Σημειώσεις Στατιστική & Πιθανότητες

Καναβούρας Κωνσταντίνος
http://users.auth.gr/konkanant

2016, Εαρινό εξάμηνο

- Γ. Ζιούτας Πιθανότητες
- Δ. Κουγιουμτζής Στατιστική
- Βιβλίο: Πιθανότητες και Στατιστική για Μηχανικούς, Γ. Ζιούτας

- Εξετάσεις: 8 μονάδες (τουλάχιστον 4/8 για να περάσει)
- Test: 2 μονάδες

Μέρος I
Πιθανότητες

Κεφάλαιο 1

Είδη φαινομένων

1. **Αιτιοκρατικά** (καθοριστικά): Ξέρω το αποτέλεσμα του φαινομένου όταν γνωρίζω τα αίτια/τις προϋποθέσεις/το περιβάλλλλλλον του.
2. **Στοχαστικά**: Δεν μπορώ να προβλέψω το αποτέλεσμα, ακόμα και αν γνωρίζω τα παραπάνω.

Μπορεί να υπάρχει και αβεβαιότητα λόγω μη ιδανικών μοντέλων πρόβλεψης. Ο μηχανικός πρέπει να γνωρίζει και να μπορεί να μετρά αυτήν την αβεβαιότητα.

1.1 Πείραμα τύχης

Στοχαστικό φαινόμενο που μπορούμε να δοκιμάσουμε όσες φορές θέλουμε, ακριβώς με τις ίδιες συνθήκες, και γνωρίζουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα, αν και δε γνωρίζουμε ακριβώς το αποτέλεσμα κάθε πειράματος.

- E: Πείραμα τύχης (Experiment)
- S: $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ Δειγματοχώρος (Sample space)
- s_i: Δειγματοσημεία

  π.χ.

$$\begin{array}{ll} E_1 & S_1 = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow \text{ ρίψη ζαριού} \\ E_2 & S_2 = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, K\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\} \rightarrow \text{ ρίψη κέρματος 3 φορές} \\ E_3 & S_3 = \{0,1,\ldots,N\} \rightarrow \text{ ελαττωματικά προϊόντα} \\ E_4 & S_4 = \{0,1,2,3\ldots\} \rightarrow \text{ αριθμός ατόμων που εκπέμπει ραδιενεργό υλικό} \\ E_5 & S_5 = \left\{x | x \geq 0, x \in \mathbb{R}\right\} \rightarrow \text{ χρόνος γενονότος} \end{array}$$

Υποσύνολα του δειγματικού χώρου, π.χ. $A = \{4,5,6\} \subseteq S$ ονομάζονται γεγονότα. Συνήθως συμβολίζονται A, B, W, R. Λέμε ότι ένα γεγονός πραγματοποιείται.

Το S είναι σίγουρο γεγονός.

το $\{\} \subseteq S$ ονομάζεται αδύνατο γεγονός και συμβολίζεται $\emptyset$.

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

Το δυναμοσύνολο S^* περιέχει όλα τα δυνατά υποσύνολα του S:

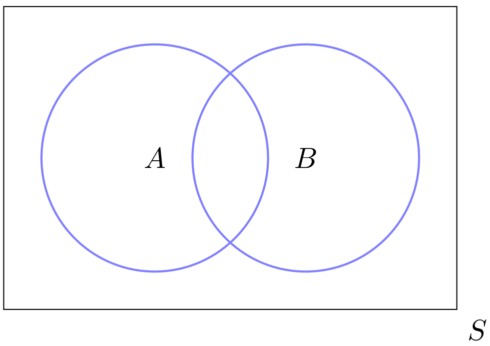
$$S^* = \{\{\}, \{s_1\}, \{s_2\}, \ldots, \{s_n\}, \{s_1, s_2\}, \{s_1, s_3\}, \ldots, \{s_1, s_2, s_3\} \ldots\}$$

Είναι:

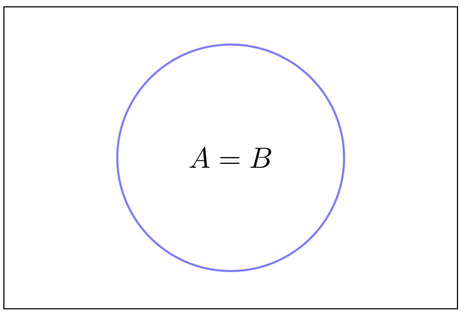
$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n \\
(1+1)^n &= \binom{n}{0} \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 1 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot 1 \\
2^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το S^* έχει 2^n στοιχεία αν το S έχει n.

