Σημειώσεις Διαφορικές Εξισώσεις

Καναβούρας Κωνσταντίνος
http://users.auth.gr/konkanant

2016, Εαρινό εξάμηνο

Μέρος I
Σεβαστειάδης

Χρήστος Σεβαστειάδης

Κεφάλαιο 1

Ορισμός: Διαφορική εξίσωση

Μια εξίσωση που αποτελείται από μια συνάρτηση και τις παραγώγους της

Langrange's $x', x'', x''', x^{(4)}, \ldots$

Newton's $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$

Newton's $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}$

π.χ.

$$x(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\sin(t)$$

Ορισμός 1.1: Τάξη

Τάξη ονομάζεται ο μεγαλύτερος *βαθμός* παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

Ορισμός 1.2: Βαθμός

Βαθμός ονομάζεται η μεγαλύτερη *δύναμη* παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

Κεφάλαιο 2 Διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

Ορισμός

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

2.1 Χωριζόμενες διαφορικές εξισώσεις

Τυπική μορφή:

$$f(t,x) = \frac{-M(t,x)}{N(t,x)} = \frac{dx}{dt} \implies \underbrace{N(t,x)}_{N(x)}dx + \underbrace{M(t,x)}_{M(t)}dt = 0$$

Αν δηλαδή τα $N(t,x)$, $M(t,x)$ εξαρτώνται μόνο από τα x και t αντίστοιχα, η εξίσωση ονομάζεται **χωριζόμενη**, και το αποτέλεσμά της μπορεί να βρεθεί με ολοκληρώματα:

$$\int N(x)\,dx + \int M(t)\,dt = c$$

Άσκηση: 2.1

$$x\,\mathrm{d}x - t^2\,\mathrm{d}t = 0$$

$$N(x) = x, \quad M(t) = -t^2$$

$$\begin{aligned}
&\int x\,\mathrm{d}x + \int (-t^2)\,\mathrm{d}t = c \implies \\
&\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}t^3 = c \implies \\
&x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}t^3 + 2c} \implies \\
&x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}t^3 + \kappa}
\end{aligned}$$

με $\kappa = 2c$

Άσκηση: 2.2

$$x' = x^2 t^3$$

$$\begin{aligned}
&\implies \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 t^3 \\
&\implies \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - t^3\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\implies \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int (-t^3)\,\mathrm{d}t = c \\
&\implies -\frac{1}{x} - \frac{t^4}{4} = c \\
&\implies -\frac{1}{x} = c + \frac{t^4}{4} \\
&\implies -\frac{4}{x} = 4c + t^4 \\
&\implies x = \frac{-4}{t^4 + \kappa}, \quad \text{με } \kappa = 2c
\end{aligned}$$

Άσκηση: 2.3

$$x' = \frac{t+1}{x^4+1}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t+1}{x^4+1} \\
&\implies (x^4+1)\,\mathrm{d}x + (-t-1)\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\implies \int (x^4+1)\,\mathrm{d}x + \int (-t-1)\,\mathrm{d}t = c \\
&\implies \frac{x^5}{5} + x - \frac{t^2}{2} - t = c
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, χωρίς αρχική συνθήκη, βρίσκουμε γενικές λύσεις ως αποτέλεσμα. Με τη χρήση μιας αρχικής συνθήκης, μπορούμε να βρούμε και την ειδική λύση της εξίσωσης.

Άσκηση: 2.4

$$e^t\,\mathrm{d}t - x\,\mathrm{d}x = 0; \quad x(0) = 1 \leftarrow \text{αρχική συνθήκη}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \int x\,\mathrm{d}x + \int (-e^t)\,\mathrm{d}t = c\\
&\implies \frac{x^2}{2} - e^t = c\\
&\implies x^2 = 2e^t + 2c\\
&\implies x^2 = 2e^t + \kappa, \quad \text{με } \kappa = 2c
\end{aligned}$$

Όμως $x(0) = 1$, άρα:

$$\begin{cases} x^2 = 2e^t + \kappa \\ x(0) = 1 \end{cases} \implies x(0)^2 = 2e^0 + \kappa \implies \boxed{\kappa = -1}$$

