

<http://users.auth.gr/natreas>

Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5

Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6

Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marsden (πιο μαθηματικό)

## Μέρος I

# Ατρέας

### Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί Αριθμοί

$$\text{Έστω } \mathbb{C} = \left\{ \begin{array}{c} \text{γεωμετρική παράσταση μιγαδικού} \\ z = \overbrace{(x, y)}; x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν  $z_1 = (x_1, y_1)$  και  $z_2 = (x_2, y_2)$ , τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο  $\lambda \in \mathbb{R}$  με μιγαδικό  $z$

Αν  $z = (x, y)$ , τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

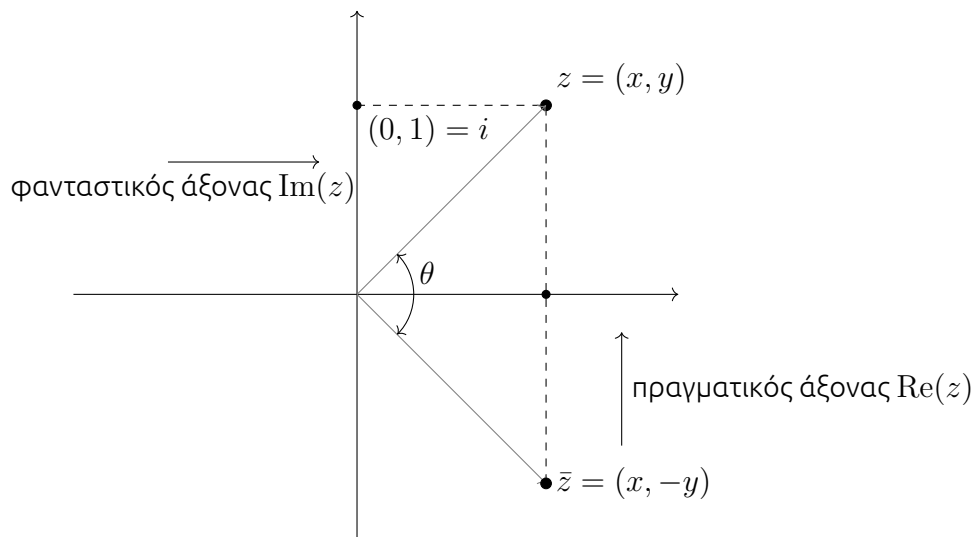
Αν  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ , τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του  $\mathbb{C}$  είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{1-1} A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

- $(x, 0), (y, 0) \in A \implies (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in A$
- $(x, 0)(y, 0) = (xy, 0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$1 = (1, 0)$$

$$x = (x, 0)$$

**Ορίζω:**

$$i = (0, 1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

**Έτσι:**

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$\stackrel{x=(x,0)}{=} x \cdot 1 + y \underset{i=(0,1)}{i}$$

$$\implies \boxed{z = x + iy}$$

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z = (x, y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω  $z = x + iy$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\substack{\text{πολικές} \\ \text{του } (x,y)}}{=} \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \\ &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} z &= |z| \underbrace{(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= |z| \cdot e^{i\theta} \end{aligned}$$

όπου στο εξής:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}$$

$\boxed{\text{τύπος του Euler}}$

Τελικά:

$$\boxed{z = |z| e^{i\theta}} \quad (\text{πολική μορφή μιγαδικών})$$

**Σημείωση:**  $\cos \theta + i \sin \theta$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\substack{\text{σειρές} \\ \text{McLaurin}}}{=} \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + i \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \\ &\stackrel{i^2 = -1}{=} \left( 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \right) + \left( i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \right) \\ &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta} \end{aligned}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα  $\text{Arg} z$  (μη μηδενικού) μιγαδικού  $z$  να είναι η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του  $\mathbb{C}$  με την ημιευθεία  $OA$ , όπου  $A$  το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του  $z = x + iy$ .

