http://users.auth.gr/natreas

Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5

Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6

Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marsden (πιο μαθηματικό)

Μέρος I

Ατρέας

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Έστω $\mathbb{C} = \left\{ z = \overbrace{(x,y)}^{\text{γεωμετρική παράσταση μιγαδικού}};\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $x_2 = (x_2, y_2)$, τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο $\lambda \in \mathbb{R}$ με μιγαδικό z

Αν $z = (x, y)$, τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

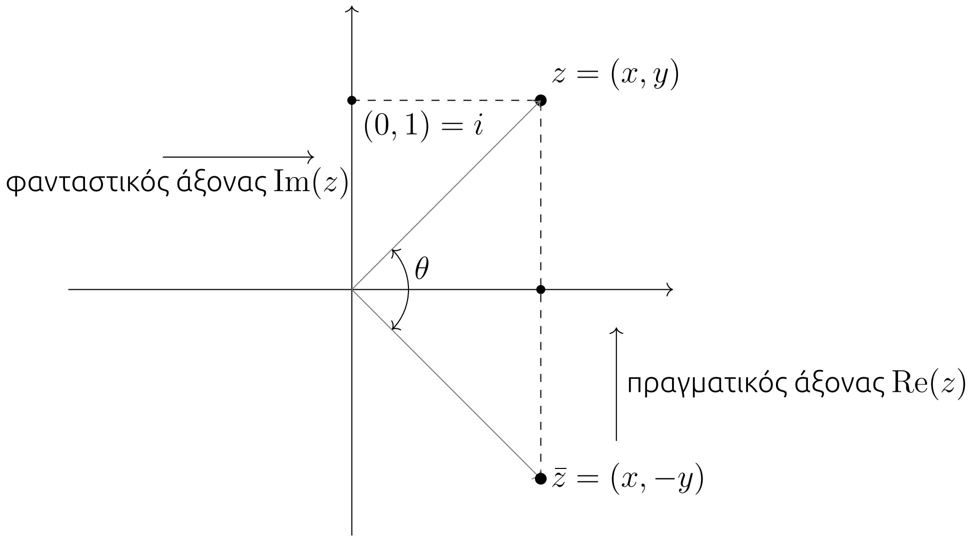
Αν $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$, τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{C}$ είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} A = \big\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\big\}$$

- $(x,0),(y,0) \in A \implies (x,0)+(y,0) = (x+y,0) \in A$
- $(x,0)(y,0) = (xy,0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$\begin{aligned} 1 &= (1,0) \\ x &= (x,0) \end{aligned}$$

Ορίζω:

$$i = (0,1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} z &= (x,y) = x(1,0) + y(0,1) \\ &\overset{x=(x,0)}{\underset{i=(0,1)}{=}} x\cdot 1 + yi \\ &\implies \boxed{z = x + iy} \end{aligned}$$

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z = (x,y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\overset{\text{πολικές}}{\underset{\text{του }(x,y)}{=}} \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta =$$

$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1}$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$z = |z| \underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}$$
$$= |z| \cdot e^{i\theta}$$

όπου στο εξής:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$\boxed{\text{τύπος του Euler}}$

Τελικά:

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}} \text{(πολική μορφή μιγαδικών)}$$

Σημείωση: $\cos\theta + i\sin\theta$

$$\overset{\text{σειρές}}{\underset{\text{McLaurin}}{=}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$\overset{i^2=-1}{=} \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right)$$

$$= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα $\mathrm{Arg}z$ (μη μηδενικού) μιγαδικού z να είναι η γωνία θ που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του $\mathbb{C}$ με την ημιευθεία OA, όπου A το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του $z = x + iy$.

Έτσι:

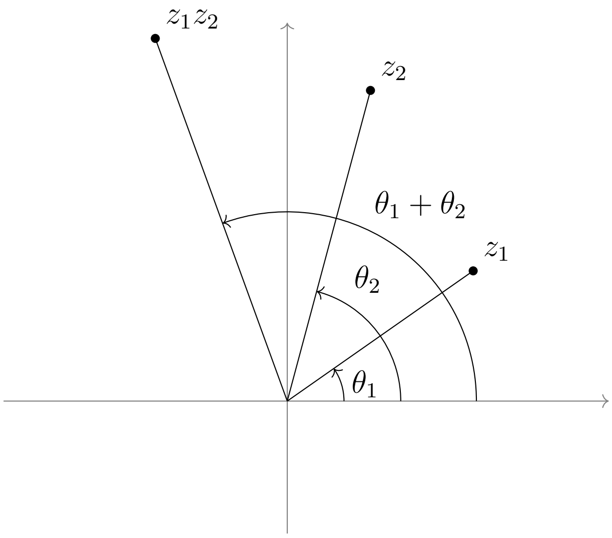
$z = |z|e^{i\mathrm{Arg}\,z}$ πολική μορφή του z

$$z_1z_2 = |z_1|e^{i\mathrm{Arg}\,z_1}|z_2|e^{i\mathrm{Arg}\,z_2}$$

$$\boxed{z_1z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2)}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$$

$$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$



Ιδιότητα: $z\bar{z} = |z|^2$

Κεφάλαιο 2 Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

π.χ.

$$f(z) = z^2 \implies f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\mathrm{Re}(f)} + i\underbrace{(2xy)}_{\mathrm{Im}(f)}$$

$$\underset{\text{μορφή}}{\overset{\text{γεωμετρική}}{=}} (x^2 - y^2,\ 2xy)$$

Τελικά: $\boxed{f(x,y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)}$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

π.χ.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{|z|\bar{z}} \overset{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z} \\ &\overset{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &\overset{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \overset{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}} \end{aligned}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιγ. μεταβλ.}} \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} \begin{array}{l} \text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big) \end{array}$$

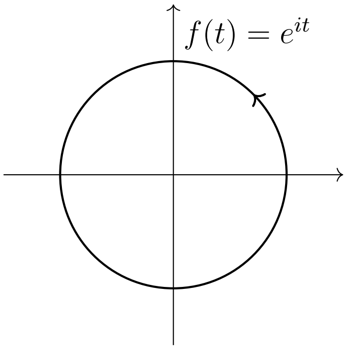
όπου u, v πραγματ. συναρτ. 2 μεταβλητών

Υπάρχουν $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής

π.χ

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{it},\ t \in (0, \pi] \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

$t \to (\cos t, \sin t)$ καμπύλη $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$



Η γραφ. παράσταση της $f(t) = e^{it},\ t \in (-\pi, \pi)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0,0)$ με αντιωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1, t) = (1, 0) + t(0, 1)$$

Το πεδίο ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδ. μεταβλητών υπολογίζεται ως συνήθως (με τις πραγματικές συναρτήσεις) ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ Διαφοροποιήσεις

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Πρέπει ο παρον. να είναι διάφορος του μηδενός: Έτσι $z \neq 0$ Άρα Π.Ο $= \mathbb{C} - \big\{(0,0)\big\}$

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 2}$$

Σημείωση Η g είναι **ρητή** συνάρτηση (δηλ. πηλίκο δύο (μιγαδικών) πολυωνύμων).
Κάθε συνάρτηση της μορφής $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ καλείται (μιγαδικό) πολυώνυμο.
Πρέπει παρον. $\neq 0$ δηλ:

$z^2 + 2 = 0$ (**ΠΡΟΣΟΧΗ!!** Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού N έχει ΑΚΡΙΒΩΣ N ρίζες στο $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} & z^2 + 2 = 0 \xRightarrow{i^2 = -1} z^2 - 2i^2 = 0 \\ & \Longrightarrow \left(z - \sqrt{2}i\right)\left(z + \sqrt{2}i\right) = 0 \\ & \Longrightarrow \boxed{z = \pm\sqrt{2}i} \end{aligned}$$

Τελικά Π.Ο = $\mathbb{C} - \left\{\pm\sqrt{2}i\right\}$

$$\boxed{h(z) = \operatorname{Arg} z,\ \text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}}$$

Για $z = 0$ ΔΕΝ ορίζεται όρισμα, επειδή $0 = |0| \cdot e^{i\theta}\ \forall\theta$

Σημείωση $az^2 + bz + c = 0$

$a, b, c \in \mathbb{C}$

Λύνεται με διακρίνουσα κατά τα γνωστά.

Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα Horner για πολυώνυμα (με πραγματικούς συντελεστές) βαθμού $N \geq 3$.

$$\begin{aligned} a(z) = e^z &= e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= (e^x \cos y,\ e^x \sin y)\,, \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

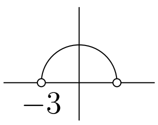
Ως διανυσματικό πεδίο προφανώς Π.Ο = $\mathbb{R}^2$

Έτσι Π.Ο = $\mathbb{C}$.

$l(z) = \operatorname{Log}$ (αντίστροφη της e^z)

$$\underbrace{\operatorname{Log}}_{\text{μιγαδικός λογάριθμος}} \overset{\text{ορισμός}}{:=} \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}$



$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(3) &= \ln|-3| = i\operatorname{Arg}(-3) \\ &= \ln 3 + i\pi \end{aligned}$$

$$\lambda(z) = \sin z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\left(\begin{array}{ll} e^{i\theta} & = \cos\theta + i\sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi] \\ e^{-i\theta} & = \cos\theta - i\sin\theta \\ \hline \sin\theta & = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right)$$

Π.Ο = $\mathbb{C}$

$$m(z) = \cos z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$

Όλες οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες ισχύουν στο $\mathbb{C}$ όπως στο $\mathbb{R}$.

$$h(z) = \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{2k\pi + \operatorname{Arg} z}{n}} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

(Η $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται ως το **σύνολο** όλων των λύσεων της εξίσωσης $z^n = a, \quad a \in \mathbb{C}$)

Π.Ο $= \mathbb{C} - \{0\}$

2.1 Όριο/Συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής

Ορισμός

Έστω $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ μιγ. συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι σ.συσσ. του A και έστω $a = a_0 + ib_0$. Τότε

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a_0 \\ \textbf{ΚΑΙ} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b_0 \end{cases}$$

Επίσης, αν $z_0 \in A$, τότε
f συνεχής στο σημείο z_0

$$\Updownarrow$$

οι συναρτήσεις $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ΣΥΝΕΧΕΙΣ στο σημείο $(x_0, y_0$ (ως πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

Έτσι:

$$\left.\begin{array}{l} \text{οι πολυωνυμικές} \\ \text{η εκθετική} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\sin z, \cos z) \\ \text{οι υπερβολικές } (\operatorname{ch}, \operatorname{sh}) \end{array}\right\} \text{συνεχείς στο } \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{οι ρητές} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\tan z, \cot z) \end{array}\right\} \text{συνεχείς στο } \textbf{πεδίο ορισμού τους}$$

Ορίζω το ∞ του μιγαδικού επιπέδου να είναι το σύνολο σημείων που απέχουν "άπειρη" απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται ως:

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, όπου:

$$\infty + z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
$$\infty \cdot z = \infty \quad \forall z \neq 0$$
$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \neq \infty$$

Όλες οι πράξεις του ορίου που ξέρετε ισχύουν και στους μιγαδικούς (αρκεί να μην εμφανίζονται οι γνωστές απροσδιόριστες μορφές):

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Ο κανόνας De l' Hospital ισχύει στους μιγαδικούς.

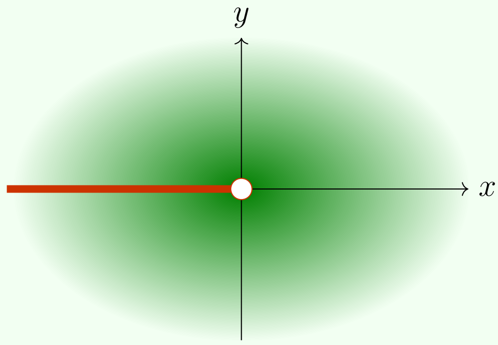
Σημείωση:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \mathbb{C} \iff \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = a \in \mathbb{C}$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \iff \lim_{z\to z_0} \left|f(z)\right| = 0$$

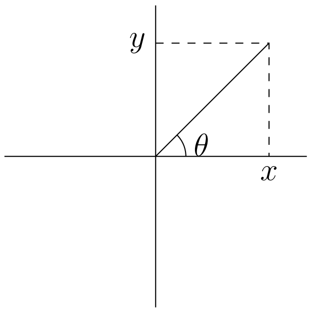
Θ.

Έστω $\operatorname{Arg} z : \mathbb{C} - \{0\} \to (-\pi, \pi]$
Τότε η $\operatorname{Arg} z$ **είναι συνεχής** στο σύνολο:

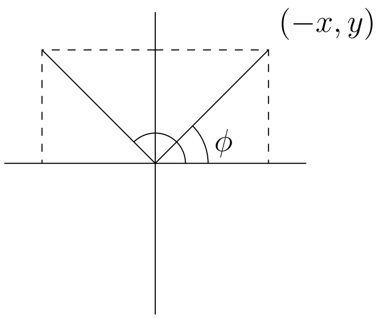
$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ ΚΑΙ } y = 0\}$$



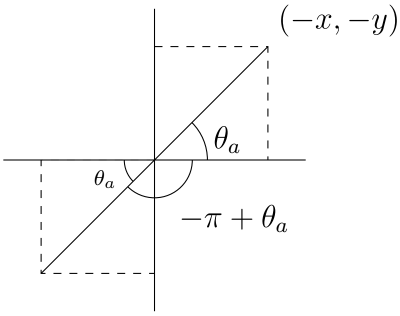
Έστω $z = x + iy$
(α) $x > 0,\ y > 0$



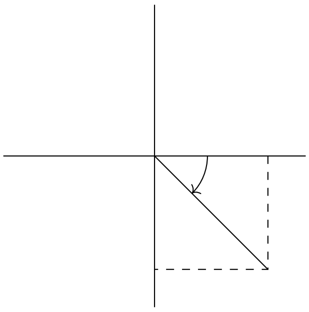
(β) $x < 0,\ y > 0$



(γ) $x < 0,\ y < 0$



(δ) $x > 0,\ y < 0$



$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x, y > 0 \\ \pi - \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y > 0 \\ -\pi + \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y < 0 \\ -\arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x > 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Για $\begin{array}{l} x = 0, \quad \text{τότε } \operatorname{Arg} := \frac{\pi}{2} \text{ ή } -\frac{\pi}{2} \\ y = 0, \quad \text{τότε } \operatorname{Arg} := 0 \text{ ή } \pi \end{array}$

Έστω $z_0 = x_0 < 0$

- Έστω $z = x_0 + it \quad (t > 0)$

  Για $t \to 0^+,\ z \to z_0 = x_0$, αλλά:

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Arg} z \overset{z=x_0+it}{=} \lim_{t \to 0^+} \operatorname{Arg}(x_0 + it) \overset{\text{2ο τετ.}}{=} \lim_{t \to 0^+} \left(\pi - \arctan\left|\frac{t}{x_0}\right|\right) = \pi - \arctan 0 = \pi$$

- Για $z = x_0 + it \quad (t < 0)$, τότε:

$$t \to 0^-, \quad z \to z_0, \text{ και}$$

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Arg} z = \lim_{t \to 0^-} \operatorname{Arg}(x_0 + it) \overset{\text{3ο τετ.}}{=} -\pi + \arctan 0 = -\pi$$

Άρα το όριο στο $z_0 = x_0$ ΔΕΝ υπάρχει, και έτσι η $\operatorname{Arg} z$ ασυνεχής στα $z = x_0$ με $x_0 \leq 0$.

