http://users.auth.gr/natreas
Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5
Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6

Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marjden (πιο μαθηματικό)

Μέρος I

Ατρέας

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Έστω $\mathbb{C} = \left\{ z = \overbrace{(x, y)}^{\text{γεωμετρική παράσταση μιγαδικού}};\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $x_2 = (x_2, y_2)$, τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο $\lambda \in \mathbb{R}$ με μιγαδικό z

Αν $z = (x, y)$, τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

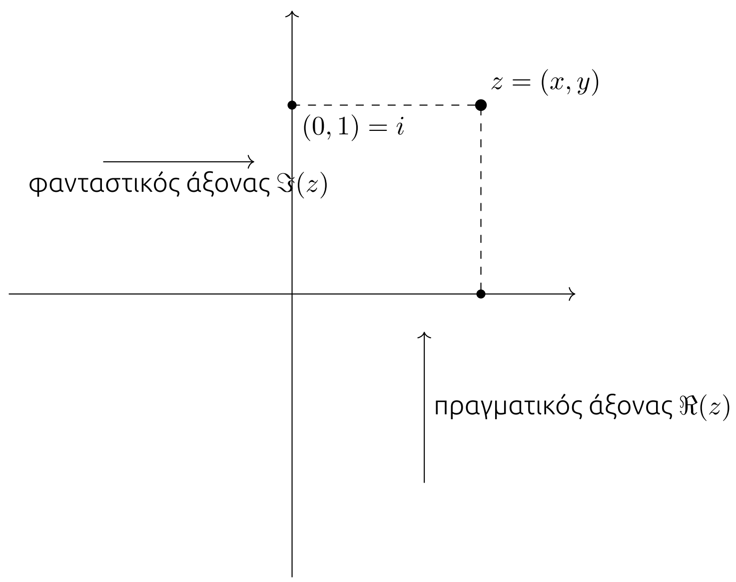
Αν $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$, τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{C}$ είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{\text{1-1}} A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$

- $(x,0),(y,0) \in A \implies (x,0)+(y,0) = (x+y,0) \in A$
- $(x,0)(y,0) = (xy,0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$\begin{aligned} 1 &= (1,0) \\ x &= (x,0) \end{aligned}$$

Ορίζω:

$$i = (0,1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$$
$$\boxed{i^2 = -1}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} z &= (x,y) = x(1,0) + y(0,1) \\ &\overset{x=(x,0)}{\underset{i=(0,1)}{=}} x\cdot 1 + yi \\ &\implies \boxed{z = x + iy} \end{aligned}$$

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z = (x,y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{πολικές}}{\underset{\text{του } (x,y)}{=}} \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \\ &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned} \tag{1}$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} z &= |z|\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= |z|\cdot e^{i\theta} \end{aligned}$$

όπου στο εξής:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$
$\boxed{\text{τύπος του Euler}}$

Τελικά:

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}}$$ (πολική μορφή μιγαδικών)

Σημείωση: $\cos\theta + i\sin\theta$

$$\overset{\text{σειρές}}{\underset{\text{McLaurin}}{=}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$\overset{i^2=-1}{=} \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right)$$

$$= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα $\mathrm{Arg} z$ (μη μηδενικού) μιγαδικού z να είναι η γωνία θ που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του $\mathbb{C}$ με την ημιευθεία OA, όπου A το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του $z = x + iy$.

Έτσι:

$z = |z|e^{i\arg z}$ πολική μορφή του z

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\arg z_1}|z_2|e^{i\arg z_2}$$

$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$$

$$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Ιδιότητα: $z\bar{z} = |z|^2$

Κεφάλαιο 2 Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

π.χ.

$$f(z) = z^2 \implies f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\Re(f)} + i\underbrace{(2xy)}_{\Im(f)}$$

$$\overset{\text{γεωμετρική}}{\underset{\text{μορφή}}{=}} (x^2 - y^2,\ 2xy)$$

Τελικά: $\boxed{f(x,y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)}$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

π.χ.

$$f(z) = \frac{1}{|z|\bar{z}} \overset{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z}$$

$$\overset{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\overset{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \overset{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιγ. μεταβλ.}} \xleftrightarrow{\text{1-1}} \begin{array}{l} \text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big) \end{array}$$

όπου u, v πραγματ. συναρτ. 2 μεταβλητών

Υπάρχουν $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής

π.χ

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{it},\ t \in (0, \pi] \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

$t \to (\cos t, \sin t)$ καμπύλη $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Η γραφ. παράσταση της $f(t) = e^{it},\ t \in (-\pi, \pi)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0,0)$ με αντιωρολογιακή φορά