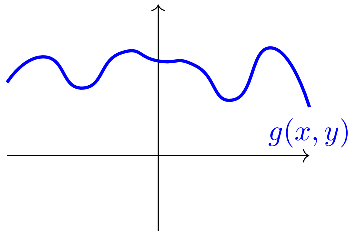
Την Τρίτη μάθημα 8:30 χωρίς διάλειμμα

Σήμα - σύστημα

$$\boxed{\underbrace{g}_{\text{εξαρτημένη}} = f(\underbrace{t}_{\text{ανεξάρτητη}})} \qquad g = f(\vec{r}, t) \qquad \vec{E}(\vec{r}, t)$$

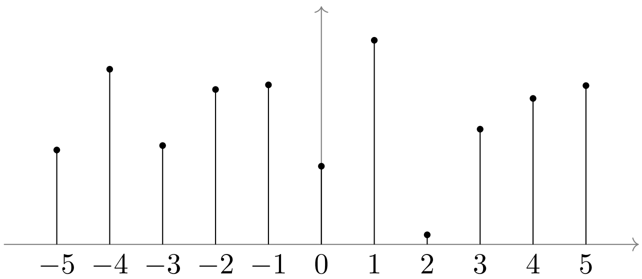
Αναλογικό

Αν t συνεχής $\in \mathbb{R}$
και y συνεχής $\in \mathbb{R}$



Διακριτού χρόνου / Διακριτό (discrete)

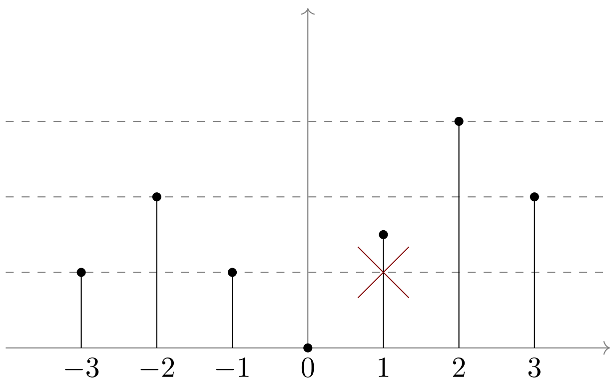
t διακριτό $\to \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}$
g συνεχής $\in \mathbb{R}$



7^{o} εξάμηνο

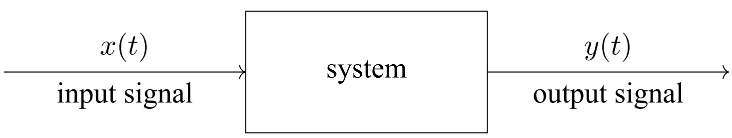
Κβαντισμένο

$n \in \mathbb{Z}$
g διακριτή



Στοχαστικό Περιέχει και τις τρεις κατηγορίες

0.1 Σύστημα



0.2 Περιοδικά σήματα

Αν $\exists T \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = x(t+T)$ τότε $x(t)$ **περιοδικό σήμα** με περίοδο T.
Ή θα είναι 0, ή θα συνεχιστεί για πάντα.

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t)\,\mathrm{d}t\ \forall t$$

Η σύνθεση μιας συνάρτησης με μια περιοδική συνάρτηση είναι περιοδική;

Απόδ. Έστω g μία περιοδική συνάρτηση:

$$\begin{aligned}\big(f \circ g\big)(x) &= f\left(g(x)\right) = f\left(g(x+T)\right) = \\ &= \big(f \circ g\big)(x+T)\end{aligned}$$

0.3 Συμμετρίες

- Αν $x(t) = x(-t)\ \forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **άρτια συνάρτηση** (even function).
- Αν $x(t) = -x(t)\ \forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **περιττή συνάρτηση** (odd function).

$$\forall x(t) \quad \exists\, x_0(t), x_e(t) : x(t) = x_e(t) + x_0(t)$$

Απόδ.

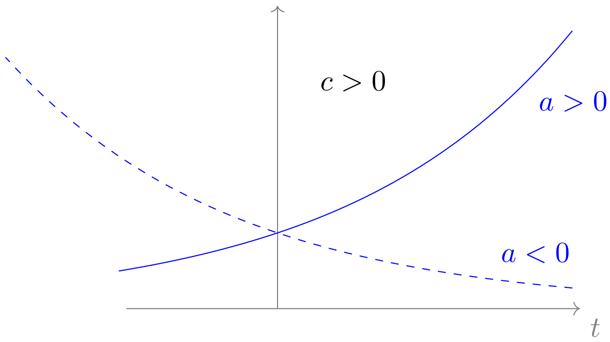
$$\begin{aligned}x_e(t) &= \frac{x(t)+x(-t)}{2} \\ x_o(t) &= \frac{x(t)-x(-t)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\underbrace{\ e\ }_{\text{άρτια}}y_e &= z_e \\ x_o y_o &= z_e \\ x_e y_0 &= z_0 \\ \int_{-A}^{A} x_0(t)\,\mathrm{d}t &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t)\,\mathrm{d}t &= ?\ \text{(εξαρτάται)} \\ \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} x_0(t)\,\mathrm{d}t &= 0 \quad \text{(principal Cauchy value)}\end{aligned}$$

Χαρακτηριστικά σήματα

1) **Εκθετικό σήμα**

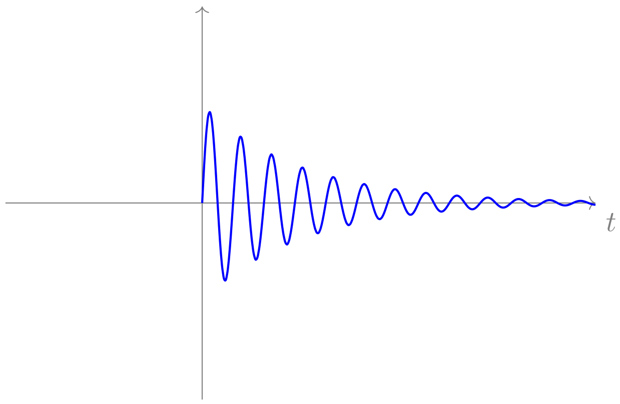
$$x(t) = ce^{at} \quad a \in \mathbb{R} \quad c > 0$$



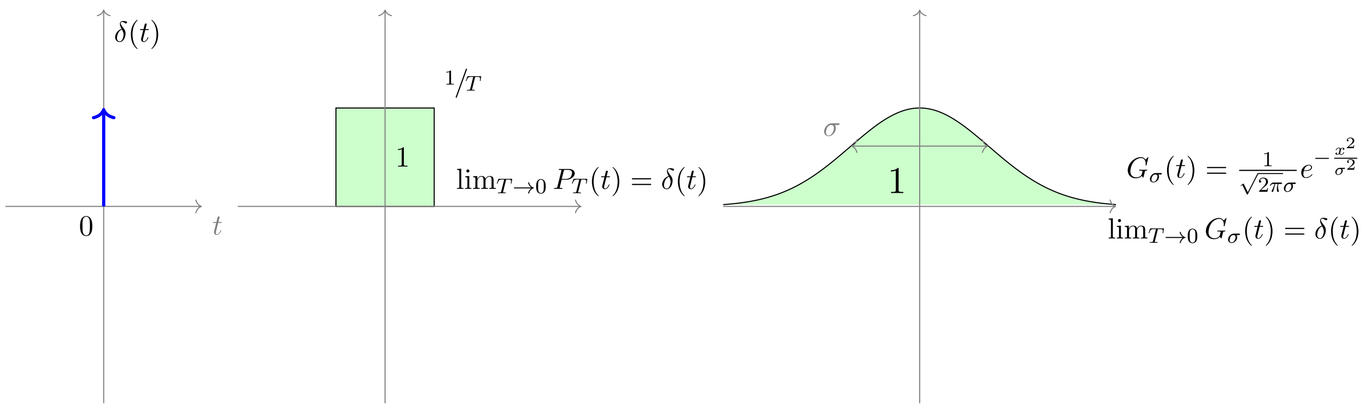
$$x(t) = ce^{(\sigma t + j\omega)t} = ce^{\sigma t}e^{j\omega t} = ce^{\sigma t}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right]$$

2) **(Συν)ημιτονοειδή σήματα**

$$x(t) = A\cos(\omega t \pm \phi) = a\mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega t + \phi)}\right\} = A\frac{e^{j(\omega t \pm \phi)} + e^{-j(\omega t \pm \phi)}}{2}$$



3) **Δέλτα Dirac $\delta(t)$**



Ορ.