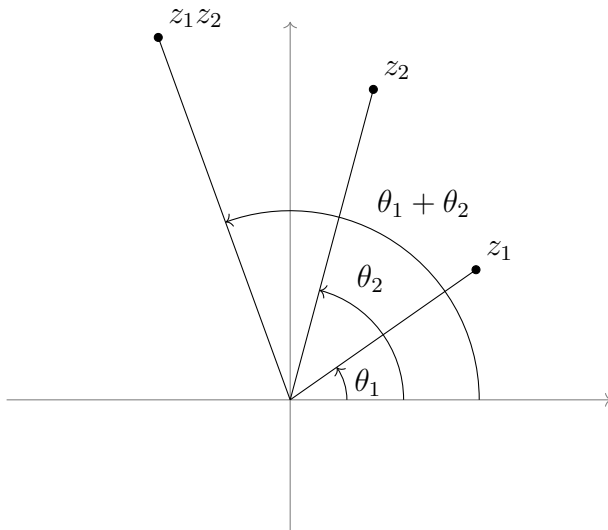
**Έτσι:**

$$z = |z| e^{i \text{Arg } z} \quad \text{πολική μορφή του } z$$

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i \text{Arg } z_1} |z_2| e^{i \text{Arg } z_2}$$

$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2)}}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} \\ &= \left| \frac{z_1}{z_2} \right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$



**Ιδιότητα:**  $z\bar{z} = |z|^2$

## Κεφάλαιο 2 Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

**π.χ.**

$$f(z) = z^2 \implies f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{Re}(f)} + i \underbrace{(2xy)}_{\text{Im}(f)}$$

$$\stackrel{\text{γεωμετρική}}{\equiv} \stackrel{\text{μορφή}}{(x^2 - y^2, 2xy)}$$

**Τελικά:**  $\boxed{f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)} \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

**π.χ.**

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{|z|\bar{z}} \stackrel{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z} \\ \stackrel{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} &= \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \stackrel{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x, y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \stackrel{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}} \end{aligned}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

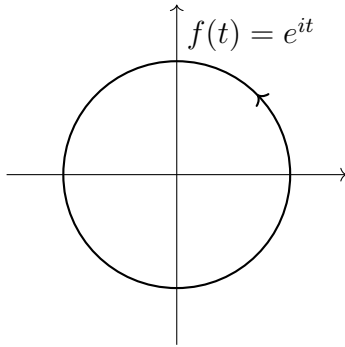
$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιν. μεταβλ.}} \xleftrightarrow{1-1} \begin{matrix} \text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \end{matrix}$$

όπου  $u, v$  πραγμ. συναρτ. 2 μεταβλητών

**Υπάρχουν**  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής  
π.χ

$$f(t) = e^{it}, t \in (0, \pi] \\ = \cos t + i \sin t$$

$$t \rightarrow (\cos t, \sin t) \quad \text{καμπύλη } x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$



Η γραφ. παράσταση της  $f(t) = e^{it}$ ,  $t \in (-\pi, \pi)$  είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου  $(0, 0)$  με αντιωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1, t) = (1, 0) + t(0, 1)$$

Το πεδίο ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδ. μεταβλητών υπολογίζεται ως συνήθως (με τις πραγματικές συναρτήσεις) ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ Διαφοροποιήσεις

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Πρέπει ο παρον. να είναι διάφορος του μηδενός: Έτσι  $z \neq 0$  Άρα Π.Ο =  $\mathbb{C} - \{(0, 0)\}$

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 2}$$

**Σημείωση** Η  $g$  είναι **ρητή** συνάρτηση (δηλ. πηλίκο δύο (μιγαδικών) πολυωνύμων).

Κάθε συνάρτηση της μορφής  $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  καλείται (μιγαδικό) πολυώνυμο.

Πρέπει παρον.  $\neq 0$  δηλ:

$$z^2 + 2 = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{ΠΡΟΣΟΧΗ!! Κάθε μιγαδικό} \\ \text{πολυώνυμο βαθμού } N \text{ έχει} \\ \text{ΑΚΡΙΒΩΣ } N \text{ ρίζες στο } \mathbb{C} \end{array} \right)$$

$$z^2 + 2 = 0 \xrightarrow{i^2 = -1} z^2 - 2i^2 = 0$$

$$\implies (z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i) = 0$$

$$\implies \boxed{z = \pm \sqrt{2}i}$$

**Τελικά** Π.Ο =  $\mathbb{C} - \{\pm \sqrt{2}i\}$

$$h(z) = \operatorname{Arg} z, \text{ Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}$$

Για  $z = 0$  ΔΕΝ ορίζεται όρισμα, επειδή  $0 = |0| \cdot e^{i\theta} \forall \theta$

**Σημείωση**  $az^2 + bz + c = 0$

$a, b, c \in \mathbb{C}$

Λύνεται με διακρίνουσα κατά τα γνωστά.

Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα Horner για πολυώνυμα (με πραγματικούς συντελεστές) βαθμού  $N \geq 3$ .

$$\begin{aligned} a(z) &= e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= (e^x \cos y, e^x \sin y), \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ως διανυσματικό πεδίο προφανώς  $\text{Π.Ο} = \mathbb{R}^2$

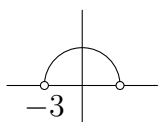
Έτσι  $\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$ .

$l(z) = \operatorname{Log}$  (αντίστροφη της  $e^z$ )

$$\underbrace{\operatorname{Log}}_{\text{ορισμός}} := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

μιγαδικός λογάριθμος

$$\text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(3) &= \ln |-3| = i \operatorname{Arg}(-3) \\ &= \ln 3 + i\pi \end{aligned}$$

$$\lambda(z) = \sin z \stackrel{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\left( \begin{array}{lcl} e^{i\theta} & = & \cos \theta + i \sin \theta \quad \theta \in (-\pi, \pi] \\ e^{-i\theta} & = & \cos \theta - i \sin \theta \\ \hline \sin \theta & = & \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right)$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$

$$m(z) = \cos z \stackrel{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$

Όλες οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες ισχύουν στο  $\mathbb{C}$  όπως στο  $\mathbb{R}$ .

$$h(z) = \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{2k\pi + \text{Arg } z}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

(Η  $\sqrt[n]{a}$  ορίζεται ως το **σύνολο** όλων των λύσεων της εξίσωσης  $z^n = a$ ,  $a \in \mathbb{C}$ )

$$\Pi.O = \mathbb{C} - \{0\}$$

## 2.1 Όριο/Συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής

### Ορισμός

Έστω  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  μιγ. συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$  είναι σ.συσσ. του  $A$  και έστω  $a = a_0 + ib_0$ . Τότε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a_0 \\ \textbf{ΚΑΙ} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b_0 \end{array} \right.$$

**Επίσης**, αν  $z_0 \in A$ , τότε

$f$  συνεχής στο σημείο  $z_0$

$$\Updownarrow$$

οι συναρτήσεις  $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ΣΥΝΕΧΕΙΣ στο σημείο  $(x_0, y_0)$  (ως πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

**Έτσι:**

$$\left. \begin{array}{l} \text{οι πολυωνυμικές} \\ \text{η εκθετική} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\sin z, \cos z) \\ \text{οι υπερβολικές } (\text{ch}, \text{sh}) \end{array} \right\} \text{συνεχείς στο } \mathbb{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{οι ρητές} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\tan z, \cot z) \end{array} \right\} \text{συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους}$$

Ορίζω το  $\infty$  του μιγαδικού επιπέδου να είναι το σύνολο σημείων που απέχουν "άπειρη" απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται ως:

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{ όπου:}$$

$$\infty + z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\infty \cdot z = \infty \quad \forall z \neq 0$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \neq \infty$$

Όλες οι πράξεις του ορίου που ξέρετε ισχύουν και στους μιγαδικούς (αρκεί να μην εμφανίζονται οι γνωστές απροσδιόριστες μορφές):

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Ο κανόνας De l' Hospital ισχύει στους μιγαδικούς.

**Σημείωση:**

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \in \mathbb{C} \iff \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = a \in \mathbb{C}$$

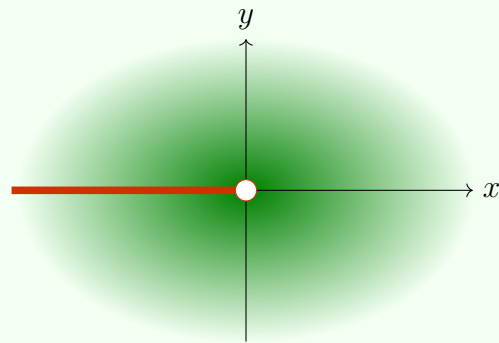
$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$$

Θ.

