

# Σημειώσεις Διαφορικές Εξισώσεις

Καναβούρας Κωνσταντίνος  
<http://users.auth.gr/konkanant>

2016, Εαρινό εξάμηνο

# Περιεχόμενα

|   |           |
|---|-----------|
| <b>I Σεβαστιάδης</b>  | <b>2</b>  |
| 1   | 2         |
| <b>2 Διαφορική εξίσωση 1ης τάξης</b>  | <b>2</b>  |
| 2.1 Χωριζόμενες διαφορικές εξισώσεις . . . . .                                      | 2         |
| 2.2 Ομοιογενείς . . . . .   | 4         |
| 2.3 Ακριβείς . . . . .  | 7         |
| <b>3 Overview</b>   | <b>11</b> |
| 3.1 Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ - Ordinary Differential Equations) . . . . . | 11        |
| 3.2 1 <sup>ης</sup> τάξης ΔΕ . . . . .  | 12        |
| 4   | 12        |
| 4.1 ΔΕ 1 <sup>ης</sup> τάξης . . . . .  | 12        |
| <b>5 Θεωρία των Λύσεων</b>  | <b>14</b> |
| <b>6</b>  | <b>17</b> |
| 6.1 ΓΡ/ΔΕ/1 <sup>ης</sup> . . . . .   | 17        |
| 6.1.1 Bernoulli . . . . .   | 18        |
| 6.2 ΟΜ/ΓΡ/ΔΕ/2, n <sup>ης</sup> /ΣΣ . . . . .                                       | 22        |
| 6.2.1 2 <sup>ης</sup> τάξης . . . . .   | 22        |
| 6.2.2 n <sup>ης</sup> τάξης . . . . .   | 23        |
| 6.3 ΓΛ ΜΟ/ΔΕ . . . . .  | 28        |
| 6.4 ΓΡ/ΔΕ/ΜΣ: Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων . . . . .                            | 33        |
| <b>7 Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων</b>   | <b>40</b> |
| <b>8 Επίλυση ΓΡ ΔΕ με γενικευμένες/ασυνεχείς συναρτήσεις ως πηγές</b>               | <b>44</b> |
| 8.1 Συνάρτηση δέλτα - Dirac . . . . .   | 46        |
| 8.1.1 Συνάρτηση κρουστικής απόκρισης . . . . .                                      | 46        |
| <b>II Κεχαγιάς: Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί</b>                                   | <b>48</b> |
| <b>9 Κεφάλαιο 7: Εισαγωγή στην ανάλυση του Φουριερ</b>                              | <b>48</b> |
| 9.0.1 $V(t) = V_0$ . . . . .  | 48        |
| 9.0.2 $V(t) = V_0 \sin(nt)$ . . . . .   | 49        |
| 9.0.3 $V(t) = \text{square}(t)$ . . . . .   | 50        |
| <b>10 Κεφάλαιο 8: Σειρές Φουριερ</b>  | <b>51</b> |
| 10.0.1 Συνθήκες του Dirichlet . . . . .   | 51        |
| 10.0.2 . . . . .  | 53        |
| 10.1 Παράδειγμα . . . . .   | 53        |
| 10.2 . . . . .  | 54        |
| <b>11 Κεφάλαιο 9: Μετασχηματισμός Φουριερ</b>                                       | <b>58</b> |
| <b>12 Κεφάλαιο 10: Μετασχηματισμός Λαπλασε</b>                                      | <b>64</b> |
| 12.0.1 . . . . .  | 70        |
| <b>13 Κεφάλαιο 11: Γενικευμένες Συναρτήσεις</b>                                     | <b>72</b> |

|                    |    |
|--------------------|----|
| 14 ΔΕ κ Laplace    | 75 |
| 15 Μη γραμμικές ΔΕ | 77 |
| 15.1 . . . . .     | 78 |

# Μέρος Ι

## Σεβαστιάδης

Χρήστος Σεβαστιάδης

### Ορισμός: Διαφορική εξίσωση

Μια εξίσωση που αποτελείται από μια συνάρτηση και τις παραγώγους της

**Langrange's**  $x', x'', x''', x^{(4)}, \dots$

**Newton's**  $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$

**Leibniz'**  $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}$

π.χ.

$$x(t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \frac{dx(t)}{dt} = x(t) \sin(t)$$

### Ορισμός 1.1: Τάξη

**Τάξη** ονομάζεται ο μεγαλύτερος βαθμός παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

### Ορισμός 1.2: Βαθμός

**Βαθμός** ονομάζεται η μεγαλύτερη δύναμη παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

## Διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

### Ορισμός

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

## Χωριζόμενες διαφορικές εξισώσεις

Τυπική μορφή:

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)} = \frac{dx}{dt} \implies \underbrace{N(t, x) dx}_{N(x)} + \underbrace{M(t, x) dt}_{M(t)} = 0$$

Αν δηλαδή τα  $N(t, x)$ ,  $M(t, x)$  εξαρτώνται μόνο από τα  $x$  και  $t$  αντίστοιχα, η εξίσωση ονομάζεται **χωριζόμενη**, και το αποτέλεσμά της μπορεί να βρεθεί με ολοκληρώματα:

$$\int N(x) dx + \int M(t) dt = c$$

**Άσκηση: 2.1**

$$x dx - t^2 dt = 0$$

$$N(x) = x, \quad M(t) = -t^2$$

$$\int x dx + \int (-t^2) dt = c \implies$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}t^3 = c \implies$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}t^3 + 2c} \implies$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}t^3 + \kappa}$$

$$\text{με } \kappa = 2c$$

**Άσκηση: 2.2**

$$x' = x^2 t^3$$

$$\implies \frac{dx}{dt} = x^2 t^3$$

$$\implies \frac{1}{x^2} dx - t^3 dt = 0$$

$$\implies \int \frac{1}{x^2} dx + \int (-t^3) dt = c$$

$$\implies -\frac{1}{x} - \frac{t^4}{4} = c$$

$$\implies -\frac{1}{x} = c + \frac{t^4}{4}$$

$$\implies -\frac{4}{x} = 4c + t^4$$

$$\implies x = \frac{-4}{t^4 + \kappa}, \quad \text{με } \kappa = 2c$$

**Άσκηση: 2.3**

$$x' = \frac{t+1}{x^4+1}$$

$$\implies \frac{dx}{dt} = \frac{t+1}{x^4+1}$$

$$\implies (x^4+1) dx + (-t-1) dt = 0$$

$$\implies \int (x^4+1) dx + \int (-t-1) dt = c$$

$$\implies \frac{x^5}{5} + x - \frac{t^2}{2} - t = c$$

Παρατηρούμε ότι, χωρίς αρχική συνθήκη, βρίσκουμε γενικές λύσεις ως αποτέλεσμα. Με τη χρήση μιας αρχικής συνθήκης, μπορούμε να βρούμε και την ειδική λύση της εξίσωσης.

**Άσκηση: 2.4**

$$e^t dt - x dx = 0; \quad x(0) = 1 \leftarrow \text{αρχική συνθήκη}$$

$$\Rightarrow \int x dx + \int (-e^t) dt = c$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - e^t = c$$

$$\Rightarrow x^2 = 2e^t + 2c$$

$$\Rightarrow x^2 = 2e^t + \kappa, \quad \text{με } \kappa = 2c$$

Όμως  $x(0) = 1$ , άρα:

$$\begin{cases} x^2 = 2e^t + \kappa \\ x(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x(0)^2 = 2e^0 + \kappa \Rightarrow \boxed{\kappa = -1}$$

Επομένως τελικά:

$$x^2 = 2e^t - 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2e^t - 1} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{2e^t - 1}}$$

Η αρχική συνθήκη πράγματι επαληθεύει το αποτέλεσμα  $x$ . Πρέπει όμως και  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2e^t - 1 \geq 0$ .

Από τη διαφορική εξίσωση έχουμε  $x' = \frac{e^t}{x}$ , άρα πρέπει  $2e^t - 1 > 0 \Rightarrow \boxed{t > \ln \frac{1}{2}}$ .

$$\int_{x_0}^x N(x) dx + \int_{t_0}^t M(t) dt = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

**Άσκηση: 2.5**

$$x \cos x dx + (1 - 6t^5) dt = 0; \quad t(\pi) = 0$$

$$x_0 = \pi, \quad t_0 = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^x x \cos x dx + \int_0^t (1 - 6t^5) dt = 0$$

$$\Rightarrow x \sin x \Big|_{\pi}^x + \cos x \Big|_{\pi}^x + (t - t^6) \Big|_0^t = 0$$

$$\Rightarrow x \sin x + \cos x + 1 + t - t^6$$

$$\Rightarrow \boxed{x \sin x + \cos x + 1 = t - t^6}$$

**Ομοιογενείς**

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)}$$

**Ορισμός 2.1**

Αν  $\forall a \in \mathbb{R} : f(at, ax) = f(t, x)$ , λέμε ότι η εξίσωση είναι **ομοιογενής**.

### Θεώρημα

Αν μια εξίσωση είναι ομοιογενής, μπορούμε να την λύσουμε μειώνοντάς/μετατρέποντάς την σε χωριζόμενη, εφαρμόζοντας το μαθηματικό κόλπο που ονομάζεται "αντικατάσταση μεταβλητής", δηλαδή, όπου  $u$  συνάρτηση:

$$x = ut \implies \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$$

### Άσκηση: 2.6

$$x' = \frac{x+t}{t}$$

$\implies \frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{t}$ , μη χωριζόμενη.

$$f(t, x) = \frac{dx}{dt}, \quad f(at, ax) = \frac{ax + at}{at} = \frac{x+t}{t} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω  $x = ut$ ,  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$ , άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u &= \frac{ut+t}{t} \\ \implies \frac{du}{dt}t + u &= u + 1 \\ \implies t \frac{du}{dt} &= 1 \\ \implies \frac{1}{t} dt - du &= 0 \text{ χωριζόμενη} \\ \implies \int \frac{1}{t} dt + \int (-1) du &= c \\ \implies \ln|t| - u &= c \\ \implies u = \ln|t| - c \text{ με } c = -\ln|\kappa| \\ \implies u &= \ln|\kappa t| \\ \implies \frac{x}{t} = \ln|\kappa t| &\implies x = t \ln|\kappa t| \end{aligned}$$

**Άσκηση: 2.7**

$$x' = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3}$$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3}$ , μη χωριζόμενη.

$$f(t, x) = \frac{dx}{dt}, \quad f(at, ax) = \frac{2(ax)^4 + (at)^4}{(at)(ax)^3} = \frac{a^4 2x^4 + a^4 t^4}{a^4 tx^3} = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω  $x = ut$ ,  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$ , άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u &= \frac{2(ut)^4 + t^4}{t(ut)^3} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t + u &= \frac{2u^4 t^4 + t^4}{u^3 t^3} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t + u &= \frac{2u^4 + 1}{u^3} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t &= \frac{2u^4 + 1}{u^3} - u = \frac{u^4 + 1}{u^3} \\ \Rightarrow \frac{u^3}{u^4 + 1} du - \frac{1}{t} dt &= 0 \text{ χωριζόμενη} \\ \Rightarrow \int \frac{u^3}{u^4 + 1} du + \int \frac{-1}{t} dt &= c \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \ln(u^4 + 1) - \ln|t| &= c \\ \Rightarrow \boxed{u^4 + 1 = (\kappa t)^4} \text{ με } c = \ln|x| \\ x = ut \Rightarrow u = \frac{x}{t} \Rightarrow \left(\frac{x}{t}\right)^4 + 1 &= (\kappa t)^4 \\ \Rightarrow \frac{x^4}{t^4} + 1 &= \kappa^4 t^4 \\ \Rightarrow \boxed{x^4 = c_1 t^8 - t^4} \text{ με } c_1 = \kappa^4 \end{aligned}$$



**Άσκηση: 2.8**

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{tx}; x(1) = -2$$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{t^2 + x^2}{tx}$ , μη χωριζόμενη.

$$f(t, x) = \frac{dx}{dt}, \quad f(at, ax) = \frac{(at)^2 + (ax)^2}{(at)(ax)} = \frac{a^2 t^2 + a^2 x^2}{a^2 tx} = \frac{t^2 + x^2}{tx} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω  $x = ut$ ,  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$ , άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u &= \frac{t^2 + (ut)^2}{t(ut)} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t + u &= \frac{t^2 + t^2 u^2}{t^2 u} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t + u &= \frac{1 + u^2}{u} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t &= \frac{1 + u^2 - u^2}{u} = \frac{1}{u} \\ \Rightarrow u du - \frac{1}{t} dt &= 0 \text{ χωριζόμενη} \\ \Rightarrow \int u du + \int \frac{-1}{t} dt &= c \\ \Rightarrow \frac{u^2}{2} - \ln|t| &= c \\ \Rightarrow u^2 &= 2 \ln|t| + 2c \\ \Rightarrow \boxed{u^2 = \ln t^2 + \kappa} &\text{ με } \kappa = 2c \\ x = ut \Rightarrow u = \frac{x}{t} \Rightarrow \frac{x^2}{t^2} &= \ln t^2 + \kappa \\ \Rightarrow \boxed{x^2 = t^2 \ln t^2 + \kappa t^2} \end{aligned}$$

Επειδή  $x(1) = -2$ , έχουμε:

$$(-2)^2 = 1^2 \ln 1^2 + \kappa 1^2 \Rightarrow 4 = 0 + \kappa \Rightarrow \boxed{\kappa = 4}$$

Επομένως τελικά:

$$x^2 = t^2 \ln t^2 + 4t^2 \Rightarrow \boxed{x = -\sqrt{t^2 \ln t^2 + 4t^2}}$$

**Ακριβείς****Ορισμός**

Όταν:

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t}$$

τότε η εξίσωση λέγεται ακριβής ή πλήρης.

Υπάρχει  $dF(t, x) = N(t, x) dx + M(t, x) dt$  με Γενική Λύση  $F(t, x) = c$ .

**Άσκηση: 2.16**

$$(t + \sin x) dt + (t \cos x - 2x) dx = 0$$

$$\underbrace{(t + \sin x) dt}_{M(t,x) dt} + \underbrace{(t \cos x - 2x) dx}_{N(t,x) dx} = 0$$

Δοκιμή:

$$\begin{cases} M(t, x) = t + \sin x \\ N(t, x) = t \cos x - 2x \end{cases} \implies \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \cos x = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = \cos x$$

Άρα η ΔΕ είναι ακριβής, επομένως υπάρχει  $F(t, x)$  τέτοια ώστε:

$$dF = N(t, x) dx + M(t, x) dt$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad \leftarrow \text{ολικό διαφορικό της } F$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = N(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = M(t, x) \xrightarrow{\text{ολοκλήρωση ως προς } t}$$

$$\implies \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt = \int (t + \sin x) dt \implies$$

$$\implies F(t, x) = \frac{1}{2}t^2 + t \sin x + \overbrace{h(x)}^{\text{ολοκληρωτική σταθερά}}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= t \cos x + h'(x) \\ \implies t \cos x - 2x &= t \cos x + h'(x) \\ \implies h'(x) &= -2x \\ \implies \int h'(x) dx &= \int (-2x) dx \\ \implies h(x) &= -x^2 + c_1 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \frac{1}{2}t^2 + t \sin x - x^2 + c_1 = c \xrightarrow{c_2 = c - c_1} \\ \implies \frac{1}{2}t^2 + t \sin x - x^2 &= c_2 \quad \text{Γενική λύση} \end{aligned}$$

Άσκηση: 2.17

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2 + xe^{tx}}{2x - te^{tx}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2 + xe^{tx}}{2x - te^{tx}} \xrightarrow{\text{διαφορική μορφή}} \underbrace{(2 + xe^{tx})}_{M(t,x)=2+xe^{tx}} dt + \underbrace{(te^{tx} - 2x)}_{N(t,x)=te^{tx}-2x} dx = 0$$

Δοκιμή:

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = e^{tx} + xte^{tx} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = xte^{tx} + e^{tx}$$

συνεπώς είναι ακριβής, οπότε υπάρχει  $F(t, x)$ , με  $dF = M(t, x) dt + N(t, x) dx$ , με λύση  $F(t, x) = c$ .

$$\text{Ολικό διαφορικό} \rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= N(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = M(t, x) = 2 + xe^{tx} \xrightarrow{\text{ολοκλήρωση ως προς } t} \\ \Rightarrow \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt &= \int (2 + xe^{tx}) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow F(t, x) &= 2t + e^{tx} + h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Παραγωγή ως προς } x \rightarrow \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= te^{tx} + h'(x) \Rightarrow te^{tx} + h'(x) = te^{tx} - 2x \Rightarrow \\ &\Rightarrow h'(x) = -2x \Rightarrow \\ &\Rightarrow h(x) = \int (-2x) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow h(x) = -x^2 + c_1 \end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$\begin{aligned} F(t, x) &= 2t + e^{tx} - x^2 + c_1 \\ \Rightarrow 2t + e^{tx} - x^2 + c_1 &= c \\ \Rightarrow \boxed{2t + e^{tx} - x^2} &= c_2, \quad c_2 = c - c_1 \end{aligned}$$

**Άσκηση: 2.19**

$$(2x^2t - 2x^3) dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2) dx = 0$$

$$\underbrace{(2x^2t - 2x^3)}_{M(t,x)=2x^2t-2x^3} dt + \underbrace{(4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)}_{N(t,x)=4x^3-6x^2t+2xt^2} dx = 0$$

$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 4xt - 6x^2 = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = 0 - 6x^2 + 4xt$ , ΔΕ ακριβής, οπότε υπάρχει  $F(t, x)$  με  $dF(t, x) = M(t, x) dt + N(t, x) dx$  με λύση  $F(t, x) = c$ .

$$dF(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = N(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = M(t, x) = 2x^2t - 2x^3 \implies$$

$$\implies \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt = \int (2x^2t - 2x^3) dt \implies$$

$$\implies F(t, x) = x^2t^2 - 2x^3t + h(x)$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 2xt^2 - 6x^2t + h'(x) \implies$$

$$\implies \cancel{2xt^2} - \cancel{6x^2t} + h'(x) = 4x^3 - 6x^2t + \cancel{2xt^2} \implies$$

$$\implies h'(x) = 4x^3 \xrightarrow{\text{ολοκλ.}} h(x) = x^4 + c_1$$

Άρα:

$$F(t, x) = x^2t^2 - 2x^3t + x^4 + c_1 \implies$$

$$\implies x^2t^2 - 2x^3t + x^4 + c_1 = c \implies$$

$$\implies x^2t^2 - 2x^3t + x^4 = c - c_1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} (x^2 - xt)^2 = c_2 \\ c_2 = c - c_1 \end{cases} \implies$$

$$\xrightarrow{c_2 = \pm \sqrt{c_2}} x^2 - xt = c_3 \xrightarrow{\substack{ax^2+bx+c=0 \\ \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}} x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4c_3}}{2}, \quad c_3 = \pm \sqrt{c_2}$$

$$\implies \boxed{x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4c_3}}{2}, \quad c_3 = \pm \sqrt{c_2}}$$

**Άσκηση: 2.20**

$$2tx \, dt + (1 + t^2) \, dx = 0; \quad x(2) = -5$$

$$\underbrace{2tx}_{M(t,x)} \, dt + \underbrace{(1 + t^2)}_{N(t,x)} \, dx = 0; \quad x(2) = -5$$

$$M(t, x) = 2tx, \quad N(t, x) = 1 + t^2 \quad (1)$$

$F(t, x)$ , με  $dF(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x} \, dx + \frac{\partial F}{\partial t} \, dt$ .