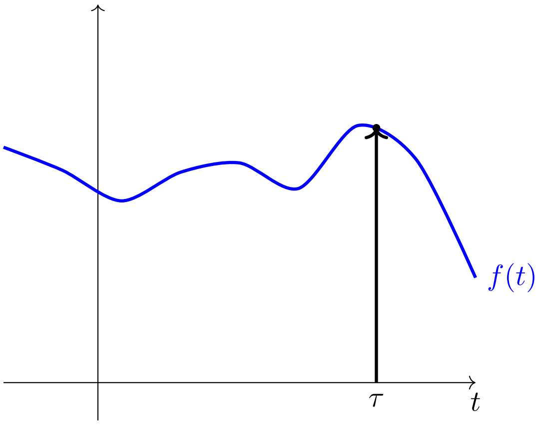
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)\ \forall f(t)$$

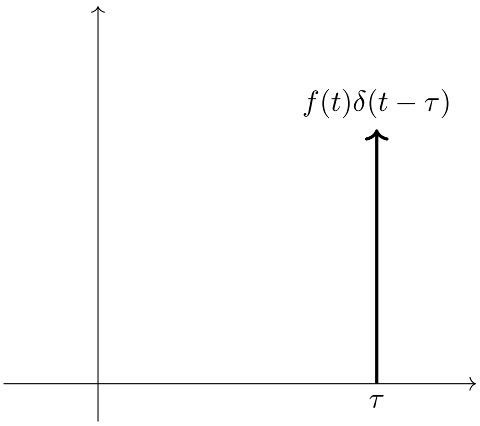
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = f(\tau)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)$$





Ιδιότητες της $\delta(t)$

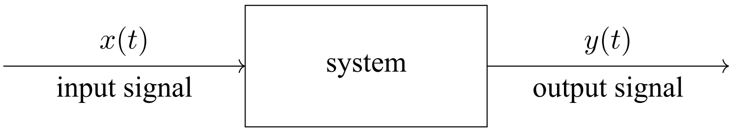
1. **Κλιμάκωση**

$$a \in \mathbb{R} : \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

Απόδ.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\boxed{\delta(at)}\,\mathrm{d}t}_{\substack{at=\xi \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\xi}{a}}} = \int_{-\infty_{(a)}}^{\infty_{(a)}} \phi\left(\frac{\xi}{a}\right)\delta(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{a} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi\left(\frac{\xi}{a}\right)}{|a|}\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{\phi(0)}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\boxed{\frac{\delta(t)}{|a|}}\mathrm{d}t$$

2. $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$
3. $f(t)\delta(t-\xi) = f(g)\delta(t-\xi)$



$y(t) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$
$\forall x_1(t)\ x_n(t)$
$y_1(t) = \mathscr{L}\left\{x_1(t)\right\}$
$y_2(t) = \mathscr{L}\left\{x_2(t)\right\}$

Για const $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \\ y(t) &= \mathscr{L}\left\{x(t)\right\} \end{aligned}$$

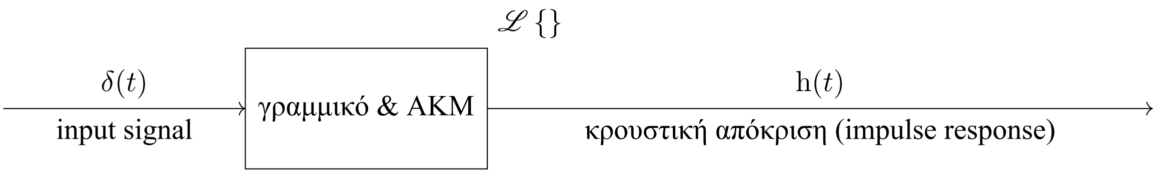
ανν

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

τότε

$$\mathscr{L}: \text{ γραμμικό σύστημα}$$

- $g(t) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$
  $x'(t) = x(t-\tau)$
  ανν $y'(t) = \mathscr{L}\left\{x'(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{x(t-\tau)^2\right\} = y(t-\tau)$
  τότε το σύστημα $\mathscr{L}$ είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.



Υποστηρίζω ότι ένα γραμμικό & ΑΚΜ σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική απόκριση $h(t)$.

Απόδ. Από παραπάνω, γνωρίζουμε ότι $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} y(t) = \mathscr{L}\left\{y(t)\right\} &= \mathscr{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \\ &\overset{\text{linearity}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{L}\left\{x(\tau)\delta(t-\tau)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathscr{L}\left\{\delta(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\ &\underset{TSI}{\overset{\text{AKM}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\underbrace{h(t-\tau)}_{\text{linear time-shift invariant}}\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

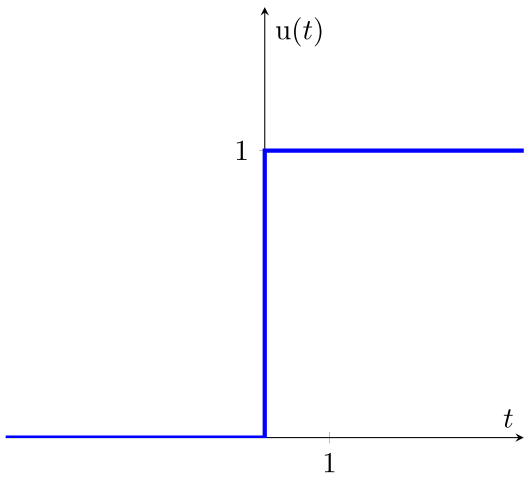
- $\delta(t) = \delta(-t)$ άρτια συνάρτηση
- $\delta^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t)$, για την οποία αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\ \phi^{(n)}(t)\Big|_{t=0}$$

0.3.1 Βηματική Συνάρτηση (Unit Step Function)

$$\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{N}_{\mathrm{u}}\left\{\phi(t)\right\} = \int_{0}^{\infty} \underbrace{\phi(t)}_{\text{number}}\,\mathrm{d}t$$

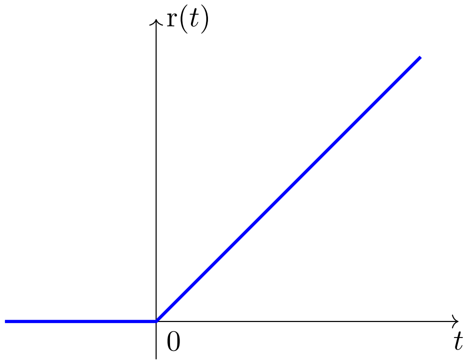


$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{u}(t)$$

$$\mathrm{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

0.3.2 Ράμπα

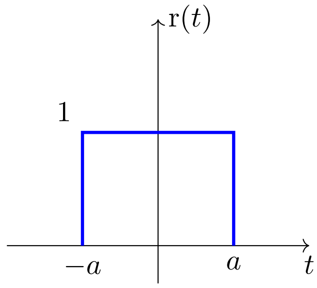
$$\mathrm{r}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = t\mathrm{u}(t)$$