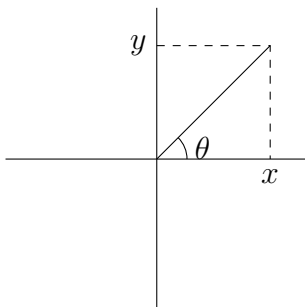
Έστω  $\text{Arg } z : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$   
Τότε η  $\text{Arg } z$  **είναι συνεχής** στο σύνολο:

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ ΚΑΙ } y = 0\}$$

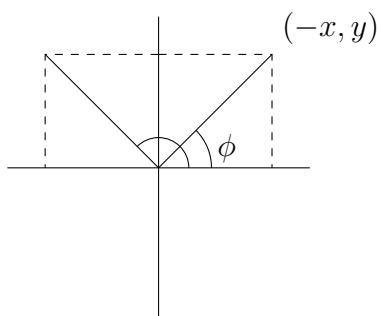


Έστω  $z = x + iy$

(α)  $x > 0, y > 0$

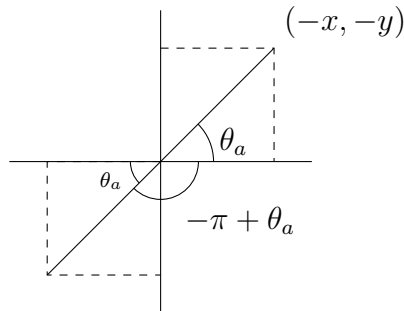


(β)  $x < 0, y > 0$

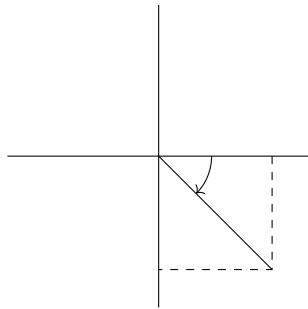




(γ)  $x < 0, y < 0$



(δ)  $x > 0, y < 0$



$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x, y > 0 \\ \pi - \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x < 0, y > 0 \\ -\pi + \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x < 0, y < 0 \\ -\arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

Για  $x = 0$ , τότε  $\operatorname{Arg} := \frac{\pi}{2}$  ή  $-\frac{\pi}{2}$   
 Για  $y = 0$ , τότε  $\operatorname{Arg} := 0$  ή  $\pi$

Έστω  $z_0 = x_0 < 0$

• Έστω  $z = x_0 + it$  ( $t > 0$ )

Για  $t \rightarrow 0^+$ ,  $z \rightarrow z_0 = x_0$ , αλλά:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Arg} z \stackrel{z=x_0+it}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \operatorname{Arg} (x_0 + it) \stackrel{\text{2ο τετ.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \pi - \arctan \left| \frac{t}{x_0} \right| \right) = \pi - \arctan 0 = \pi$$

• Για  $z = x_0 + it$  ( $t < 0$ ), τότε:

$t \rightarrow 0^-$ ,  $z \rightarrow z_0$ , και

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Arg} z = \lim_{t \rightarrow 0^-} \operatorname{Arg} (x_0 + it) \stackrel{\text{3ο τετ.}}{=} -\pi + \arctan 0 = -\pi$$

Άρα το όριο στο  $z_0 = x_0$  ΔΕΝ υπάρχει, και έτσι η  $\operatorname{Arg} z$  ασυνεχής στα  $z = x_0$  με  $x_0 \leq 0$ .

Αν  $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$  πού είναι ασυνεχής;

## 2.2 Μιγαδική παράγωγος

Την εβδομάδα της 28<sup>ης</sup> θα γίνουν κανονικά τα μαθήματα του Ατρέα.

### Ορισμός

Έστω  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  ανοικτό,  $z_0 \in A$ . Λέμε ότι η  $f$  είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο σημείο  $z_0$ , αν υπάρχει το ΟΡΙΟ:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a \in \mathbb{C}$$

(ή ισοδύναμα  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = a \in \mathbb{C}$ )

Στο εξής το όριο αυτό συμβολίζουμε με  $f'(z_0)$  ή  $\frac{df(z_0)}{dz}$

### Ορισμός

Αν  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  ανοικτό,  $z_0 \in A$ , θα λέμε στο εξής ότι η  $f$  είναι ΟΛΟΜΟΡΦΗ (ή ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - holomorphic/analytic) **στο σημείο  $z_0$** , εάν η  $f$  είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **ΣΕ ΚΑΘΕ**

**ΣΗΜΕΙΟ** του ανοικτού δίσκου



$$D_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

για κάποιο  $\epsilon > 0$

Αν  $f$  ολόμορφη σε ΚΑΘΕ σημείο του  $A$  λέμε ότι η  $f$  ολόμορφη στο  $A$ .