$$dF(t, x) = N(t, x) \, dx + M(t, x) \, dt$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = N(t, x) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} &= M(t, x) = 2tx \implies \\ \implies \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \, dt &= \int (2tx) \, dt \implies \end{aligned}$$

$$\implies F(t, x) = t^2 x + h(x) \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= t^2 + h'(x) \\ (2), (1) \end{aligned} \right. \implies$$

$$\implies t^2 + h'(x) = 1 + t^2 \implies h'(x) = 1 \implies$$

$$\implies \left\{ \begin{aligned} h(x) &= x + c_1 \\ (3) \end{aligned} \right. \implies \left\{ \begin{aligned} F(t, x) &= t^2 x \\ (4) \end{aligned} \right. \implies t^2 x + c_1$$

$$\implies t^2 x + x = c_2 \quad (c_2 = c - c_1) \implies x = \frac{c_2}{t^2 + 1} \implies (x(2) = 5) 5 = \frac{c_2}{2^2 + 1} \implies x = \frac{-25}{t^2 + 1}$$

$$\implies F(t, x) = t^2 x + x + c_1 \quad (4)$$

**Overview****Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ - Ordinary Differential Equations)****Ορισμός 3.1**

Εμπλέκουν:

- μία ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ.  $t, x$ )
- μια εξαρτημένη και τις παραγώγους της (π.χ.  $i, y, u$ )

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

**Μη συνήθειες** είναι οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Partial Differential Equations - PDE) που εμπλέκουν:

- πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές (π.χ.  $x, y, z$ )

- μία εξαρτημένη μεταβλητή και τις μερικές παραγώγους της

## 1<sup>η</sup> τάξης ΔΕ

### Ορισμός 3.2

όταν

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

### Ορισμός 3.3: Τυπικής μορφής

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)}$$

Διαφορική μορφή

$$N(t, x) dx + M(t, x) dt = 0$$

### Ορισμός 3.4: Χωριζόμενη

όταν

$$\begin{cases} N(t, x) = N(x) \\ M(t, x) = M(t) \end{cases}$$

τότε

$$N(x) dx + M(t) dt = 0$$

με λύση

$$\int N(x) dx + \int M(t) dt = c$$

ή

$$\int_{x_0}^x N(x) dx + \int_{t_0}^t M(t) dt = 0$$

### Ορισμός 3.5: Ομογενής - Ομοιογενής

όταν  $\forall a \in \mathbb{R}$

$$F(at, ax) = f(t, x)$$

τότε θέτω  $x = ut$ , άρα  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$

Το τοστ είναι η καλύτερη τροφή

## ΔΕ 1<sup>η</sup> τάξης

ΤΜ (Τυπική μορφή):  $x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$

ΔΜ (Διαφορική μορφή):  $N(t, x) dx + M(t, x) dt = 0$

Ακριβής:  $\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} \rightarrow dF(t, x)$

$$dF(t, x) = N(t, x) dx + M(t, x) dt$$

$$F(t, x) = c$$

$$\underbrace{G(t, x) \cdot (N(t, x) dx + M(t, x) dt)} = 0$$

Μπορεί να υπάρχει τέτοια συνάρτηση

### Άσκηση: 2.23 Ολοκληρωτικός παράγοντας, επίλυση μέσω ελέγχου

$$x dt - t dx = 0$$

$$M(t, x) = x, \quad N(t, x) = t$$

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = -1 \text{ δεν είναι ακριβής.}$$

$$\text{υποφύσιος} \quad \overbrace{G(t, x)} = -\frac{1}{t^2}$$

$$-\frac{1}{t^2}(x dt - t dx) = 0 \implies -\frac{x}{t^2} dt + \frac{1}{t^2} dx = 0$$

$$M(t, x) = -\frac{x}{t^2} \quad N(t, x) = \frac{1}{t}$$

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = -\frac{1}{t^2} = \overbrace{\frac{\partial N(t, x)}{\partial t}}^{\text{ακριβής}} = -\frac{1}{t^2}$$

$$\text{Av } \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) \equiv g(t) \implies G = e^{\int g(t) dt}$$

Με διαφορά μερικών παραγώγων:

$$\text{Av } \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = h(x) \implies G = e^{\int h(x) dx}$$

### Άσκηση: 2.25

$$x^2 dt + tx dx = 0, \quad M(t, x) = x^2, \quad N(t, x) = tx$$

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = x \text{ όχι ακριβής}$$

$$\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{1}{x^2} (2x - x) = \frac{1}{x} = h(x)$$

$$G(t, x) = e^{-\int h(x) dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} (x^2 dt + tx dx) = 0 \implies x dt + t dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1 = \frac{\partial N}{\partial t} = 1 \text{ ακριβής}$$

Μορφή των όρων  $N, M$  αν  $M = xf(tx)$  και  $N = tg(tx)$ , τότε:

$$G(t, x) = \frac{1}{tM - xN}$$

**Άσκηση: 2.26**

$$x' = \frac{tx^2 - x}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{tx^2 - x}{t} \Rightarrow t dx - (tx^2 - x) dt = 0 \Rightarrow x(1 - tx) dt + t dx = 0$$

$$M(t, x) = x \cdot (1 - tx) \Rightarrow \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = 1 - 2tx \neq \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = 1 \text{ όχι ακριβής}$$

αλλά:  $M = xf(t)$  και  $N = tg(tx)$ .

Επομένως:

$$G(t, x) = \frac{1}{tM - xN} = \frac{1}{tx(1 - tx) - xt} = \frac{1}{-t^2x^2} = -\frac{1}{(tx)^2}$$

Είναι:

$$-\frac{1}{(tx)^2} (x(1 - tx) dt + t dx) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{tx - 1}{t^2x} dt - \frac{1}{tx^2} dx = 0$$

και συνεχίζω με τη μέθοδο της ακριβούς.

**Θεωρία των Λύσεων**

Μορφή ΔΕ  $n^{\text{ος}}$  τάξης:

$$b_n(t) \cdot x^{(n)} + b_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \dots + b_2(t)x'' + b_1(t)x' + b_0(t)x = g(t)$$

όπου:  $g(t), b_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) εξαρτώνται αποκλειστικά από το  $t$ .

Αν  $g(t) \equiv 0$ , τότε η ΔΕ είναι ομογενής (ΟΜ - homogenous).

Αν  $g(t) \neq 0$ , τότε η ΔΕ είναι μη ομογενής (ΜΟ - non-homogenous).

Όταν όλοι οι συντελεστές  $b_j(t)$  είναι σταθερές, τότε ΔΕΣΣ (σταθερών συντελεστών).

Όταν ένας τουλάχιστον  $b_j(t)$  δεν είναι σταθερά, ΔΕΜΣ (μεταβλητών συντελεστών).

**Θεώρημα 5.1**

ΔΕ  $n$  τάξης με  $n$  ΑΣ (αρχικές συνθήκες):

$$x(t_0) = c_0, x'(t_0) = c_1, x''(t_0) = c_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

$$\Delta E \quad b_n(t)x^{(n)} + b_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + b_2(t)x'' + b_1(t)x' + b_0(t)x = g(t)$$

Αν  $g(t)$  και  $b_i$  συνεχείς σε διάστημα  $\phi$  που περιλαμβάνει το  $t_0$  και  $b_n(t) \neq 0$  στο  $\phi$ , τότε το πρόβλημα έχει μία μοναδική λύση (ορισμένη στο  $\phi$ ).

Διαιρώ με  $b_n(t)$  και έχω:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = \phi(t)$$

$$a'_j(t) = \frac{b_j(t)}{b_n(t)} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\phi(t) = \frac{g(t)}{b_n(t)}$$



### Διαφορικός τελεστής $L(x)$

$$L(x) \equiv x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_2(t) \cdot x'' + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x$$

$$L(x) = \phi(t) \quad \text{ΜΟ ΓΡ ΔΕ } n^{\text{ης}} \text{ τάξης}$$

$$L(x) = 0 \quad \text{ΟΜ}$$

#### Ορισμός 5.1

Το σύνολο  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$  είναι ΓΕ (γραμμικά εξαρτημένο) για ένα διάστημα  $\Delta$  όταν υπάρχουν συντελεστές όχι όλοι μηδενικοί τέτοιοι ώστε:

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) \equiv 0 \quad \Delta$$

#### Θεώρημα 5.2

Έστω η ομογενής  $n$ -οστής τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση  $L(x) = 0$ .

Αν  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  είναι λύσεις, τότε και ο γραμμικός τους συνδυασμός είναι γενική λύση της ομογενούς:

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) \quad \text{ΓΛ (Γενική Λύση)}$$

#### Θεώρημα 5.3: Βροσκιανή

Ορίζουσα  $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} W \neq 0 \text{ έστω σε ένα σημείο } \in \Delta & \rightarrow \text{ΓΑ (Γραμμικά Ανεξάρτητες)} \\ W \equiv 0 \text{ και κάθε συνάρτηση είναι λύση της ίδιας ΔΕ} & \rightarrow \text{ΓΕ (Γραμμικά Εξαρτημένες)} \end{cases}$$

#### Θεώρημα 5.4

$$\overbrace{L(x)}^{\text{Ομογενής ΔΕ}} = \phi(t)$$

$$\text{Έστω } \begin{cases} x_n(t) & \text{ΓΛ της ΟΜ (Ομογενούς)} \\ x_p(t) & \text{ΕΛ της ΜΟ (Μη ομογενούς)} \end{cases}$$

Τότε είναι ΓΛ ΜΟ (Γενική Λύση Μη Ομογενούς)  $n$ :

$$x(t) = x_n(t) + x_p(t)$$

### Άσκηση: 3.2

$$\{1-t, 1+t, 1-3t\}$$

$$\begin{aligned} W(1-t, 1+t, 1-3t) &= \begin{vmatrix} 1-t & 1+t & 1-3t \\ \frac{d(1-t)}{dt} & \frac{d(1+t)}{dt} & \frac{d(1-3t)}{dt} \\ \frac{d^2(1-t)}{dt^2} & \frac{d^2(1+t)}{dt^2} & \frac{d^2(1-3t)}{dt^2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-t & 1+t & 1-3t \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(β)

$$c_1(1-t) + c_2(1+t) + c_3(1-3t) = 0$$

$$\underbrace{(c_1 + c_2 - 3c_3)}_0 t + \underbrace{(c_1 + c_2 + c_3)}_0 \equiv 0$$

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 - 3c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2c_3c_2 \\ c_2 = c_3 \\ c_3 \text{ αυθαίρετη σταθερά} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 1 \\ c_1 = -2 \\ c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ΓΕ}$$

### Άσκηση: 3.3

Βρείτε την Βροσκιανή:

$$\{t, t^2, t^3\}$$

$$\begin{aligned} W(t, t^2, t^3) &= \begin{vmatrix} t & t^2 & t^3 \\ \frac{d(t)}{dt} & \frac{d(t^2)}{dt} & \frac{d(t^3)}{dt} \\ \frac{d^2(t)}{dt^2} & \frac{d^2(t^2)}{dt^2} & \frac{d^2(t^3)}{dt^2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} t & t^2 & t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 2t^3 \end{aligned}$$

$$(-\infty, \infty), t = 3, W = 54 \neq 0 \Rightarrow \text{ΓΑ, θαυμάσια!}$$

### Άσκηση: 3.4

$$\{t^3, |t^3|\} \quad [-1, 1]$$

$$c_1 t^3 + c_2 |t^3| \equiv 0$$

$$|t^3| = t^3, \quad t \geq 0 \quad / \quad |t^3| = -t^3, \quad t \leq 0$$

$$\begin{cases} c_1 t^3 + c_2 t^3 \equiv 0 & t \geq 0 \\ c_1 t^3 - c_2 t^3 \equiv 0 & t < 0 \end{cases} \implies c_1 = c_2 = 0 \text{ ΓΑ}$$

$$\frac{d|t^3|}{dt} = \begin{cases} 3t^2 & \text{αν } t > 0 \\ 0 & \text{αν } t = 0 \\ -3t^2 & \text{αν } t < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \text{για } t > 0 : & W(t^3, |t^3|) = \begin{vmatrix} t^3 & t^3 \\ 3t^2 & 3t^2 \end{vmatrix} \equiv 0 \\ \text{για } t = 0 : & W(t^3, |t^3|) = 0 \\ \text{για } t < 0 : & W(t^3, |t^3|) = \begin{vmatrix} t^3 & -t^3 \\ 3t^2 & -3t^2 \end{vmatrix} \equiv 0 \end{cases}$$

### Άσκηση: 3.5

$$x'' - 2x' + x = 0$$

$$e^t, te^t \text{ Λύσεις}$$

Ο γραμμικός συνδυασμός  $X = c_1 e^t + c_2 t e^t$  είναι λύση της εξίσωσης;

$$W(e^t, te^t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0$$

Άρα οι εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, άρα, επειδή είναι λύσεις της διαφορικής, ο γραμμικός συνδυασμός τους είναι γενική λύση.

$$\text{Μη ομογενής: } x'' - 2x' + x = e^{3t}$$

$$\text{Ειδική λύση: } \frac{1}{4} e^{3t} \rightarrow x_p = \frac{1}{4} e^{3t}$$

$$\text{Γενική λύση μη ομογενούς: } \underbrace{x(t)}_{\text{ΜΟ}} = \underbrace{x_h(t)}_{\text{ΟΜ}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{ΜΟ}}$$

Άρα:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{4} e^{3t}$$

### ΓΡ/ΔΕ/1<sup>ης</sup>

- $\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)$   
ή  $\underbrace{f(t, x)}_{f(t, x) = \frac{dx}{dt}} = q(t) - p(t)x$

Τότε ΟΠ (Ολοκληρωτικός Παράγοντας)  $G(t) = e^{\int p(t) dx}$ . Πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό

παράγοντα παίρνουμε:

$$G(t) \frac{dx}{dt} + G(t)p(t)x = G(t)q(t)$$

ή

$$\frac{d(Gx)}{dt} = Gq(t)$$

που είναι μια ακριβής διαφορική εξίσωση.

Λύση:

$$x(t) = e^{-\int p(t) dt} \left( \int e^{\int p(t) dt} q(t) dt + c \right)$$

Αν τα  $p(t) = a$  και  $q(t) = b$  είναι σταθερά:

$$\frac{dx}{dt} + ax = b, \quad x(t) = e^{-at} \left( \frac{b}{a} e^{at} + c \right) = \frac{b}{a} + ce^{-at}$$

## Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)x^n, \quad \text{με } n \neq 1, 0$$

Αντικατάσταση μεταβλητών:  $u = x^{1-n} \rightarrow x, \quad x'$

### Άσκηση: 4.1

ΓΡ/ΔΕ/1<sup>ns</sup>

$$x' - 3x = 6$$

$$\frac{dx}{dt} + ax = b$$

$$a = -3, \quad b = 6$$

$$x(t) = \frac{b}{a} + ce^{-at} = \frac{6}{-3} + ce^{3t} \implies x(t) = ce^{3t} - 2$$

### Άσκηση: 4.2

ΓΡ/ΔΕ/1<sup>ns</sup>

$$\frac{dx}{dt} - 2tx = t$$

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t) \implies \begin{cases} p(t) = -2t \\ q(t) = t \end{cases}$$

$$\text{ΟΠ } G(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int (-2t) dt}$$

$$\int (-2t) dt = -t^2 \quad \text{άρα } G(t) = e^{-t^2}$$

$$e^{-t^2} \frac{dx}{dt} - 2te^{-t^2} x = te^{-t^2} \implies \frac{d}{dt} (xe^{-t^2}) = te^{-t^2} \implies \int \frac{d}{dt} (xe^{-t^2}) dt = \int te^{-t^2} dt \implies$$

$$\implies xe^{-t^2} = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + c \implies \boxed{x = ce^{t^2} - \frac{1}{2}}$$

**Άσκηση: 4.3**

$$x' + \left(\frac{4}{t}\right)x = t^4$$

$$\begin{aligned} x' + p(t)x &= t^4 & p(t) &= \frac{4}{t}, \quad q(t) = t^4 \\ G(t) &= e^{\int p(t) dt} = e^{\int \frac{4}{t} dt} = e^{4 \ln |t|} = e^{\ln t^4} = t^4 \\ t^4 \frac{dx}{dt} + t^4 \left(\frac{4}{t}\right)x &= t^4 \cdot t^4 \implies \frac{dx}{dt} (t^4 x) = t^8 \implies \\ \implies \int \frac{d}{dt} (t^4 x) dt &= \int t^8 dt \implies t^4 x = \frac{1}{9} t^9 + c \implies \boxed{x = \frac{1}{9} t^5 + \frac{c}{t^4}} \end{aligned}$$

**Άσκηση: 4.4**

$$\begin{aligned} x' + x &= \sin t \\ x(\pi) &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t) \quad p(t) = 1, \quad q(t) = \sin t$$

$$G(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int 1 dt} = e^t$$

$$\begin{aligned} e^t (x' + x) &= e^t \sin t \implies \\ \implies \int \frac{d}{dt} (e^t x) &= \int e^t \sin t dt \implies \\ \implies e^t x &= \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + c \implies \\ \implies \boxed{x(t) = ce^{-t} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t} \\ 1 &= ce^{-\pi} + \frac{1}{2} \sin \pi - \frac{1}{2} \cos \pi \implies c = e^\pi \\ \text{ΕΛ } x(t) &= \frac{1}{2} e^\pi e^{-t} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \implies \\ \implies x(t) &= \frac{1}{2} (e^{\pi-t} + \sin t - \cos t) \end{aligned}$$

**Άσκηση: 4.6**

$$\frac{dz}{dx} - xz = -x; \quad z(0) = 4$$

$$p(x) = -x, \quad q(x) = -x$$

$$G(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int (-x) dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \left( \frac{dz}{dx} - xz \right) = e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) \implies$$

$$\frac{d}{dx} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} z \right) = e^{-\frac{x^2}{2}} z \implies$$

$$\int \frac{d}{dx} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} z \right) dx = \int \left( e^{-\frac{x^2}{2}} x \right) dx \implies$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} z = e^{-\frac{x^2}{2}} + c \implies$$

$$\boxed{z = ce^{\frac{x^2}{2}+1}} \quad \Gamma\Lambda$$

$$-4 = ce^{\frac{0^2}{2}} + 1 \implies c = -5 \implies \boxed{z(x) = -5e^{\frac{x^2}{2}} + 1} \quad \text{ΕΛ}$$

**Άσκηση: 4.7**

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{2}{3}x^4$$

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$G(x) = e^{\int \left(-\frac{2}{x}\right)} = e^{-2 \ln |x|} = e^{\ln x^{-2}}$$

$$G(x) = x^{-2}$$

$$x^{-2} \left( z' - \frac{2}{x}z \right) = \frac{2}{3}x^4 x^{-2} \implies \dots \implies z(x) = cx^2 + g^2 x^5$$

Άσκηση: 4.10

$$y' + xy = xy^2$$

Bernoulli

$$u = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1} \implies$$

$$u = \frac{1}{y} \implies y = \frac{1}{u} \text{ και } y' = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2} u'$$

$$-\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} + x \frac{1}{u} = x \left( \frac{1}{u} \right)^2 \implies u' - xu = -x$$

$$G(x) = e^{\int (-x) dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad e^{-\frac{x^2}{2}} u' - e^{-\frac{x^2}{2}} xu = e^{-\frac{x^2}{2}} x \implies$$

$$\frac{d}{dx} \left( u e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{d}{dx} \left( u e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = \int \left( -x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \implies$$

$$u e^{-\frac{x^2}{2}} + c \implies \boxed{u = c e^{\frac{x^2}{2}} + 1} \quad \Gamma \Lambda \frac{1}{y} = c e^{\frac{x^2}{2}} + 1 \implies \boxed{y(x) = \frac{1}{c e^{\frac{x^2}{2}} + 1}}$$

