

Την Τρίτη μάθημα 8:30 χωρίς διάλειμμα

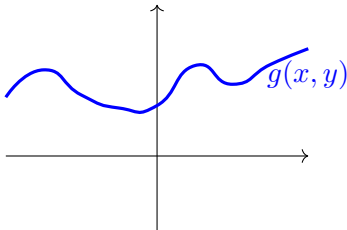
## Σήμα - σύστημα

$$\underbrace{g}_{\text{εξαρτημένη}} = f(\underbrace{t}_{\text{ανεξάρτητη}})$$

$$g = f(\vec{r}, t) \quad \vec{E}(\vec{r}, t)$$

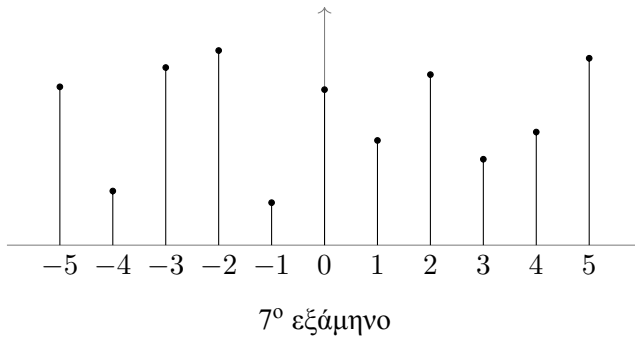
### Αναλογικό

Αν  $t$  συνεχής  $\in \mathbb{R}$   
και  $y$  συνεχής  $\in \mathbb{R}$



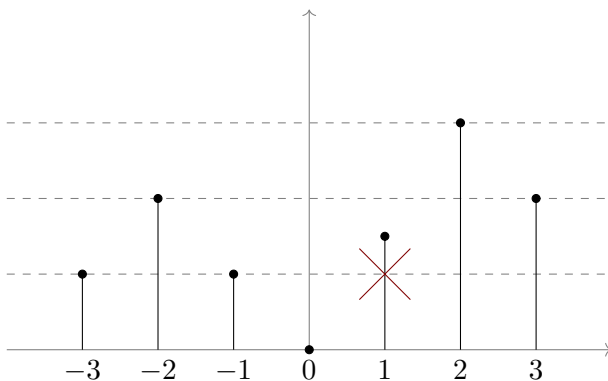
### Διακριτού χρόνου / Διακριτό (discrete)

$t$  διακριτό  $\rightarrow \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$   
 $g$  συνεχής  $\in \mathbb{R}$



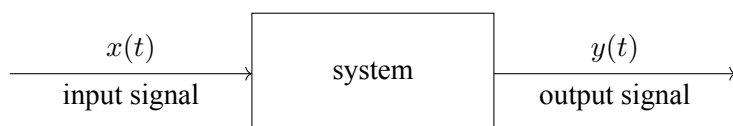
### Κβαντισμένο

$n \in \mathbb{Z}$   
 $g$  διακριτή



**Στοχαστικό** Περιέχει και τις τρεις κατηγορίες

### 0.1 Σύστημα



## 0.2 Περιοδικά σήματα

Αν  $\exists T \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = x(t + T)$  τότε  $x(t)$  **περιοδικό σήμα** με περίοδο  $T$ .  
Ή θα είναι 0, ή θα συνεχιστεί για πάντα.

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t) dt \quad \forall t$$

Η σύνθεση μιας συνάρτησης με μια περιοδική συνάρτηση είναι περιοδική;

**Απόδ.** Έστω  $g$  μία περιοδική συνάρτηση:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(g(x + T)) = \\ &= (f \circ g)(x + T)\end{aligned}$$

## 0.3 Συμμετρίες

- Αν  $x(t) = x(-t) \quad \forall t$  τότε η  $x(t)$  λέγεται **άρτια συνάρτηση** (even function).
- Αν  $x(t) = -x(-t) \quad \forall t$  τότε η  $x(t)$  λέγεται **περιττή συνάρτηση** (odd function).

$$\forall x(t) \quad \exists x_0(t), x_e(t) : x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

**Απόδ.**

$$\begin{aligned}x_e(t) &= \frac{x(t) + x(-t)}{2} \\ x_o(t) &= \frac{x(t) - x(-t)}{2}\end{aligned}$$

$$\underbrace{x_e}_{\text{άρτια}} y_e = z_e$$

$$x_o y_o = z_e$$

$$x_e y_o = z_o$$

$$\int_{-A}^A x_o(t) dt = 0$$

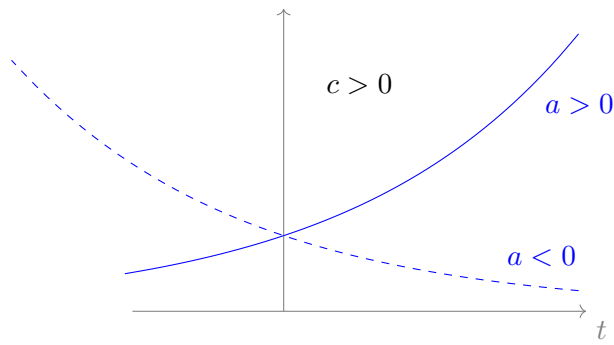
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) dt = ? \text{ (εξαρτάται)}$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A x_o(t) dt = 0 \quad (\text{principal Cauchy value})$$

## Χαρακτηριστικά σήματα

### 1) Εκθετικό σήμα

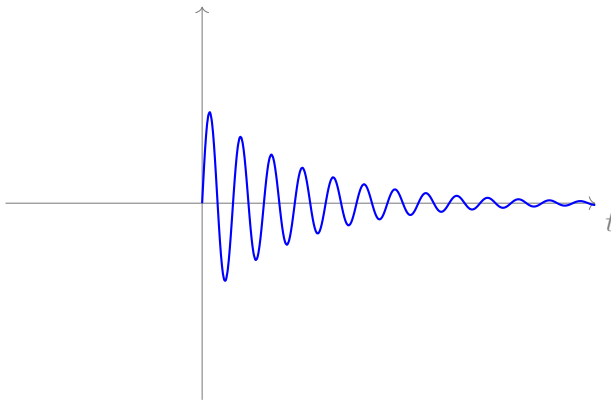
$$x(t) = ce^{at} \quad a \in \mathbb{R} \quad c > 0$$



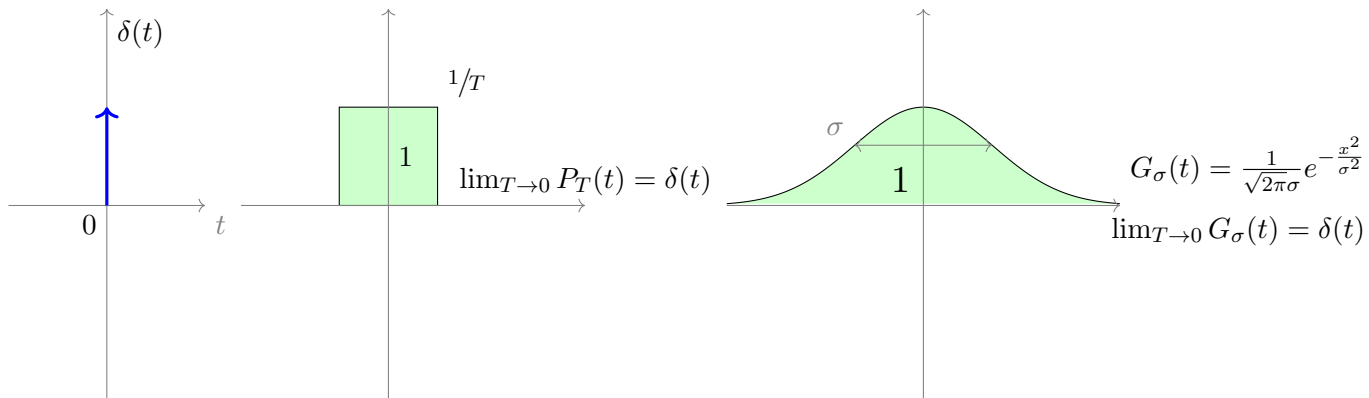
$$x(t) = ce^{(\sigma t + j\omega)t} = ce^{\sigma t} e^{j\omega t} = ce^{\sigma t} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

