

Σημειώσεις Διαφορικές Εξισώσεις

Καναβούρας Κωνσταντίνος
<http://users.auth.gr/konkanant>

2016, Εαρινό εξάμηνο

Μέρος I

Σεβαστιάδης

Χρήστος Σεβαστιάδης

Κεφάλαιο 1

Ορισμός: Διαφορική εξίσωση

Μια εξίσωση που αποτελείται από μια συνάρτηση και τις παραγώγους της

Langrange's $x', x'', x''', x^{(4)}, \dots$

Newton's $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$

Leibniz' $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}$

π.χ.

$$x(t) \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2 \frac{dx(t)}{dt} = x(t) \sin(t)$$

Ορισμός 1.1: Τάξη

Τάξη ονομάζεται ο μεγαλύτερος βαθμός παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

Ορισμός 1.2: Βαθμός

Βαθμός ονομάζεται η μεγαλύτερη δύναμη παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

Κεφάλαιο 2 Διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

Ορισμός

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

2.1 Χωριζόμενες διαφορικές εξισώσεις

Τυπική μορφή:

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)} = \frac{dx}{dt} \implies \underbrace{N(t, x) dx}_{N(x)} + \underbrace{M(t, x) dt}_{M(t)} = 0$$

Αν δηλαδή τα $N(t, x)$, $M(t, x)$ εξαρτώνται μόνο από τα x και t αντίστοιχα, η εξίσωση ονομάζεται **χωριζόμενη**, και το αποτέλεσμα της μπορεί να βρεθεί με ολοκληρώματα:

$$\int N(x) dx + \int M(t) dt = c$$

Άσκηση: 2.1

$$x dx - t^2 dt = 0$$

$$N(x) = x, \quad M(t) = -t^2$$

$$\int x dx + \int (-t^2) dt = c \implies$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}t^3 = c \implies$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}t^3 + 2c} \implies$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}t^3 + \kappa}$$

$$\text{με } \kappa = 2c$$

Άσκηση: 2.2

$$x' = x^2 t^3$$

$$\implies \frac{dx}{dt} = x^2 t^3$$

$$\implies \frac{1}{x^2} dx - t^3 dt = 0$$

$$\implies \int \frac{1}{x^2} dx + \int (-t^3) dt = c$$

$$\implies -\frac{1}{x} - \frac{t^4}{4} = c$$

$$\implies -\frac{1}{x} = c + \frac{t^4}{4}$$

$$\implies -\frac{4}{x} = 4c + t^4$$

$$\implies x = \frac{-4}{t^4 + \kappa}, \quad \text{με } \kappa = 2c$$

Άσκηση: 2.3

$$x' = \frac{t+1}{x^4+1}$$

$$\implies \frac{dx}{dt} = \frac{t+1}{x^4+1}$$

$$\implies (x^4+1) dx + (-t-1) dt = 0$$

$$\implies \int (x^4+1) dx + \int (-t-1) dt = c$$

$$\implies \frac{x^5}{5} + x - \frac{t^2}{2} - t = c$$

Παρατηρούμε ότι, χωρίς αρχική συνθήκη, βρίσκουμε γενικές λύσεις ως αποτέλεσμα. Με τη χρήση μιας αρχικής συνθήκης, μπορούμε να βρούμε και την ειδική λύση της εξίσωσης.

Άσκηση: 2.4

$$e^t dt - x dx = 0; \quad x(0) = 1 \leftarrow \text{αρχική συνθήκη}$$

$$\Rightarrow \int x dx + \int (-e^t) dt = c$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - e^t = c$$

$$\Rightarrow x^2 = 2e^t + 2c$$

$$\Rightarrow x^2 = 2e^t + \kappa, \quad \text{με } \kappa = 2c$$

Όμως $x(0) = 1$, άρα:

$$\begin{cases} x^2 = 2e^t + \kappa \\ x(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x(0)^2 = 2e^0 + \kappa \Rightarrow \boxed{\kappa = -1}$$

Επομένως τελικά:

$$x^2 = 2e^t - 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2e^t - 1} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{2e^t - 1}}$$

Η αρχική συνθήκη πράγματι επαληθεύει το αποτέλεσμα x . Πρέπει όμως και $x \in \mathbb{R}$, $2e^t - 1 \geq 0$.