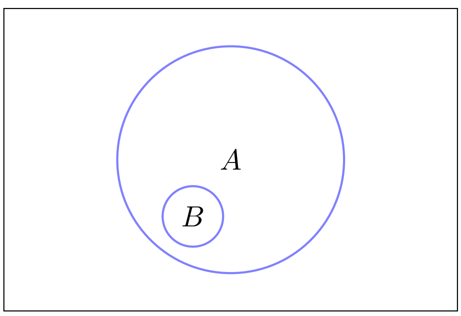
Διαγράμματα Venn



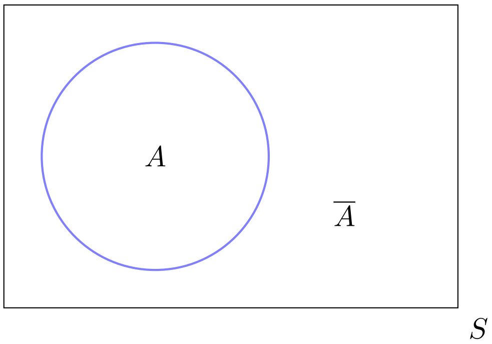
Ισότητα



Περιεκτικότητα

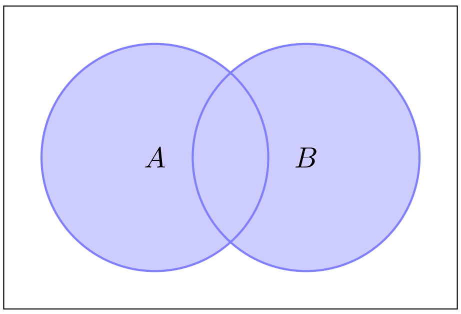


Συμπλήρωμα

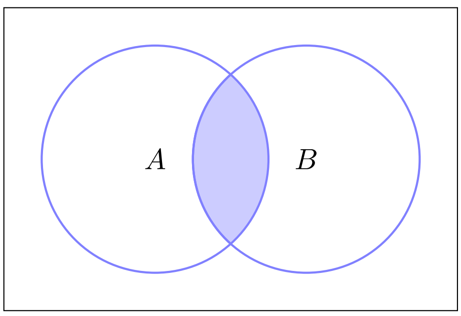


1.1.1 Πράξεις

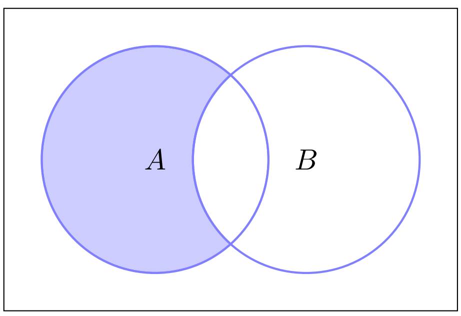
Ένωση $A \cup B$



Τομή $A \cap B$



Διαφορά $A - B$



Παρατηρώ ότι:

$$(x - y) + y = x$$
$$(A - B) \cup B = A \cup B$$

1.1.2 Ιδιότητες

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B)\,\Gamma$
- $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

1.1.3

$$\begin{aligned} S &= \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\} \\ A &= \{KK, K\Gamma, \Gamma K\} \leftarrow \text{ τουλάχιστον μία κεφαλή} \\ B &= \{KK, \Gamma K\} \leftarrow \text{ κεφαλή στη 2η ρίψη} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{KK, K\Gamma, \Gamma K\} \\ A \cap B &= \{KK, \Gamma K\} \\ A - B &= \{K\Gamma\} \end{aligned}$$

1.1.4

$$S, A, B, \Gamma$$

- Τουλάχιστον ένα από A, B, Γ: $A \cup B \cup \Gamma$
- Μόνο ένα από τα A, B, Γ: $\big(A - (B \cup \Gamma)\big) \cup \big(B - (A \cup \Gamma)\big) \cup \big(\Gamma - (A \cup B)\big) = \Big(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\Big) \cap \Big(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\Big) \cap \Big(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\Big)$
- Ακριβώς δύο από τα $A, B\Gamma$: $(A \cap B - \Gamma) \cap (A \cap \Gamma - B) \cap (B \cap \Gamma - A)$
- Το πολύ δύο από τα A, B, Γ: $\overline{A \cap B \cap \Gamma} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