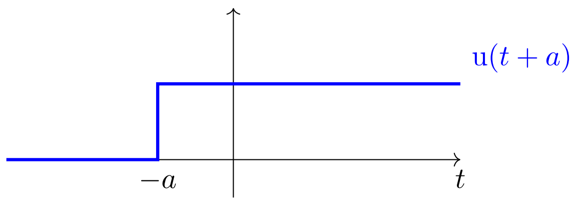


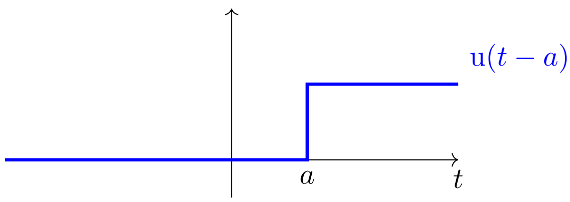
$$\mathrm{u}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{r}(t)$$

0.3.3 Ορθογωνικός παλμός (Rectangular Pulse function)

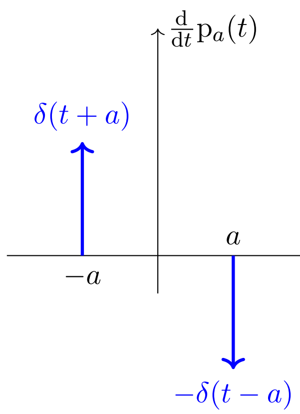
$$\mathrm{p}_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$





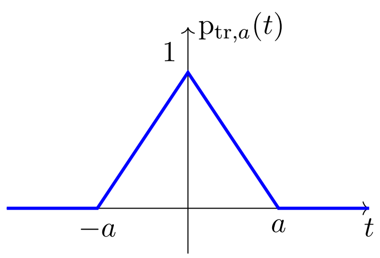


$$\begin{aligned} \mathrm{p}_a(t) =& \mathrm{u}(t+a) - \mathrm{u}(t-a) \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{p}_a(t) =& \delta(t+a) - \delta(t-a) \end{aligned}$$

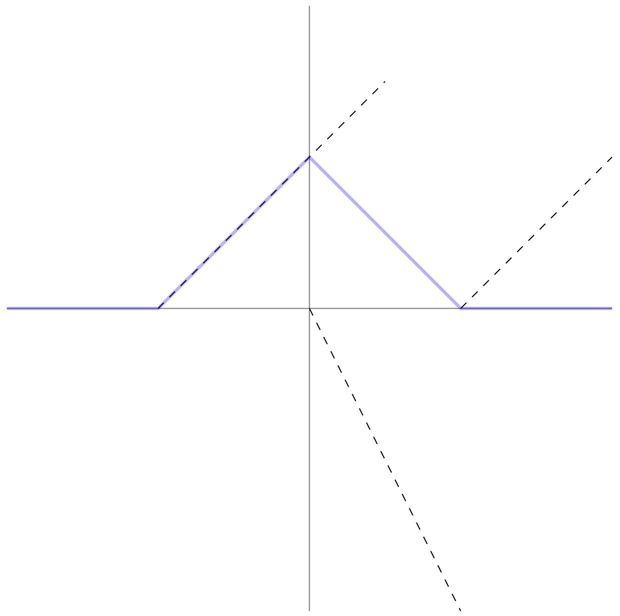


0.3.4 Τριγωνικός Παλμός (Triangular Pulse function)

$$\mathrm{p}_{\mathrm{tr},a} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$



$$p_{\mathrm{tr},a}(t) = \frac{1}{a}\left[\mathrm{r}(t+a) + \mathrm{r}(t-a) - 2\mathrm{r}(t)\right]$$



0.4 Χαρακτηριστικά Μεγέθη

1) **Μέση τιμή (Mean Value)**

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\mathrm{d}t$$

Αν περιοδική τότε

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{1}{T} = \int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

2) **Ενεργός τιμή (Root Mean Square Value)**

$$\overline{\overline{x(t)}} = \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t \right]^{1/2}$$

Αν ημιτονοειδές σήμα $\bar{\bar{x}}(t) = \frac{x_{\max}}{\sqrt{2}}$

3) **Ενέργεια - Ισχύς**

- Στιγμιαία ισχύς (Instant power)

$$p(t) = x^2(t)$$

- Μέση ισχύς (Mean power)

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \left(\overline{\overline{x(t)}}\right)^2$$

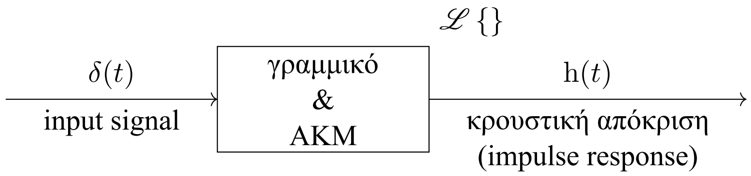
- Ενέργεια (Energy)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t = (t_2 - t_1)\left(\overline{\overline{x(t)}}\right)^2$$

$$\textbf{Σήματα} \begin{cases} \textbf{Σήμα ενέργειας} \text{ αν } \lim\limits_{T\to\infty} W < \infty \\ \\ \textbf{Σήμα ισχύος} \text{ αν } \lim\limits_{T\to\infty} \overline{p(t)} > 0 \\ \text{Υπάρχουν και σήματα που δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος.} \end{cases}$$

0.5 Συνέλιξη

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau$$



$$h(t) = \mathscr{L}\left\{\delta(t)\right\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{x(t)}_{\text{είσοδος}}\ \underbrace{*}_{\text{συνέλιξη}}\ \underbrace{h(t)}_{\text{κρουστική απόκριση}}$$

Συνέλιξη - Convolution

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$ **Αντιμεταθετική**

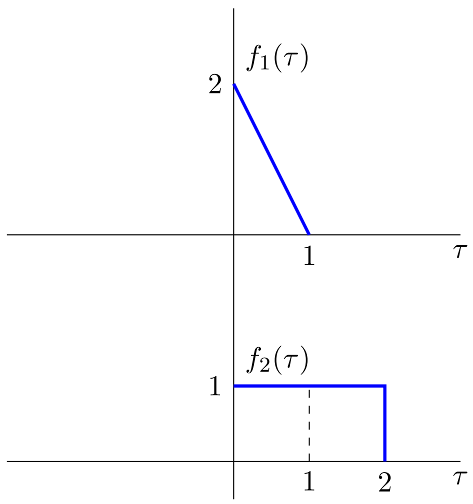
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)y(\lambda)[-\,\mathrm{d}\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda)x(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = y(t) * x(t)$$

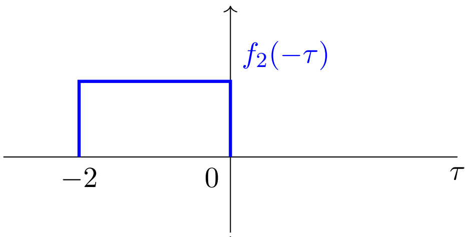
- $x_1(t) * \left[x_2(t) * x_3(t)\right] = \left[x_1(t) * x_2(t)\right] * x_3(t)$ **Προσεταιριστική**

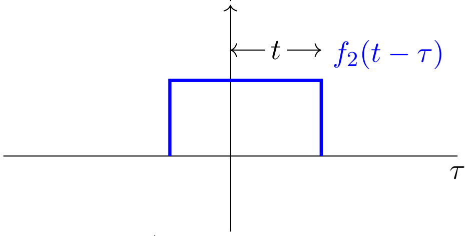
Παρ.