### Ορισμός

Αν  $A$  μη ανοικτό, λέμε ότι η  $f$  ολόμορφη στο  $A$ , αν υπάρχει  $B \supset A$ ,  $B$  ανοικτό ώστε η  $f$  στο  $B$ .

Όλες οι γνωστές ιδιότητες της παραγώγου που γνωρίζετε ισχύουν και για τη μιγαδική παράγωγο

**π.χ.** Έστω  $f, g$  **μιγαδικά** παραγωγίσιμες σε σημείο  $z_0$ . Τότε:

- $f$  παραγ. στο  $z_0 \implies f$  συνεχής στο  $z_0$
- $(af \pm bg)'(z_0) = af'(z_0) \pm bg'(z_0) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \quad (g(z_0) \neq 0)$
- Ο κανόνας αλυσίδας ισχύει στις μιγαδικές συναρτήσεις:

$$(h \circ g)'(z_0) = h'(g(z_0)) g'(z_0)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σύνθεση καλά ορισμένη

**Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης** Έστω  $f$  ολόμορφη σε σημείο  $z_0$  με  $f'(z_0) \neq 0$ .

Αν  $w_0 = f(z_0)$ , τότε υπάρχουν  $\epsilon, \epsilon' > 0$  ώστε η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1} : D_\epsilon(w_0) \rightarrow D_{\epsilon'}(z_0)$  καλά ορισμένη, ολόμορφη στο  $w_0$  και

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

## Θ.: Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ .

Θεωρώ  $z = x + iy$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$  και  $A$  ανοικτό.

Τότε:

$f$  μιγαδικά παραγωγίσιμη στο  $z_0$



(α) Η  $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  είναι **διαφορίσιμο** διανυσμ. πεδίο στο σημείο  $(x_0, y_0)$

ΚΑΙ

(β)

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{εξισώσεις C-R}}$$

**Πόρισμα (ΠΡΑΚΤΙΚΟΤΑΤΟ)** Αν  $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$  είναι έτσι ώστε:

(α)  $u, v$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο  $(x_0, y_0)$  και "κοντά" στο  $(x_0, y_0)$

$$(β) \begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{C-R}}$$

Τότε ( $\implies$ ) η  $f$  είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο  $z_0 = x_0 + iy_0$

**Παρ.**

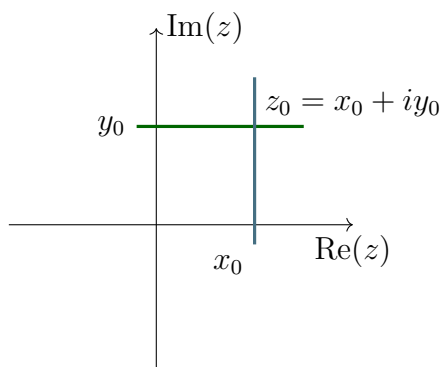
$$\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy), \text{ άρα} \end{aligned}$$

$$f = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right.$$

## Παρατηρήσεις

(α) Έστω  $f$  μιγαδικά παραγ. συνάρτηση σε σημείο  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Τότε εξ' ορισμού υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$



- Έστω  $z = x + iy_0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) είναι τυχαίο σημείο της "οριζόντιας" ευθείας που διέρχεται από το  $z_0$
- Για  $x \rightarrow x_0$ , τότε  $z = x + iy_0 \rightarrow x_0 + iy_0 = z_0$  (δηλ.  $z \rightarrow z_0$  όταν  $x \rightarrow x_0$  πάνω στην οριζόντια ευθεία)

Τότε για  $z = x + iy_0$  έχω:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ &\implies \boxed{f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)} := \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, αν εργαστούμε κατά μήκος της "κάθετης" ευθείας που διέρχεται από το  $z_0$ , έχουμε:

$$\boxed{f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)} := -i \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

(β) Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{df(z_0)}{dz} \\ \implies \boxed{df(z_0) = f'(z_0) dz} \end{aligned}$$

$dz :=$  στοιχειώδης όγκος  
στο επίπεδο  $xy$

$df(z_0) :=$  στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο  $uv$   
στο οποίο μετασχηματίζεται το  $dz$   
μέσω της απεικόνισης  $f$

$$df(z_0) = |f'(z_0)| e^{i \operatorname{Arg} f'(z_0)} dz \quad (f'(z_0) \neq 0)$$

Για τις παραγώγους στοιχειωδών συναρτήσεων ισχύουν τα συνήθη από την πραγματική ανάλυση.