$\pi.\chi.$

$$A, B, \Gamma$$

Σε ένα παιχνίδι όπου κερδίζει ο παίκτης που πρώτος φέρνει κεφαλή, ποιο είναι το γεγονός να κερδίσει ο A, αν A_i, B_i, Γ_i τα ενδεχόμενα στην i-οστή ρίψη να κερδίσει ένας παίκτης.

$$WA = A_1 \cup \Big(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{\Gamma_3} \cap A_4\Big) \cup \Big(\overline{A_4} \cap \overline{B_5} \cap \overline{\Gamma_6} \cap A_7\Big) \cup \cdots$$

H/W: Να βρεθούν τα $WB, W\Gamma$.

$$\begin{aligned} WB &= \bar{A}_1 \cap B_2 \cup \Big(\overline{B_2} \cap \overline{C_3} \cap \overline{A_4} \cap B_5\Big) \cup \Big(\overline{B_5} \cap \overline{C_6} \cap \overline{A_7} \cap B_8\Big) \cup \cdots \\ WC &= \bar{A}_1 \cap \overline{B_2} \cap C_3 \cup \Big(\overline{C_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{B_5} \cap C_6\Big) \cup \Big(\overline{C_6} \cap \overline{A_7} \cap \overline{B_8} \cap C_9\Big) \cup \cdots \end{aligned}$$

1.2 Πιθανότητα

S, A Πιθανότητα είναι να η βεβαιότητα να πραγματοποιηθεί ένα γεγονός.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

π.χ. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρει ζυγό αριθμό το ζάρι.

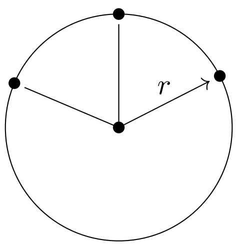
- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\,, \quad A = \{2, 4, 6\}$. Άρα, αν χρησιμοποιήσουμε την κλασική μέθοδο για την εύρεση της πιθανότητας:

  $$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{3}{6} = 0,50$$

  Η κλασική μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν είναι ισοπίθανα τα αποτελέσματα.

  Σχετική Συχνότητα Μπορώ να ρίξω πολλές (N) φορές το ζάρι:

  $$f(A) = \frac{N(A)}{N}$$
  $$P_A = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

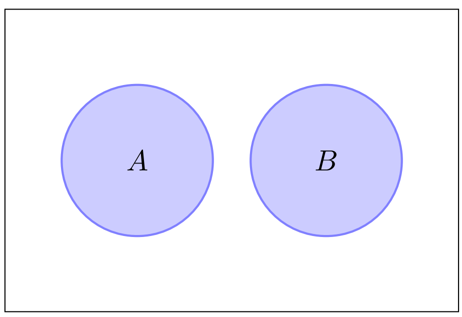


Ποια είναι η $P(AB \leq r)$·

$$S = \{1, 2, 3, \ldots, 360\}$$
$$AB = \{1, 2, 3, \ldots, 120\} \rightarrow \text{ προκύπτει από γεωμετρία}$$

1.3 Αξιώματα Kolmogorov

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$



3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$S = \{\text{ΚΑ}, \text{ΣΠ}, \text{ΜΠ}, \text{ΚΟ}\}$, $A = \{\text{ΚΑ}, \text{ΣΠ}\}$. $P(A) =;$

$P(A) = \frac{2}{4}$ (από κλασικό τρόπο), ή $P(\text{ΚΑ} \cup \text{ΣΠ}) = P(\text{ΚΑ}) + P(\text{ΣΠ}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, από το 3ο αξίωμα Kolmogorov.

