

Την Τρίτη μάθημα 8:30 χωρίς διάλειμμα

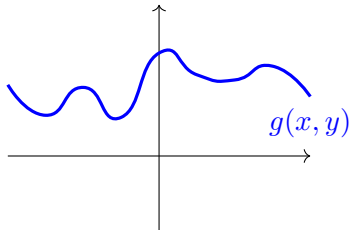
Σήμα - σύστημα

$$\underbrace{g}_{\text{εξαρτημένη}} = f(\underbrace{t}_{\text{ανεξάρτητη}})$$

$$g = f(\vec{r}, t) \quad \vec{E}(\vec{r}, t)$$

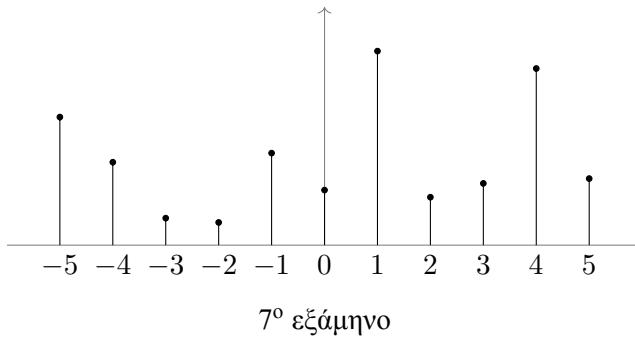
Αναλογικό

Αν t συνεχής $\in \mathbb{R}$
και y συνεχής $\in \mathbb{R}$



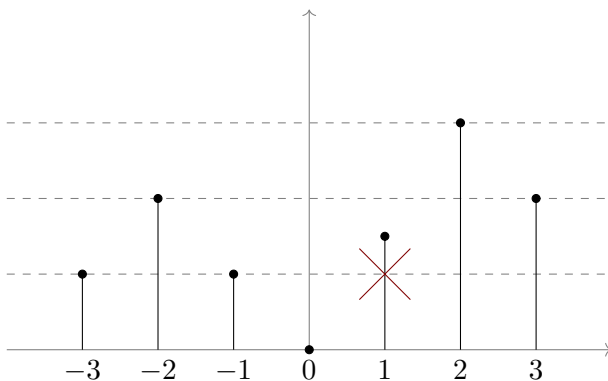
Διακριτού χρόνου / Διακριτό (discrete)

t διακριτό $\rightarrow \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$
 g συνεχής $\in \mathbb{R}$



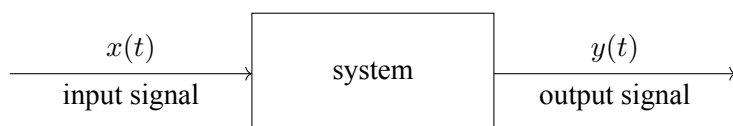
Κβαντισμένο

$n \in \mathbb{Z}$
 g διακριτή



Στοχαστικό Περιέχει και τις τρεις κατηγορίες

Σύστημα



Περιοδικά σήματα

Αν $\exists T \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = x(t+T)$ τότε $x(t)$ **περιοδικό σήμα** με περίοδο T .
Ή θα είναι 0, ή θα συνεχιστεί για πάντα.

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t) dt \quad \forall t$$

Η σύνθεση μιας συνάρτησης με μια περιοδική συνάρτηση είναι περιοδική;

Απόδ. Έστω g μία περιοδική συνάρτηση:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(g(x+T)) = \\ &= (f \circ g)(x+T) \end{aligned}$$

Συμμετρίες

- Αν $x(t) = x(-t) \quad \forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **άρτια συνάρτηση** (even function).
- Αν $x(t) = -x(-t) \quad \forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **περιττή συνάρτηση** (odd function).

$$\forall x(t) \quad \exists x_0(t), x_e(t) : x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

Απόδ.

