Σημειώσεις Διαφορικές Εξισώσεις

Καναβούρας Κωνσταντίνος
http://users.auth.gr/konkanant

2016, Εαρινό εξάμηνο

Μέρος I
Σεβαστιάδης

Χρήστος Σεβαστιάδης

Κεφάλαιο 1

Ορισμός: Διαφορική εξίσωση

Μια εξίσωση που αποτελείται από μια συνάρτηση και τις παραγώγους της

Langrange's $x', x'', x''', x^{(4)}, \dots$

Newton's $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$

Leibniz' $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}$

π.χ.

$$x(t)\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)\sin(t)$$

Ορισμός 1.1: Τάξη

Τάξη ονομάζεται ο μεγαλύτερος *βαθμός* παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

Ορισμός 1.2: Βαθμός

Βαθμός ονομάζεται η μεγαλύτερη *δύναμη* παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

Κεφάλαιο 2 Διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

Ορισμός

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x)$$

2.1 Χωριζόμενες διαφορικές εξισώσεις

Τυπική μορφή:

$$f(t,x) = \frac{-M(t,x)}{N(t,x)} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \implies \underbrace{N(t,x)}_{N(x)}\mathrm{d}x + \underbrace{M(t,x)}_{M(t)}\mathrm{d}t = 0$$

Αν δηλαδή τα $N(t,x)$, $M(t,x)$ εξαρτώνται μόνο από τα x και t αντίστοιχα, η εξίσωση ονομάζεται **χωριζόμενη**, και το αποτέλεσμά της μπορεί να βρεθεί με ολοκληρώματα:

$$\int N(x)\,\mathrm{d}x + \int M(t)\,\mathrm{d}t = c$$

Άσκηση: 2.1

$$x\,\mathrm{d}x - t^2\,\mathrm{d}t = 0$$

$$N(x) = x, \quad M(t) = -t^2$$

$$\begin{aligned}
&\int x\,\mathrm{d}x + \int (-t^2)\,\mathrm{d}t = c \implies \\
&\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}t^3 = c \implies \\
&x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}t^3 + 2c} \implies \\
&x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}t^3 + \kappa}
\end{aligned}$$

με $\kappa = 2c$

Άσκηση: 2.2

$$x' = x^2 t^3$$

$$\begin{aligned}
&\implies \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 t^3 \\
&\implies \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - t^3\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\implies \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int (-t^3)\,\mathrm{d}t = c \\
&\implies -\frac{1}{x} - \frac{t^4}{4} = c \\
&\implies -\frac{1}{x} = c + \frac{t^4}{4} \\
&\implies -\frac{4}{x} = 4c + t^4 \\
&\implies x = \frac{-4}{t^4 + \kappa}, \quad \text{με } \kappa = 2c
\end{aligned}$$

Άσκηση: 2.3

$$x' = \frac{t+1}{x^4+1}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t+1}{x^4+1} \\
&\implies (x^4+1)\,\mathrm{d}x + (-t-1)\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\implies \int (x^4+1)\,\mathrm{d}x + \int (-t-1)\,\mathrm{d}t = c \\
&\implies \frac{x^5}{5} + x - \frac{t^2}{2} - t = c
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, χωρίς αρχική συνθήκη, βρίσκουμε γενικές λύσεις ως αποτέλεσμα. Με τη χρήση μιας αρχικής συνθήκης, μπορούμε να βρούμε και την ειδική λύση της εξίσωσης.

Άσκηση: 2.4

$$e^t\,\mathrm{d}t - x\,\mathrm{d}x = 0; \quad x(0) = 1 \leftarrow \text{αρχική συνθήκη}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \int x\,\mathrm{d}x + \int (-e^t)\,\mathrm{d}t = c \\
&\implies \frac{x^2}{2} - e^t = c \\
&\implies x^2 = 2e^t + 2c \\
&\implies x^2 = 2e^t + \kappa, \quad \text{με } \kappa = 2c
\end{aligned}$$

Όμως $x(0) = 1$, άρα:

$$\begin{cases} x^2 = 2e^t + \kappa \\ x(0) = 1 \end{cases} \implies x(0)^2 = 2e^0 + \kappa \implies \boxed{\kappa = -1}$$

Επομένως τελικά:

$$x^2 = 2e^t - 1 \implies x = \pm\sqrt{2e^t - 1} \implies \boxed{x = \sqrt{2e^t - 1}}$$

Η αρχική συνθήκη πράγματι επαληθεύει το αποτέλεσμα x. Πρέπει όμως και $x \in \mathbb{R}$, $2e^t - 1 \geq 0$. Από τη διαφορική εξίσωση έχουμε $x' = \frac{e^t}{x}$, άρα πρέπει $2e^t - 1 > 0 \implies \boxed{t > \ln\frac{1}{2}}$.

$$\int_{x_0}^{x} N(x)\,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^{t} M(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

Άσκηση: 2.5

$$x\cos x\,\mathrm{d}x + (1 - 6t^5)\,\mathrm{d}t = 0; \quad t(\pi) = 0$$

$x_0 = \pi$, $t_0 = 0$

$$\begin{aligned}
&\implies \int_{\pi}^{x} x\cos x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{t} (1 - 6t^5)\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\implies x\sin x\Big|_{\pi}^{x} + \cos x\Big|_{\pi}^{x} + (t - t^6)\Big|_{0}^{t} = 0 \\
&\implies x\sin x + \cos x + 1 + t - t^6 \\
&\implies \boxed{x\sin x + \cos x + 1 = t - t^6}
\end{aligned}$$

2.2 Ομοιογενείς

$$f(t,x) = \frac{-M(t,x)}{N(t,x)}$$

Ορισμός 2.1

Αν $\forall a \in \mathbb{R} : f(at, ax) = f(t,x)$, λέμε ότι η εξίσωση είναι **ομοιογενής**.