Από τη διαφορική εξίσωση έχουμε $x' = \frac{e^t}{x}$, άρα πρέπει $2e^t - 1 > 0 \Rightarrow \boxed{t > \ln \frac{1}{2}}$.

$$\int_{x_0}^x N(x) dx + \int_{t_0}^t M(t) dt = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

Άσκηση: 2.5

$$x \cos x dx + (1 - 6t^5) dt = 0; \quad t(\pi) = 0$$

$$x_0 = \pi, \quad t_0 = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^x x \cos x dx + \int_0^t (1 - 6t^5) dt = 0$$

$$\Rightarrow x \sin x \Big|_{\pi}^x + \cos x \Big|_{\pi}^x + (t - t^6) \Big|_0^t = 0$$

$$\Rightarrow x \sin x + \cos x + 1 + t - t^6$$

$$\Rightarrow \boxed{x \sin x + \cos x + 1 = t - t^6}$$

2.2 Ομοιογενείς

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)}$$

Ορισμός 2.1

Αν $\forall a \in \mathbb{R} : f(at, ax) = f(t, x)$, λέμε ότι η εξίσωση είναι **ομοιογενής**.

Θεώρημα

Αν μια εξίσωση είναι ομοιογενής, μπορούμε να την λύσουμε μειώνοντάς/μετατρέποντάς την σε χωριζόμενη, εφαρμόζοντας το μαθηματικό κόλπο που ονομάζεται "αντικατάσταση μεταβλητής", δηλαδή, όπου u συνάρτηση:

$$x = ut \implies \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$$

Άσκηση: 2.6

$$x' = \frac{x+t}{t}$$

$\implies \frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{t}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t, x) = \frac{dx}{dt}, \quad f(at, ax) = \frac{ax + at}{at} = \frac{x+t}{t} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u &= \frac{ut+t}{t} \\ \implies \frac{du}{dt}t + u &= u + 1 \\ \implies t \frac{du}{dt} &= 1 \\ \implies \frac{1}{t} dt - du &= 0 \text{ χωριζόμενη} \\ \implies \int \frac{1}{t} dt + \int (-1) du &= c \\ \implies \ln|t| - u &= c \\ \implies u = \ln|t| - c \text{ με } c = -\ln|\kappa| \\ \implies u &= \ln|\kappa t| \\ \implies \frac{x}{t} = \ln|\kappa t| &\implies x = t \ln|\kappa t| \end{aligned}$$

Άσκηση: 2.7

$$x' = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3}$$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t, x) = \frac{dx}{dt}, \quad f(at, ax) = \frac{2(ax)^4 + (at)^4}{(at)(ax)^3} = \frac{a^4 2x^4 + a^4 t^4}{a^4 tx^3} = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u &= \frac{2(ut)^4 + t^4}{t(ut)^3} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t + u &= \frac{2u^4 t^4 + t^4}{u^3 t^3} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t + u &= \frac{2u^4 + 1}{u^3} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t &= \frac{2u^4 + 1}{u^3} - u = \frac{u^4 + 1}{u^3} \\ \Rightarrow \frac{u^3}{u^4 + 1} du - \frac{1}{t} dt &= 0 \text{ χωριζόμενη} \\ \Rightarrow \int \frac{u^3}{u^4 + 1} du + \int \frac{-1}{t} dt &= c \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \ln(u^4 + 1) - \ln|t| &= c \\ \Rightarrow \boxed{u^4 + 1 = (\kappa t)^4} \text{ με } c = \ln|x| \\ x = ut \Rightarrow u = \frac{x}{t} \Rightarrow \left(\frac{x}{t}\right)^4 + 1 &= (\kappa t)^4 \\ \Rightarrow \frac{x^4}{t^4} + 1 &= \kappa^4 t^4 \\ \Rightarrow \boxed{x^4 = c_1 t^8 - t^4} \text{ με } c_1 = \kappa^4 \end{aligned}$$

Άσκηση: 2.8

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{tx}; x(1) = -2$$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{t^2 + x^2}{tx}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t, x) = \frac{dx}{dt}, \quad f(at, ax) = \frac{(at)^2 + (ax)^2}{(at)(ax)} = \frac{a^2 t^2 + a^2 x^2}{a^2 tx} = \frac{t^2 + x^2}{tx} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u &= \frac{t^2 + (ut)^2}{t(ut)} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t + u &= \frac{t^2 + t^2 u^2}{t^2 u} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t + u &= \frac{1 + u^2}{u} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t &= \frac{1 + u^2 - u^2}{u} = \frac{1}{u} \\ \Rightarrow u du - \frac{1}{t} dt &= 0 \text{ χωριζόμενη} \\ \Rightarrow \int u du + \int \frac{-1}{t} dt &= c \\ \Rightarrow \frac{u^2}{2} - \ln|t| &= c \\ \Rightarrow u^2 &= 2 \ln|t| + 2c \\ \Rightarrow \boxed{u^2 = \ln t^2 + \kappa} &\text{ με } \kappa = 2c \\ x = ut \Rightarrow u = \frac{x}{t} \Rightarrow \frac{x^2}{t^2} &= \ln t^2 + \kappa \\ \Rightarrow \boxed{x^2 = t^2 \ln t^2 + \kappa t^2} \end{aligned}$$

Επειδή $x(1) = -2$, έχουμε:

$$(-2)^2 = 1^2 \ln 1^2 + \kappa 1^2 \Rightarrow 4 = 0 + \kappa \Rightarrow \boxed{\kappa = 4}$$

Επομένως τελικά:

$$x^2 = t^2 \ln t^2 + 4t^2 \Rightarrow \boxed{x = -\sqrt{t^2 \ln t^2 + 4t^2}}$$

2.3 Ακριβείς**Ορισμός**

Όταν:

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t}$$

τότε η εξίσωση λέγεται ακριβής η πλήρης.