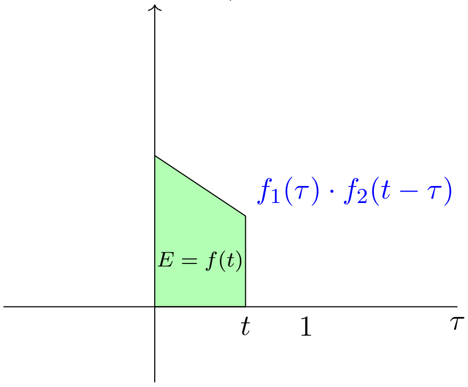
$$f_1(t) = 2(1-t)\left[\mathrm{u}(t) - u(t-1)\right]$$
$$f_2(t) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-\tau)$$

Γραφική μέθοδος υπολογισμού συνέλιξης

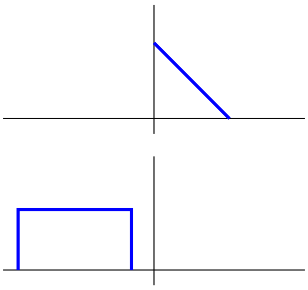






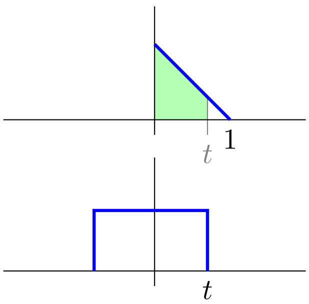


- $t < 0$



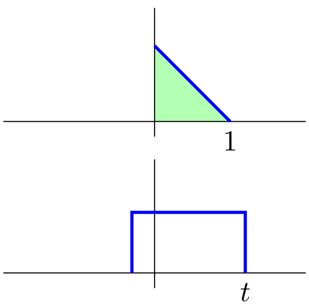
$f(t) = 0$

- $0 < t < 1$



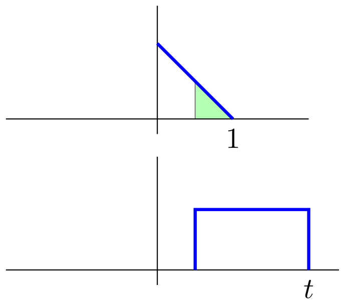
$f(t) = \frac{1}{2}(2 + 2 - 2t)t = (2-t)t$

- $1 < t < 2$



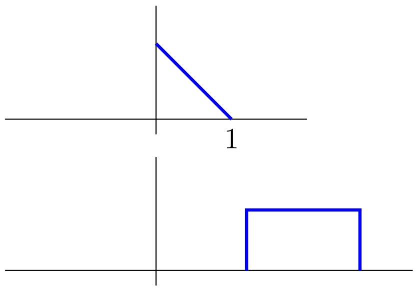
$f(t) = 1$

- $2 < t < 3$

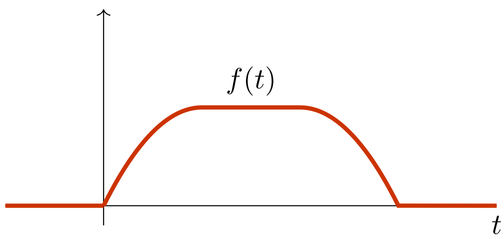


$$f(t) = \tfrac{(t-1)\cdot 2\cdot\big(1-(t-2)\big)}{2} = (t-1)(3-t)$$

- $t > 3$



$$f(t) = 0$$



Αναλυτική μέθοδος Παρατηρώ ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau)\mathrm{u}(t-\xi)\mathrm{u}(\phi-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(\phi-\xi)$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2(1-\tau)}_{x(\tau)}\big[\mathrm{u}(\tau)-\mathrm{u}(\tau+1)\big]\,\big[\mathrm{u}(t-\tau)-\mathrm{u}(t-\tau-2)\big]\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\big[\mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau)-\mathrm{u}(\tau-1)\mathrm{u}(t-\tau)-\mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau-2)+\mathrm{u}(\tau-1)\mathrm{u}(t-\tau-2)\big]\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t) - \int_1^x x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t-1) - \int_0^{t-2} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t-2) + \int_1^{t-2} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t-3) \\
&= (2t-t^2)\mathrm{u}(t)-\big[2t-t^2-1\big]\mathrm{u}(t-1)-\big[2(t-2)-(t-2)^2\big]\mathrm{u}(t-2)+\big[2(t-2)-(t-2)^2-1\big]\mathrm{u}(t-3)
\end{aligned}$$

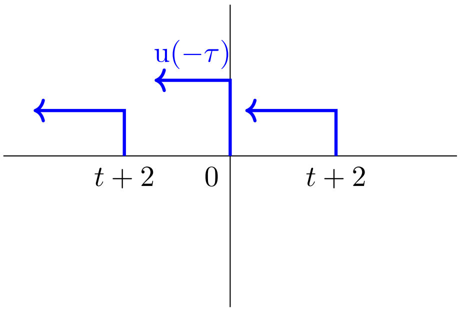
Ex

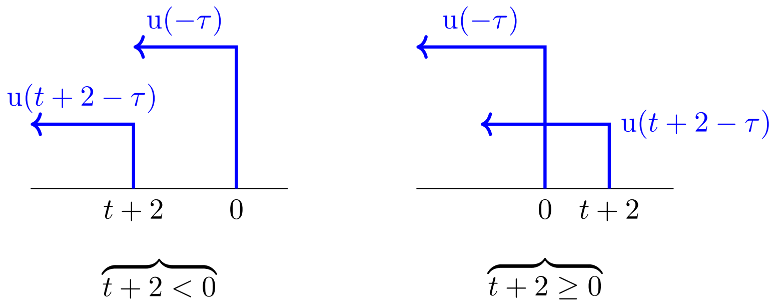
$$\begin{aligned}
f_1(t) &= e^t\mathrm{u}(-t) \\
f_2(t) &= \mathrm{u}(t+2)-u(t+1) \\
f &= f_1 * f_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}\left(-(t-\tau)+2\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}(\tau-t+2)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t-2}^{0} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t-2) \\
&= e^{\tau}\big|_{t-2}^{0}\,\mathrm{u}(2-t) \\
&= \left[1-e^{t-2}\right]\mathrm{u}(2-t)
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau)\mathrm{u}(\tau-\xi)\mathrm{u}(\phi-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(\phi-\xi)
$$

Ex.