Θεώρημα

Αν μια εξίσωση είναι ομοιογενής, μπορούμε να την λύσουμε μειώνοντάς/μετατρέποντάς την σε χωριζόμενη, εφαρμόζοντας το μαθηματικό κόλπο που ονομάζεται ¨αντικατάσταση μεταβλητής¨, δηλαδή, όπου u συνάρτηση:

$$\boxed{x = ut \implies \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u}$$

Άσκηση: 2.6

$$x' = \frac{x+t}{t}$$

$\implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x+t}{t}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t,x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad f(at, ax) = \frac{ax+at}{at} = \frac{x+t}{t} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{ut+t}{t} \\
\implies &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = u + 1 \\
\implies &t\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 \\
\implies &\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}u = 0 \text{ χωριζόμενη} \\
\implies &\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int (-1)\,\mathrm{d}u = c \\
\implies &\ln|t| - u = c \\
\implies &u = \ln|t| - c \text{ με } c = -\ln|\kappa| \\
\implies &\boxed{u = \ln|\kappa t|} \\
\implies &\frac{x}{t} = \ln|\kappa t| \implies \boxed{x = t\ln|\kappa t|}
\end{aligned}$$

Άσκηση: 2.7

$$x' = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3}$$

$\implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2x^4+t^4}{tx^3}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t,x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad f(at,ax) = \frac{2(ax)^4 + (at)^4}{(at)(ax)^3} = \frac{a^4 2x^4 + a^4 t^4}{a^4 tx^3} = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{2(ut)^4 + t^4}{t(ut)^3}\\
\implies &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{2u^4\cancel{t^4} + \cancel{t^4}}{u^3\cancel{t^4}}\\
\implies &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{2u^4 + 1}{u^3}\\
\implies &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t = \frac{2u^4 + 1}{u^3} - u = \frac{u^4 + 1}{u^3}\\
\implies &\frac{u^3}{u^4 + 1}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0 \text{ χωριζόμενη}\\
\implies &\int \frac{u^3}{u^4+1}\,\mathrm{d}u + \int \frac{-1}{t}\,\mathrm{d}t = c\\
\implies &\frac{1}{4}\ln(u^4 + 1) - \ln|t| = c\\
\implies &\boxed{u^4 + 1 = (\kappa t)^4} \text{ με } c = \ln|x|\\
&x = ut \implies u = \frac{x}{t} \implies \left(\frac{x}{t}\right)^4 + 1 = (\kappa t)^4\\
\implies &\frac{x^4}{t^4} + 1 = \kappa^4 t^4\\
\implies &\boxed{x^4 = c_1 t^8 - t^4} \text{ με } c_1 = \kappa^4
\end{aligned}$$

Άσκηση: 2.8

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{tx}; x(1) = -2$$

$\implies \frac{dx}{dt} = \frac{t^2+x^2}{tx}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t,x) = \frac{dx}{dt}, \quad f(at,ax) = \frac{(at)^2 + (ax)^2}{(at)(ax)} = \frac{\cancel{a^2}t^2 + \cancel{a^2}x^2}{\cancel{a^2}tx} = \frac{t^2+x^2}{tx} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{du}{dt}t + u = \frac{t^2 + (ut)^2}{t(ut)} \\
\implies &\tfrac{du}{dt}t + u = \frac{\cancel{t^2} + \cancel{t^2}u^2}{\cancel{t^2}u} \\
\implies &\tfrac{du}{dt}t + u = \frac{1+u^2}{u} \\
\implies &\tfrac{du}{dt}t = \frac{1 + \cancel{u^2} - \cancel{u^2}}{u} = \frac{1}{u} \\
\implies &u\,du - \frac{1}{t}\,dt = 0 \text{ χωριζόμενη} \\
\implies &\int u\,du + \int \frac{-1}{t}\,dt = c \\
\implies &\frac{u^2}{2} - \ln|t| = c \\
\implies &u^2 = 2\ln|t| + 2c \\
\implies &\boxed{u^2 = \ln t^2 + \kappa} \text{ με } \kappa = 2c \\
&x = ut \implies u = \frac{x}{t} \implies \frac{x^2}{t^2} = \ln t^2 + \kappa \\
\implies &\boxed{x^2 = t^2 \ln t^2 + \kappa t^2}
\end{aligned}$$

Επειδή $x(1) = 2$, έχουμε:

$$(-2)^2 = 1^2 \ln 1^2 + \kappa 1^2 \implies 4 = 0 + \kappa \implies \boxed{\kappa = 4}$$

Επομένως τελικά:

$$x^2 = t^2 \ln t^2 + 4t^2 \implies \boxed{x = -\sqrt{t^2 \ln t^2 + 4t^2}}$$

2.3 Ακριβείς

Ορισμός

Όταν:

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$$

τότε η εξίσωση λέγεται ακριβής η πλήρης.
Υπάρχει $dF(t,x) = N(t,x)\,dx + M(t,x)\,dt$ με Γενική Λύση $F(t,x) = c$.

