# Σημειώσεις Διαφορικές Εξισώσεις

Καναβούρας Κωνσταντίνος
http://users.auth.gr/konkanant

2016, Εαρινό εξάμηνο

## Μέρος I

# Σεβαστιάδης

Χρήστος Σεβαστιάδης

## Κεφάλαιο 1

**Ορισμός: Διαφορική εξίσωση**

Μια εξίσωση που αποτελείται από μια συνάρτηση και τις παραγώγους της

**Langrange's** $x', x'', x''', x^{(4)}, \ldots$

**Newton's** $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$

**Leibniz'** $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}$

*π.χ.*

$$x(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\sin(t)$$

**Ορισμός 1.1: Τάξη**

**Τάξη** ονομάζεται ο μεγαλύτερος *βαθμός* παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

**Ορισμός 1.2: Βαθμός**

**Βαθμός** ονομάζεται η μεγαλύτερη *δύναμη* παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

## Κεφάλαιο 2 Διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

**Ορισμός**

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

### 2.1 Χωριζόμενες διαφορικές εξισώσεις

Τυπική μορφή:

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)} = \frac{dx}{dt} \implies \underbrace{N(t, x)}_{N(x)}\, dx + \underbrace{M(t, x)}_{M(t)}\, dt = 0$$

Αν δηλαδή τα $N(t, x)$, $M(t, x)$ εξαρτώνται μόνο από τα $x$ και $t$ αντίστοιχα, η εξίσωση ονομάζεται **χωριζόμενη**, και το αποτέλεσμά της μπορεί να βρεθεί με ολοκληρώματα:

$$\int N(x)\, dx + \int M(t)\, dt = c$$

**Άσκηση: 2.1**

$$x\,\mathrm{d}x - t^2\,\mathrm{d}t = 0$$

$$N(x) = x, \quad M(t) = -t^2$$

$$\begin{aligned}
&\int x\,\mathrm{d}x + \int (-t^2)\,\mathrm{d}t = c \implies \\
&\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}t^3 = c \implies \\
&x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}t^3 + 2c} \implies \\
&x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}t^3 + \kappa}
\end{aligned}$$

με $\kappa = 2c$

**Άσκηση: 2.2**

$$x' = x^2 t^3$$

$$\begin{aligned}
&\implies \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 t^3 \\
&\implies \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - t^3\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\implies \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int (-t^3)\,\mathrm{d}t = c \\
&\implies -\frac{1}{x} - \frac{t^4}{4} = c \\
&\implies -\frac{1}{x} = c + \frac{t^4}{4} \\
&\implies -\frac{4}{x} = 4c + t^4 \\
&\implies x = \frac{-4}{t^4 + \kappa}, \quad \text{με } \kappa = 2c
\end{aligned}$$

**Άσκηση: 2.3**

$$x' = \frac{t+1}{x^4+1}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t+1}{x^4+1} \\
&\implies (x^4+1)\,\mathrm{d}x + (-t-1)\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\implies \int (x^4+1)\,\mathrm{d}x + \int (-t-1)\,\mathrm{d}t = c \\
&\implies \frac{x^5}{5} + x - \frac{t^2}{2} - t = c
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, χωρίς αρχική συνθήκη, βρίσκουμε γενικές λύσεις ως αποτέλεσμα. Με τη χρήση μιας αρχικής συνθήκης, μπορούμε να βρούμε και την ειδική λύση της εξίσωσης.

**Άσκηση: 2.4**

$$e^t\,\mathrm{d}t - x\,\mathrm{d}x = 0; \quad x(0) = 1 \leftarrow \text{αρχική συνθήκη}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \int x\,\mathrm{d}x + \int (-e^t)\,\mathrm{d}t = c \\
&\implies \frac{x^2}{2} - e^t = c \\
&\implies x^2 = 2e^t + 2c \\
&\implies x^2 = 2e^t + \kappa, \quad \text{με } \kappa = 2c
\end{aligned}$$

Όμως $x(0) = 1$, άρα:

$$\begin{cases} x^2 = 2e^t + \kappa \\ x(0) = 1 \end{cases} \implies x(0)^2 = 2e^0 + \kappa \implies \boxed{\kappa = -1}$$

Επομένως τελικά:

$$x^2 = 2e^t - 1 \implies x = \pm\sqrt{2e^t - 1} \implies \boxed{x = \sqrt{2e^t - 1}}$$

Η αρχική συνθήκη πράγματι επαληθεύει το αποτέλεσμα $x$. Πρέπει όμως και $x \in \mathbb{R}$, $2e^t - 1 \geq 0$. Από τη διαφορική εξίσωση έχουμε $x' = \frac{e^t}{x}$, άρα πρέπει $2e^t - 1 > 0 \implies \boxed{t > \ln\frac{1}{2}}$.

$$\int_{x_0}^{x} N(x)\,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^{t} M(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

**Άσκηση: 2.5**

$$x\cos x\,\mathrm{d}x + (1 - 6t^5)\,\mathrm{d}t = 0; \quad t(\pi) = 0$$

$x_0 = \pi$, $t_0 = 0$

$$\begin{aligned}
&\implies \int_{\pi}^{x} x\cos x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{t} (1 - 6t^5)\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\implies x\sin x\Big|_{\pi}^{x} + \cos x\Big|_{\pi}^{x} + (t - t^6)\Big|_{0}^{t} = 0 \\
&\implies x\sin x + \cos x + 1 + t - t^6 \\
&\implies \boxed{x\sin x + \cos x + 1 = t - t^6}
\end{aligned}$$

## 2.2 Ομοιογενείς

$$f(t,x) = \frac{-M(t,x)}{N(t,x)}$$

**Ορισμός 2.1**

Αν $\forall a \in \mathbb{R} : f(at, ax) = f(t,x)$, λέμε ότι η εξίσωση είναι **ομοιογενής**.

**Θεώρημα**

Αν μια εξίσωση είναι ομοιογενής, μπορούμε να την λύσουμε μειώνοντάς/μετατρέποντάς την σε χωριζόμενη, εφαρμόζοντας το μαθηματικό κόλπο που ονομάζεται ¨αντικατάσταση μεταβλητής¨, δηλαδή, όπου $u$ συνάρτηση:

$$\boxed{x = ut \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u}$$

**Άσκηση: 2.6**

$$x' = \frac{x+t}{t}$$

---

$\implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x+t}{t}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t,x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad f(at,ax) = \frac{ax+at}{at} = \frac{x+t}{t} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{ut+t}{t} \\
\implies &\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = u + 1 \\
\implies &t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 \\
\implies &\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}u = 0 \text{ χωριζόμενη} \\
\implies &\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int (-1)\,\mathrm{d}u = c \\
\implies &\ln|t| - u = c \\
\implies &u = \ln|t| - c \text{ με } c = -\ln|\kappa| \\
\implies &\boxed{u = \ln|\kappa t|} \\
\implies &\frac{x}{t} = \ln|\kappa t| \implies \boxed{x = t\ln|\kappa t|}
\end{aligned}$$

**Άσκηση: 2.7**

$$x' = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3}$$

$\implies \frac{dx}{dt} = \frac{2x^4+t^4}{tx^3}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t,x) = \frac{dx}{dt}, \quad f(at,ax) = \frac{2(ax)^4 + (at)^4}{(at)(ax)^3} = \frac{a^4 2x^4 + a^4 t^4}{a^4 t x^3} = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{du}{dt}t + u = \frac{2(ut)^4 + t^4}{t(ut)^3} \\
\implies &\tfrac{du}{dt}t + u = \frac{2u^4\cancel{t^4} + \cancel{t^4}}{u^3\cancel{t^4}} \\
\implies &\tfrac{du}{dt}t + u = \frac{2u^4 + 1}{u^3} \\
\implies &\tfrac{du}{dt}t = \frac{2u^4 + 1}{u^3} - u = \frac{u^4 + 1}{u^3} \\
\implies &\frac{u^3}{u^4 + 1}\,du - \frac{1}{t}\,dt = 0 \text{ χωριζόμενη} \\
\implies &\int \frac{u^3}{u^4 + 1}\,du + \int \frac{-1}{t}\,dt = c \\
\implies &\frac{1}{4}\ln(u^4 + 1) - \ln|t| = c \\
\implies &\boxed{u^4 + 1 = (\kappa t)^4} \text{ με } c = \ln|x| \\
&x = ut \implies u = \frac{x}{t} \implies \left(\frac{x}{t}\right)^4 + 1 = (\kappa t)^4 \\
\implies &\frac{x^4}{t^4} + 1 = \kappa^4 t^4 \\
\implies &\boxed{x^4 = c_1 t^8 - t^4} \text{ με } c_1 = \kappa^4
\end{aligned}$$

**Άσκηση: 2.8**

$$x' = \frac{t^2+x^2}{tx}; x(1) = -2$$

$\implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t^2+x^2}{tx}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t,x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad f(at,ax) = \frac{(at)^2+(ax)^2}{(at)(ax)} = \frac{\cancel{a^2}t^2+\cancel{a^2}x^2}{\cancel{a^2}tx} = \frac{t^2+x^2}{tx} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{t^2+(ut)^2}{t(ut)}\\
\implies &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{\cancel{t^2}+\cancel{t^2}u^2}{\cancel{t^2}u}\\
\implies &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{1+u^2}{u}\\
\implies &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t = \frac{1+\cancel{u^2}-\cancel{u^2}}{u} = \frac{1}{u}\\
\implies &u\,\mathrm{d}u - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0 \text{ χωριζόμενη}\\
\implies &\int u\,\mathrm{d}u + \int \frac{-1}{t}\,\mathrm{d}t = c\\
\implies &\frac{u^2}{2} - \ln|t| = c\\
\implies &u^2 = 2\ln|t| + 2c\\
\implies &\boxed{u^2 = \ln t^2 + \kappa} \text{ με } \kappa = 2c\\
&x = ut \implies u = \frac{x}{t} \implies \frac{x^2}{t^2} = \ln t^2 + \kappa\\
\implies &\boxed{x^2 = t^2\ln t^2 + \kappa t^2}
\end{aligned}$$

Επειδή $x(1) = 2$, έχουμε:

$$(-2)^2 = 1^2\ln 1^2 + \kappa 1^2 \implies 4 = 0 + \kappa \implies \boxed{\kappa = 4}$$

Επομένως τελικά:

$$x^2 = t^2\ln t^2 + 4t^2 \implies \boxed{x = -\sqrt{t^2\ln t^2 + 4t^2}}$$

## 2.3 Ακριβείς

**Ορισμός**

Όταν:

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$$

τότε η εξίσωση λέγεται ακριβής η πλήρης.
Υπάρχει $dF(t,x) = N(t,x)\,\mathrm{d}x + M(t,x)\,\mathrm{d}t$ με Γενική Λύση $F(t,x) = c$.