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \frac{x(t) + x(-t)}{2} \\ x_o(t) &= \frac{x(t) - x(-t)}{2} \end{aligned}$$

$$\underbrace{x_e}_{\text{άρτια}} y_e = z_e$$

$$x_o y_o = z_e$$

$$x_e y_o = z_o$$

$$\int_{-A}^A x_o(t) dt = 0$$

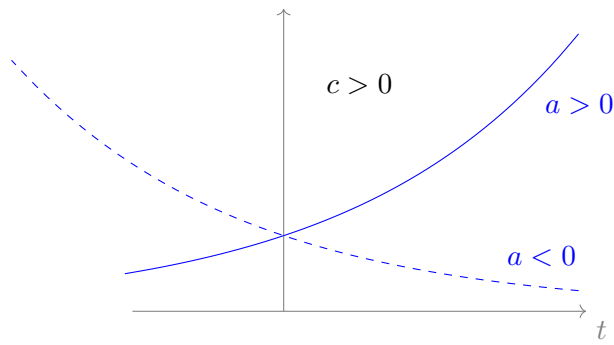
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) dt = ? \text{ (εξαρτάται)}$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A x_o(t) dt = 0 \quad (\text{principal Cauchy value})$$

Χαρακτηριστικά σήματα

1) Εκθετικό σήμα

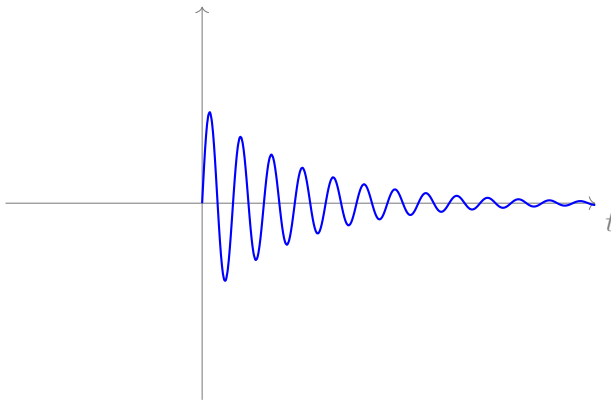
$$x(t) = ce^{at} \quad a \in \mathbb{R} \quad c > 0$$



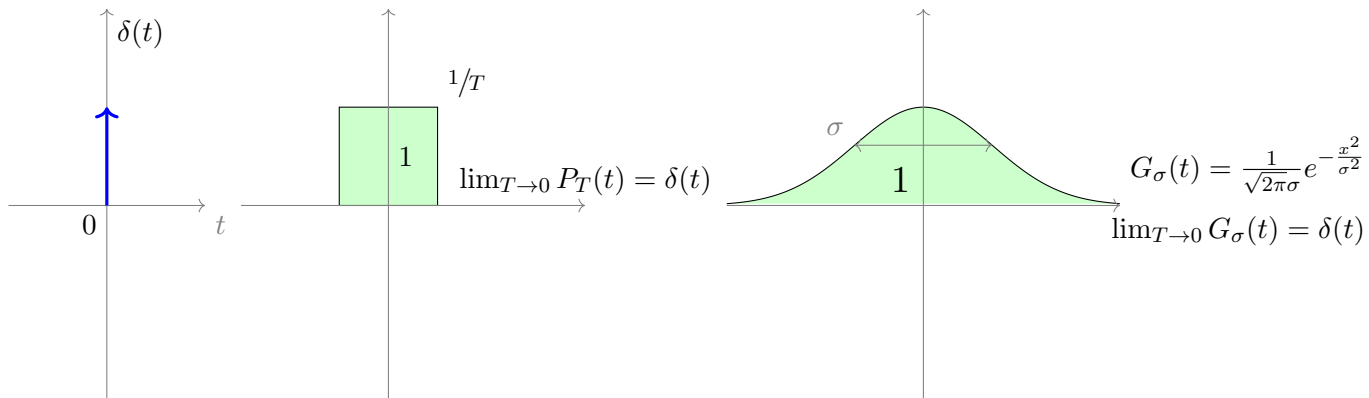
$$x(t) = ce^{(\sigma t + j\omega)t} = ce^{\sigma t} e^{j\omega t} = ce^{\sigma t} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

2) (Συν)ημιτονοειδή σήματα

$$x(t) = A \cos(\omega t \pm \phi) = a \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t \pm \phi)} \right\} = A \frac{e^{j(\omega t \pm \phi)} + e^{-j(\omega t \pm \phi)}}{2}$$



3) Δέλτα Dirac $\delta(t)$



Ορ.

