**Έτσι:**  $\gamma(t)$  καλείται

**ΑΠΛΗ** αν είναι 1-1 (δεν αυτοτέμνεται)

**ΚΛΕΙΣΤΗ** αν έχει ίδια αρχή και πέρας

**ΛΕΙΑ** αν είναι παραγωγίσιμη στο  $[a, b]$  με συνεχή παράγωγο

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

και μη μηδενική παράγωγο  $\forall t$

- Κάθε τέτοια καμπύλη έχει ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ (φορά διαγραφής) προς την κατεύθυνση αύξησης του  $t$

**π.χ.**  $\gamma(t) = e^{it}, t \in (-\pi, \pi]$

$$\gamma(t) = e^{-it}, t \in (-\pi, \pi]$$

- Αν  $\gamma$  κλειστή λέω ότι είναι θετικά προσανατολισμένη αν η φορά διαγραφής είναι η αντιωρολογιακή
- $-\gamma$ : ίδιο ίχνος με τη  $\gamma$ , αλλά αντίθετη φορά διαγραφής
- $\gamma_1 + \gamma_2$ :

### Ορισμός

Έστω  $f = f(z)$  ΣΥΝΕΧΗΣ μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής και  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  λεία καμπύλη. Καλώ επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $f$  ΠΑΝΩ στη  $\gamma$  να είναι ο ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\gamma'(t) dt}_{d\gamma(t)}$$

### ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$$\begin{aligned} d\gamma(t) &= d(x(t) + iy(t)) = \\ &= dx(t) + i dy(t) = (x'(t) + iy'(t)) dt \end{aligned}$$

$$d\gamma(t) = \gamma'(t) dt$$

Οι κλασικές ιδιότητες των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων έργου ισχύουν στους μιγαδικούς. Ενδεικτικά:

- $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$
- $\int_{\gamma} (af + by)(z) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$
- $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz \leq M \cdot (\text{μήκος της } \gamma) \text{ όπου } M \text{ μέγιστο της } |f| \text{ επί της } \gamma$
- $\int_{\gamma} |dz| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt := \text{μήκος της καμπ. } \gamma$

**Πρόταση:** Έστω  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  συνεχής επί καμπύλης λείας  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ .

**Τότε:**

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \underbrace{\left( \int_{\gamma} u dx - v dy \right)}_{\text{επικαμπύλιο ολοκλ. διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2} + i \underbrace{\left( \int_{\gamma} u dy + v dx \right)}_{\text{επικαμπύλιο ολοκλ. διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2}$$

**Απόδ.**

$$\begin{aligned}
 & \int_{\gamma} (u + iv) d(x + iy) \\
 &= \int_a^b \left[ u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \right] (x'(t) + iy'(t)) dt \\
 &= \int_a^b \left( u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \right) dt + i \int_a^b \left( u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t) \right) dt \\
 &\stackrel{\text{ορ.}}{=} \left( \int_{\gamma} u dx - v dy \right) + i \left( \int_{\gamma} u dy + v dx \right)
 \end{aligned}$$

Ορίζω  $\bar{f}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$

**Τότε**

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} u dx - v dy &\stackrel{\text{λογ. II}}{:=} \text{έργο του πεδίου } \bar{f} \text{ επί της καμπύλης } \gamma \\
 \int_{\gamma} u dy + v dx &\stackrel{\text{λογ. II}}{:=} \underline{\text{ροή}} \text{ του } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma
 \end{aligned}$$

### 3.1 Θεώρημα Cauchy

Έστω  $f = f(z)$  είναι **ολόμορφη** συνάρτηση **πάνω** και στο **εσωτερικό απλής**, κλειστής και λείας καμπύλης  $\gamma$ .

Τότε:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Απόδ.** Έστω  $f = u + iv$ , όπου  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πάνω και στο εσωτερικό της  $\gamma$ . Τότε:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\gamma} f(z) dz &= \left( \oint_{\gamma} u dx - v dy \right) + i \left( \oint_{\gamma} u dy + v dx \right) \\
 &\stackrel{\text{Θεώρ. Green}}{=} \iint_R (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_R (u_x - v_y) dx dy
 \end{aligned}$$

και επειδή η  $f$  ολόμορφη ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann  $\forall(x, y)$  στο εσωτερικό της  $\gamma$ , δηλαδή το  $R$ , άρα:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz \stackrel{u_x=v_y, u_y=v_x}{=} \iint_R 0 dx dy + i \iint_R 0 dx dy = 0$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \underbrace{a}_{\text{έργο του πεδίου } f \text{ κατά μήκος } \gamma} + i \underbrace{b}_{\text{ροή του πεδίου } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma}$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Αν υπάρχει έστω και ένα σημείο όπου η  $f$  δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο εσωτερικό της  $\gamma$ , τότε το **θεώρ. Cauchy δεν ισχύει εν γένει**.