Υπάρχει $dF(t, x) = N(t, x) dx + M(t, x) dt$ με Γενική Λύση $F(t, x) = c$.

Άσκηση: 2.16

$$(t + \sin x) dt + (t \cos x - 2x) dx = 0$$

$$\underbrace{(t + \sin x) dt}_{M(t,x) dt} + \underbrace{(t \cos x - 2x) dx}_{N(t,x) dx} = 0$$

Δοκιμή:

$$\begin{cases} M(t, x) = t + \sin x \\ N(t, x) = t \cos x - 2x \end{cases} \implies \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \cos x = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = \cos x$$

Άρα η ΔΕ είναι ακριβής, επομένως υπάρχει $F(t, x)$ τέτοια ώστε:

$$dF = N(t, x) dx + M(t, x) dt$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad \leftarrow \text{ολικό διαφορικό της } F$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = N(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = M(t, x) \xrightarrow{\text{ολοκλήρωση ως προς } t}$$

$$\implies \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt = \int (t + \sin x) dt \implies$$

$$\implies F(t, x) = \frac{1}{2}t^2 + t \sin x + \overbrace{h(x)}^{\text{ολοκληρωτική σταθερά}}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= t \cos x + h'(x) \\ \implies t \cos x - 2x &= t \cos x + h'(x) \\ \implies h'(x) &= -2x \\ \implies \int h'(x) dx &= \int (-2x) dx \\ \implies h(x) &= -x^2 + c_1 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \frac{1}{2}t^2 + t \sin x - x^2 + c_1 = c \xrightarrow{c_2 = c - c_1} \\ \implies \frac{1}{2}t^2 + t \sin x - x^2 &= c_2 \quad \text{Γενική λύση} \end{aligned}$$

Άσκηση: 2.17

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2 + xe^{tx}}{2x - te^{tx}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2 + xe^{tx}}{2x - te^{tx}} \xrightarrow{\text{διαφορική μορφή}} \underbrace{(2 + xe^{tx})}_{M(t,x)=2+xe^{tx}} dt + \underbrace{(te^{tx} - 2x)}_{N(t,x)=te^{tx}-2x} dx = 0$$

Δοκιμή:

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = e^{tx} + xte^{tx} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = xte^{tx} + e^{tx}$$

συνεπώς είναι ακριβής, οπότε υπάρχει $F(t, x)$, με $dF = M(t, x) dt + N(t, x) dx$, με λύση $F(t, x) = c$.

$$\text{Ολικό διαφορικό} \rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= N(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = M(t, x) = 2 + xe^{tx} \xrightarrow{\text{ολοκλήρωση ως προς } t} \\ \Rightarrow \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt &= \int (2 + xe^{tx}) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow F(t, x) &= 2t + e^{tx} + h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Παραγωγή ως προς } x \rightarrow \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= te^{tx} + h'(x) \Rightarrow te^{tx} + h'(x) = te^{tx} - 2x \Rightarrow \\ &\Rightarrow h'(x) = -2x \Rightarrow \\ &\Rightarrow h(x) = \int (-2x) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow h(x) = -x^2 + c_1 \end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$\begin{aligned} F(t, x) &= 2t + e^{tx} - x^2 + c_1 \\ \Rightarrow 2t + e^{tx} - x^2 + c_1 &= c \\ \Rightarrow \boxed{2t + e^{tx} - x^2 = c_2, \quad c_2 = c - c_1} \end{aligned}$$

Άσκηση: 2.19

$$(2x^2t - 2x^3) dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2) dx = 0$$

$$\underbrace{(2x^2t - 2x^3)}_{M(t,x)=2x^2t-2x^3} dt + \underbrace{(4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)}_{N(t,x)=4x^3-6x^2t+2xt^2} dx = 0$$

$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 4xt - 6x^2 = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = 0 - 6x^2 + 4xt$, ΔΕ ακριβής, οπότε υπάρχει $F(t, x)$ με $dF(t, x) = M(t, x) dt + N(t, x) dx$ με λύση $F(t, x) = c$.