**Άσκηση: 2.16**

$$(t+\sin x)\,\mathrm{d}t+(t\cos x-2x)\,\mathrm{d}x=0$$

---

$$\underbrace{(t+\sin x)\,\mathrm{d}t}_{M(t,x)\,\mathrm{d}t}+\underbrace{(t\cos x-2x)\,\mathrm{d}x}_{N(t,x)\,\mathrm{d}x}=0$$

Δοκιμή:

$$\begin{cases} M(t,x) &= t+\sin x \\ N(t,x) &= t\cos x-2x \end{cases} \implies \frac{\partial M(t,x)}{\partial x}=\cos x=\frac{\partial N(t,x)}{\partial t}=\cos x$$

Άρα η ΔΕ είναι ακριβής, επομένως υπάρχει $F(t,x)$ τέτοια ώστε:

$$dF=N(t,x)\,\mathrm{d}x+M(t,x)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{dF=\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}t} \leftarrow \text{ ολικό διαφορικό της } F$$

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}=N(t,x),\quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=M(t,x)\xRightarrow{\text{ολοκλήρωση ως προς } t}$$

$$\implies \cancel{\int\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}t}^{\,F(t,x)}=\int(t+\sin x)\,\mathrm{d}t\implies$$

$$\implies \boxed{F(t,x)=\frac{1}{2}t^2+t\sin x+\overbrace{h(x)}^{\text{ολοκληρωτική σταθερά}}}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial F(t,x)}{\partial x}=t\cos x+h'(x)\\
&\implies t\cos x-2x=t\cos x+h'(x)\\
&\implies h'(x)=-2x\\
&\implies \int h'(x)\,\mathrm{d}x=\int(-2x)\,\mathrm{d}x\\
&\implies \boxed{h(x)=-x^2+c_1}
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$F(t,x)=\frac{1}{2}t^2+t\sin x-x^2+c_1=c\xRightarrow{c_2=c-c_1}$$

$$\implies \boxed{\frac{1}{2}t^2+t\sin x-x^2=c_2}\ \text{Γενική λύση}$$

**Άσκηση: 2.17**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2 + xe^{tx}}{2x - te^{tx}}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2 + xe^{tx}}{2x - te^{tx}} \xRightarrow{\text{διαφορική μορφή}} \underbrace{(2 + xe^{tx})}_{M(t,x)=2+xe^{tx}}\,\mathrm{d}t + \underbrace{(te^{tx} - 2x)}_{N(t,x)=te^{tx}-2x}\,\mathrm{d}x = 0$$

Δοκιμή:

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = e^{tx} + xte^{tx} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = xte^{tx} + e^{tx}$$

συνεπώς είναι ακριβής, οπότε υπάρχει $F(t,x)$, με $dF = M(t,x)\,\mathrm{d}t + N(t,x)\,\mathrm{d}x$, με λύση $F(t,x) = c$.

$$\text{Ολικό διαφορικό} \to dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x), \quad \tfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x) = 2 + xe^{tx} \xRightarrow{\text{ολοκλήρωση ως προς } t} \\
&\Longrightarrow \int \tfrac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \int \left(2 + xe^{tx}\right)\mathrm{d}t \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow F(t,x) = 2t + e^{tx} + h(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Παραγώγιση ως προς } x \to \tfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = te^{tx} + h'(x) &\Longrightarrow te^{tx} + h'(x) = te^{tx} - 2x \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow h'(x) = -2x \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow h(x) = \int (-2x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow h(x) = -x^2 + c_1
\end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$\begin{aligned}
&F(t,x) = 2t + e^{tx} - x^2 + c_1 \\
\Longrightarrow\ &2t + e^{tx} - x^2 + c_1 = c \\
\Longrightarrow\ &\boxed{2t + e^{tx} - x^2 = c_2, \qquad c_2 = c - c_1}
\end{aligned}$$

**Άσκηση: 2.19**

$$\left(2x^2t-2x^3\right)\mathrm{d}t+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)\mathrm{d}x=0$$

---

$$\underbrace{\left(2x^2t-2x^3\right)}_{M(t,x)=2x^2t-2x^3}\mathrm{d}t+\underbrace{\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)}_{N(t,x)=4x^3-6x^2t+2xt^2}\mathrm{d}x=0$$

$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}=4xt-6x^2=\frac{\partial N(t,x)}{\partial t}=0-6x^2+4xt$, ΔΕ ακριβής, οπότε υπάρχει $F(t,x)$ με $\mathrm{d}F(t,x)=M(t,x)\,\mathrm{d}t+N(t,x)\,\mathrm{d}x$ με λύση $F(t,x)=c$.

$$\mathrm{d}F(t,x)=\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}t+\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial F(t,x)}{\partial x}=N(t,x),\quad \tfrac{\partial F(t,x)}{\partial t}=M(t,x)=2x^2t-2x^3 && \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow \int\tfrac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}t=\int(2x^2t-2x^3)\,\mathrm{d}t && \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow F(t,x)=x^2t^2-2x^3t+h(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial F(t,x)}{\partial x}&=2xt^2-6x^2t+h'(x)\ \Longrightarrow\\
\Longrightarrow\ \cancel{2xt^2}-\cancel{6x^2}t+h'(x)&=4x^3-6x^2t+\cancel{2x+2}\ \Longrightarrow\\
\Longrightarrow\ h'(x)&=4x^3\xrightarrow{\text{ολοκλ.}}h(x)=x^4+c_1
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
F(t,x)&=x^2t^2-2x^3t+x^4+c_1\ \Longrightarrow\\
\Longrightarrow\ x^2t^2-2^3t+x^4+c_1&=c\ \Longrightarrow\\
\Longrightarrow\ x^2t^2-2x^3t+x^4&=c-c_1\ \Longrightarrow\\
\Longrightarrow&\begin{cases}(x^2-xt)^2 &=c_2\\ c_2&=c-c_1\end{cases}\Longrightarrow\\
\xrightarrow{c_3=\pm\sqrt{c_2}}\ x^2-xt&=c_3\ \xrightarrow[\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}]{ax^2+bx+c=0}\\
\Longrightarrow&\ \boxed{x=\frac{t\pm\sqrt{t^2+4c_3}}{2},\qquad c_3=\pm\sqrt{c_2}}
\end{aligned}$$

**Άσκηση: 2.20**

$$2tx\,\mathrm{d}t + (1+t^2)\,\mathrm{d}x = 0; \quad x(2) = -5$$

---

$$\underbrace{2tx}_{M(t,x)}\,\mathrm{d}t + \underbrace{(1+t^2)}_{N(t,x)}\,\mathrm{d}x = 0; \quad x(2) = -5$$

$$M(t,x) = 2tx, \quad N(t,x) = 1+t^2 \tag{1}$$

$F(t,x)$, με $\mathrm{d}F(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial t}\,\mathrm{d}t$.
$\mathrm{d}F(t,x) = N(t,x)\,\mathrm{d}x + M(t,x)\,\mathrm{d}t$

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x) = 2tx \implies \\ \implies \int \tfrac{\partial F(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \int (2tx)\,\mathrm{d}t \implies \end{aligned}$$

$$\implies F(t,x) = t^2x + h(x) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \tfrac{\partial F(t,x)}{\partial x} = t^2 + h'(x) \\ (2),\ (1) \end{cases} \implies \\ \implies t^2 + h'(x) = 1 + t^2 \implies h'(x) = 1 \implies \\ \implies \begin{cases} h(x) = x + c_1 \\ (3) \end{cases} \implies \begin{cases} F(t,x) = t^2x \\ (4) \end{cases} \implies t^2 + x + c_1 \\ \implies t^2x + x = c_2 (c_2 = c - c_1) \implies x = \frac{c_2}{t^2+1} \implies (x(2) = 5)5 = \frac{c_2}{2^2+1} \implies x = \frac{-25}{t^2+1} \end{aligned}$$

$$\implies F(t,x) = t^2x + x + c_1 \tag{4}$$

# Κεφάλαιο 3 Overview

## 3.1 Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ - Ordinary Differential Equations)

**Ορισμός 3.1**

Εμπλέκουν:

- μία ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. $t$, $x$)
- μια εξαρτημένη και τις παραγώγους της (π.χ. $i, y, u$)

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

**Μη συνήθεις** είναι οι Μερικές Διαφορικές Εξισσώεις (Partial Differential Equations - PDE) που εμπλέκουν:

- πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές (π.χ. $x, y, z$)

- μία εξαρτημένη μεταβλητή και τις μερικές παραγώγους της

### 3.2 $1^{ης}$ τάξης ΔΕ

**Ορισμός 3.2**

όταν

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x)$$

**Ορισμός 3.3: Τυπικής μορφής**

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)}$$

**Διαφορική μορφή**

$$N(t, x)\,\mathrm{d}x + M(t, x)\,\mathrm{d}t = 0$$

**Ορισμός 3.4: Χωριζόμενη**

όταν

$$\begin{cases} N(t, x) & = N(x) \\ M(t, x) & = M(t) \end{cases}$$

τότε

$$N(x)\,\mathrm{d}x + M(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

με λύση

$$\int N(x)\,\mathrm{d}x + \int M(t)\,\mathrm{d}t = c$$

ή

$$\int_{x_0}^{x} N(x)\,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^{t} M(t)\,\mathrm{d} = 0$$

**Ορισμός 3.5: Ομογενής - Ομοιογενής**

όταν $\forall a \in \mathbb{R}$

$$F(at, ax) = f(t, x)$$

τότε θέτω $x = ut$, άρα $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} t + u$

# Κεφάλαιο 4

Το τοστ είναι η καλύτερη τροφή

### 4.1 ΔΕ $1^{ης}$ τάξης

ΤΜ (Τυπική μορφή): $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x)$

$\boxed{\text{ΔΜ (Διαφορική μορφή): } N(t, x)\,\mathrm{d}x + M(t, x)\,\mathrm{d}t = 0}$

Ακριβής: $\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} \to \mathrm{d}F(t, x)$

$$\mathrm{d}F(t, x) = N(t, x)\,\mathrm{d}x + M(t, x)\,\mathrm{d}t$$
$$F(t, x) = c$$

$$\underbrace{G(t,x)}_{\text{Μπορεί να υπάρχει τέτοια συνάρτηση}} \cdot (N(t,x)\,\mathrm{d}x + M(t,x)\,\mathrm{d}t) = 0$$

**Άσκηση: 2.23 Ολοκληρωτικός παράγοντας, επίλυση μέσω ελέγχου**

$$x\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x = 0$$
$$M(t,x) = x,\ \ N(t,x) = t$$
$$\tfrac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 1,\ \ \tfrac{\mathrm{d}N(t,x)}{\mathrm{d}t} = -1 \text{ δεν είναι ακριβής.}$$
$$\overbrace{G(t,x)}^{\text{υποφήφιος}} = -\frac{1}{t^2}$$
$$-\frac{1}{t^2}(x\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x) = 0 \implies -\frac{x}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{\frac{1}{t}}{t^2}\,\mathrm{d}x = 0$$
$$M(t,x) = -\frac{x}{t^2}m\ N(t,x) = \frac{1}{t}$$
$$\tfrac{\partial M(t,x)}{\partial x} = -\frac{1}{t^2} = \overbrace{\tfrac{\partial N(t,x)}{\partial t}}^{\text{ακριβής}} = -\frac{1}{t^2}$$

$$\text{Αν } \boxed{\frac{1}{N}\left(\tfrac{\partial M}{\partial x} - \tfrac{\partial N}{\partial t}\right) \equiv g(t) \implies G = e^{\int g(t)\,\mathrm{d}t}}$$

.
Με διαφορά μερικών παραγώγων:

$$\boxed{\text{Αν } \frac{1}{N}\left(\tfrac{\partial M}{\partial x} - \tfrac{\partial N}{\partial t}\right) = h(x) \implies G = e^{\int g(t)\,\mathrm{d}x}}$$