## 2) (Συν)ημιτονοειδή σήματα

$$x(t) = A \cos(\omega t \pm \phi) = a \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t \pm \phi)} \right\} = A \frac{e^{j(\omega t \pm \phi)} + e^{-j(\omega t \pm \phi)}}{2}$$



## 3) Δέλτα Dirac $\delta(t)$



**Ορ.**

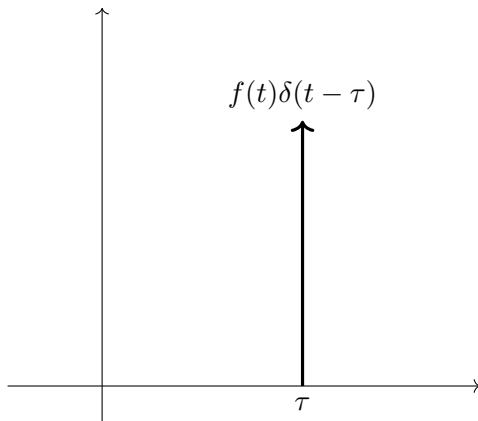
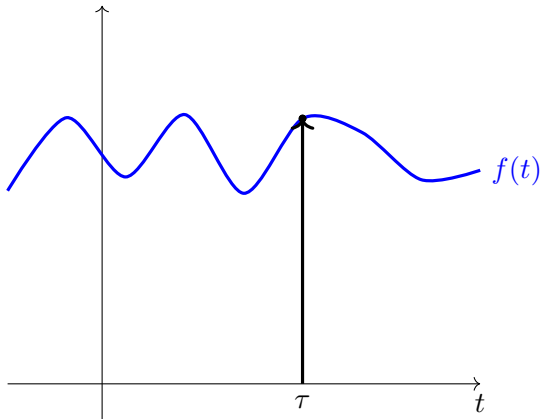
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad \forall f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$



## Ιδιότητες της $\delta(t)$

### 1. Κλιμάκωση

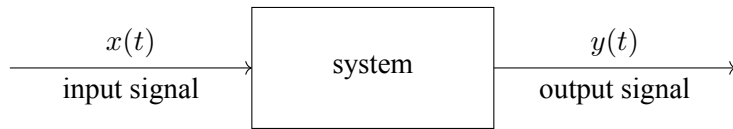
$$a \in \mathbb{R} : \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

**Απόδ.**

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \boxed{\delta(at)} dt}_{\substack{at = \xi \\ dt = \frac{d\xi}{a}}} = \int_{-\infty(a)}^{\infty(a)} \phi\left(\frac{\xi}{a}\right) \delta(\xi) \frac{d\xi}{a} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi\left(\frac{\xi}{a}\right)}{|a|} \delta(\xi) d\xi = \frac{\phi(0)}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \boxed{\frac{\delta(t)}{|a|}} dt$$

$$2. f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$3. f(t)\delta(t - \xi) = f(\xi)\delta(t - \xi)$$



$$y(t) = \mathcal{L} \{x(t)\}$$

$$\forall x_1(t) x_n(t)$$

$$y_1(t) = \mathcal{L} \{x_1(t)\}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L} \{x_2(t)\}$$

Για const  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

$$y(t) = \mathcal{L} \{x(t)\}$$

ανν

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

τότε

$\mathcal{L}$  : γραμμικό σύστημα

- $g(t) = \mathcal{L} \{x(t)\}$

$$x'(t) = x(t - \tau)$$

ανν  $y'(t) = \mathcal{L} \{x'(t)\} = \mathcal{L} \{x(t - \tau)^2\} = y(t - \tau)$

τότε το σύστημα  $\mathcal{L}$  είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.



Υποστηρίζω ότι ένα γραμμικό & AKM σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική απόκριση  $h(t)$ .

**Απόδ.** Από παραπάνω, γνωρίζουμε ότι  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$

$$y(t) = \mathcal{L} \{y(t)\} = \mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau \right\}$$

$$\stackrel{\text{linearity}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} \{x(\tau)\delta(t - \tau)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L} \{\delta(t - \tau)\} d\tau$$

$$\stackrel{\text{AKM}}{\stackrel{\text{TSI}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{h(t - \tau)}_{\text{linear time-shift invariant}} d\tau$$

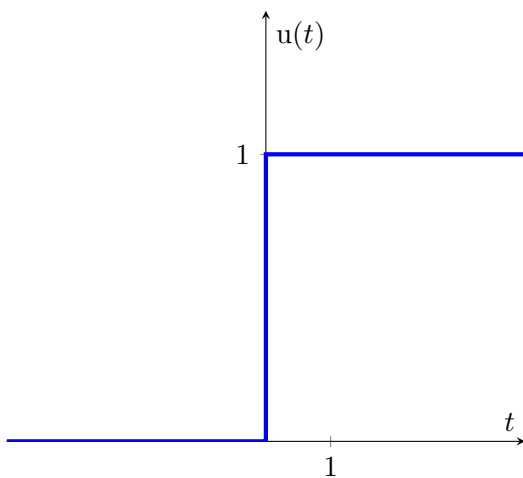
- $\delta(t) = \delta(-t)$  άρτια συνάρτηση
- $\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$ , για την οποία αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \phi(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(t) \Big|_{t=0}$$

### 0.3.1 Βηματική Συνάρτηση (Unit Step Function)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \phi(t) dt = \mathcal{N}_u \{ \phi(t) \} = \int_0^{\infty} \underbrace{\phi(t)}_{\text{number}} dt$$

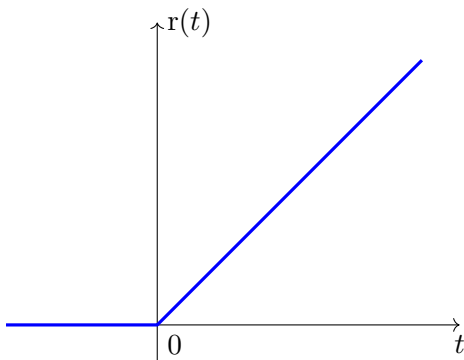


$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \xi) d\xi$$

### 0.3.2 Ράμπα

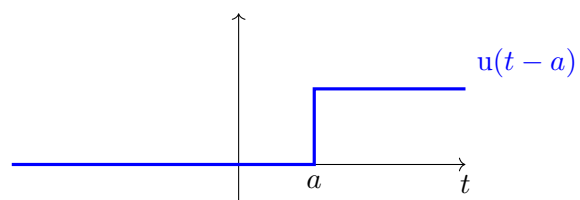
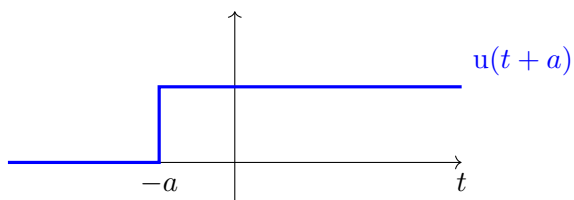
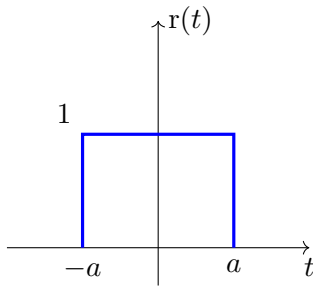
$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = tu(t)$$



$$u(t) = \frac{d}{dt} r(t)$$

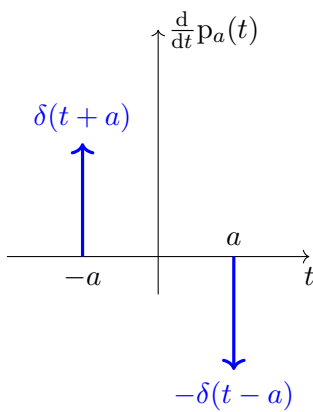
### 0.3.3 Ορθογωνικός παλμός (Rectangular Pulse function)

