

```
\draw[->] (0,-1) -- (0,2);
\draw[->] (-2,0) -- (2,0);

\draw [blue, very thick]
plot [smooth, tension=1, domain=-2:2, samples=9] (\x,{1+rand/2}) node[below];
```

Την Τρίτη μάθημα 8:30 χωρίς διάλειμμα
Σήμα - σύστημα

$$\underbrace{g}_{\text{εξαρτημένη}} = f(\underbrace{t}_{\text{ανεξάρτητη}}) \quad g = f(\vec{r}, t) \quad \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Αναλογικό

Αν t συνεχής $\in \mathbb{R}$
και y συνεχής $\in \mathbb{R}$

```
draw[->] (0,-1) -- (0,2); draw[->] (-2,0) -- (2,0);

draw[blue, very thick] plot [smooth, tension=1, domain=-2:2, samples=9] (x,1+rand/2) node[below] g(x,y);
```

Διακριτού χρόνου / Διακριτό (discrete)

t διακριτό $\rightarrow \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$
 g συνεχής $\in \mathbb{R}$

```
[scale=0.7] draw[->,gray] (0,0) -- (0,4.5); draw[->,gray] (-6,0) -- (6,0);
draw(-5,0) node[below] -5; filldraw[black] (-5,0) -- (-5,(1+rand)*2) circle (1.5pt); draw(-4,0) node[below] -4; filldraw[black] (-4,0) -- (-4,(1+rand)*2) circle (1.5pt); draw(-3,0) node[below] -3; filldraw[black] (-3,0) -- (-3,(1+rand)*2) circle (1.5pt); draw(-2,0) node[below] -2; filldraw[black] (-2,0) -- (-2,(1+rand)*2) circle (1.5pt); draw(-1,0) node[below] -1; filldraw[black] (-1,0) -- (-1,(1+rand)*2) circle (1.5pt); draw(0,0) node[below] 0; filldraw[black] (0,0) -- (0,(1+rand)*2) circle (1.5pt); draw(1,0) node[below] 1; filldraw[black] (1,0) -- (1,(1+rand)*2) circle (1.5pt); draw(2,0) node[below] 2; filldraw[black] (2,0) -- (2,(1+rand)*2) circle (1.5pt); draw(3,0) node[below] 3; filldraw[black] (3,0) -- (3,(1+rand)*2) circle (1.5pt); draw(4,0) node[below] 4; filldraw[black] (4,0) -- (4,(1+rand)*2) circle (1.5pt); draw(5,0) node[below] 5; filldraw[black] (5,0) -- (5,(1+rand)*2) circle (1.5pt); ;

draw(0,-1) node[below] 7 ;
```

Κβαντισμένο

$n \in \mathbb{Z}$
 g διακριτή

```
draw[->,gray] (0,0) -- (0,4.5); draw[->,gray] (-4,0) -- (4,0);
draw[gray,dashed] (-4,1) -- (4,1); draw[gray,dashed] (-4,2) -- (4,2); draw[gray,dashed] (-4,3) -- (4,3);

filldraw[black] (-3,0) node[below] -3 -- (-3,1) circle (1.5pt); filldraw[black] (-2,0) node[below] -2 -- (-2,2) circle (1.5pt); filldraw[black] (-1,0) node[below] -1 -- (-1,1) circle (1.5pt); filldraw[black] ( 0,0) node[below] 0 -- (0,0) circle (1.5pt); filldraw[black] ( 1,0) node[below] 1 -- (1,1.5) circle (1.5pt); filldraw[black] ( 2,0) node[below] 2 -- (2,3) circle (1.5pt); filldraw[black] ( 3,0) node[below] 3 -- (3,2) circle (1.5pt);

draw(1,1) node[cross=10pt,red!50!black] ;
```

Στοχαστικό Περιέχει και τις τρεις κατηγορίες

0.1 Σύστημα

```
[scale=0.8] draw(-1,1) rectangle (3,-1) node[midway] system;

draw[->] (-5,0) -- (-1,0) node[midway,above] x(t) node[midway,below] input signal; draw[->] (3,0) -- (7,0) node[midway,above] y(t) node[midway,below] output signal;
```

0.2 Περιοδικά σήματα

Αν $\exists T \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = x(t + T)$ τότε $x(t)$ **περιοδικό σήμα** με περίοδο T .
Ή θα είναι 0, ή θα συνεχιστεί για πάντα.