π.χ  $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z}$  με θετική φορά

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} &\stackrel{\gamma(t)=e^{it}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{it})}{e^{it}} \\ &\stackrel{\text{op.}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i \end{aligned}$$

### Θ.: Παραμόρφωση δρόμων

Έστω  $f = f(z)$  είναι ολόμορφη σε τόπο  $G$  με σύνολο  $\partial G = \gamma_1 \cup \gamma_2$  όπου  $\gamma_1, \gamma_2$  απλές λειστές καμπύλες, λείες, με κοινό προσανατολισμό π.χ. όπως στο σχήμα. Τότε  $\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz$

**Απόδ.** Φέρνω δύο ευθ. τμήματα  $L_1$  και  $L_2$  που διαμερίζουν το  $G$  σε δύο χωρία έστω  $G_1, G_2$ . Τότε το θ. Cauchy ισχύει και στο  $G_1$  και στο  $G_2$ .

$$\begin{aligned} &\bullet \int_{\gamma_1^+ + L_1 + \gamma_2^+ + L_2} f(z) dz = 0 \quad (\text{θ. Cauchy για το χωρίο } G_1) \\ &\bullet \int_{\gamma_2^- - L_1 - \gamma_1^- - L_2} f(z) dz = 0 \quad (\text{θ. Cauchy για το χωρίο } G_2) \\ \Rightarrow &\left| \begin{aligned} \left( \int_{\gamma_1^+} + \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^+} + \int_{L_2} \right) f(z) dz &= 0 \\ \left( \int_{\gamma_1^-} - \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^-} - \int_{L_2} \right) f(z) dz &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \oint_{\gamma_1} f(z) dz - \oint_{\gamma_2} f(z) dz = 0 \end{aligned}$$

**Πόρισμα (Γενικευμένο θεώρ. Cauchy)** Έστω  $f = f(z)$  ολόμορφη σε τόπο  $G$  με σύνολο  $\partial G = \Gamma \cup (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n)$ , όπου:

- $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  απλές, κλειστές, λείες και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΕΣ καμπύλες
- Οι  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  βρίσκονται εντός της  $\Gamma$  και
- Κάθε καμπύλη  $\gamma_j \quad j = 1, \dots, n$  βρίσκεται εκτός των υπόλοιπων  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n$

Τότε:  $\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j} f(z) dz$

### Θ.: Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy

Έστω  $f = f(z)$  είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμημ. λείας και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ καμπύλης  $\gamma$ . Τότε ΓΙΑ ΚΑΘΕ σημείο  $z_0$  ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της  $\gamma$  ισχύει:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

## Μέρος II

# Κεχαγιάς

Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

## Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί αριθμοί

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$x, y \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1$$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$

$$= x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

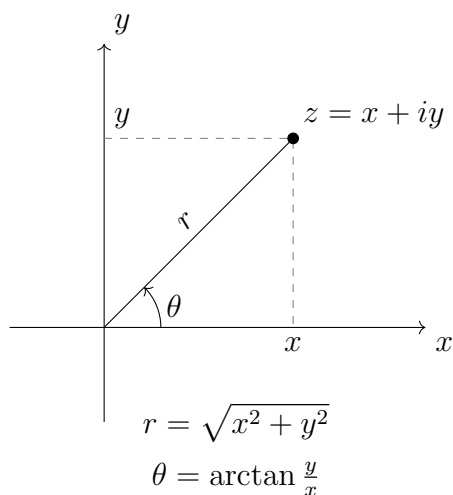
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\operatorname{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow \text{μέτρο του } z$$

γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ.  $z = x \in \mathbb{R}$ ,  $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ )

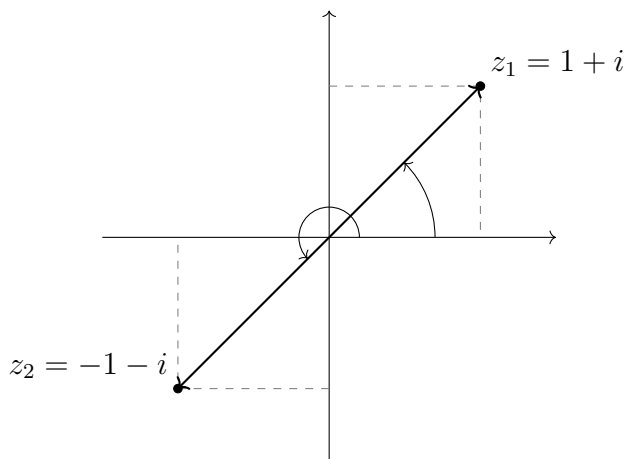
$$\begin{aligned} z = x + iy &= r \cdot \cos \theta + ir \sin \theta \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \quad (\text{Euler}) \end{aligned}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ διότι}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \cos \theta + ir \sin \theta \end{aligned}$$



$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}e^{i(-3\pi/4)} = \sqrt{2}e^{i13\pi/4}$$

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Γενικά: } -1 - i = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## 1.1 Συναρτήσεις

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z = x + iy$$

$$\text{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^\circ \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \quad \theta_0 = \arctan \left( \left| \frac{y}{x} \right| \right)$$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$$

$$\text{Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση } \arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \text{mod}(z) \cdot e^{i\text{Arg}(z)} \\ &= \text{mod}(z) \cdot e^{i(\text{Arg}(z) + 2k\pi)} \end{aligned}$$

$$z_1 = \text{mod}(z_1)e^{i\text{Arg}(z_1)}$$

$$z_2 = \text{mod}(z_2)e^{i\text{Arg}(z_2)}$$

$$z_1 z_2 = \text{mod}(z_1)\text{mod}(z_2)e^{i(\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2))}$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \text{ επειδή}$$

$$\text{Arg}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) = \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi$$

Γενικά, αν  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ , τότε:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Όμως:

$$\begin{aligned} \arg(z^z) &= \arg(z) + \arg(z) \\ &\neq 2\arg(z) \end{aligned}$$

διότι:

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

$$A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\}$$

$$2A = \{2a : a \in A\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \{1 + 4, 1 + 5, 2 + 4, 2 + 5, 3 + 4, 3 + 5\} = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$2A = \{2, 4, 6\}$$

## 1.2 η-οστές ρίζες

$$z = a^{1/n} \iff z^n = a$$

Δηλ. ποιο  $z$  ικανοποιεί αυτή

$$a = |a|e^{i\theta}$$

$$z = re^{i\phi}$$

$$(re^{i\phi})^n = |a|e^{i\theta}$$

$$\implies r^n \cdot e^{in\phi} = |a|e^{i\theta}$$

$$\implies r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi) = |a| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