$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{t}\mathrm{u}(-t) \\
y(t) &= \mathrm{u}(t+2) \\
z(t) &= x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}\left[(t-\tau)+2\right]\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\left[1-\mathrm{u}(t)\right]\mathrm{u}(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(\tau)u(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\cancelto{1}{\mathrm{u}\left(t+2-(-\infty)\right)} - \int_{0}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t+2) \\
&= e^{t+2} - \left[e^{t+2}-1\right]\mathrm{u}(t+2)
\end{aligned}
$$

Ex.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{t}\mathrm{u}(-t) \\
y(t) &= \mathrm{u}(t+2) - \mathrm{u}(t+1) \\
z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\left[\mathrm{u}(t-\tau+2) - \mathrm{u}(t-\tau+1)\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}(t-\tau+1)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\left[1-\mathrm{u}(\tau)\right]\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\left[1-\mathrm{u}(\tau)\right]\mathrm{u}(t-\tau+1)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(t-\tau+1)\,\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau+1 \\
&= \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau - \int_{0}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t+2) + \int_{0}^{t+1} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t+1) \\
&= \int_{t+1}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau - \left[e^{t+2}-1\right]\mathrm{u}(t+2) + \left[e^{t+1}-1\right]\mathrm{u}(t+1)
\end{aligned}
$$

$\exists h(t)$ ανν LTI

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t) * h(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

Έστω ότι η $x(t) = e^{j\omega t}$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau}_{h(t)\xrightarrow{FT}H(\omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t} \\
y(t) &= A_1 e^{j\omega_1 t} H(\omega_1) + A_2 e^{j\omega_2 t} H(\omega_2)
\end{aligned}
$$

Κεφάλαιο 1 Συναρτηστιακοί χώροι

Διανυσματικός χώρος S

$\bar{x}, \quad \bar{y} \quad S$

Εσωτερικό γινόμενο

$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \ \in \mathbb{C}$

1) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^*$

2) $c \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle c\bar{x}, \bar{y} \rangle$

3) $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$

4) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \ \geq 0$ με $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$ ανν $\bar{x} = \bar{0}$

Νόρμα

$\bar{x} \in S$

$||\bar{x}|| \geq 0$

1) $||\bar{x}|| = 0$ ανν $\bar{x} = \bar{0}$

2) $||a\bar{x}|| = |a|||\bar{x}|| \quad x \in \mathbb{C}$

3) $||\bar{x} + \bar{y}|| \leq ||\bar{x}|| + ||\bar{y}||$

Μέτρο: Απόσταση μεταξύ $\bar{x}, \bar{y} \in S$

1) $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \qquad d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ ανν $\bar{x} = \bar{y}$

2) $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$

3) $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{y}, \bar{z}) \quad \bar{z} \in S$

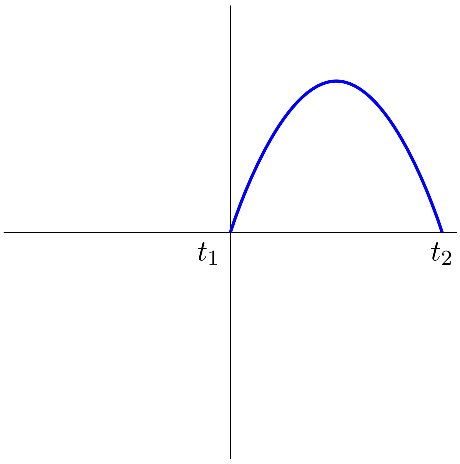
Συναρτησιακός χώρος

$$x(t), y(t) \in S = \big\{ x(t)/x(t) : [t_1, t_2] \to \mathbb{R} \big\}$$

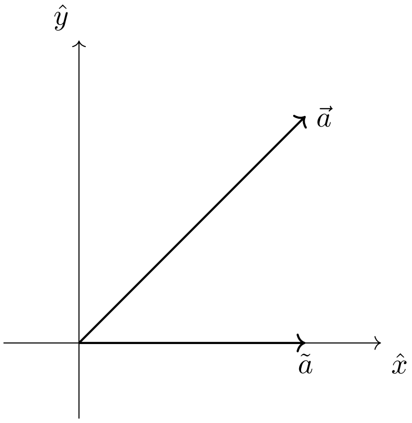
$$\big\langle x(t), y(t) \big\rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y(t) \,\mathrm{d}t$$

$$\big|\big| x(t) \big|\big| = \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \,\mathrm{d}t \right]^{1/2}$$

$$d\big(x(t), y(t)\big) = \left[\int_{t_1}^{t_2} \big[x(t) - y(t)\big]^2 \,\mathrm{d}t \right]^{1/2}$$



$$\begin{aligned}
&\text{Αν } \left\langle \phi_1(t), \phi_2(t) \right\rangle = 0 \quad \phi_1(t) \perp \phi_2(t) \\
&\quad\ \ \left\langle \phi_1(t), \phi_1(t) \right\rangle = 1 \quad \phi_1(t) \text{ κανονική}
\end{aligned}$$



Τερατοχώρος

$\hat{x}, \hat{y}$ όχι εξαρτημένα (συνευθειακά)

Ποια είναι η καλύτερη προσέγγιση για το $\vec{a}$ εφ' όσον δεν υπάρχει το $\vec{y}$;

$\tilde{a}$ best γιατί $\mathrm{d}(\vec{a}, \tilde{a})$ min.

Άρα:

$$\begin{aligned}
&\tilde{a} = k\hat{x} \\
&\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} \\
&\vec{a} - \tilde{a} = (a_x - k)\hat{x} - a_y\hat{y} \\
&d(\vec{a}, \tilde{a}) = \sqrt{(a_x - k)^2 + a_y^2} \\
&\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(d(\vec{a}, \tilde{a})\right) = \frac{a_x - k}{\cdots} = 0 \implies k = a_x = \tilde{a} \cdot \hat{x} \\
&\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x
\end{aligned}$$

Η βέλτιστη έκφραση του $\vec{a}$ στο δισδιάστατο χώρο είναι το ίδιο το $\vec{a}$.

Μη κάθετα διανύσματα

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$
$$\vec{a} - \tilde{a} = (a_x - k)\hat{x} + a_y\hat{y}$$
$$\mathrm{d}(\vec{a},\tilde{a}) = ||\vec{a}-\tilde{a}|| = \sqrt{(\vec{a}-\tilde{a})(\vec{a}-\tilde{a})} = \Big(\big[(a_x-k)\hat{x}+a_y\hat{y}\big]\cdot\big[(a_x-k)\hat{x}+a_y\hat{y}\big]\Big)^{1/2}$$
$$\Big[(a_x-k)^2 + a_y^2 + 2(a_x-k)a_y\hat{x}\cdot\hat{y}\Big]^{1/2}$$
$$\vec{a}_{\text{best}} = (\vec{a}\cdot\hat{x})\hat{x} \neq a_x$$
$$\boxed{\vec{a}\cdot\hat{x} = a_x + a_y\cos\phi \neq a_x}$$

Συναρτηστιακός κόσμος $\phi_n(t)$ παράγουν χώρο με το μηχανισμό:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(t) \quad t\in\Delta$$

$\phi_n(t)$ ανεξάρτητες μεταξύ τους (βάση απειροδιάστατου χώρου)