1.4

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   Απόδειξη. $P(\overline{A} \cup A) = P(S) \implies P(A) + P(\overline{A}) = 1$ □

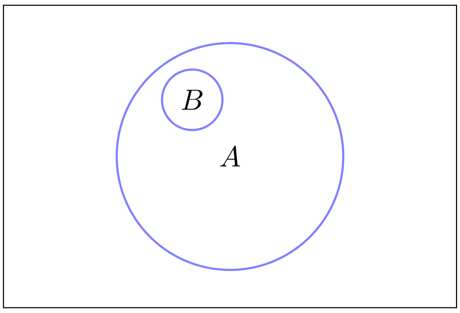
2. $P(\emptyset) = 0$

   Απόδειξη.

$$\begin{aligned} P(\emptyset) &= 1 - P(\overline{\emptyset}) \\ &= 1 - P(S) \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

□

3. $P(A) \leq P(B)$

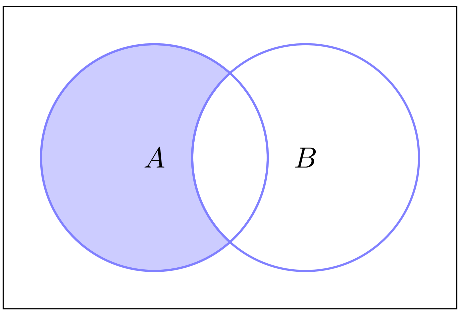


   Απόδειξη.

$$\begin{aligned} B = (B - A) \cup A \implies & \\ P(B) &= P\big((B - A) \cup A\big) \\ &= P(B - A) + P(A) \geq 0 \end{aligned}$$

□

4. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



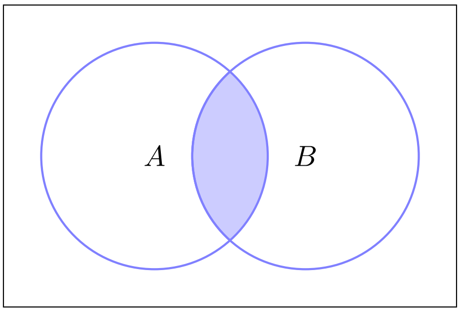
Απόδειξη.

$$\begin{aligned} A = (A-B)\cup(A\cap B) \implies & \\ P(A) &= P\left[(A-B)\cup(A\cap B)\right] \\ &= P(A-B)+P(A\cap B) \end{aligned}$$

$\square$

5. $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Τομή $A\cap B$



Απόδειξη.

$$\begin{aligned} A\cup B = (A-B)\cup B \implies & \\ P(A\cup B) &= P\left[(A-B)\cup B\right] \\ &= P(A-B)+P(B) \\ &= P(A)-P(A\cap B)+P(B) \end{aligned}$$

$\square$

Μπορεί η παραπάνω σχέση να αποδειχθεί και για περισσότερα από δύο γεγονότα:

$$P(A\cap B\cap\Gamma) = P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(A\cap B)-P(A\cap\Gamma)-P(B\cap\Gamma)+P(A\cap B\cap\Gamma)$$

$P(\Delta_1) = 0.5, \quad P(\Delta_1) = 0.3, P(\Delta_1\cap\Delta_3) = 0.1.$
Τότε $P(\Delta) = P(\Delta_1\cup\Delta_2) = P(\Delta_1)+P(\Delta_2)-P(\Delta_1\cap\Delta_2) = 0.7.$

$$S = \left\{\Delta_1\cap\Delta_2, \overline{\Delta_1}\cap\Delta_2, \Delta_1\cap\overline{\Delta_2}, \overline{\Delta_1}\cap\overline{\Delta_2}\right\}$$

1.4.1

Για τρία σύνολα A, B, Γ: Η πιθανότητα να συμβεί μόνο ένα από αυτά είναι:

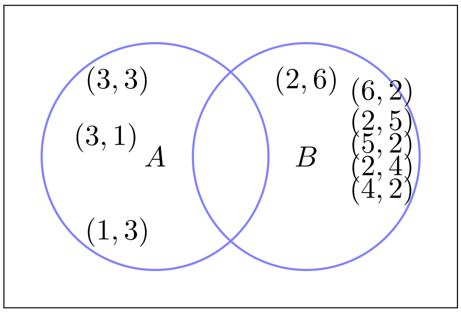
$$\begin{aligned}
&P\left[\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cap\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cap\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\right] \\
&= P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}) + \dots \\
&= P\left[A-(B\cap\Gamma)\right] - P(A) - P\left[A\cap(B\cap\Gamma)\right] + \dots \\
&= P(A) - P\left[(A\cap B)\cup(A\cup\Gamma\right] + \dots \\
&= P(A) - \left(P(A\cap B) + P(A\cap\Gamma) - P(A\cap B\cap\Gamma)\right) + \dots \\
&= P(A) - P(A\cap B) - P(A\cap\Gamma) + P(A\cap B\cap\Gamma) + \dots
\end{aligned}$$

1.5 Δεσμευμένη πιθανότητα

$P(A\cap B) =;$

$P(A|B)$: η πιθανότητα να συμβεί το A με την προϋπόθεση ότι B, ή η πιθανότητα να συμβεί το A, αν γνωρίζουμε ότι συμβαίνει το B, σε μια εκτέλεση του πειράματος.