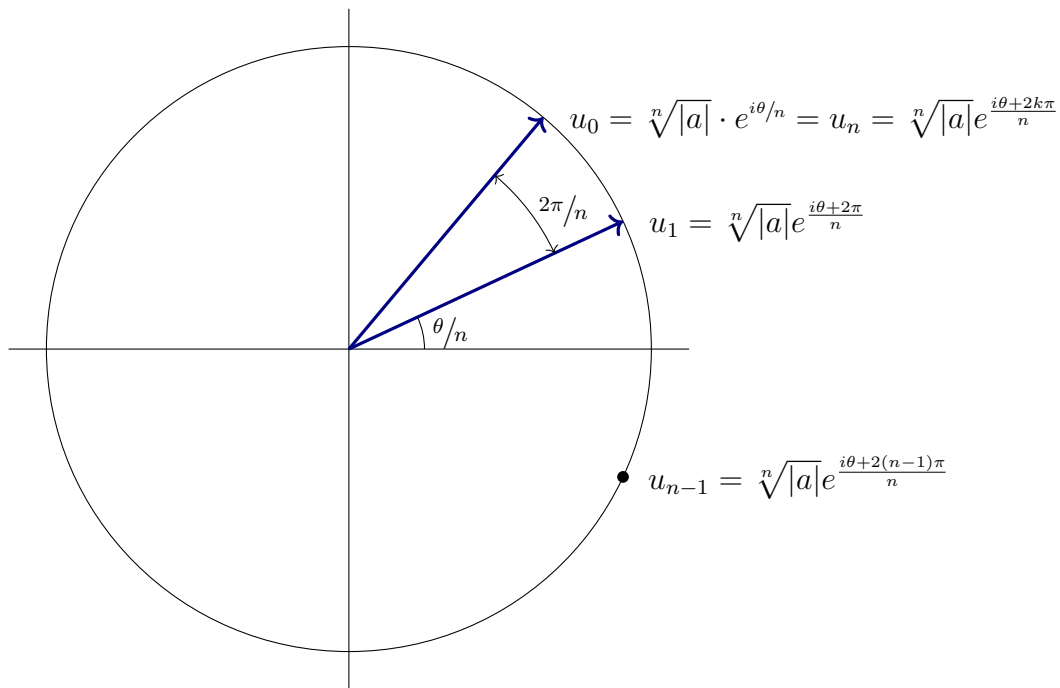
$$\implies \left\{ \begin{array}{l} r^n = |a| \implies r = \sqrt[n]{|a|} \\ \cos(n\phi) = \cos \theta \\ \sin(n\phi) = \sin \theta \implies \end{array} \right. \implies n\phi = \theta + 2k\pi \in \mathbb{Z} \implies \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$\implies z = a^{1/n} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Όμως αρκεί να πάρω  $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ )

$$a^{1/n} = \left\{ \sqrt[n]{|a|}e^{i\theta/n}, \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\theta+2\pi}{n}}, \dots \right.$$



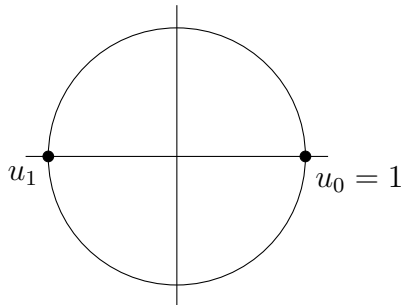


**Παρ.**  $a^{1/2} = 1^{1/2}$

$$a = 1 = 1 \cdot e^{i0} \quad |a| = 1, \theta = 0$$

$$u_0 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2 \cdot 0 \cdot \pi}{2}\right)} = e^{i0} = 1$$

$$u_1 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2 \cdot \pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1$$



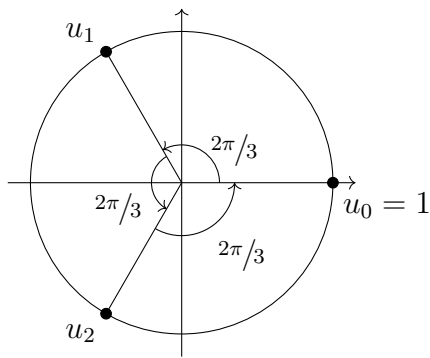
**Παρ.**  $a^{1/3} = 1^{1/3} = z$

$$a = 1 = e^{i0}, |a| = 1, \theta = 0$$

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$u_2 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$



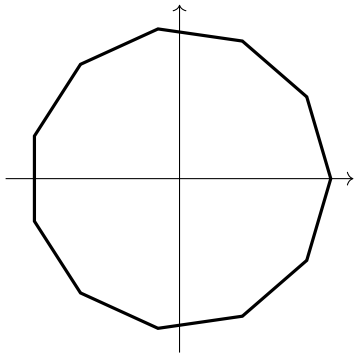
### Διαφορετικά

$$\begin{aligned}
 1^{1/3} = z &\iff 1 = z^3 \\
 &\iff z^3 - 1 = 0 \\
 &\iff (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \\
 &\iff (z - 1) \left( z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left( z + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Παρ.  $1^{1/11} = z \iff 1 = z^{11}$

$$\begin{aligned}
 &\iff z^{11} - 1 = 0 \\
 &\iff (z - 1)(z^{10} + z^9 + \dots + z^2 + z + 1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{10}\}$$



## Κεφάλαιο 2 Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$$e^z, \log(z)$$

$$e^z \stackrel{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ήξερα } e^x &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 e^{iy} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} .
 \end{aligned}$$