**Άσκηση: 2.25**

$$x^2\,\mathrm{d}t + tx\,\mathrm{d}x = 0,\ \ M(t,x) = x^2,\ \ N(t,x) = tx$$

---

$$\tfrac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 2x \neq \tfrac{\partial N(t,x)}{\partial t} = x \text{ όχι ακριβής}$$
$$\frac{1}{M}\left(\tfrac{\partial M}{\partial x} - \tfrac{\partial N}{\partial t}\right) = \frac{1}{x^2}(2x - x) = \frac{1}{x} = h(x)$$
$$G(t,x) = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x} = e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}(x^2\,\mathrm{d}t + tx\,\mathrm{d}x) = 0 \implies x\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\tfrac{\partial M}{\partial x} = 1 = \tfrac{\partial N}{\partial t} = 1 \text{ ακριβής}$$

**Μορφή των όρων** $N$,$M$ αν $M = xf(tx)$ **και** $N = tg(tx)$, τότε:

$$G(t,x) = \frac{1}{tM - xN}$$

**Άσκηση: 2.26**

$$x' = \frac{tx^2 - x}{t}$$

---

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{tx^2 - x}{t} \Longrightarrow t\,\mathrm{d}x - (tx^2 - x)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow x(1 - tx)\,\mathrm{d}t) + t\,\mathrm{d}x = 0$$

$$M(t,x) = x \cdot (1 - tx) \Longrightarrow \frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 1 - 2tx \neq \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = 1 \text{ όχι ακριβής}$$

αλλά:$M = xf(t)$ **και** $N = tg(tx)$.
Επομένως:

$$G(t,x) = \frac{1}{tM - xN} = \frac{1}{tx(1 - tx) - xt} = \frac{1}{-t^2x^2} = -\frac{1}{(tx)^2}$$

Είναι:

$$-\frac{1}{(tx)^2}\left(x(1 - tx)\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x\right) = 0 \Longrightarrow$$
$$\frac{tx - 1}{t^2x}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{tx^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

και συνεχίζω με τη μέθοδο της ακριβούς.

# Κεφάλαιο 5 Θεωρία των Λύσεων

Μορφή ΔΕ $n^{\text{ης}}$ τάξης:

$$b_n(t) \cdot x^{(n)} + b_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \cdots + b_2(t)x'' + b_1(t)x' + b_0(t)x = g(t)$$

όπου: $g(t), b_j(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ εξαρτώνται αποκλειστικά από το $t$.

Αν $g(t) \equiv 0$, τότε η ΔΕ είναι ομογενής (ΟΜ - homogenous).

Αν $g(t) \neq 0$, τότε η ΔΕ είναι μη ομογενής (ΜΟ - non-homogenous.

Όταν όλοι οι συντελεστές $b_j(t)$ είναι σταθερές, τότε ΔΕΣΣ (σταθερών συντελεστών).

Όταν ένας τουλάχιστον $b_j(t)$ δεν είναι σταθερά, ΔΕΜΣ (μεταβλητών συντελεστών).

**Θεώρημα 5.1**

ΔΕ $n$ τάξης με $n$ ΑΣ (αρχικές συνθήκες):

$$x(t_0) = c_0, x'(t_0) = c_1, x''(t_0) = c_2, \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

ΔΕ $b_n(t)x^{(n)} + b_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + b_2(t)x'' + b_1(t)x' + b_o(t)x = g(t)$
Αν $g(t)$ και $b_i$ συνεχείς σε διάστημα $\phi$ που περιλαμβάνει το $t_0$ και $b_n(t) \neq 0$ στο $\phi$, τότε το πρόβλημα εχει μία μοναδική λύση (ορισμένη στο $\phi$).

Διαιρώ με $b_n(t)$ και έχω:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = \phi(t)$$

$$a_j'(t) = \frac{b_j(t)}{b_n(t)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$\phi(t) = \frac{g(t)}{b_n(t)}$$

**Διαφορικός τελεστής $\mathbf{L}(x)$**

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}(x) \equiv x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)\cdot x'' + a_1(t)\cdot x' + a_0(t)\cdot x \\
&\mathbf{L}(x) = \phi(t) \quad \text{ΜΟ ΓΡ ΔΕ } n^{\text{ης}} \text{ τάξης} \\
&\mathbf{L}(x) = 0 \quad \text{ΟΜ}
\end{aligned}$$

**Ορισμός 5.1**

Το σύνολο $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ είναι ΓΕ (γραμμικά εξαρτημένο) για ένα διάστημα Δ όταnν υπάρχουν συντελεστές όχι όλοι μηδενικοί τέτοιοι ώστε:

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) \equiv 0 \quad \Delta$$

**Θεώρημα 5.2**

Έστω η ομογενής $n$-οστής τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση $\mathbf{L}(x) = 0$.
Αν $x_1(t),\ x_2(t), \ldots,\ x_n(t)$ είναι λύσεις, τότε και ο γραμμικός τους συνδυασμός είναι γενική λύση της ομογενούς:

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) \quad \text{ΓΛ (Γενική Λύση)}$$

**Θεώρημα 5.3: Βροσκιανή**

$$\text{Ορίζουσα } W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\begin{cases} W \neq 0 \text{ έστω σε ένα σημείο } \in \Delta & \rightarrow \text{ΓΑ (Γραμμικά Ανεξάρτητες)} \\ W \equiv 0 \textbf{ και } \text{κάθε συνάρτηση είναι λύση της ίδιας ΔΕ} & \rightarrow \text{ΓΕ (Γραμμικά Εξαρτημένες)} \end{cases}$$

**Θεώρημα 5.4**

$$\overbrace{\mathbf{L}(x)}^{\text{Ομογενής ΔΕ}} = \phi(t)$$

Έστω $\begin{cases} x_n(t) & \text{ΓΛ της ΟΜ (Ομογενούς)} \\ x_p(t) & \text{ΕΛ της ΜΟ (Μη ομογενούς)} \end{cases}$.
Τότε είναι ΓΛ ΜΟ (Γενική Λύση Μη Ομογενούς) η:

$$x(t) = x_n(t) + x_p(t)$$

Άσκηση: 3.2

$$\{1-t,\ 1+t,\ 1-3t\}$$

$$W(1-t,\ 1+t,\ 1-3t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1+t & 1-3t \\ \frac{\mathrm{d}(1-t)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}(1+t)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}(1-3t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}^2(1-t)}{\mathrm{d}t^2} & \frac{\mathrm{d}^2(1+t)}{\mathrm{d}t^2} & \frac{\mathrm{d}^2(1-3t)}{\mathrm{d}t^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-t & 1+t & 1-3t \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

**(β)**

$$c_1(1-t) + c_2(1+t) + c_3(1-3t) = 0$$
$$\underbrace{(c_1 + c_2 - 3c_3)}_{0}\, t + \underbrace{(c_1 + c_2 + c_3)}_{0} \equiv 0$$

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 - 3c_3 & = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 & = -2c_3c_2 \\ c_2 & = c_3 \\ c_3 & \text{αυθαίρετη σταθερά} \end{cases} \implies \begin{cases} c_3 & = 1 \\ c_1 & = -2 \\ c_2 & = 1 \end{cases} \implies \text{ΓΕ}$$

Άσκηση: 3.3

Βρείτε την Βροσκιανή:

$$\left\{t,\ t^2,\ t^3\right\}$$

$$W(t, t^2, t^3) = \begin{vmatrix} t & t^2 & t^3 \\ \frac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}(t^3)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}^2(t)}{\mathrm{d}t^2} & \frac{\mathrm{d}^2(t^2)}{\mathrm{d}t^2} & \frac{\mathrm{d}^2(t^3)}{\mathrm{d}t^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} t & t^2 & t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 2t^3$$

$$(-\infty, \infty),\ \ t = 3,\ \ W = 54 \neq 0 \implies \text{ΓΑ, θαυμάσια!}$$

**Άσκηση: 3.4**

$$\left\{t^3, \left|t^3\right|\right\} \quad [-1,1]$$

$$c_1 t^3 + c_2 \left|t^3\right| \equiv 0$$

$$\left|t^3\right| = t^3,\ t \geq 0 \quad / \quad \left|t^3\right| = -t^3,\ t \leq 0$$

$$\begin{cases} c_1 t^3 + c_2 t^3 & \equiv 0 \quad t \geq 0 \\ c_1 t^3 \cdot c_2 t^3 & \equiv 0 \quad t < 0 \end{cases} \implies c_1 = c_2 = 0 \text{ ΓΑ}$$

$$\frac{\mathrm{d}|t^3|}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} 3t^2 & \text{αν } t > 0 \\ 0 & \text{αν } t = 0 \\ -3t^2 & \text{αν } t < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \text{για } t > 0: & W\left(t^3, |t^3|\right) = \begin{vmatrix} t^3 & t^3 \\ 3t^2 & 3t^2 \end{vmatrix} \equiv 0 \\ \text{για } t = 0: & W\left(t^3, |t^3|\right) = 0 \\ \text{για } t < 0: & W\left(t^3, |t^3|\right) = \begin{vmatrix} t^3 & -t^3 \\ 3t^2 & -3t^2 \end{vmatrix} \equiv 0 \end{cases}$$

**Άσκηση: 3.5**

$$x'' - 2x' + x = 0$$
$$e^t,\ te^t \text{ Λύσεις}$$

Ο γραμμικός συνδυασμός $X = c_1 e^t + c_2 te^t$ είναι λύση της εξίσωσης;

---

$$W(e^t, te^t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^{2t} \not\equiv 0$$

Άρα οι εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, άρα, επειδή είναι λύσεις της διαφορικής, ο γραμμικός συνδυασμός τους είναι γενική λύση.

Μη ομογενής: $x'' - 2x' + x = e^{3t}$
Ειδική λύση: $\frac{1}{4}e^{3t} \to x_p = \frac{1}{4}e^{3t}$
Γενική λύση μη ομογενούς: $\underbrace{x(t)}_{\text{ΜΟ}} = \underbrace{x_h(t)}_{\text{ΟΜ}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{ΜΟ}}$

Άρα:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + \frac{1}{4}e^{3t}$$

# Κεφάλαιο 6

## 6.1 ΓΡ/ΔΕ/1ης

- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + p(t)x = q(t)$
  ή $\underbrace{f(t,x)}_{f(t,x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = q(t) - p(t)x$

  Τότε ΟΠ (Ολοκληρωτικός Παράγοντας) $G(t) = e^{\int p(t)\,\mathrm{d}x}$. Πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό παράγωντα παίρνουμε:

$$G(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + G(t)p(t)x = G(t)q(t)$$

ή

$$\frac{\mathrm{d}(Gt)}{\mathrm{d}t} = Gq(t)$$

που είναι μια ακριβής διαφορική εξίσωση.