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$



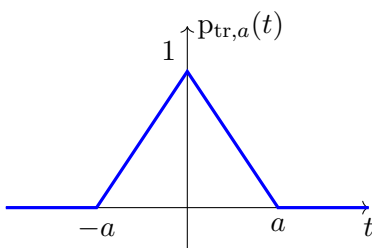
$$p_a(t) = u(t+a) - u(t-a)$$

$$\frac{d}{dt}p_a(t) = \delta(t+a) - \delta(t-a)$$



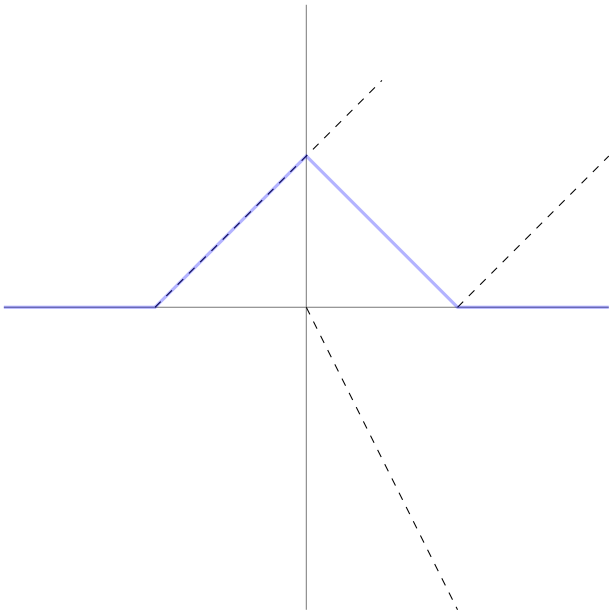
### 0.3.4 Τριγωνικός Παλμός (Triangular Pulse function)

$$p_{tr,a} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$



$$p_{tr,a}(t) = \frac{1}{a} [r(t+a) + r(t-a) - 2r(t)]$$





#### 0.4 Χαρακτηριστικά Μεγέθη

##### 1) Μέση τιμή (Mean Value)

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

Αν περιοδική τότε

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{1}{T} = \int_0^T x(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \end{aligned}$$

##### 2) Ενεργός τιμή (Root Mean Square Value)

$$\overline{\overline{x(t)}} = \left[ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \right]^{1/2}$$

Αν ημιτονοειδές σήμα  $\bar{x}(t) = \frac{x_{\max}}{\sqrt{2}}$

##### 3) Ενέργεια - Ισχύς

- Στιγμιαία ισχύς (Instant power)

$$p(t) = x^2(t)$$

- Μέση ισχύς (Mean power)

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \left( \overline{\overline{x(t)}} \right)^2$$

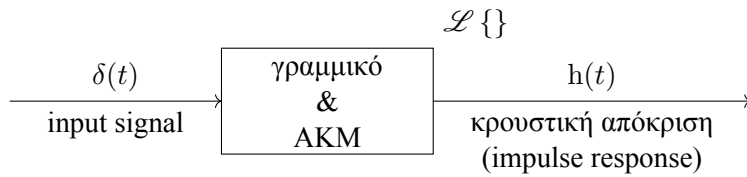
- Ενέργεια (Energy)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = (t_2 - t_1) \left( \overline{\overline{x(t)}} \right)^2$$

$$\text{Σήματα} \begin{cases} \text{Σήμα ενέργειας αν } \lim_{T \rightarrow \infty} W < \infty \\ \text{Σήμα ισχύος αν } \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{p(t)} > 0 \\ \text{Υπάρχουν και σήματα που δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος.} \end{cases}$$

## 0.5 Συνέλιξη

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



$$h(t) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \underbrace{x(t)}_{\text{είσοδος}} \underbrace{*}_{\text{συνέλιξη}} \underbrace{h(t)}_{\text{κρουστική απόκριση}}$$

### Συνέλιξη - Convolution

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

- $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$  **Αντιμεταθετική**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) y(\lambda) [-d\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda = y(t) * x(t)$$

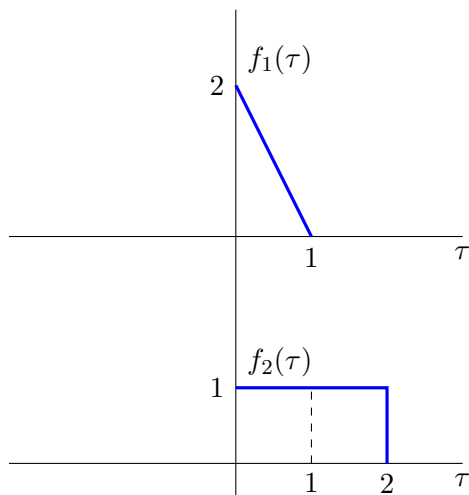
- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$  **Προσεταιριστική**

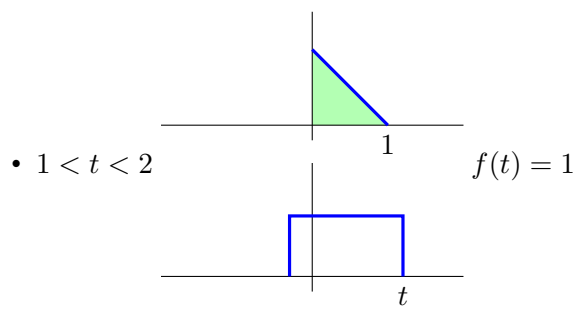
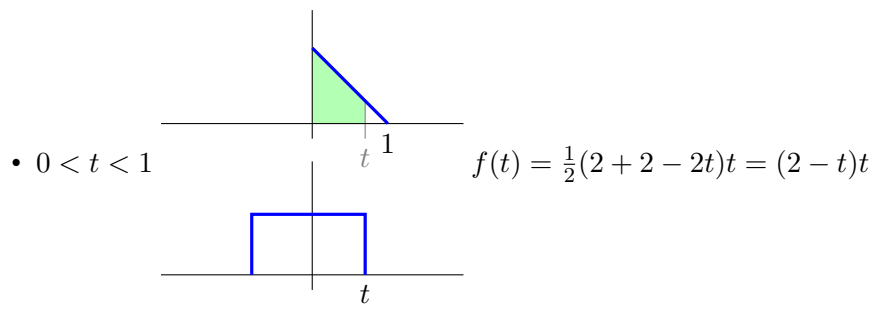
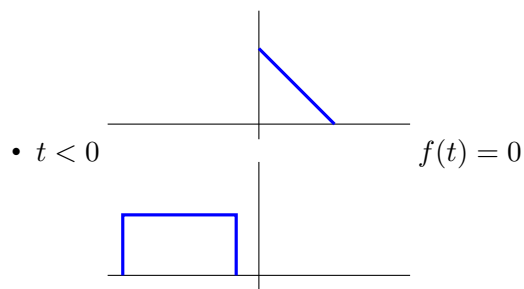
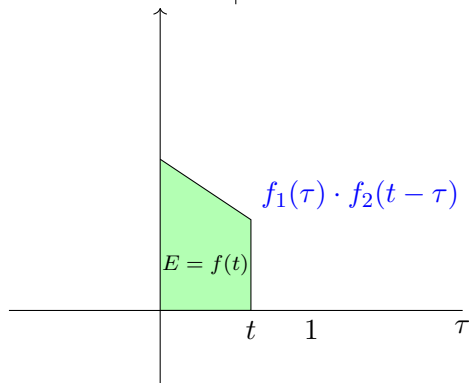
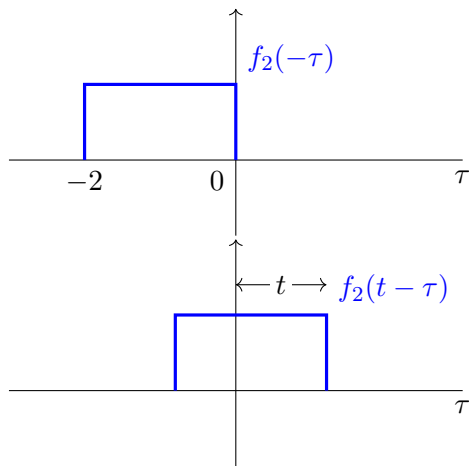
**Παρ.**