Αν $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$ πού είναι ασυνεχής;

2.2 Μιγαδική παράγωγος

Την εβδομάδα της 28ης θα γίνουν κανονικά τα μαθήματα του Ατρέα.

Ορισμός

Έστω $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο σημείο z_0, αν υπάρχει το ΟΡΙΟ:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a \in \mathbb{C}$$

(ή ισοδύναμα $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = a \in \mathbb{C}$)
Στο εξής το όριο αυτό συμβολίζουμε με $f'(z_0)$ ή $\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z}$

Ορισμός

Αν $f : A \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$, θα λέμε στο εξής ότι η f είναι ΟΛΟΜΟΡΦΗ (ή ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - holomorphic/analytic) **στο σημείο $\mathbf{z_0}$**, εάν η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **ΣΕ ΚΑΘΕ ΣΗΜΕΙΟ** του ανοικτού δίσκου 

$$D_\epsilon(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon \right\}$$

για κάποιο $\epsilon > 0$

Αν f ολόμορφη σε ΚΑΘΕ σημείο του A λέμε ότι η f ολόμορφη στο A.

Ορισμός

Αν A μη ανοικτό, λέμε ότι η f ολόμορφη στο A, αν υπάρχει $B \supset A$, B ανοικτό ώστε η f στο B.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες της παραγώγου που γνωρίζετε ισχύουν και για τη μιγαδική παράγωγο

π.χ. Έστω f, g **μιγαδικά** παραγωγίσιμες σε σημείο z_0. Τότε:

- f παραγ. στο $z_0 \implies f$ συνεχής στο z_0
- $(af \pm by)'(z_0) = af'(z_0) + bg'(z_0)\ \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \quad (g(z_0) \neq 0)$
- Ο κανόνας αλυσίδας ισχύει στις μιγαδικές συναρτήσεις:

  $$(h \circ g)'(z_0) = h'\left(g(z_0)\right) g'(z_0)$$

  υπό την προϋπόθεση ότι η σύνθεση καλά ορισμένη

Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης Έστω f ολόμορφη σε σημείο z_0 με $f'(z_0) \neq 0$.
Αν $w_0 = f(z_0)$, τότε υπάρχουν $\epsilon, \epsilon' > 0$ ώστε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : \mathrm{D}_\epsilon(w_0) \to \mathrm{D}_{\epsilon'}(z_0)$ καλά ορισμένη, ολόμορφη στο w_0 και

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Θ.: Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = f(x+iy) = u(x+y)+iv(x,y)$.
Θεωρώ $z = x + iy,\ z_0 = x_0 + iy_0$ και A ανοικτό.
Τότε:
f μιγαδικά παραγωγίσιμη στο z_0

$$\Updownarrow$$

(α) Η $\mathbf{F}(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big)$ είναι **διαφορίσιμο** διανυσμ. πεδίο στο σημείο (x_0, y_0)

$$\boxed{\text{ΚΑΙ}}$$

(β)

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases} \xleftarrow{\text{εξισώσεις C-R}}$$

Πόρισμα (ΠΡΑΚΤΙΚΟΤΑΤΟ) Αν $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι έτσι ώστε:

(α) u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0) και "κοντά" στο (x_0, y_0)

(β) $\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases} \xleftarrow{\text{C-R}}$

Τότε ($\Longrightarrow$) η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$

Παρ.

$$\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy), \text{ άρα} \end{aligned}$$

$$f = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right.$$

Παρατηρήσεις

(α) Έστω f μιγαδικά παραγ. συνάρτηση σε σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

- Έστω $z = x + iy_0 \quad (x \in \mathbb{R})$ είναι τυχαίο σημείο της "οριζόντιας" ευθείας που διέρχεται από το z_0
- Για $x \to x_0$, τότε $z = x + iy_0 \to x_0 + iy_0 = z_0$ (δηλ. $z \to z_0$ όταν $x \to x_0$ πάνω στην οριζόντια ευθεία)

Τότε για $z = x + iy_0$ έχω:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) + iv(x,y_0) - \big(u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)\big)}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \\
&= u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) \\
&\Longrightarrow \boxed{f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)} := \tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}
\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, αν εργαστούμε κατά μήκος της "κάθετης" ευθείας που διέρχεται από το z_0, έχουμε:

$$\boxed{f'(z_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0)} := -i\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$$

(β) Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} \\
\Longrightarrow &\boxed{\mathrm{d}f(z_0) = f'(z_0)\,\mathrm{d}z}
\end{aligned}$$

$\mathrm{d}z :=$ στοιχειώδης όγκος
στο επίπεδο xy

$\mathrm{d}f(z_0) :=$ στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο uv
στο οποίο μετασχηματίζεται το $\mathrm{d}z$
μέσω της απεικόνισηςf

$$\mathrm{d}f(z_0) = \left|f'(z_0)\right| e^{i\operatorname{Arg} f'(z_0)}\,\mathrm{d}z \quad \big(f'(z_0) \neq 0\big)$$

Για τις παραγώγους στοιχειωδών συναρτήσεων ισχύουν τα συνήθη από την πραγματική ανάλυση.

π.χ Αν $f(z) = e^z$, τότε $(e^z)' = e^z \; \forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
f(z) = e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + \sin y) \\
&= \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{(e^x \sin y)}_{v(x,y)}
\end{aligned}$$

Ορίζω $\begin{cases} u(x,y) = \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y \\ v(x,y) = \operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y \end{cases}$

- u, v καλά ορισμένες $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, και επιπλέον u, v είναι **ΣΥΝΕΧΕΙΣ** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\begin{matrix} u_x = e^x \cos y & u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y & v_y = e^x \cos y \end{matrix}$, έτσι παρατηρώ ότι $\begin{cases} & u_x = v_y \\ \text{ΚΑΙ} & u_y = -v_x \end{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\xRightarrow{\text{πόρισμα}}$ $f(z) = e^z$ μιγαδικά παραγωγίσιμη $\forall z \in \mathbb{C}$

- Γνωρίζω ότι αν η $f = u + iv$ είναι μιγ. παραγ., τότε $f'(z) = u_x + iv_x$.