Λύση:

$$x(t) = e^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}\left(\int e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t} q(t)\,\mathrm{d}t + c\right)$$

Αν τα $p(t) = a$ και $q(t) = b$ είναι σταθερά:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b,\ \ x(t) = e^{-at}\left(\frac{b}{a}e^{at} + c\right) = \frac{b}{a} + ce^{-at}$$

### 6.1.1 Bernoulli

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + p(t)x = q(t)x^n, \quad \text{με } n \neq 1, 0$$

Αντικατάσταση μεταβλητών: $u = x^{1-n} \to x,\ x'$

**Άσκηση: 4.1**

ΓΡ/ΔΕ/1ης

$$x' - 3x = 6$$

---

$$\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b$$
$$a = -3,\ b = 6$$
$$x(t) = \frac{b}{a} + ce^{-at} = \frac{6}{-3} + ce^{3t} \implies x(t) = ce^{3t} - 2$$

**Άσκηση: 4.2**

ΓΡ/ΔΕ/1ης

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2tx = t$$

---

$$\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}} + p(t)x = q(t) \implies \begin{cases} p(t) & = -2t \\ q(t) = t \end{cases}$$
$$\text{ΟΠ } G(t) = e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t} = e^{\int (-2t)\,\mathrm{d}t}$$
$$\int (-2t)\,\mathrm{d}t = -t^2 \text{ άρα } G(t) = e^{-t^2}$$
$$e^{-t^2}\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2te^{-t^2}x = te^{-t^2} \implies \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(xe^{-t^2}\right) = te^{-t^2} \implies \int \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(xe^{-t^2}\right)\mathrm{d}t = \int te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \implies$$
$$\implies xe^{-t^2} = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + c \implies \boxed{x = ce^{t^2} - \frac{1}{2}}$$

**Άσκηση: 4.3**

$$x' + \left(\frac{4}{t}\right) = t^4$$

---

$$x' + p(t)x = t^4 \qquad p(t) = \frac{4}{t},\; q(t) = t^4$$
$$G(t) = e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t} = e^{\int \frac{4}{t}\,\mathrm{d}t} = e^{4\ln|t|} = e^{\ln t^4} = t^4$$
$$t^4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + t^4\left(\frac{4}{t}\right)x = t^4\cdot t^4 \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(t^4x\right) = t^8 \implies$$
$$\implies \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^4x\right)\mathrm{d}t = \int t^8\,\mathrm{d}t \implies t^4x = \frac{1}{9}t^9 + c \implies \boxed{x = \frac{1}{9}t^5 + \frac{c}{t^4}}$$

**Άσκηση: 4.4**

$$x' + x = \sin t$$
$$x(\pi) = 1$$

---

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + p(t)x = q(t) \qquad p(t) = 1,\; q(t) = \sin t$$

$$G(t) = e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t} = e^{\int 1\,\mathrm{d}t} = e^t$$

$$e^t\left(x' + x\right) = e^t\sin t \implies$$
$$\implies \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^tx\right) = \int e^t\sin t\,\mathrm{d}t \implies$$
$$\implies e^tx = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + c \implies$$
$$\implies \boxed{x(t) = ce^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t}$$
$$1 = ce^{-\pi} + \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\cos\pi \implies c = e^{\pi}$$
$$\text{ΕΛ} \quad x(t) = \frac{1}{2}e^{\pi}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t \implies$$
$$\implies x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi-t} + \sin t - \cos t\right)$$

**Άσκηση: 4.6**

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - xz = -x; \quad z(0) = 4$$

---

$$p(x) = -x, \ q(x) = -x$$

$$G(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} = e^{\int(-x)\,\mathrm{d}x} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - xz\right) = e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) \implies$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}z\right) = e^{-\frac{x^2}{2}}z \implies$$

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}z\right)\mathrm{d}x = \int\left(e^{-\frac{x^2}{2}}x\right)\mathrm{d}x \implies$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}z = e^{-\frac{x^2}{2}} + c \implies$$

$$\boxed{z = ce^{\frac{x^2}{2}+1}} \ \Gamma\Lambda$$

$$-4 = ce^{\frac{0^2}{2}} + 1 \implies c = -5 \implies \boxed{z(x) = -5e^{\frac{x^2}{2}} + 1} \ \mathrm{E}\Lambda$$

**Άσκηση: 4.7**

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{2}{3}x^4$$

---

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$G(x) = e^{\int\left(\frac{-2}{x}\right)} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln x^{-2}}$$

$$G(x) = x^{-2}$$

$$x^{-2}(z' - \frac{2}{x}z) = \frac{2}{3}x^4x^{-2} \implies \dots \implies z(x) = cx^2 + g^2x^5$$

**Άσκηση: 4.10**

$$y' + xy = xy^2$$

Bernoulli

$$
\begin{aligned}
u = y^{1-n} = y^{1-2} = y^-1 \implies \\
u = \frac{1}{y} \implies y = \frac{1}{u} \text{ και } y' = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{u^2}u' \\
-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + x\frac{1}{u} = x\left(\frac{1}{u}\right)^2 \implies u' - xu = -x \\
G(x) = e^{\int(-x)\,\mathrm{d}x} = e^{-\frac{x^2}{2}},\ e^{-\frac{x^2}{2}}u' - e^{-\frac{x^2}{2}}xu = e^{-\frac{x^2}{2}}x \implies \\
\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ue^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}} \\
\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ue^{-\frac{x^2}{2}}\right)\mathrm{d}x = \int\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)\mathrm{d}x \implies \\
ue^{-\frac{x^2}{2}} + c \implies \boxed{u = ce^{\frac{x^2}{2}} + 1}\ \Gamma\Lambda\frac{1}{y} = ce^{\frac{x^2}{2}} + 1 \implies \boxed{y(x) = \frac{1}{ce^{\frac{x^2}{2}} + 1}}
\end{aligned}
$$

**Άσκηση: 4.11**

$$y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^{\frac{1}{3}}$$

$$n = \frac{1}{3},\ u = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}} \implies y = u^{\frac{3}{2}}$$

$$\implies y' = \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}u'$$

Άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}u' - \frac{3}{x}u^{\frac{3}{2}} = x^4\left(u^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \implies$$
$$\frac{3}{2}u'u - \frac{3}{x}u^2 = x^4 u \implies$$
$$\frac{3}{2}u' - \frac{3}{x}u = x^4 \implies$$
$$u' - \frac{2}{x}u = \frac{2}{3}x^4$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + p(t)u = q(t)$$
$$G(x) = e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x} = e^{-2\ln|x|} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\left(\frac{1}{x^2}\right)u' + \left(\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x}\right)u = \frac{1}{x^2}\frac{2}{3}x^4 \implies$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-2}u) = \frac{2}{3}x^2 \xRightarrow{\text{ολοκλ.}}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-2}u)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{3}x^2\,\mathrm{d}x \implies x^{-2}u = \frac{2}{9}x^3 + c \implies$$
$$\boxed{u(x) = cx^2 + \frac{2}{9}x^5} \implies$$
$$y^{\frac{2}{3}} = cx^2 + \frac{2}{9}x^5 \implies$$
$$\boxed{y = \pm\left(cx^2 + \frac{2}{9}x^5\right)^{\frac{3}{2}}}$$

## 6.2 ΟΜ/ΓΡ/ΔΕ/2,$n^{ης}$/ΣΣ

Ομογενείς Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις $2^{ης}$ και $n^{ης}$ τάξης με Σταθερούς Συντελεστές

### 6.2.1 $2^{ης}$ τάξης

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = 0$$

**Χαρακτηριστική εξίσωση *ΧΕ***

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \xRightarrow{\text{παραγοντοποιείται}} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

**(1)** $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\text{ΓΛ} \quad \boxed{x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}$$

**(2) $\lambda_1 = a + ib$ και $\lambda_2 = a - ib$**

$$\text{ΓΛ} \quad x(t) = c_1 e^{(a+ib)t} + c_2 e^{(a-ib)t}$$

$$\boxed{x(t) = \kappa_1 e^{at}\cos bt + \kappa_2 e^{at}\sin bt}$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= c_1 + c_2 \\ \kappa_2 &= i(c_1 - c_2) \end{aligned} \left| \begin{pmatrix} \text{λύσεις στο } \mathbb{R} \\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\ c_1, c_2 \to \text{συζυγείς} \end{pmatrix} \right.$$

**(3) $\lambda_1 = \lambda_2$ διπλή**

$$\text{ΓΛ} \quad \boxed{x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}}$$

### 6.2.2 $n^{\text{ης}}$ τάξης

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = 0$$

**Χαρακτηριστική εξίσωση**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

με λύσεις $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

**(1) Λύσεις $\in \mathbb{R}$ διακριτές**

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}}$$

**(2) Μερικές $\mathbb{R}$ διακριτές, μερικές $\mathbb{C}$ συζυγείς** Ομοίως.

**(3) $\lambda_\kappa$ πολλαπλότητας $p$** Δηλαδή $(\lambda - \lambda_\kappa)^p$ παράγοντας της ΧΕ αλλά όχι $n(\lambda - \lambda_\kappa)^{p+1}$.
$p$ ΓΑ λύσεις

$$e^{\lambda_\kappa t},\ te^{\lambda_\kappa t},\ t^2 e^{\lambda_\kappa t},\ \ldots,\ t^{p-1}e^{\lambda_\kappa t}$$

**Άσκηση: 5.1**

$$y'' - y' - 2y = 0$$

---

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \implies \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$$

Άρα:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}}$$

**Άσκηση: 5.4**

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 21y = 0$$

---

ΧΕ $\lambda^2 + 10\lambda + 21 = 0 \implies (\lambda + 3)(\lambda + 7) \implies \boxed{c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-7t}}$

**Άσκηση: 5.11**

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

---

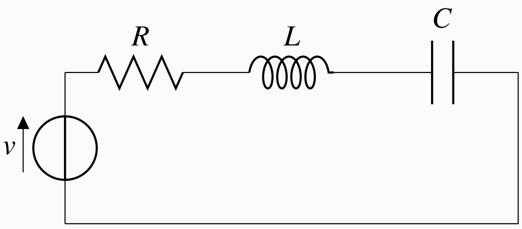
ΧΕ $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \implies (\lambda - 4)^2 = 0 \implies \lambda_\kappa = 4$ διπλή

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}}$$

**Άσκηση: 5.5**

$$RLC,\ \text{σειρά},\ R = 10\Omega,\ C = 10^{-2}\text{F},\ L = \frac{1}{2}H,\ v = 12V$$

Αρχικά κανένα ρεύμα, κανένα φορτίο, τάση εφαρμόζεται για $t = 0$.
Να βρεθεί $i$ για $t$ μετά το 0.




$$\begin{cases} Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q - v = 0 \\ i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \end{cases} \xRightarrow[t]{\text{διαφ.}} R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}i = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{10}{^1/_2}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{^1/_2\left(10^{-2}\right)}i = \frac{1}{^1/_2}\cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(12)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + 20\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 200i = 0$$

$$\text{ΧΕ} \quad \Longrightarrow \lambda^2 + 20\lambda + 200 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(200)}}{2}$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = -10 + 10j,\ \lambda_2 = -10 - 10j$$

$$\text{ΓΛ} \ \longrightarrow \boxed{i(t) = c_1e^{(-10+10j)t} + c_2e^{(-10-10j)t}}$$

$$\Longrightarrow i(t) = e^{-10t}\left(\kappa_1 \cos 10t + \kappa_2 \sin 10t\right)$$

ΑΣ $\boxed{i(0) = 0}$, $q(0) = 0$. Ψάχνω $\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$.