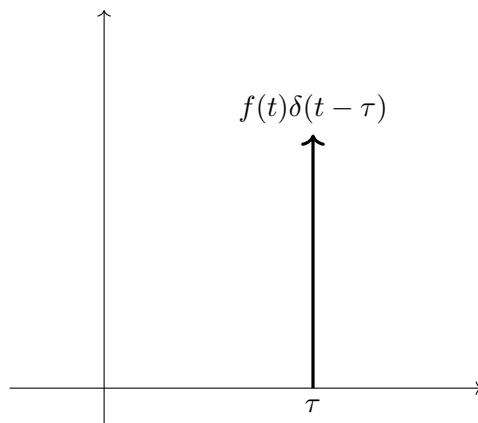
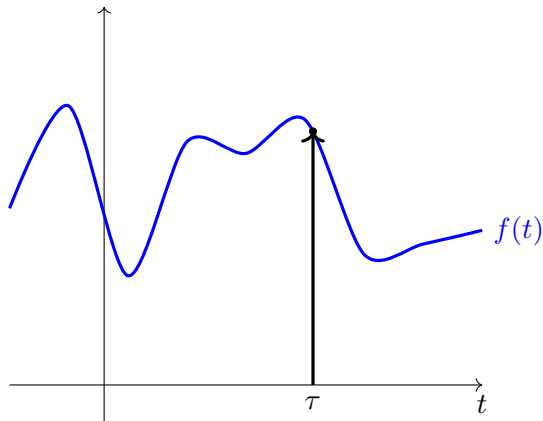
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad \forall f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$



Ιδιότητες της $\delta(t)$

1. Κλιμάκωση

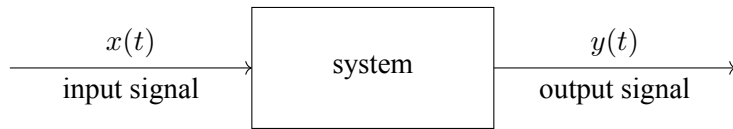
$$a \in \mathbb{R} : \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

Απόδ.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \boxed{\delta(at)} dt}_{\substack{at = \xi \\ dt = \frac{d\xi}{a}}} = \int_{-\infty(a)}^{\infty(a)} \phi\left(\frac{\xi}{a}\right) \delta(\xi) \frac{d\xi}{a} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi\left(\frac{\xi}{a}\right)}{|a|} \delta(\xi) d\xi = \frac{\phi(0)}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \boxed{\frac{\delta(t)}{|a|}} dt$$

$$2. f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$3. f(t)\delta(t - \xi) = f(\xi)\delta(t - \xi)$$



$$y(t) = \mathcal{L} \{x(t)\}$$

$$\forall x_1(t) x_n(t)$$

$$y_1(t) = \mathcal{L} \{x_1(t)\}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L} \{x_2(t)\}$$

Για const $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

$$y(t) = \mathcal{L} \{x(t)\}$$

ανν

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

τότε

\mathcal{L} : γραμμικό σύστημα

- $g(t) = \mathcal{L} \{x(t)\}$

$$x'(t) = x(t - \tau)$$

$$\text{ανν } y'(t) = \mathcal{L} \{x'(t)\} = \mathcal{L} \{x(t - \tau)^2\} = y(t - \tau)$$

τότε το σύστημα \mathcal{L} είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.



Υποστηρίζω ότι ένα γραμμικό & AKM σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική απόκριση $h(t)$.