π.χ.



$P(A) = \frac{5}{36}$, $P(B) = \frac{11}{36}$

Παρατηρώ ότι $P(A) = \frac{2}{11} = \frac{\frac{N(A\cap B)}{n(s)}}{\frac{N(B)}{N(S)}}$.

Άρα, γενικά:

$$P\left(A|B\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
P(A\cap B) &= P(B)P(A|B) \\
&= P(A)P(B|A)
\end{aligned}$$

- Αν $A\cap B = \emptyset$, τότε $P(A|B) = \emptyset$.
- Αν $A\subseteq B$, τότε $P(B|A) = 1$.

1.5.1 Πολλαπλαστιαστικός Κανόνας

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = \\
&\qquad\qquad = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots A_n)
\end{aligned}
$$

Μπορώ με τη χρήση του πολλαπλασιαστικού κανόνα να εντοπίσω την πιθανότητα 6 ρίψεις ζαριού να έχουν διαφορετικά νούμερα.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{στην 1η ρίψη κάποιο νούμερο}\} \\
A_{i \geq 2} &= \{\text{στην } i \text{ ρίψη νούμερο διάφορο από } A_{i-1}, A_{i-2}, \ldots, A_1 \text{ ρίψη}\}
\end{aligned}
$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots$$

1.6 Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Αν για τα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ ισχύει:

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ (ξένα μεταξύ τους)
- $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = S$

Ονομάζουμε τα A_i διαμέριση του S.

Έστω B ένα σύνολο που τέμνει τη διαμέριση:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_k)$$

Τότε:

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_k) \\
&= P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_k)P(B|A_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)
\end{aligned}
$$

Άσκηση

Επιλέγουμε τυχαία μία κάλπη και μία σφαίρα από την κάλπη. Ποια είναι η πιθανότητα $P(A)$να επιλέξω την άσπρη σφαίρα;

Τα A_1, A_2, A_3 αποτελούν διαμέριση. Άρα:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \underbrace{P(A_1)}_{\frac{1}{3}}\underbrace{P(A|A_1)}_{0} + \underbrace{P(A_2)}_{\frac{1}{3}}\underbrace{P(A|A_2)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(A_3)}_{\frac{1}{3}}\underbrace{P(A|A_3)}_{1} \\
&= 0.50
\end{aligned}
$$

Άσκηση

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0.60 \\ P(X=2) &= 0.40 \end{aligned}$$

$P(Y1) = ?$

Τα X_1, X_0 αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου.

$$P(Y1) = \underbrace{P(X1)}_{0.60}\underbrace{P(Y1|X1)}_{0.90} + \underbrace{P(X0)}_{0.40}\underbrace{P(Y1|X0)}_{0.20} = 0.62$$

1.7 Θεώρημα Bayes

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_k)P(B|A_k) \\ P(A_i|B) &= \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} \end{aligned}$$

(Πιθανότητα εκ των υστέρων)

π.χ.

Από την προηγούμενη άσκηση, ποια είναι η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι 1 αν και η είσοδος είναι 1;

$$P(X1|Y1) = \frac{P(X1)P(Y1|X1)}{P(Y1)} = \frac{0.54}{0.62} > P(X1) = 0.6$$

Ποια είναι η πιθανότητα $P(X0|Y1)$;

Στο παράδειγμα με την κάλπη, ποια είναι η $P(A_3|A)$ $(P(A_3) = \frac{1}{3})$

$$P(A_3|A) = \frac{P(A_3)P(A_1|A_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{0.50} = \frac{2}{3}$$

Ομοίως:

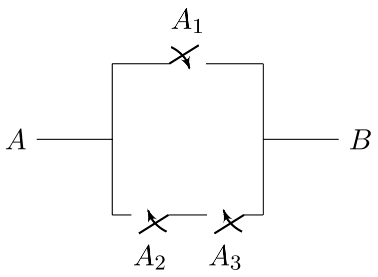
$$P(A_2|A) = \frac{P(A_2)P(A_1|A_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{0.50} = \frac{1}{3}$$