$$dF(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = N(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = M(t, x) = 2x^2t - 2x^3 \implies$$

$$\implies \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt = \int (2x^2t - 2x^3) dt \implies$$

$$\implies F(t, x) = x^2t^2 - 2x^3t + h(x)$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 2xt^2 - 6x^2t + h'(x) \implies$$

$$\implies \cancel{2xt^2} - \cancel{6x^2t} + h'(x) = 4x^3 - 6x^2t + \cancel{2xt^2} \implies$$

$$\implies h'(x) = 4x^3 \xrightarrow{\text{ολοκλ.}} h(x) = x^4 + c_1$$

Άρα:

$$F(t, x) = x^2t^2 - 2x^3t + x^4 + c_1 \implies$$

$$\implies x^2t^2 - 2x^3t + x^4 + c_1 = c \implies$$

$$\implies x^2t^2 - 2x^3t + x^4 = c - c_1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} (x^2 - xt)^2 = c_2 \\ c_2 = c - c_1 \end{cases} \implies$$

$$\xrightarrow{c_2 = \pm \sqrt{c_2}} x^2 - xt = c_3 \xrightarrow{\substack{ax^2+bx+c=0 \\ \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}} x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4c_3}}{2}, \quad c_3 = \pm \sqrt{c_2}$$

$$\implies \boxed{x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4c_3}}{2}, \quad c_3 = \pm \sqrt{c_2}}$$

Άσκηση: 2.20

$$2tx \, dt + (1 + t^2) \, dx = 0; \quad x(2) = -5$$

$$\underbrace{2tx}_{M(t,x)} \, dt + \underbrace{(1 + t^2)}_{N(t,x)} \, dx = 0; \quad x(2) = -5$$

$$M(t, x) = 2tx, \quad N(t, x) = 1 + t^2 \quad (1)$$

$F(t, x)$, με $dF(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x} \, dx + \frac{\partial F}{\partial t} \, dt$.

$$dF(t, x) = N(t, x) \, dx + M(t, x) \, dt$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = N(t, x) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} &= M(t, x) = 2tx \implies \\ \implies \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \, dt &= \int (2tx) \, dt \implies \\ \implies F(t, x) &= t^2 x + h(x) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\implies \begin{cases} h(x) = x + c_1 \\ (3) \end{cases} \implies \begin{cases} F(t, x) = t^2 x \\ (4) \end{cases} \implies t^2 + x + c_1 \implies t^2 x + x = c_2 (c_2 = c - c_1) \implies x = \frac{c_2}{t^2 + 1} \implies (x(2) = -5)$$

$$\implies F(t, x) = t^2 x + x + c_1 \quad (4)$$

Κεφάλαιο 3 Overview**3.1 Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ - Ordinary Differential Equations)****Ορισμός 3.1**

Εμπλέκουν:

- μία ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. t, x)
- μια εξαρτημένη και τις παραγώγους της (π.χ. i, y, u)

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

Μη συνήθειες είναι οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Partial Differential Equations - PDE) που εμπλέκουν:

- πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές (π.χ. x, y, z)
- μία εξαρτημένη μεταβλητή και τις μερικές παραγώγους της

3.2 1^η τάξης ΔΕ

Ορισμός 3.2

όταν

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Ορισμός 3.3: Τυπικής μορφής

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)}$$

Διαφορική μορφή

$$N(t, x) dx + M(t, x) dt = 0$$

Ορισμός 3.4: Χωριζόμενη

όταν

$$\begin{cases} N(t, x) = N(x) \\ M(t, x) = M(t) \end{cases}$$

τότε

$$N(x) dx + M(t) dt = 0$$

με λύση

$$\int N(x) dx + \int M(t) dt = c$$

ή

$$\int_{x_0}^x N(x) dx + \int_{t_0}^t M(t) dt = 0$$

Ορισμός 3.5: Ομογενής - Ομοιογενής

όταν $\forall a \in \mathbb{R}$

$$F(at, ax) = f(t, x)$$

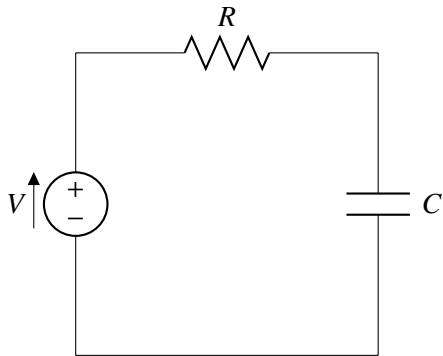
τότε θέτω $x = ut$, άρα $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$

