Αριθμητική Ανάλυση

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Για τον κώδικα σε LaTeX, ενημερώσεις και προτάσεις:
`https://github.com/kongr45gpen/ece-notes`

2017
Τελευταία ενημέρωση: 1 Μαρτίου 2017

Περιεχόμενα

Αριθμητική ανάλυση - Numerical Analysis
Μάθημα 4 ώρες την εβδομάδα - δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ θεωρίας και ασκήσεων.

Και τα δύο βιβλία προτείνονται, το μάθημα γίνεται περισσότερο με βάση το βιβλίο του κ. Πιτσούλη, του κ. Δούγαλη είναι περισσότερο μαθηματικό.

Στις εξετάσεις δεν θα υπάρχει τυπολόγιο/βιβλίο, αλλά θα δίνονται τύποι που χρειάζονται στα θέματα. Απαραίτητο το κομπιουτεράκι.

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Η αριθμητική ανάλυση μάς δίνει *προσεγγιστικές* λύσεις σε μοντέλα και μαθηματικά προβλήματα. Σε δύσκολα προβλήματα, ζητάμε:

- **Ακρίβεια** αποτελέσματος
- **Ταχύτητα** υπολογισμού

Θα δούμε τα εξής προβλήματα:

- **Επίλυση εξισώσεων**

Παράδειγμα Ένας πελάτης θέλει να καταθέσει P € για N χρόνια στην τράπεζα, και εγώ του λέω ότι θα του επιστρέψω A € από την κατάθεση. Ο πελάτης όμως ενδιαφέρεται για το ετήσιο επιτόκιο R.

Προκύπτει μια εξίσωση της μορφής:

$$A = P + P\left(1 + \frac{R}{12}\right) + ...$$

$$f(R) = \frac{P}{R/12}\left[\left(1 + \frac{R}{12}\right)^N - 1\right] = 0, \quad R = ?$$

Θυμόμαστε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Bolzano για να βρούμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον λύση μέσα σε ένα διάστημα, οπότε μπορούμε να "φανταστούμε" έναν αριθμό κοντά στη λύση, και να κλείνουμε συνεχώς ένα διάστημα γύρω από αυτήν (το διάστημα στις εξετάσεις θα δίνεται, π.χ. *βρείτε μία λύση στο διάστημα* $[2.5,\ 3.5]$ *με ακρίβεια* 10^{-5}), αν και αυτό δεν θα γίνεται στον πραγματικό κόσμο.

- **Παρεμβολή**

  Σε έναν σταθμό διοδίων μετράω πόσα αυτοκίνητα περνάν το κάθε λεπτό (π.χ. το 11^o λεπτό περνάν 4, το 12^o περνάν 7, κλπ.)

  Θέλω να βρω ένα πολυώνυμο που να συνδέει όλα τα σημεία μεταξύ τους (θα αποδείξουμε ότι τέτοιο πολυώνυμο πάντα υπάρχει), ή ένα πολυώνυμο (αρκετά χαμηλού βαθμού, ώστε να μην γίνονται πολλές πράξεις) με αρκετά καλή προσέγγιση.

  Με αυτόν τον τρόπο θα μπορώ να προσεγγίσω τιμές που δεν γνωρίζω, π.χ. αν πήγα για καφέ στο 13^o λεπτό

- **Προσέγγιση**

- **Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα**

  Exact και προσεγγιστικές λύσεις συστημάτων πολλών αγνώστων.

- **Ολοκλήρωση**

- **Υπολογισμός ιδιοτιμών & ιδιοδιανυσμάτων**

- **Παραγοντοποίηση πινάκων σε γινόμενο πινάκων**

  Βολεύει κυρίως για την επίλυση συστημάτων.

- **Επίλυση κανονικών διαφορικών εξισώσεων**

- **Βελτιστοποίηση**

  Για παράδειγμα, να πρέπει να ελαχιστοποιήσω μια συνάρτηση τη στιγμή που πρέπει να τηρούνται κάποιες συνθήκες.

1.1 Ακρίβεια vs Ταχύτητα

Απόλυτο Σφάλμα: $|X_t - X_c|$ (απόσταση της λύσης που βρήκα από την πραγματική)

Σχετικό Σφάλμα: $\dfrac{|X_t - X_c|}{|X_t|}$

Επειδή δεν θα γνωρίζουμε την πραγματική λύση X_t, θα βρίσκουμε το μέγιστο σφάλμα.
Για παράδειγμα, σε υπολογιστές έχουμε σφάλματα στρογγύλευσης και αποκοπής:

$$\begin{array}{ll} 0.66666 & \\ 0.66 & \leftarrow \text{αποκοπή} \\ 0.67 & \leftarrow \text{στρογγύλευση} \end{array}$$

Κεφάλαιο 2 Επίλυση Εξισώσεων

$$f(x): \qquad \text{βρείτε } \bar{x} \text{ έτσι ώστε } f(\bar{x}) = 0.$$

Η επίλυση είναι εύκολη όταν η f είναι πολυώνυμο μέχρι $2^{ου}$ βαθμού, όχι όμως όταν είναι μεγαλύτερου, ή όταν έχει κι άλλους όρους (π.χ. εκθετικούς) μέσα.