$$f_1(t) = 2(1 - t) [u(t) - u(t - 1)]$$

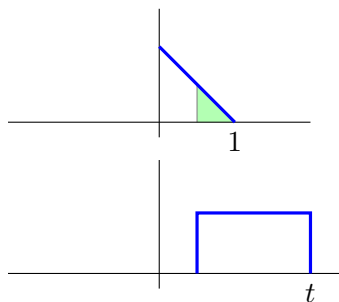
$$f_2(t) = u(t) - u(t - 2)$$

**Γραφική μέθοδος υπολογισμού συνέλιξης**



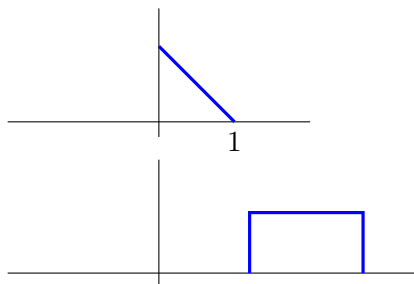


$$\bullet \quad 2 < t < 3$$

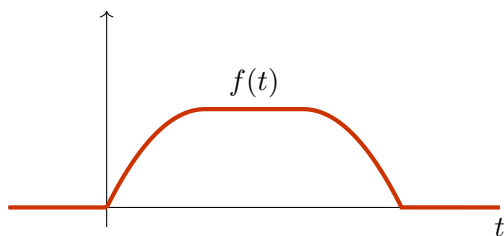


$$f(t) = \frac{(t-1) \cdot 2 \cdot \left(\frac{1-(t-2)}{2}\right)}{2} = (t-1)(3-t)$$

$$\bullet \quad t > 3$$



$$f(t) = 0$$



**Αναλυτική μέθοδος** Παρατηρώ ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau) u(t - \xi) u(\phi - \tau) d\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t, \tau) d\tau u(\phi - \xi)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2(1-\tau)}_{x(\tau)} [u(\tau) - u(\tau+1)] [u(t-\tau) - u(t-\tau-2)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) [u(\tau)u(t-\tau) - u(\tau-1)u(t-\tau) - u(\tau)u(t-\tau-2) + u(\tau-1)u(t-\tau-2)] d\tau \\ &= \int_0^t x(\tau) d\tau u(t) - \int_1^x x(\tau) d\tau u(t-1) - \int_0^{t-2} x(\tau) d\tau u(t-2) + \int_1^{t-2} x(\tau) d\tau u(t-3) \\ &= (2t-t^2)u(t) - [2t-t^2-1]u(t-1) - [2(t-2)-(t-2)^2]u(t-2) + [2(t-2)-(t-2)^2-1]u(t-3) \end{aligned}$$

**Ex**

$$f_1(t) = e^t u(-t)$$

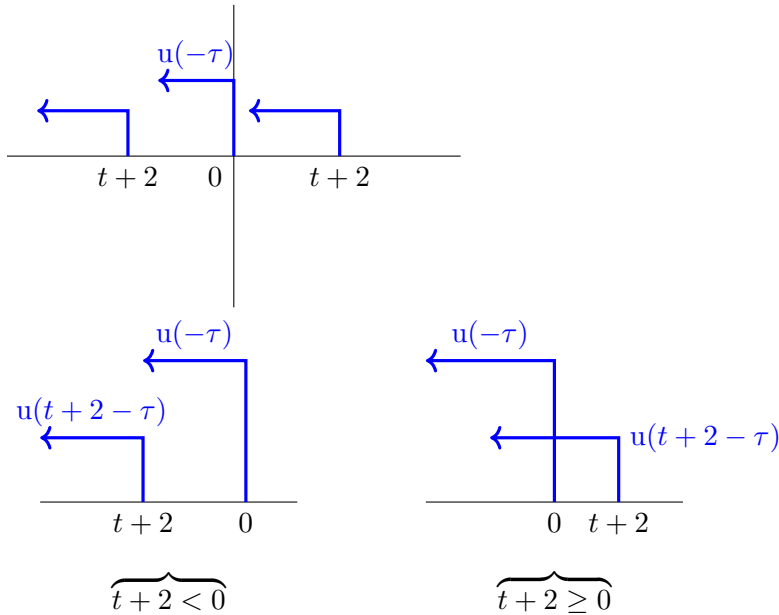
$$f_2(t) = u(t+2) - u(t+1)$$

$$f = f_1 * f_2$$

$$\begin{aligned}
f &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(-(t-\tau)+2) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(\tau-t+2) d\tau \\
&= \int_{t-2}^0 e^{\tau} d\tau u(2-t) \\
&= e^{\tau} \Big|_{t-2}^0 u(2-t) \\
&= [1 - e^{t-2}] u(2-t)
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau) u(\tau - \xi) u(\phi - \tau) d\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t, \tau) d\tau u(\phi - \xi)$$

**Ex.**



$$x(t) = e^t u(-t)$$

$$y(t) = u(t+2)$$

$$\begin{aligned}
z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u[(t-\tau)+2] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(t+2-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} [1 - u(t)] u(t+2-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(t+2-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t+2-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t+2} e^{\tau} d\tau u(t+2 - (-\infty)) \overset{1}{\rightarrow} - \int_0^{t+2} e^{\tau} d\tau u(t+2) \\
&= e^{t+2} - [e^{t+2} - 1] u(t+2)
\end{aligned}$$

**Ex.**

$$x(t) = e^t u(-t)$$

$$y(t) = u(t+2) - u(t+1)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) [u(t-\tau+2) - u(t-\tau+1)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(t-\tau+1) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} [1 - u(\tau)] u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} [1 - u(\tau)] u(t-\tau+1) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(t-\tau+1) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t-\tau+1) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau} d\tau - \int_0^{t+2} e^{\tau} d\tau u(t+2) + \int_0^{t+1} e^{\tau} d\tau u(t+1) \\ &= \int_{t+1}^{t+2} e^{\tau} d\tau - [e^{t+2} - 1] u(t+2) + [e^{t+1} - 1] u(t+1) \end{aligned}$$

$\exists h(t)$  ανν LTI

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

Έστω ότι η  $x(t) = e^{j\omega t}$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= x(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{h(t) \xrightarrow{FT} H(\omega)} \end{aligned}$$

$$x(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t}$$

$$y(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} H(\omega_1) + A_2 e^{j\omega_2 t} H(\omega_2)$$

## Κεφάλαιο 1 Συναρτησιακοί χώροι

Διανυσματικός χώρος  $S$

$$\bar{x}, \bar{y} \in S$$

### Εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in \mathbb{C}$$

- 1)  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^*$
- 2)  $\langle c\bar{x}, \bar{y} \rangle = c\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$
- 3)  $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$
- 4)  $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$  με  $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$  ανν  $\bar{x} = \bar{0}$

### Νόρμα

$$\bar{x} \in S$$

$$\|\bar{x}\| \geq 0$$

- 1)  $\|\bar{x}\| = 0$  ανν  $\bar{x} = \bar{0}$
- 2)  $\|a\bar{x}\| = |a|\|\bar{x}\| \quad x \in \mathbb{C}$
- 3)  $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