Απόδ. Από παραπάνω, γνωρίζουμε ότι $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$

$$y(t) = \mathcal{L} \{y(t)\} = \mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau \right\}$$

$$\stackrel{\text{linearity}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} \{x(\tau)\delta(t - \tau)\} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L} \{\delta(t - \tau)\} d\tau$$

$$\stackrel{\text{AKM}}{\stackrel{\text{TSI}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{h(t - \tau)}_{\text{linear time-shift invariant}} d\tau$$

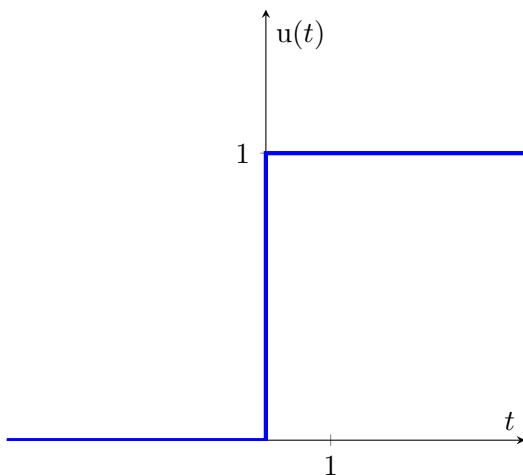
- $\delta(t) = \delta(-t)$ άρτια συνάρτηση
- $\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$, για την οποία αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \phi(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(t) \Big|_{t=0}$$

Βηματική Συνάρτηση (Unit Step Function)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \phi(t) dt = \mathcal{N}_u \{ \phi(t) \} = \int_0^{\infty} \underbrace{\phi(t)}_{\text{number}} dt$$

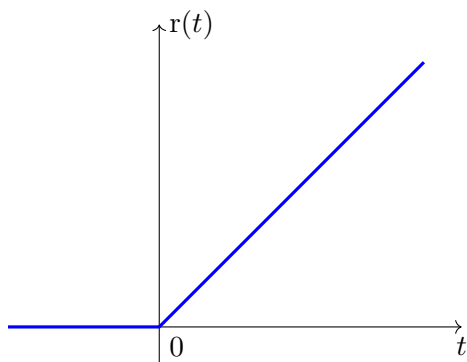


$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \xi) d\xi$$

Ράμπα

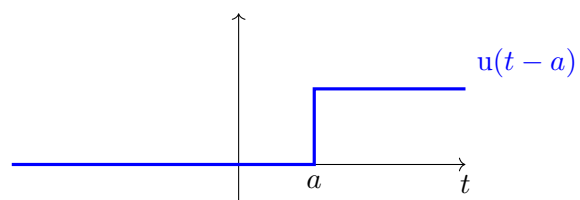
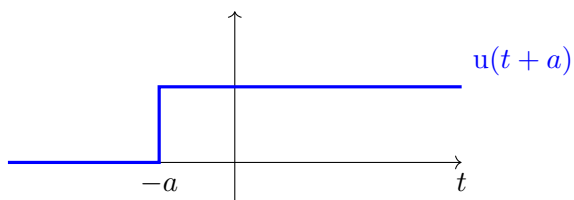
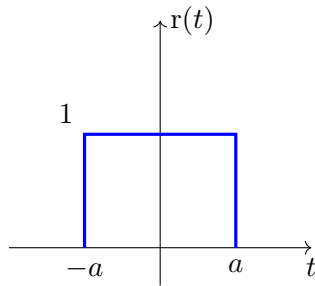
$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = tu(t)$$



$$u(t) = \frac{d}{dt} r(t)$$

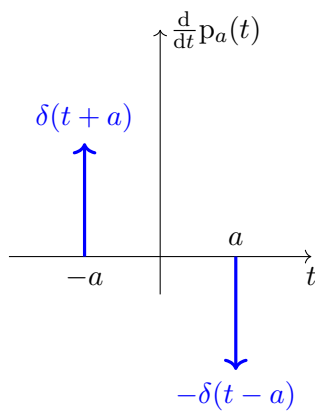
Ορθογωνικός παλμός (Rectangular Pulse function)