  Έτσι στην προκειμένη περίπτωση:

$$f'(z) = (e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^z$$

π.χ $\text{Log}z = \frac{1}{z}\ \forall z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 0\}$ $\Big($υπό την προϋπόθεση ότι $\text{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]\Big)$

διότι $\text{Log}z = w \overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} z = e^w$, άρα $\forall z \in \mathbb{C}^*$, από το θεώρ. παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης έχουμε: $(\text{Log}z)' = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$

Με την ίδια λογική (και με χρήση των ιδιοτήτων παραγώγου) αποδεικνύεται ότι

- $(z^n)' = nz^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(z^{-n})' = -nz^{-n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$
- $(z^a)' = az^{a-1} \quad \forall a \in \mathbb{Q}$ ή a άρρητος ή a έχει μη μηδενικό φανταστικό μέρος $\quad \forall z \in \mathbb{C}^*(\mathbb{C}^*$ όπως στο λογά
- $(\sin z)' = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cos z)' = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\sinh z)' = \cosh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cosh z)' = \sinh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(a^z)' = a^z \text{Log}a \quad \forall z \int \mathbb{C}$

κλπ.

2.3 Ασκήσεις

ΝΔΟ η $f(z) = \bar{z}$ ΔΕΝ είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **σε κανένα** σημείο του $\mathbb{C}$.

- $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$, ορίζω $\left| \begin{array}{l} u(x, y) = x \\ v(x, y) = -y \end{array} \right.$
- Προφανώς u και v καλά ορισμένες και συνεχείς $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, αλλά:

  $$u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}$, άρα αφού η μία από τις δύο εξισ. C-R δεν ισχύει $\underline{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2}$, η $f(z) = \bar{z}$ **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγ. $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$\left| \begin{array}{l} u = e^x \cos y_0 \\ v = e^x \sin y_0 \end{array} \right.$$

Άσκ. 2 Η συνάρτηση $f(z) = |z|$ **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε **ΚΑΝΕΝΑ** σημείο του $\mathbb{C}$.

Οι εξισώσεις C-R σε πολικές συντ/νες είναι οι εξής:

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\theta & \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi] \\ u_\theta = -\rho v_\rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) \\ &= f\left(|z| e^{i \operatorname{Arg} z}\right) = f\left(\rho e^{i\theta}\right) = u(\rho,\theta) + iv(\rho,\theta) \end{aligned}$$

$f(z) = |z| = \rho$, άρα $\begin{cases} u(\rho,\theta) = \rho \\ v(\rho,\theta) = 0 \end{cases}$

Οι u, v καλά ορισμένες και συνεχείς $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$ αλλά

$$u_\rho = 1 \neq \frac{1}{\rho} \cdot 0 = \frac{1}{\rho} v_\theta \quad \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$$

και αφού μία από τις εξισώσεις C-R δεν ισχύει $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$ αναγκαστικά η $f(z) = |z|$ δεν είναι μιγαδικά παραγ. σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

π.χ

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad z \neq 0 \\ &\overset{|z|^2 = z\bar{z}}{=} \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη.

Άσκ. 3 Υπολογίστε τα όρια:

(α) $\lim_{z \to 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2}$

(β) $\lim_{z \to 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1}$

(γ) $\lim_{z \to \infty} e^z$

Στα όρια ισχύει ο De L' Hospital

(α)

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2} \underbrace{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L'Hospital}}{=}}}_{\text{διότι } e^{z^2} - 1 \text{ και } z^2 \text{ μιγ. παραγ.}} \lim_{z \to 0} \frac{2ze^{z^2} - 0}{2z} = \lim_{z \to 0} e^{z^2} = e^0 = 1$$

(β) Θα προσπαθήσω να αποδείξω ότι το όριο δεν υπάρχει, κάτι που φαντάζομαι επειδή μέσα στο όριο υπάρχει ο $\bar{z}$.

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του οριζόντιου άξονα" που διέρχεται από το $z_0 = 1$.
  Δηλ. θεωρώ σημεία z της μορφής

  $$z = x + i0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

  Προφανώς για $x \to 1$, έχω: $z \to z_0 = 1$.
  Τότε $\forall z = x$ έχω:

  $$\lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{\bar{z}^2-1} \overset{\text{κατα μήκος}}{\underset{\text{του οριζ. άξονα}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-1} = 1$$

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του κάθετου άξονα" που διέρχεται από το $z_0 = 1$, δηλαδή σημεία:

  $$z = 1 + ix \quad (x \in \mathbb{R})$$

  Προφανώς για $x \to 0$, έχω $z \to z_0 = 1$, και

  $$\lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{\bar{z}^2-1} \overset{\text{κατα μήκος}}{\underset{\text{του κατακόρυφου άξονα}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(1+ix)^2-1}{(1-ix)^2-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+2ix-x^2-\cancel{1}}{\cancel{1}-2ix-x^2-\cancel{1}}$$

  $$= \lim_{x\to 0} \frac{2ix-x^2}{-2ix-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2i-x}{-2i-x} = \frac{2i}{-2i} = -1$$

Εφόσον $1 \neq -1$ το όριο ΔΕΝ υπάρχει.

(γ) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = ?$

- Έστω $z = x \quad (x < 0)$, για $x \to -\infty$, τότε $z \to \infty$ και $\lim\limits_{z\to\infty} e^z = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- Έστω $z = x \quad (x > 0)$, για $x \to +\infty$, τότε $z \to \infty$, αλλά: $\lim\limits_{z\to\infty} e^z = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, συνεπώς το $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ ΔΕΝ υπάρχει.

Άσκ. 4 Αν $f(z) = u + iv$ είναι ακεραία (ολόμορφη στο $\mathbb{C}$) και αν

$$au + bv = c$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ σταθερές όχι όλες ίσες με μηδέν, ΝΔΟ $f(z) = A,\ A \in \mathbb{C}$ σταθερά.

- Έστω $\underline{c = 0}$, εξ' υποθέσεως $a^2 + b^2 \neq 0$
- Έστω $c \neq 0$, πάλι πρέπει $a^2 + b^2 \neq 0$ (διότι αλλιώς $0 = c$, άτοπο)
- Τελικά $a^2 + b^2 \neq 0$ σε κάθε περίπτωση.

$$\begin{cases} au_x + bv_x = 0 \\ au_y + bv_y = 0 \end{cases} \implies \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow[u_y = -v_x \text{ αφού } f \text{ ακεραία}]{u_x = v_y} \begin{bmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_y \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2$$

και επειδή $a^+b^2 \neq 0$, πρέπει $u_x^2 + u_y^2 = 0$ για να έχει λύση το σύστημα $\implies$ $u_x = 0$ και $u_y = 0 \overset{\text{C-R}}{\implies}$ $u_x = u_y = v_x = v_y = 0\, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \implies f(z) = A \in \mathbb{C}$ σταθερά.

Άσκ. Βρείτε τα σημεία ολομορφίας των συναρτήσεων:

(α) $f(z) = \mathrm{Log}(z-i)$

(β) $g(z) = \tan z$

(α) Έστω ότι $\mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$. Τότε είναι γνωστό ότι η $\mathrm{Log} z$ είναι μιγαδικά παραγ. στο $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x+iy \quad x \leq 0 \text{ και } y = 0\}$.