**Μέτρο:** Απόσταση μεταξύ  $\bar{x}, \bar{y} \in S$

- 1)  $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \quad d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  ανν  $\bar{x} = \bar{y}$
- 2)  $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$
- 3)  $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{y}, \bar{z}) \quad \bar{z} \in S$

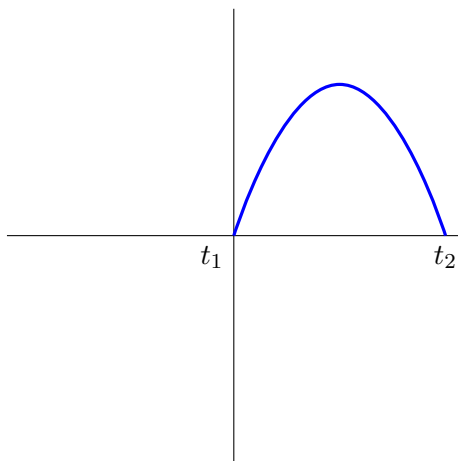
### Συναρτησιακός χώρος

$$x(t), y(t) \in S = \{x(t)/x(t) : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}\}$$

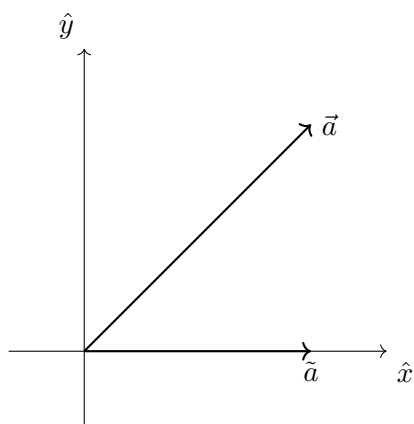
$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt$$

$$\|x(t)\| = \left[ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \right]^{1/2}$$

$$d(x(t), y(t)) = \left[ \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - y(t)]^2 dt \right]^{1/2}$$



$$\begin{aligned} \text{Αν } \langle \phi_1(t), \phi_2(t) \rangle &= 0 & \phi_1(t) &\perp \phi_2(t) \\ \langle \phi_1(t), \phi_1(t) \rangle &= 1 & \phi_1(t) &\text{ κανονική} \end{aligned}$$



### Τερατοχώρος

$\hat{x}, \hat{y}$  όχι εξαρτημένα (συνευθειακά)

Ποια είναι η καλύτερη προσέγγιση για το  $\vec{a}$  εφ' όσον δεν υπάρχει το  $\vec{y}$ ;

$\tilde{a}$  best γιατί  $d(\vec{a}, \tilde{a}) \min$ .

Άρα:

$$\tilde{a} = k\hat{x}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$

$$\vec{a} - \tilde{a} = (a_x - k)\hat{x} - a_y\hat{y}$$

$$d(\vec{a}, \tilde{a}) = \sqrt{(a_x - k)^2 + a_y^2}$$

$$\frac{d}{dk} (d(\vec{a}, \tilde{a})) = \frac{a_x - k}{\dots} = 0 \implies k = a_x = \tilde{a} \cdot \hat{x}$$

$$\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x$$

Η βέλτιστη έκφραση του  $\vec{a}$  στο δισδιάστατο χώρο είναι το ίδιο το  $\vec{a}$ .



## Μη κάθετα διανύσματα

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y}$$

$$\vec{a} - \tilde{a} = (a_x - k) \hat{x} + a_y \hat{y}$$

$$d(\vec{a}, \tilde{a}) = \|\vec{a} - \tilde{a}\| = \sqrt{(\vec{a} - \tilde{a}) \cdot (\vec{a} - \tilde{a})} = \left( [(a_x - k) \hat{x} + a_y \hat{y}] \cdot [(a_x - k) \hat{x} + a_y \hat{y}] \right)^{1/2}$$

$$\left[ (a_x - k)^2 + a_y^2 + 2(a_x - k)a_y \hat{x} \cdot \hat{y} \right]^{1/2}$$

$$\vec{a}_{\text{best}} = (\vec{a} \cdot \hat{x}) \hat{x} \neq a_x$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x + a_y \cos \phi \neq a_x}$$

**Συναρτησιακός κόσμος**  $\phi_n(t)$  παράγουν χώρο με το μηχανισμό:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(t) \quad t \in \Delta$$

$\phi_n(t)$  ανεξάρτητες μεταξύ τους (βάση απειροδιάστατου χώρου)

$\hat{f}(t) = \sum_{n=0}^M \underbrace{\hat{a}_n}_{\neq a_n, \text{ επειδή η βάση δεν είναι ορθοκανονική}} \phi_n(t)$  βέλτιστη, ώστε η απόσταση με την  $f$  να είναι ελάχιστη

$$\begin{aligned} \overbrace{I^2}^{\text{σφάλμα}} &= \int_{\Delta} [f(t) - \hat{f}(t)]^2 dt \\ &= \int_{\Delta} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(t) - \sum_{n=0}^M \hat{a}_n \phi_n(t) \right]^2 dt \\ &= \int_{\Delta} f^2(t) dt + \int_{\Delta} \left( \sum_{n=0}^M \hat{a}_n \phi_n(t) \right)^2 dt - 2 \int_{\Delta} \left[ f(t) \sum_{n=0}^M \hat{a}_n \phi_n(t) \right] dt \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\Delta} f^2(t) dt + \int_{\Delta} \sum_{n=0}^M [\hat{a}_n \phi_n(t)]^2 dt + 2 \int_{\Delta} \left[ \sum_{n=0}^M \sum_{m=n+1}^M \hat{a}_n \cdot \hat{a}_m \phi_n(t) \phi_m(t) \right] dt - 2 \int_{\Delta} \sum_{n=0}^M \hat{a}_n f(t) \phi_n(t) dt \\ &= \int_{\Delta} f^2(t) dt + \sum_{n=0}^M \hat{a}_n^2 \int_{\Delta} \phi_n^2(t) dt + 2 \sum_{n=0}^M \sum_{m=n+1}^M \hat{a}_n \hat{a}_m \int_{\Delta} \phi_n(t) \phi_m(t) dt - 2 \sum_{n=0}^M \hat{a}_n \int_{\Delta} f(t) \phi_n(t) dt \\ \underbrace{\frac{d(I^2)}{d \hat{a}_i}}_{\text{από 0 έως } n} &= 2 \hat{a}_i \int_{\Delta} \phi_i^2(t) dt + 2 \sum_{m \neq i} \hat{a}_m \int_{\Delta} \phi_i(t) \phi_m(t) dt - 2 \int_{\Delta} f(t) \phi_i(t) dt = 0 \end{aligned}$$

Έστω  $\phi_i$  μοναδιαία  $\iff \int_{\Delta} \phi_i^2(t) dt = 1$  και  $\phi_i$  ορθογώνια  $\iff \int_{\Delta} \phi_1 \phi_2(t) dt = 0$

Αν η  $\{\phi(t)\}$  ορθοκανονική

$$2 \hat{a}_i - 2 \int_{\Delta} f(t) \phi_i(t) dt = 0 \implies \hat{a}_i = \int_{\Delta} f(t) \phi_i(t) dt$$

$$2a \langle \phi, \phi \rangle + \sum \sum \hat{a}_n \langle \phi_i, \phi_n \rangle - 2 \langle f, \phi \rangle = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(t)$$

$$\int_{\Delta} f(t) \phi(t) dt = a_i$$

$$\langle f, \phi_i \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n, \phi_i \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle \phi_n, \phi_i \rangle$$

Ηθικό δίδαγμα: Αν η βάση του χώρου είναι ορθοκανονική και μας ζητηθεί να υπολογίσουμε μία προσέγγιση της συνάρτησης σε έναν υποχώρο, μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε την προβολή της συνάρτησης πάνω στη βάση.