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$



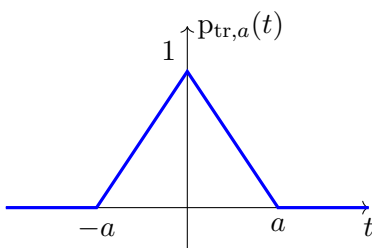
$$p_a(t) = u(t+a) - u(t-a)$$

$$\frac{d}{dt} p_a(t) = \delta(t+a) - \delta(t-a)$$

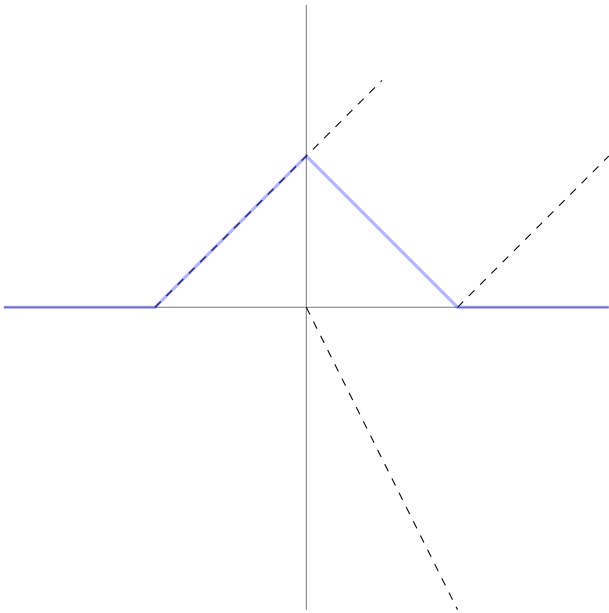


Τριγωνικός Παλμός (Triangular Pulse function)

$$p_{tr,a} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$



$$p_{tr,a}(t) = \frac{1}{a} [r(t+a) + r(t-a) - 2r(t)]$$



Χαρακτηριστικά Μεγέθη

1) Μέση τιμή (Mean Value)

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

Αν περιοδική τότε

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{1}{T} = \int_0^T x(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \end{aligned}$$

2) Ενεργός τιμή (Root Mean Square Value)

$$\overline{\overline{x(t)}} = \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \right]^{1/2}$$

Αν ημιτονοειδές σήμα $\bar{x}(t) = \frac{x_{\max}}{\sqrt{2}}$

3) Ενέργεια - Ισχύς

- Στιγμιαία ισχύς (Instant power)

$$p(t) = x^2(t)$$

- Μέση ισχύς (Mean power)

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \left(\overline{\overline{x(t)}} \right)^2$$

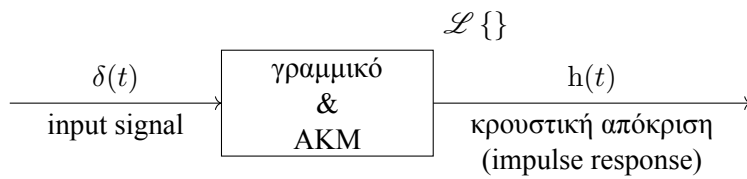
- Ενέργεια (Energy)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = (t_2 - t_1) \left(\overline{\overline{x(t)}} \right)^2$$

$$\text{Σήματα} \begin{cases} \text{Σήμα ενέργειας αν } \lim_{T \rightarrow \infty} W < \infty \\ \text{Σήμα ισχύος αν } \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{p(t)} > 0 \\ \text{Υπάρχουν και σήματα που δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος.} \end{cases}$$

Συνέλιξη

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



$$h(t) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \underbrace{x(t)}_{\text{είσοδος}} \underbrace{*}_{\text{συνέλιξη}} \underbrace{h(t)}_{\text{κρουστική απόκριση}}$$

