

Σημειώσεις Διαφορικές Εξισώσεις

Καναβούρας Κωνσταντίνος
<http://users.auth.gr/konkanant>

2016, Εαρινό εξάμηνο

Μέρος I

Κεχαγιάς: Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

(Fourier, Laplace) Τετάρτη 17:00-18:30

Κεφάλαιο 1 Κεφάλαιο 7: Εισαγωγή στην ανάλυση του Φουριερ

Η συμπεριφορά του κυκλώματος μπορεί να περιγραφεί με μια διαφορική εξίσωση.

$Q(t)$: Το φορτίο του πυκνωτή σε χρονική στιγμή t

$$v_1 = R \cdot i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$v_2 = \frac{Q(t)}{C}$$

$$v_1 + v_2 = V(t) \implies \frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{RC} = \frac{1}{R}V(t), \quad \text{με αρχική συνθήκη } Q(0) = 0$$

Θα προσπαθήσω να λύσω την εξίσωση για τρεις περιπτώσεις:

1. $V(t) = V_0$
2. $V(t) = V_0 \cdot \sin(nt)$
3. $V(t)$ square wave

1.0.1 $V(t) = V_0$

$$\frac{dx}{dt} + ax = b$$

Θα εξετάσω τη γενική λύση $x_0(t)$ της ομογενούς ΔΕ, και θα ψάξω μία ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ.

Ομογενής: $\frac{dx}{dt} = 0 \implies \frac{dx}{dt} = -ax \implies x(t) = ce^{-at}$.
 $x(0) = 0 \implies c = 0 \implies x_0(t) = 0$.

Μη ομογενής: $\frac{dx}{dt} + ax = b$.

$$x(t) = k \implies \frac{dx}{dt} + ak = b \implies k = \frac{b}{a} \implies x(t) = k = \frac{b}{a}$$

Θ. Η γενική λύση της μη ομογενούς είναι:

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t)$$

Άρα

$$\begin{cases} x(t) = ce^{-at} - \frac{b}{a} \\ x(0) = 0 \end{cases} \implies 0 = x(0) = c + \frac{b}{a} \implies x(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \text{ ή και } x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

$$a = \frac{1}{RC}, \quad b = \frac{V_0}{R}$$

1.0.2 $V(t) = V_0 \sin(nt)$

$$\frac{dx}{dt} + ax = b \sin(nt)$$

Είναι $x_h(t) = ce^{-at}$.

Υποθέτω $x(t) = c_2 \sin(nt) + c_3 \cos(nt)$. Τότε $\frac{dx}{dt} = nc_2 \cos(nt) - nc_3 \sin(nt)$:

$$\frac{dx}{dt} + ax = (ac_2 - nc_3) \sin(nt) + (ac_3 + nc_2) \cos(nt) = b \sin(nt) \implies$$

$$\implies \begin{cases} ac_2 - nc_3 = b \\ nc_2 + ac_3 = 0 \end{cases} \implies \dots \implies \begin{cases} c_2 = \frac{ab}{a^2+n^2} \\ c_3 = -\frac{bn}{a^2+n^2} \end{cases}$$

Θυμίζω ότι $x(t) = x_h(t) + x_i(t) = c_1 e^{-at} + \frac{ab}{a^2+n^2} \sin(nt) - \frac{bn}{a^2+n^2} \cos(nt)$ και από το $x(0) = 0$ βρίσκω $c_1 = \frac{bn}{a^2+n^2}$.
Άρα:

$$x(t) = \frac{bn}{a^2+n^2} + \frac{ab}{a^2+n^2} \sin(nt) - \frac{bn}{a^2+n^2} \cos(nt)$$

Για το RC κύκλωμα, $a = \frac{1}{RC} \leftarrow$ χρονική σταθερά κυκλώματος, $b = \frac{V_0}{R}$, άρα:

$$Q(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2 R^2 n^2 + 1} e^{\frac{t}{RC}} + \frac{C V_0 \sin(nt) - C^2 R n V_0 \cos(nt)}{C^2 R^2 n^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t) &= \\ \sqrt{p^2 + q^2} \left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cos \omega t + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \sin \omega t \right) &= \\ \sqrt{p^2 + q^2} (\sin \phi \cos \omega + \cos \phi \sin \omega t) &= \\ \sqrt{p^2 + q^2} \sin(\omega t + \phi), \quad \phi = \arctan \frac{p}{q} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής φορτίζει περισσότερο αν είναι μικρότερη η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος.

1.0.3 $V(t) = \text{square}(t)$

$$V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)} \frac{4}{n\pi} \sin(nt) = \frac{4}{\pi} \sin(nt) + \frac{4}{3\pi} \sin(3t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5t) + \frac{4}{7\pi} \sin(7t) + \dots$$

Έτσι γίνεται η ανάλυση Fourier, και αυτό θα το δούμε την επόμενη Τετάρτη, που θα πάμε στο Κεφάλαιο 8, που λέει σειρές Fourier.

$$\begin{aligned} V_N(t) &= \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^N \frac{4}{n\pi} \sin(nt) \\ V(t) &= \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(nt) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_N(t) \end{aligned}$$

Άρα:

$$\frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{V_0 \sin(nt)}{R} \implies Q_n(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2 R^2 n^2 + 1} e^{\frac{t}{RC}} + \frac{C V_0 \sin(nt) - C^2 R n V_0 \cos(nt)}{C^2 R^2 n^2 + 1}$$

Οπότε αν:

$$\frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{\pi} \frac{\sin(nt)}{R} \implies Q_1(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{C^2 R}{C^2 R^1 + 1} e^{-\frac{1}{RC}} + \dots \right)$$

$$\frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{3\pi} \frac{\sin(3t)}{R} \implies Q_3(t) = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{3C^2 R}{9C^2 R^1 + 1} e^{-\frac{1}{RC}} + \dots \right)$$

$$\frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{5\pi} \frac{\sin(5t)}{R} \implies Q_5(t) = \dots$$

Άρα:

$$Q(t) = \sum_{n \in \{1, 3, 5, \dots\}} Q_n(t)$$