1.8

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P\big((A \cup B)|\Gamma\big) &= P(A|\Gamma) + P(B|\Gamma) - P\big((A \cap B)|\Gamma\big) \end{aligned}$$

Στο παράδειγμα με τα σήματα:

$$P(X1|Y1) = 1 - P(X0|Y1)$$



$B = A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$ (B η πιθανότητα διακοπής ρεύματος, A_i η πιθανότητα να είναι ανοικτός ο i-οστός διακόπτης.

Άρα:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(A_1)P(A_3|A_1) - P(A_1)\ldots \\ &= P \cdot P + P \cdot P - P^3 \\ &= 2P^2 - P^3 \quad (\text{αν } P \text{ η πιθανότητα να είναι ανοιχτός ένας διακόπτης}) \end{aligned}$$

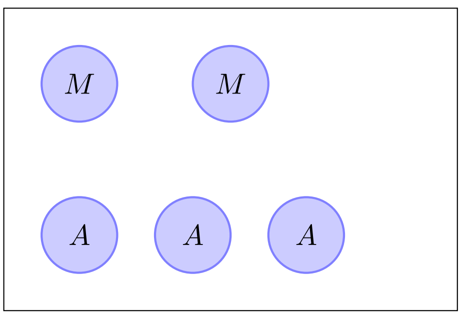
$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

Όμως $A_2 \cap B = A_1 \cap \big[(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)\big] = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) = B$.

Άρα: $P(A_1|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$, κάτι που επιβεβαιώνεται και εμπειρικά.

Ποια είναι η $P(A_2|B)$;

Άσκ.

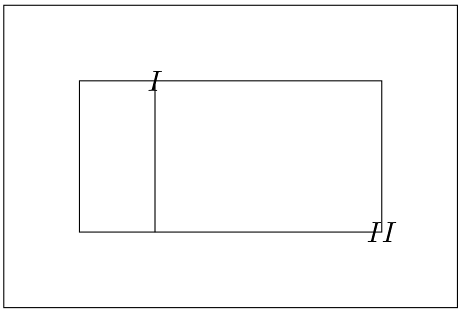


$$R = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_2})$$

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2}) - \cancelto{\emptyset}{\Big[A_2 \cap (\overline{A_1} \cap \overline{B_2})\Big]} \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο B;

Άσκ.



Αν $P(I) = P_1, P(II) = P_2$, ποια είναι η πιθανότητα, αν δεν έχει πληγεί ο 2ος στόχος, να έχει πληγή ο 1ος·

$$P(I|\overline{II}) = \frac{P(I \cap \overline{II})}{P(\overline{II})} = \frac{P(I)\cancelto{1}{P(\overline{II}|I)}}{1 - P_2}$$

Άσκ. $P(A) = 0.04,\ P(B|A) = 0.20$

$$\underbrace{R}_{\text{πιθανότητα ανύψωσης του βάρους}} = \overline{A} \cup (A \cap \overline{B})$$

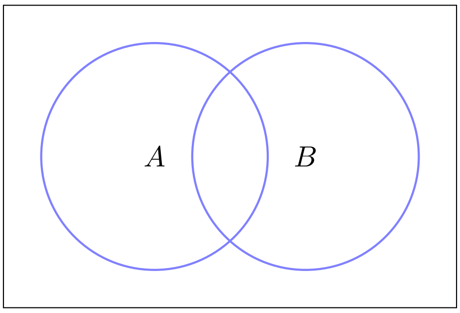
$$\begin{aligned} P(R) &= P(\bar{A}) + P(A \cap \overline{B}) - P\left(\cancelto{\emptyset}{\overline{A} \cap (A \cap \overline{B})}\right) \\ &= 0.96 + P(A)P(\overline{B}|A) \\ &= 0.96 + 0.04 \cdot 0.80 \end{aligned}$$

Άσκηση για το σπίτι Σε μια παραγωγή το $P(A_1) = 80\%$ των σιδηροδοκών είναι καλές, και το $P(A_2) = 20\%$ των σιδηροδοκών είναι ελαττωματικές. Το μηχάνημα που πραγματοποιεί τον έλεγχο δεν είναι αξιόπιστο: $P(\Theta|A_1) = 0.10,\ P(\Theta|A_2) = 0.80$ (Θ η πιθανότητα ο έλεγχος να είναι θετικός).