**Άσκηση: 4.11**

$$y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^{\frac{1}{3}}$$

$$n = \frac{1}{3}, \quad u = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}} \implies y = u^{\frac{3}{2}}$$

$$\implies y' = \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}u'$$

Άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}u' - \frac{3}{x}u^{\frac{3}{2}} = x^4 \left(u^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \implies$$

$$\frac{3}{2}u'u - \frac{3}{x}u^2 = x^4 u \implies$$

$$\frac{3}{2}u' - \frac{3}{x}u = x^4 \implies$$

$$u' - \frac{2}{x}u = \frac{2}{3}x^4$$

$$\frac{du}{dt} + p(t)u = q(t)$$

$$G(x) = e^{\int \left(-\frac{2}{x}\right) dx} = e^{-2 \ln |x|} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)u' + \left(\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x}\right)u = \frac{1}{x^2} \frac{2}{3}x^4 \implies$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-2}u) = \frac{2}{3}x^2 \xrightarrow{\text{ολοκλ.}}$$

$$\int \frac{d}{dx}(x^{-2}u) dx = \int \frac{2}{3}x^2 dx \implies x^{-2}u = \frac{2}{9}x^3 + c \implies$$

$$u(x) = cx^2 + \frac{2}{9}x^5 \implies$$

$$y^{\frac{2}{3}} = cx^2 + \frac{2}{9}x^5 \implies$$

$$y = \pm \left(cx^2 + \frac{2}{9}x^5\right)^{\frac{3}{2}}$$

**ΟΜ/ΓΡ/ΔΕ/2, $n^{\text{ns}}$ /ΣΣ**

Ομογενείς Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις  $2^{\text{ns}}$  και  $n^{\text{ns}}$  τάξης με Σταθερούς Συντελεστές

$2^{\text{ns}}$  τάξης

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

**Χαρακτηριστική εξίσωση ΧΕ**

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \xrightarrow{\text{παραγοντοποιείται}} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

(1)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\Gamma\Lambda \quad \boxed{x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}$$



(2)  $\lambda_1 = a + ib$  και  $\lambda_2 = a - ib$

$$\text{ΓΛ } x(t) = c_1 e^{(a+ib)t} + c_2 e^{(a-ib)t}$$

$$x(t) = \kappa_1 e^{at} \cos bt + \kappa_2 e^{at} \sin bt$$

$$\begin{cases} \kappa_1 = c_1 + c_2 \\ \kappa_2 = i(c_1 - c_2) \end{cases} \left( \begin{array}{l} \text{λύσεις στο } \mathbb{R} \\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\ c_1, c_2 \rightarrow \text{συζυγείς} \end{array} \right)$$

(3)  $\lambda_1 = \lambda_2$  διπλή

$$\text{ΓΛ } x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$$

$n^{\text{ος}}$  τάξης

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

με λύσεις  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

(1) Λύσεις  $\in \mathbb{R}$  διακριτές

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

(2) Μερικές  $\mathbb{R}$  διακριτές, μερικές  $\mathbb{C}$  συζυγείς Ομοίως.

(3)  $\lambda_k$  πολλαπλότητας  $p$  Δηλαδή  $(\lambda - \lambda_k)^p$  παράγοντας της ΧΕ αλλά όχι  $n(\lambda - \lambda_k)^{p+1}$ .  
 $p$  ΓΑ λύσεις

$$e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}, t^2 e^{\lambda_k t}, \dots, t^{p-1} e^{\lambda_k t}$$

#### Άσκηση: 5.1

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

Άρα:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

#### Άσκηση: 5.4

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 21y = 0$$

$$\text{ΧΕ } \lambda^2 + 10\lambda + 21 = 0 \implies (\lambda + 3)(\lambda + 7) \implies c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-7t}$$

#### Άσκηση: 5.11

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

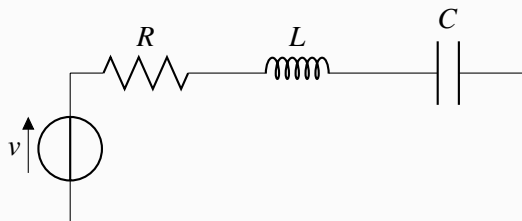
$$\text{ΧΕ } \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \implies (\lambda - 4)^2 = 0 \implies \lambda_k = 4 \text{ διπλή}$$

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

**Άσκηση: 5.5**

$$RLC, \text{ σειρά, } R = 10\Omega, C = 10^{-2}\text{F}, L = \frac{1}{2}\text{H}, v = 12\text{V}$$

Αρχικά κανένα ρεύμα, κανένα φορτίο, τάση εφαρμόζεται για  $t = 0$ .  
Να βρεθεί  $i$  για  $t$  μετά το 0.



$$\begin{cases} Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q - v = 0 \\ i = \frac{dq}{dt} \end{cases} \xrightarrow[\text{διαφ.}]{t} R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L} \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{10}{1/2} \frac{di}{dt} + \frac{1}{1/2(10^{-2})}i = \frac{1}{1/2} \frac{d}{dt}(12) \xrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + 20 \frac{di}{dt} + 200i = 0$$

$$\text{XE} \Rightarrow \lambda^2 + 20\lambda + 200 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(200)}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -10 + 10j, \lambda_2 = -10 - 10j$$

$$\text{ΓΛ} \rightarrow \boxed{i(t) = c_1 e^{(-10+10j)t} + c_2 e^{(-10-10j)t}}$$

$$\Rightarrow i(t) = e^{-10t} (\kappa_1 \cos 10t + \kappa_2 \sin 10t)$$

$$\text{ΑΣ} \boxed{i(0) = 0}, q(0) = 0. \text{ Ψάχνω } \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}.$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q - v = 0$$

$$R(0) + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} + \frac{1}{C}(0) - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{L}v - \frac{1}{LC} \cancel{q}^0 - \frac{R}{L} \cancel{i}^0 =$$

$$= \frac{1}{1/2}12 = 24 \Rightarrow \boxed{\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 24}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -10e^{-10t} (\kappa_1 \cos 10t + \kappa_2 \sin 10t) + e^{-10t} (-10\kappa_1 \sin 10t + 10\kappa_2 \cos 10t)$$

$$\cancel{i(0)}^0 = \cancel{e^{-10(0)}}^1 \left( \cancel{\kappa_1 \cos 10(0)}^1 + \cancel{\kappa_2 \sin 10(0)}^1 \right) \Rightarrow \boxed{\kappa_1 = 0}$$

$$\cancel{\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}}^{24} = -10e^{-10(0)} ((0) \cos 10(0) + \kappa_2 \sin 10(0)) + e^{-10(0)} (-10(0) \cos 10(0) + 10\kappa_2 \cos 10(0)) \Rightarrow \boxed{\kappa_2 = \frac{12}{5}}$$

Άρα:

$$\text{ΕΛ} \quad \boxed{i(t) = e^{-10t} \frac{12}{5} \sin 10t \quad t > 0}$$

**Άσκηση: 5.16**

$$y''' - 6y'' + 11y' = 0$$

$$y(\pi), y'(\pi) = 0, y''(\pi) = 1$$

ΧΕ  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 11 & -6 & 1 \\ \downarrow & & & & \\ 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

Άρα  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ .

ΓΛ:  $c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$

ΕΛ:  $y'_n = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + 3c_3 e^{3t}, y''_h = c_1 e^t + 4c_2 e^{2t} + 9c_3 e^{3t}$

$$\left. \begin{array}{l} y_h(\pi) \overset{0}{=} c_1 e^\pi + c_2 e^{2\pi} + c_3 e^{3\pi} \\ y'_h(\pi) \overset{0}{=} c_1 e^\pi + 2c_2 e^{2\pi} + 3c_3 e^{3\pi} \\ y''_h(\pi) \overset{1}{=} c_1 e^\pi + c_2 e^{2\pi} + 9c_3 e^{3\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{2} e^{-\pi} \\ c_2 = -e^{-2\pi} \\ c_3 = \frac{1}{2} e^{-3\pi} \end{array}$$

ΕΛ:  $y_p = \frac{1}{2} e^{-\pi} e^t - e^{-2\pi} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{-3\pi} e^{3t}$

**Άσκηση: 5.15**

$$y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$$

ΧΕ:  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 = 0$

$\lambda_1 = -2$

$$\begin{array}{cccc|c} & 1 & -6 & 2 & 36 \\ -2 & & -2 & 16 & -36 \\ & 1 & -8 & 18 & 0 \end{array}$$

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4 + i\sqrt{2}, \lambda_3 = 4 - i\sqrt{2}$$

ΓΛ:  $c_1 e^{-2t} + c_2 e^{(4+i\sqrt{2})t} + c_3 e^{(4-i\sqrt{2})t}$

### Άσκηση: 5.21

$$y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$$

$$\text{ΧΕ: } \lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 8 & 24 & 32 & 16 & -2 \\ & -2 & -12 & -24 & -16 & \\ \hline 1 & 6 & 12 & 8 & 0 & \end{array}$$

$$(\lambda + 2)(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8) = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 12 & 8 & -2 \\ & -2 & -8 & -8 & \\ \hline 1 & 4 & 4 & 0 & \end{array}$$

Άρα  $(\lambda + 2)^2(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = (\lambda + 2)^2(\lambda + 2)^2 = (\lambda + 2)^4$ . Άρα ρίζες:  $\lambda = -2$  τετραπλή.

$$y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + c_3 t^2 e^{-2t} + c_4 t^3 e^{-2t}$$

### Άσκηση: 5.22

$$\frac{d^5 P}{dt^5} - \frac{d^4 P}{dt^4} - 2 \frac{d^3 P}{dt^3} + 2 \frac{d^2 P}{dt^2} + \frac{dP}{dt} - P = 0$$

$$\text{ΧΕ } \lambda^5 - \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

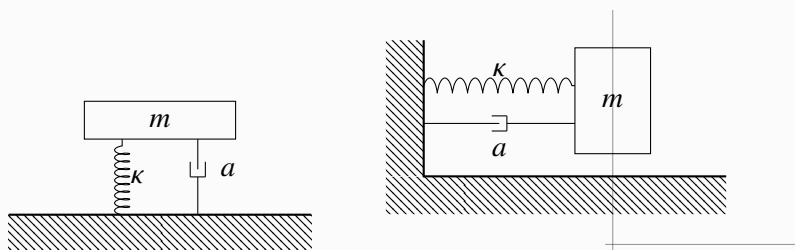
$$\text{Τριπλή } \lambda_{1,2,3} = 1, \text{ διπλή } \lambda_{4,5} = -1$$

$$\text{ΓΛ } P_h = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + c_4 e^{-t} + c_5 t e^{-t}$$

**Άσκηση: 5.14**

Μάζα 2 kg ανάρτηση ελατήριο στ. ελαστικότητας 10 N/m ηρεμία.  
Μετά κίνηση αρχ. ταχύτητα 150 km/s.

1. Έκφραση της κίνησης της μάζας, χωρίς απώλειες
2. κυκλική συχνότητα, φυσική συχνότητα, περίοδος



(α)

$$m\ddot{x} = -\kappa x - a\dot{x} + F(t)$$

ή

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{\kappa}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

ΑΣ

$$\dot{x}(0) = 150 \text{ cm/s}$$

$$x(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 5x = 0$$

ΓΡ/ΟΜ/ΔΕ/2τ/ΣΣ

$$\lambda^2 + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{5}$$

$$\text{ΓΛ } x(t) = c_1 \cos \sqrt{5}t + c_2 \sin \sqrt{5}t$$

$$x'(t) = -c_1 \sqrt{5} \sin \sqrt{5}t + c_2 \sqrt{5} \cos \sqrt{5}t$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = \cancel{c_1 \cos \sqrt{5}(0)}^1 + c_2 \sin \sqrt{5}(0) \Rightarrow 0 = c_2$$

$$\dot{x}(0) = 1.5 \Rightarrow 1.5 = -c_1 \sqrt{5} \sin \sqrt{5}(0) + c_2 \sqrt{5} \cos \sqrt{5}(0) \Rightarrow c_2 = \frac{1.5}{\sqrt{5}}$$

(β)

$$\omega = \sqrt{5} \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

## ΓΛ ΜΟ/ΔΕ

$$x = \underbrace{x_n}_{\text{ΓΛ ΟΜ}} + \overbrace{x_p}^{??}$$

$$\mathbf{L}(x) = \phi(t)$$

### Μέθοδος απροσδιόριστων τελεστών

$\phi(t)$  και όλες οι παράγωγοί της  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

#### Αρχικοποίηση

$$x_p(t) = \underbrace{A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + \dots + A_n x_n(t)}_{\text{αυθαίρετοι}}$$

#### Περίπτωση 1

$$\phi(t) = p_n(t)$$

$$\tilde{x}_p = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0 \quad A_j (j = 0, \dots, n)$$

#### Περίπτωση 2

$$\phi(t) = \kappa e^{at}$$

$$\tilde{x}_p = A e^{at}$$

#### Περίπτωση 3

$$\phi(t) = \kappa_1 \sin \beta t + \kappa_2 \cos \beta t$$

$$\tilde{x}_p = A \sin \beta t + B \cos \beta t$$

**Γενίκευση**  $\phi(t)$  συνδυασμός περιπτώσεων.  
 $\rightarrow \tilde{x}_p$  αντίστοιχος συνδυασμός

**Τροποποίηση** Όταν η  $\tilde{x}$  έχει κοινό όρο με τη  $x_h$ , τότε πολλαπλασιάζουμε με  $t^m$  την  $\tilde{x}_p$  ώστε να μην υπάρχει κοινός όρος.

**Άσκηση: 5.24**

$$y'' - y' - 2y = 4x^2$$

βλ. 5.1

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

$$\phi(x) = 4x^2$$

$$y_p = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

$$y'_p = 2A_2 x + A_1$$

$$y''_p = 2A_2$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική μας εξίσωση έχουμε:

$$2A_2 - (2A_2 x + A_1) - 2(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) = 4x^2 \implies$$

$$(-2A_2)x^2 + (-2A_2 - 2A_1)x + (2A_2 - A_1 - 2A_0) = 4x^2 + (0)x + 0 \implies$$

$$\begin{cases} -2A_2 & = 4 \\ -2A_2 - 2A_1 & = 0 \\ 2A_2 - A_1 - 2A_0 & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A_2 & = -2 \\ A_1 & = 2 \\ A_0 & = -3 \end{cases} \implies$$

$$y_p = -2x^2 + 2x - 3$$

$$\text{ΓΛ ΜΟ } y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$$

**Άσκηση: 5.25**

$$y'' - y' - 2y = e^{3x}$$

5.1 ΟΜ

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

$$\phi(x) = e^{3x}, \quad y_p(x) = A e^{3x}$$

$$y'_p = 3A e^{3x}, \quad y''_p = 9A e^{3x}$$

$$9A e^{3x} - 3A e^{3x} - 2A e^{3x} = e^{3x} \implies 4A e^{3x} = e^{3x} \implies 4A = 1 \implies A = \frac{1}{4}$$

$$\text{ΕΛ ΜΟ } y_p = \frac{1}{4} e^{3x}$$

$$\text{ΓΛ ΜΟ } y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{3x}$$

**Άσκηση: 5.25**

$$y'' - y' - 2y = \sin 2x$$

5.1 OM  $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

$$\phi(x) = \sin 2x$$

$$y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$$

$$y'_p = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$$

$$y''_p = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

$$(-4A \sin 2x - 4B \cos 2x) - (2A \cos 2x - 2B \sin 2x) - 2(A \sin 2x + B \cos 2x) = \sin 2x \implies$$

$$(-6A + 2B) \sin 2x + (-6B - 2A) \cos 2x = (1) \sin 2x + (0) \cos 2x \implies$$

$$\begin{cases} -6A - 2B = 1 \\ -2A - 6B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{3}{20} \\ B = \frac{1}{20} \end{cases} \implies \text{ΕΛ ΜΟ } y_p = -\frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{20} \cos 2x$$

$$\text{ΓΛ ΜΟ } y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{20} \cos 2x$$

**Άσκηση: 5.30**

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$$

5.16 OM  $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

$$\phi(x) = 2xe^{-x} \quad \phi(x) = e^{ax} p_n(x), \quad a = -1, \quad p_n(x) = 2x$$

$$y_p = e^{-x}(A_1 x + A_0) \implies y_p = A_1 x e^{-x} + A_0 e^{-x}$$

$$y'_p = -A_1 x e^{-x} + A_1 e^{-x} - A_0 e^{-x}$$

$$y''_p = A_1 x e^{-x} - 2A_1 e^{-x} + A_0 e^{-x}$$

$$y'''_p = -A_1 x e^{-x} + 3A_1 e^{-x} - A_0 e^{-x}$$

$$-24A_1 x e^{-x} + (26A_1 - 24A_0) e^{-x} = 2x e^{-x} + (0) e^{-x} \implies$$

$$\begin{cases} -24A_1 = 2 \\ 26A_1 - 24A_0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A_1 = -\frac{1}{12} \\ A_0 = -\frac{13}{144} \end{cases} \text{ ΕΛ ΜΟ } y_p = -\frac{1}{12} x e^{-x} - \frac{13}{144} e^{-x}$$

$$\text{ΓΛ ΜΟ } y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{1}{12} x e^{-x} - \frac{13}{144} e^{-x}$$



**Άσκηση: 5.31**

$$y'' = 9x^2 + 2x - 1$$

ΟΜ ΔΕ  $y'' = 0$ ,  $y_h = c_1x + c_0$

$$\phi(x) = 9x^2 + 2x - 1 \quad \underbrace{y_p}_{\cdot x^m} = A_2x^2 + A_1x + A_0$$

**Τροποποίηση**  $y_p = A_2x^4 + A_1x^3 + A_0x^2$

$$y'_p = \dots, \quad y''_p = \dots$$

$$12A_2x^2 + 6A_1x + 2A_0 = 9x^2 + 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} A_2 = \frac{3}{4} \\ A_1 = \frac{1}{3} \\ A_0 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

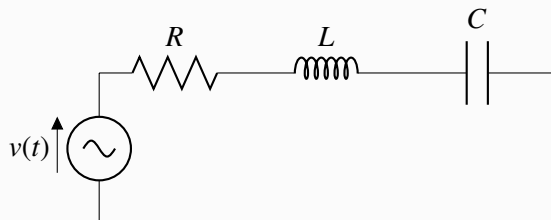
$$\text{ΓΛ ΜΟ } y = c_1x + c_0 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

**Άσκηση: 5.36**

$RLC$  κύκλωμα σε σειρά,  $R = 180 \, \Omega$ ,  $C = \frac{1}{280} \, \text{F}$ ,  $L = 20 \, \text{H}$

Εφαρμόζεται τάση  $v(t) = 10 \sin t$ , καμία αρχική φόρτιση και αρχικό ρεύμα  $1 \, \text{A}$  για  $t = 0$ , οπότε εφαρμόζεται η τάση.