**Ex.**  $f(t) = e^{-3t}u(t)$      $\phi_1(t) = e^t u(t)$  &  $\phi_2(t) = e^{-2t} u(t)$

$$\hat{f}(t) = a_1 e^{-t} u(t) + a_2 e^{-2t} u(t)$$

$$\int [a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 - f] \phi_1 dt = 0$$

$$\int_0^{\infty} [a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t}] e^{-t} dt = 0 \implies$$

$$a_1 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt + a_2 \int_0^{\infty} e^{-3t} dt - \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = 0 \implies \boxed{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} - \frac{1}{4} = 0}$$

$$\int [a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t}] e^{-2t} dt = 0 \implies \boxed{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} - \frac{1}{5} = 0}$$

$$a_1 = 3/10, a_2 = 6/5$$

**Ex.**  $f(t) = e^{-3t}u(t)$      $\phi_1(t) = e^t u(t)$  &  $\phi_2(t) = e^{-2t} u(t)$  &  $\phi_3(t) = e^{-3t} u(t)$   
 $f(t) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(t)$      $\{\phi_n(t)\}$  ορθοκανονική

$$E \triangleq \int_{\Delta} f^2(t) dt = \int \left( \sum a_n \phi_n(t) \sum a_n \phi_n(t) \right) dt +$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\Delta} \phi_n^2(t) dt \overset{1}{\nearrow} + \sum_{m \neq n} a_m a_n \int_{\Delta} \phi_m(t) \phi_n(t) dt \overset{0}{\nearrow}$$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \quad \text{Parseval} \int \text{theorem}$$

## Κεφάλαιο 2 Ανάλυση Fourier

### 2.0.1 Περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο $T$

$$x_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(k\omega t) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ θεμελιώδης κυκλική συχνότητα}$$

$$\langle x_k(t), x_n(t) \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t) x_n(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega t) \cos(n\omega t) dt = \begin{cases} n \neq k \rightarrow 0 \\ n = k \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$y_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(k\omega t) \quad \langle y_k, y_n \rangle = \begin{cases} n \neq k \rightarrow 0 \\ n = k \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$\text{Υποστηρίζω ότι κάθε περιοδική } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Οραματίζομαι ότι αν η παραπάνω  $f(t)$  είναι σήμα εισόδου σε ένα σύστημα, τα ημίτονα και συνημίτονα ως ιδιοσυναρτήσεις θα παραμείνουν αμετάβλητα, και θα τροποποιηθούν μόνο τα  $a_n, b_n$ .

$$z_k(t) = e^{jk\omega t}$$

$$\langle z_k, z_n \rangle = \begin{cases} k \neq n \rightarrow 0 \\ k = n \rightarrow T \end{cases}$$

$$z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jk\omega t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t} \quad \text{εκθετική σειρά}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad \text{τριγωνομετρική σειρά A}$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n) \quad \text{τριγωνομετρική σειρά B}$$

Οι συντελεστές μπορούν να βρεθούν από τις προβολές της συνάρτησης πάνω στα ημίτονα και τα συνημίτονα:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

## Συνθήκες Dirichlet

- 1)  $\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty$
- 2) Πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών εντός  $T$
- 3) Πεπερασμένος αριθμός τοπικών ακροτάτων εντός  $T$

$f(t)$  περιοδική  $T$

Μορφή	Σειρά	Συντελεστές	Αλλαγές
Εκθετική	$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}$	$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt$	$F_0 = a_0/2$ $F_n = 1/2(a_n - jb_n)$
Τριγωνομετρική Α	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$	$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$ $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$ $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$	$a_n = (F_n + F_{-n})$ $b_n = j(F_n - F_{-n})$ $a_0 = 2F_0$
Τριγωνομετρική Β	$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n)$		$A_0 = a_0/2$ $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 F_n $ $\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \\
 &= F_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2
 \end{aligned}$$

**Άσκηση για το σπίτι** Να βρεθούν η εκθετική και η τριγωνομετρική σειρά του σήματος:

## 2.1 Μετασχηματισμός Fourier

**Φορέας** συνάρτησης είναι το διάστημα του πεδίου ορισμού της στο οποίο η συνάρτηση δεν είναι 0 (από  $\min x$  για το οποίο δεν είναι 0 ως το αντίστοιχο  $\max x$ ).

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(t) &= \sum_k f(t - kT) \\
 \downarrow T\text{-περιοδική} &\rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \\
 f(t) &= \begin{cases} \tilde{f}(t) & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}
 \end{aligned}$$

## Μετασχηματισμός Fourier

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega
 \end{aligned}$$

### Προσοχή

Όταν παίρνουμε τύπους από τυπολόγια, ελέγχουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, για διαφοράς στη σύμβαση!

## Αντίστοιχος ορισμός

$$F(\mathfrak{f}) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mathfrak{f}t} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathfrak{f}) e^{j2\pi\mathfrak{f}t} d\mathfrak{f}$$

(όπου  $\mathfrak{f}$  η συχνότητα)

Η αρνητική συχνότητα δεν έχει καμία φυσική σημασία!

### 2.1.1 Ιδιότητες

•

$$F(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = \underbrace{F_R(\omega)}_{\text{Re}\{F(\omega)\}} + j \underbrace{F_i(\omega)}_{\text{Im}\{F(\omega)\}}$$

$$A(\omega) = |F(\omega)|$$

•

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt}_{\text{Re}\{F(\omega)\}} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt}_{\text{Im}\{F(\omega)\}}$$

Αν  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι άρτια

$F(\omega)$  είναι πραγματική  $F(\omega) \equiv \text{Re}\{F(\omega)\}$  και είναι άρτια

Αν  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι περιττή

$F(\omega)$  είναι φανταστική  $F(\omega) = j \text{Im}\{F(\omega)\}$  και είναι περιττή

Κάθε συνάρτηση είναι άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής. Έστω  $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$ . Τότε:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_o(t) + f_e(t)) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt$$

$$= \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f_o \cos \omega t dt} + \int_{-\infty}^{\infty} f_e \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t dt - j \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f_e \sin \omega t dt}$$

Αν η  $f$  είναι πραγματική:

$\text{Re}\{F(\omega)\}$  είναι άρτια

$\text{Im}\{F(\omega)\}$  είναι περιττή

$A(\omega) = |F(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2\{F(\omega)\} + \text{Im}^2\{F(\omega)\}}$  είναι άρτια

$\Phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}\{F(\omega)\}}{\text{Re}\{F(\omega)\}}$  είναι περιττή.

Αν η  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και άρτια:

$$- \text{Im}\{F(\omega) = 0\}$$

$$- \Phi(\omega) = 0$$

Αν η  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι περιττή:

$$- \text{Re}\{F(\omega)\} = 0$$

• Αν  $f_1(t) \xrightarrow{\text{FT}} F_1(\omega)$  και  $f_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} F_2(\omega)$

$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$  σταθερά:

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

Γραμμικότητα του Fourier Transform

- Συμμετρική ιδιότητα (το διπλάσιο τυπολόγιο)

$$\text{Av } f(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) \quad F(t) \xrightarrow{\text{FT}} 2\pi f(-\omega)$$

•

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow F(\omega) &= A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} \\ f(t - \tau) &\rightarrow e^{-j\omega\tau} F(\omega) &= A(\omega)e^{j(\Phi(\omega) - \omega\tau)} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow F(\omega) \\ e^{j\omega_0 t} f(t) &\rightarrow F(\omega - \omega_0) \\ \text{π.χ } \cos(\omega_0 t) f(t) &= \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} f(t) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

### Κλιμάκωση στο χρόνο

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow F(\omega) \\ f(at) &\rightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{γιατί; να αποδειχθεί στο σπίτι!} \end{aligned}$$