Έτσι η $\mathrm{Log}(z-i)$ είναι μιγ. παραγ. στο σύνολο

$$\begin{aligned} &\mathbb{C} - \big\{x+iy : \mathrm{Re}(z-i) \leq 0 \text{ και } \mathrm{Im}(z-i) = 1\big\} \\ &\overset{z=x+iy}{=} \mathbb{C} - \{x+iy : x \leq 0 \text{ και } y-1=0\} \\ &= \mathbb{C} - \{x+iy : x \leq 0 \text{ και } y = 1\} \end{aligned}$$

(β) $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ εκτός των σημείων που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

- $\cos z = 0 \iff \cos(x+iy) = 0 \iff \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = 0 \xLeftrightarrow{\text{ορ. sin \& cos}} \cos x \cdot \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} - \sin x \cdot \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = 0 \iff \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y = 0 \iff$ $\left| \begin{array}{c} \cos x \cdot \cosh y = 0 \\ \text{και} \\ \sin x \cdot \sinh y = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{c} \cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sin x = 0 \\ \text{(Αδύνατο)} \end{array} \right.$ ή $\left| \begin{array}{c} \cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sinh y = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{array} \right. , k \in \mathbb{Z}$.

  Τελικά $\cos z \iff \boxed{z = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \int \mathbb{Z}}$ και έτσι g είναι ολόμορφη στο

  $$\mathbb{C} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Άσκ. Έστω $f(x+iy) = (x^2+2y) + i(x^2+y^2)$

(i) Να γραφεί η f συναρτήσει του $z = x+iy$

(ii) Να βρείτε όλα τα σημεία, όπου η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη

(iii) Να βρείτε όλα τα σημεία στα οποία η f είναι ολόμορφη

(i) $x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
$\big(z = x+iy\big)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left(\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2\right) \\ &= \frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} - i\,(z-\bar{z}) + i\left(\frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} - \frac{z^2-2z\bar{z}+z^2}{4}\right) \\ &= \frac{z^2+2|z|^2+\bar{z}^2}{4} - i\left(z-\bar{z}-|z|^2\right) \end{aligned}$$

(ii) Προφανώς $\left| \begin{array}{l} \mathrm{Re}(f) := u(x,y) = x^2+2y \\ \mathrm{Im}(f) := v(x,y) = x^2+y^2 \end{array} \right.$

- Οι u και v είναι συνεχείς (ως πολυωνυμικές) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\begin{cases} u_x = v_y \\ \text{ΚΑΙ} \\ u_y = -v_x \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = 2y \\ \text{ΚΑΙ} \\ 2 = -2x \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ \text{ΚΑΙ} \\ x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ \text{ΚΑΙ} \\ y = -1 \end{cases}$

Άρα η f είναι μιγαδ. παραγ. **μόνον** στο $\boxed{z = -1 - i}$, και μάλιστα εφ' όσον $f(z) = f'(x+iy) = u_x + iv_x$:

$$f'(-1-i) = 2(-1) + i2(-1) = \underline{-2 - i2}$$

(iii) ΔΕΝ υπάρχουν σημεία όπου η f είναι ολόμορφη.

Κεφάλαιο 3 Μιγαδική ολοκλήρωση

Εισαγωγή

Ορισμός

Καλούμε **καμπύλη** στο μιγαδικό επίπεδο κάθε <u>συνεχή</u> συνάρτηση

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} : \gamma(t) = x(t) = iy(t)$$

όπου $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.

Έτσι: $\gamma(t)$ καλείται

ΑΠΛΗ αν είναι 1-1 (δεν αυτοτέμνεται)
ΚΛΕΙΣΤΗ αν έχει ίδια αρχή και πέρας
ΛΕΙΑ αν είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με συνεχή παράγωγο

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

και μη μηδενική παράγωγο $\forall t$

- Κάθε τέτοια καμπύλη έχει ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ (φορά διαγραφής) προς την κατεύθυνση αύξησης του t

π.χ. $\gamma(t) = e^{it},\ t \in (-\pi, \pi]$
$\gamma(t) = e^{-it},\ t \in (-\pi, \pi]$

- Αν γ κλειστή λέω ότι είναι <u>θετικά</u> προσανατολισμένη αν η φορά διαγραφής είναι η αντιωρολογιακή
- $-\gamma$: ίδιο ίχνος με τη γ, αλλά αντίθετη φορά διαγραφής
- $\gamma_1 + \gamma_2$:

Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ ΣΥΝΕΧΗΣ μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής και $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ λεία καμπύλη. Καλώ επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f ΠΑΝΩ στη γ να είναι ο ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\underbrace{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}\gamma(t)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\gamma(t) &= \mathrm{d}\big(x(t)+iy(t)\big) = \\ &= \mathrm{d}x(t) + i\,\mathrm{d}y(t) = \big(x'(t)+iy'(t)\big)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\gamma(t) = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Οι κλασικές ιδιότητες των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων έργου ισχύουν στους μιγαδικούς. Ενδεικτικά:

- $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\displaystyle\int_\gamma (af+by)(z)\,\mathrm{d}z = a\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z \ \forall a,b\in\mathbb{C}$
- $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_\gamma \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}z \leq M\cdot$ (μήκος της γ) όπου M μέγιστο της $|f|$ επί της γ
- $\displaystyle\int_\gamma |\,\mathrm{d}z| = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t :=$ μήκος της καμπ. γ

Πρόταση: Έστω $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ συνεχής επί καμπύλης λείας $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

Τότε:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \underbrace{\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y\right)}_{\substack{\text{επικαμπύλιο ολοκλ.}\\ \text{διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2}} + i\underbrace{\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x\right)}_{\substack{\text{επικαμπύλιο ολοκλ.}\\ \text{διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2}}$$

Απόδ.

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (u+iv)\,\mathrm{d}(x+iy)\\
&=\int_a^b \Big[u\big(x(t),y(t)\big)+iv\big(x(t),y(t)\big)\Big]\big(x'(t)+iy'(t)\big)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_a^b \Big(u\big(x(t),y(t)\big)x'(t)-v\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)\,\mathrm{d}t+i\int_a^b \Big(u\big(x(t),y(t)\big)y'(t)+v\big(x(t),y(t)\big)x'(t)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&\overset{\text{ορ.}}{=}\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y\right)+i\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}y+v\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

Ορίζω $\bar{f}(z)=u(x,y)-iv(x,y)$

Τότε

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y \overset{\text{Λογ. ΙΙ}}{:=} \text{έργο του πεδίου } \bar{f} \text{ επί της καμπύλης } \gamma$$

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}y+v\,\mathrm{d}x \overset{\text{Λογ. ΙΙ}}{:=} \underline{\text{ροή}} \text{ του } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma$$

3.1 Θεώρημα Caychy

Έστω $f=f(z)$ είναι **ολόμορφη** συνάρτηση **πάνω** και στο **εσωτερικό απλής**, κλειστής και λείας καμπύλης γ.

Τότε:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

Απόδ. Έστω $f=u+iv$, όπου $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πάνω και στο εσωτερικό της γ. Τότε:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \left(\oint_\gamma u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y\right)+i\left(\oint u\,\mathrm{d}y+v\,\mathrm{d}x\right)\\
&\underset{\text{Green}}{\overset{\text{Θεώρ.}}{=}}\iint_R(-v_x-u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+i\iint_R(u_x-v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

και επειδή η f ολόμορφη ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann $\forall(x,y)$ στο εσωτερικό της γ, δηλαδή το R, άρα:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \underset{u_y=v_x}{\overset{u_x=v_y}{=}} \iint_R 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+i\iint_\gamma 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\underbrace{a}_{\text{έργο του πεδίου } f \text{ κατά μήκος } \gamma}+i\overbrace{b}^{\text{ροή του πεδίου } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν υπάρχει έστω και ένα σημείο όπου η f δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο εσωτερικό της γ, τότε το **θεώρ. Cauchy δεν ισχύει εν γένει**.

