

<http://users.auth.gr/natreas>

Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5

Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6

Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marjden (πιο μαθηματικό)

Μέρος I

Ατρέας

Μιγαδικοί Αριθμοί

γεωμετρική παράσταση μιγαδικού

$$\text{Έστω } \mathbb{C} = \left\{ z = \overbrace{(x, y)}^{(x, y)}; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $z_2 = (x_2, y_2)$, τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο $\lambda \in \mathbb{R}$ με μιγαδικό z

Αν $z = (x, y)$, τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

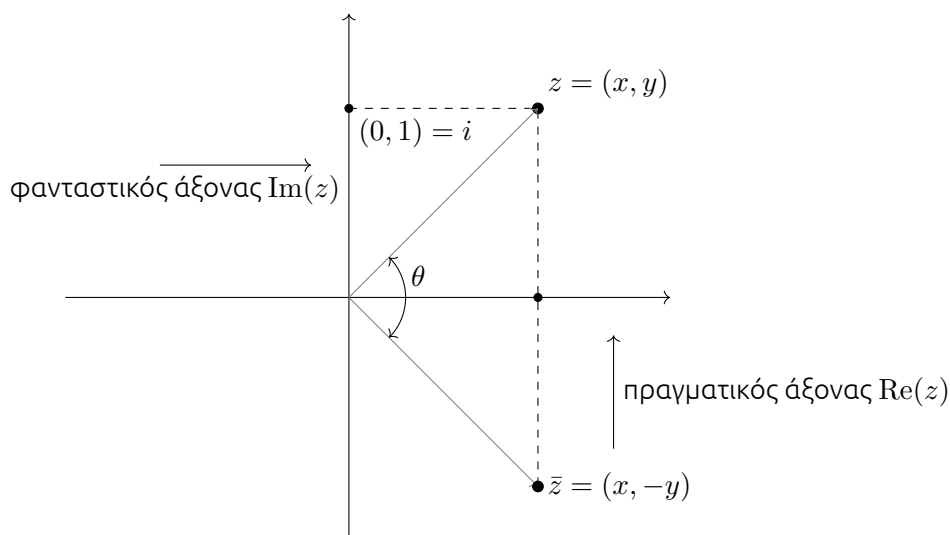
Αν $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του \mathbb{C} είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{1 \cdot 1} A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

- $(x, 0), (y, 0) \in A \implies (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in A$
- $(x, 0)(y, 0) = (xy, 0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$1 = (1, 0)$$

$$x = (x, 0)$$

Ορίζω:

$$i = (0, 1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Έτσι:

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$\stackrel{x=(x,0)}{=} x \cdot 1 + yi$$

$$\stackrel{i=(0,1)}{\implies} \boxed{z = x + iy}$$

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z = (x, y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\stackrel{\text{πολικές}}{=} \stackrel{\text{του } (x,y)}{\rho \cos \theta + i \rho \sin \theta =}$$

$$= \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \tag{1}$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$z = |z| \underbrace{(\cos \theta + i \sin \theta)}_{e^{i\theta}} = |z| \cdot e^{i\theta}$$

όπου στο εξής:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}$$

$$\boxed{\text{τύπος του Euler}}$$

Τελικά:

$$\boxed{z = |z| e^{i\theta}} \text{ (πολική μορφή μιγαδικών)}$$

Σημείωση: $\cos \theta + i \sin \theta$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{σειρές}}{\underset{\text{McLaurin}}{=}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \\ & \stackrel{i^2 = -1}{=} \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \right) \\ & = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta} \end{aligned}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα $\text{Arg} z$ (μη μηδενικού) μιγαδικού z να είναι η γωνία θ που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του \mathbb{C} με την ημιευθεία OA , όπου A το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του $z = x + iy$.

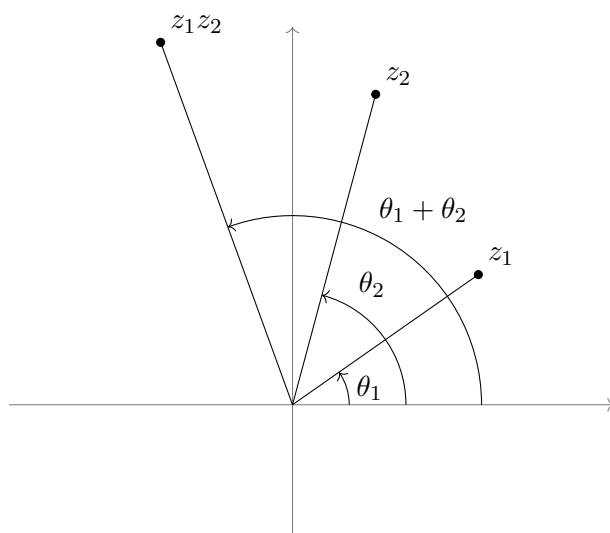
Έτσι:

$$z = |z|e^{i\text{Arg} z} \quad \text{πολική μορφή του } z$$

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\text{Arg} z_1} |z_2|e^{i\text{Arg} z_2}$$

$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2)}}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} \\ &= \left| \frac{z_1}{z_2} \right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$



Ιδιότητα: $z\bar{z} = |z|^2$

Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

π.χ.

$$f(z) = z^2 \implies f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{Re}(f)} + i \underbrace{(2xy)}_{\text{Im}(f)}$$

$$\text{γεωμετρική} \\ \text{μορφή} \quad (x^2 - y^2, 2xy)$$

Τελικά: $\boxed{f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)} \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

