

# Αριθμητική Ανάλυση

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Για τον κώδικα σε L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, ενημερώσεις και προτάσεις:  
<https://github.com/kongr45gpen/ece-notes>

2017

Τελευταία ενημέρωση: 22 Φεβρουαρίου 2017

## Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Ακρίβεια vs Ταχύτητα	2
2	Επίλυση Εξισώσεων	2
2.1	Μέθοδος Διχοτόμησης	3
2.1.1	Σύγκλιση	3

### Αριθμητική ανάλυση - Numerical Analysis

Μάθημα 4 ώρες την εβδομάδα - δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ θεωρίας και ασκήσεων.

Και τα δύο βιβλία προτείνονται, το μάθημα γίνεται περισσότερο με βάση το βιβλίο του κ. Πιτσούλη, του κ. Δούγαλη είναι περισσότερο μαθηματικό.

Στις εξετάσεις δεν θα υπάρχει τυπολόγιο/βιβλίο, αλλά θα δίνονται τύποι που χρειάζονται στα θέματα. Απαραίτητο το κομπιουτεράκι.

## Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Η αριθμητική ανάλυση μάς δίνει *προσεγγιστικές* λύσεις σε μοντέλα και μαθηματικά προβλήματα. Σε δύσκολα προβλήματα, ζητάμε:

- **Ακρίβεια** αποτελέσματος
- **Ταχύτητα** υπολογισμού

Θα δούμε τα εξής προβλήματα:

- **Επίλυση εξισώσεων**

**Παράδειγμα** Ένας πελάτης θέλει να καταθέσει  $P \in$  για  $N$  χρόνια στην τράπεζα, και εγώ του λέω ότι θα του επιστρέψω  $A \in$  από την κατάθεση. Ο πελάτης όμως ενδιαφέρεται για το ετήσιο επιτόκιο  $R$ .

Προκύπτει μια εξίσωση της μορφής:

$$A = P + P \left( 1 + \frac{R}{12} \right) + \dots$$
$$f(R) = \frac{P}{R/12} \left[ \left( 1 + \frac{R}{12} \right)^N - 1 \right] = 0, \quad R = ?$$

Θυμόμαστε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Bolzano για να βρούμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον λύση μέσα σε ένα διάστημα, οπότε μπορούμε να "φανταστούμε" έναν αριθμό κοντά στη λύση, και να κλείνουμε συνεχώς ένα διάστημα γύρω από αυτήν (το διάστημα στις εξετάσεις θα δίνεται, π.χ. *βρείτε μία λύση στο διάστημα  $[2.5, 3.5]$  με ακρίβεια  $10^{-5}$* ), αν και αυτό δεν θα γίνεται στον πραγματικό κόσμο.

- **Παρεμβολή**

Σε έναν σταθμό διοδίων μετρώ πόσα αυτοκίνητα περνάν το κάθε λεπτό (π.χ. το 11<sup>ο</sup> λεπτό περνάν 4, το 12<sup>ο</sup> περνάν 7, κλπ.)

Θέλω να βρω ένα πολυώνυμο που να συνδέει όλα τα σημεία μεταξύ τους (θα αποδείξουμε ότι τέτοιο πολυώνυμο πάντα υπάρχει), ή ένα πολυώνυμο (αρκετά χαμηλού βαθμού, ώστε να μην γίνονται πολλές πράξεις) με αρκετά καλή προσέγγιση.

Με αυτόν τον τρόπο θα μπορώ να προσεγγίσω τιμές που δεν γνωρίζω, π.χ. αν πήγα για καφέ στο 13<sup>ο</sup> λεπτό

- **Προσέγγιση**

- **Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα**

Exact και προσεγγιστικές λύσεις συστημάτων πολλών αγνώστων.

- **Ολοκλήρωση**

- **Υπολογισμός ιδιοτιμών & ιδιοδιανυσμάτων**

- **Παραγοντοποίηση πινάκων σε γινόμενο πινάκων**

Βολεύει κυρίως για την επίλυση συστημάτων.