π.χ $\displaystyle\oint_{|z|=1 \text{ με θετική φορά}} \frac{\mathrm{d}z}{z}$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \underset{t\in[0,2\pi)}{\overset{\gamma(t)=e^{it}}{=}}$$

$$\overset{\text{ορ.}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\left(e^{it}\right)}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})^2}{e^{it}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} = 2\pi i$$

Θ.: Παραμόρφωση δρόμων

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη σε τόπο G με σύνολο $\partial G = \gamma_1 \cup \gamma_2$ όπου γ_1, γ_2 απλές λειστές καμπύλες, λείες, με κοινό προσανατολισμό π.χ. όπως στο σχήμα Τότε $\displaystyle\oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$

Απόδ. Φέρνω δύο ευθ. τμήματα L_1 και L_2 που διαμερίζουν το G σε δύο χωρία έστω G_1, G_2. Τότε το θ. Cauchy ισχύει και στο G_1 και στο G_2.

- $\displaystyle\int_{\gamma_1^+ + L_1 + \gamma_2^+ + L_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (θ. Cauchy για το χωρίο G_1)
- $\displaystyle\int_{\gamma_2^- - L_1 - \gamma_2^- - L_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (θ. Cauchy για το χωρίο G_2)

$$\implies \left| \begin{array}{l} \left(\int_{\gamma_1^+} + \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^+} + \int_{L_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \\ \left(\int_{\gamma_1^-} - \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^-} - \int_{L_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \end{array}\right. \implies \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Πόρισμα (Γενικευμένο θεώρ. Cauchy) Έστω $f = f(z)$ ολόμορφη σε τόπο G με σύνορο $\partial G = \Gamma \cup (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_2)$, όπου:

- $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ απλές, κλειστές, λείες και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΕΣ καμπύλες
- Οι $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ βρίσκονται εντός της Γ και
- Κάθε καμπύλη $\gamma_j \quad j = 1, \ldots, n$ βρίσκεται εκτός των υπόλοιπων $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n$

  Τότε: $\displaystyle\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$

Θ.: Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμημ. λείας και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ καμπύλης γ.
Τότε ΓΙΑ ΚΑΘΕ σημείο z_0 ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ ισχύει:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z}$$

Μέρος II

Κεχαγιάς

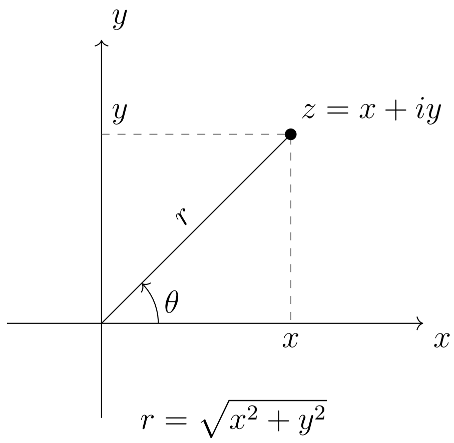
Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί αριθμοί

$$
\begin{aligned}
z =& x + iy \in \mathbb{C} \\
& x, y \in \mathbb{R} \qquad i^2 = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 + iy_1 \\
z_2 &= x_2 + iy_2 \\
z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\
&= x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy^2)(x_2 - iy_2)} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2} \\
z &= x + iy \\
\bar{z} &= x - iy \\
\mathrm{Re}(z) &= x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{Im}(z) &= y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \tfrac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow \text{μέτρο του } z$$

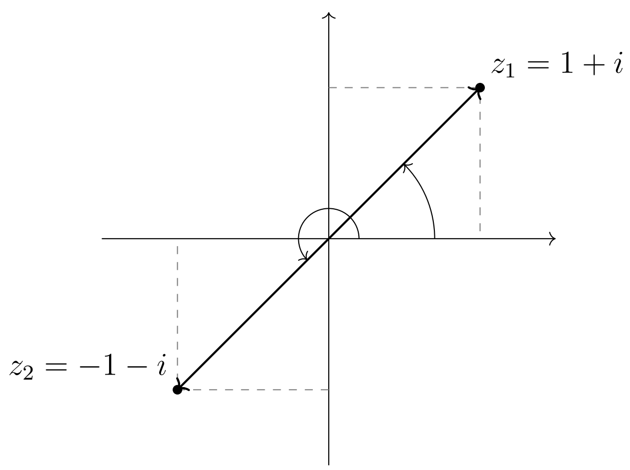
γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ. $z = x \in \mathbb{R},\ |z| = \sqrt{x^2} = |x|$)

$$\begin{aligned} z = x + iy &= r \cdot \cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \quad \text{(Euler)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \text{ διότι} \\ e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r\cos\theta + ir\sin\theta \end{aligned}$$



$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$
$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\theta_1 = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}e^{i\cdot\left(-3\pi/4 = \sqrt{2}e^{i13\pi/4}\right)}$$
$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\theta_2 = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}$$

Γενικά: $-1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

1.1 Συναρτήσεις

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

$$z = x + iy$$
$$\mathrm{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\mathrm{Arg}\,(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \qquad \theta_0 = \arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)$$
$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \;\; \mathrm{Arg}\,(z) \in [0, 2\pi)$$

Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση $\arg(z) = \left\{\mathrm{Arg}\,(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \mathrm{mod}(z) \cdot e^{i\mathrm{Arg}\,(z)} \\ &= \mathrm{mod}(z) \cdot e^{i\left(\mathrm{Arg}\,(z) + 2k\pi\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathrm{mod}(z_1)e^{i\mathrm{Arg}\,(z_1)} \\ z_2 &= \mathrm{mod}(z_2)e^{i\mathrm{Arg}\,(z_2)} \\ z_1 z_2 = \mathrm{mod}(z_1)\mathrm{mod}(z_2)&e^{i\cdot\left(\mathrm{Arg}\,(z_1) + \mathrm{Arg}\,(z_2)\right)} \\ \mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) \neq \mathrm{Arg}\,(z_1) &+ \mathrm{Arg}\,(z_2) \text{ επειδή} \\ \mathrm{Arg}\,\left(e^{i\frac{7\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) &= \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi \end{aligned}$$

Γενικά, αν $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, τότε:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Όμως:

$$\begin{aligned} \arg(z^z) &= \arg(z) + \arg(z) \\ &\neq 2\arg(z) \end{aligned}$$

διότι:

$$
\begin{aligned}
&A = \{a_1, a_2, \dots\} \\
&B = \{b_1, b_2, \dots\} \\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \\
&A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\} \\
&2A = \{2a : a \in A\} \\
&A = \{1, 2, 3\} \\
&B = \{4, 5\} \\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \{1+4, 1+5, 2+4, 2+5, 3+4, 3+5\} = \{5, 6, 7, 8\} \\
&A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\} \\
&2A = \{2, 4, 6\}
\end{aligned}
$$