Συνέλιξη - Convolution

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

- $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$ **Αντιμεταθετική**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) y(\lambda) [-d\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda = y(t) * x(t)$$

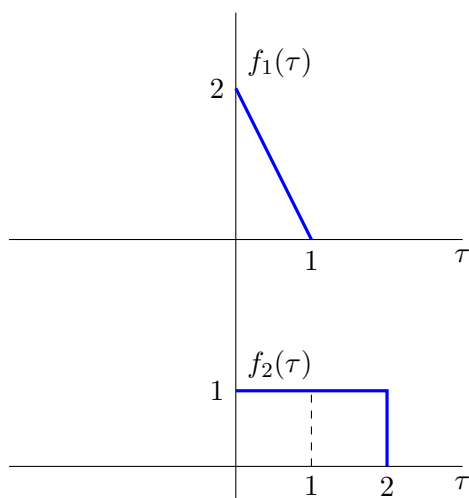
- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$ **Προσεταιριστική**

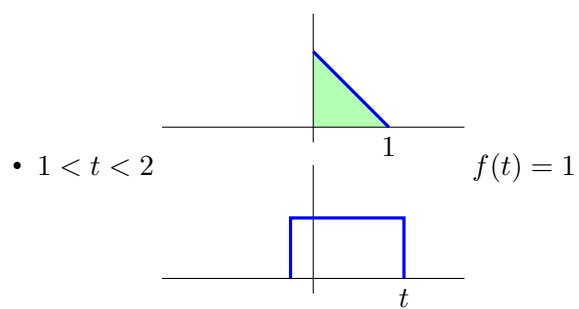
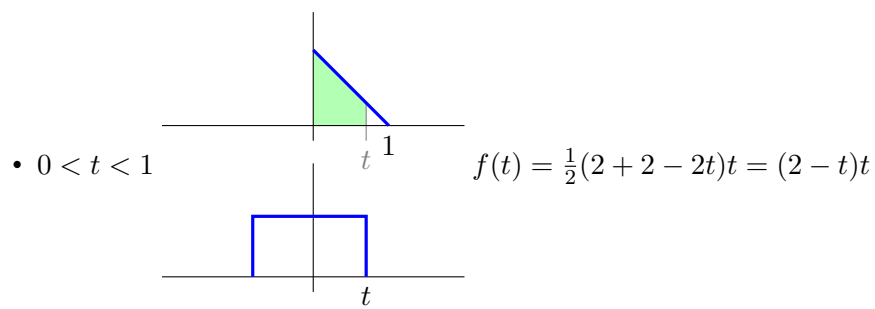
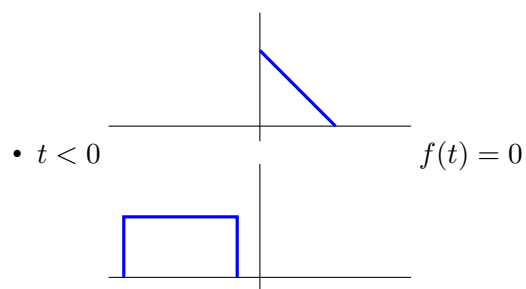
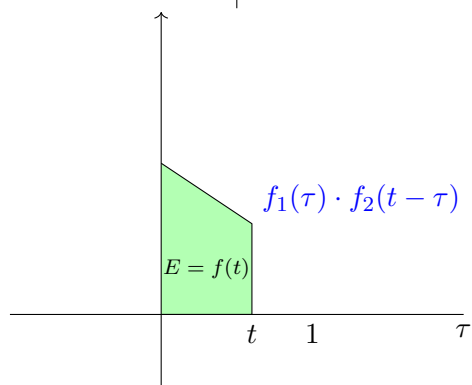
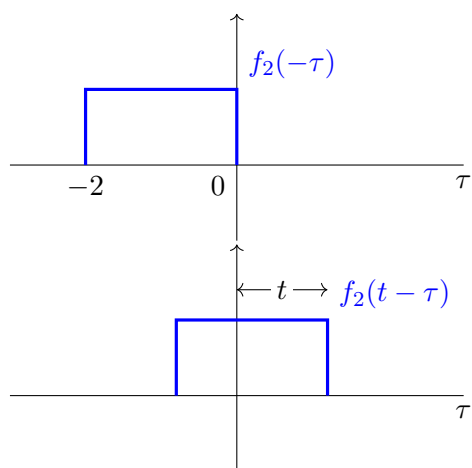
Παρ.