- **Επίλυση κανονικών διαφορικών εξισώσεων**

- **Βελτιστοποίηση**

Για παράδειγμα, να πρέπει να ελαχιστοποιήσω μια συνάρτηση τη στιγμή που πρέπει να τηρούνται κάποιες συνθήκες.

## 1.1 Ακρίβεια vs Ταχύτητα

Απόλυτο Σφάλμα:  $|X_t - X_c|$  (απόσταση της λύσης που βρήκα από την πραγματική)

Σχετικό Σφάλμα:  $\frac{|X_t - X_c|}{|X_t|}$

Επειδή δεν θα γνωρίζουμε την πραγματική λύση  $X_t$ , θα βρίσκουμε το μέγιστο σφάλμα.

Για παράδειγμα, σε υπολογιστές έχουμε σφάλματα στρογγύλευσης και αποκοπής:

0.66666

0.66 ← αποκοπή

0.67 ← στρογγύλευση

## Κεφάλαιο 2 Επίλυση Εξισώσεων

$f(x) :$  βρείτε  $\bar{x}$  έτσι ώστε  $f(\bar{x}) = 0$ .

Η επίλυση είναι εύκολη όταν η  $f$  είναι πολυώνυμο μέχρι 2<sup>ου</sup> βαθμού, όχι όμως όταν είναι μεγαλύτερου, ή όταν έχει κι άλλους όρους (π.χ. εκθετικούς) μέσα.

- Δημιουργούμε μια ακολουθία  $x_1, \dots, x_n$  προσέγγισης της  $\bar{x}$ .
- Σε κάθε βήμα κάνουμε έλεγχο σύγκλισης για να δούμε πόσο κοντά είμαστε.

## 2.1 Μέθοδος Διχοτόμησης

Θα χρησιμοποιήσω θεώρημα Bolzano ( $f(a) \cdot f(b) < 0$ )

Ξεκινάω από μία αρχική προσέγγιση/διάστημα (η μέθοδος διχοτόμησης δεν δίνει λύση συγκεκριμένη, αλλά διάστημα - τη λύση την παίρνω σαν το μέσο του διαστήματος).

Συνέχεια κόβω το διάστημα στη μέση, έτσι ώστε  $f(\text{των άκρων})$  να είναι ετερόσημα, και παίρνω συνεχώς ένα μικρότερο διάστημα.

Σταματάω όταν είναι επιτυχής ο έλεγχος σύγκλισης, π.χ  $|c_{k+1} - c_k| < \epsilon \rightarrow 10^{-5}$ , δηλαδή το διάστημα στο οποίο βρίσκεται η ρίζα είναι αρκετά μικρό.

Θα διαπιστώσουμε ότι, αν και αυτή η μέθοδος λειτουργεί πάντα, είναι αρκετά αργή.

**Παράδειγμα** Να βρεθεί ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = x^3 + x - 1$  στο διάστημα  $[0, 1]$  με ακρίβεια  $10^{-3}$ .

$$f(0) \cdot f(1) < 0$$

$$k = 1, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad m = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0.5$$

$$f(m) = -0.375 < 0$$

$$f(0.5) \cdot f(1) < 0$$

Άρα η λύση βρίσκεται μεταξύ 0.5 και 1.

Για το επόμενο βήμα:

$$k = 2, \quad m_2 = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75$$

$$f(m_2) = 0.172 > 0$$

$$f(m_1)f(m_2) < 0$$

$$k = 3, \quad m_3 = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

$$f(m_3) = -0.131$$

$$f(m_2)f(m_3) < 0$$

⋮

### 2.1.1 Σύγκλιση

Όπου  $r$  και  $m_n$  η πραγματική και προσεγγιστική λύση αντίστοιχα:

$$|r - m_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

επειδή στη  $n$ -οστή επανάληψη έχω κόψει το διάστημα στα 2 σε  $n$  φορές.

Για σφάλμα  $10^{-5}$ , θέλουμε  $|r - m_n| = 10^{-5}$ :

$$10^{-5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \simeq 16.667 \Rightarrow n = 17$$