1. Ποιο ποσοστό από τις σιδηροδοκούς καταστρέφεται (αν καταστρέφεται κάθε δοκός για την οποία ο έλεγχος είναι θετικός);
2. Ποιο ποσοστό από αυτές που καταστρέφονται είναι καλές;
3. Ποιο ποσοστό από τις δοκούς που φεύγουν στην αγορά είναι ελαττωματικές;
4. Ποιες θα είναι οι απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα αν προτείνουμε δύο ελέγχους Θ_1, Θ_2 (καταστρέφεται μόνο αν και οι δύο έλεγχοι είναι θετικοί);

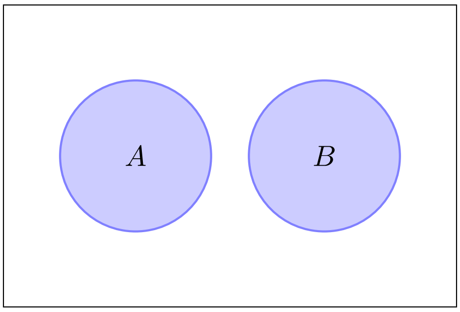
1.9

1.9.1 Ανεξάρτητα A, B



$$P(A|B) = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

1.9.2 Ασυμβίβαστα A, B



$$A \cap B = \emptyset, \ P(A|B) = 0$$

π.χ

Αν A, B είναι ανεξατητα, ισχύει το ίδιο για τα $\bar{A}, B$;

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B)P(\bar{A}|B) \\ &= P(B)\big(1 - P(A|B)\big) \\ &= P(B)\big(1 - P(A)\big) \\ &= P(B)P(\bar{A}) \end{aligned}$$

□

Μπορείτε να αποδείξετε ότι ισχύει το ίδιο για τα $\bar{A}, \bar{B}$;

Άσκηση 18

$$S = \begin{cases} \text{ΑΒΓ} \\ \text{ΑΓΒ} \\ \text{ΒΑΓ} \\ \text{ΒΓΑ} \\ \text{ΓΑΒ} \\ \text{ΓΒΑ} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W &= \{\text{ΑΒΓ}, \text{ΑΓΒ}, \text{ΓΑΒ}\} \\ R &= \{\text{ΑΒΓ}, \text{ΑΓΒ}, \text{ΒΑΓ}\} \\ \text{Πρέπει } \underbrace{P(W \cap R)}_{\frac{1}{3}} &= \underbrace{\underbrace{P(W)}_{\frac{1}{2}}\underbrace{P(R)}_{\frac{1}{2}}}_{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Άρα τα W και R δεν είναι ανεξάρτητα.

1.10 Τεχνικές Συνδυαστικής

1.10.1 Πολλαπλασιαστική αρχή

Έστω ένα πείραμα στο οποίο ρίχνω ένα νόμισμα και ένα κέρμα.

$$\begin{aligned} S &= S_1 \underbrace{\times}_{\text{καρτεσιανό γινόμενο}} S_2 \\ S &= \{\text{ΚΓ}\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \\ &= \big\{(\text{Κ},1), (\text{Κ},2), \ldots, (\text{Κ},6), (\text{Γ},1), (\text{Γ},2), \ldots, (\text{Γ},6)\big\} \end{aligned}$$

Άσκηση 8

$$\begin{aligned} S &= S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{13} \\ &= \{1,2,\times\} \times \{1,2,\times\} \cdots \{1,2,\times\} \end{aligned}$$

$n = n_1 \times n_2 \cdots n_{13} = 3^{13}$

Όταν ρίχνω ένα νόμισμα 3 φορές:

$$\begin{aligned} S &= S_1 \times S_2 \times S_3 \\ &= \{\text{Κ},\text{Γ}\} \times \{\text{Κ},\text{Γ}\} \times \{\text{Κ},\text{Γ}\} \\ &= \{\text{ΚΚΚ}, \text{ΚΚΓ}, \text{ΚΓΚ}, \text{ΓΚΚ}, \text{ΚΓΓ}, \text{ΓΚΓ}, \text{ΓΓΚ}, \text{ΓΓΓ}\} \end{aligned}$$

Παρατηρώ ότι στο καρτεσιανό γινόμενο τα ενδεχόμενα π.χ. (ΚΚΓ) και (ΓΚΚ) θεωρούνται διαφορετικά. Αντίστοιχα, σε δύο ρίψεις ενός ζαριού, τα ενδεχόμενα $(1,2)$, $(2,1)$ είναι διαφορετικά.