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=0}^{M} \underbrace{\hat{a}_n}_{\neq a_n,\ \text{επειδή η βάση δεν είναι ορθοκανονική}} \phi_n(t)$$ βέλτιστη, ώστε η απόσταση με την f να είναι ελάχιστη

$$\begin{aligned}
\overbrace{I^2}^{\text{σφάλμα}} &= \int_\Delta \Big[f(t)-\hat{f}(t)\Big]^2\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\Delta \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\phi_n(t) - \sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n\phi(t)\right]^2\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_\Delta\left(\sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n\phi_n(t)\right)^2\mathrm{d}t - 2\int_\Delta\left[f(t)\sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n\phi_n(t)\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_\Delta\sum_{n=0}^{M}\big[\hat{a}_n\phi_n(t)\big]^2\,\mathrm{d}t + 2\int_\Delta\left[\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=n+1}^{M}\hat{a}_n\cdot\hat{a}_m\phi_n(t)\phi_m(t)\right]\mathrm{d}t - 2\int_\Delta\sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n f(t)\phi_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n^2\int_\Delta\phi_n^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\sum_{n=0}^{M}\sum_{n=m+1}^{M}\hat{a}_n\hat{a}_m\int_\Delta\phi_n(t)\phi_m(t)\,\mathrm{d}t - 2\sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n\int_\Delta f(t)\phi_n(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$
$$\frac{\mathrm{d}(I^2)}{\mathrm{d}\underbrace{\hat{a}_i}_{\text{από 0 έως } n}} = 2\hat{a}_i\int_\Delta\phi_i^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\sum_{m\neq i}\hat{a}_m\int_\Delta\phi_i(t)\phi_m(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_\Delta f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Έστω ϕ_i μοναδιαία $\iff \int_\Delta \phi^2(t)\,\mathrm{d}t = 1$ και ϕ_i ορθογώνια $\iff \int_\Delta \phi_1\phi_2(t) = 0$
Αν η $\big\{\phi(t)\big\}$ ορθοκανονική

$$2\vec{a}_i - 2\int_\Delta f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies \hat{a}_i = \int_\Delta f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$2a\left\langle\phi,\phi\right\rangle + \sum\sum\hat{a}_n\left\langle\phi_i,\phi_n\right\rangle - 2\left\langle f,\phi\right\rangle = 0$$

$$
\begin{aligned}
&f(t) = \sum_{a=0} a_n \phi_n(t) \\
&\int_\Delta f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = a_i \\
&\langle f, \phi_i \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_i \phi_n, \phi_i \right\rangle = \sum_{??}^{\infty} a_n \left\langle \phi_n, \phi_i \right\rangle
\end{aligned}
$$

Ηθικό δίδαγμα: Αν η βάση του χώρου είναι ορθοκανονική και μας ζητηθεί να υπολογίσουμε μία προσέγγιση της συνάρτησης σε έναν υποχώρο, μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε την προβολή της συνάρτησης πάνω στη βάση.

Ex. $f(t) = e^{-3t}\mathrm{u}(t) \qquad \phi_1(t) = e^{t}\mathrm{u}(t)\ \&\ \phi_2(t) = e^{-2t}\mathrm{u}(t)$

$$
\begin{aligned}
&\hat{f}(t) = a_1 e^{-t}\mathrm{u}(t) + a_2 e^{-2t}\mathrm{u}(t) \\
&\int \left[a_1\phi_1 + a_2\phi_2 - f\right]\phi_1\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\int_0^\infty \left[a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t}\right] e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 \implies \\
&a_1 \int_0^\infty e^{-2t}\,\mathrm{d}t + a_2 \int_0^\infty e^{-3t}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty e^{-4t}\,\mathrm{d}t = 0 \implies \boxed{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} - \frac{1}{4} = 0} \\
&\int \left[a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t}\right] e^{-2t}\,\mathrm{d}t = 0 \implies \boxed{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} - \frac{1}{5} = 0} \\
&a_1 = {}^{3}\!/_{10},\ a_2 = {}^{6}\!/_{5}
\end{aligned}
$$

Ex. $f(t) = e^{-3t}\mathrm{u}(t) \qquad \phi_1(t) = e^{t}\mathrm{u}(t)\ \&\ \phi_2(t) = e^{-2t}\mathrm{u}(t)\ \&\ \phi_3(t) = e^{-3t}\mathrm{u}(t)$

$f(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(t) \quad \left\{\phi_n(t)\right\}$ ορθοκανονική

$$
\begin{aligned}
E &\triangleq \int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(\sum a_n\phi_n(t) \sum a_n\phi_n(t)\right)\mathrm{d}t + \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cancelto{1}{\int_\Delta \phi_n^2(t)\,\mathrm{d}t} + \sum_{m\neq n} a_i a_n \int_? \cancelto{0}{\Delta\phi_i(t)\phi_n(t)} \\
E &= \sum_{a=m}^{\Sigma} a_n^2 \quad \text{Parseval} \int \text{theorem}
\end{aligned}
$$

Κεφάλαιο 2 Ανάλυση Fourier

2.0.1 Περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο T

$$x_k = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(k\omega t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ θεμελιώδης κυκλική συχνότητα}$$

$$\langle x_k(t), x_n(t)\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t)x_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-T/2}^{T/2}\cos(k\omega t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} n \neq k \to 0 \\ n = k \to 1 \end{cases}$$

$$y_k = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(k\omega t)\ \langle y_k, y_n\rangle = \begin{cases} n \neq k \to 0 \\ n = k \to 1 \end{cases}$$

Υποστηρίζω ότι κάθε περιοδική $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$

Οραματίζομαι ότι αν η παραπάνω $f(t)$ είναι σήμα εισόδου σε ένα σύστημα, τα ημίτονα και συνημίτονα ως ιδιοσυναρτήσεις θα παραμείνουν αμετάβλητα, και θα τροποποιηθούν μόνο τα a_n, b_n.

$$z_k(t) = e^{jk\omega t}$$

$$\langle z_k, z_n\rangle = \begin{cases} k \neq n \to 0 \\ k = n \to T \end{cases}$$

$$z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}e^{jk\omega t}$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}} \text{ εκθετική σειρά}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right]} \text{ τριγωνομετρική σειρά Α}$$

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega t + \phi_n)} \text{ τριγωνομετρική σειρά Β}$$

Οι συντελεστές μπορούν να βρεθούν από τις προβολές της συνάρτησης πάνω στα ημίτονα και τα συνημίτονα:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Συνθήκες Dirichlet

1) $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$

2) Πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών εντός T

3) Πεπερασμένος αριθμός τοπικών ακροτάτων εντός T

$f(t)$ περιοδική T

Μορφή	Σειρά	Συντελεστές	Αλλαγές
Εκθετική	$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega nt}$	$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$	$F_0 = a_0/2$ $F_n = 1/2(a_n - jb_n)$
Τριγωνομετρική Α	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$	$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$	$a_n = (F_n + F_{-n})$ $b_n = j(F_n - F_{-n})$ $a_0 = 2F_0$
Τριγωνομετρική Β	$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega t + \phi_n)$		$A_0 = a_0/2$ $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\|F$ $\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

$$
\begin{aligned}
P = \frac{W}{T} &= \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \\
&= F_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|F_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2
\end{aligned}
$$

Άσκηση για το σπίτι Να βρεθούν η εκθετική και η τριγωνομετρική σειρά του σήματος:

2.1 Μετασχηματισμός Fourier

Φορέας συνάρτησης είναι το διάστημα του πεδίου ορισμού της στο οποίο η συνάρτηση δεν είναι 0 (από $\min x$ για το οποίο δεν είναι 0 ως το αντίστοιχο $\max x$).

$$
\begin{aligned}
&\tilde{f}(t) = \sum k = -\infty^{\infty} f(t - kT) \\
&\downarrow T\text{-περιοδική} \rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\omega_0 nt) + b_n\sin(\omega_0 nt) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \\
&f(t) = \begin{cases} \tilde{f}(t) & -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Μετασχηματισμός Fourier

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Προσοχή

Όταν παίρνουμε τύπους από τυπολόγια, ελέγχουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, για διαφορές στη σύμβαση!

Αντίστοιχος ορισμός

$$
\begin{aligned}
F(\mathfrak{f}) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mathfrak{f}t}\,\mathrm{d}t \\
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathfrak{f}) e^{j2\pi\mathfrak{f}t}\,\mathrm{d}
\end{aligned}
$$

(όπου $\mathfrak{f}$ η συχνότητα)

Η αρνητική συχνότητα δεν έχει καμία φυσική σημασία!