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t) dt \quad \forall t$$

Η σύνθεση μιας συνάρτησης με μια περιοδική συνάρτηση είναι περιοδική;

Απόδ. Έστω g μία περιοδική συνάρτηση:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(g(x+T)) = \\ &= (f \circ g)(x+T)\end{aligned}$$

0.3 Συμμετρίες

- Αν $x(t) = x(-t) \forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **άρτια συνάρτηση** (even function).
- Αν $x(t) = -x(t) \forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **περιττή συνάρτηση** (odd function).

$$\forall x(t) \quad \exists x_0(t), x_e(t) : x(t) = x_e(t) + x_0(t)$$

Απόδ.

$$\begin{aligned}x_e(t) &= \frac{x(t) + x(-t)}{2} \\ x_o(t) &= \frac{x(t) - x(-t)}{2}\end{aligned}$$

$$\underbrace{x_e y_e}_{\text{άρτια}} = z_e$$

$$x_o y_o = z_e$$

$$x_e y_o = z_o$$

$$\int_{-A}^A x_0(t) dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_0(t) dt = ? \text{ (εξαρτάται)}$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A x_0(t) dt = 0 \quad (\text{principal Cauchy value})$$

Χαρακτηριστικά σήματα

1) Εκθετικό σήμα

$$x(t) = ce^{at} \quad a \in \mathbb{R} \quad c > 0$$

```
draw[>,gray] (0,0) -- (0,4); draw[>,gray] (-2,0) -- (4,0) node[below right] t;
draw(1,3) node c > 0;

draw[xscale=3,domain=-0.7:1.3,smooth,variable=x,blue] plot (x,exp(x)); draw[xscale=3,domain=1.3:-1.2,dashed,smooth,variable=x,blue] plot (x,exp(-x));
draw(4,1) node[anchor=north east,blue] a < 0; draw(4.5,3) node[anchor=north east,blue] a > 0;
```

$$x(t) = ce^{(\sigma + j\omega)t} = ce^{\sigma t} e^{j\omega t} = ce^{\sigma t} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

2) (Συν)ημιτονοειδή σήματα

$$x(t) = A \cos(\omega t \pm \phi) = a \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t + \phi)} \right\} = A \frac{e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}}{2}$$

```
[scale=1.3] draw[>,gray] (0,-2) -- (0,2); draw[>,gray] (-2,0) -- (4,0) node[below right] t;

draw[scale=1,domain=0:4,samples=200,smooth,variable=x,blue,thick] plot (x,sin((x)*20)*exp(-x));
```

3) Δέλτα Dirac $\delta(t)$

```
[scale=1.3] draw[>,gray] (0,-2) -- (0,2) node[black,below right]  $\delta(t)$ ; draw[>,gray] (-1,0) -- (1,0) node[below right]  $t$ ; draw(0,0) node[below left] 0;
draw[very thick,blue,>] (0,0) -- (0,1); [scale=1.3] filldraw[fill=green!20] (-0.5,0) rectangle (0.5,1) node[above right]  $1/T$  node[midway,right] 1;
draw[>,gray] (0,-2) -- (0,2); draw[>,gray] (-1.5,0) -- (2,0);
draw(current bounding box.east) node[above]  $\lim_{T \rightarrow 0} P_T(t) = \delta(t)$ ; [scale=1.3] filldraw[scale=1,domain=-2:2,samples=200,smooth,variable=x,fill=green!20]
plot (x,exp(-x*x)) node[above right]  $G_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$  node[midway,above left] 1;
draw[>,gray] (0,-2) -- (0,2); draw[>,gray] (-2,0) -- (2,0);
draw[<->,gray] (0.7,exp(-pow(0.7,2))) -- (-0.7,exp(-pow(0.7,2))) node[above left]  $\sigma$ ;
draw(current bounding box.east) node[below left]  $\lim_{T \rightarrow 0} G_\sigma(t) = \delta(t)$ ;
```

Ορ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0) \quad \forall f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = f(t)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