Μέρος II

Κεχαγιάς: Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

(Fourier, Laplace) Τετάρτη 17:00-18:30

Κεφάλαιο 4 Κεφάλαιο 7: Εισαγωγή στην ανάλυση του Φουριερ



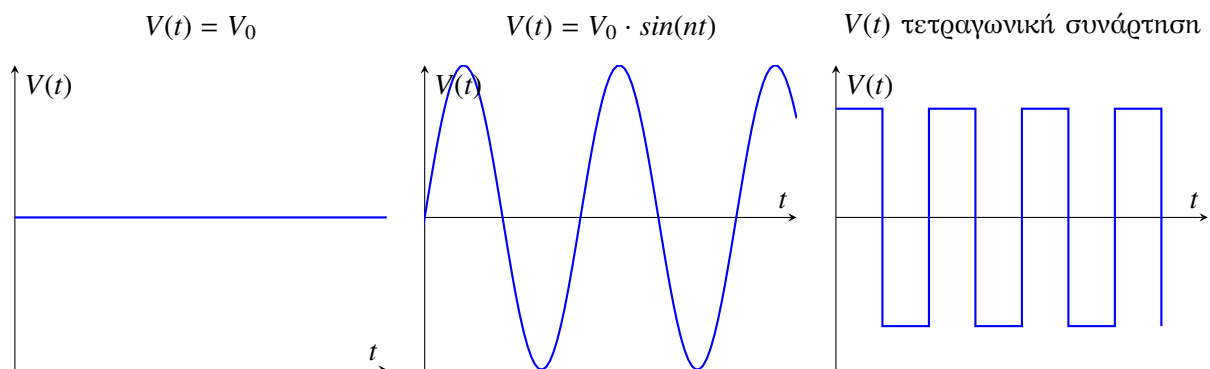
Η συμπεριφορά του κυκλώματος μπορεί να περιγραφεί με μια διαφορική εξίσωση.
 $Q(t)$: Το φορτίο του πυκνωτή σε χρονική στιγμή t

$$v_1 = R \cdot i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$v_2 = \frac{Q(t)}{C}$$

$$v_1 + v_2 = V(t) \implies \frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{RC} = \frac{1}{R}V(t), \quad \text{με αρχική συνθήκη } Q(0) = 0$$

Θα προσπαθήσω να λύσω την εξίσωση για τρεις περιπτώσεις:



4.0.1 $V(t) = V_0$

$$\frac{dx}{dt} + ax = b$$

Θα εξετάσω τη γενική λύση $x_0(t)$ της ομογενούς ΔΕ, και θα ψάξω μία ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ.

Ομογενής: $b = 0 \implies \frac{dx}{dt} = -ax \implies x(t) = ce^{-at}$.
 $x(0) = 0 \implies c = 0 \implies x_0(t) = 0$.

Μη ομογενής: $\frac{dx}{dt} + ax = b$.

$$x(t) = k \implies \frac{dx}{dt} + ak = b \implies k = \frac{b}{a} \implies x(t) = k = \frac{b}{a}$$

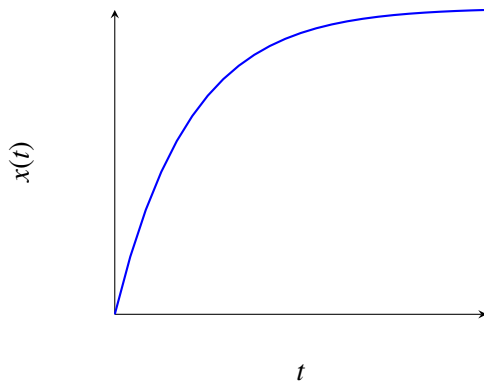
Θεώρημα

Η γενική λύση της μη ομογενούς είναι:

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t)$$

Άρα

$$\begin{cases} x(t) = ce^{-at} - \frac{b}{a} \\ x(0) = 0 \end{cases} \implies 0 = x(0) = c - \frac{b}{a} \implies x(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \text{ ή και } x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$



$$a = \frac{1}{RC}, \quad b = \frac{V_0}{R}$$

4.0.2 $V(t) = V_0 \sin(nt)$

$$\frac{dx}{dt} + ax = b \sin(nt)$$

Είναι $x_h(t) = ce^{-at}$.

Υποθέτω $x(t) = c_2 \sin(nt) + c_3 \cos(nt)$. Τότε $\frac{dx}{dt} = nc_2 \cos(nt) - nc_3 \sin(nt)$:

$$\frac{dx}{dt} + ax = (ac_2 - nc_3) \sin(nt) + (ac_3 + nc_2) \cos(nt) = b \sin(nt) \implies$$

$$\implies \begin{cases} ac_2 - nc_3 = b \\ nc_2 + ac_3 = 0 \end{cases} \implies \dots \implies \begin{cases} c_2 = \frac{ab}{a^2 + n^2} \\ c_3 = -\frac{bn}{a^2 + n^2} \end{cases}$$

Θυμάμαι ότι $x(t) = x_h(t) + x_i(t) = c_1 e^{-at} + \frac{ab}{a^2 + n^2} \sin(nt) - \frac{bn}{a^2 + n^2} \cos(nt)$ και από το $x(0) = 0$ βρίσκω $c_1 = \frac{bn}{a^2 + n^2}$.