Να βρεθεί το φορτίο στον πυκνωτή.



$$Ri + \frac{1}{C}q + L\frac{di}{dt} - v = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt} = q \implies \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$$

$$\implies R\dot{q} + \frac{1}{C}q + L\ddot{q} = v$$

$$\implies \boxed{\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}v} \quad \text{ΜΟ/ΓΡ/ΔΕ/2-τ/ΣΣ}$$

$$q(0) = 0, \quad i(0) = 1 \implies \dot{q}(0) = 1$$

$$\ddot{q} + \frac{180}{20}\dot{q} + \frac{1}{20\left(\frac{1}{180}\right)}q = \frac{10}{20}\sin t \implies$$

$$\boxed{\ddot{q} + 9\dot{q} + 14q = \frac{1}{2}\sin t} \quad \Delta\text{Ε}$$

$$\Gamma\Lambda \text{ OM} \quad \ddot{q} + 9\dot{q} + 14q = 0$$

$$\text{XE} \quad \lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -7$$

$$\Gamma\Lambda \text{ OM} \quad \boxed{q_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t}}$$

$$\Gamma\Lambda \text{ MO} \quad q = q_h + q_p$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\sin t$$

$$q_p = A \sin t + B \cos t$$

$$\dot{q}_p = A \cos t - B \sin t$$

$$\ddot{q}_p = -A \sin t - B \cos t$$

$$-A \sin t - B \cos t + 9A \cos t - 9B \sin t + 14A \sin t + 14B \cos t = \frac{1}{2}\sin t$$

$$\implies (-A - 9B + 14A) \sin t + (-B + 9A + 14B) \cos t = \left(\frac{1}{2}\right) \sin t + (0) \cos t$$

$$\begin{cases} 13A - 9B = \frac{1}{2} \\ 9A + 13B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{13}{500} \\ B = -\frac{9}{500} \end{cases}$$

$$\text{ΕΛ MO} \quad q_p = \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

$$\Gamma\Lambda \text{ MO} \quad q = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t} + \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

$$\dots \implies \begin{cases} c_1 = \frac{110}{500} \\ c_2 = -\frac{101}{500} \end{cases} \xrightarrow{\text{ΕΛΜΟ}} q = \frac{1}{500}(110e^{-2t} - 101e^{-7t} + 13\sin t - 9\cos t)$$

## ΓΡ/ΔΕ/ΜΣ: Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

$$\begin{array}{l} \text{ΜΟ} \\ \text{ΔΕ} \end{array} \quad P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(X)$$

$$\begin{array}{l} \text{ΟΜ} \\ \text{ΔΕ} \end{array} \quad P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

Σύνολο λύσεων ΟΜ/ΔΕ  $\{y_1, y_2\}$

$$\begin{array}{l} \text{ΓΛ ΜΟ} \\ y_p \text{ ΕΛ ΜΟ ΔΕ} \end{array} \quad y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 = y_p + y_h$$

$P_0, P_1, P_2, F$  συνεχείς  $(a, b)$

$P_0$  χωρίς μηδενικά

**a)**  $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

**b)** 
$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{F}{P_0} \end{cases}$$

**c)**  $u_1', u_2'$

**d)** υπολογίζουμε  $u_1, u_2$ , με ολοκλήρωση (ολ. σταθ  $\rightarrow 0$ )

**e)** αντικατάσταση  $u_1, u_2$  στην  $y_p$

**Άσκηση: 6.1**

$$x^2 y'' - 2xy' - 2y = x^{\frac{9}{2}}$$

$$y_h = c_1 x + c_2 x^2 = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \Gamma\Lambda \quad \text{ΟΜ}$$

ΕΛ

a)

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= u_1 x + u_2 x^2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{cases} u_1' x + u_2' x^2 = 0 \\ u_1' + 2u_2' x = \frac{x^{(9/2)}}{x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{F}{P_1} \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} u_1' &= -u_2' x \\ u_2' x &= x^{5/2} \implies u_2' = x^{3/2}, u_1' = -x^{5/2} \end{aligned}$$

d) ολοκλήρωση

$$u_1 = -\frac{2}{7} x^{7/2}, \quad u_2 = \frac{2}{5} x^{5/2}$$

e)

$$y_p = -\frac{2}{7} x^{7/2} x + \frac{2}{5} x^{5/2} x^2 = \frac{4}{35} x^{9/2}$$

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 x^2 + \frac{4}{35} x^{9/2} \quad \Gamma\Lambda \quad \text{ΜΟ}$$

### Άσκηση: 12.4

$$y'' - 3y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$[s^2 Y(s) - y - 5] - 3[sY(s) - 1] + 4Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+2}{s^2-3s+4}$$

$$\text{Παρονομαστής } s^2 - 3s + 4 = (s^2 - 3s) + 4 = \left[s^2 - 3s + \left(\frac{-3}{2}\right)^2\right] + \left[4 - \left(\frac{-3}{2}\right)^2\right] = \left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

$$\text{Αριθμητής: } s + 2 = \left(s - \frac{3}{2}\right) + \frac{7}{2} = \left(s - \frac{3}{2}\right) + \sqrt{7} \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Άρα

$$Y(s) = \frac{(s - \frac{3}{2}) + \sqrt{7} \frac{\sqrt{7}}{2}}{(s - \frac{3}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{s - \frac{3}{2}}{(s - \frac{3}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \sqrt{7} \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(s - \frac{3}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - \frac{3}{2}}{(s - \frac{3}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\right\} + \sqrt{7} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(s - \frac{3}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \sqrt{7} e^{\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$$

### Άσκηση: 12.5

$$y'' - 4y = 2e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{e^{3t}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [s^2 Y(s) - s + 1] + [-4Y(s)] = \frac{2}{s-3} \Rightarrow$$

$$(s^2 - 4)Y(s) = \frac{2}{s-3} + s - 1 = \frac{2+(s-1)(s-3)}{s-3} \xrightarrow{s^2-4=(s-2)(s+2)} \Rightarrow Y(s) = \frac{2+(s-1)(s-3)}{(s-2)(s+2)(s-3)}$$

$$(s-a)^m \rightarrow \frac{A_1}{(s-a)} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(s-a)^m}$$

$$(s^2 + bs + c)^p \rightarrow \frac{B_1s + C_1}{s^2 + bs + c} + \frac{B_2s + C_2}{(s^2 + bs + c)^2} + \dots + \frac{B_ps + C_p}{(s^2 + bs + c)^p}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{s^2-4s+5}{(s-2)(s+2)(s-3)} = \frac{A(s+2)(s+3)+B(s-2)(s-3)+C(s-2)(s+2)}{(s-2)(s+2)(s-3)} \Rightarrow$$

$$s^2 - 4s + 5 = As^2 - 3As + 2As - 6A + Bs^2 - 3Bs - 2Bs + 6B + Cs^2 + 2Cs - 2Cs - 4C$$

$$s^2 - 4s + 5 = (A+B+C)s^2 - (-A-5B)s + (-6A+6B-4C) \Rightarrow \begin{cases} A+B+C &= 1 \\ -A-5B &= 4 \\ -6A+6B-4C &= 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= -\frac{1}{4} \\ B &= \frac{17}{30} \\ C &= \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{4} \frac{1}{s-2} + \frac{17}{20} \frac{1}{s+2} + \frac{2}{5} \frac{1}{s-3}$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{4} e^{2x} + \frac{17}{20} e^{-2x} + \frac{2}{5} e^{3x}$$

### Άσκηση: 12.6

$$y'' + 3y' + 2y = 6e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

$$\begin{aligned} [s^2 Y(s) - s + 1] + 3[sY(s) - 1] + 2Y(s) &= 6 \frac{1}{s-1} \implies \\ (s^2 + 3s + 2)Y(s) &= \frac{6}{s-1} + (s-1) + 3 = \frac{6+(s-1)(s+2)}{s-1} \\ \text{Εφόσον } s^2 + 3s + 2 &= (s+1)(s+2) \\ \implies Y(s) &= \frac{6+(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+1} \implies \boxed{y(t) = e^t + 2e^{-2t} - e^{-t}} \end{aligned}$$

### Προσοχή

Σημαντικός ο ύπνος για τις εξετάσεις

### Άσκηση

$$y'' - 2y' - 3y = 10 \cos t$$

$$\begin{aligned} [s^2 Y(s) - 2s - 7] - 2[sY(s) - 2] - 3Y(s) &= \frac{10s}{s^2 + 1} \implies \\ \implies \underbrace{(s^2 - 2s - 3)}_{(s-3)(s+1)} Y(s) &= \frac{10s}{s^2 + 1} + (7 + 2s) - 4 = \frac{10s}{s^2 + 1} + (2s + 3) \implies \\ \implies Y(s) &= \frac{10s}{(s-3)(s+1)(s^2 + 1)} + \frac{2s + 3}{(s-3)(s+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{2s + 3}{(s-3)(s+1)} = \frac{9}{4} \frac{1}{s-3} - \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{9}{4} e^{3t} - \frac{1}{4} e^{-t}$$

$$\frac{10s}{(s-3)(s+1)(s^2 + 1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1}$$

$$\text{όπου } (A(s+1) - B(s-3))(s^2 + 1) + (Cs + D)(s-3)(s+1) = 10s$$

$$\begin{aligned} s = 3 &\rightarrow (A(3+1) + 0)(3^2 + 1) + ( \quad )(0)( \quad ) = 10 \cdot 3 \implies 40A = 30 \\ s = 1 &\rightarrow -8B = -10 \\ \Theta \acute{\epsilon} \tau \omega \quad s = 0 &\rightarrow A - 3B - 3D = 0 \\ \epsilon \xi . \text{ συντ} &\rightarrow A + B + C = 0 \end{aligned} \implies \begin{cases} A = \frac{3}{4} \\ B = \frac{5}{4} \\ C = -2 \\ D = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{10s}{(s-3)(s+1)(s^2 + 1)} &= \frac{3}{4} \frac{1}{s-3} + \frac{5}{4} \frac{1}{s+1} - \frac{2s+1}{s^2 + 1} \\ &\xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{3}{4} e^{3t} + \frac{5}{4} e^{-t} - 2 \cos t - \sin t \\ \implies \boxed{y(t) = -\sin t - 2 \cos t + 3e^{3t} + e^{-t}} \end{aligned}$$

$$e^{ax} \cos bx \leftrightarrow \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$e^{ax} \sin bx \leftrightarrow \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

**Άσκηση: 12.8**

$$y'' + 4y = 8 \sin 2t + 9 \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} [s^2 Y(s) - 1s - 0] + 4Y(s) &= \frac{16}{s^2 + 4} + \frac{9s}{s^2 + 1} \implies \\ \implies Y(s) &= \frac{16}{(s^2 + 4)^2} + \frac{9s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} + \frac{s}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

$$\text{Γνωρίζουμε ότι } t \cos(at) \leftrightarrow \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \implies t \cos 2t \leftrightarrow \frac{s^2 - 4}{(s^2 + 4)^2} = \frac{s^2 + 4}{(s^2 + 4)^2} - \frac{8}{(s^2 + 4)^2} = \frac{1}{s^2 + 4} - \frac{8}{(s^2 + 4)^2}.$$

$$\text{Άρα } \frac{8}{(s^2 + 4)^2} = \frac{1}{s^2 + 4} - \mathcal{L}\{t \cos 2t\} \implies \frac{16}{(s^2 + 4)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin 2t - 2t \cos 2t$$

$$\text{Αντικαθιστώντας } x = s^2 \text{ στον } \frac{9}{(x+4)(x+1)} = \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x+4} \text{ και πολλαπλασιάζοντας με } s, \text{ μάς δίνει}$$

$$\frac{9s}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} = \frac{3s}{s^2 + 1} - \frac{3s}{s^2 + 4} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 3 \cos t - 3 \cos 2t.$$

$$\frac{s}{s^2 + 4} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \cos 2t$$

$$y(t) = -(2t + 2) \cos 2t + \sin 2t + 3 \cos tp$$

**Άσκηση: 12.9**

$$y'' - 2y' + 2y = 2t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -7$$

$$\begin{aligned} [s^2 Y(s) - 2s + 7] + 2[sY(s) - 2] + 2Y(s) &= \frac{2}{s^2} \implies \\ \implies (s^2 + 2s + 2)Y(s) &= \frac{2}{s^2} + (2s - 7) + 4 = \frac{2}{s^2} + 2s - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Εφ' όσον } s^2 + 2s + 2 = (s + 1)^2 + 1 \implies Y(s) = \frac{2}{s^2((s+1)^2+1)} + \frac{2s-3}{(s+1)^2+1}$$

$$\frac{2s-3}{(s+1)^2+1} = \frac{2(s+1)-5}{(s+1)^2+1} = 2 \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - 5 \frac{1}{(s+1)^2+1} \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 2e^{-t} \cos t - 5e^{-t} \sin t$$

$$\frac{2}{s^2((s+1)^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{(s+1)^2+1}$$

$$\text{όπου } (As + B)((s+1)^2 + 1) + s^2(Cs + 1 + D) = 2$$

$$\implies (A + C)s^3 + (2A + B + C + D)s^2 + 2(A + B)s + 2B = 2$$

$$\implies \begin{cases} 2B &= 2 & s = 0 \\ -A + B + D &= 2 & s = -1 \\ A + C &= 0 & \text{εξ. συντ. } s^3 \\ 2A + B + C + D &= 0 & \text{εξ. συντ. } s^2 \end{cases}$$

$$\text{Λύνοντας } \begin{cases} A &= -1 \\ B &= 1 \\ C &= 1 \\ D &= 0 \end{cases} \cdot \text{Συνεπώς } \frac{2}{s^2((s+1)^2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \leftrightarrow -1 + t + e^{-t} \cos t$$

**Άσκηση: 12.10**

$$y'' - 4y' + 5y = e^{-t}(\cos t + 3 \sin t)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$$

$$[s^2 Y(s) - 4s] + 4[sY(s) - 0] = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{3}{(s+1)^2+1} \implies$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n y}{dx^n} \right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \dots - s y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

$$\implies \underbrace{(s^2 + 4s + 5)}_{=(s+2)^2+1} Y(s) = \frac{s+4}{(s+1)^2+1} + 4 \implies$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{((s+1)^2+1)((s+2)^2+1)} + \frac{4}{(s+2)^2+1} \implies$$

$$\frac{s+4}{((s+1)^2+1)((s+1)^2+1)} = \frac{A(s+1)+B}{(s+1)^2+1} + \frac{4e^{-2t} \sin t}{(s+2)^2+1} \implies$$

$$\implies (A(s+1) + B)((s+2)^2+1) + (C(s+2) + D)((s+1)^2+1) = 4 + s \implies$$

$$\begin{cases} 5A + 5B + 4C + 2D = 4, & \text{για } s = 0 \\ 2B + C + D = 3, & \text{για } s = -1 \\ -A + B + 2D = 2, & \text{για } s = -2 \\ A + C = 0 & \text{εξ. συντ του } s^3 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = 0 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \dots = \frac{-(s+1)+1}{(s+1)^2+1} + \frac{s+2}{(s+2)^2+1} = e^{-t}(-\cos t + \sin t) + e^{-2t} \cos t$$

$$\text{Άρα } \boxed{y(t) = e^{-t}(-\cos t + \sin t) + e^{-2t}(\cos t + 4 \sin t)}$$



**Άσκηση: 12.11**

$$4y'' + 4y' + y = 3 \sin t + \cos t$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

$$4[s^2 Y(s) - 2s + 1] + 4[sY(s) - 2] + Y(s) = \frac{3}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(4s^2 + 4s + 1)}_{4(s+\frac{1}{2})^2} Y(s) = \frac{3+s}{s^2_1} + 4(-1+2s) + 8 = \frac{3+s}{s^2+1} + 8s + 4$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{3+s}{4(s+\frac{1}{2})(s^2+1)} + \frac{2}{s+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3+s}{4(s+\frac{1}{2})(s^2+1)} = \frac{A}{s+\frac{1}{2}} + \frac{B}{(s+\frac{1}{2})^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow (A(s+\frac{1}{2}) + B) + (s^2+1) + (Cs+D)\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3+s}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{για } s = -\frac{1}{2} \rightarrow 10B = 5 \\ \text{για } s = 0 \rightarrow 2A + 4B + D = 3 \\ \text{για } s = 1 \rightarrow 12A + 8B + 9C + 9D = 4 \\ \text{εξ. αυτ. συντ. } s^3 \rightarrow A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{3}{5} \\ D = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3+s}{4(s+\frac{1}{2})^2(s^2+1)} = \frac{3}{5} \frac{1}{s+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{5} \frac{3s+1}{s^2+1} \leftrightarrow \frac{3}{5} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2} t e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{5} \cdot (3 \cos t + \sin t)$$

$$\frac{2}{1+\frac{1}{2}} \leftrightarrow 2e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{e^{-t/2}}{10} (5t + 26) - \frac{1}{5} (3 \cos t + \sin t)}$$

## Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

### Άσκηση: 12.12

$$\begin{cases} u' + u - v = 0 \\ u' - u + v = 2 \end{cases}$$

$$u(0) = 1$$

$$v(0) = 2$$

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = U(s)$$

$$\mathcal{L}\{v(x)\} = V(s)$$

$$\begin{cases} [sU(s) - 1] + U(s) - V(s) = 0 \\ [sV(s) - 2] - U(s) + V(s) = \frac{2}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s+1)U(s) - V(s) = 1 \\ -U(s) + (s+1)V(s) = \frac{2(s+1)}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U(s) = \frac{s+1}{s^2} \\ V(s) = \frac{2s+1}{s^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right\} \Rightarrow u(x) = 1 + x \\ \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right\} \Rightarrow v(x) = 2 + x \end{cases}$$

Άσκηση: 12.13

$$y' + z = x, \quad z' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = -1$$

$$\mathcal{L}\{y(x)\} = Y(s), \quad \mathcal{L}\{z(x)\} = Z(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [sY(s) - 1] + Z(s) &= \frac{1}{s^2} \\ [sZ(s) + 1] + 4Y(s) &= 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sY(s) + Z(s) &= \frac{s^2+1}{s^2} \\ 4Y(s) + sZ(s) &= -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(s) &= \frac{s^2+s+1}{s(s^2-4)} \\ Z(s) &= -\frac{s^3+4s^2+4}{s^2(s^2+4)} \end{cases}$$

$$\frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 - 4)} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s+2)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-2}$$

$$\Rightarrow s^2 + s + 1 = (A + B + C)s^2 + 2(C - B)s - 4A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C &= 1 \\ 2(C - B) &= 1 \\ -4A &= 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A &= -\frac{1}{4} \\ B &= \frac{3}{8} \\ C &= \frac{7}{8} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{-1/4}{s} + \frac{3/8}{s+2} + \frac{7/8}{s-2} \leftrightarrow y(x) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e^{2x} + \frac{7}{8}e^{-2x}$$

Από την 1<sup>η</sup> σχέση,

$$z = x + \frac{3}{4}e^{-2x} - \frac{7}{4}e^{2x}$$

**Άσκηση: 12.14**

$$\begin{cases} w' + y &= \sin x \\ y' - z &= e^x \\ z' + w + y &= 1 \end{cases} \quad \begin{cases} w(0) = 0 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} [sW(s) - 0] + Y(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\ [sY(s) - 1] - Z(s) &= \frac{1}{s-1} \\ [sZ(s) - 1] + W(s) + Y(s) &= \frac{1}{s} \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} sW(s) + Y(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\ sY(s) - Z(s) &= \frac{s}{s+1} \\ W(s) + Y(s) + sZ(s) &= \frac{s+1}{s} \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} W(s) &= \frac{-1}{s(s-1)} \\ Y(s) &= \frac{s^2+s}{(s-1)(s^2+1)} \\ Z(s) &= \frac{s}{s^2+1} \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} w(x) &= 1 - e^x \\ y(x) &= e^x - \sin x \\ z(x) &= \cos x \end{cases} \end{aligned}$$