Επομένως τελικά:

$$x^2 = 2e^t - 1 \implies x = \pm\sqrt{2e^t - 1} \implies \boxed{x = \sqrt{2e^t - 1}}$$

Η αρχική συνθήκη πράγματι επαληθεύει το αποτέλεσμα x. Πρέπει όμως και $x \in \mathbb{R},\ 2e^t - 1 \geq 0$. Από τη διαφορική εξίσωση έχουμε $x' = \frac{e^t}{x}$, άρα πρέπει $2e^t - 1 > 0 \implies \boxed{t > \ln\frac{1}{2}}$.

$$\int_{x_0}^{x} N(x)\,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^{t} M(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

Άσκηση: 2.4

$$x\cos x\,\mathrm{d}x + (1 - 6t^5)\,\mathrm{d}t = 0; \quad t(\pi) = 0$$

$x_0 = \pi,\ t_0 = 0$

$$\begin{aligned}
&\implies \int_{\pi}^{x} x\cos x\,\mathrm{d}x + \int_0^t (1 - 6t^5)\,\mathrm{d}t = 0\\
&\implies x\sin x\Big|_{\pi}^{x} + \cos x\Big|_{\pi}^{x} + (t - t^6)\Big|_0^t = 0\\
&\implies x\sin x + \cos x + 1 + t - t^6\\
&\implies \boxed{x\sin x + \cos x + 1 = t - t^6}
\end{aligned}$$

2.2 Ομοιογενείς

$$f(t,x) = \frac{-M(t,x)}{N(t,x)}$$

Ορισμός 2.1

Αν $\forall a \in \mathbb{R} : f(at, ax) = f(t,x)$, λέμε ότι η εξίσωση είναι **ομοιογενής**.

Θεώρημα

Αν μια εξίσωση είναι ομοιογενής, μπορούμε να την λύσουμε μειώνοντάς/μετατρέποντάς την σε χωριζόμενη, εφαρμόζοντας το μαθηματικό κόλπο που ονομάζεται ¨αντικατάσταση μεταβλητής¨, δηλαδή, όπου u συνάρτηση:

$$\boxed{x = ut \implies \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u}$$

Άσκηση: 2.6

$$x' = \frac{x+t}{t}$$

$\implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x+t}{t}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t,x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad f(at,ax) = \frac{ax+at}{at} = \frac{x+t}{t} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{ut+t}{t}\\
\implies &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = u + 1\\
\implies &t\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1\\
\implies &\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}u = 0 \text{ χωριζόμενη}\\
\implies &\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int (-1)\,\mathrm{d}u = c\\
\implies &\ln|t| - u = c\\
\implies &u = \ln|t| - c \text{ με } c = -\ln|\kappa|\\
\implies &\boxed{u = \ln|\kappa t|}\\
\implies &\frac{x}{t} = \ln|\kappa t| \implies \boxed{x = t\ln|\kappa t|}
\end{aligned}$$

Άσκηση: 2.7

$$x' = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3}$$

$\implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2x^4+t^4}{tx^3}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t,x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad f(at,ax) = \frac{2(ax)^4 + (at)^4}{(at)(ax)^3} = \frac{a^4 2x^4 + a^4 t^4}{a^4 tx^3} = \frac{2x^4+t^4}{tx^3} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{2(ut)^4 + t^4}{t(ut)^3} \\
\implies &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{2u^4\cancel{t^4} + \cancel{t^4}}{u^3\cancel{t^4}} \\
\implies &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{2u^4+1}{u^3} \\
\implies &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t = \frac{2u^4+1}{u^3} - u = \frac{u^4+1}{u^3} \\
\implies &\frac{u^3}{u^4+1}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0 \text{ χωριζόμενη} \\
\implies &\int \frac{u^3}{u^4+1}\,\mathrm{d}u + \int \frac{-1}{t}\,\mathrm{d}t = c \\
\implies &\frac{1}{4}\ln(u^4+1) - \ln|t| = c \\
\implies &\boxed{u^4 + 1 = (\kappa t)^4} \text{ με } c = \ln|x| \\
&x = ut \implies u = \frac{x}{t} \implies \left(\frac{x}{t}\right)^4 + 1 = (\kappa t)^4 \\
\implies &\frac{x^4}{t^4} + 1 = \kappa^4 t^4 \\
\implies &\boxed{x^4 = c_1 t^8 - t^4} \text{ με } c_1 = \kappa^4
\end{aligned}$$