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q - v = 0$$

$$R(0) + L\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} + \frac{1}{C}(0) - 12 = 0 \Longrightarrow$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{1}{L}v - \frac{1}{LC}\cancelto{0}{q} - \frac{R}{L}\cancelto{0}{i} =$$

$$= \frac{1}{^1/_2}12 = 24 \Longrightarrow \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 24}$$

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = -10e^{-}$$

$$\cancelto{0}{i(0)} = \cancel{e^{-10(0}}$$

$$\cancelto{24}{\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}} = -10e^{-10(0)}\left((0)\cos 10(0) + \kappa_2 \sin 10(0)\right) + e^{-10(0)}\left(-10(0)\cos 10(0) + 10\kappa_2 \cos 10(0)\right) \Longrightarrow \boxed{\kappa_2 = \frac{12}{5}}$$

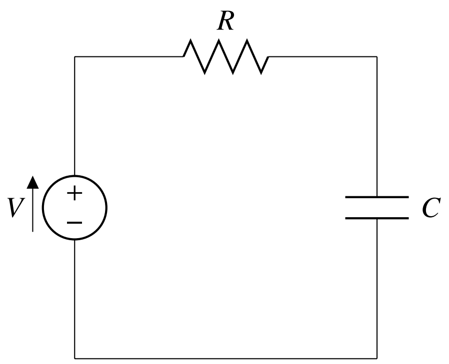
Άρα:

$$\boxed{\text{ΕΛ} \quad \begin{matrix} i(t) = e^{-10t}\frac{12}{5}\sin 10t \\ t > 0 \end{matrix}}$$

# Μέρος II
# Κεχαγιάς: Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

(Fourier, Laplace) Τετάρτη 17:00-18:30

## Κεφάλαιο 7 Κεφάλαιο 7: Εισαγωγή στην ανάλυση του Φουριερ

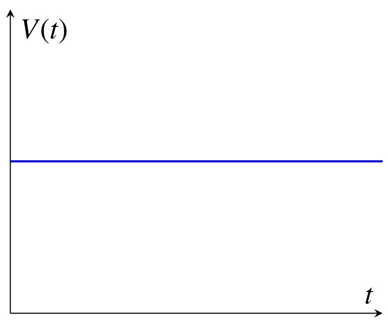



Η συμπεριφορά του κυκλώματος μπορεί να περιγραφεί με μια διαφορική εξίσωση.
$Q(t)$: Το φορτίο του πυκνωτή σε χρονική στιγμή $t$

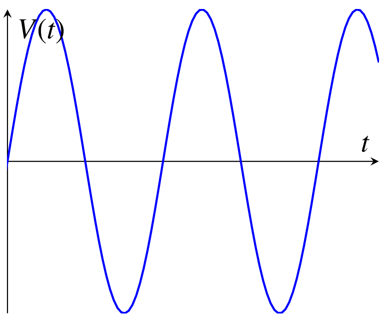
$$v_1 = R \cdot i(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$
$$v_2 = \frac{Q(t)}{C}$$
$$\boxed{v_1 + v_2 = V(t) \implies \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q(t)}{RC} = \frac{1}{R}V(t), \quad \text{με αρχική συνθήκη } Q(0) = 0}$$

Θα προσπαθήσω να λύσω την εξίσωση για τρεις περιπτώσεις:

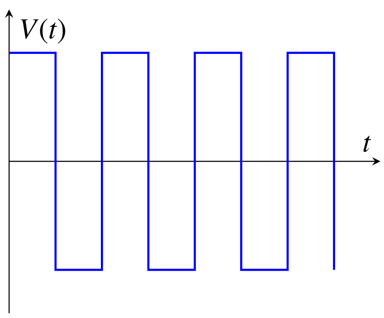
$V(t) = V_0$




$V(t) = V_0 \cdot sin(nt)$




$V(t)$ τετραγωνική συνάρτηση




### 7.0.3 $V(t) = V_0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b$$

Θα εξετάσω τη γενική λύση $x_0(t)$ της ομογενούς ΔΕ, και
θα ψάξω μία ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ.

Ομογενής: $b = 0 \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -ax \implies x(t) = ce^{-at}$.
$x(0) = 0 \implies c = 0 \implies x_0(t) = 0$.

Μη ομογενής: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b$.

$$x(t) = k \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ak = b \implies k = \frac{b}{a} \implies x(t) = k = \frac{b}{a}$$

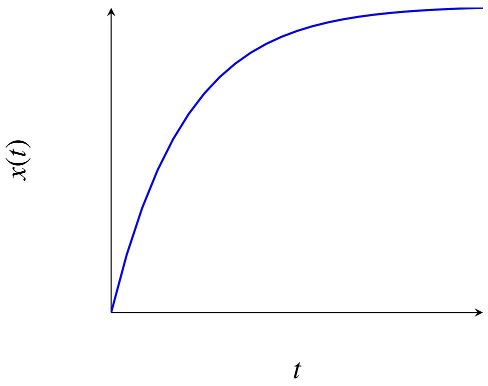
**Θεώρημα**

Η γενική λύση της μη ομογενούς είναι:

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t)$$

Άρα

$$\begin{cases} x(t) = ce^{-at} - \frac{b}{a} \\ x(0) = 0 \end{cases} \implies 0 = x(0) = c + \frac{b}{a} \implies x(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \text{ ή και } x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$




$$a = \frac{1}{RC}, \quad b = \frac{V_0}{R}$$

### 7.0.4 $V(t) = V_0 \sin(nt)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b\sin(nt)$$

Είναι $x_h(t) = ce^{-at}$.
Υποθέτω $x(t) = c_2 \sin(nt) + c_3 \cos(nt)$. Τότε $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = nc_2 \cos(nt) - nc_3 \sin(nt)$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = (ac_2 - nc_3)\sin(nt) + (ac_3 + nc_2)\cos(nt) = b\sin(nt) \implies$$

$$\implies \begin{cases} ac_2 - nc_3 &= b \\ nc_2 + ac_3 &= 0 \end{cases} \implies \cdots \implies \begin{cases} c_2 &= \frac{ab}{a^2+n^2} \\ c_3 &= -\frac{bn}{a^2+n^2} \end{cases}$$

Θυμάμαι ότι $x(t) = x_h(t) + x_i(t) = c_1 e^{-at} + \frac{ab}{a^2+n^2}\sin(nt) - \frac{bn}{a^2+n^2}\cos(nt)$ και από το $x(0) = 0$ βρίσκω $c_1 = \frac{bn}{a^2+n^2}$.
Άρα:

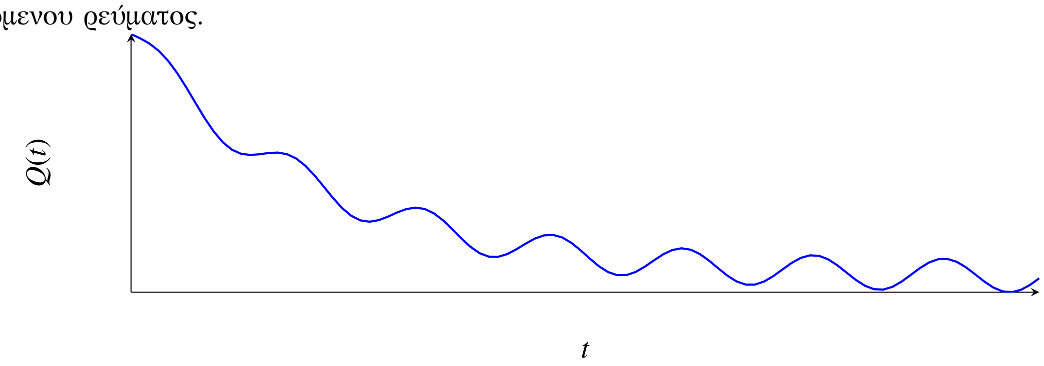
$$x(t) = \frac{bn}{a^2 + n^2} + \frac{ab}{a^2 + n^2}\sin(nt) - \frac{bn}{a^2 + n^2}\cos(nt)$$

Για το $RC$ κύκλωμα, $a = \frac{1}{RC} \leftarrow$ χρονική σταθερά κυκλώματος, $b = \frac{V_0}{R}$, άρα:

$$Q(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2 R^2 n^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{C V_0 \sin(nt) - C^2 R n V_0 \cos(nt)}{C^2 R^2 n^2 + 1}$$

$$
\begin{aligned}
p\cos(\omega t) + q\sin(\omega t) &= \\
\sqrt{p^2+q^2}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos\omega t + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin\omega t\right) &= \\
\sqrt{p^2+q^2}\,(\sin\phi\cos\omega + \cos\phi\sin\omega t) &= \\
\sqrt{p^2+q^2}\sin(\omega t+\phi), \quad \phi = \arctan\frac{p}{q}
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής φορτίζει περισσότερο αν είναι μικρότερη η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος.




### 7.0.5 $V(t) = \text{square}(t)$

$$
V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)} \frac{4}{n\pi}\sin(nt) = \frac{4}{\pi}\sin(nt) + \frac{4}{3\pi}\sin(3t) + +\frac{4}{5\pi}\sin(5t)\frac{4}{7\pi}\sin(7t) + \cdots
$$

Έτσι γίνεται η ανάλυση Fourier, και αυτό θα το δούμε την επόμενη Τετάρτη, που θα πάμε στο Κεφάλαιο 8, που λέει σειρές Fourier.

$$
V_N(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{N} \frac{4}{n\pi}\sin(nt)
$$

$$
V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\sin(nt) = \lim_{t\to\infty} V_N(t)
$$

Άρα:

$$
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{V_0\sin(nt)}{R} \implies Q_n(t) = \frac{V_0C^2Rn}{C^2R^2n^2+1}e^{\frac{t}{RC}} + \frac{CV_0\sin(nt) - C^2RnV_0\cos(nt)}{C^2R^2n^2+1}
$$

Οπότε αν:

$$
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{\pi}\frac{\sin(nt)}{R} \implies Q_1(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{C^2R}{C^2R^1+1}e^{-\frac{1}{RC}} + \cdots\right)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{3\pi}\frac{\sin(3t)}{R} \implies Q_3(t) = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{3C^2R}{9C^2R^1+1}e^{-\frac{1}{RC}} + \cdots\right)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{5\pi}\frac{\sin(5t)}{R} \implies Q_5(t) = \cdots
$$

Άρα:

$$
Q(t) = \sum_{n\in\{1,3,5,\dots\}} Q_n(t)
$$

Γιατί όμως, αν $V_1(t) \to Q_1(t)$, $V_2(t) \to Q_2(t)$, τότε $k_1V_1 + k_2V_2 = k_1Q_1 + k_2Q_2$ σε αυτό το κύκλωμα (αρχή επαλληλίας/γραμμικότητα);

# Κεφάλαιο 8 Κεφάλαιο 8: Σειρές Φουριερ

**Ορισμός**

Μία συνάρτηση $f(t)$ λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο $[t_1, t_2]$ ανν μπορώ να διαμερίσω:

$$[t_1, t_2] = [\tau_0, \tau_1] \cup [\tau_1, \tau_2] \cup \cdots \cup [\tau_{n-1}, \tau_n]$$

όπου $\tau_0 = t_1$, $\tau_n = t_2$, τέτοια ώστε $f(t)$ συνεχής στο κάθε $(\tau_{i-1}, \tau_i)$, και υπάρχουν $\lim_{t\to\tau_i^-} f(t)$, $\lim_{t\to\tau_1^+} f(t) \forall i$

*π.χ*
Η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[-\pi, 3\pi]$, επειδή, για $t_1 = -\pi, t_2 = 3\pi$:

$$[-\pi, 3\pi] = [-\pi, 0] \cup [0, \pi] \cup [\pi, 2\pi] \cup [2\pi, 3\pi]$$

Στα $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ η $f$ είναι συνεχής, και υπάρχουν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια, άρα η $f$ είναι τμηματικά συνεχής.

### 8.0.6 Συνθήκες του Dirichlet

1. Η $f(t)$ είναι ορισμένη στο $(-L, L)$
2. Η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $(-L, L)$
3. Η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2L$.