**π.χ** Αν  $f(z) = e^z$ , τότε  $(e^z)' = e^z \forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) = e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{(e^x \sin y)}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

$$\text{Ορίζω} \begin{cases} u(x, y) = \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y \\ v(x, y) = \operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y \end{cases}$$

- $u, v$  καλά ορισμένες  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , και επιπλέον  $u, v$  είναι **ΣΥΝΕΧΕΙΣ**  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\bullet \begin{cases} u_x = e^x \cos y & u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y & v_y = e^x \cos y \end{cases}, \text{ έτσι παρατηρώ ότι } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$\xrightarrow{\text{πόρισμα}} f(z) = e^z$  μιγαδικά παραγωγίσιμη  $\forall z \in \mathbb{C}$

• Γνωρίζω ότι αν η  $f = u + iv$  είναι μιγ. παραγ., τότε  $f'(z) = u_x + iv_x$ .

Έτσι στην προκειμένη περίπτωση:

$$f'(z) = (e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^z$$

**n.x**  $\text{Log} z = \frac{1}{z} \forall z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 0\}$  (υπό την προϋπόθεση ότι  $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$ )

διότι  $\text{Log} z = w \xrightarrow{\text{ορ.}} z = e^w$ , άρα  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ , από το θεώρ. παραγωγίσιμης αντίστροφης συνάρτησης έχουμε:  $(\text{Log} z)' = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$

Με την ίδια λογική (και με χρήση των ιδιοτήτων παραγώγου) αποδεικνύεται ότι

- $(z^n)' = nz^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(z^{-n})' = -nz^{-n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$
- $(z^a)' = az^{a-1} \quad \forall a \in \mathbb{Q} \text{ ή } a \text{ άρρητος ή } a \text{ έχει μη μηδενικό φανταστικό μέρος} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* (\mathbb{C}^* \text{ όπως στο λογάρισμα})$
- $(\sin z)' = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cos z)' = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\sinh z)' = \cosh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cosh z)' = \sinh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(a^z)' = a^z \text{Log} a \quad \forall z \in \mathbb{C}$

κλπ.

## 2.3 Ασκήσεις

ΝΑΟ η  $f(z) = \bar{z}$  ΔΕΝ είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **σε κανένα** σημείο του  $\mathbb{C}$ .

- $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ , ορίζω  $\begin{cases} u(x, y) = x \\ v(x, y) = -y \end{cases}$
- Προφανώς  $u$  και  $v$  καλά ορισμένες και συνεχείς  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , αλλά:

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , άρα αφού η μία από τις δύο εξισ. C-R δεν ισχύει  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , η  $f(z) = \bar{z}$  **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγ.  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$\begin{cases} u = e^x \cos y_0 \\ v = e^x \sin y_0 \end{cases}$$

**Άσκ. 2** Η συνάρτηση  $f(z) = |z|$  **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε **ΚΑΝΕΝΑ** σημείο του  $\mathbb{C}$ .

Οι εξισώσεις C-R σε πολικές συντ/νες είναι οι εξής:

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\theta & \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi] \\ u_\theta = -\rho v_\rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) \\ &= f(|z|e^{i\text{Arg } z}) = f(\rho e^{i\theta}) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta) \end{aligned}$$

$$f(z) = |z| = \rho, \text{ άρα } \begin{cases} u(\rho, \theta) = \rho \\ v(\rho, \theta) = 0 \end{cases}$$

Οι  $u, v$  καλά ορισμένες και συνεχείς  $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$  αλλά

$$u_\rho = 1 \neq \frac{1}{\rho} \cdot 0 = \frac{1}{\rho} v_\theta \quad \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$$

και αφού μία από τις εξισώσεις C-R δεν ισχύει  $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$  αναγκαστικά η  $f(z) = |z|$  δεν είναι μιγαδικά παραγ. σε κανένα σημείο του  $\mathbb{C}$ .

**π.χ**

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad z \neq 0 \\ |z|^2 &= z\bar{z} \quad \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη.