Τώρα η νέα συνάρτηση  $e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

**Παρ.**

$$\begin{aligned}e^{1+i} &= ee^i = e \cdot (\cos 1 + i \sin 1) \\&= e \cdot \cos 1 + i \cdot e \cdot \sin 1\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(e^{1+i}) = e \cos 1$$

$$\operatorname{Im}(e^{1+i}) = e \sin 1$$

$$\log(e) = 1$$

$$\log(-1) = \log(e^{i(\pi+2k\pi)}) = i(\pi + 2k\pi)$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\theta$$

**Ορίζω**

**Πλειότιμη**  $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$

**Μονότιμη**  $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z)$  είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$\begin{aligned}\log(1+i) &= \log(\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2k\pi)}) \\&= \log(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right\}$$

## 2.1

Από σήμερα:  $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Πριν 7 ημέρες:  $e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i \sin y$

**Σήμερα:**  $\exp(z) \stackrel{\text{op}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

**Θ.** Η  $\exp(z)$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε  $z \in \mathbb{C}$  και ικανοποιεί:

$$(1) \quad \forall z : (\exp(z))' = \exp(z)$$

$$(2) \quad \forall z_1, z_2 : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$$

$$(3) \quad \forall \theta \in \mathbb{R} : \exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$

**Απόδ.**

(1)

$$\begin{aligned}(\exp(z))' &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)' \\&= 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \exp(z)\end{aligned}$$

(2)  $g(z) = \exp(z) \exp(\zeta - z)$

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dz} &= \exp(z) \exp(\zeta - z) + \exp(z) \exp(\zeta - z)(-1) = 0 \\&\implies g(z) = c \implies c = g(0) = \exp(\zeta) \\&\implies \exp(\zeta) = g(z) = \exp(z) \exp(\zeta - z)\end{aligned}$$

**Θέτω:**  $z = z_1, \zeta = z_1 + z_2$

**Οπότε:**

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

(3)

$$\begin{aligned}\exp(i\theta) &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) \\&= \cos \theta + i \sin \theta\end{aligned}$$

$$\exp(z) = e^z$$

$$\exp(1+i) = 1 + (1+i) + \frac{(1+i)^2}{2!} + \dots$$

$$e^{1+i} = 1 + (i+1) + \dots$$

ή ο αρ.  $e = 2.718$  υψωμένος στη μιγαδική δύναμη  $1+i$

**Θ.** Η  $\exp(z)$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi i$

**Απόδ.**

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \exp(2\pi i) = \exp(z)$$

Η εικόνα του συνόλου  $A \subseteq \mathbb{C}$  υπό την συνάρτηση  $f(z)$  Δηλ.

$$f(A) = \{w = f(z), z \in A\}$$

**Παρ.** Να δειχθεί ότι  $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Διότι: έστω  $w = re^{i\phi} \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

Θα βρω  $z = \rho e^{i\theta} = x + iy$  τ.ώ:  $\exp(z) = w$ .

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy)$$

$$w = re^{i\phi}$$

$$\exp(x) = |\exp(z)| = |w| = r \implies \boxed{x = \ln(r)}$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(w)$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(\exp(x) \exp(iy)) = y$$

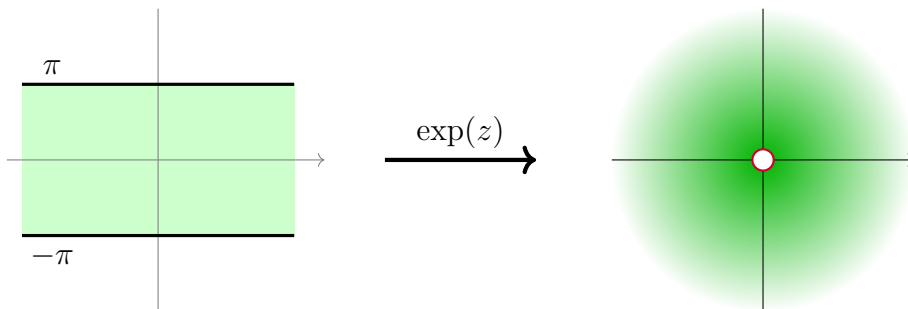
$$\text{Arg}(w) = \text{Arg}(re^{i\phi}) = \phi$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(w) \implies \boxed{y = \phi}$$