**Θεώρημα**

Έστω $f(t)$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο $(-L, L)$. Τότε:

1. Για κάθε σημείο συνέχειας της $f(t)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$$

όπου:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t$$

2. Σε κάθε σημείο ασυνέχειας $\tau$:

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to\tau^-} f(t) + \lim_{t\to\tau^+} f(t)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$$

**Παρ.** $f(t) =$ τετραγωνικός παλμός

**Λύση** Η $f(t)$ ικανοποιεί τις Σ.D με $L = \pi$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\,\mathrm{d}t = -1 + 1 = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\frac{n\pi t}{\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{-\cos nt}{n}\right)_{t=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1-\cos n\pi}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) = \frac{2}{n\pi} \text{ για άρτια } n
\end{aligned}
$$

Άρα:

$$
\begin{aligned}
a_0 = a_1 = a_2 &= \dots = 0 \\
b_1 = \frac{4}{\pi}, &\quad b_3 = \frac{4}{3\pi} \\
b_2 = 0, &\quad b_4 = 0, \dots
\end{aligned}
$$

**Απόδειξη** (Μερική)

Θα δεχτούμε ότι η $f(t)$ γράφεται στη μορφή $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$, και θα δείξουμε τους τύπους $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t$, $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t$

Έστω $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$. Τότε:

$$
\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-L}^{L} f(t)\cdots t = \int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t + \int_{-L}^{L} a_1\cos\frac{\pi t}{L}\,\mathrm{d}t + \int_{-L}^{L} a_2\cos\frac{2\pi t}{L} + \dots = a_0\cdot L + 0 + 0 + \dots
$$

Άρα:

$$
a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{d}t
$$

**Συνέχεια απόδειξης** Υποθέτω ότι υπάρχει **κάποια** σειρά της μορφής *, θα δείξω ότι οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους **. ιό Παρνω τυχόν $m \in \mathbb{N}$ και εξετάζω το

$$
\begin{aligned}
&\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{-L}^{L}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi t}{L}\right)\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t}_{=0 \text{ ολοκληρώνω πάνω σε } m \text{ περιόδους}} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} a_n\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} b_n\sin\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t}_{=\frac{b_n}{2}\left(\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi t + m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t + \int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi t - m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t\right)=0} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{m\pi t}{L}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\cos a\cdot\cos\beta = \frac{\cos(a+\beta)+\cos(a-\beta}{2}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{(n+m)\pi t}{L} + \cos\frac{(n-m)\pi t}{L}\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\begin{cases} 0, & n \neq m \\ a_n L, & n = m \end{cases} \\
&= a_m L
\end{aligned}
$$

Επομένως:

$$
a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,\mathrm{d}t
$$

Αντιστοίχως αποδεικνύεται και η σχέση για το $b_m$.

Να σημειωθεί ότι οι συνθήκες του Dirichlet είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες.

### 8.0.7

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-in\pi t} L \,\mathrm{d}t$$

**Απόδειξη**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L} = \frac{a_0}{2} +$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cdots e^{\frac{in\pi t}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{in\pi t}{L}} + + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Άρα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

όπου:

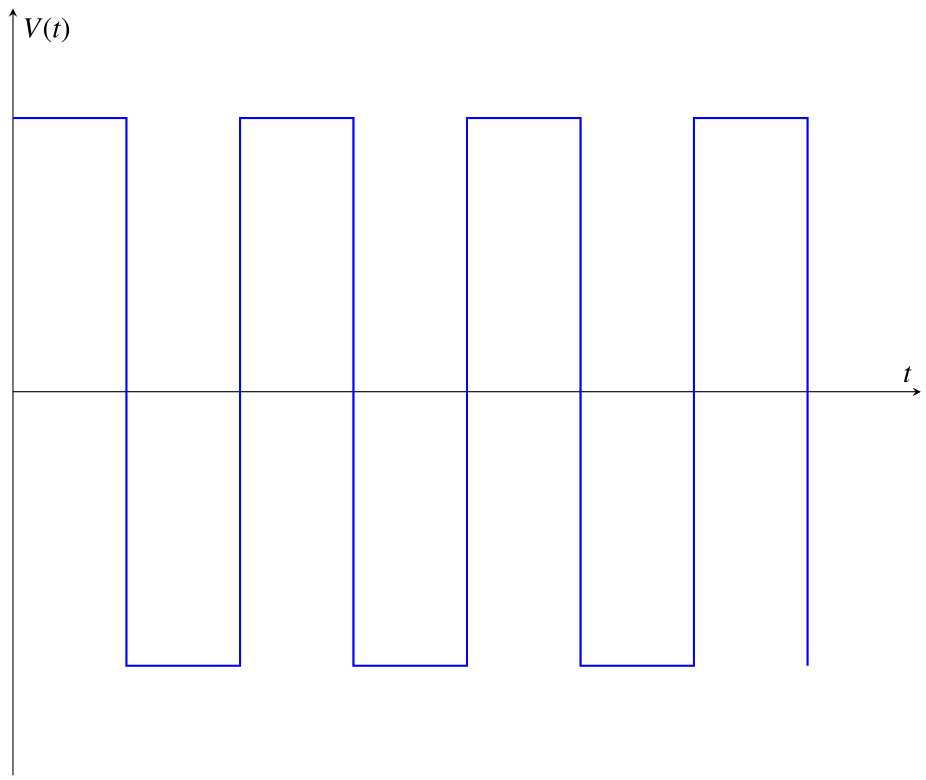
$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & n \in \mathbb{Z}^+ \\ \frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}, & n \in \mathbb{Z}^- \\ \frac{a_0+ib_0}{2}, & n = 0 \end{cases}$$

Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη να αποδειχθεί ότι:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t) e^{\frac{-in\pi t}{L}} \,\mathrm{d}t$$

## 8.1 Παράδειγμα

$V(t)$ τετραγωνική συνάρτηση



Θα βρω την **εκθετική** σειρά της $f(t)$.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot e^{-int}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{0}(\pi)1\cdot e^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} e^{-int}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} e^{-int}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{e^{-int}}{in}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{e^{-int}}{in}\right|_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{in} - \frac{e^{-in\pi}}{in} - \frac{e^{-in\pi}}{in} + \frac{1}{in}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{in} - \frac{2\cos(n\pi)}{in}\right) \\
c_n &= \frac{i}{n\pi}\cdot\big(1-\cos n\pi\big)
\end{aligned}$$

| $n$ | $c_n$ |
|---|---|
| $-2$ | $0$ |
| $-1$ | $\frac{2i}{\pi}$ |
| $0$ | $0$ |
| $1$ | $\frac{-2}{\pi}$ |
| $2$ | $0$ |
| $3$ | $\frac{-2i}{3\pi}$ |

Άρα:

$$f(t) = \cdots + \frac{2i}{3\pi}e^{i3t} + \frac{2i}{\pi}e^{-it} - \frac{2i}{\pi}e^{it} - \frac{2i}{3\pi}e^{i3t} + \cdots$$

Ερωτήματα για τον αναγνώστη:

1. Πότε έχει η τριγωνομετρική σειρά μόνο ημίτονα/μόνο συνημίτονα;
2. Πότε έχει η εκθετική σειρά μόνο πραγματικούς/μόνο εκθετικούς όρους;

## 8.2

**Ορισμός**

Συμβολίζω με $\mathfrak{F}_L$ το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet (με ημιπερίοδο $L$)

**Θεώρημα**

Το $\mathfrak{F}_L$ είναι διανυσματικός χώρος.

**Απόδειξη** Έστω $f, g \in \mathfrak{F}_L$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$. Θα δείξω ότι $\kappa f + \lambda g \in \mathfrak{F}_L$.

**Πράγματι**

1. Αν οι $f, g$ είναι ορισμένες στο $[-L, L]$ τότε και η $\kappa f + \lambda g$ είναι ορισμένη στο $[-L, L]$.
2. $$\begin{aligned}(\kappa f + \lambda g)(t + 2L) &= \kappa f(t + 2L) + \lambda g(t + 2L)\\ &= \kappa f(t) + \lambda g(t)\\ &= (\kappa f + \lambda g)(t)\end{aligned}$$

   Άρα η $\kappa f + \lambda g$ έχει περίοδο $2L$.
3. Αν η $f$ και η $g$ είναι τμ. συνεχείς στο $[-1, 1]$, τότε και η $\kappa f + \lambda g$ είναι τμ. συνεχείς.

Από τα 1,2,3, η $\kappa f + \lambda g \in \mathfrak{F}_L$.

**Θεώρημα**

Το σύνολο $\left\{e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ είναι μια ορθογώνια βάση του $\mathfrak{F}_L$.

---

**Δηλαδή** κάθε $f(t) \in \mathfrak{F}_L$ μπορεί να γραφεί:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Επιπλέον $\forall n, m,\ m \neq n\ e^{\frac{in\pi t}{L}} \perp e^{\frac{im\pi t}{L}}$
Δηλαδή:

$$e^{\frac{im\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{in\pi t}{L}} = 0$$

Δηλαδή:

$$\int_{-L}^{L} e^{\frac{im\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{in\pi t}{L}}\, \mathrm{d}t = 0$$

Για να ορίσω το εσωτερικό γινόμενο, θέλω $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_n x_n \bar{x}_n = \sum (x_n)^2$

$$f \cdot g = \int_{-L}^{L} f(t)\overline{g(t)}\, \mathrm{d}t$$

Άρα

$$e^{\frac{im\pi t}{L}} \cdot e^{\frac{in\pi t}{L}} = \int_{-L}^{L} e^{\frac{im\pi t}{L}} e^{\frac{in\pi t}{L}}\, \mathrm{d}t = \int_{-L}^{L} e^{\frac{i(m-n)\pi t}{L}}\, \mathrm{d}t = \begin{cases} 2L, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

- $\mathfrak{F}_L$ το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν Dirichlet
- Το $\mathfrak{F}_L$ είναι ΔΧ
- Το $\left\{e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\}_{n\mathbb{Z}}$ είναι μια ορθογώνια βάση του $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$
- Το $\left\{\cos \frac{in\pi t}{L}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\sin \frac{in\pi t}{L}\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ορθογώνια βάση του $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$
- $\underbrace{f(t)}_{\text{περιοδική, με ημιπερίοδο } L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$, με

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) e^{\frac{in\pi t}{L}}\, \mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
\vec{x} = [x_1 x_2 x_3] &= x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3} \\
&= \mathrm{Proj}(\vec{x},\vec{e_1}) + \mathrm{Proj}(\vec{x},\vec{e_2}) + \mathrm{Proj}(\vec{x},\vec{e_3}) \\
&= \sum_{n=1}^{3} \vec{x}\cdot\vec{e_n}\cdot\frac{\vec{e_n}}{\|\vec{e_n}\|}
\end{aligned}
$$

Άρα:

$$
f(t) = \sum_{n=-\infty^\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} = \sum_{n=-\infty^\infty} \mathrm{Proj}\left(f(t), e^{\frac{in\pi t}{L}}\right)
$$

όπου $\mathrm{Proj}\left(f(t), e^{\frac{in\pi t}{L}}\right) = f(t) \bullet e^{\frac{in\pi t}{L}} \frac{e^{\frac{in\pi t}{L}}}{\left\|e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\|}$

$$
\begin{aligned}
f(t) \bullet e^{\frac{in\pi t}{L}} &= \int_{-L}^{L} f(t)\cdot\overline{e^{\frac{in\pi t}{L}}}\,\mathrm{d}t \\
\left\|e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\| &= \int_{-L}^{L} e^{\frac{in\pi t}{L}}\cdot e^{\frac{-in\pi t}{L}}\,\mathrm{d}t = 2L
\end{aligned}
$$

**Θεώρημα 8.1: Plancherel**

$$
\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_n c_n\overline{r_n}
$$

Η $\begin{cases} f(t) &= \sum_n c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \\ f(t) &= \sum_n r_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \end{cases}$