### Τι συμβαίνει με τη συνέλιξη

$$\begin{aligned} g(t) &= x(t) * h(t) \\ x(t) &\rightarrow X(\omega) \\ h(t) &\rightarrow H(\omega) \\ y(t) &\rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \cdot h(t) \\ y(t) &\rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * H(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi) H(\omega - \xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow F(\omega) \\ y(t) = \frac{df(t)}{dt} &\rightarrow j\omega F(\omega) \\ \frac{d^n f(t)}{dt^n} &\rightarrow (j\omega)^n F(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{d}{dt} f(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{d}{dt} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$$f(t) \rightarrow F(\omega)$$

$$t f(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \frac{d}{d\omega} F(\omega)$$

$$t^n f(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$$

Φανταστείτε ότι  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad f(t) \xrightarrow{F} (\omega)$

$$f^*(t) \rightarrow F^*(-\omega)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(-\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

### 2.1.2 Θεώρημα Parseval

#### Θεώρημα Parseval

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega$$

όπου  $F(\omega) = A(\omega) e^{j\Phi(\omega)}$

$$y(t) = f(t) f^*(t) = |f(t)|^2$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F^*(\omega)$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) F^*(-(\omega - \xi)) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega$$

#### Ορισμός

Πυκνότητα φασματικής ενέργειας:  $\frac{A(\omega)}{2\pi}$

### 2.1.3 Μετασχηματισμός Fourier γενικευμένων συναρτήσεων

α)  $\delta(t) \rightarrow 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = e^0 = 1$$

$$\delta(t \mp t_0) \rightarrow e^{\pm j\omega t_0}$$

$$f(t) = 1 \rightarrow 2\pi\delta(\omega), \text{ \acute{\alpha}\rho\alpha } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \implies \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t dt =$$

$$2\pi\delta(\omega) \implies \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t dt = 2\pi\delta(\omega) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t dt = 0 \end{cases}$$

#### 2.1.4

$$\text{sgn}(t) = \frac{|t|}{t}$$

$$\begin{aligned} \text{sgn}(t) &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ e^{-a|t|} \text{sgn}(t) \right] \\ \text{FT sgn}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 e^{at-j\omega t} dt + \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-at-j\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ -\frac{e^{(at-j\omega t)}}{a-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-at-j\omega t}}{-(a+j\omega)} \Big|_0^{\infty} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{-1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \right] \\ &= \frac{2}{j\omega} \in \mathbb{I} \end{aligned}$$

$$u(t) \xrightarrow{\text{F.T.}}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

#### 2.1.5

$$u(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$f(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} F(\omega)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t-\tau) d\tau = f(t) * u(t)$$

$$G(\omega) = F(\omega) \cdot \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$$

#### 2.1.6

$$\delta(t) \rightarrow 1 \quad \acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha$$

$$\delta^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) \rightarrow j\omega$$

$$\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} \delta(t) \rightarrow (j\omega)^n$$

$$t^n \rightarrow 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$$



### 2.1.7

**Παρ.**

$$f(t) = |t| = tu(t) - tu(-t)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi j\delta(\omega) * \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] - 2\pi j\delta(\omega) * \left[ \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \right] \right]$$

Calculate at home! The answer is  $-\frac{2}{\omega^2}$

$$t \rightarrow 2\pi j^1 \delta^{(1)}(\omega)$$

$$u(t) \rightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$u(-t) \rightarrow \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$$

### 2.1.8 Kramer's Kronig Relations

Από ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$\underbrace{\vec{D}}_{\text{πυκνότητα ροής}} = \underbrace{\epsilon}_{\text{διηλεκτρική σταθερά}} \underbrace{\vec{E}}_{\text{ένταση πεδίου}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega)$$

$$\vec{D}(t) = \epsilon(t) + \vec{E}(t)$$

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

$$h(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Av } H(\omega) = \mathcal{FT} \{h(t)\} = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_R(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'$$

$$H_R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_I(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'$$

Η απόδειξη των σχέσεων θα πέσει στις εξετάσεις.

**Άσκ.**

$$f(t) = 2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t$$

$$F(\omega) = \mathcal{FT} \{ \cos(\omega_1 - \omega_2)t \} + \mathcal{FT} \{ \cos(\omega_1 + \omega_2)t \}$$

$$= \pi \left[ \delta(\omega - (\omega_1 - \omega_2)) + \delta(\omega + (\omega_1 - \omega_2)) \right] + \pi \left[ \delta(\omega - (\omega_1 + \omega_2)) + \delta(\omega + (\omega_1 + \omega_2)) \right]$$

$$\left( \cos \omega_0 t \xrightarrow{\text{FT}} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \right)$$

Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= 2 \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \{ \cos \omega_1 t \} * \mathcal{F} \{ \cos \omega_2 t \} \\
 &= \pi [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] * [\delta(\omega - \omega_2) + \delta(\omega + \omega_2)] \\
 &= \pi [\delta(\omega - \omega_2 - \omega_1) + \delta(\omega - \omega_2 + \omega_1) + \delta(\omega + \omega_2 + \omega_1) + \delta(\omega + \omega_2 - \omega_1)]
 \end{aligned}$$

### Άσκηση

$$\begin{aligned}
 f(t) &= g(t) \cos^2 \omega_0 t & g(t) &\xrightarrow{\text{FT}} G(\omega) \\
 &= g(t) \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} = \frac{g(t)}{2} + \frac{1}{2} g(t) \cos 2\omega_0 t \\
 \implies F(\omega) &= \frac{1}{2} G(\omega) + \frac{1}{2} G(\omega) * \mathcal{F} \{ \cos 2\omega_0 t \} \\
 &= \frac{1}{2} G(\omega) + \frac{1}{2} G(\omega) * \left[ \pi (\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)) \right] \frac{1}{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2} G(\omega) + \frac{1}{4} [G(\omega - 2\omega_0) + G(\omega + 2\omega_0)]
 \end{aligned}$$

Αν δεν θυμάμαι τον τύπο:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= g(t) \cos^2 \omega_0 t = g(t) \cos \omega_0 t \cos \omega_0 t \\
 F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} G(\omega) * \left[ \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \{ \cos \omega_0 t \} * \mathcal{F} \{ \cos \omega_0 t \} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} G(\omega) * \left[ \pi [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_2)] \right] * \pi [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_2)] \\
 &= \frac{1}{4} G(\omega) * [\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega) + \delta(\omega) + \delta(\omega + 2\omega_0)] \\
 &= \frac{1}{4} [G(\omega - 2\omega_1) + 2G(\omega) + G(\omega + 2\omega_0)]
 \end{aligned}$$

### Άσκηση

$$\begin{aligned}
 f(t) &= g(at + b) & g(t) &\xrightarrow{\text{FT}} G(\omega) \\
 h(t) &= g(at) & F(\omega) &= \mathcal{F} \{ g(at) + b \} = \mathcal{F} \left\{ h \left( t + \frac{b}{a} \right) \right\} = H(\omega) e^{j\omega \frac{b}{a}}
 \end{aligned}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{|a|} G \left( \frac{\omega}{a} \right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{|a|} e^{j\omega \frac{b}{a}} G \left( \frac{\omega}{a} \right)$$

$$\cos t \xrightarrow{\text{FT}} \pi [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

$$\sin \omega_0 t = \cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin t \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{|\omega_0|} e^{-j\omega \frac{\pi}{2\omega_0}} \pi \left[ \delta \left( \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) + \delta \left( \frac{\omega}{\omega_0} + 1 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 \delta \left( \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) &= \delta \left( \frac{1}{\omega_0} (\omega - \omega_0) \right) \\
 &= e^{-j\omega \frac{\omega}{\omega_0}} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\
 &= -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt \\
&= A \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{-j\omega} \left[ e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2} \right] \\
&= A\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \\
&= A\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)
\end{aligned}$$

### sinc

Μαθηματικοί:  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$

Μηχανικοί:  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

## 2.2 Χρονοπερατό vs Ζωνοπερατό Σήμα

- Ένα ζωνοπερατό σήμα **δεν** μπορεί να είναι χρονοπερατό
- Ένα χρονοπερατό σήμα **δεν** μπορεί να είναι ζωνοπερατό
- Ένα σήμα μπορεί να μην είναι ούτε χρονοπερατό, ούτε ζωνοπερατό.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
\frac{d^n f(t)}{dt^n} &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} (j\omega)^n F(\omega) e^{j\omega t} d\omega
\end{aligned}$$

Ορίζεται η σειρά Taylor επομένως σε οποιοδήποτε σημείο, όμως τότε, επειδή σε κάποια σημεία οι παράγωγοι είναι 0, θα έπρεπε η  $F$  να είναι μηδενική, άτοπο.