Τελικά  $z = x + iy = \ln(r) + i\phi$  ικανοποιεί  $\exp(z) = re^{i\phi} = w$ . Άρα  $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Στην πραγματικότητα, δεν χρειάζομαι όλο το  $\mathbb{C}$  διότι:

$$\exp(U) = \mathbb{C} - \{0\}, \quad \text{όπου } U = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi)\}$$



## 2.2 Λογαριθμική Συν.

$$w = \overbrace{\log(z)}^{\text{πλειότιμη}} \iff z = \exp(w)$$

$$w = \log(1 + i)$$

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$$

$$\log(1 + i) = \log\left(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{2}) + \log\left(e^{i[\frac{\pi}{4} + 2k\pi]}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \left\{ \dots, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{7\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{17\pi}{4}, \dots \right\}$$

$$\boxed{\log(z) = \ln(r) + i\arg(z)} \leftarrow \text{πλειότιμη}$$

$$\boxed{\text{Log}(z) = \ln(r) + i\text{Arg}(z)} \leftarrow \begin{array}{l} \text{μονότιμη} \\ \text{ασυνεχής για } x \in (-\infty, 0] \end{array}$$

## 2.3 Μιγαδικές δυνάμεις

$$z^c = e^{\log(z^c)} = e^{c \log z} = e^{c(\ln(|z|) + i \arg(z))}$$

ή

$$z^c = e^{\text{Log}(z^c)} = e^{c(\ln(|z|) + i \text{Arg}(z))}$$

$$\underbrace{(1+i)^{2-i}}_{z=1+i, c=2-i} = e^{(2-i) \log(1+i)} = e^{(2-i)(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))}$$

$$z = 1 + i$$

$$c = 2 - i$$

$$= e^{(2 \ln(\sqrt{2}) + (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)) + i(-\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 4k\pi)}$$

$$= e^{2 \ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi} \cdot e^{i(-\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 4k\pi)}$$

$$= 2e^{\pi/4 + 2k\pi} \cdot \left[ \cos \left( -\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} + 4k\pi \right) + i \sin \left( -\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} + 4k\pi \right) \right]$$

$$\sqrt{1+i} = (1+i)^{1/2} = e^{1/2 \cdot \log(1+i)}$$

$$= e^{1/2(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))}$$

$$= e^{1/2 \ln(\sqrt{2})} \cdot e^{i(\pi/4 + 2k\pi)}$$

$$= \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{\pi}{8} + k\pi)}$$

$$= \sqrt[4]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{8} + k\pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{8} + k\pi \right) \right)$$

$$= \begin{cases} \sqrt[4]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{8} \right) \right) \\ \sqrt[4]{2} \left( \cos \left( \frac{9\pi}{8} \right) + i \sin \left( \frac{9\pi}{8} \right) \right) \end{cases}$$

$$(-1)^i = e^{\log((-1)^i)} = e^{i \log(-1)} = e^{i(2k+1)\pi} = e^{-(2k+1)\pi}$$

$$(1+i)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \log(1+i)} = e^{\sqrt{2}(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))}$$

$$= \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot e^{i\sqrt{2}(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$$

$$= \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi \right) + i \sin \left( \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi \right) \right]$$

$$\cos \left( \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \right) = \cos \left( \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi \right)$$

$$\implies \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi + 2m\pi \implies 2k\sqrt{2}\pi = 2m\pi \implies \sqrt{2} = m/k$$

$$(1+i)^{p/q} = \dots$$

$$m = \lambda q$$

**Παρ.** Να βρεθούν οι τιμές του  $n$  τ.ώ:

$$c_n = \sum_{k=0}^n i^k \in \mathbb{I}$$

$n$	
0	1
1	$1 + i$
2	$1 + i + i^2 = 1$
3	$1 + i + i^2 + i^3 = 0$
4	1
5	$1 + i$
6	$i$
$\vdots$	$\vdots$