Άσκηση: 2.8

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{tx}; x(1) = -2$$

$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t^2+x^2}{tx}$, μη χωριζόμενη.

$$f(t,x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad f(at,ax) = \frac{(at)^2 + (ax)^2}{(at)(ax)} = \frac{\cancel{a^2}t^2 + \cancel{a^2}x^2}{\cancel{a^2}tx} = \frac{t^2+x^2}{tx} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω $x = ut$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u$, άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{t^2 + (ut)^2}{t(ut)} \\
\Longrightarrow\ &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{\cancel{t^2} + \cancel{t^2}u^2}{\cancel{t^2}u} \\
\Longrightarrow\ &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t + u = \frac{1+u^2}{u} \\
\Longrightarrow\ &\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}t = \frac{1+\cancel{u^2}-\cancel{u^2}}{u} = \frac{1}{u} \\
\Longrightarrow\ &u\,\mathrm{d}u - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0 \text{ χωριζόμενη} \\
\Longrightarrow\ &\int u\,\mathrm{d}u + \int \frac{-1}{t}\,\mathrm{d}t = c \\
\Longrightarrow\ &\frac{u^2}{2} - \ln|t| = c \\
\Longrightarrow\ &u^2 = 2\ln|t| + 2c \\
\Longrightarrow\ &\boxed{u^2 = \ln t^2 + \kappa} \text{ με } \kappa = 2c \\
&x = ut \implies u = \frac{x}{t} \implies \frac{x^2}{t^2} = \ln t^2 + \kappa \\
\Longrightarrow\ &\boxed{x^2 = t^2\ln t^2 + \kappa t^2}
\end{aligned}$$

Επειδή $x(1) = 2$, έχουμε:

$$(-2)^2 = 1^2\ln 1^2 + \kappa 1^2 \implies 4 = 0 + \kappa \implies \boxed{\kappa = 4}$$

Επομένως τελικά:

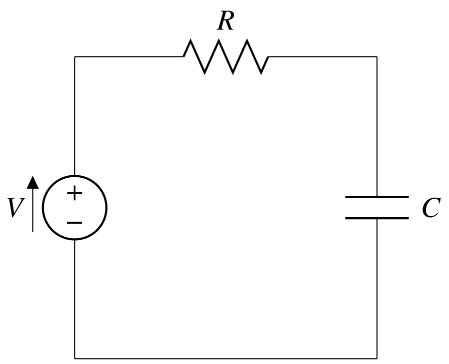
$$x^2 = t^2\ln t^2 + 4t^2 \implies \boxed{x = -\sqrt{t^2\ln t^2 + 4t^2}}$$