1.10.2

Έχω τρία αντικείμενα $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$. Με πόσους τρόπους μπορώ να τα βάλω στη σειρά;

$$\begin{cases} \mathrm{AB\Gamma} \\ \mathrm{A\Gamma B} \\ \mathrm{BA\Gamma} \\ \mathrm{B\Gamma A} \\ \mathrm{\Gamma AB} \\ \mathrm{\Gamma BA} \end{cases}$$

Για n αντικείμενα:

$$n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$

$$\mathrm{P}(n) = n!$$
$$\mathrm{P}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1.11 Συνδυασμοί

$$\mathrm{C}(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}$$

π.χ. Για τα $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ με $n = 3,\ k = 2$ (συνδυάζω 3 αντικείμενα ανά 2) έχω:

$$\mathrm{AB\Gamma} \begin{cases} \mathrm{AB} \\ \mathrm{A\Gamma} \\ \mathrm{B\Gamma} \end{cases}$$

π.χ. Είμαστε 100 φοιτητές, πόσες διαφορετικές επιτροπές των 5 ατόμων μπορώ να φτιάξω;

Άσκηση Έχουμε 15 καλά και 5 ελαττωματικά ανταλλακτικά. Ποια είναι η πιθανότητα 3 από αυτά να είναι ελαττωματικά;

Κλασικός τρόπος

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{\mathrm{C}(5,3)}{\mathrm{C}(20,3)} = \frac{\frac{5!}{(5-3)!\ 3!}}{\frac{20!}{(20-3)!\ 3!}} = \frac{1}{114}$$

Όχι κλασικός τρόπος

$$
\begin{aligned}
A &= (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
P(A) &= \underbrace{P(A_1)}_{\frac{5}{20}} \underbrace{P(A_2|A_1)}_{\frac{4}{19}} \underbrace{P(A_3|A_1 \cap A_2)}_{\frac{3}{18}} \\
&= \frac{1}{114}
\end{aligned}
$$

1.12 Ασκήσεις

Ομάδα μπάσκετ από 10 άτομα

1. Ομάδα 5 ατόμων: $\mathrm{C}(10,5) = \frac{10!}{(10-5)!\,5!}$
2. Ομάδα 5 ατόμων όπου παίζει ρόλο η σειρά: $\mathrm{P}(10,5) = \frac{10!}{(10-5)!}$
3. Ομάδα 5 ατόμων που μπορούν να αλλάζουν αριθμό, με 2 standard παίκτες: $\mathrm{C}(8,3) \cdot 5!$

Άσκηση 2

(α)

$$
\begin{aligned}
S &= \{123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345\} \quad \text{(δε με ενδιαφέρει η σειρά)} \\
A &= \{123\} \\
B &= \{124, 134, 234\} \\
\Gamma &= \{125, 135, 145, 235, 245, 345\}
\end{aligned}
$$

(β) Προφανές

Άσκηση 3 $\boxed{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4}$

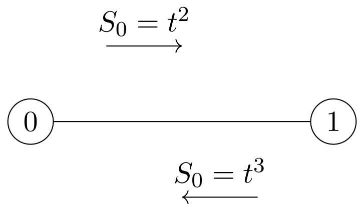
$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{3}{4}$$

$$
\begin{aligned}
S &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \\
A &= \{a_1, a_4\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R &= A_1 \cup (A_2 \cap A_3) \cup A_4 \\
P(R) &= P(A_1) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_4)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 6 Για το σπίτι.

Άσκηση 7



- Από το 0 στο 0.5: $\Delta t = \sqrt{\frac{1}{2}}$
- Από το 0.5 στο 1: $\Delta t = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$
- $\vdots$

$$P(A) = \frac{(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}}{2}$$

Άσκηση 9 Για το σπίτι.

Άσκηση 10

$$\begin{aligned} P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P \\ P(\Gamma E) = q \\ R = (A_1 \cup A_2) \cap \big((A_3 \cup (\Gamma E \cap A_4)\big) \end{aligned}$$