## 2.3 Γκαουσιανός παλμός

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(2\sigma^2)} \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) = e^{\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\omega^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

$\sigma^2$  διασπορά

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2} [t^2 + 2\sigma^2 j\omega t + (j\omega\sigma^2)^2]} \cdot e^{\frac{1}{2\sigma^2} (j\omega\sigma^2)^2} dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \omega^2 \sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \overbrace{(t + j\omega\sigma^2)^2}^{t + j\omega\sigma^2 - \tau}} dt \\
&= e^{-\frac{1}{2} \omega^2 \sigma^2} \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} d\tau \right] = e^{-\frac{1}{2} \omega^2 \sigma^2}
\end{aligned}$$

Ηθικά διδάγματα:

- Ο μετασχηματισμός της Gaussian είναι Gaussian
- Ό,τι στενεύει στον χρόνο απλώνει στο φάσμα, και αντίθετα

$$\int_{-\infty}^{\infty} t d^2(t) dt$$

$$\text{διασπορά στον χρόνο} \quad d^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t) dt$$

$$\text{διασπορά στο φάσμα} \quad D^2 = \frac{1}{2\pi} \int \omega^2 || d\omega$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) \frac{dx(t)}{dt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x^2(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt \stackrel{\text{Parseval theorem}}{=} d^2 D^2 \implies \boxed{dD \geq 1/2}$$

Γιατί  $1/2$ ; (Υπόδειξη:  $\int_{-\infty}^{\infty} t x \frac{dx}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} dt = [ ] - \frac{1}{2} \int x^2 dt \xrightarrow{1}$ )  
Θα τα ξαναπούμε Τρίτη 22 Νοεμβρίου (χάνουμε 3 μαθήματα).

## Κεφάλαιο 3 Μετασχηματισμός Laplace

$$\nexists X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$y(t) = x(t)e^{-\sigma t}$$

$$\begin{aligned} \exists Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \quad (s = \sigma + j\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt} \quad \text{M. Laplace}$$

**Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace**  $x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s)e^{st} d\omega$

- Έστω ότι  $x(t)$  είναι αιτιατή ( $x(t) = 0 \quad t < 0$ ).
- Ας φανταστούμε ότι η  $x(t)$  δεν έχει μετασχηματισμό Fourier.
- Έστω ότι  $x(t)$  αντιατιατή ( $x(t) = 0 \quad t > 0$ )
- 
- Η  $\sin \omega u(t) + \sin \omega t e^{-t} u(-t)$  δεν έχει περιοχή σύγκλισης.

$$X(s) = \frac{35}{(x-8)(x+2)}$$

Οι πόλοι (ρίζες του παρονομαστή) καθορίζουν τις περιοχές σύγκλισης.

Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε είναι αιτιατές, άρα γενικά ο μετασχηματισμός Laplace καταρρέει στην:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Το  $0^-$  μάς επιτρέπει να ασχοληθούμε με συναρτήσεις που απειρίζονται στο 0, π.χ.  $\frac{1}{x}$  or  $\delta(t)$ .

## Κεφάλαιο 4 Ιδιότητες

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) \quad \text{Re}\{s\} > \sigma_1 \\ y(t) &\rightarrow Y(s) \quad \text{Re}\{s\} > \sigma_2 \end{aligned}$$

1)  $ax(t) + by(t) \rightarrow aX(s) + bY(s) \quad \text{τουλάχιστον } \text{Re}\{s\} > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$

2) Μετατόπιση σε χρόνο

$$\begin{aligned} x(t)u(t) &\rightarrow X(s) \quad \sigma > \sigma_1 \\ y(t) = x(t-t_0)u(t-t_0) &\rightarrow X(s)e^{-t_0 s} \quad t_0 > 0 \quad \sigma > \sigma_2 \end{aligned}$$

**Απόδ.**

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \underbrace{x(t-t_0)}_{\tau} u(t-t_0)e^{-st} dt = x(\tau)u(\tau)e^{-s(t+t_0)} d\tau = X(s)e^{-st_0}$$

3) Κλιμάκωση

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) \\ x(at) &\rightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \end{aligned}$$

4) Παραγωγήιση

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) \\ \frac{dx(t)}{dt} &\rightarrow sX(s) - x(0^-) \end{aligned}$$

5) Ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) \\ \int_0^t x(t) dt &\rightarrow \frac{1}{s}X(s) \end{aligned}$$

6) Διαμόρφωση

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) & \sigma > \sigma_1 \\ e^{-at}x(t) &\rightarrow X(s+a) & a \in \mathbb{C} \quad \sigma > \sigma_1 - \operatorname{Re}\{a\} \end{aligned}$$

7) Συνέλιξη

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) \\ y(t) &\rightarrow Y(s) \\ x(t) * y(t) &= X(s)Y(s) \end{aligned}$$

## 4.1 Laplace "περιοδικών συναρτήσεων"

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$x(t) = x_T(t) + x_T(t-T) + x_T(t-2T) + \dots$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_T(t-nT)$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{x_T(t-nT)\}$$

$$x_T(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X^T(s)$$

$$x_T(t-nT) \xrightarrow{\mathcal{L}} X^T(s)e^{-nTs}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} X^T(s)e^{-nTs} = X^T(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = \frac{1}{1-e^{-Ts}} X^T(s) \quad \sigma > \max(0, \sigma_1)$$

$$X(s) \xrightarrow{?} X(\omega)$$

$$X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$

**Ex. 1**  $x(t) = e^{-at}u(t)$

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)} \Big|_0^{\infty} = \frac{e^{-(a+s)\infty} - e^{-(a+s)0}}{-(a+s)} =$$

$$\boxed{\frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > \text{Re}\{a\}}$$

**Ex. 2**  $x(t) = \delta(t)$

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s0} = 1 \quad s \in \mathbb{C}$$

**Ex. 3**  $x(t) = u(t) \quad X(s) = \frac{1}{s} \quad \text{Re}\{s\} > 0$

$$\text{Για να βρω πεδίο σύγκλισης: } X(s) = \int_{0^+}^{\infty} 1e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{e^{-s\infty} - e^{-s0}}{-s} = \frac{1}{s}$$

**Ex. 4**  $x(t) = \cos \omega_0 t u(t)$

$$x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} u(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}T} \frac{1}{2} \frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + j\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega_0^2} =$$

$$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

**Ex. 5**  $x(t) = \sin \omega_0 t u(t)$

$$\frac{1}{2j} \left[ e^{j\omega_0 t} u(t) - e^{-j\omega_0 t} u(t) \right] \xrightarrow{\mathcal{L}T} \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

Ποιός είναι ο μετασχηματισμός Fourier της παραπάνω;

Το πιθανό λάθος αποτέλεσμα είναι το  $\left( \frac{FT}{s=j\omega} \rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$

$$x(t) = \sin \omega_0 t u(t)$$

$$\sin \omega_0 t \xrightarrow{FT} j\pi [-\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$u(t) \xrightarrow{FT} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow \left[ j\pi (\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)) \right] * \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ j\pi^2 (\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)) + j\pi \left( \frac{1}{j(\omega + \omega_0)} - \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} \right) \right] \\ &= \frac{j\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + \left[ \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \end{aligned}$$