1.2 n-οστές ρίζες

$$z = a^{1/n} \iff z^n = a$$

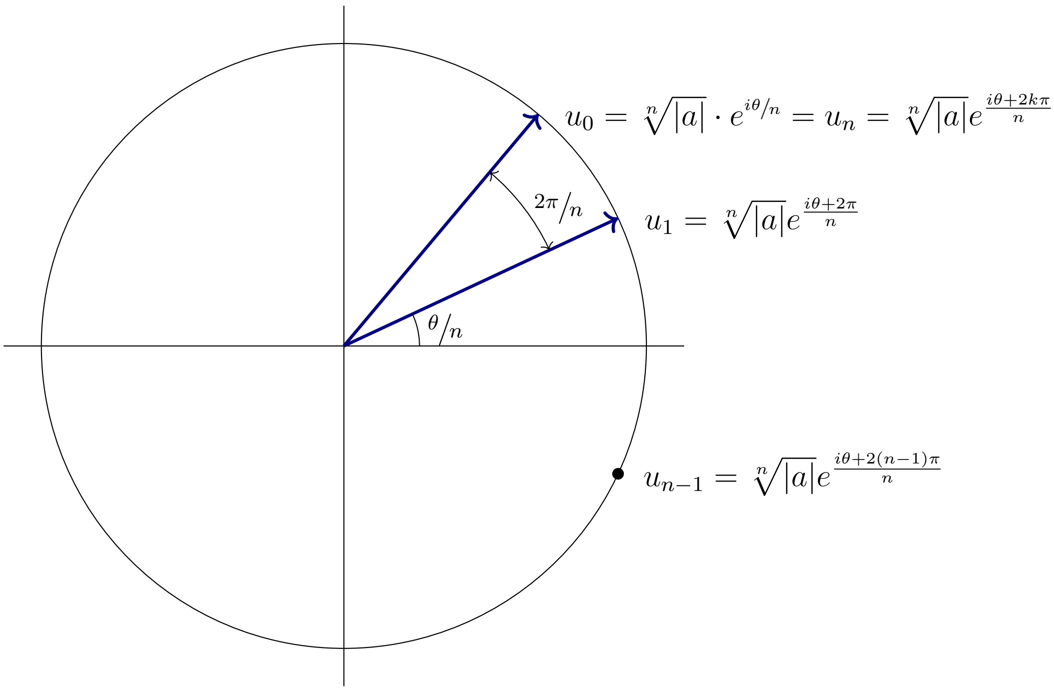
Δηλ. ποιο z ικανοποιεί αυτή

$$
\begin{aligned}
&a = |a|e^{i\theta} \\
&z = re^{i\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(re^{i\phi}\right)^n = |a|e^{i\theta} \\
\implies &r^n \cdot e^{in\phi} = |a|e^{i\theta} \\
\implies &r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi) = |a| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\
\implies &\begin{cases} r^n = |a| \implies r = \sqrt[n]{|a|} \\ \left.\begin{array}{l} \cos(n\phi) = \cos\theta \\ \sin(n\phi) = \sin\theta \implies \end{array}\right| \implies n\phi = \theta + 2k\pi \ \in \mathbb{Z} \implies \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \\
\implies &z = a^{1/n} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\theta\,+\,2k\pi)/n} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

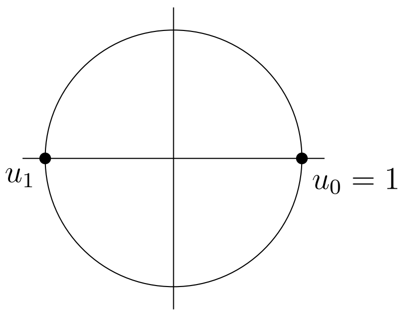
(Όμως αρκεί να πάρω $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$)

$$a^{1/n} = \Big\{ \quad \sqrt[n]{|a|}e^{i\theta/n}, \ \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\theta + 2\pi}{n}}, \dots$$



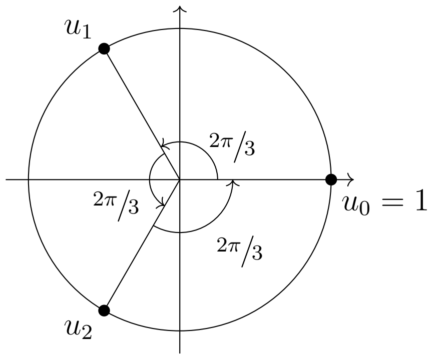
Παρ. $a^{1/2} = 1^{1/2}$

$$a = 1 = 1 \cdot e^{i0} \quad |a| = 1, \theta = 0$$
$$u_0 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2\cdot 0\cdot \pi}{2}\right)} = e^{i0} = 1$$
$$u_1 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2\cdot \pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1$$



Παρ. $a^{1/3} = 1^{1/3} = z$

$$a = 1 = e^{i0}, |a| = 1, \theta = 0$$
$$u_0 = 1$$
$$u_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$
$$u_2 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$



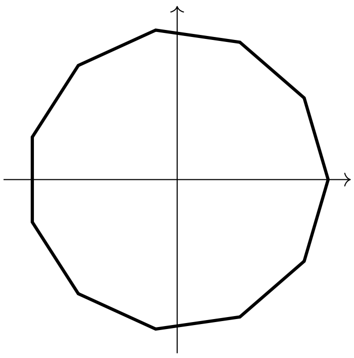
Διαφορετικά

$$
\begin{aligned}
&1^{1/3} = z \iff 1 = z^3 \\
&\iff z^3 - 1 = 0 \\
&\iff (z-1)(z^2+z+1) = 0 \\
&\iff (z-1)\left(z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Παρ. $1^{1/11} = z \iff 1 = z^{11}$

$$
\begin{aligned}
&\iff z^{11} - 1 = 0 \\
&\iff (z-1)(z^{11} + z^{10} + \cdots + z^1 + 1) = 0
\end{aligned}
$$

$\{u_0 9, u_1, \ldots, u_{10}\}$



Κεφάλαιο 2 Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$e^z,\ \log(z)$

$$e^z \overset{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Ήξερα $\begin{matrix} e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ e^{iy} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \end{matrix}$.
Τώρα η νέα συνάρτηση $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

Παρ.

$$
\begin{aligned}
e^{1+i} = ee^i &= e\cdot(\cos 1 + i\sin 1)\\
&= e\cdot\cos 1 + i\cdot e\cdot\sin 1\\
\operatorname{Re}\left(e^{1+i}\right) &= e\cos 1\\
\operatorname{Im}\left(e^{1+i}\right) &= e\sin 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log(e) &= 1\\
\log(-1) &= \log\left(e^{i(\pi+2k\pi)}\right) = i(\pi+2k\pi)
\end{aligned}
$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$
\begin{aligned}
z &= |z|e^{i\theta}\\
\log(z) &= \ln\left(|z|\right) + i\theta
\end{aligned}
$$

Ορίζω

Πλειότιμη $\log(z) = \ln\left(|z|\right) + i\arg(z)$

Μονότιμη $\operatorname{Log}(z) = \ln\left(|z|\right) + i\operatorname{Arg}(z)$ είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$
\begin{aligned}
\log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i\left(\pi/4+2k\pi\right)}\right)\\
&= \log\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)
\end{aligned}
$$

$$
\left\{\frac{1}{2}\ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right\}
$$

2.1

Από σήμερα: $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Πριν 7 ημέρες: $\cancel{e^z = e^{x+iy} = e^x\cos y + i\sin y}$

Σήμερα: $\exp(z) \overset{\text{ορ}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

Θ. Η $\exp(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z\in\mathbb{C}$ και ικανοποιεί:

(1) $\forall z : \left(\exp(z)\right)' = \exp(z)$

(2) $\forall z_1, z_2 : \exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

(3) $\forall \theta\in\mathbb{R} : \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

Απόδ.