π.χ.

$$f(z) = \frac{1}{|z|\bar{z}} \stackrel{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z}$$

$$\stackrel{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\stackrel{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x, y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \stackrel{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

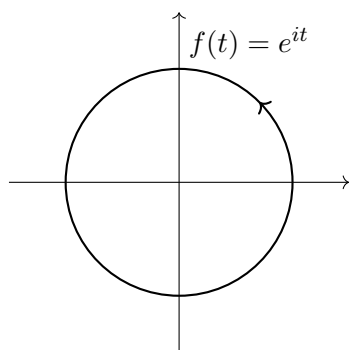
$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιν. μεταβλ.}} \xleftrightarrow{1-1} \begin{matrix} \text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \end{matrix}$$

όπου u, v πραγμ. συναρτ. 2 μεταβλητών

Υπάρχουν $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής
π.χ

$$f(t) = e^{it}, t \in (0, \pi] \\ = \cos t + i \sin t$$

$$t \rightarrow (\cos t, \sin t) \quad \text{καμπύλη } x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$



Η γραφ. παράσταση της $f(t) = e^{it}$, $t \in (-\pi, \pi)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0, 0)$ με αντισωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1, t) = (1, 0) + t(0, 1)$$

Μέρος II

Κεχαγιάς

Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

Μιγαδικοί αριθμοί

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$x, y \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1$$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$

$$= x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_1y_2 + i^2x_2y_1$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

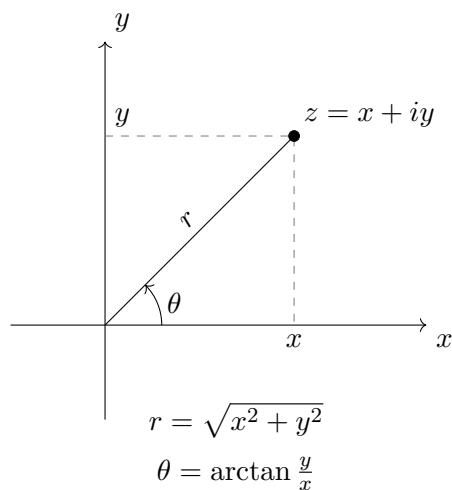
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\operatorname{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow \text{μέτρο του } z$$

γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ. $z = x \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$)

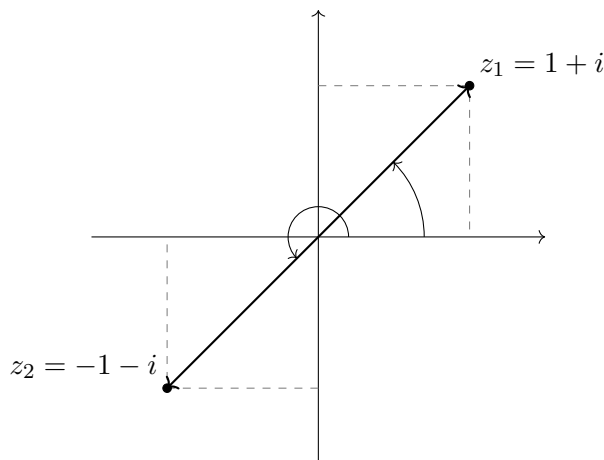
$$\begin{aligned} z &= x + iy = r \cdot \cos \theta + ir \sin \theta \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \quad (\text{Euler}) \end{aligned}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ διότι}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \cos \theta + ir \sin \theta \end{aligned}$$



$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}e^{i(-3\pi/4)} = \sqrt{2}e^{i13\pi/4}$$

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Γενικά: } -1 - i = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Συναρτήσεις

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z = x + iy$$

$$\text{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^\circ \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \quad \theta_0 = \arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)$$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$$

Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση $\arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \text{mod}(z) \cdot e^{i\text{Arg}(z)} \\ &= \text{mod}(z) \cdot e^{i(\text{Arg}(z) + 2k\pi)} \end{aligned}$$

$$z_1 = \text{mod}(z_1)e^{i\text{Arg}(z_1)}$$

$$z_2 = \text{mod}(z_2)e^{i\text{Arg}(z_2)}$$

$$z_1 z_2 = \text{mod}(z_1)\text{mod}(z_2)e^{i(\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2))}$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \text{ επειδή}$$

$$\text{Arg}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}} e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) = \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi$$

Γενικά, αν $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, τότε:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$$e^z, \log(z)$$

$$e^z \stackrel{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\begin{aligned} \text{Ήξερα } e^x &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ e^{iy} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \end{aligned} \cdot$$

Τώρα η νέα συνάρτηση $e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

Παρ.

$$\begin{aligned} e^{1+i} &= e e^i = e \cdot (\cos 1 + i \sin 1) \\ &= e \cdot \cos 1 + i \cdot e \cdot \sin 1 \end{aligned}$$

$$\text{Re}(e^{1+i}) = e \cos 1$$

$$\text{Im}(e^{1+i}) = e \sin 1$$

$$\log(e) = 1$$

$$\log(-1) = \log\left(e^{i(\pi+2k\pi)}\right) = i(\pi + 2k\pi)$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\theta$$

Ορίζω

Πλειότιμη $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$

Μονότιμη $\text{Log}(z) = \ln(|z|) + i\text{Arg}(z)$ είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$\begin{aligned}\log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2k\pi)}\right) \\ &= \log\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\end{aligned}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}$$