**Απόδειξη**

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}\right)\overline{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{\frac{im\pi t}{L}}\right)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}\overline{r_m e^{\frac{im\pi t}{L}}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n\bar{r}_m \underbrace{\int_{-L}^{L} e^{\frac{i(n-m)\pi t}{L}}\,\mathrm{d}t}_{\begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2L & m = n \end{cases}} \\
&= \frac{1}{2L}2L\sum_n c_n\bar{r}_n
\end{aligned}
$$

Γενικά:

$$
f(t) \leftrightarrow \vec{c} = [\ldots\ c_{-1}\ c_0\ c_1\ c_2\ \ldots]
$$

(με την επιφύλαξη ότι σε πεπερασμένο αριθμό σημείων μπορεί να αλλάζει η τιμή της συνάρτησης)

Σύμφωνα με το θεώρημα:

$$
\begin{aligned}
f(t) &\leftrightarrow \vec{c} \\
g(t) &\leftrightarrow \vec{r} \\
\frac{1}{2L} f \bullet g &= \vec{c}\bullet\vec{r}
\end{aligned}
$$

**Θεώρημα 8.2: Πόρισμα (Parseval)**

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \sum_n |c_n|^2$$

**Θεώρημα 8.3**

Αν $f(t) \in \mathfrak{F}_L$ και $f(t) = \sum_n c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$, τότε:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_n c_n \frac{in\pi}{L} e^{\frac{in\pi t}{L}}$$
$$\int f(t) = \sum_n c_n \frac{L}{in\pi} e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Τα ίδια για ημίτονα και συνημίτονα

**Παράδειγμα** Δίνεται η $f(t) = \begin{cases} |t| & t \in [-\pi,\pi] \\ \text{περιοδική επέκταση} & t \notin [-\pi,\pi] \end{cases}$ Να βρεθεί η Σειρά (Fourier) της $f(t)$.

**Λύση** Αφού λοιπόν $g(t) = \frac{4}{\pi}\cdot\left(\sin t + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots\right)$, τότε:

$$f(t) = c - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2}\right)$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = c$$

Άρα τελικά:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2}\right)$$

Παρατηρώ ότι η $f$ έχει ασθενέστερες υψηλές συχνότητες από τη $g$.

**Παράδειγμα** Να υπολογιστεί το:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

Είναι

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} + \frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5}\right)$$
$$1 = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right) = S_1$$

**Παράδειγμα** Να υπολογιστεί το:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

**Λύση**

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$$
$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

# Κεφάλαιο 9  Κεφάλαιο 9: Μετασχηματισμός Φουριερ

**Θεώρημα**

Έστω ότι η $f(t)$ ικανοποιεί τα εξής:

1. Τις συνθήκες Dirichlet $\forall L \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$ (δηλ. η $f(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη)

Τότε:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

όπου:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

**Απόδειξη** Δίνεται η $f(t)$. Διαλέγω τυχόν $t$ και ορίζω την $f_T(t) = f(t) \quad \forall t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, που έχει σειρά Fourier:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{\frac{in2\pi t}{T}}$$

όπου

$$c(n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{in2\pi t}{T}} \, \mathrm{d}t$$

Θέτω $\delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\omega = n \cdot \delta\omega = \frac{2n\pi}{T}$

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{in2\pi t}{T}} \, \mathrm{d}t \right) e^{\frac{in2\pi t}{T}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2\pi}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t \right) e^{\frac{in2\pi t}{T}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t \right) e^{i\omega t} \delta\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}t \right)}^{F(\omega)} e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Την $F(\omega)$ την ονομάζουμε **Fourier μετασχηματισμένη** της $f(t)$, και γράφουμε:

$$\mathscr{F}\Big(f(t)\Big) = F(\omega)$$

$$F(\omega) = \mathscr{F} f(t) \quad f(t) = \mathscr{F}^{-1}(F(\omega))$$

**Παρ.**

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| \geq a \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} 1e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\omega}\left(\frac{-e^{-i\omega a}}{2i}\right) \\
&= 2\frac{\sin(\omega a)}{\omega}
\end{aligned}
$$

**Παρ.**

$$f(t) = e^{-|t|}$$

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t &= -\left.\frac{1}{1+i\omega}\right|_{t=0}^{\infty} \\
&= -\frac{1}{1+i\omega}\left(e^{-(1+i\omega)\cdot\infty} - e^{-(1+i\omega)\cdot 0}\right) \\
&= -\frac{1}{1+i\omega}\left(0-1\right) \\
&= \frac{1}{1+i\omega}
\end{aligned}
$$

Άρα:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \\
&= \boxed{\frac{2}{1+\omega^2} = \mathscr{F}\left(e^{-|t|}\right)}
\end{aligned}
$$

Ο Μ/Σ Fourier εφαρμόζεται μόνο σε απόλυτα ολοκληρώσιμες $f(t)$. Δηλαδή υποθέτω ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|\mathrm{d}t = M < \infty$$

Αυτό το κάνω, διότι $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t < M < \infty$ είναι ικανή συνθήκη για να υπάρχει το $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}$.
Έχει μία σημαντική συνέπεια:

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$$

Για παράδειγμα, οι $\mathscr{F}(e^{t})$ και $\mathscr{F}(e^{-t})$ δεν υπάρχουν, ενώ ο $\mathscr{F}(e^{-|t|})$ υπάρχει διότι η $e^{-|t|}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.
Επίσης $\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\,\mathrm{d}\omega = M' < \infty$

**Θεώρημα 9.1**

$$\mathscr{F}(\kappa f + \lambda g) = \kappa\mathscr{F}(f) + \lambda\mathscr{F}(g)$$

---

**Παρ.**

$$\mathscr{F}(3\cdot\text{square} + 5\cdot e^{-|t|}) = 6\frac{\sin(\omega)}{\omega} + \frac{10}{1+\omega^2}$$

Η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται για τον αναγνώστη.

Το Wolfram επιστρέφει τους Μ/Σ Fourier με διαφορετικό παράγοντα, για λόγους συμμετρίας! ($\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ έναντι $\frac{1}{2\pi}$). Στις σημειώσεις τηρείται η ιστορική σύμβαση που ακολουθείται και από προγράμματα όπως, π.χ. Matlab.

**Θεώρημα 9.2**

Έστω $F(\omega) = \mathscr{F}\left(f(t)\right)$, τότε:

$$\mathscr{F}\left(F(t)\right) = 2\pi f(-\omega)$$

Δηλαδή:

$$\mathscr{F}\left(\mathscr{F}\left(f(t)\right)\right) = 2\pi f(-t)$$

**Απόδ.**

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left(f(t)\right) = F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
\mathscr{F}^{-1}\left(F(\omega)\right) = f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
2\pi f(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)e^{-i\tau w}\,\mathrm{d}\tau &= 2\pi f(-w) \\
= \mathscr{F}\left(F(\tau)\right) &= 2\pi f(-w)
\end{aligned}$$

**Παρ.**

$$\mathscr{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

**Λύση**

$$\cdots = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots$$

ή

Παρατηρώ ότι $\mathscr{F}(\frac{1}{2}e^{-|t|}) = \frac{1}{1+\omega^2} = F(\omega) = F(-\omega)$

Άρα $F(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$$\mathscr{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \mathscr{F}\left(F(t)\right) = 2\pi f(-\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

**Θεώρημα 9.3**

$$\mathscr{F}\left(f(at)\right) = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

**Απόδ.**

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left(f(at)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}at}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}at}\,\mathrm{d}(at) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa)e^{-i\frac{\omega}{a}\kappa}\,\mathrm{d}\kappa = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)
\end{aligned}$$

**Παρ.**

$$\mathscr{F}\left(\frac{1}{4+9t^2}\right) = \frac{1}{4}\mathscr{F}\left(\frac{1}{1+\frac{9}{4}t^2}\right) = \frac{1}{4}\mathscr{F}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}t\right)^2}\right)$$

Για $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $\quad F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$,

$$f(\frac{3}{2}t = \frac{1}{1+\frac{9}{4}t^2} \to \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{2\pi}{3}e^{-\left|\frac{3\omega}{2}\right|}$$

Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι $\frac{1}{4}\frac{2\pi}{3}e^{-\left|\frac{3\omega}{2}\right|}$

**Θεώρημα**

Έστω $F(\Omega) = \mathscr{F}(f(t))$. Τότε

1. $\mathscr{F}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) = i\omega F(\omega)$
2. $\mathscr{F}\left(\int f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{i\omega}F(\omega)$
3. $\mathscr{F}\left(-itf(t)\right) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\omega}$

**Απόδ.**

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}(e^{-i\omega t}) \\
&= f(\infty)e^{-i\omega\infty} - f(-\infty)e^{i\omega\infty} - \int (-i\omega)f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - 0 + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= i\omega F(\omega) = \mathscr{F}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)
\end{aligned}$$

Θέτω $g(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$, οπότε $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = f(t)$.

$$\mathscr{F}(f) = \mathscr{F}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right) = i\omega G(\omega) \implies \mathscr{F}\left(\int g(t)\,\mathrm{d}t\right) = G(\omega) = \frac{1}{i\omega}F(\omega)$$

Το (3) δείχνεται όπως το (1).

**Ορισμός: Βηματική συνάρτηση του Heaviside**

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$H(\omega) = \mathscr{F}\left(h(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{t=0}^{\infty} = \boxed{\frac{1}{i\omega} = \mathscr{F}\left(h(t)\right)}$$

**Παρ.**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = e^{-t}h(t)$$

**Λύση**

$$i\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = \frac{1}{i\omega}(???)$$

Είναι $\mathscr{F}\left(f(t)e^{i\omega t}\right) = F(\omega - \omega_0$.
Θέτω $f(t) = h(t)$, $e^{i\omega t} = e^{-t}$. Δηλαδή $\omega_0 = \frac{1}{i} = i$, οπότε $\mathscr{F}(e^{-t}h(t)) = \frac{1}{1+i\omega}$.
Άρα

$$\begin{aligned} i\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = \frac{1}{i\omega + 1} &\implies Y(\omega) = \frac{1}{(i\omega+1)(i\omega+2)} \\ &\implies Y(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{2+i\omega} \\ &\implies \mathscr{F}^{-1}(Y(\omega)) = \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+i\omega}\right) - \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{1}{2+i\omega}\right) \\ &\implies \boxed{y(t) = e^{-t}h(t) - e^{-2t}h(t)} \end{aligned}$$

είναι η λύση της δοθείσας εξίσωσης. Πού πήγε η σταθερά· Ποιες είναι οι αρχικές συνθήκες·
Αν πήγαινα να την λύση αλλιώς:

$$\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = f(t)$$

Ομογενής $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = 0$, γενική λύση $y_h(t) = ce^{-2t}$.
Ειδική λύση της μη ομογενούς $y_p(t)$.
Γενική λύση της μη ομογενούς: $\boxed{y(t) = ce^{-2t} + y_p(t)}$. Ποια είναι η τιμή της $c$·
Είναι $c = 0$ διότι ζητώ λύση η οποία έχει μετασχηματισμό Φουριερ. Άρα πρέπει $\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty}\left(ce^{-2t} + y_p(t)\right) = 0$, άρα $c = 0$.
Δηλαδή κρυβόταν από την εκφώνηση του προβλήματος ότι $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0$.