Άρα:

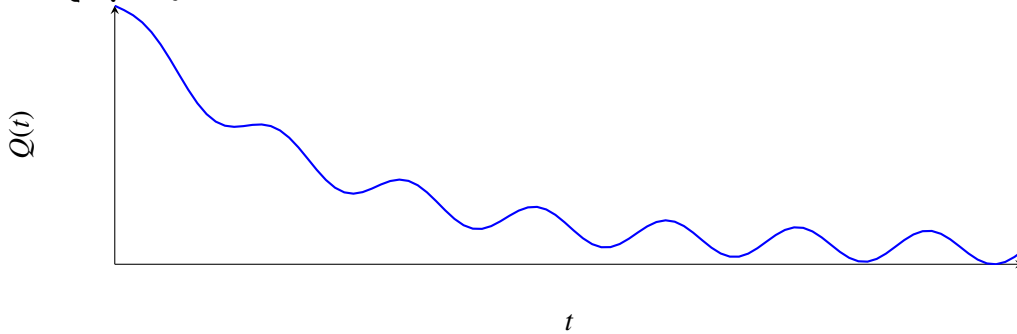
$$x(t) = \frac{bn}{a^2 + n^2} + \frac{ab}{a^2 + n^2} \sin(nt) - \frac{bn}{a^2 + n^2} \cos(nt)$$

Για το RC κύκλωμα, $a = \frac{1}{RC} \leftarrow$ χρονική σταθερά κυκλώματος, $b = \frac{V_0}{R}$, άρα:

$$Q(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2 R^2 n^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{C V_0 \sin(nt) - C^2 R n V_0 \cos(nt)}{C^2 R^2 n^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
 p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t) &= \\
 \sqrt{p^2 + q^2} \left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cos \omega t + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \sin \omega t \right) &= \\
 \sqrt{p^2 + q^2} (\sin \phi \cos \omega + \cos \phi \sin \omega t) &= \\
 \sqrt{p^2 + q^2} \sin(\omega t + \phi), \quad \phi = \arctan \frac{p}{q}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής φορτίζει περισσότερο αν είναι μικρότερη η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος.



4.0.3 $V(t) = \text{square}(t)$

$$V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)} \frac{4}{n\pi} \sin(nt) = \frac{4}{\pi} \sin(nt) + \frac{4}{3\pi} \sin(3t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5t) + \frac{4}{7\pi} \sin(7t) + \dots$$

Έτσι γίνεται η ανάλυση Fourier, και αυτό θα το δούμε την επόμενη Τετάρτη, που θα πάμε στο Κεφάλαιο 8, που λέει σειρές Fourier.

$$\begin{aligned}
 V_N(t) &= \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^N \frac{4}{n\pi} \sin(nt) \\
 V(t) &= \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(nt) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_N(t)
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) = \frac{V_0 \sin(nt)}{R} \implies Q_n(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2 R^2 n^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{C V_0 \sin(nt) - C^2 R n V_0 \cos(nt)}{C^2 R^2 n^2 + 1}$$

Οπότε αν:

$$\begin{aligned}
 \frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) &= \frac{4}{\pi} \frac{\sin(nt)}{R} \implies Q_1(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{C^2 R}{C^2 R^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \dots \right) \\
 \frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) &= \frac{4}{3\pi} \frac{\sin(3t)}{R} \implies Q_3(t) = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{3C^2 R}{9C^2 R^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \dots \right) \\
 \frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) &= \frac{4}{5\pi} \frac{\sin(5t)}{R} \implies Q_5(t) = \dots
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$Q(t) = \sum_{n \in \{1,3,5,\dots\}} Q_n(t)$$

Γιατί όμως, αν $V_1(t) \rightarrow Q_1(t)$, $V_2(t) \rightarrow Q_2(t)$, τότε $k_1 V_1 + k_2 V_2 = k_1 Q_1 + k_2 Q_2$ σε αυτό το κύκλωμα (αρχή επαλληλίας/γραμμικότητα);

Κεφάλαιο 5 Κεφάλαιο 8: Σειρές Φουριερ

Ορισμός

Μία συνάρτηση $f(t)$ λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο $[t_1, t_2]$ ανν μπορώ να διαμερίσω:

$$[t_1, t_2] = [\tau_0, \tau_1] \cup [\tau_1, \tau_2] \cup \dots \cup [\tau_{n-1}, \tau_n]$$

όπου $\tau_0 = t_1$, $\tau_n = t_2$, τέτοια ώστε $f(t)$ συνεχής στο κάθε (τ_{i-1}, τ_i) , και υπάρχουν $\lim_{t \rightarrow \tau_i^-} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow \tau_i^+} f(t) \forall i$

π.χ

Η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[-\pi, 3\pi]$, επειδή, για $t_1 = -\pi, t_2 = 3\pi$:

$$[-\pi, 3\pi] = [-\pi, 0] \cup [0, \pi] \cup [\pi, 2\pi] \cup [2\pi, 3\pi]$$

Στα $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ η f είναι συνεχής, και υπάρχουν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια, άρα η f είναι τμηματικά συνεχής.