Άσκηση: 2.16

$$(t+\sin x)\,\mathrm{d}t + (t\cos x - 2x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\underbrace{(t+\sin x)\,\mathrm{d}t}_{M(t,x)\,\mathrm{d}t} + \underbrace{(t\cos x - 2x)\,\mathrm{d}x}_{N(t,x)\,\mathrm{d}x} = 0$$

Δοκιμή:

$$\begin{cases} M(t,x) &= t+\sin x \\ N(t,x) &= t\cos x - 2x \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \cos x = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = \cos x$$

Άρα η ΔΕ είναι ακριβής, επομένως υπάρχει $F(t,x)$ τέτοια ώστε:

$$dF = N(t,x)\,\mathrm{d}x + M(t,x)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}t} \leftarrow \text{ ολικό διαφορικό της } F$$

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x), \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x) \xrightarrow{\text{ολοκλήρωση ως προς } t}$$

$$\Longrightarrow \cancelto{F(t,x)}{\int \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}t} = \int (t+\sin x)\,\mathrm{d}t \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{F(t,x) = \frac{1}{2}t^2 + t\sin x + \overbrace{h(x)}^{\text{ολοκληρωτική σταθερά}}}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = t\cos x + h'(x) \\ &\Longrightarrow t\cos x - 2x = t\cos x + h'(x) \\ &\Longrightarrow h'(x) = -2x \\ &\Longrightarrow \int h'(x)\,\mathrm{d}x = \int (-2x)\,\mathrm{d}x \\ &\Longrightarrow \boxed{h(x) = -x^2 + c_1} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$F(t,x) = \frac{1}{2}t^2 + t\sin x - x^2 + c_1 = c \xRightarrow{c_2 = c - c_1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}t^2 + t\sin x - x^2 = c_2} \text{ Γενική λύση}$$

Άσκηση: 2.17

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2 + xe^{tx}}{2x - te^{tx}}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2 + xe^{tx}}{2x - te^{tx}} \xRightarrow{\text{διαφορική μορφή}} \underbrace{(2 + xe^{tx})}_{M(t,x)=2+xe^{tx}}\,\mathrm{d}t + \underbrace{(te^{tx} - 2x)}_{N(t,x)=te^{tx}-2x}\,\mathrm{d}x = 0$$

Δοκιμή:

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = e^{tx} + xte^{tx} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = xte^{tx} + e^{tx}$$

συνεπώς είναι ακριβής, οπότε υπάρχει $F(t,x)$, με $dF = M(t,x)\,\mathrm{d}t + N(t,x)\,\mathrm{d}x$, με λύση $F(t,x) = c$.

$$\text{Ολικό διαφορικό} \to dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

Άρα:

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x), \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x) = 2 + xe^{tx} \xRightarrow{\text{ολοκλήρωση ως προς } t}$$
$$\Longrightarrow \int \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \int \left(2 + xe^{tx}\right)\mathrm{d}t \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow F(t,x) = 2t + e^{tx} + h(x)$$

$$\text{Παραγώγιση ως προς } x \to \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = te^{tx} + h'(x) \Longrightarrow te^{tx} + h'(x) = te^{tx} - 2x \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow h'(x) = -2x \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow h(x) = \int (-2x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow h(x) = -x^2 + c_1$$

Άρα τελικά:

$$F(t,x) = 2t + e^{tx} - x^2 + c_1$$
$$\Longrightarrow 2t + e^{tx} - x^2 + c_1 = c$$
$$\Longrightarrow \boxed{2t + e^{tx} - x^2 = c_2, \qquad c_2 = c - c_1}$$

Άσκηση: 2.19

$$\left(2x^2t - 2x^3\right)\mathrm{d}t + \left(4x^3 - 6x^2t + 2xt^2\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\underbrace{\left(2x^2t - 2x^3\right)}_{M(t,x)=2x^2t-2x^3}\mathrm{d}t + \underbrace{\left(4x^3 - 6x^2t + 2xt^2\right)}_{N(t,x)=4x^3-6x^2t+2xt^2}\mathrm{d}x = 0$$

$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 4xt - 6x^2 = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = 0 - 6x^2 + 4xt$, ΔΕ ακριβής, οπότε υπάρχει $F(t,x)$ με $\mathrm{d}F(t,x) = M(t,x)\,\mathrm{d}t + N(t,x)\,\mathrm{d}x$ με λύση $F(t,x) = c$.

$$\mathrm{d}F(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x), \quad \tfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x) = 2x^2t - 2x^3 && \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \int \tfrac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \int (2x^2t - 2x^3)\,\mathrm{d}t && \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow F(t,x) = x^2t^2 - 2x^3t + h(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = 2xt^2 - 6x^2t + h'(x) \Longrightarrow \\
\Longrightarrow \cancel{2xt^2} - \cancel{6x^2}t + h'(x) = 4x^3 - 6x^2t + \cancel{2x + 2} \Longrightarrow \\
\Longrightarrow h'(x) = 4x^3 \xRightarrow{\text{ολοκλ.}} h(x) = x^4 + c_1
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
F(t,x) = x^2t^2 - 2x^3t + x^4 + c_1 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow x^2t^2 - 2^3t + x^4 + c_1 = c \Longrightarrow \\
\Longrightarrow x^2t^2 - 2x^3t + x^4 = c - c_1 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow \begin{cases} (x^2 - xt)^2 & = c_2 \\ c_2 & = c - c_1 \end{cases} \Longrightarrow \\
\xRightarrow{c_3=\pm\sqrt{c_2}} x^2 - xt = c_3 \xRightarrow[\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}]{ax^2+bx+c=0}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4c_3}}{2}, \qquad c_3 = \pm\sqrt{c_2}}$$

Άσκηση: 2.20

$$2tx\,\mathrm{d}t + (1+t^2)\,\mathrm{d}x = 0; \quad x(2) = -5$$

$$\underbrace{2tx}_{M(t,x)}\,\mathrm{d}t + \underbrace{(1+t^2)}_{N(t,x)}\,\mathrm{d}x = 0; \quad x(2) = -5$$

$$M(t,x) = 2tx, \quad N(t,x) = 1 + t^2 \tag{1}$$

$F(t,x)$, με $\mathrm{d}F(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}t$.
$\mathrm{d}F(t,x) = N(t,x)\,\mathrm{d}x + M(t,x)\,\mathrm{d}t$