$$f_1(t) = 2(1 - t) [u(t) - u(t - 1)]$$

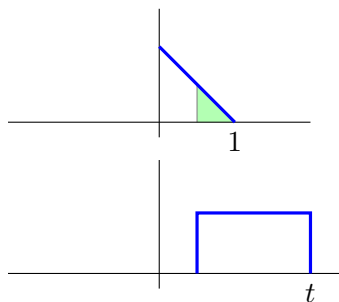
$$f_2(t) = u(t) - u(t - 2)$$

Γραφική μέθοδος υπολογισμού συνέλιξης



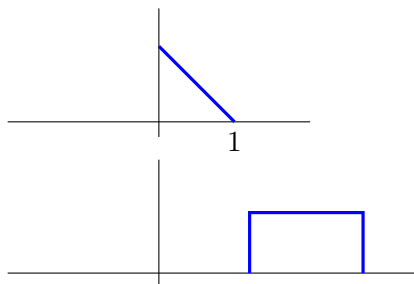


$$\bullet \quad 2 < t < 3$$

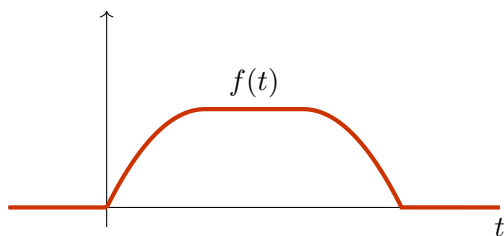


$$f(t) = \frac{(t-1) \cdot 2 \cdot \left(\frac{1-(t-2)}{2}\right)}{2} = (t-1)(3-t)$$

$$\bullet \quad t > 3$$



$$f(t) = 0$$



Αναλυτική μέθοδος Παρατηρώ ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau) u(t - \xi) u(\phi - \tau) d\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t, \tau) d\tau u(\phi - \xi)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2(1-\tau)}_{x(\tau)} [u(\tau) - u(\tau+1)] [u(t-\tau) - u(t-\tau-2)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) [u(\tau)u(t-\tau) - u(\tau-1)u(t-\tau) - u(\tau)u(t-\tau-2) + u(\tau-1)u(t-\tau-2)] d\tau \\ &= \int_0^t x(\tau) d\tau u(t) - \int_1^x x(\tau) d\tau u(t-1) - \int_0^{t-2} x(\tau) d\tau u(t-2) + \int_1^{t-2} x(\tau) d\tau u(t-3) \\ &= (2t-t^2)u(t) - [2t-t^2-1]u(t-1) - [2(t-2)-(t-2)^2]u(t-2) + [2(t-2)-(t-2)^2-1]u(t-3) \end{aligned}$$