**Άσκηση: 12.15**

$$\begin{aligned} y'' + z + y &= 0 \\ z' + y' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \\ z(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &\begin{cases} [s^2Y(s) - (0)s - (0)] + Z(s) + Y(s) &= 0 \\ [sZ(s) - 1] + [sY(s) - 0] &= 0 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} (s^2 + 1)Y(s) + Z(s) &= 0 \\ Y(s) + Z(s) &= \frac{1}{s} \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} Y(s) &= -\frac{1}{s^3} \\ Z(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} y(x) &= -\frac{1}{2}x^2 \\ z(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \end{aligned}$$

**Άσκηση: 12.16**

$$\begin{cases} z'' + y' = \cos x \\ y'' - z = \sin x \end{cases}$$

$$z(0) = -1$$

$$z'(0) = -1$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$\begin{cases} [s^2 Z(s) + s + 1] + [sY(s - 1)] = \frac{s}{s^2 + 1} \\ [s^2 Y(s) - s - 0] - Z(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^2 Z(s) + sY(s) = -\frac{s^3}{s^2 + 1} \\ -Z(s) + s^2 Y(s) = \frac{s^3 + s + 1}{s^2 + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z(s) = -\frac{s+1}{s^2 + 1} \\ Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z(x) = -\cos x - \sin x \\ y(x) = \cos x \end{cases}$$

**Άσκηση: 12.17**

$$\begin{cases} w'' - y + 2z = 3e^{-x} \\ -2w' + 2y' + z = 0 \\ 2w' - 2y + z' + 2z'' = 0 \end{cases}$$

$$w(0) = 1 \quad y(0) = 2$$

$$w'(0) = 1 \quad z(0) = 2$$

$$z'(0) = -2$$

$$\begin{cases} [s^2 W(s) - s - 1] - Y(s) + 2Z(s) = \frac{3}{s+1} \\ -2[sW(s) - 1] + 2[sY(s) - 2] + Z(s) = 0 \\ 2[sW(s) - 1] - 2Y(s) + [sZ(s) - 2] + 2[s^2 Z(s) - 2s + 2] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^2 W(s) - Y(s) + 2Z(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s+1} \\ -2sW(s) + 2sY(s) + Z(s) = 2 \\ 2sW(s) - 2Y(s) + (2s^2 + s)Z(s) = 4s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} W(s) = \frac{1}{s-1} \leftrightarrow e^x = w(x) \\ Y(s) = \frac{2s}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} \leftrightarrow e^x + e^{-x} = y(x) \\ Z(s) = \frac{2}{s+1} \leftrightarrow 2e^{-x} = z(x) \end{cases}$$

## Επίλυση ΓΡ ΔΕ με γενικευμένες/ασυνεχείς συναρτήσεις ως πηγές

Βηματική συνάρτηση  $u$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Μετατοπισμένη βηματική συνάρτηση

$$u(t-c) = u_c(t)$$
$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$

Συνάρτηση τινάγματος ή πάγκου (bench)

$$b(t) = u(t-a) - u(t-b)$$
$$b(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a \leq t \leq b \\ 0 & b \leq t \end{cases}$$

$$u(t-c) \leftrightarrow e^{-cs} \frac{1}{s}$$
$$u(t-c)f(t-c) \leftrightarrow e^{-cs}F(s)$$
$$e^{ct}f(t) \leftrightarrow F(s-c)$$

### Άσκηση: 13.1

$$y' + 2y = u(t-4)$$

$$y(0) = 3$$

$$[sY(s) - 3] + 2Y(s) = e^{-4s} \frac{1}{s} \implies Y(s) = e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)} + \frac{3}{s+2}$$

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)} = \frac{A(+2)s + (2A)}{s(s+2)}$$
$$\implies \begin{cases} A+B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$
$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right]$$
$$\implies e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left( e^{-4s} \frac{1}{s} - e^{-4s} \frac{1}{s+2} \right) \leftrightarrow \frac{1}{2} (u(t-4) - u(t-4)e^{-2(t-4)})$$
$$\implies \boxed{y(t) = \frac{1}{2} u(t-4) (1 - e^{-2(t-4)}) + 3e^{-2t}}$$

**Άσκηση: 13.2**

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad b(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$$

$$b(t) = u(t) - u(t - \pi) \implies \mathcal{L}\{b(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t - \pi)\}$$

$$\implies B(s) = \frac{1}{s} - e^{-\pi s} \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow [s^2 Y(s) - (0)s - (0)] + [s Y(s) - (0)] + \frac{5}{4} Y(s) = \frac{1}{s} - e^{-\pi s} \frac{1}{s}$$

$$\implies Y(s) = (1 - e^{-\pi s}) \frac{1}{s(s^2 + s + 5/4)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 5/4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + s + 5/4}$$

$$\implies \left\{ A = \frac{4}{5}, \quad B = -\frac{4}{5}, \quad C = -\frac{4}{5} \right\}$$

$$\implies H(s) = \frac{4}{5} \left( \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 5/4} \right)$$

$$s^2 + s + 5/4 = \left[ s^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)s + \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \left( s + \frac{1}{2} \right)^2 + 1$$

$$s + 1 = s + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left( s + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

$$\implies H(s) = \frac{4}{5} \left[ \frac{1}{s} - \frac{s + 1/2}{\left( s + 1/2 \right)^2 + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\left( s + 1/2 \right)^2} \right]$$

$$\implies Y(s) = (1 - e^{-\pi s}) H(s) \implies Y(s) = H(s) - e^{-\pi s} H(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{4}{5} \left( 1 - e^{-t/2} \cos t - \frac{1}{2} e^{-t/2} \sin t \right) = h(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s} H(s)\} = u(t - \pi) h(t - \pi) = u_{\pi}(t) h(t - \pi)$$

$$y(t) = h(t) - u(t - \pi) h(t - \pi)$$

### Άσκηση: 13.3

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$g(t) = \begin{cases} \sin(t) & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= [u(t) - u(t - \pi)] \sin t \\ \Rightarrow g(t) &= u(t) \sin t + u(t - \pi) \sin(t - \pi) \\ &\leftrightarrow \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 1} \\ Y(s) &\stackrel{13.2}{=} (1 + e^{-\pi s}) \frac{1}{(s^2 + s + \frac{5}{4})(s^2 + 1)} \\ H(s) &= \frac{1}{(s^2 + s + \frac{5}{4})(s^2 + 1)} = \frac{As + B}{s^2 + s + \frac{5}{4}} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} \\ \Rightarrow \begin{cases} A &= \frac{16}{17} \\ B &= \frac{12}{17} \\ C &= -\frac{16}{17} \\ D &= \frac{4}{17} \end{cases} \Rightarrow H(s) = \frac{4}{17} \left[ \frac{4s + 3}{s^2 + s + \frac{5}{4}} + \frac{-4s + 1}{s^2 + 1} \right] \\ s^2 + s + \frac{5}{4} &= \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ 4s + 3 &= 4\left(s + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + 3 = 4\left(s + \frac{1}{2}\right) + 1 \\ H(s) &= \frac{4}{17} \left[ 4 + \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1} - 4 \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} \right] \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \frac{4}{17} \left[ 4e^{-\frac{t}{2}} \cos t + e^{-\frac{t}{2}} \sin t - 4 \cos t + \sin t = h(t) \right] \\ Y(s) &= (1 + e^{-\pi s}) H(s) = H(s) + e^{-\pi s} H(s) \leftrightarrow h(t) + u(t - \pi)h(t - \pi) \end{aligned}$$

### Συνάρτηση δέλτα - Dirac

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\delta_n(t) = n \left[ u(t) - u\left(t - \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ n & 0 \leq t < \frac{1}{n} \\ 0 & t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t \neq 0 \\ \infty & \text{για } t = 0 \end{cases}$$

### Συνάρτηση κρουστικής απόκρισης

$$\text{στο } c \geq 0 \quad \boxed{\mathbf{L}(y) = y'' + a_1 y' + a_0 y}$$

$$\text{με } \mathbf{L}(y_\delta) = \delta(t - c)$$

$$\delta(t - c) \leftrightarrow e^{-cs} \quad c \geq 0$$



**Άσκηση: 13.4**

Να βρεθεί η συνάρτηση της κρουστικής απόκρισης του τελεστή  $L$

$$L(y) = y'' + 2y' + 2y$$

$$t = 0$$

$$y_\delta(0) = 0, \quad y'_\delta(0) = 0$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\mathcal{L}} [s^2 Y_\delta(s) - (0)s - (0)] + 2[sY_\delta(s) - (0)] + 2Y_\delta(s) = 1 \\ \Rightarrow Y_\delta(s) &= \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \Rightarrow \boxed{y_\delta(t) = e^{-t} \sin t} \end{aligned}$$

**Άσκηση: 13.5**

$$t = c \geq 0$$

$$L(y) = y'' + 2y' + 2y$$

$$y_\delta \text{ A.T. } y''_\delta + 2y'_\delta + 2y_\delta = \delta(t - c)$$

$$y_\delta(0) = 0, y'_\delta(0) = 0, c \geq 0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 Y_\delta(s) + 2sY_\delta(s) + 2Y_\delta(s) = e^{-cs}$$

$$\Rightarrow Y_\delta(s) = \frac{e^{-cs}}{s^2 + 2s + 2} = \frac{e^{-cs}}{(s+1)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_\delta(t) = u(t - c)e^{-(t-c)} \sin(t - c)}$$

**Άσκηση: 13.6**

$$y'' - y = -20\delta(t - 3), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$[s^2 Y(s) - s - 0] - Y(s) = -20e^{-3s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s}{s^2 - 1} - 20e^{-3s} \frac{1}{s^2 - 1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \cosh(t) - 20u(t - 3) \sinh(t - 3)$$

**Άσκηση: 13.7**

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$[s^2 Y(s)] + 4Y(s) = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 4} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 4} = \frac{e^{-\pi s}}{2} \frac{2}{s^2 + 4} - \frac{e^{-2\pi s}}{2} \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2}u(t - \pi) \sin[2(t - \pi)] - \frac{1}{2}u(t - 2\pi) \sin[2(t - 2\pi)] = y(t)$$

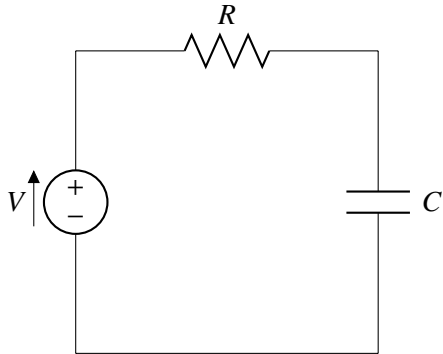
$$y(t) = \frac{1}{2} [u(t - \pi) - u(t - 2\pi)] \sin 2t$$

## Μέρος II

# Κεχαγιάς: Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

(Fourier, Laplace) Τετάρτη 17:00-18:30

## Κεφάλαιο 7: Εισαγωγή στην ανάλυση του Φουριερ



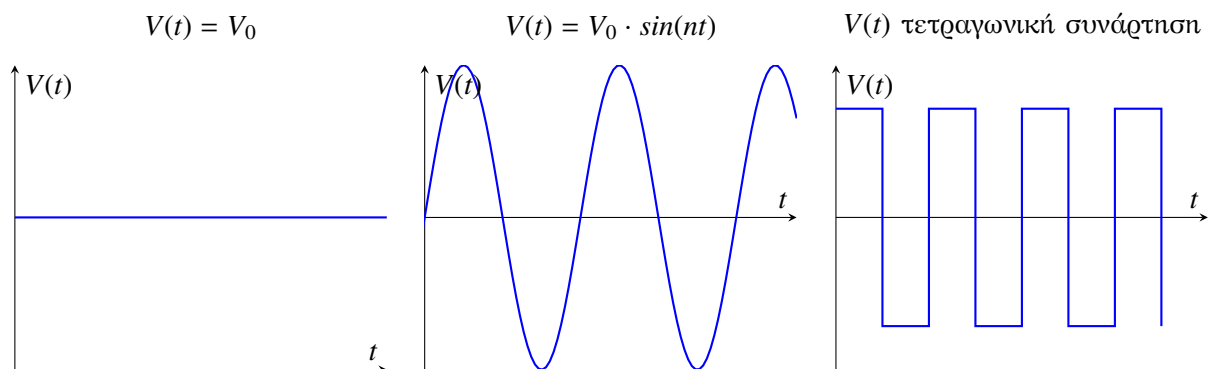
Η συμπεριφορά του κυκλώματος μπορεί να περιγραφεί με μια διαφορική εξίσωση.  
 $Q(t)$ : Το φορτίο του πυκνωτή σε χρονική στιγμή  $t$

$$v_1 = R \cdot i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$v_2 = \frac{Q(t)}{C}$$

$$v_1 + v_2 = V(t) \implies \frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{RC} = \frac{1}{R}V(t), \quad \text{με αρχική συνθήκη } Q(0) = 0$$

Θα προσπαθήσω να λύσω την εξίσωση για τρεις περιπτώσεις:



$$V(t) = V_0$$

$$\frac{dx}{dt} + ax = b$$

Θα εξετάσω τη γενική λύση  $x_0(t)$  της ομογενούς ΔΕ, και θα ψάξω μία ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ.

Ομογενής:  $b = 0 \implies \frac{dx}{dt} = -ax \implies x(t) = ce^{-at}$ .  
 $x(0) = 0 \implies c = 0 \implies x_0(t) = 0$ .

Μη ομογενής:  $\frac{dx}{dt} + ax = b$ .

$$x(t) = k \implies \frac{dx}{dt} + ak = b \implies k = \frac{b}{a} \implies x(t) = k = \frac{b}{a}$$

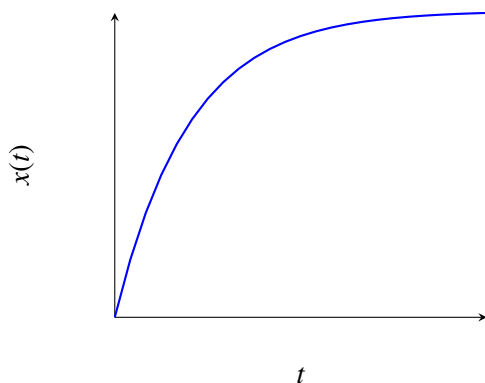
## Θεώρημα

Η γενική λύση της μη ομογενούς είναι:

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t)$$

Άρα

$$\begin{cases} x(t) = ce^{-at} - \frac{b}{a} \\ x(0) = 0 \end{cases} \implies 0 = x(0) = c - \frac{b}{a} \implies c = \frac{b}{a} \implies x(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \text{ ή και } x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$



$$a = \frac{1}{RC}, \quad b = \frac{V_0}{R}$$

$$V(t) = V_0 \sin(nt)$$

$$\frac{dx}{dt} + ax = b \sin(nt)$$

Είναι  $x_h(t) = ce^{-at}$ .

Υποθέτω  $x(t) = c_2 \sin(nt) + c_3 \cos(nt)$ . Τότε  $\frac{dx}{dt} = nc_2 \cos(nt) - nc_3 \sin(nt)$ :

$$\frac{dx}{dt} + ax = (ac_2 - nc_3) \sin(nt) + (ac_3 + nc_2) \cos(nt) = b \sin(nt) \implies$$

$$\implies \begin{cases} ac_2 - nc_3 = b \\ nc_2 + ac_3 = 0 \end{cases} \implies \dots \implies \begin{cases} c_2 = \frac{ab}{a^2 + n^2} \\ c_3 = -\frac{bn}{a^2 + n^2} \end{cases}$$

Θυμάμαι ότι  $x(t) = x_h(t) + x_i(t) = c_1 e^{-at} + \frac{ab}{a^2 + n^2} \sin(nt) - \frac{bn}{a^2 + n^2} \cos(nt)$  και από το  $x(0) = 0$  βρίσκω  $c_1 = \frac{bn}{a^2 + n^2}$ .

Άρα:

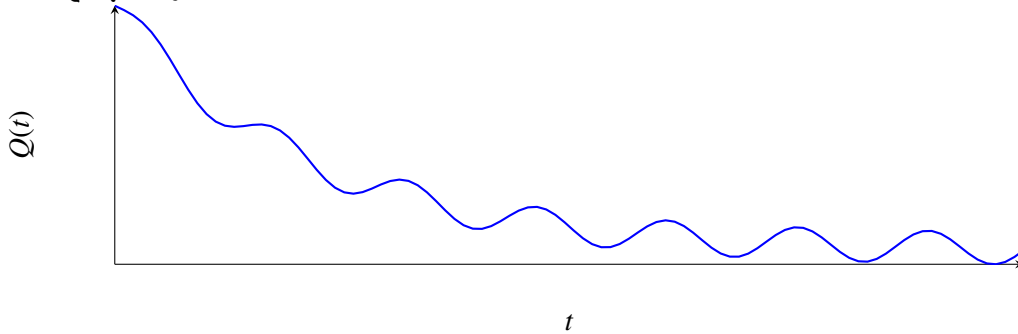
$$x(t) = \frac{bn}{a^2 + n^2} + \frac{ab}{a^2 + n^2} \sin(nt) - \frac{bn}{a^2 + n^2} \cos(nt)$$

Για το RC κύκλωμα,  $a = \frac{1}{RC} \leftarrow$  χρονική σταθερά κυκλώματος,  $b = \frac{V_0}{R}$ , άρα:

$$Q(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2 R^2 n^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{C V_0 \sin(nt) - C^2 R n V_0 \cos(nt)}{C^2 R^2 n^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
 p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t) &= \\
 \sqrt{p^2 + q^2} \left( \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cos \omega t + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \sin \omega t \right) &= \\
 \sqrt{p^2 + q^2} (\sin \phi \cos \omega + \cos \phi \sin \omega t) &= \\
 \sqrt{p^2 + q^2} \sin(\omega t + \phi), \quad \phi = \arctan \frac{p}{q}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής φορτίζει περισσότερο αν είναι μικρότερη η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος.



$$V(t) = \text{square}(t)$$

$$V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)} \frac{4}{n\pi} \sin(nt) = \frac{4}{\pi} \sin(nt) + \frac{4}{3\pi} \sin(3t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5t) + \frac{4}{7\pi} \sin(7t) + \dots$$

Έτσι γίνεται η ανάλυση Fourier, και αυτό θα το δούμε την επόμενη Τετάρτη, που θα πάμε στο Κεφάλαιο 8, που λέει σειρές Fourier.

$$\begin{aligned}
 V_N(t) &= \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^N \frac{4}{n\pi} \sin(nt) \\
 V(t) &= \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(nt) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_N(t)
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) = \frac{V_0 \sin(nt)}{R} \implies Q_n(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2 R^2 n^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{C V_0 \sin(nt) - C^2 R n V_0 \cos(nt)}{C^2 R^2 n^2 + 1}$$

Οπότε αν:

$$\begin{aligned}
 \frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) &= \frac{4}{\pi} \frac{\sin(nt)}{R} \implies Q_1(t) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{C^2 R}{C^2 R^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \dots \right) \\
 \frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) &= \frac{4}{3\pi} \frac{\sin(3t)}{R} \implies Q_3(t) = \frac{4}{3\pi} \left( \frac{3C^2 R}{9C^2 R^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \dots \right) \\
 \frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) &= \frac{4}{5\pi} \frac{\sin(5t)}{R} \implies Q_5(t) = \dots
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$Q(t) = \sum_{n \in \{1,3,5,\dots\}} Q_n(t)$$

Γιατί όμως, αν  $V_1(t) \rightarrow Q_1(t)$ ,  $V_2(t) \rightarrow Q_2(t)$ , τότε  $k_1 V_1 + k_2 V_2 = k_1 Q_1 + k_2 Q_2$  σε αυτό το κύκλωμα (αρχή επαλληλίας/γραμμικότητα);

## Κεφάλαιο 8: Σειρές Φουριερ

### Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f(t)$  λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο  $[t_1, t_2]$  ανν μπορώ να διαμερίσω:

$$[t_1, t_2] = [\tau_0, \tau_1] \cup [\tau_1, \tau_2] \cup \dots \cup [\tau_{n-1}, \tau_n]$$

όπου  $\tau_0 = t_1$ ,  $\tau_n = t_2$ , τέτοια ώστε  $f(t)$  συνεχής στο κάθε  $(\tau_{i-1}, \tau_i)$ , και υπάρχουν  $\lim_{t \rightarrow \tau_i^-} f(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \tau_i^+} f(t) \forall i$

π.χ

Η  $f(t)$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[-\pi, 3\pi]$ , επειδή, για  $t_1 = -\pi, t_2 = 3\pi$ :

$$[-\pi, 3\pi] = [-\pi, 0] \cup [0, \pi] \cup [\pi, 2\pi] \cup [2\pi, 3\pi]$$

Στα  $(-\pi, 0)$ ,  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$ ,  $(2\pi, 3\pi)$  η  $f$  είναι συνεχής, και υπάρχουν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια, άρα η  $f$  είναι τμηματικά συνεχής.