- Δημιουργούμε μια ακολουθία $x_1, \dots, x_n$ προσέγγισης της $\bar{x}$.
- Σε κάθε βήμα κάνουμε έλεγχο σύγκλισης για να δούμε πόσο κοντά είμαστε.

2.1 Μέθοδος Διχοτόμησης

Θα χρησιμοποιήσω θεώρημα Bolzano ($f(a) \cdot f(b) < 0$)

Ξεκινάω από μία αρχική προσέγγιση/διάστημα (η μέθοδος διχοτόμησης δεν δίνει λύση συγκεκριμένη, αλλά διάστημα - τη λύση την παίρνω σαν το μέσο του διαστήματος).

Συνέχεια κόβω το διάστημα στη μέση, έτσι ώστε f(των άκρων) να είναι ετερόσημα, και παίρνω συνεχώς ένα μικρότερο διάστημα.

Σταματάω όταν είναι επιτυχής ο έλεγχος σύγκλισης, π.χ $|c_{k+1} - c_k| < \epsilon \to 10^{-5}$, δηλαδή το διάστημα στο οποίο βρίσκεται η ρίζα είναι αρκετά μικρό.

Θα διαπιστώσουμε ότι, αν και αυτή η μέθοδος λειτουργεί πάντα, είναι αρκετά αργή.

Παράδειγμα Να βρεθεί ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^3 + x - 1$ στο διάστημα $[0, 1]$ με ακρίβεια 10^{-3}.

$$\begin{aligned}
&f(0) \cdot f(1) < 0 \\
&k = 1,\ a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ m = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0.5 \\
&\quad f(m) = -0.375 < 0 \\
&\quad f(0.5) \cdot f(1) < 0
\end{aligned}$$

Άρα η λύση βρίσκεται μεταξύ 0.5 και 1.

Για το επόμενο βήμα:

$$\begin{aligned}
&k = 2,\ m_2 = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75 \\
&\quad f(m_2) = 0.172 > 0 \\
&\quad f(m_1) f(m_2) < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&k = 3,\ m_3 = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625 \\
&\quad f(m_3) = -0.131 \\
&\quad f(m_2) f(m_3) < 0
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

2.1.1 Σύγκλιση

Όπου r και m_n η πραγματική και προσεγγιστική λύση αντίστοιχα:

$$|r - m_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

επειδή στη $n-$οστή επανάληψη έχω κόψει το διάστημα στα 2 σε n φορές.

Για σφάλμα 10^{-5}, θέλουμε $|r-m_n| = 10^{-5}$:

$$10^{-5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-0) \implies$$
$$\implies n \simeq 16.667 \implies n = 17$$

2.2 Μέθοδος Χορδής ή Τέμνουσας

Σαν τη μέθοδο Bolzano, αλλά δεν παίρνουμε το μέσο του διαστήματος, αλλά κάποια άλλη τιμή. Παρατηρείται ότι αυτή η μέθοδος συγκλίνει γρηγορότερα.
Πρέπει να βρούμε τη ρίζα εντός του διαστήματος (a_1, b_1).

- Παίρνουμε τη χορδή που ενώνει τα a_1, b_1.
- Η χορδή αυτή τέμνει τον άξονα των x στο σημείο a_2, επομένως η ρίζα βρίσκεται μεταξύ των a_2, b_1.
- Παίρνουμε τη χορδή που ενώνει τα a_2, b_2
- Η χορδή αυτή τέμνει τον άξονα των x στο σημείο a_3, επομένως η ρίζα βρίσκεται μεταξύ των a_3, b_1
- ...

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος χορδής λειτουργεί για κυρτές συναρτήσεις.