Μέρος II

Κεχαγιάς: Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

(Fourier, Laplace) Τετάρτη 17:00-18:30

Κεφάλαιο 3 Κεφάλαιο 7: Εισαγωγή στην ανάλυση του Φουριερ

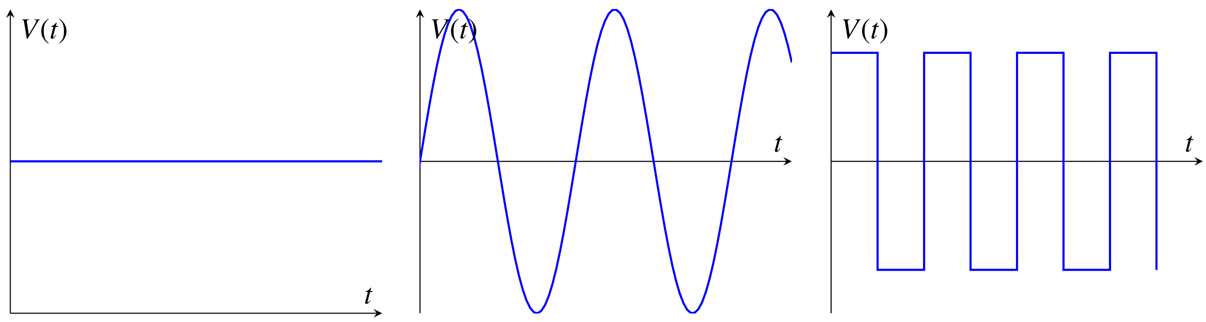


Η συμπεριφορά του κυκλώματος μπορεί να περιγραφεί με μια διαφορική εξίσωση.
$Q(t)$: Το φορτίο του πυκνωτή σε χρονική στιγμή t

$$v_1 = R \cdot i(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$
$$v_2 = \frac{Q(t)}{C}$$
$$\boxed{v_1 + v_2 = V(t) \implies \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q(t)}{RC} = \frac{1}{R}V(t), \quad \text{με αρχική συνθήκη } Q(0) = 0}$$

Θα προσπαθήσω να λύσω την εξίσωση για τρεις περιπτώσεις:

$V(t) = V_0$ $\qquad$ $V(t) = V_0 \cdot sin(nt)$ $\qquad$ $V(t)$ τετραγωνική συνάρτηση



3.0.1 $V(t) = V_0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b$$

Θα εξετάσω τη γενική λύση $x_0(t)$ της ομογενούς ΔΕ, και
θα ψάξω μία ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ.

Ομογενής: $b = 0 \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -ax \implies x(t) = ce^{-at}$.
$x(0) = 0 \implies c = 0 \implies x_0(t) = 0$.

Μη ομογενής: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b$.

$$x(t) = k \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ak = b \implies k = \frac{b}{a} \implies x(t) = k = \frac{b}{a}$$

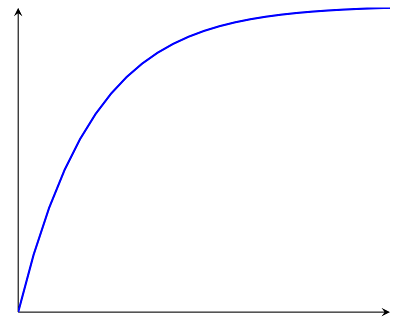
Θεώρημα

Η γενική λύση της μη ομογενούς είναι:

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t)$$

Άρα

$$\begin{cases} x(t) = ce^{-at} - \frac{b}{a} \\ x(0) = 0 \end{cases} \implies 0 = x(0) = c + \frac{b}{a} \implies x(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \text{ ή και } x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$



$$a = \frac{1}{RC}, \quad b = \frac{V_0}{R}$$

3.0.2 $V(t) = V_0 \sin(nt)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b\sin(nt)$$

Είναι $x_h(t) = ce^{-at}$.
Υποθέτω $x(t) = c_2 \sin(nt) + c_3 \cos(nt)$. Τότε $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = nc_2 \cos(nt) - nc_3 \sin(nt)$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = (ac_2 - nc_3)\sin(nt) + (ac_3 + nc_2)\cos(nt) = b\sin(nt) \implies$$

$$\implies \begin{cases} ac_2 - nc_3 &= b \\ nc_2 + ac_3 &= 0 \end{cases} \implies \cdots \implies \begin{cases} c_2 &= \frac{ab}{a^2+n^2} \\ c_3 &= -\frac{bn}{a^2+n^2} \end{cases}$$

Θυμάμαι ότι $x(t) = x_h(t) + x_i(t) = c_1 e^{-at} + \frac{ab}{a^2+n^2}\sin(nt) - \frac{bn}{a^2+n^2}\cos(nt)$ και από το $x(0) = 0$ βρίσκω $c_1 = \frac{bn}{a^2+n^2}$.
Άρα:

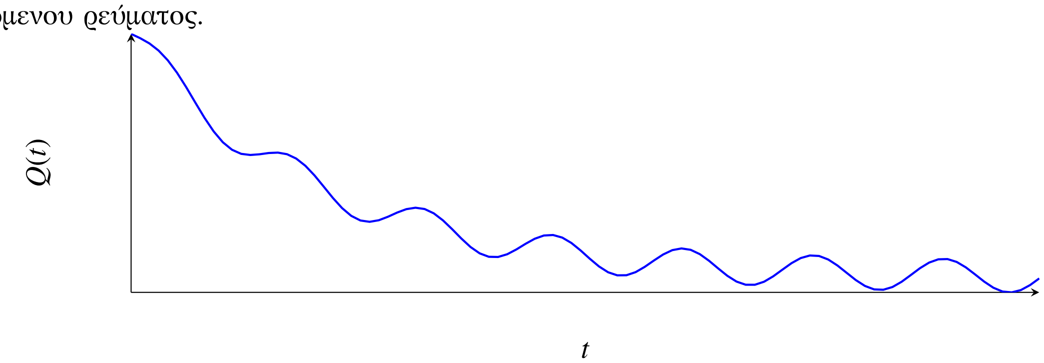
$$x(t) = \frac{bn}{a^2+n^2} + \frac{ab}{a^2+n^2}\sin(nt) - \frac{bn}{a^2+n^2}\cos(nt)$$

Για το RC κύκλωμα, $a = \frac{1}{RC} \leftarrow$ χρονική σταθερά κυκλώματος, $b = \frac{V_0}{R}$, άρα:

$$Q(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2R^2n^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{CV_0 \sin(nt) - C^2RnV_0\cos(nt)}{C^2R^2n^2+1}$$

$$
\begin{aligned}
p\cos(\omega t) + q\sin(\omega t) &= \\
\sqrt{p^2+q^2}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos\omega t + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin\omega t\right) &= \\
\sqrt{p^2+q^2}\,(\sin\phi\cos\omega + \cos\phi\sin\omega t) &= \\
\sqrt{p^2+q^2}\sin(\omega t+\phi), \quad \phi = \arctan\frac{p}{q}
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής φορτίζει περισσότερο αν είναι μικρότερη η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος.



3.0.3 $V(t) = \text{square}(t)$

$$
V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)} \frac{4}{n\pi}\sin(nt) = \frac{4}{\pi}\sin(nt) + \frac{4}{3\pi}\sin(3t) + +\frac{4}{5\pi}\sin(5t)\frac{4}{7\pi}\sin(7t) + \cdots
$$

Έτσι γίνεται η ανάλυση Fourier, και αυτό θα το δούμε την επόμενη Τετάρτη, που θα πάμε στο Κεφάλαιο 8, που λέει σειρές Fourier.

$$
V_N(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{N} \frac{4}{n\pi}\sin(nt)
$$

$$
V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\sin(nt) = \lim_{t\to\infty} V_N(t)
$$

Άρα:

$$
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{V_0\sin(nt)}{R} \implies Q_n(t) = \frac{V_0C^2Rn}{C^2R^2n^2+1}e^{\frac{t}{RC}} + \frac{CV_0\sin(nt) - C^2RnV_0\cos(nt)}{C^2R^2n^2+1}
$$

Οπότε αν:

$$
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{\pi}\frac{\sin(nt)}{R} \implies Q_1(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{C^2R}{C^2R^1+1}e^{-\frac{1}{RC}} + \cdots\right)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{3\pi}\frac{\sin(3t)}{R} \implies Q_3(t) = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{3C^2R}{9C^2R^1+1}e^{-\frac{1}{RC}} + \cdots\right)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{5\pi}\frac{\sin(5t)}{R} \implies Q_5(t) = \cdots
$$

Άρα:

$$
Q(t) = \sum_{n\in\{1,3,5,\dots\}} Q_n(t)
$$

Γιατί όμως, αν $V_1(t) \to Q_1(t)$, $V_2(t) \to Q_2(t)$, τότε $k_1V_1 + k_2V_2 = k_1Q_1 + k_2Q_2$ σε αυτό το κύκλωμα (αρχή επαλληλίας/γραμμικότητα);