5.0.4 Συνθήκες του Dirichlet

1. Η $f(t)$ είναι ορισμένη στο $(-L, L)$
2. Η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $(-L, L)$
3. Η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2L$.

Θεώρημα

Έστω $f(t)$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο $(-L, L)$. Τότε:

1. Για κάθε σημείο συνέχειας της $f(t)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$$

όπου:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$$

2. Σε κάθε σημείο ασυνέχειας τ :

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow \tau^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow \tau^+} f(t) \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi \tau}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi \tau}{L}$$

Παρ. $f(t)$ = τετραγωνικός παλμός

Λύση Η $f(t)$ ικανοποιεί τις Σ.Δ με $L = \pi$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dt = -1 + 1 = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{-\cos nt}{n} \right)_{t=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1 - \cos n\pi}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) = \frac{2}{n\pi} \text{ για άρτια } n \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 = a_2 = \dots = 0 \\ b_1 &= \frac{4}{\pi}, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi} \\ b_2 &= 0, \quad b_4 = 0, \dots \end{aligned}$$

Απόδειξη (Μερική)

Θα δεχτούμε ότι η $f(t)$ γράφεται στη μορφή $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$, και θα δείξουμε τους τύπους $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$, $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$
Έστω $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$. Τότε:

$$\int_{-L}^L f(t) dt = \int_{-L}^L f(t) \cdot 1 dt = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt + \int_{-L}^L a_1 \cos \frac{\pi t}{L} dt + \int_{-L}^L a_2 \cos \frac{2\pi t}{L} dt + \dots = a_0 \cdot L + 0 + 0 + \dots$$

Άρα:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

Συνέχεια αόδειξης Υποθέτω ότι υπάρχει **κάποια** σειρά της μορφής *, θα δείξω ότι οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους **. ίο Παρνω τυχόν $m \in \mathbb{N}$ και εξετάζω το

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt &= \\ &= \int_{-L}^L \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \cos \frac{m\pi t}{L} dt \\ &= \underbrace{\int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos \frac{m\pi t}{L} dt}_{=0 \text{ ολοκληρώνω πάνω σε } m \text{ περιόδους}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L a_n \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt}_{= \frac{b_n}{2} \left(\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi t + m\pi t}{L} dt + \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi t - m\pi t}{L} dt \right) = 0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt \\ &\stackrel{\cos a \cdot \cos \beta = \frac{\cos(a+\beta) + \cos(a-\beta)}{2}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \int_{-L}^L \left(\cos \frac{(n+m)\pi t}{L} + \cos \frac{(n-m)\pi t}{L} \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} 0, & n \neq m \\ a_n L, & n = m \end{cases} \\ &= a_m L \end{aligned}$$

Επομένως:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt$$

Αντιστοίχως αποδεικνύεται και η σχέση για το b_m .

Να σημειωθεί ότι οι συνθήκες του Dirichlet είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες.

5.0.5

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-in\pi t} L dt$$

Απόδειξη

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} = \frac{a_0}{2} +$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dots e^{\frac{in\pi t}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{in\pi t}{L}} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Άρα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

όπου:

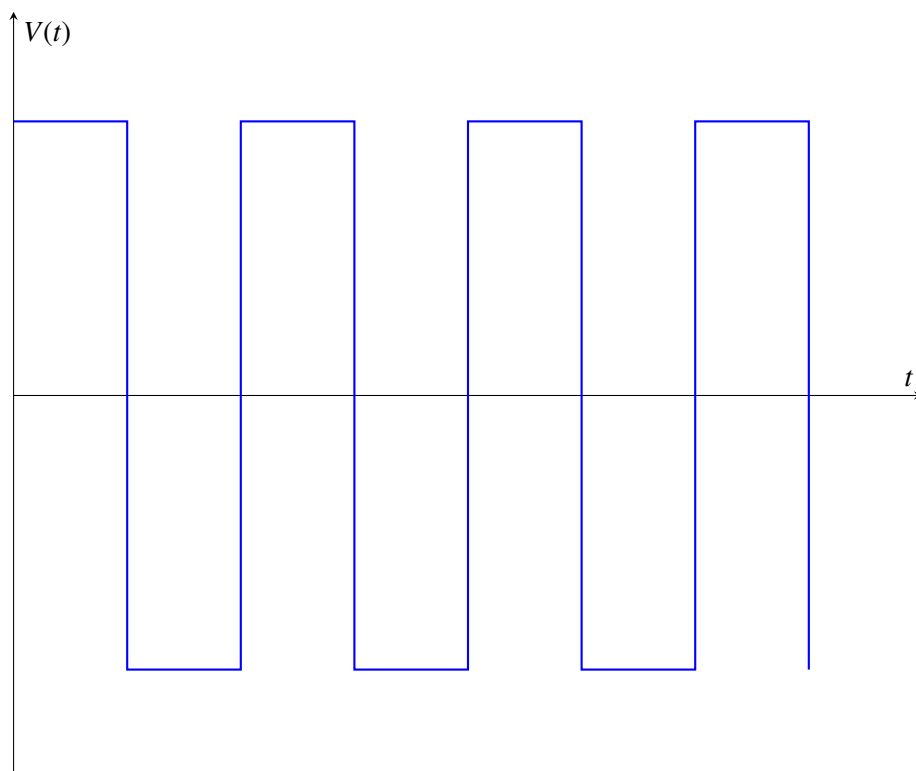
$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & n \in \mathbb{Z}^+ \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, & n \in \mathbb{Z}^- \\ \frac{a_0 + ib_0}{2}, & n = 0 \end{cases}$$

Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη να αποδειχθεί ότι:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{\frac{-in\pi t}{L}} dt$$

5.1 Παράδειγμα

$V(t)$ τετραγωνική συνάρτηση



Θα βρω την **εκθετική** σειρά της $f(t)$.

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot e^{-int} dt + \int_0^{\pi} (1) \cdot e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 e^{-int} dt + \int_0^{\pi} e^{-int} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{-int}}{-in} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{e^{-int}}{-in} \Big|_0^{\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-in} - \frac{e^{-in\pi}}{-in} - \frac{e^{-in\pi}}{-in} + \frac{1}{-in} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{-in} - \frac{2 \cos(n\pi)}{-in} \right) \\
 c_n &= \frac{i}{n\pi} \cdot (1 - \cos n\pi)
 \end{aligned}$$

n	c_n
-2	0
-1	$\frac{2i}{\pi}$
0	0
1	$-\frac{2i}{\pi}$
2	0
3	$\frac{2i}{3\pi}$

Άρα:

$$f(t) = \dots + \frac{2i}{3\pi} e^{i3t} + \frac{2i}{\pi} e^{-it} - \frac{2i}{\pi} e^{it} - \frac{2i}{3\pi} e^{i3t} + \dots$$

Ερωτήματα για τον αναγνώστη:

1. Πότε έχει η τριγωνομετρική σειρά μόνο ημίτονα/μόνο συνημίτονα;
2. Πότε έχει η εκθετική σειρά μόνο πραγματικούς/μόνο εκθετικούς όρους;

5.2

Ορισμός

Συμβολίζω με \mathcal{F}_L το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet (με ημιπερίοδο L)

Θεώρημα

Το \mathcal{F}_L είναι διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη Έστω $f, g \in \mathcal{F}_L$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$. Θα δείξω ότι $\kappa f + \lambda g \in \mathcal{F}_L$.

Πράγματι

1. Αν οι f, g είναι ορισμένες στο $[-L, L]$ τότε και η $\kappa f + \lambda g$ είναι ορισμένη στο $[-L, L]$.
- 2.

$$\begin{aligned}(\kappa f + \lambda g)(t + 2L) &= \kappa f(t + 2L) + \lambda g(t + 2L) \\&= \kappa f(t) + \lambda g(t) \\&= (\kappa f + \lambda g)(t)\end{aligned}$$

Άρα η $\kappa f + \lambda g$ έχει περίοδο $2L$.

3. Αν η f και η g είναι τμ. συνεχείς στο $[-1, 1]$, τότε και η $\kappa f + \lambda g$ είναι τμ. συνεχείς.

Από τα 1,2,3, η $\kappa f + \lambda g \in \mathcal{F}_L$.

Θεώρημα

Το σύνολο $\left\{e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ είναι μια ορθογώνια βάση του \mathcal{F}_L .

Δηλαδή κάθε $f(t) \in \mathcal{F}_L$ μπορεί να γραφεί:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Επιπλέον $\forall n, m, m \neq n \quad e^{\frac{in\pi t}{L}} \perp e^{\frac{im\pi t}{L}}$

Δηλαδή:

$$e^{\frac{in\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{im\pi t}{L}} = 0$$

Δηλαδή:

$$\int_{-L}^L e^{\frac{in\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{im\pi t}{L}} dt = 0$$

Για να ορίσω το εσωτερικό γινόμενο, θέλω $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_n x_n \bar{x}_n = \sum (x_n)^2$

$$f \cdot g = \int_{-L}^L f(t) \overline{g(t)} dt$$

Άρα

$$e^{\frac{in\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{im\pi t}{L}} = \int_{-L}^L e^{\frac{in\pi t}{L}} e^{\frac{im\pi t}{L}} dt = \int_{-L}^L e^{\frac{i(m-n)\pi t}{L}} dt = \begin{cases} 2L, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$