### Συνθήκες του Dirichlet

1. Η  $f(t)$  είναι ορισμένη στο  $(-L, L)$
2. Η  $f(t)$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $(-L, L)$
3. Η  $f(t)$  είναι περιοδική με περίοδο  $2L$ .

### Θεώρημα

Έστω  $f(t)$  η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο  $(-L, L)$ . Τότε:

1. Για κάθε σημείο συνέχειας της  $f(t)$ :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$$

όπου:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$$

2. Σε κάθε σημείο ασυνέχειας  $\tau$ :

$$\frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow \tau^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow \tau^+} f(t) \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi \tau}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi \tau}{L}$$

**Παρ.**  $f(t)$  = τετραγωνικός παλμός

**Λύση** Η  $f(t)$  ικανοποιεί τις Σ.Δ με  $L = \pi$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dt = -1 + 1 = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{-\cos nt}{n} \right)_{t=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{1 - \cos n\pi}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1 - (-1)^n}{n} \right) = \frac{2}{n\pi} \text{ για άρτια } n \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 = a_2 = \dots = 0 \\ b_1 &= \frac{4}{\pi}, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi} \\ b_2 &= 0, \quad b_4 = 0, \dots \end{aligned}$$

**Απόδειξη** (Μερική)

Θα δεχτούμε ότι η  $f(t)$  γράφεται στη μορφή  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$ , και θα δείξουμε τους τύπους  $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$ ,  $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$   
Έστω  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$ . Τότε:

$$\int_{-L}^L f(t) dt = \int_{-L}^L f(t) \cdot 1 dt = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt + \int_{-L}^L a_1 \cos \frac{\pi t}{L} dt + \int_{-L}^L a_2 \cos \frac{2\pi t}{L} dt + \dots = a_0 \cdot L + 0 + 0 + \dots$$

Άρα:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

**Συνέχεια απόδειξης** Υποθέτω ότι υπάρχει **κάποια** σειρά της μορφής \*, θα δείξω ότι οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους \*\*. **ίο** Παρνω τυχόν  $m \in \mathbb{N}$  και εξετάζω το

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt &= \\ &= \int_{-L}^L \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \cos \frac{m\pi t}{L} dt \\ &= \underbrace{\int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos \frac{m\pi t}{L} dt}_{=0 \text{ ολοκληρώνω πάνω σε } m \text{ περιόδους}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L a_n \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt}_{= \frac{b_n}{2} \left( \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi t + m\pi t}{L} dt + \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi t - m\pi t}{L} dt \right) = 0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt \\ &\stackrel{\cos a \cdot \cos \beta = \frac{\cos(a+\beta) + \cos(a-\beta)}{2}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \int_{-L}^L \left( \cos \frac{(n+m)\pi t}{L} + \cos \frac{(n-m)\pi t}{L} \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} 0, & n \neq m \\ a_n L, & n = m \end{cases} \\ &= a_m L \end{aligned}$$

Επομένως:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt$$

Αντιστοίχως αποδεικνύεται και η σχέση για το  $b_m$ .

Να σημειωθεί ότι οι συνθήκες του Dirichlet είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-in\pi t} L dt$$

### Απόδειξη

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} = \frac{a_0}{2} +$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dots e^{\frac{in\pi t}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{in\pi t}{L}} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Άρα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

όπου:

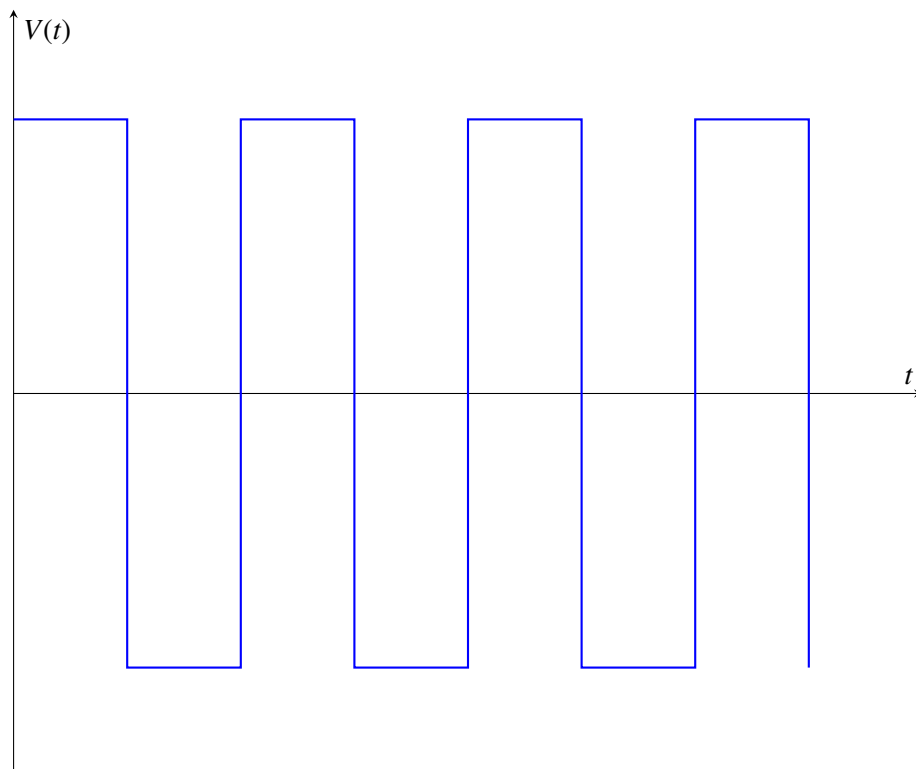
$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & n \in \mathbb{Z}^+ \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, & n \in \mathbb{Z}^- \\ \frac{a_0 + ib_0}{2}, & n = 0 \end{cases}$$

Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη να αποδειχθεί ότι:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{\frac{-in\pi t}{L}} dt$$

### Παράδειγμα

$V(t)$  τετραγωνική συνάρτηση



Θα βρω την **εκθετική** σειρά της  $f(t)$ .

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot e^{-int} dt + \int_0^{\pi} (\pi) 1 \cdot e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( - \int_{-\pi}^0 e^{-int} dt + \int_0^{\pi} e^{-int} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \left. \frac{e^{-int}}{-in} \right|_{-\pi}^0 + \left. \frac{e^{-int}}{-in} \right|_0^{\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{-in} - \frac{e^{-in\pi}}{-in} - \frac{e^{-in\pi}}{-in} + \frac{1}{-in} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2}{-in} - \frac{2 \cos(n\pi)}{-in} \right) \\
 c_n &= \frac{i}{n\pi} \cdot (1 - \cos n\pi)
 \end{aligned}$$

| $n$ | $c_n$             |
|-----|-------------------|
| -2  | 0                 |
| -1  | $\frac{2i}{\pi}$  |
| 0   | 0                 |
| 1   | $-\frac{2i}{\pi}$ |
| 2   | 0                 |
| 3   | $\frac{2i}{3\pi}$ |

Άρα:

$$f(t) = \dots + \frac{2i}{3\pi} e^{i3t} + \frac{2i}{\pi} e^{-it} - \frac{2i}{\pi} e^{it} - \frac{2i}{3\pi} e^{i3t} + \dots$$

Ερωτήματα για τον αναγνώστη:

1. Πότε έχει η τριγωνομετρική σειρά μόνο ημίτονα/μόνο συνημίτονα;
2. Πότε έχει η εκθετική σειρά μόνο πραγματικούς/μόνο εκθετικούς όρους;

### Ορισμός

Συμβολίζω με  $\mathcal{F}_L$  το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet (με ημιπερίοδο  $L$ )

### Θεώρημα

Το  $\mathcal{F}_L$  είναι διανυσματικός χώρος.

**Απόδειξη** Έστω  $f, g \in \mathcal{F}_L$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$ . Θα δείξω ότι  $\kappa f + \lambda g \in \mathcal{F}_L$ .

**Πράγματι**

1. Αν οι  $f, g$  είναι ορισμένες στο  $[-L, L]$  τότε και η  $\kappa f + \lambda g$  είναι ορισμένη στο  $[-L, L]$ .



2.

$$\begin{aligned}(\kappa f + \lambda g)(t + 2L) &= \kappa f(t + 2L) + \lambda g(t + 2L) \\&= \kappa f(t) + \lambda g(t) \\&= (\kappa f + \lambda g)(t)\end{aligned}$$

Άρα η  $\kappa f + \lambda g$  έχει περίοδο  $2L$ .

3. Αν η  $f$  και η  $g$  είναι τμ. συνεχείς στο  $[-1, 1]$ , τότε και η  $\kappa f + \lambda g$  είναι τμ. συνεχείς.

Από τα 1,2,3, η  $\kappa f + \lambda g \in \mathcal{F}_L$ .

### Θεώρημα

Το σύνολο  $\left\{e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$  είναι μια ορθογώνια βάση του  $\mathcal{F}_L$ .

**Δηλαδή** κάθε  $f(t) \in \mathcal{F}_L$  μπορεί να γραφεί:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Επιπλέον  $\forall n, m, m \neq n \quad e^{\frac{in\pi t}{L}} \perp e^{\frac{im\pi t}{L}}$

Δηλαδή:

$$e^{\frac{in\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{im\pi t}{L}} = 0$$

Δηλαδή:

$$\int_{-L}^L e^{\frac{in\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{im\pi t}{L}} dt = 0$$

Για να ορίσω το εσωτερικό γινόμενο, θέλω  $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_n x_n \bar{x}_n = \sum (x_n)^2$

$$f \cdot g = \int_{-L}^L f(t) \overline{g(t)} dt$$

Άρα

$$e^{\frac{in\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{im\pi t}{L}} = \int_{-L}^L e^{\frac{in\pi t}{L}} e^{\frac{im\pi t}{L}} dt = \int_{-L}^L e^{\frac{i(m-n)\pi t}{L}} dt = \begin{cases} 2L, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

- $\mathcal{F}_L$  το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν Dirichlet
- Το  $\mathcal{F}_L$  είναι  $\Delta X$
- Το  $\left\{e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  είναι μια ορθογώνια βάση του  $\mathcal{F}_L$
- Το  $\left\{\cos \frac{in\pi t}{L}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\sin \frac{in\pi t}{L}\right\}_{n=1}^{\infty}$  είναι μια ορθογώνια βάση του  $\mathcal{F}_L$
- $\underbrace{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$ , με

περιοδική, με ημιπερίοδο  $L$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{\frac{-in\pi t}{L}} dt$$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= [x_1 x_2 x_3] = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \\&= \text{Proj}(\vec{x}, \vec{e}_1) + \text{Proj}(\vec{x}, \vec{e}_2) + \text{Proj}(\vec{x}, \vec{e}_3) \\&= \sum_{n=1}^3 \vec{x} \cdot \vec{e}_n \cdot \frac{\vec{e}_n}{\|\vec{e}_n\|}\end{aligned}$$

Άρα:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Proj}\left(f(t), e^{\frac{in\pi t}{L}}\right)$$

$$\text{όπου } \text{Proj}\left(f(t), e^{\frac{in\pi t}{L}}\right) = f(t) \bullet e^{\frac{in\pi t}{L}} \frac{e^{\frac{in\pi t}{L}}}{\left\|e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\|}$$

$$f(t) \bullet e^{\frac{in\pi t}{L}} = \int_{-L}^L f(t) \cdot \overline{e^{\frac{in\pi t}{L}}} dt$$

$$\left\|e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\| = \int_{-L}^L e^{\frac{in\pi t}{L}} \cdot \overline{e^{\frac{in\pi t}{L}}} dt = 2L$$

### Θεώρημα 10.1: Plancherel

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_n c_n \bar{r}_n$$

$$\text{H} \begin{cases} f(t) = \sum_n c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \\ f(t) = \sum_n r_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \end{cases}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \overline{g(t)} dt &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \right) \overline{\left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{\frac{im\pi t}{L}} \right)} dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \bar{r}_m e^{\frac{-im\pi t}{L}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n \bar{r}_m \underbrace{\int_{-L}^L e^{\frac{i(n-m)\pi t}{L}} dt}_{\begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2L & m = n \end{cases}} \\ &= \frac{1}{2L} 2L \sum_n c_n \bar{r}_n \end{aligned}$$

Γενικά:

$$f(t) \leftrightarrow \vec{c} = [\dots c_{-1} \ c_0 \ c_1 \ c_2 \ \dots]$$

(με την επιφύλαξη ότι σε πεπερασμένο αριθμό σημείων μπορεί να αλλάξει η τιμή της συνάρτησης)  
Σύμφωνα με το θεώρημα:

$$\begin{aligned} f(t) &\leftrightarrow \vec{c} \\ g(t) &\leftrightarrow \vec{r} \\ \frac{1}{2L} f \bullet g &= \vec{c} \bullet \vec{r} \end{aligned}$$

### Θεώρημα 10.2: Πόρισμα (Parseval)

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(t)|^2 dt = \sum_n |c_n|^2$$

### Θεώρημα 10.3

Αν  $f(t) \in \mathcal{F}_L$  και  $f(t) = \sum_n c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$ , τότε:

$$\frac{df}{dt} = \sum_n c_n \frac{in\pi}{L} e^{\frac{in\pi t}{L}}$$
$$\int f(t) = \sum_n c_n \frac{L}{in\pi} e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Τα ίδια για ημίτονα και συνημίτονα

**Παράδειγμα** Δίνεται η  $f(t) = \begin{cases} |t| & t \in [-\pi, \pi] \\ \text{περιοδική επέκταση} & t \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$  Να βρεθεί η Σειρά (Fourier) της  $f(t)$ .

**Λύση** Αφού λοιπόν  $g(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left( \sin t + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$ , τότε:

$$f(t) = c - \frac{4}{\pi} \left( \cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} \right)$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = c$$

Άρα τελικά:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} \right)$$

Παρατηρώ ότι η  $f$  έχει ασθενέστερες υψηλές συχνότητες από τη  $g$ .

**Παράδειγμα** Να υπολογιστεί το:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Είναι

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3} + \frac{\sin \frac{5\pi}{2}}{5} \right)$$
$$1 = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right) = S_1$$

**Παράδειγμα** Να υπολογιστεί το:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

**Λύση**

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$$
$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

## Κεφάλαιο 9: Μετασχηματισμός Φουριερ

### Θεώρημα

Έστω ότι η  $f(t)$  ικανοποιεί τα εξής:

1. Τις συνθήκες Dirichlet  $\forall L \in \mathbb{R}$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  (δηλ. η  $f(t)$  είναι απολύτως ολοκληρώσιμη)

Τότε:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

όπου:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

**Απόδειξη** Δίνεται η  $f(t)$ . Διαλέγω τυχόν  $t$  και ορίζω την  $f_T(t) = f(t) \quad \forall t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ , που έχει σειρά Fourier:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{\frac{in2\pi t}{T}}$$

όπου

$$c(n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{in2\pi t}{T}} dt$$

$$\text{Θέτω } \delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = n \cdot \delta\omega = \frac{2n\pi}{T}$$

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{in2\pi t}{T}} dt \right) e^{\frac{in2\pi t}{T}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2\pi}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{\frac{in2\pi t}{T}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} \delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right)}_{F(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Την  $F(\omega)$  την ονομάζουμε **Fourier μετασχηματισμένη** της  $f(t)$ , και γράφουμε:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega)$$

$$F(\omega) = \mathcal{F} f(t) \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega))$$

**Παρ.**

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| \geq a \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a 1e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-a}^a \\
 &= \frac{2}{\omega} \left( \frac{-e^{-i\omega a}}{2i} \right) \\
 &= 2 \frac{\sin(\omega a)}{\omega}
 \end{aligned}$$

Παρ.

$$f(t) = e^{-|t|}$$

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt &= -\frac{1}{1+i\omega} \Big|_{t=0}^{\infty} \\
 &= -\frac{1}{1+i\omega} (e^{-(1+i\omega)\cdot\infty} - e^{-(1+i\omega)\cdot 0}) \\
 &= -\frac{1}{1+i\omega} (0 - 1) \\
 &= \frac{1}{1+i\omega}
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt &= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \\
 &= \boxed{\frac{2}{1+\omega^2} = \mathcal{F}(e^{-|t|})}
 \end{aligned}$$

Ο Μ/Σ Fourier εφαρμόζεται μόνο σε απόλυτα ολοκληρώσιμες  $f(t)$ . Δηλαδή υποθέτω ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = M < \infty$$

Αυτό το κάνω, διότι  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < M < \infty$  είναι ικανή συνθήκη για να υπάρχει το  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ . Έχει μία σημαντική συνέπεια:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$$

Για παράδειγμα, οι  $\mathcal{F}(e^t)$  και  $\mathcal{F}(e^{-t})$  δεν υπάρχουν, ενώ ο  $\mathcal{F}(e^{-|t|})$  υπάρχει διότι η  $e^{-|t|}$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Επίσης  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| d\omega = M' < \infty$

### Θεώρημα 11.1

$$\mathcal{F}(\kappa f + \lambda g) = \kappa \mathcal{F}(f) + \lambda \mathcal{F}(g)$$

Παρ.

$$\mathcal{F}(3 \cdot \text{square} + 5 \cdot e^{-|t|}) = 6 \frac{\sin(\omega)}{\omega} + \frac{10}{1+\omega^2}$$

Η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται για τον αναγνώστη.

Το Wolfram επιστρέφει τους Μ/Σ Fourier με διαφορετικό παράγοντα, για λόγους συμμετρίας! ( $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  έναντι  $\frac{1}{2\pi}$ ). Στις σημειώσεις τηρείται η ιστορική σύμβαση που ακολουθείται και από προγράμματα όπως, π.χ. Matlab.

### Θεώρημα 11.2

Έστω  $F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$ , τότε:

$$\mathcal{F}(F(t)) = 2\pi f(-\omega)$$

Δηλαδή:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(t))) = 2\pi f(-t)$$

Απόδ.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t)) &= F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) &= f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \\ 2\pi f(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)e^{-i\tau t} d\tau = 2\pi f(-t) \\ &= \mathcal{F}(F(\tau)) = 2\pi f(-t)\end{aligned}$$

Παρ.