Αρα  $\forall_{n,m} : c_n = c_{n+4m}$

Οι φανταστικές τιμές του  $c_n$  προκύπτουν για

$$n = 2, 3, \\ 6, 7, \\ 10, 11,$$

**Απ.**  $n \in \{m + 4l : m \in \{2, 3\}, l \in \mathbb{N}_0\}$

**Παρ.** Να λυθεί η  $(1 + z)^{2n} = -(1 - z)^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$

**Λύση** Φαίνεται άμεσα ότι  $z \neq 1$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{2n} = -1 &\implies \\ \frac{1+z}{1-z} &= (-1)^{1/2n} = \left( e^{i(2k+1)\pi} \right)^{1/2n} \\ z &= \frac{e^{i(2k+1)\pi/2n} - 1}{e^{i(2k+1)\pi/2n} + 1} \\ &= \frac{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) - 1}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + 1} \\ &= \frac{2 \sin^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i 2 \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)}{\begin{cases} \cos\phi - 1 = -2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ \cos\phi + 1 = 2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \end{cases} \frac{2 \cos^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i 2 \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)}{2 \cos^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i 2 \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \left[ -\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \right]}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \left[ \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \right]} \\ z_k &= i \tan\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1 \end{aligned}$$

## 2.4

### 2.4.1 Η γραμμική απεικόνιση

**Τύπος:**  $f(z) = az + b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$

Προφανώς η  $w = f(z) = az + b$  είναι 1-1 συνάρτηση και εύκολα βρίσκουμε την αντίστροφη της λύνοντας την  $w = az + b$  ως προς  $z$ .

Έτσι:  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = az + b$  και μπορώ να την επεκτείνω στο  $\bar{\mathbb{C}}$  με 1-1 τρόπο θέτοντας

$$f(\infty) = \infty$$

#### Γεωμετρική ερμηνεία

- Προφανώς, από τη δομή της, η γραμμική απεικόνιση απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και κύκλους σε κύκλους.

**Ερώτηση** Έστω  $f(z) = az + b$ .

Αν  $Ax + By + \Gamma = 0$  ευθεία τυχαία, βρείτε πού αυτή απεικονίζεται μέσω της  $f(z)$ .

$$\begin{aligned} w &= u + iv = az + b \\ &= u(x, y) + iv(x, y) = a(x + iy) + b \end{aligned}$$

$$\bullet \quad w = az + b \iff z = \frac{w-b}{a} \iff x + iy = \frac{u+iv-(b_0+ib_1)}{a_0+ia_1} = \frac{[(u-b_0)+i(v-b_1)][a_0-a_1i]}{|a|^2} = \frac{(u-b_0)a_0+a_1(v-b_1)}{|a|^2} + i \frac{-a_1(u-b_0)+a_0(v-b_1)}{|a|^2}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_0u + a_1v - (a_0b_0 + a_1b_1)}{|a|^2} \\ y &= \frac{-a_1u + a_0v - (a_1b_0 + a_0b_1)}{|a|^2} \end{aligned}$$

(μπορεί να είναι λάθος)

$$\begin{aligned} Ax + By + \Gamma &= 0 \\ \iff A(a_0u + a_1v - (a_0b_0 + a_1b_1)) + B(-a_1u + a_0v - (a_1b_0 + a_0b_1)) + \Gamma|a|^2 &= 0 \end{aligned}$$

### 2.4.2 Αντιστροφή $f(z) = \frac{1}{z}$ ( $z \neq 0$ )

Προφανώς:  $\mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = \frac{1}{z}$   
και μπορεί να επεκταθεί στο  $\bar{\mathbb{C}}$  θέτοντας  $f(0) = \infty$  και  $f(\infty) = 0$ .

Εννοείται ότι είναι 1-1 με  $w = \frac{1}{z} \iff \frac{1}{w}$  δηλ. για  $\begin{cases} w = u + iv \\ z = x + iy \end{cases}$  έχουμε:

$$x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \iff \begin{cases} x = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2 + v^2} \end{cases} \quad (2)$$

Έτσι φαίνεται ότι η συνάρτηση αυτή απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.



Πράγματι, αν  $Ax + By + \Gamma = 0$  τυχαία ευθεία στο επίπεδο του  $z$ , τότε από (2):

$$A \frac{u}{u^2 + v^2} - B \frac{v}{u^2 + v^2} + \Gamma = 0$$

$$\iff \boxed{Au - Bv + \Gamma(u^2 + v^2) = 0}$$

- $\Gamma = 0$  τότε  $Au - Bv = 0$  άρα ευθεία απεικον. σε ευθεία, ενώ:
- $\Gamma \neq 0$  τότε  $u^2 + v^2 + \frac{A}{\Gamma}u - \frac{B}{\Gamma}v = 0$  **δηλ.** κύκλος

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

Η  $f(z) = \frac{1}{z}$  απεικονίζει το εσωτερικό μοναδιαίου κύκλου  $|z| = 1$  με κέντρο το  $z = 0$ , στο εξωτερικό του (με 1-1 τρόπο, και αντιστρόφως).