2.1.1 Ιδιότητες

•

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = \underbrace{F_R(\omega)}_{\mathrm{Re}\{F(\omega)\}} + j\underbrace{F_i(\omega)}_{\mathrm{Im}\{F(\omega)\}} \\
A(\omega) &= \big|F(\omega)\big|
\end{aligned}
$$

•

$$
F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\big)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{Re}\{F(\omega)\}} \underbrace{-}_{-} j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{Im}\{F(\omega)\}}
$$

Αν $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι άρτια

$F(\omega)$ είναι πραγματική $\quad F(\omega) \equiv \mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\}$ και είναι άρτια

Αν $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή

$F(\omega)$ είναι φανταστική $\quad F(\omega) = j\mathrm{Im}\left\{F(\omega)\right\}$ και είναι περιττή

Κάθε συνάρτηση είναι άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής. Έστω $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$. Τότε:

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(f_o(t) + f_e(t)\big)\left(\cos\omega t - j\sin\omega t\right)\mathrm{d}t \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f_o \cos\omega t\,\mathrm{d}t} + \int_{-\infty}^{\infty} f_e \cos\omega t\,\mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\,\mathrm{d}t - j\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f_e \sin\omega t\,\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

Αν η f είναι πραγματική:

$\mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\}$ είναι άρτια

$\mathrm{Im}\left\{F(\omega)\right\}$ είναι περιττή

$A(\omega) = \big|F(\omega)\big| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left\{F(\omega)\right\} + \mathrm{Im}^2\left\{F(\omega)\right\}}$ είναι άρτια

$\Phi(\omega) = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{F(\omega)\}}{\mathrm{Re}\{F(\omega)\}}$ είναι περιττή.

Αν η $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και άρτια:

- $\mathrm{Im}\left\{F(\omega) = 0\right\}$
- $\Phi(\omega) = 0$

Αν η $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή:

- $\mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\} = 0$

• Αν $f_1(t) \xrightarrow{\mathrm{FT}} F_1(\omega)$ και $f_2(t) \xrightarrow{\mathrm{FT}} F_2(\omega)$

$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ σταθερά:

$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{\mathrm{FT}} F(\omega) = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$

Γραμμικότητα του Fourier Transform

- Συμμετρική ιδιότητα (το διπλάσιο τυπολόγιο)

  Αν $f(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) \qquad F(t) \xrightarrow{\text{FT}} 2\pi f(-\omega)$

- $$\begin{aligned} f(t) \to F(\omega) \quad &= A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} \\ f(t-\tau) \to e^{-j\omega\tau}F(\omega) \quad &= A(\omega)e^{j\left(\Phi(\omega)-\omega\tau\right)} \end{aligned}$$

- $$f(t) \to F(\omega)$$
  $$e^{j\omega_0 t}f(t) \to F(\omega-\omega_0)$$

  π.χ $\quad \cos(\omega_0 t)f(t) = \dfrac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}f(t) \xrightarrow{\text{FT}} \dfrac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\right]$

Κλιμάκωση στο χρόνο

$$\begin{aligned} &f(t) \to F(\omega) \\ &f(at) \to \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

γιατί; να αποδειχθεί στο σπίτι!

Τι συμβαίνει με τη συνέλιξη

$$\begin{aligned} &g(t) = x(t) * h(t) \\ &x(t) \to X(\omega) \\ &h(t) \to H(\omega) \\ &y(t) \to Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\cdot h(t) \\ y(t) \to Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}X(\omega) * H(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\xi)H(\omega-\xi)\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &\to F(\omega) \\ y(t) = \tfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} &\to j\omega F(\omega) \\ \tfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} &\to (j\omega)^n F(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j\omega t}]dif\omega \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}j\omega F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &\to F(\omega) \\
tf(t) &\xrightarrow{\text{F.T}} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\omega) \\
t^n f(t) &\xrightarrow{\text{F.T}} \tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} F(\omega)
\end{aligned}
$$

Φανταστείτε ότι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\qquad f(t) \xrightarrow{F} (\omega)$

$$
f^*(t) \to F^*(-\omega)
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \,\mathrm{d}\omega \\
f^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} \,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(-\omega) e^{j\omega t} \,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

2.1.2 Θεώρημα Parseval

Θεώρημα Parseval

$$
W = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) \,\mathrm{d}\omega
$$

όπου $F(\omega) = A(\omega) e^{j\Phi(\omega)}$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= f(t) f^*(t) = \left|f(t)\right|^2 \\
Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F^*(\omega) \\
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) F^* \left(-(\omega - \xi)\right) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|A(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Ορισμός

Πυκνότητα φασματικής ενέργειας: $\dfrac{A(\omega)}{2\pi}$

2.1.3 Μετασχηματισμός Fourier γενικευμένων συναρτήσεων

α) $\delta(t) \to 1$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} \,\mathrm{d}t = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = e^0 = 1
$$

$$
\delta(t \mp t_0) \to e^{\pm j\omega t_0}
$$

$f(t) = 1 \rightarrow 2\pi\delta(\omega)$, άρα $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) \implies \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t\,\mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) \implies \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$

2.1.4

$$\mathrm{sgn}(t) = \frac{|t|}{t}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}(t) &= \lim_{u\to 0}\left[e^{-a|t|}\mathrm{sgn}(t)\right] \\
\mathrm{FT}\,\mathrm{sgn}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\mathrm{sgn}t e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{0} e^{at-j\omega t}\,\mathrm{d}t + \lim_{a\to 0}\int_{0}^{\infty} e^{-at-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to 0}\left[-\frac{e^{(at-j\omega t)}}{a-j\omega}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-at-j\omega t}}{-(a+j\omega)}\bigg|_{0}^{\infty}\right] \\
&= \lim_{a\to 0}\left[\frac{-1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega}\right] \\
&= \frac{2}{j\omega} \in \mathbb{I}
\end{aligned}$$

$$u(t) \xrightarrow{\text{F.T.}}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

2.1.5

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}(t) &\xrightarrow{\text{F.T.}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
f(t) &\xrightarrow{\text{F.T.}} F(\omega) \\
g(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{u}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t) * \mathrm{u}(t)
\end{aligned}$$

$$G(\omega) = F(\omega)\cdot\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

2.1.6

$$\begin{aligned}
\delta(t) &\rightarrow 1 \quad \text{άρτια} \\
\delta^{(1)}(t) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t) \rightarrow j\omega \\
\delta^{(n)}(t) &= \tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t) \rightarrow (j\omega)^n
\end{aligned}$$

$$t^n \rightarrow 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$$

2.1.7

Παρ.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= |t| = t\mathrm{u}(t) - t\mathrm{u}(-t) \\
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi j\delta(\omega) * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] - 2\pi j\delta(\omega) * \left[\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right]\right]
\end{aligned}
$$

Calculate at home! The answer is $-\frac{2}{\omega^2}$

$$
\begin{aligned}
t &\to 2\pi j^1\delta^{(1)}(\omega) \\
\mathrm{u}(t) &\to \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
\mathrm{u}(-t) &\to \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}
\end{aligned}
$$

2.1.8 Kramer's Kronig Relations

Από ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$
\underbrace{\vec{D}}_{\text{πυκνότητα ροής}} = \overbrace{\epsilon}^{\text{διηλεκτρική σταθερά}} \underbrace{\vec{E}}_{\text{ένταση πεδίου}}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{E} =& \vec{E}(\vec{r}, t) \\
& \vec{E}(\vec{r}, \omega) \\
\vec{D}(\omega) =& \epsilon(\omega)\vec{E}(\omega) \\
\vec{D}(t) =& \epsilon(t) + \vec{E}(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \\
& h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Αν $H(\omega) = \mathscr{F}T\left\{h(t)\right\} = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$

$$
\boxed{H_I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_R(\omega)}{\omega - \omega'}\,\mathrm{d}\omega'}
$$

$$
\boxed{H_R(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_I(\omega)}{\omega - \omega'}\,\mathrm{d}\omega'}
$$

Η απόδειξη των σχέσεων θα πέσει στις εξετάσεις.