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

Λύση

$$\dots = \int_{-\infty}^{\infty} \dots$$

ή

Παρατηρώ ότι  $\mathcal{F}(\frac{1}{2}e^{-|t|}) = \frac{1}{1+\omega^2} = F(\omega) = F(-\omega)$

Άρα  $F(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \mathcal{F}(F(t)) = 2\pi f(-\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

### Θεώρημα 11.3

$$\mathcal{F}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Απόδ.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(at)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}at} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}at} d(at) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa)e^{-i\frac{\omega}{a}\kappa} d\kappa = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

Παρ.

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{4+9t^2}\right) = \frac{1}{4} \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\frac{9}{4}t^2}\right) = \frac{1}{4} \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}t\right)^2}\right)$$

$$\text{Για } f(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad F(\omega) = \pi e^{-|\omega|},$$

$$f\left(\frac{3}{2}t\right) = \frac{1}{1+\frac{9}{4}t^2} \rightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{2\pi}{3} e^{-\left|\frac{3\omega}{2}\right|}$$

Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι  $\frac{1}{4} \frac{2\pi}{3} e^{-\left|\frac{3\omega}{2}\right|}$

### Θεώρημα

Έστω  $F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$ . Τότε

1.  $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega F(\omega)$
2.  $\mathcal{F}\left(\int f(t) dt\right) = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$
3.  $\mathcal{F}(-itf(t)) = \frac{dF}{d\omega}$

Απόδ.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} df \\ &= f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d(e^{-i\omega t}) \\ &= f(\infty)e^{-i\omega\infty} - f(-\infty)e^{i\omega\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega)f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= 0 - 0 + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega F(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) \end{aligned}$$

Θέτω  $g(t) = \int f(t) dt$ , οπότε  $\frac{dg}{dt} = f(t)$ .

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}\left(\frac{dg}{dt}\right) = i\omega G(\omega) \implies \mathcal{F}\left(\int g(t) dt\right) = G(\omega) = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$

Το (3) δείχνεται όπως το (1).

### Ορισμός: Βηματική συνάρτηση του Heaviside

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{t=0}^{\infty} = \boxed{\frac{1}{i\omega} = \mathcal{F}(h(t))}$$

Παρ.

$$\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}h(t)$$

**Λύση**

$$i\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = \frac{1}{i\omega} (???)$$

Είναι  $\mathcal{F}(f(t)e^{i\omega t}) = F(\omega - \omega_0)$ .

Θέτω  $f(t) = h(t)$ ,  $e^{i\omega t} = e^{-t}$ . Δηλαδή  $\omega_0 = \frac{1}{i} = i$ , οπότε  $\mathcal{F}(e^{-t}h(t)) = \frac{1}{1+i\omega}$ .

Άρα

$$\begin{aligned} i\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) &= \frac{1}{i\omega + 1} \implies Y(\omega) = \frac{1}{(i\omega + 1)(i\omega + 2)} \\ &\implies Y(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega} - \frac{1}{2 + i\omega} \\ &\implies \mathcal{F}^{-1}(Y(\omega)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1 + i\omega}\right) - \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2 + i\omega}\right) \\ &\implies \boxed{y(t) = e^{-t}h(t) - e^{-2t}h(t)} \end{aligned}$$

είναι η λύση της δοθείσας εξίσωσης. Πού πήγε η σταθερά; Ποιες είναι οι αρχικές συνθήκες;

Αν πήγαινα να την λύση αλλιώς:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = f(t)$$

Ομογενής  $\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ , γενική λύση  $y_h(t) = ce^{-2t}$ .

Ειδική λύση της μη ομογενούς  $y_p(t)$ .

Γενική λύση της μη ομογενούς:  $y(t) = ce^{-2t} + y_p(t)$ . Ποια είναι η τιμή της  $c$ ?

Είναι  $c = 0$  διότι ζητώ λύση η οποία έχει μετασχηματισμό Φουριερ. Άρα πρέπει  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (ce^{-2t} + y_p(t)) = 0$ , άρα  $c = 0$ .

Δηλαδή κρυβόταν από την εκφώνηση του προβλήματος ότι  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = 0$ .

**Παρ.** Υπολογίστε  $\mathcal{F}\left(\frac{t}{(t^2+1)^2}\right)$

**Λύση**  $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$ , τότε  $\frac{df}{dt} = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$ .

$$\mathcal{F}\left(\frac{t}{(t^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = -\frac{1}{2}i\omega\mathcal{F}(f) = -\frac{1}{2}i\omega\pi e^{-|\omega|}$$

**Παρ.** Να υπολογιστεί ο  $\mathcal{F}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$ .

**Λύση** Θέτω  $f(t) = \frac{1}{1+t^2} \implies F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$ .

Οπότε  $\mathcal{F}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = \frac{1}{-i}\mathcal{F}(-it \cdot f(t)) = i\frac{dF}{d\omega}$ .

**Προσοχή**

$$G(\omega) = i\frac{dF}{d\omega} = \pi i\frac{d}{d\omega}(e^{-|\omega|}) = \begin{cases} \pi i e^{\omega} & \omega < 0 \\ \text{ΚΕΦ. 11} & \omega = 0 \\ -\pi i \cdot e^{-|\omega|} & \omega > 0 \end{cases}$$



### Θεώρημα: Plancherel/Parseval

Plancherel

$$f \bullet g = \frac{1}{2\pi} F \bullet G$$

δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) \overline{G(\omega)} d\omega$$

Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Η απόδειξη είναι εύκολη και υπάρχει στις σημειώσεις.

### Συνέλιξη

#### Ορισμός: Σπουδαίος Ορισμός

Η **συνέλιξη** των  $f(t)$ ,  $g(t)$  συμβολίζεται  $f * g$  και ορίζεται:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

### Παράδειγμα

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Περίπτωση  $t < -2$  Τότε

$$\begin{aligned} (g * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{-2} \cancel{g(\tau)} g(t - \tau) d\tau + \int_{-2}^{-1} \cancel{g(\tau)} g(t - \tau) d\tau + \int_{-1}^{\infty} g(\tau) \cancel{g(t - \tau)} d\tau = 0 \end{aligned}$$

Μετά από πράξεις θα δούμε ότι

$$(g * g)(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ 2 - t & -2 < t < 0 \\ 2 + t & 0 \leq t < 2 \\ 0 & 2 < t \end{cases}$$

### Θεώρημα

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$$

## Απόδειξη

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-i\omega(t - \tau)} d(t - \tau) \right) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= G(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= G(\omega) F(\omega)
\end{aligned}$$

### Θεώρημα: Πόρισμα

$$\begin{aligned}
f * g &= g * f \\
f * (g + h) &= f * g + f * h \\
(f * g) * h &= f * (g * h)
\end{aligned}$$

Απόδ.

$$\mathcal{F}(f * g) = F(\omega)G(\omega) = G(\omega)F(\omega) = \mathcal{F}(g * f)$$

ομοίως και τα υπόλοιπα.

Παρ. Να βρεθεί ο  $\mathcal{F}(\pi * \pi)$ .

Λύση

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\pi(t)) &= \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} \\
\mathcal{F}(\lambda(2t)) &= \mathcal{F}(\pi(t) * \pi(t)) = \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} = \frac{4 \sin^2 \omega}{\omega^2}
\end{aligned}$$

Τι να κάνω όταν η  $f(t)$  δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη;

Θα δουλέψω με την  $g(t) = e^{-\sigma t} f(t)$  και θα περιοριστώ στο  $t \geq 0$ .

Τότε η  $g(t)$  θα είναι (για αρκετά μεγάλο  $\sigma$ ) απολύτως ολοκληρώσιμη, και μπορώ να πάρω  $\mathcal{F}(g(t)) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-i(\sigma + i\omega)t} = \text{Θέτοντας } s = \sigma + i\omega \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}(f(t)).$

## Κεφαλαίο 10: Μετασχηματισμός Λαπλάσε

- Για να υπάρχει  $\mathcal{F}(x(t))$  πρέπει η  $x(t)$  να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.
- Αν η  $x(t)$  δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, ίσως είναι η  $y(t) = x(t)h(t)e^{-\sigma t}$ .
- Οποτε δουλεύω με την  $\mathcal{F}(y(t)) = \mathcal{F}(x(t)h(t)e^{-\sigma t}) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{i\omega t} dt$  (όπου  $s = \sigma + i\omega$ )  $= \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}(x(t)).$
- Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορώ να διαχειριστώ  $x(t)$  που είναι χρήσιμες αλλά όχι απολ. ολοκλ. (π.χ.  $x(t) = 1$  ή  $e^t \dots$ ).

- Όμως πετάω όλη την πληροφορία για  $t < 0$ .

### Ορισμός

Η  $f(t)$  λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο  $[t_1, t_2]$  ανν:

- μπορώ να διαμερίσω το  $[t_1, t_2]$ :

$$[t_1, t_2] = [\tau_0, \tau_1] \cup [\tau_1, \tau_2] \cup \dots \cup [\tau_{N-1}, \tau_N]$$

- και η  $f(t)$  συνεχής σε κάθε  $(\tau_{n-1}, \tau_n)$  ( $n = 1, \dots, N$ )
- και  $\forall n : \lim_{t \rightarrow \tau_n^-} f(t)$  υπάρχουν (εκτός ίσως των ακραίων 2)

### Ορισμός

Η  $f(t)$  λέγεται **εκθετικής τάξης  $\gamma$**  στο  $[t_1, t_2]$  ανν  $\exists M, \gamma$  τ.ώ:

$$\forall t \in [t_1, t_2] : |f(t)| < M \cdot e^{\gamma t}$$

### Ορισμός

Έστω  $f(t)$  τ.ώ:

1.  $\forall T < \infty$  : η  $f(t)$  τμ. συν. στο  $[0, T]$
2. Η  $f(t)$  είναι εκθ. τάξης  $\gamma$  στο  $[0, \infty)$ .

Τότε ορίζω τον Μ/Σ Laplace της  $f(t)$  ως εξής:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

**Παρ.** Να βρεθεί ο  $\mathcal{L}(e^t)$

**Λύση**

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^t e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(-s+1)t} dt \\ &= \left. \frac{e^{-(s-1)t}}{s-1} \right|_{t=0}^{\infty} \\ &= -\frac{e^{-(s-1)\cdot\infty}}{s-1} + \frac{e^{-(s-1)\cdot 0}}{s-1} \\ &= \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}(e^t) \end{aligned}$$

**Παρ.**  $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$

**Παρ.**  $\mathcal{L}(1) = \mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s}$

**Παρ.**  $\mathcal{L}(h(t)) = \frac{1}{s}$

Παρ.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} -\frac{1}{s}(e^{-st}) \cdot t dt \\ &= \left(-\frac{t}{s} e^{-st}\right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} \cdot \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} = \mathcal{L}(t)\end{aligned}$$

Παρ.  $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Θεώρημα

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx}{dt}\right) = s \cdot X(s) - X(0)$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{dx}{dt}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t) (-s) e^{-st} dt \\ &= -x(0) + s \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = -x(0) + s \cdot x(s)\end{aligned}$$

Να λυθεί με Μ/Σ Laplace

$$\frac{dx}{dt} + x = 1, \quad x(0) = -2$$

Λύση

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(\dots\dots\dots) \\ \Rightarrow x \cdot X - \cancel{x(0)}^2 + X &= \frac{1}{s} \\ \Rightarrow sX + 2 + X &= \frac{1}{s} \\ \Rightarrow (s+1) \cdot X &= \frac{1}{s} - 2 \\ \Rightarrow X &= \frac{1-2s}{(s+1)s} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s} = \frac{(A+B) \cdot s + B}{(s+1) \cdot s} \Rightarrow \begin{cases} A+B = -2 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -3 \\ \Rightarrow X(s) &= -\frac{3}{s+1} + \frac{1}{s} \\ \Rightarrow x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{3}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \\ &= \boxed{X(t) = 1 - 3e^{-t}}\end{aligned}$$

Παρ. Να λυθεί...

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt} + 10x = 2t + 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1$$

Λύση

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = s^2X - sx(0) - x'(0)$$

Έστω  $\mathcal{L}\left(\frac{dx}{dt}\right) = P(s)$ ,  $\frac{dx}{dt} = p(t)$ .

Απόδ.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right) &= \mathcal{L}\left(\frac{dp}{dt}\right) = sP - p(0) \\ &= s \cdot (sX - x(0)) - x'(0) \\ &= s^2X - sx(0) - x'(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2X - s \cdot 1 - (-1) + 7 \cdot (sX - 1) + 10x &= \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \\ \Rightarrow (s^2 + 7s + 10) \cdot X - s + 1 - 7 &= \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \\ \Rightarrow (s^2 + 7s + 10)X &= \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} + s + 6 \\ \Rightarrow \dots &= \frac{2 + s + s^3 + 6s^2}{s^2} \\ \Rightarrow X &= \frac{s^3 + 6s^2 + s + 2}{s^2 \cdot \underbrace{(s^2 + 7s + 10)}_{\text{XAP. ΕΞ.}}} = \frac{-1/25}{s} + \frac{1/5}{s^2} + \underbrace{\frac{4/3}{s+2} + \frac{-22/75}{s+5}}_{\text{Λύση Ομογενούς}} \\ \Rightarrow x(t) &= -\frac{1}{25} + \frac{t}{5} + \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{22}{75}e^{-5t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin at) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \left(\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia}\right) \\ &= \frac{a}{s^2 + a^2} = \mathcal{L}(\sin at) \\ \frac{s}{s^2 + a^2} &= \mathcal{L}(\cos at) \\ \frac{s}{s^2 - a^2} &= \mathcal{L}(\cosh at) \\ \frac{a}{s^2 - a^2} &= \mathcal{L}(\sinh at)\end{aligned}$$

#### Θεώρημα

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(k_1x_1(t) + k_2x_2(t)) \\ = k_1X_1(s) + k_2X_2(s)\end{aligned}$$

Απόδ. blah blah...

#### Θεώρημα

$$\mathcal{L}(f(t)e^{at}) = F(s - a)$$

Απόδ.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} f(t)e^{at}e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t} dt \\ &= F(s-a) \end{aligned}$$

### Θεώρημα

$$\mathcal{L}(f(t-t_0)h(t-t_0)) = e^{-st_0}F(s) \quad \forall t_0 \geq 0$$

Απόδ.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t-t_0)h(t-t_0)) &= \int_0^{\infty} f(t-t_0)e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-s(t-t_0)} \cdot e^{st_0} dt \\ &= e^{-st_0} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-st_0}F(s) = \mathcal{L}(f(t)) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) = h(t-1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = h(t)$$

$$\mathcal{L}(h(t)) = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}(h(t-1)) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right) = \sin t \cdot e^{-2t}$$

### Θεώρημα

Όταν η  $f(t)$  είναι συνεχής στο  $t=0$  ισχύουν:

- $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$
- $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

### Θεώρημα

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(tf(t)) &= -\frac{dF}{ds} \\ \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) &= \int_s^{\infty} F(u) du \end{aligned}$$

### Ορισμός

Έστω  $f(t), g(t)$  με ΠΟ  $[0, \infty)$ .  
 Η **συνέλιξη** των  $f, g$  ορίζεται:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

**Παρ.**  $f = e^{3t}, g = e^{2t}$

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t e^{3\tau} e^{2(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \\ &= e^{2t} \cdot e^{\tau} \Big|_{\tau=0}^t \\ &= e^{3t} - e^{2t}\end{aligned}$$

### Θεώρημα

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

**Απόδ.** Θέτω  $u + v = t$   
 $v = t - u$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) &= \left( \int_0^\infty f(u)e^{-su} du \right) \left( \int_0^\infty g(v)e^{-sv} dv \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)g(v)e^{-s(u+v)} du dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)g(v)e^{-st} du dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^t f(u)g(t-u)e^{-st} du dt \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^t f(u)g(t-u) du \right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty (f * g)(t)e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}(f * g)\end{aligned}$$

**Παρ.**

$$\underbrace{h(t)}_{f(t)} * \underbrace{h(t-1)}_{g(t)} = ?$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f * g) &= \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s} \frac{e^{-st}}{s} = \frac{e^{-st}}{s^2} \implies \\ (f * g)(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right) \\ &= (t-1) \cdot h(t-1)\end{aligned}$$

Παρ.

$$\begin{array}{r} 25 \\ *36 \\ \hline 150 \\ 75 \\ \hline 900 \end{array}$$

$$25 = 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 = A(10)$$

$$36 = 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 = B(10)$$

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$B(x) = b_0 + a_1x + a_2x^3$$

$$A(x) \cdot B(x)$$

Έστω:

$$\mathcal{K}^{-1}(A(x)) = (a_0, a_1, a_2, \dots) = \vec{a}$$

$$\mathcal{K}(\vec{a}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = A(x)$$

$$A(x) \cdot B(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2)$$

$$= a_0b_0x^0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} \right) x^n = A(x)B(x)$$

$$\vec{a} * \vec{b} = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\mathcal{K}(\vec{a} * \vec{b}) = A(x)B(x)$$

Γραμμικά, Χρονικά αμετάβλητα συστήματα

ΓΧΑ συστήματα (LTI system)

Περιγράφονται από \_\_\_\_\_ ΔΕ \_\_\_\_\_

Περιγράφονται από γραμμικές ΔΕ σταθερών συντελεστών

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = u(t)$$

περιγράφουν φυσικά συστήματα, κυκλώματα, συστήματα μαζών/ελατηρίων, όπου  $u(t)$  είναι η είσοδος και  $x(t)$  είναι η έξοδος του συστήματος, π.χ. τάση εισόδου, φορτίο πυκνωτή.