Ex

$$f_1(t) = e^t u(-t)$$

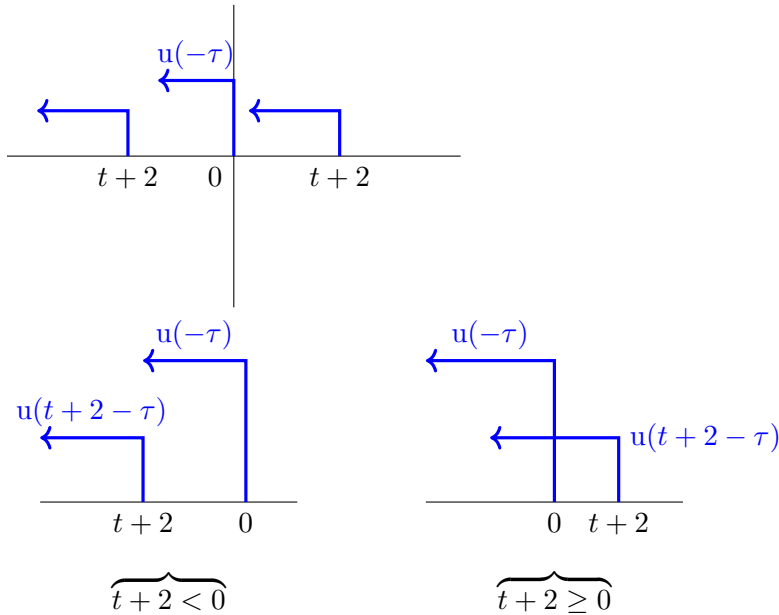
$$f_2(t) = u(t+2) - u(t+1)$$

$$f = f_1 * f_2$$

$$\begin{aligned}
f &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(-(t-\tau)+2) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(\tau-t+2) d\tau \\
&= \int_{t-2}^0 e^{\tau} d\tau u(2-t) \\
&= e^{\tau} \Big|_{t-2}^0 u(2-t) \\
&= [1 - e^{t-2}] u(2-t)
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau) u(\tau - \xi) u(\phi - \tau) d\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t, \tau) d\tau u(\phi - \xi)$$

Ex.



$$x(t) = e^t u(-t)$$

$$y(t) = u(t+2)$$

$$\begin{aligned}
z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u[(t-\tau)+2] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(t+2-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} [1 - u(t)] u(t+2-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(t+2-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t+2-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t+2} e^{\tau} d\tau u(t+2 - (-\infty)) \overset{1}{\rightarrow} - \int_0^{t+2} e^{\tau} d\tau u(t+2) \\
&= e^{t+2} - [e^{t+2} - 1] u(t+2)
\end{aligned}$$

Ex.

$$x(t) = e^t u(-t)$$

$$y(t) = u(t+2) - u(t+1)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) [u(t-\tau+2) - u(t-\tau+1)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(t-\tau+1) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} [1 - u(\tau)] u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} [1 - u(\tau)] u(t-\tau+1) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(t-\tau+1) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t-\tau+1) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau} d\tau - \int_0^{t+2} e^{\tau} d\tau u(t+2) + \int_0^{t+1} e^{\tau} d\tau u(t+1) \\ &= \int_{t+1}^{t+2} e^{\tau} d\tau - [e^{t+2} - 1] u(t+2) + [e^{t+1} - 1] u(t+1) \end{aligned}$$

$\exists h(t)$ ανν LTI

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

Έστω ότι η $x(t) = e^{j\omega t}$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= x(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{h(t) \xrightarrow{FT} H(\omega)} \end{aligned}$$

$$x(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t}$$

$$y(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} H(\omega_1) + A_2 e^{j\omega_2 t} H(\omega_2)$$

Συναρτησιακοί χώροι

Διανυσματικός χώρος S

$$\bar{x}, \bar{y} \in S$$

Εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in \mathbb{C}$$

$$1) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^*$$

$$2) c \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle c\bar{x}, \bar{y} \rangle$$

$$3) \langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$$

$$4) \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0 \text{ με } \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \text{ ανν } \bar{x} = \bar{0}$$

Νόρμα

$$\bar{x} \in S$$

$$\|\bar{x}\| \geq 0$$

$$1) \|\bar{x}\| = 0 \text{ ανν } \bar{x} = \bar{0}$$

$$2) \|a\bar{x}\| = |a| \|\bar{x}\| \quad x \in \mathbb{C}$$

$$3) \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

Μέτρο: Απόσταση μεταξύ $\bar{x}, \bar{y} \in S$

$$1) d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \quad d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ ανν } \bar{x} = \bar{y}$$

$$2) d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$$

$$3) d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{y}, \bar{z}) \quad \bar{z} \in S$$