Άσκ.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 2\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t = \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t \\
F(\omega) &= \mathscr{F}\left\{\cos(\omega_1 - \omega_2)t\right\} + \mathscr{F}\left\{\cos(\omega_1 + \omega_2)t\right\} \\
&= \pi\left[\delta\left(\omega - (\omega_1 - \omega_2)\right) + \delta\left(\omega + (\omega_1 - \omega_2)\right)\right] + \pi\left[\delta\left(\omega - (\omega_1 + \omega_2)\right) + \delta\left(\omega + (\omega_1 + \omega_2)\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\left(\cos\omega_0 t \xrightarrow{\text{FT}} \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]\right)
$$

Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned}F(\omega) &= 2\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left\{\cos\omega_1 t\right\} * \mathscr{F}\left\{\cos\omega_2 t\right\} \\ &= \pi\big[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)\big] * \big[\delta(\omega-\omega_2)+\delta(\omega+\omega_2)\big] \\ &= \pi\big[\delta(\omega-\omega_2-\omega_1)+\delta(\omega-\omega_2+\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2+\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2-\omega_1)\big]\end{aligned}$$

Άσκηση

$$\begin{aligned}f(t) &= g(t)\cos^2\omega_0 t \qquad g(t) \xrightarrow{\text{FT}} G(\omega) \\ &= g(t)\frac{1+\cos 2\omega_0 t}{2} = \frac{g(t)}{2} + \frac{1}{2}g(t)\cos 2\omega_0 t \\ \implies F(\omega) &= \frac{1}{2}G(\omega) + \frac{1}{2}G(\omega) * \mathscr{F}\left\{\cos 2\omega_0 t\right\} \\ &= \frac{1}{2}G(\omega) + \frac{1}{2}G(\omega) * \Big[\pi\big(\delta(\omega-2\omega_0)+\delta(\omega+2\omega_0)\big)\Big]\frac{1}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}G(\omega) + \frac{1}{4}\big[G(\omega-2\omega_0)+G(\omega+2\omega_0)\big]\end{aligned}$$

Αν δεν θυμάμαι τον τύπο:

$$\begin{aligned}f(t) &= g(t)\cos^2\omega_0 t = g(t)\cos\omega_0 t\cos\omega_0 t \\ F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}G(\omega) * \left[\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left\{\cos\omega_0 t\right\} * \mathscr{F}\left\{\cos\omega_0 t\right\}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2}G(\omega) * \Big[\pi\big[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2)\big]\Big] * \pi\big[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2)\big] \\ &= \frac{1}{4}G(\omega) * \big[\delta(\omega-2\omega_0)+\delta(\omega)+\delta(\omega)+\delta(\omega+2\omega_0)\big] \\ &= \frac{1}{4}\big[G(\omega-2\omega_1)+2G(\omega)+G(\omega+2\omega_0)\big]\end{aligned}$$

Άσκηση

$$f(t) = g(at+b) \qquad g(t) \xrightarrow{\text{FT}} G(\omega)$$

$$h(t) = g(at) \qquad F(\omega) = \mathscr{F}\big\{g(at)+b\big\} = \mathscr{F}\left\{h\left(t+\frac{b}{a}\right)\right\} = H(\omega)e^{j\omega\frac{b}{a}}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{|a|}G\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{|a|}e^{j\omega\frac{b}{a}}G\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

$$\cos t \xrightarrow{\text{FT}} \pi\big[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\big]$$

$$\sin\omega_0 t = \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin t \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{|\omega_0|}e^{-j\omega\frac{\pi}{2\omega_0}}\pi\left[\delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}-1\right)+\delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}+1\right)\right]$$

$$\overset{\delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}-1\right)=\delta\left(\frac{1}{\omega_0}(\omega-\omega_0)\right)}{=} e^{-j\frac{\omega}{\omega_0}}\pi\big[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\big]$$

$$= -j\pi\big[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\big]$$

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = A\int_{-\tau/2}^{\tau/den} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= A\frac{1}{-j\omega}\, e^{-j\omega t}\Big|_{\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{-j\omega}\left[e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}\right] \\
&= A\tau\frac{\sin\left(\omega\frac{t}{2}\right)}{\frac{\omega t}{2}} \\
&= A\tau\frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\frac{\omega t}{2}} = A\tau \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega t}{2\pi}\right)
\end{aligned}
$$

sinc

$$
\begin{aligned}
\text{Μαθηματικοί:} \quad \mathrm{sinc}(x) &= \frac{\sin x}{x} \\
\text{Μηχανικοί:} \quad \mathrm{sinc}(x) &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}
\end{aligned}
$$

2.2 Χρονοπερατό vs Ζωνοπερατό Σήμα

- Ένα ζωνοπερατό σήμα **δεν** μπορεί να είναι χρονοπερατό
- Ένα χρονοπερατό σήμα **δεν** μπορεί να είναι ζωνοπερατό
- Ένα σήμα μπορεί να μην είναι ούτε χρονοπερατό, ούτε ζωνοπερατό.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} F(\omega) e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} (j\omega)^n F(\omega) e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Ορίζεται η σειρά Taylor επομένως σε οποιοδήποτε σημείο, όμως τότε, επειδή σε κάποια σημεία οι παράγωγοι είναι 0, θα έπρεπε η F να είναι μηδενική, άτοπο.

2.3 Γκαουσιανός παλμός

$$
f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{t^2/(2\sigma^2)} \quad \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) = e^{\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} = e^{-\frac{1}{2\frac{1}{\sigma^2}}\omega^2}
$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
σ^2 διασπορά

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left[t^2 + 2\sigma^2 j\omega t + (j\omega\sigma^2)^2\right]} \cdot e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left(j\omega\sigma^2\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\omega^2\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} \overbrace{\left(t + j\omega\sigma^2\right)}^{t + j\omega\sigma^2 - \tau}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} \boxed{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2}{\sigma^2}\tau^2}\,\mathrm{d}\tau} = e^{-\dfrac{1}{2}\omega^2\sigma^2}
\end{aligned}
$$

Ηθικά διδάγματα:

- Ο μετασχηματισμός της Gaussian είναι Gaussian
- Ό,τι στενεύει στον χρόνο απλώνει στο φάσμα, και αντίθετα

$$\int_{-\infty}^{\infty} t d^2(t)\,\mathrm{d}t$$

διασπορά στον χρόνο $\quad d^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t)\,\mathrm{d}t$

διασπορά στο φάσμα $\quad D^2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \omega^2 \,||\,\mathrm{d}\omega$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} t x(t) \tfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left|\tfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t \overset{\text{Parseval theorem}}{=} d^2 D^2 \implies \boxed{dD \geq 1/2}$$

Γιατί 1/2; (Υπόδειξη: $\int_{-\infty}^{\infty} t x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = [\quad] - \cancel{\frac{1}{2}\int x^2\,\mathrm{d}t}^{\,1}$)