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x) \tag{2}$$

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x) = 2tx \implies$$
$$\implies \int \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \int (2tx)\,\mathrm{d}t \implies$$

$$\implies F(t,x) = t^2 x + h(x) \tag{3}$$

$$\implies t^2 + h$$

$$\implies \begin{cases} h(x) = x + c_1 \\ (3) \end{cases} \implies \begin{cases} F(t,x) = t^2 x \\ (4) \end{cases} \implies t^2 + x + c_1 \implies t^2 x + x = c_2 (c_2 = c - c_1) \implies x = \frac{c_2}{t^2+1} \implies (x(2$$

$$\implies F(t,x) = t^2 x + x + c_1 \tag{4}$$

Κεφάλαιο 3 Overview

3.1 Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ - Ordinary Differential Equations)

Ορισμός 3.1

Εμπλέκουν:

- μία ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. t, x)
- μια εξαρτημένη και τις παραγώγους της (π.χ. i, y, u)

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

Μη συνήθεις είναι οι Μερικές Διαφορικές Εξισσώεις (Partial Differential Equations - PDE) που εμπλέκουν:

- πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές (π.χ. x, y, z)
- μία εξαρτημένη μεταβλητή και τις μερικές παραγώγους της

3.2 $1^{ης}$ τάξης ΔΕ

Ορισμός 3.2

όταν

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x)$$

Ορισμός 3.3: Τυπικής μορφής

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)}$$

Διαφορική μορφή

$$N(t, x)\,\mathrm{d}x + M(t, x)\,\mathrm{d}t = 0$$

Ορισμός 3.4: Χωριζόμενη

όταν

$$\begin{cases} N(t, x) & = N(x) \\ M(t, x) & = M(t) \end{cases}$$

τότε

$$N(x)\,\mathrm{d}x + M(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

με λύση

$$\int N(x)\,\mathrm{d}x + \int M(t)\,\mathrm{d}t = c$$

ή

$$\int_{x_0}^{x} N(x)\,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^{t} M(t)\,\mathrm{d} = 0$$

Ορισμός 3.5: Ομογενής - Ομοιογενής

όταν $\forall a \in \mathbb{R}$

$$F(at, ax) = f(t, x)$$

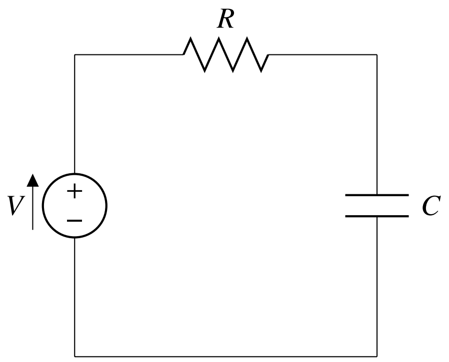
τότε θέτω $x = ut$, άρα $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u$

Μέρος II

Κεχαγιάς: Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

(Fourier, Laplace) Τετάρτη 17:00-18:30

Κεφάλαιο 4 Κεφάλαιο 7: Εισαγωγή στην ανάλυση του Φουριερ

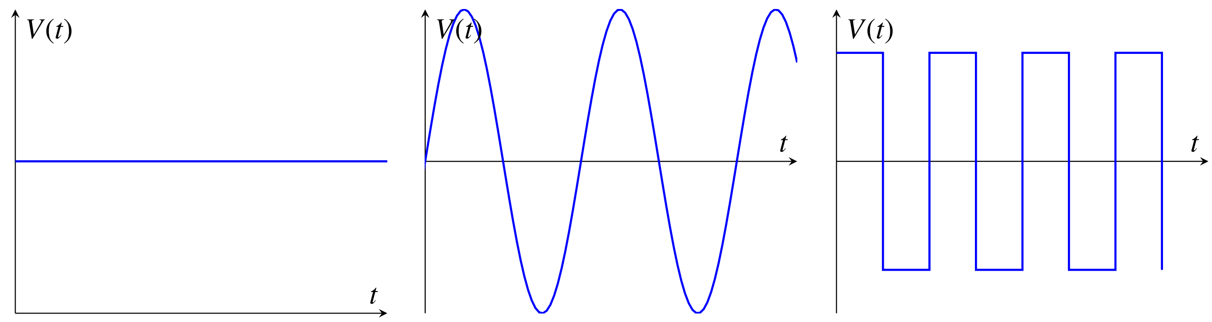


Η συμπεριφορά του κυκλώματος μπορεί να περιγραφεί με μια διαφορική εξίσωση.
$Q(t)$: Το φορτίο του πυκνωτή σε χρονική στιγμή t

$$v_1 = R \cdot i(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$
$$v_2 = \frac{Q(t)}{C}$$
$$\boxed{v_1 + v_2 = V(t) \implies \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q(t)}{RC} = \frac{1}{R}V(t), \quad \text{με αρχική συνθήκη } Q(0) = 0}$$

Θα προσπαθήσω να λύσω την εξίσωση για τρεις περιπτώσεις:

$V(t) = V_0$ $\qquad$ $V(t) = V_0 \cdot sin(nt)$ $\qquad$ $V(t)$ τετραγωνική συνάρτηση



4.0.1 $V(t) = V_0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b$$

Θα εξετάσω τη γενική λύση $x_0(t)$ της ομογενούς ΔΕ, και
θα ψάξω μία ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ.

Ομογενής: $b = 0 \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -ax \implies x(t) = ce^{-at}$.
$x(0) = 0 \implies c = 0 \implies x_0(t) = 0$.