Στην ανάλυση αυτών σημαντικό ρόλο παίζει η συνέλιξη

ΓΧΑ σύστημα 1ης τάξης  $\frac{dx}{dt} + a_0 x = u(t) \quad x(0) = 0$



### 1ος τρόπος επίλυσης (ΣΕΒ)

$$\begin{aligned}
 e^{a_0 t} \frac{dx}{dt} + e^{a_0 t} a_0 x &= e^{a_0 t} u(t) \implies \\
 \frac{d}{dt} (e^{a_0 t} x(t)) &= e^{a_0 t} u(t) \implies \\
 e^{a_0 t} x(t) + c &= \int_0^t e^{a_0 \tau} u(\tau) d\tau \implies \\
 x(t) &= e^{-a_0 t} \int_0^t e^{a_0 \tau} u(\tau) d\tau \implies \\
 x(t) &= \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} u(\tau) d\tau \implies \\
 \boxed{x(t) = u(t) \underbrace{*}_{\text{Τι σημαίνει η συνέλιξη;}} e^{-a_0 t}}
 \end{aligned}$$

### 2ος τρόπος επίλυσης (ΚΕΧ) Laplace

$$\begin{aligned}
 sX + a_0 X &= U \implies \\
 (s + a_0)X &= U \implies \\
 X &= U \frac{1}{s + a_0} \implies \\
 X(s) &= \underbrace{H(s)}_{\text{συνάρτηση μεταφοράς (Transfer Function)}} U(s) \implies \\
 x(t) &= h(t) * u(t) = e^{-at} * u(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (s^2 + a_1 s + a_0)X(s) &= U(s) \implies \\
 X(s) &= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} U(s) = H(s)U(s) \\
 x(t) &= h(t) * u(t)
 \end{aligned}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \right) = \dots \text{εξαρτάται από τις ρίζες του } s^2 + a_1 s + a_0, \text{ δηλ. τους } \mathbf{\pi\acute{o}\lambda\omicron\upsilon\varsigma} \text{ της } H(s)$$

**Άποψη** Ο Laplace είναι Fourier.

**Άλλη άποψη** Ο Laplace είναι Taylor.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n \\
 F(x) &= \int_0^{\infty} f(n)x^n dn \\
 F(x) &= \int_0^{\infty} f(t)x^t dt
 \end{aligned}$$

**Θέτω**  $x = e^{-s}$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

**Άλλη άποψη** Υπάρχει η μισή παράγωγος:

$$\frac{d^{1/2} x}{dt^{1/2}} = \mathcal{L}^{-1} \left( \sqrt{s} F(s) \right)$$

**Άσκηση** Υπολογίστε  $\frac{d^{1/2}x}{dt^{1/2}}(t)$ .

## Κεφάλαιο 11: Γενικευμένες Συναρτήσεις

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = u + \frac{du}{dt}$$

Αν  $u(t) = h(t)$

Τότε ποια είναι η  $\frac{du}{dt}$ ;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{h(0) - h(0 - \varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1 - 0}{\varepsilon} = 0$$
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{h(0) - h(0 + \varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1}{\varepsilon} = 0$$

Βλέπω ότι δύσκολα ορίζεται η  $\frac{dh}{dt}$

Παρατηρώ ότι:

$$\mathcal{L}\left(\int f(t) dt\right) = \frac{1}{s} F(s)$$

$$\delta(t) dt = h(t)$$

$$\iff \delta(t) = \frac{dh}{dt}$$

$$\iff \mathcal{L}(f(t)) = s \cdot H(s) - h(s)$$

$$= s \cdot \frac{1}{s} - 1 = 0$$

Αν  $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$  έχει ενδιαφέρον διότι είναι η πρώτη μετασχ. που έχει τάξη του  $s$  στον αριθμητή

### Ορισμός 13.1

Λέμε ότι η  $\phi(t)$  είναι μια **δοκιμαστική συνάρτηση** αν:

1. Η  $\phi(t)$  είναι άπειρα διαφορίσιμη
2.  $\forall n : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^{(n)}(t) = 0$

Συμβολίζω το σύνολο όλων των δοκιμαστικών συναρτήσεων με  $\Phi$ .

### Ορισμός 13.2

Μία **κατανομή** είναι μία συνάρτηση  $T : \Phi \rightarrow \mathbb{C}$  η οποία ικανοποιεί τα εξής:

1.  $T(\kappa_1 \phi_1 + \kappa_2 \phi_2) = \kappa_1 T(\phi_1) + \kappa_2 T(\phi_2)$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t) \implies T(\phi_n(t)) = T(\phi(t))$

**Παρ.** Ορίζω  $T(\phi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} t \phi(t) dt$   
**π.χ.**

$$\phi_1(t) = \frac{1}{t^2 + 1}, \quad \phi_2(t) = \frac{t}{t^4 + 1}$$
$$T(\phi_1(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2 + 1} dt = 44$$

επειδή  $T(\kappa_1 \phi_1 + \kappa_2 \phi_2) = \kappa_1 T(\phi_1) + \kappa_2 T(\phi_2)$  και  $T(\phi_n(t)) \rightarrow T(\phi)$ , η  $T$  είναι μια κατανομή.

**Άλλο παρ.** Ορίζω  $T(\phi(t)) = \phi(0)$

Αυτή είναι μια κατανομή.

$$T(\kappa_1\phi_1(t) + \kappa_2\phi_2(t)) = \kappa_1T(\phi_1(t)) + \kappa_2T(\phi_2(t))$$

$$\text{και } \phi_n(t) \rightarrow \phi(t) \implies T(\phi_n(t)) = T(\phi(t))$$

**Παρ.**  $T_{h(t)}(\phi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\phi(t) dt = \int_0^{\infty} \phi(t) dt$  είναι μία κατανομή.

**Παρ.**  $T_{h(t-t_0)}(\phi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t_0)\phi(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} \phi(t) dt$  είναι μία κατανομή.

### Ορισμός 13.3

Οι κατανομές  $T_{f(t)}$  ορίζονται ως εξής:

$$T_{f(t)}(\phi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

και λέγονται **ομαλές** κατανομές.

$T(\phi(t)) = \phi(0)$  Αυτή δεν είναι μία ομαλή κατανομή.

Δηλ. δεν προκύπτει από κάποιο ολοκλήρωμα.

Δεν υπάρχει  $f(t)$  τ.ώ  $\forall \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)f(t) dt = \phi(0)$ .

Αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση, θα λεγόταν  $\delta(t)$  η οποία υποτίθεται ικανοποιεί:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t) dt = \phi(0)$$

- Έστω η ομαλή κατανομή

$$T_{h(t)}(\phi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\phi(t) dt = \int_0^{\infty} \phi(t) dt$$

- Έστω η μη ομαλή κατανομή

$$T_{\delta(t)}(\phi(t)) = \phi(0)$$

**Ερώτημα** Ισχύει με την έννοια των κατανομών ότι  $T_{\delta(t)}$  είναι η παράγωγος του  $T_{h(t)}$ ;

### Ορισμός 13.4

Για ομαλές κατανομές ορίζω την **κατανεμπτική παράγωγο** της  $T_{f(t)}$  να είναι  $T_{f'(t)}$

**π.χ.** Αν  $f(t) = t$ ,  $T_{f(t)}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} t\phi(t) dt$ , τότε:

$$T_{f'(t)}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt$$

### Θεώρημα 13.1

Αν η  $T_{f(t)}$  είναι μία ομαλή κατανομή, τότε:

$$T_{f'(t)}(\phi(t)) = -T_{f(t)}(\phi'(t))$$

**Απόδ.**

$$\begin{aligned} T_{f'(t)}(\phi(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) f'(t) dt \\ &= \cancel{\phi(t)f(t)} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} \xrightarrow{0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi'(t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi'(t) dt \end{aligned}$$

### Ορισμός 13.5

Για μη ομαλή κατανομή  $T$  ορίζω την παράγωγο κατανομή  $\Psi$  ως εξής:

$$\forall \phi : \Psi(\phi) = -T(\phi')$$

### Θεώρημα 13.2

Η κατανεμντική παράγωγος της  $T_{h(t)}$  είναι η  $T_{\delta(t)}$

**Απόδ.** Έστω  $\Psi$  η καταν. παράγωγος της  $T_{h(t)}$ .

$$\begin{aligned} \forall \phi : \Psi(\phi) &= -T_{h(t)}(\phi') = - \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \phi'(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} \phi'(t) dt = -\phi(t) \Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= -\phi(\infty) + \phi(0) = 0 \implies \\ \implies \Psi(\phi) &= \phi(0) = T_{\delta(t)}(\phi) \end{aligned}$$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι η καταν. παρ. της  $T_{h(t-t_0)}$  είναι η  $\delta(t-t_0)$ .

Τώρα μας παίρνει να είμαστε χαλαροί και να γράφουμε  $\boxed{\frac{dh}{dt} = \delta(t)}$

### Ορισμός 13.6

Ο Laplace M/Σ της κατανομής  $T$  είναι:

$$\mathcal{L}(T) = T(H(t)e^{-st})$$

**Παρ.**  $\mathcal{L}(T_{h(t)}) = T_{h(t)}(h(t)e^{-st}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} = \mathcal{L}(h(t))$   
 $\mathcal{L}(T_{\delta(t)}) = T_{\delta(t)}(h(t)e^{-st}) = h(0)e^{s \cdot 0} = 1 = \mathcal{L}(\delta(t))$

$$\begin{aligned} \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 &= b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{u}{dt} + b_0 u \\ \implies (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)X(s) &= (b_ms^m + \dots + b_1s + b_0)U(s) \\ \implies X(s) &= \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \\ \implies \underbrace{X(s)}_{\text{έξοδος}} &= \underbrace{G(s)}_{\text{συνάρτηση μεταφ.}} \cdot \underbrace{U(s)}_{\text{είσοδος}} \end{aligned}$$

$$\implies x(t) = g(t) * u(t) \quad \text{όπου } g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) \text{ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος}$$

Δηλ.  $G(s) = X(s)$  όταν  $U(s) = 1$ , δηλαδή όταν  $u(t) = \delta(t)$

$$x(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

## ΔΕ κ Laplace

Παρ. Να λυθεί η

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = \sin 2t \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

Λύση

$$\begin{aligned} s^2 Y - s \cdot 2 - 1 + Y &= \frac{2}{s^2 + 4} \\ \Rightarrow (s^2 + 1)Y &= \frac{2}{s^2 + 4} + 2s + 1 \\ \Rightarrow Y &= \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{As + b}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4} \\ &= \frac{(As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \\ &= \frac{(A + C)s^3 + (B + 1)s^2 + (4A + C)s + (4B + D)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 2 \\ 4B + D = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ C = 0 \\ B = \frac{5}{3} \\ D = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{5}{3}s - \frac{2}{3}}{s^2 + 4}$$

$$\Rightarrow y(t) = 2 \cos t + \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t$$

### Άσκηση: Παράδειγμα

Να λυθεί η  $\frac{d^4 y}{dy^4} [t] - y = 0$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

$$\begin{aligned} s^4 Y - s^3 \cdot y(0) - s^2 \cdot y'(0) - s \cdot y''(0) - y'''(0) - Y &= 0 \\ s^4 Y - s^2 - Y &= 0 \Rightarrow Y = \frac{s^2}{s^4 - 1} \\ \Rightarrow Y &= \frac{A}{s^2 - 1} + \frac{B}{s^2 + 1} = \frac{(A + B)s^2 + (A - B)}{(s^2 - 1)(s^2 + 1)} \\ \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} &\Rightarrow Y = \frac{1}{2} \frac{1}{s^2 - 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \sinh t + \frac{1}{2} \sin t \end{aligned}$$

**Άσκηση: Παρ**

Να λυθεί η  $2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = g(t)$   
 $y(0) = y'(0) = 0$

Με τη μέθοδο της παρατήρησης προκύπτει ότι  $g(t) = h(t-5) - h(t-20)$ , άρα  $G(s) = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-20s}}{s}$

$$2s^2Y + sY + 2Y = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{1}{\underbrace{(2s^2 + s + 2)}_{F(s)} \cdot s} (e^{-5s} - e^{-20s}) \Rightarrow$$

$$Y = F(s)(e^{-5s} - e^{-20s})$$

$$F(s) = \frac{1}{(2s^2 + 2) \cdot s} = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{\underbrace{2s^2 + s + 2}_{\Delta < 0}} = \frac{(2a + b)s^2 + (a + c) \cdot s + 2a}{s \cdot (2s^2 + s + 2)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{2s^2 + s + 2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{s + \frac{1}{2}}{s^2 + \frac{1}{2}s + 1} \right) =$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{2} \frac{s^2 + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{2} \frac{s + \frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} - \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} =$$

$$\boxed{\frac{1}{2}h(t) - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{4}} \cos \frac{\sqrt{15}}{4}t - \frac{\sqrt{15}}{30}e^{-\frac{t}{4}} \sin \frac{\sqrt{15}}{4}t = f(t)}$$

$$= \frac{1}{2} \left( h(t) - A \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t + \phi\right) e^{-\frac{t}{4}} \right)$$

$$Y(s) = F(s)(e^{-5s} - e^{-20s}) \Rightarrow$$

$$Y(s) = F(s)e^{-5s} - F(s)e^{-20s} \Rightarrow$$

$$y(t) = f(t-5) - f(t-20)$$

**Άσκηση: Παρ.**

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = g(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 5 \\ t - 5 & 5 < t \leq 6 \\ 1 & 6 \leq t \end{cases} = (t - 5)h(t - 5) - (t - 6)h(t - 6)$$

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{s^2} - \frac{e^{-6s}}{s^2}$$

$$(s^2 + 4)Y = \frac{e^{-5s} - e^{-6s}}{s^2} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{1}{s^2(s^2 + 4)}(e^{-5s} - e^{-6s}) \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} \right) \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin(2t) \Rightarrow$$

$$y(t) = f(t - 5) - f(t - 6)$$

## Μη γραμμικές ΔΕ

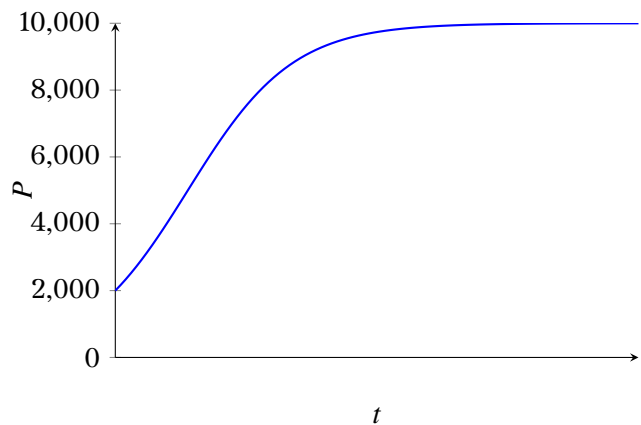
$P(t)$  ο πληθυσμός σε χρόνο  $t$

Η εξίσωση εξέλιξης του πληθ.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r(M - P)P \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{r \cdot (M - P) \cdot P} &= dt \Rightarrow \\ \int \left( \frac{1}{rMP} - \frac{1}{rM(M - P)} \right) dP &= dt \Rightarrow \\ \frac{1}{rM} \ln P - \frac{1}{rM} \ln(M - P) &= rMt + c \Rightarrow \\ \ln P - \ln(M - P) &= rMt + c \Rightarrow \\ \ln \frac{P}{M - P} &= rMt + c' \Rightarrow \\ \frac{P}{M - P} &= ce^{rMt} \xrightarrow{c = \frac{P_0}{M - P_0}} \end{aligned}$$

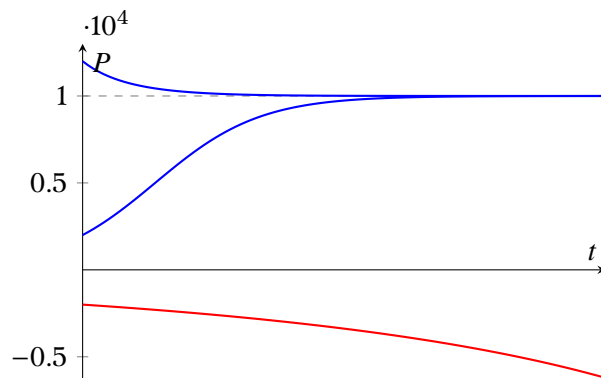
$$P(t) = \frac{P_0 M}{P_0 + (M - P_0)e^{-rMt}}$$



Έχω δύο **σημεία ισορροπίας**, δηλ. τιμές του  $P$  τώ  $\frac{dP}{dt} = 0$ . Αυτά είναι το  $P = M$ ,  $P = 0$ .

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \dots = r(M - 2P) \frac{dP}{dt}$$

|                     |                 |                 |                 |                 |           |
|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------|
| $P$                 | $-\infty$       | $0$             | $M/2$           | $M$             | $+\infty$ |
| $\frac{dP}{dT}$     | $\searrow \cap$ | $\nearrow \cup$ | $\nearrow \cap$ | $\searrow \cap$ |           |
| $\frac{d^2P}{dT^2}$ | $-$             | $+$             | $-$             | $+$             |           |

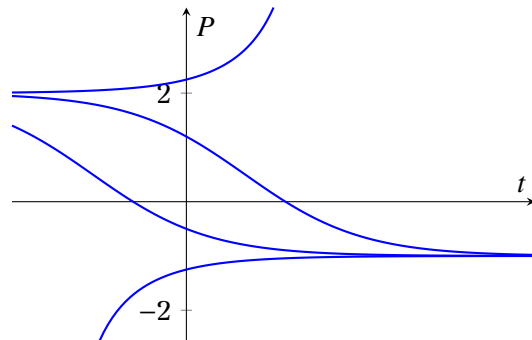


$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x)} \rightarrow 1^{\text{ns}} \text{ τάξης, χρονικά αμετάβλητη}$$

Σκοπός είναι να βρω την ποιοτική της συμπεριφορά με γραφική ανάλυση.

**Παρ.** Να σχεδιαστούν οι λύσεις της ΔΕ  $\frac{dy}{dt} = (y+1)(y-2)$  (\*)

|          |                 |                 |                 |                 |           |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------|
| $y$      | $-\infty$       | $-1$            | $1/2$           | $2$             | $+\infty$ |
| $y'(t)$  | $+$             | $-$             | $-$             | $+$             |           |
| $y''(t)$ | $-$             | $+$             | $-$             | $+$             |           |
| $y(t)$   | $\nearrow \cap$ | $\searrow \cup$ | $\searrow \cap$ | $\nearrow \cup$ |           |



Βλέπω ότι η (\*) έχει 2 σημεία ισορροπίας.

Το  $y_1 = -1$  είναι ευσταθές

Το  $y_2 = 2$  είναι ασταθές.

Η συνάρτηση  $\frac{dy}{dt} = \sin y$  έχει πλάκα.

Συστήματα

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned}$$

π.χ.

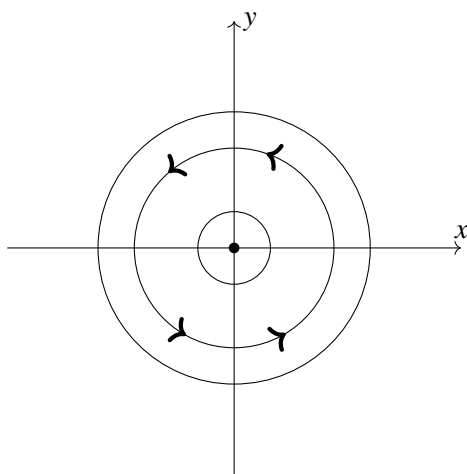
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{dx}{-y} = dt = \frac{dy}{x} &\implies \\ x dx = -y dy &\implies \\ x dx = y dy &\implies \\ \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = dc &\implies \\ x^2 + y^2 = 2c &\end{aligned}$$

Σημεία ισορροπίας

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -y = 0 \\ \frac{dy}{dt} = x = 0 \end{array} \right| \implies (x_0, y_0) = (0, 0)$$



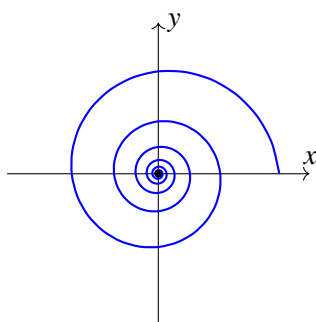
Παρ.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - y\end{aligned}$$

Σημεία ισορροπίας

$$\left. \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{array} \right| \implies (x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{x+y} \implies \dots \implies \begin{cases} x(t) = e^{-t} \sin t \\ y(t) = e^{-t} \cos t \end{cases} \implies x^2 + y^2 = e^{-2t}$$



Οι διάφορες λύσεις του συστήματος δε θα τέμνονται ποτέ! Γιατί;

Παρ.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xy \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 \end{aligned} \right| &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \\ &\Rightarrow x dx - y dy = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - y^2 = c \end{aligned}$$

Σημεία ισορροπίας

$$\left. \begin{aligned} xy &= 0 \\ x^2 &= 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \text{λύσεις } (0, A)$$

Ευσταθή σημεία ισορροπίας είναι τα  $(x, y) = (0, A)$  με  $A \leq 0$