(1)

$$\big(\exp(z)\big)' = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)'$$
$$= 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \exp(z)$$

(2) $g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} = \exp(z)\exp(\zeta - z) + \exp(z)\exp(\zeta - z)(-1) = 0$$
$$\implies g(z) = c \implies c = g(0) = \exp(\zeta)$$
$$\implies \exp(\zeta) = g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)$$

Θέτω: $z = z_1,\ \zeta = z_1 + z_2$

Οπότε:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$$

(3)

$$\exp(i\theta) = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$
$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\cdot\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right)$$
$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

$\exp(z) \quad e^z$

$$\exp(1+i) = 1 + (1+i) + \frac{(1+i)^2}{2!} + \dots$$
$$e^{1+i} = 1 + (i+1) + \dots$$

ή ο αρ. $e = 2.718$ υψωμένος στη μιγαδική δύναμη $1+i$

Θ. Η $\exp(z)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$

Απόδ.

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)\exp(2\pi i) = \exp(z)$$

Η εικόνα του συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}$ υπό την συνάρτηση $f(z)$ Δηλ.

$$f(A) = \big\{w = f(z),\ z \in A\big\}$$

Παρ. Να δειχθεί ότι $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Διότι: έστω $w = re^{i\phi} \in \mathbb{C} - \{0\}$.

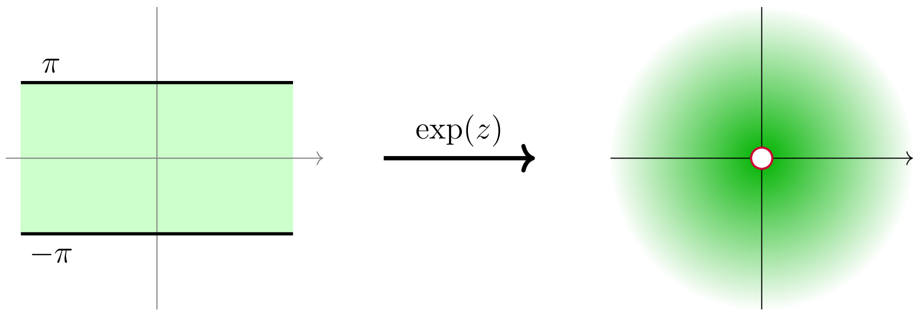
Θα βρω $z = \rho e^{i\theta} = x + iy$ τ.ώ: $\exp(z) = w$.

$$\begin{aligned}
&\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy)\\
&w = re^{i\phi}\\
&\exp(x) = \big|\exp(z)\big| = |w| = r \implies \boxed{x = \ln(r)}\\
&\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}(w)\\
&\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}\big(\exp(x)\exp(iy)\big) = y\\
&\operatorname{Arg}(w) = \operatorname{Arg}(re^{i\phi}) = \phi\\
&\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}(w) \implies \boxed{y = \phi}
\end{aligned}$$

Τελικά $z = x + iy = \ln(r) + i\phi$ ικανοποιεί $\exp(z) = re^{i\phi} = w$. Άρα $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Στην πραγματικότητα, δεν χρειάζομαι όλο το $\mathbb{C}$ διότι:

$$\exp(U) = \mathbb{C} - \{0\}, \quad \text{όπου } U = \big\{x + iy : x \in \mathbb{R},\ y \in (-\pi, \pi]\big\}$$



2.2 Λογαριθμική Συν.

$$w = \overbrace{\log(z)}^{\text{πλειότιμη}} \iff z = \exp(w)$$

$$\begin{aligned}
w &= \log(1+i)\\
1 + i &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\\
\log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\right)\\
&= \ln(\sqrt{2}) + \log\left(e^{i\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]}\right)\\
&= \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k \int \mathbb{Z}\\
&= \left\{\dots, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{7\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{17\pi}{4}, \dots\right\}
\end{aligned}$$

$\boxed{\log(z) = \ln(r) + i\arg(z)}$ ← πλειότιμη

$\boxed{\operatorname{Log}(z) = \ln(r) + i\operatorname{Arg}(z)}$ ← μονότιμη
ασυνεχής για $x \in (-\infty, 0]$

2.3 Μιγαδικές δυνάμεις

$$z^c = e^{\log(z^c)} = e^{c\log z} = e^{c\left(\ln\left(|z|\right)+i\arg(z)\right)}$$

ή

$$z^c = e^{\mathrm{Log}(z^c)} = e^{c\left(\ln\left(|z|\right)+i\mathrm{Arg}(z)\right)}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{(1+i)^{2-i}}_{\substack{z=1+i \\ c=2-i}} &= e^{(2-i)\log(1+i)} = e^{(2-i)\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} \\
&= e^{\left(2\ln\left(\sqrt{2}\right)+\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)+i\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}+4k\pi\right)} \\
&= e^{2\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot e^{i\left(-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}+4k\pi\right)} \\
&= 2e^{\pi/4+2k\pi}\cdot\left[\cos\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}+\cancel{4k\pi}\right)+i\sin\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}+\cancel{4k\pi}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+i} = (1+i)^{1/2} &= e^{1/2\cdot\log(1+i)} \\
&= e^{1/2\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} \\
&= e^{1/2\ln\left(\sqrt{2}\right)}\cdot e^{\frac{1}{2}\left(\pi/4+2k\pi\right)} \\
&= \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)} \\
&= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right) \\
&= \begin{cases} \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$(-1)^i = e^{\log\left((-1)^i\right)} = e^{i\log(-1)} = e^{i\left(i(2k+1)\pi\right)} = e^{-(2k+1)\pi}$$

$$\begin{aligned}
(1+i)^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}\log(1+i)} = e^{\sqrt{2}\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} \\
&= \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\cdot e^{i\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi} \\
&= \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right)\right] \\
&\cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right) \\
&\implies \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi+2m\pi \implies 2k\sqrt{2}\pi = 2m\pi \implies \sqrt{2} = {}^{m}/_{k}
\end{aligned}$$

$$(1+i)^{p/q} = \dots$$
$$m = \lambda q$$

Παρ. Να βρεθούν οι τιμές του n τ.ώ:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} i^k \in \mathbb{I}$$

n	
0	1
1	$1+i$
2	$1+i+i^2=1$
3	$1+i+i^2+i^3=0$
4	1
5	$1+i$
6	i
$\vdots$	$\vdots$

Αρα $\forall_{n,m} : c_n = c_{n+4m}$
Οι φανταστικές τιμές του c_n προκύπτουν για

$$\begin{aligned} n =& 2,3, \\ & 6,7, \\ & 10,11, \end{aligned}$$

Απ. $n \in \left\{m + 4l : m \in \{2,3\}, l \in \mathbb{N}_0\right\}$

Παρ. Να λυθεί η $(1+z)^{2n} = -(1-z)^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$

Λύση Φαίνεται άμεσα ότι $z \neq 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} &= -1 \implies \\ \frac{1+z}{1-z} &= (-1)^{1/2n} = \left(e^{i(2k+1)\pi}\right)^{1/2n} \\ z &= \frac{e^{i(2k+1)\pi/2n} - 1}{e^{i(2k+1)\pi/2n} + 1} \\ &= \frac{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) - 1}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + 1} \\ &\underset{\begin{cases}\cos\phi - 1 = -2\sin^2\frac{\phi}{2} \\ \cos\phi + 1 = 2\cos^2\frac{\phi}{2}\end{cases}}{=} -\frac{2\sin^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i2\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i2\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\left[-\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\right]}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\left[\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\right]} \\ z_k &= i\tan\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \qquad k = 0,1,\dots,2n-1 \end{aligned}$$