Μη ομογενής: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b$.

$$x(t) = k \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ak = b \implies k = \frac{b}{a} \implies x(t) = k = \frac{b}{a}$$

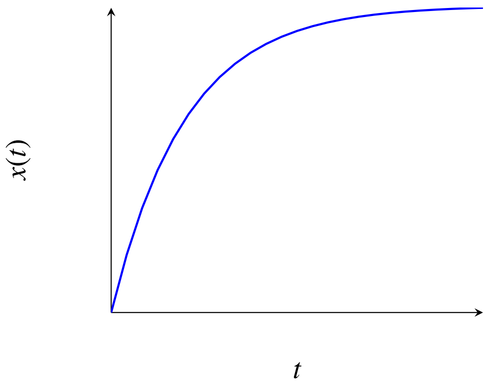
Θεώρημα

Η γενική λύση της μη ομογενούς είναι:

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t)$$

Άρα

$$\begin{cases} x(t) = ce^{-at} - \frac{b}{a} \\ x(0) = 0 \end{cases} \implies 0 = x(0) = c + \frac{b}{a} \implies x(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \text{ ή και } x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$



$$a = \frac{1}{RC}, \quad b = \frac{V_0}{R}$$

4.0.2 $V(t) = V_0 \sin(nt)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b\sin(nt)$$

Είναι $x_h(t) = ce^{-at}$.
Υποθέτω $x(t) = c_2 \sin(nt) + c_3 \cos(nt)$. Τότε $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = nc_2 \cos(nt) - nc_3 \sin(nt)$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = (ac_2 - nc_3)\sin(nt) + (ac_3 + nc_2)\cos(nt) = b\sin(nt) \implies$$

$$\implies \begin{cases} ac_2 - nc_3 &= b \\ nc_2 + ac_3 &= 0 \end{cases} \implies \cdots \implies \begin{cases} c_2 &= \frac{ab}{a^2+n^2} \\ c_3 &= -\frac{bn}{a^2+n^2} \end{cases}$$

Θυμάμαι ότι $x(t) = x_h(t) + x_i(t) = c_1 e^{-at} + \frac{ab}{a^2+n^2}\sin(nt) - \frac{bn}{a^2+n^2}\cos(nt)$ και από το $x(0) = 0$ βρίσκω $c_1 = \frac{bn}{a^2+n^2}$.
Άρα:

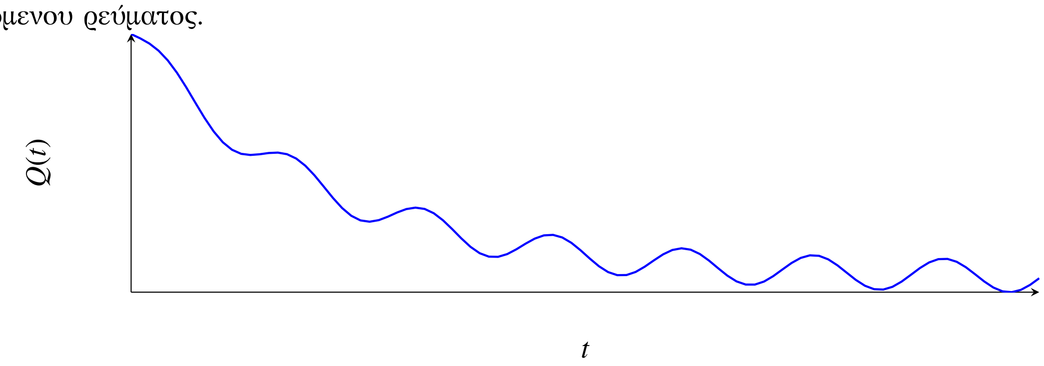
$$x(t) = \frac{bn}{a^2 + n^2} + \frac{ab}{a^2 + n^2}\sin(nt) - \frac{bn}{a^2 + n^2}\cos(nt)$$

Για το RC κύκλωμα, $a = \frac{1}{RC} \leftarrow$ χρονική σταθερά κυκλώματος, $b = \frac{V_0}{R}$, άρα:

$$Q(t) = \frac{V_0 C^2 Rn}{C^2R^2n^2 + 1}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{CV_0 \sin(nt) - C^2RnV_0 \cos(nt)}{C^2R^2n^2 + 1}$$

$$
\begin{aligned}
p\cos(\omega t) + q\sin(\omega t) &= \\
\sqrt{p^2+q^2}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos\omega t + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin\omega t\right) &= \\
\sqrt{p^2+q^2}\,(\sin\phi\cos\omega + \cos\phi\sin\omega t) &= \\
\sqrt{p^2+q^2}\sin(\omega t+\phi), \quad \phi = \arctan\frac{p}{q}
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής φορτίζει περισσότερο αν είναι μικρότερη η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος.



4.0.3 $V(t) = \text{square}(t)$

$$V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)} \frac{4}{n\pi}\sin(nt) = \frac{4}{\pi}\sin(nt) + \frac{4}{3\pi}\sin(3t) + +\frac{4}{5\pi}\sin(5t)\frac{4}{7\pi}\sin(7t) + \cdots$$

Έτσι γίνεται η ανάλυση Fourier, και αυτό θα το δούμε την επόμενη Τετάρτη, που θα πάμε στο Κεφάλαιο 8, που λέει σειρές Fourier.

$$V_N(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{N} \frac{4}{n\pi}\sin(nt)$$

$$V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\sin(nt) = \lim_{t\to\infty} V_N(t)$$

Άρα:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{V_0\sin(nt)}{R} \implies Q_n(t) = \frac{V_0C^2Rn}{C^2R^2n^2+1}e^{\frac{t}{RC}} + \frac{CV_0\sin(nt) - C^2RnV_0\cos(nt)}{C^2R^2n^2+1}$$