Ιδιότητες της $\delta(t)$

1. Κλιμάκωση

$$a \in \mathbb{R} : \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

Απόδ.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \boxed{\delta(at)} dt}_{\substack{at = \xi \\ dt = \frac{d\xi}{a}}} = \int_{-\infty(a)}^{\infty(a)} \phi\left(\frac{\xi}{a}\right) \delta(\xi) \frac{d\xi}{a} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi\left(\frac{\xi}{a}\right)}{|a|} \delta(\xi) d\xi = \frac{\phi(0)}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \boxed{\frac{\delta(t)}{|a|}} dt$$

$$2. f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$3. f(t)\delta(t - \xi) = f(\xi)\delta(t - \xi)$$

```
[scale=0.8] draw(-1,1) rectangle (3,-1) node[midway] system;
draw[>] (-5,0) -- (-1,0) node[midway,above]  $x(t)$  node[midway,below] input signal; draw[>] (3,0) -- (7,0) node[midway,above]  $y(t)$  node[midway,below]
output signal;
```

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$\forall x_1(t) x_n(t)$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}\{x_2(t)\}$$

Για $\text{const } a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \\ y(t) &= \mathcal{L} \{x(t)\}\end{aligned}$$

ανν

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

τότε

\mathcal{L} : γραμμικό σύστημα

- $g(t) = \mathcal{L} \{x(t)\}$
 $x'(t) = x(t - \tau)$
ανν $y'(t) = \mathcal{L} \{x'(t)\} = \mathcal{L} \{x(t - \tau)^2\} = y(t - \tau)$
τότε το σύστημα \mathcal{L} είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.

```
[scale=0.8] draw(-1,-1) rectangle (3,1) node[above right]  $\mathcal{L}$  {} node[midway] & AKM;
draw[>-] (-5,0) -- (-1,0) node[midway,above]  $\delta(t)$  node[midway,below] input signal; draw[>-] (3,0) -- (14,0) node[midway,above]  $h(t)$  node[midway,below]
(impulse response);
```

Υποστηρίζω ότι ένα γραμμικό & AKM σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική απόκριση $h(t)$.

Απόδ. Από παραπάνω, γνωρίζουμε ότι $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau) dt$

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L} \{y(t)\} = \mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau) d\tau \right\} \\ &\stackrel{\text{linearity}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} \{x(\tau)\delta(t - \tau)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L} \{\delta(t - \tau)\} d\tau \\ &\stackrel{\text{AKM}}{\stackrel{\text{TSI}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{h(t - \tau)}_{\text{linear time-shift invariant}} d\tau\end{aligned}$$

- $\delta(t) = \delta(-t)$ άρτια συνάρτηση
- $\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$, για την οποία αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \phi(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(t) \Big|_{t=0}$$

0.3.1 Βηματική Συνάρτηση (Unit Step Function)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \phi(t) dt = \mathcal{N}_u \{ \phi(t) \} = \int_0^{\infty} \underbrace{\phi(t)}_{\text{number}} dt$$

```
[xlabel=t ,ylabel=u(t) ,axis lines = center ,ymax=1.5 ,ytick=0,1 ,xtick=0,1 ] addplot+[const plot, no marks,ultra thick] coordinates (-4,0) (0,1)
(4,1);
```

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_0^\infty \delta(t - \xi) d\xi$$

0.3.2 Ράμπα

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = tu(t)$$

```
draw[->] (0,-0.5) -- (0,4) node[right] r(t); draw[->] (-2,0) -- (4,0) node[below] t;
draw(0,0) node[below right] 0;
draw[very thick,blue] (-2,0) -- (0,0) -- (3.5,3.5);
```

$$u(t) = \frac{d}{dt}r(t)$$

0.3.3 Ορθογωνικός παλμός (Rectangular Pulse function)

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

```
draw[->] (0,-0.5) -- (0,3) node[right] r(t); draw[->] (-2,0) -- (2,0) node[below] t;
draw[very thick,blue] (-1,0) node[below,black] -a -- (-1,1.5) node[above left, black] 1 -- (1,1.5) -- (1,0) node[below,black] a;

draw[->] (0,-0.5) -- (0,2); draw[->] (-2,0) -- (3,0) node[below] t;
draw[very thick,blue] (-3,0) -- (-1,0) node[below,black] -a -- (-1,1) -- (3,1) node[above right] u(t+a); draw[->] (0,-0.5) -- (0,2);
draw[->] (-2,0) -- (3,0) node[below] t;
draw[very thick,blue] (-3,0) -- (1,0) node[below,black] a -- (1,1) -- (3,1) node[above right] u(t-a);
```

$$p_a(t) = u(t+a) - u(t-a)$$

$$\frac{d}{dt}p_a(t) = \delta(t+a) - \delta(t-a)$$

```
draw[->] (0,-0.5) -- (0,3) node[right] \frac{d}{dt}p_a(t); draw[->] (-2,0) -- (2,0) node[below] t;
draw[very thick,blue,->] (-1,0) node[below,black] -a -- (-1,1.5) node[above] \delta(t+a);
draw[very thick,blue,->] (1,0) node[above,black] a -- (1,-1.5) node[below] -\delta(t-a);
```