Κυρτές συναρτήσεις

Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι κυρτή, εννοούμε ότι η καμπύλη της είναι κυρτή, δηλαδή για δύο σημεία της, η χορδή που τα ενώνει δεν τέμνει κάποιο σημείο της f. Αντιθέτως, η συνάρτηση λέγεται μη κυρτή.

a_1, b_1 όπου $f(a_1)f(b_1) < 0$ for $k = 1, 2, ...$

$$(a, f(a)) \qquad (b, f(b))$$
$$y - f(b) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-b)$$
$$\text{Σημείο τομής με άξονα } x: \boxed{x = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}}$$
$$c = \frac{a_k f(b_k) = b_k f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}$$
$$f: \quad f(a_k)f(c) < 0 \implies a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = c$$
$$\text{else} \implies a_{k+1} = c, \quad b_{k+1} = b_k$$

Αν και η μέθοδος χορδής είναι αργή, συνεχίζει να είναι γρηγορότερη από τη μέθοδο διχοτόμησης.

2.3 Μέθοδος Μεταβαλλόμενης Χορδής

Όπως η μέθοδος χορδής, αλλά μεταβάλλουμε την κλίση της χορδής γρηγορότερα, ώστε να φτάσει πιο κοντά στη ρίζα.

Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε π.χ. θεωρώντας ως 2$^{\text{ο}}$ σημείο το $\left(b_1, \frac{f(b_1)}{2}\right)$ αντί για το $(b_1, f(b_1))$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αντί για να διαιρέσουμε με 2, μπορούμε να επιλέξουμε έναν άλλον αριθμό, π.χ. 4 για συναρτήσεις που έχουν πιο κάθετες χορδές.

2.4 Μέθοδος Newton

Αν και η μέθοδος Newton δεν συγκλίνει πάντα και απαιτεί παραγωγισιμότητα, είναι πολύ πιο γρήγορη από τις προηγούμενες μεθόδους, και χρησιμοποιείται πολύ πιο συχνά.

Παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor της f:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$
$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0$$
$$\boxed{x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

for $\kappa = 1, 2, \ldots$

$$x_{\kappa+1} = x_\kappa - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \to \text{ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ}$$

$$\text{if } |x_{\kappa+1} - x_\kappa| < \epsilon \quad \to \text{ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ}$$
$$\text{stop, αλλιώς } \kappa = \kappa + 1$$

Η μέθοδος Newton έχει αρκετά περίπλοκες συνθήκες σύγκλισης που δεν θα μελετήσουμε.

2.5 Μέθοδος Σταθερού Σημείου

Ορισμός 2.1

$f(x)$	το $\hat{x}$ σταθερό σημείο
ανν	$f(\hat{x}) = \hat{x}$

$\bar{x}$ της $f(x)$ στο (a, b) αν κατασκευάσω $g(x)$:

$$\bar{x} = g(\bar{x}) \iff f(\bar{x}) = 0$$

Παράδειγμα

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

Μπορούμε να θέσουμε:

$$g(x) = x^2 - 2$$
$$g(x) = \sqrt{x + 2}$$
$$g(x) = 1 - \frac{2}{x}$$

Αντί να λύσω την f, βρίσκω υποψήφιες λύσεις (δύσκολες επαναληπτικές λύσεις θα δίνονται στις εξετάσεις)

Μέθοδος for $k = 1, 2, \ldots$ $\quad (x_0, g(x), \epsilon)$

$$x_i = g\left(x_{i-1}\right)$$

$$\text{if } |x_i - g(x_i)| < \epsilon \quad \to \text{ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ}$$

Προϋποθέσεις σύγκλισης

1. Για αρχικό x_0, τα $x_1, x_2, \ldots$ να είναι υπολογίσιμα στην $g(x)$

π.χ. $g(x) = -\sqrt{x}$ για $x_0 > 0$

$$x_1 = g(x_0) = -\sqrt{x_0}$$
$$x_2 = g(x_1) = -\sqrt{x_1}$$

2. $x_1, x_2, ...$ να συγκλίνουν σε ένα $\bar{x}$

3. Το σημείο σύγκλισης γ να είναι σταθερό σημείο της $g(x)$.

Τα παραπάνω μετασχηματίζονται σε 3 κριτήρια σύγκλισης:

Κριτήρια Σύγκλισης

1. Υπάρχει $[a, b]$ στο οποίο ορίζεται η $g(x)$ και $g(x) \in [a, b]$, δηλαδή:

$$g : [a, b] \to [a, b]$$

2. $g(x)$ συνεχής στο $[a, b]$

3. $g(x)$ παραγωγίσιμη και να υπάρχει $k < 1$:

$$\forall x \in [a, b],\ \left|g'(x)\right| \leq k$$

Θεώρημα Αν ισχύουν οι 3 παραπάνω προϋποθέσεις, τότε στο διάστημα $[a, b]$ υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο γ της g, και η μέθοδος σταθερού σημείου συγκλίνει σε αυτό το γ.