**Πράγματι:**

$$z : |z| < 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } |f(z)| = \frac{1}{|z|} > 1 \implies |f(z)| > 1$$

$$z : |z| > 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } |f(z)| = \frac{1}{|z|} < 1 \implies |f(z)| < 1$$

$$z : |z| = 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$$

### 2.4.3 Μετασχ. Möbius

Καλούμε ρητογραμμικό μετασχηματισμό (Möbius) κάθε συνάρτηση

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (\text{με } ad - bc \neq 0)$$

Προφανώς:  $f : \mathbb{C} - \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} - \{a/c\}$ , αν  $c \neq 0$   
 ή  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  αν  $c = 0$

Η  $f$  είναι 1-1 (εύκολο).

- Αποδεικνύεται ότι ο μετασχ. Möbius είναι σύνθεση διαστολής, περιστροφής, μετάθεσης και αντιστροφής, άρα απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.
- Ο μετασχ. Möbius (στην περίπτωση ευθείας ή κύκλου) απεικονίζει συμπληρωματικούς τόπους σε συμπληρωματικούς τόπους.
- Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ μετασχ. Möbius που απεικονίζει ΤΡΙΑ σημεία  $z_1, z_2, z_3$  σε ΤΡΙΑ ΑΛΛΑ σημεία  $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2), w_3 = f(z_3)$ , και έχει τη μορφή:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

#### 2.4.4 Τριγωνομετρικές και αντίστροφές τους

π.χ.

- Η συνάρτηση

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

είναι  $2\pi$ -περιοδική, άρα μη αντιστρέψιμη στο  $\mathbb{C}$

Έστω  $E_k = \{x + iy : k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  είναι "κατακόρυφες λωρίδες".  
Για  $k=0$ , έχω:

Τότε η  $\sin z$  γίνεται 1-1 με πεδίο τιμών το σύνολο

$$A = \mathbb{C} - \{u + iv : |u| \geq 1 \text{ και } v = 0\}$$

Έτσι η  $\sin : E_k \rightarrow A$  είναι 1-1 (για κάθε συγκεκριμένο  $k \in \mathbb{Z}$ ), άρα αντιστρέψιμη.

- Από  $w = \sin z$  παίρνω:

$$\begin{cases} u(x, y) = \sin x \cosh y \\ v(x, y) = \cos x \sinh y \end{cases}$$

- Για  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικονίζεται}]{\sin z} (\cosh y, 0)$

Αλλά  $\cosh y$  δεν είναι 1-1  $\forall y$ , επομένως η  $\sin z$  ΔΕΝ μπορεί να είναι 1-1 πάνω στην  $x = \frac{\pi}{2}$ , η οποία εξαιρείται από το πεδίο ορισμού. Έτσι, από το πεδίο τιμών, εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \geq 1, v = 0\}$$

- Για  $x = -\frac{\pi}{2}$ , ομοίως εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \leq -1, v = 0\}$$

- Για  $x=0$ ,  $y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικον.}]{\sin z} (0, \sinh y)$  και επειδή  $\sinh y$  1-1 γν. αύξ. με πεδίο τιμών το  $\mathbb{R} \forall y$  η  $x=0$  απειον. στην  $u=0$ .

- Έστω  $x = a$  ( $a \neq \pm \frac{\pi}{2}$ ),  $a \neq 0$ .

$$\text{Τότε: } \begin{cases} u = \sin a \cosh y \\ v = \cos a \sinh y \end{cases} \implies \boxed{\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1}. \text{ Αν } a \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ τότε } \begin{cases} u > 0 \\ v \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ και}$$

αντίστοιχα για  $a \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ .

Έτσι ορίζουμε:

$$= \arcsin : E' \rightarrow E_k :$$

$$\begin{aligned} \arcsin z = w &\iff z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2} \\ &\iff e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \iff e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{4 - 4z^2}}{2} \\ &\implies iw = \log \left( z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}} \right) \\ &\implies \boxed{\arcsin z = \log \left( z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}} \right)} \end{aligned}$$