0.3.4 Τριγωνικός Παλμός (Triangular Pulse function)

$$p_{tr,a} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

```
[scale=1.2] draw[->] (0,-0.5) -- (0,2) node[right] p_{tr,a}(t); draw[->] (-2,0) -- (2,0) node[below] t;
draw[very thick,blue] (-2,0) -- (-1,0) node[below,black] -a -- (0,1.5) node[above left, black] 1 -- (1,0) node[below,black] a -- (2,0);
```

$$p_{tr,a}(t) = \frac{1}{a} [r(t+a) + r(t-a) - 2r(t)]$$

0.4 Χαρακτηριστικά Μεγέθη

1) Μέση τιμή (Mean Value)

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

Αν περιοδική τότε

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \frac{1}{T} = \int_0^T x(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt\end{aligned}$$

2) Ενεργός τιμή (Root Mean Square Value)

$$\overline{\overline{x(t)}} = \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \right]^{1/2}$$

Αν ημιτονοειδές σήμα $\bar{x}(t) = \frac{x_{\max}}{\sqrt{2}}$

3) Ενέργεια - Ισχύς

- Στιγμιαία ισχύς (Instant power)

$$p(t) = x^2(t)$$

- Μέση ισχύς (Mean power)

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \left(\overline{x(t)} \right)^2$$

- Ενέργεια (Energy)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = (t_2 - t_1) \left(\overline{x(t)} \right)^2$$

$$\text{Σήματα} \begin{cases} \text{Σήμα ενέργειας αν } \lim_{T \rightarrow \infty} W < \infty \\ \text{Σήμα ισχύος αν } \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{p(t)} > 0 \\ \text{Υπάρχουν και σήματα που δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος.} \end{cases}$$

0.5 Συνέλιξη

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$h(t) = \mathcal{L} \{ \delta(t) \}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \underbrace{x(t)}_{\text{είσοδος}} \underbrace{*}_{\text{συνέλιξη}} \underbrace{h(t)}_{\text{κρουστική απόκριση}}$$

Συνέλιξη - Convolution

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

- $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$ **Αντιμεταθετική**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) y(\lambda) [-d\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda = y(t) * x(t)$$

- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$ **Προσεταιριστική**

Παρ.

$$f_1(t) = 2(1 - t) [u(t) - u(t - 1)]$$

$$f_2(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

Γραφική μέθοδος υπολογισμού συνέλιξης

Παρατηρώ ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau) u(t - \xi) u(\phi - \tau) d\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t, \tau) d\tau u(\phi - \xi)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2(1 - \tau)}_{x(\tau)} [u(\tau) - u(\tau + 1)] [u(t - \tau) - u(t - \tau - 2)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) [u(\tau)u(t - \tau) - u(\tau - 1)u(t - \tau) - u(\tau)u(t - \tau - 2) + u(\tau - 1)u(t - \tau - 2)] d\tau \\ &= \int_0^t x(\tau) d\tau u(t) - \int_1^x x(\tau) d\tau u(t - 1) - \int_0^{t-2} x(\tau) d\tau u(t - 2) + \int_1^{t-2} x(\tau) d\tau u(t - 3) \\ &= (2t - t^2)u(t) - [2t - t^2 - 1] u(t - 1) - [2(t - 2) - (t - 2)^2] u(t - 2) + [2(t - 2) - (t - 2)^2 - 1] u(t - 3) \end{aligned}$$

Ex

$$f_1(t) = e^t u(-t)$$

$$f_2(t) = u(t + 2) - u(t + 1)$$

$$f = f_1 * f_2$$

$$\begin{aligned} f &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(-(t - \tau) + 2) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(\tau - t + 2) d\tau \\ &= \int_{t-2}^0 e^{\tau} d\tau u(t - 2) \\ &= e^{\tau} \Big|_{t-2}^0 u(t - 2) \\ &= [1 - e^{t-2}] u(t - 2) \end{aligned}$$