Οπότε αν:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{\pi}\frac{\sin(nt)}{R} \implies Q_1(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{C^2R}{C^2R^1+1}e^{-\frac{1}{RC}} + \cdots\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{3\pi}\frac{\sin(3t)}{R} \implies Q_3(t) = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{3C^2R}{9C^2R^1+1}e^{-\frac{1}{RC}} + \cdots\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{5\pi}\frac{\sin(5t)}{R} \implies Q_5(t) = \cdots$$

Άρα:

$$Q(t) = \sum_{n\in\{1,3,5,\dots\}} Q_n(t)$$

Γιατί όμως, αν $V_1(t) \to Q_1(t)$, $V_2(t) \to Q_2(t)$, τότε $k_1V_1 + k_2V_2 = k_1Q_1 + k_2Q_2$ σε αυτό το κύκλωμα (αρχή επαλληλίας/γραμμικότητα);

Κεφάλαιο 5 Κεφάλαιο 8: Σειρές Φουριερ

Ορισμός

Μία συνάρτηση $f(t)$ λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο $[t_1, t_2]$ ανν μπορώ να διαμερίσω:

$$[t_1, t_2] = [\tau_0, \tau_1] \cup [\tau_1, \tau_2] \cup \cdots \cup [\tau_{n-1}, \tau_n]$$

όπου $\tau_0 = t_1$, $\tau_n = t_2$, τέτοια ώστε $f(t)$ συνεχής στο κάθε (τ_{i-1}, τ_i), και υπάρχουν $\lim_{t\to\tau_i^-} f(t)$, $\lim_{t\to\tau_1^+} f(t) \forall i$

$\pi.\chi$

Η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[-\pi, 3\pi]$, επειδή, για $t_1 = -\pi, t_2 = 3\pi$:

$$[-\pi, 3\pi] = [-\pi, 0] \cup [0, \pi] \cup [\pi, 2\pi] \cup [2\pi, 3\pi]$$

Στα $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ η f είναι συνεχής, και υπάρχουν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια, άρα η f είναι τμηματικά συνεχής.

5.0.4 Συνθήκες του Dirichlet

1. Η $f(t)$ είναι ορισμένη στο $(-L, L)$
2. Η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $(-L, L)$
3. Η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2L$.

Θεώρημα

Έστω $f(t)$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο $(-L, L)$. Τότε:

1. Για κάθε σημείο συνέχειας της $f(t)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$$

όπου:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t$$

2. Σε κάθε σημείο ασυνέχειας τ:

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to\tau^-} f(t) + \lim_{t\to\tau^+} f(t)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$$

Παρ. $f(t) =$ τετραγωνικός παλμός

Λύση Η $f(t)$ ικανοποιεί τις Σ.D με $L = \pi$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\,\mathrm{d}t = -1 + 1 = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\frac{n\pi t}{\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{-\cos nt}{n}\right)_{t=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1-\cos n\pi}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) = \frac{2}{n\pi} \text{ για άρτια } n \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = 0 \\ b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi} \\ b_2 = 0, \quad b_4 = 0, \ldots \end{aligned}$$

Απόδειξη (Μερική)

Θα δεχτούμε ότι η $f(t)$ γράφεται στη μορφή $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$, και θα δείξουμε τους τύπους $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t$, $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t$

Έστω $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$. Τότε:

$$\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-L}^{L} f(t)\cdots t = \int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t + \int_{-L}^{L} a_1\cos\frac{\pi t}{L}\,\mathrm{d}t + \int_{-L}^{L} a_2\cos\frac{2\pi t}{L} + \cdots = a_0\cdot L + 0 + 0 + \ldots$$

Άρα:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Συνέχεια αόδειξης Υποθέτω ότι υπάρχει **κάποια** σειρά της μορφής *, θα δείξω ότι οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους **. ίό Παρνω τυχόν $m \in \mathbb{N}$ και εξετάζω το

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-L}^{L}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi t}{L}\right)\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t}_{=0 \text{ ολοκληρώνω πάνω σε } m \text{ περιόδους}} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} a_n\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} b_n\sin\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t}_{=\frac{b_n}{2}\left(\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi t+m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t + \int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi t-m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t\right)=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\cos a\cdot\cos\beta = \frac{cos(a+\beta)+cos(a-\beta}{2}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{(n+m)\pi t}{L} + \cos\frac{(n-m)\pi t}{L}\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\begin{cases} 0, & n \neq m \\ a_n L, & n = m \end{cases} \\ &= a_m L \end{aligned}$$

∎

Επομένως:

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t$$

Αντιστοίχως αποδεικνύεται και η σχέση για το b_m.

Να σημειωθεί ότι οι συνθήκες του Dirichlet είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες.

5.0.5

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-in\pi t} L \, \mathrm{d}t$$

Απόδειξη

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L} = \frac{a_0}{2} +$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cdots e^{\frac{in\pi t}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{in\pi t}{L}} + + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Άρα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

όπου:

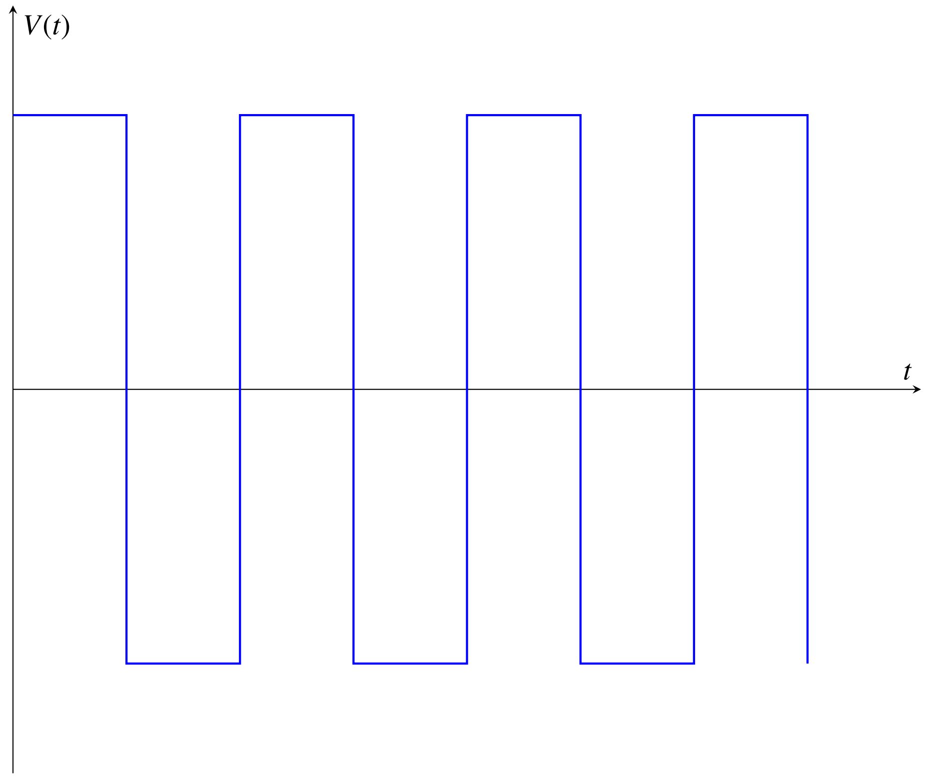
$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & n \in \mathbb{Z}^+ \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, & n \in \mathbb{Z}^- \\ \frac{a_0 + ib_0}{2}, & n = 0 \end{cases}$$

Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη να αποδειχθεί ότι:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t) e^{\frac{-in\pi t}{L}} \, \mathrm{d}t$$

5.1 Παράδειγμα

$V(t)$ τετραγωνική συνάρτηση



Θα βρω την **εκθετική** σειρά της $f(t)$.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot e^{-int}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{0}(\pi)1\cdot e^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} e^{-int}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} e^{-int}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{e^{-int}}{in}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{e^{-int}}{in}\right|_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{in} - \frac{e^{-in\pi}}{in} - \frac{e^{-in\pi}}{in} + \frac{1}{in}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{in} - \frac{2\cos(n\pi)}{in}\right) \\
c_n &= \frac{i}{n\pi}\cdot\left(1-\cos n\pi\right)
\end{aligned}$$

n	c_n
-2	0
-1	$\frac{2i}{\pi}$
0	0
1	$\frac{-2}{\pi}$
2	0
3	$\frac{-2i}{3\pi}$

Άρα:

$$f(t) = \cdots + \frac{2i}{3\pi}e^{i3t} + \frac{2i}{\pi}e^{-it} - \frac{2i}{\pi}e^{it} - \frac{2i}{3\pi}e^{i3t} + \cdots$$

Ερωτήματα για τον αναγνώστη:

1. Πότε έχει η τριγωνομετρική σειρά μόνο ημίτονα/μόνο συνημίτονα;
2. Πότε έχει η εκθετική σειρά μόνο πραγματικούς/μόνο εκθετικούς όρους;

5.2

Ορισμός

Συμβολίζω με $\mathfrak{F}_L$ το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet (με ημιπερίοδο L)

Θεώρημα

Το $\mathfrak{F}_L$ είναι διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη Έστω $f, g \in \mathfrak{F}_L$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$. Θα δείξω ότι $\kappa f + \lambda g \in \mathfrak{F}_L$.

Πράγματι

1. Αν οι f, g είναι ορισμένες στο $[-L, L]$ τότε και η $\kappa f + \lambda g$ είναι ορισμένη στο $[-L, L]$.

2.
$$\begin{aligned}(\kappa f + \lambda g)(t + 2L) &= \kappa f(t + 2L) + \lambda g(t + 2L)\\ &= \kappa f(t) + \lambda g(t)\\ &= (\kappa f + \lambda g)(t)\end{aligned}$$

   Άρα η $\kappa f + \lambda g$ έχει περίοδο $2L$.

3. Αν η f και η g είναι τμ. συνεχείς στο $[-1, 1]$, τότε και η $\kappa f + \lambda g$ είναι τμ. συνεχείς.

Από τα 1,2,3, η $\kappa f + \lambda g \in \mathfrak{F}_L$.

Θεώρημα

Το σύνολο $\left\{e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ είναι μια ορθογώνια βάση του $\mathfrak{F}_L$.

Δηλαδή κάθε $f(t) \in \mathfrak{F}_L$ μπορεί να γραφεί:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Επιπλέον $\forall n, m,\ m \neq n\ e^{\frac{in\pi t}{L}} \perp e^{\frac{im\pi t}{L}}$
Δηλαδή:

$$e^{\frac{im\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{in\pi t}{L}} = 0$$

Δηλαδή:

$$\int_{-L}^{L} e^{\frac{im\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{in\pi t}{L}}\, \mathrm{d}t = 0$$

Για να ορίσω το εσωτερικό γινόμενο, θέλω $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_n x_n \bar{x}_n = \sum (x_n)^2$

$$f \cdot g = \int_{-L}^{L} f(t)\overline{g(t)}\, \mathrm{d}t$$

Άρα

$$e^{\frac{im\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{in\pi t}{L}} = \int_{-L}^{L} e^{\frac{im\pi t}{L}} e^{\frac{in\pi t}{L}}\, \mathrm{d}t = \int_{-L}^{L} e^{\frac{i(m-n)\pi t}{L}}\, \mathrm{d}t = \begin{cases} 2L, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