**Παρ.** Υπολογίστε $\mathscr{F}\left(\frac{t}{(t^2+1)^2}\right)$

**Λύση** $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$, τότε $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$.

$$\mathscr{F}\left(\frac{t}{(t^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\mathscr{F}\left(\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\mathscr{F}\left(\tfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{1}{2}i\omega\mathscr{F}(f) = -\frac{1}{2}i\omega\pi e^{-|\omega|}$$

**Παρ.** Να υπολογιστεί ο $\mathscr{F}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$.

**Λύση** Θέτω $f(t) = \frac{1}{1+t^2} \implies F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.
Οπότε $\mathscr{F}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = \frac{1}{-i}\mathscr{F}(-it \cdot f(t)) = i\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\omega}$.

**Προσοχή**

$$G(\omega) = i\tfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\omega} = \pi i\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(e^{-|\omega|}) = \begin{cases} \pi i e^{\omega} & \omega < 0 \\ \text{ΚΕΦ. 11} & \omega = 0 \\ -\pi i \cdot e^{-|\omega|} & \omega < 0 \end{cases}$$

**Θεώρημα: Plancherel/Parseval**

**Plancherel**

$$\boxed{f \bullet g = \frac{1}{2\pi} F \bullet G}$$

δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega)\overline{G(\omega)}\,\mathrm{d}\omega$$

**Parseval**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega$$

Η απόδειξη είναι εύκολη και υπάρχει στις σημειώσεις.

**Συνέλιξη**

**Ορισμός: Σπουδαίος Ορισμός**

Η **συνέλιξη** των $f(t)$, $g(t)$ συμβολίζεται $f * g$ και ορίζεται:

$$\boxed{\Big(f * g\Big)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

**Παράδειγμα**

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

**Περίπτωση** $t < -2$ Τότε

$$\begin{aligned}(g * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{-2} \cancel{g(\tau)} g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{-2}^{-1} \cancel{g(\tau)} g(t-\tau)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{\infty} g(\tau) \cancel{g(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = 0\end{aligned}$$

Μετά από πράξεις θα δούμε ότι

$$(g * g)(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ 2-t & -2 < t < 0 \\ 2+t & 0 \leq t < 2 \\ 0 & 2 < t \end{cases}$$

**Θεώρημα**

$$\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f) * \mathscr{F}(g)$$

**Απόδειξη**

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f*g) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}(t-\tau)\right)e^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(\omega)e^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= G(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= G(\omega)F(\omega)
\end{aligned}$$

**Θεώρημα: Πόρισμα**

$$\begin{aligned}
f*g &= g*f \\
f*(g+h) &= f*g+f*h \\
(f*g)*h &= f*(g*h)
\end{aligned}$$

**Απόδ.**

$$\mathscr{F}(f*g) = F(\omega)G(\omega) = G(\omega)F(\omega) = \mathscr{F}(g*f)$$

ομοίως και τα υπόλοιπα.

**Παρ.** Να βρεθεί ο $\mathscr{F}(\pi*\pi)$.

**Λύση**

$$\mathscr{F}(\pi(t)) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega}$$
$$\mathscr{F}(\lambda(2t)) = \mathscr{F}(\pi(t)*\pi(t)) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega}\frac{2\sin(\omega)}{\omega} = \frac{4\sin^2\omega}{\omega^2}$$

Τι να κάνω όταν η $f(t)$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη;

Θα δουλέψω με την $g(t) = e^{-\sigma t}f(t)$ και θα περιοριστώ στο $t \geq 0$.

Τότε η $g(t)$ θα είναι (για αρκετά μεγάλο $\sigma$) απολύτως ολοκληρώσιμη, και μπορώ να πάρω $\mathscr{F}(g(t)) = \int_0^\infty e^{-\sigma t}f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-i(\sigma+i\omega)} =^{\text{Θέτοντας } s=\sigma+i\omega} \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \mathscr{L}(f(t))$.

## Κεφάλαιο 10 Κεφαλαιο 10: Μετασχηματισμος Λαπλαςε

- Για να υπαρχει $\mathscr{F}(x(t))$ πρεπει η $x(t)$ να ειναι απολυτως ολοκληρωσιμη.
- Αν η $x(t)$ δεν ειναι απολυτως ολοκληρωσιμη, ισως ειναι η $y(t) = x(t)h(t)e^{-\sigma t}$.
- Οποτε δουλευω με την $\mathscr{F}(y(t)) = \mathscr{F}\left(x(t)h(t)e^{-\sigma t}\right) = \int_0^\infty x(t)e^{-\sigma t}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t$ (όπου $s = \sigma + i\omega$) $= \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \mathscr{L}(x(t))$.
- Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορώ να διαχειριστώ $x(t)$ που είναι χρήσιμες αλλά όχι απολ. ολοκλ. (π.χ. $x(t) = 1$ ή $e^t\cdots$).

- Όμως πετάω όλη την πληροφορία για $t < 0$.

**Ορισμός**

Η $f(t)$ λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο $[t_1, t_2]$ ανν:

- μπορώ να διαμερίσω το $[t_1, t_2]$:

$$[t_1, t_2] = [\tau_0, \tau_1] \cup [\tau_1, \tau_2] \cup \cdots \cup [\tau_{N-1}, \tau_N]$$

- και η $f(t)$ συνεχής σε κάθε $(\tau_{n-1}, \tau_n)$ $(n = 1, \ldots, N)$
- και $\forall n : \begin{matrix} \lim_{t\to\tau_n^-} f(t) \\ \lim_{t\to\tau_n^+} f(t) \end{matrix})$ υπάρχουν (εκτός ίσως των ακραίων 2)

**Ορισμός**

Η $f(t)$ λέγεται **εκθετικής τάξης γ** στο $[t_1, t_2]$ ανν $\exists M, \gamma$ τ.ώ:

$$\forall t \in [t_1, t_2] : \ \left|f(t)\right| < M \cdot e^{\gamma t}$$

**Ορισμός**

Έστω $f(t)$ τ.ώ:

1. $\forall T < \infty$ : η $f(t)$ τμ. συν. στο $[0, T]$
2. Η $f(t)$ είναι εκθ. τάξης $\gamma$ στο $[0.\infty)$.

Τότε ορίζω τον Μ/Σ Laplace της $f(t)$ ως εξής:

$$\mathscr{L}\left(f(t)\right) = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

**Παρ.** Να βρεθεί ο $\mathscr{L}(e^t)$

**Λύση**

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^t e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
=&\int_0^\infty e^{(-s-1)t}\,\mathrm{d}t \\
=&\left.\frac{e^{-(s-1)t}}{s-1}\right|_{t=0}^{\infty} \\
=&-\frac{e^{-(s-1)\cdot\infty}}{s_1} + -\frac{e^{-(s-1)\cdot 0}}{s_1} \\
=&\frac{1}{s-1} = \mathscr{L}(e^t)
\end{aligned}$$

**Παρ.** $\mathscr{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$

**Παρ.** $\mathscr{L}(1) = \mathscr{L}(e^{at}) = \frac{1}{s}$

**Παρ.** $\mathscr{L}\left(h(t)\right) = \frac{1}{s}$

**Παρ.**

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(t) &= \int_0^\infty te^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty -\frac{1}{s}(e^{-st}) \cdot t\,\mathrm{d}t \\
&= \left(-\frac{t}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&=0 + +\frac{1}{s}\cdot\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{s^2} = \mathscr{L}(t)
\end{aligned}
$$

**Παρ.** $\mathscr{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

**Θεώρημα**

$$\mathscr{L}\left(\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = s \cdot X(s) - X(0)$$

**Απόδειξη**

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) &= \int_0^\infty \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= x(t)e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty x(t)(-s)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= -x(0) + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = -x(0) + s\cdot x(s)
\end{aligned}
$$

**Να λυθεί με Μ/Σ Laplace**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 1, \quad x(0) = -2$$

**Λύση**

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}(\cdots\cdots) \\
&\implies x \cdot X - \cancel{x(0)}^{\,2} + X = \frac{1}{S} \\
&\implies sX + 2 + X = \frac{1}{s} \\
&\implies (s+1)\cdot X = \frac{1}{s} - 2 \\
&\implies X = \frac{1-2s}{(s+1)s} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s} = \frac{(A+B)\cdot S + B}{(s+1)\cdot s} \implies \begin{cases} A + B & = -2 \\ B & = 1 \end{cases} \implies A = -3 \\
&\implies X(s) = -\frac{3}{s+1} + \frac{1}{2} \\
&\implies x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(-\frac{3}{-s+1}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \\
&= \boxed{X(t) = 1 - 3e^{-t}}
\end{aligned}
$$

**Παρ.** Να λυθεί...

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 7\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 10x = 2t + 1 \quad , x(0) = 1,\ x(0) = -1$$

**Λύση**

$$\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right) = s^2X - sx(0) - x'(0)$$

Έστω $\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = P(s)$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p(t)$.

**Απόδ.**

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\right) = \mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right) &= sP - p(0) \\ &= s\cdot(sX - x(0)) - x(0) \\ &= s^2X - sx(0) - x'(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&s^2X - s\cdot 1 - (-1) + 7\cdot(sX-1) + 10x = \frac{2}{5^2} + \frac{1}{5} \\ \implies &(s^2+7s+10)\cdot X - s + 1 - 7 = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \\ \implies &(s^2+7x+10)X = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} + s + 6 \\ \implies &\dots = \frac{2+s+s^3+6s^2}{s^2} \\ \implies &X = \frac{s^3+6s^2+s+2}{s^2\cdot\underbrace{(s^2+7s+10)}_{\text{ΧΑΡ. ΕΞ.}}} = \frac{-1/25}{s} + \frac{1/5}{s^2} + \underbrace{\boxed{\frac{4/3}{s+2} + \frac{-22/75}{s+5}}}_{\text{Λύση Ομογενούς}} \\ \implies &x(t) = -\frac{1}{25} + \frac{t}{5} + \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{22}{75}e^{-5t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\sin at) &= \mathscr{L}\left(\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\cdot\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) \\ &= \frac{a}{s^2+a^2} = \mathscr{L}(\sin at) \\ &\frac{s}{s^2+a^2} = \mathscr{L}(\cos at) \\ &\frac{s}{s^2-a^2} = \mathscr{L}(\cosh at) \\ &\frac{a}{s^2-a^2} = \mathscr{L}(\sinh at)\end{aligned}$$

**Θεώρημα**

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\left(k_1x_1(t) + k_2x_2(t)\right) \\ =&k_1X_1(s) + k_2X_2(s)\end{aligned}$$

**Απόδ.** blah blah...

**Θεώρημα**

$$\mathscr{L}\left(f(t)e^{at}\right) = F(s-a)$$

**Απόδ.**

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty f(t)e^{at}e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
=&\int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t \\
=&F(s-a)
\end{aligned}$$

**Θεώρημα**

$$\mathscr{L}\left(f(t-t_0)h(t-t_0)\right) = e^{-st_0}F(s) \quad \forall t_0 \geq 0$$

**Απόδ.**

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(f(t-t_0)h(t-t_0)\right) &= \int_0^\infty f(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}(t) \\
&= \int_{t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-s(t-t_0)}\cdot e^{st_0}\,\mathrm{d}t \\
&=e^{-st_0}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&=e^{-st_0}F(s) = \mathscr{L}\left(f(t)\right)
\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) = h(t-1)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = h(t)$$

$$\mathscr{L}\left(h(t)\right) = \frac{1}{s} \qquad \mathscr{L}\left(h(t-1)\right) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\mathscr{L}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right) = \mathscr{L}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right) = \sin t\cdot e^{-2t}$$