- $\mathfrak{F}_L$ το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν Dirichlet
- Το $\mathfrak{F}_L$ είναι ΔΧ
- Το $\left\{e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\}_{n\mathbb{Z}}$ είναι μια ορθογώνια βάση του $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$
- Το $\left\{\cos \frac{in\pi t}{L}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\sin \frac{in\pi t}{L}\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ορθογώνια βάση του $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$
- $\underbrace{f(t)}_{\text{περιοδική, με ημιπερίοδο } L} = \sum_{n=-\infty^{\infty}} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$, με

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) e^{\frac{in\pi t}{L}}\, \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\vec{x} = [x_1 x_2 x_3] &= x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3} \\ &= \text{Proj}(\vec{x},\vec{e_1}) + \text{Proj}(\vec{x},\vec{e_2}) + \text{Proj}(\vec{x},\vec{e_3}) \\ &= \sum_{n=1}^{3} \vec{x}\cdot\vec{e_n}\cdot\frac{\vec{e_n}}{\|\vec{e_n}\|}\end{aligned}$$

Άρα:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty^\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} = \sum_{n=-\infty^\infty} \text{Proj}\left(f(t), e^{\frac{in\pi t}{L}}\right)$$

όπου $\text{Proj}\left(f(t), e^{\frac{in\pi t}{L}}\right) = f(t) \bullet e^{\frac{in\pi t}{L}} \frac{e^{\frac{in\pi t}{L}}}{\left\|e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\|}$

$$\begin{aligned}f(t)\bullet e^{\frac{in\pi t}{L}} &= \int_{-L}^{L} f(t)\cdot\overline{e^{\frac{in\pi t}{L}}}\,\mathrm{d}t \\ \left\|e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\| &= \int_{-L}^{L} e^{\frac{in\pi t}{L}}\cdot e^{\frac{-in\pi t}{L}}\,\mathrm{d}t = 2L\end{aligned}$$

Θεώρημα 5.1: Plancherel

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_n c_n\overline{r_n}$$

Η $\begin{cases} f(t) &= \sum_n c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \\ f(t) &= \sum_n r_n e^{\frac{in\pi t}{L}}\end{cases}$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}\right)\overline{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{\frac{im\pi t}{L}}\right)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}\overline{r_m e^{\frac{im\pi t}{L}}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n\bar{r}_m \underbrace{\int_{-L}^{L} e^{\frac{i(n-m)\pi t}{L}}\,\mathrm{d}t}_{\begin{cases}0 & m\neq n\\ 2L & m=n\end{cases}} \\ &= \frac{1}{2L}2L\sum_n c_n\bar{r}_n\end{aligned}$$

Γενικά:

$$f(t) \leftrightarrow \vec{c} = [\dots\ c_{-1}\ c_0\ c_1\ c_2\ \dots]$$

(με την επιφύλαξη ότι σε πεπερασμένο αριθμό σημείων μπορεί να αλλάζει η τιμή της συνάρτησης)

Σύμφωνα με το θεώρημα:

$$\begin{aligned}f(t) &\leftrightarrow \vec{c}\\ g(t) &\leftrightarrow \vec{r}\\ \frac{1}{2L}f\bullet g &= \vec{c}\bullet\vec{r}\end{aligned}$$

Θεώρημα 5.2: Πόρισμα (Parseval)

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \sum_n |c_n|^2$$

Θεώρημα 5.3

Αν $f(t) \in \mathfrak{F}_L$ και $f(t) = \sum_n c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$, τότε:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_n c_n \frac{in\pi}{L} e^{\frac{in\pi t}{L}}$$
$$\int f(t) = \sum_n c_n \frac{L}{in\pi} e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Τα ίδια για ημίτονα και συνημίτονα

Παράδειγμα Δίνεται η $f(t) = \begin{cases} |t| & t \in [-\pi, \pi] \\ \text{περιοδική επέκταση} & t \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$ Να βρεθεί η Σειρά (Fourier) της $f(t)$.

Λύση Αφού λοιπόν $g(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin t + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots\right)$, τότε:

$$f(t) = c - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2}\right)$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = c$$

Άρα τελικά:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2}\right)$$

Παρατηρώ ότι η f έχει ασθενέστερες υψηλές συχνότητες από τη g.

Παράδειγμα Να υπολογιστεί το:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

Είναι

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} + \frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5}\right)$$
$$1 = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right) = S_1$$

Παράδειγμα Να υπολογιστεί το:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Λύση

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$$
$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Κεφάλαιο 6 Κεφάλαιο 9: Μετασχηματισμός Φουριερ

Θεώρημα

Έστω ότι η $f(t)$ ικανοποιεί τα εξής:

1. Τις συνθήκες Dirichlet $\forall L \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ (δηλ. η $f(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη)

Τότε:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

όπου:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Απόδειξη Δίνεται η $f(t)$. Διαλέγω τυχόν t και ορίζω την $f_T(t) = f(t) \quad \forall t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, που έχει σειρά Fourier:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{\frac{in2\pi t}{T}}$$

όπου

$$c(n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{in2\pi t}{T}}\,\mathrm{d}t$$

Θέτω $\delta\omega = \frac{2\pi}{T},\ \omega = n \cdot \delta\omega = \frac{2n\pi}{T}$

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{in2\pi t}{T}}\,\mathrm{d}t \right) e^{\frac{in2\pi t}{T}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \right) e^{\frac{in2\pi t}{T}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \right) e^{i\omega t} \delta\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t \right)}^{F(\omega)} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Την $F(\omega)$ την ονομάζουμε **Fourier μετασχηματισμένη** της $f(t)$, και γράφουμε:

$$\mathscr{F}\Big(f(t)\Big) = F(\omega)$$