**Άσκ. 3** Υπολογίστε τα όρια:

$$(a) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2}$$

$$(b) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1}$$

$$(c) \lim_{z \rightarrow \infty} e^z$$

Στα όρια ισχύει ο De L' Hospital

(a)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2} \underset{\substack{\text{L'Hospital} \\ \text{διότι } e^{z^2} - 1 \text{ και } z^2 \text{ μιν. παραγ.}}}{\left( \frac{0}{0} \right)} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2ze^{z^2} - 0}{2z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{z^2} = e^0 = 1$$

(β) Θα προσπαθήσω να αποδείξω ότι το όριο δεν υπάρχει, κάτι που φαντάζομαι επειδή μέσα στο όριο υπάρχει ο  $\bar{z}$ .

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του οριζώντιου άξονα" που διέρχεται από το  $z_0 = 1$ .  
**Δηλ.** θεωρώ σημεία  $z$  της μορφής

$$z = x + i0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Προφανώς για  $x \rightarrow 1$ , έχω:  $z \rightarrow z_0 = 1$ .

Τότε  $\forall z = x$  έχω:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1} \underset{\substack{\text{κατα μήκος} \\ \text{του οριζ. άξονα}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 1$$

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του κάθετου άξονα" που διέρχεται από το  $z_0 = 1$ , δηλαδή σημεία:

$$z = 1 + ix \quad (x \in \mathbb{R})$$

Προφανώς για  $x \rightarrow 0$ , έχω  $z \rightarrow z_0 = 1$ , και

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1} &\underset{\substack{\text{κατα μήκος} \\ \text{του κατακόρυφου άξονα}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + ix)^2 - 1}{(1 - ix)^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2ix - x^2 - 1}{1 - 2ix - x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ix - x^2}{-2ix - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2i - x}{-2i - x} = \frac{2i}{-2i} = -1 \end{aligned}$$

Εφόσον  $1 \neq -1$  το όριο ΔΕΝ υπάρχει.

(γ)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = ?$

- Έστω  $z = x$  ( $x < 0$ ), για  $x \rightarrow -\infty$ , τότε  $z \rightarrow \infty$  και  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- Έστω  $z = x$  ( $x > 0$ ), για  $x \rightarrow +\infty$ , τότε  $z \rightarrow \infty$ , αλλά:  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , συνεπώς το  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$  ΔΕΝ υπάρχει.

**Άσκ. 4** Αν  $f(z) = u + iv$  είναι ακεραία (ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$ ) και αν

$$au + bv = c$$

όπου  $a, b, c \in \mathbb{R}$  σταθερές όχι όλες ίσες με μηδέν, ΝΔΟ  $f(z) = A$ ,  $A \in \mathbb{C}$  σταθερά.

- Έστω  $\underline{c} = 0$ , εξ' υποθέσεως  $a^2 + b^2 \neq 0$
- Έστω  $c \neq 0$ , πάλι πρέπει  $a^2 + b^2 \neq 0$  (διότι αλλιώς  $0 = c$ , άτοπο)
- Τελικά  $a^2 + b^2 \neq 0$  σε κάθε περίπτωση.

$$\begin{aligned} \begin{cases} au_x + bv_x = 0 \\ au_y + bv_y = 0 \end{cases} &\implies \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[u_y = -v_x \text{ αφού } f \text{ ακεραία}]{u_x = v_y} \begin{bmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2$$

και επειδή  $a^2 + b^2 \neq 0$ , πρέπει  $u_x^2 + u_y^2 = 0$  για να έχει λύση το σύστημα  $\implies u_x = 0$  και  $u_y = 0 \xrightarrow{\mathbb{C}-R} u_x = u_y = v_x = v_y = 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \implies f(z) = A \in \mathbb{C}$  σταθερά.

**Άσκ.** Βρείτε τα σημεία ολομορφίας των συναρτήσεων:

(α)  $f(z) = \text{Log}(z - i)$

(β)  $g(z) = \tan z$

(α) Έστω ότι  $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$ . Τότε είναι γνωστό ότι η  $\text{Log } z$  είναι μιγαδικά παραγ. στο  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 0\}$ .

Έτσι η  $\text{Log}(z - i)$  είναι μιγ. παραγ. στο σύνολο

$$\begin{aligned} & \mathbb{C} - \{x + iy : \text{Re}(z - i) \leq 0 \text{ και } \text{Im}(z - i) = 1\} \\ & \stackrel{z=x+iy}{=} \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y - 1 = 0\} \\ & = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 1\} \end{aligned}$$

(β)  $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ , η  $g$  είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  εκτός των σημείων που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

$$\begin{aligned} \bullet \cos z = 0 & \iff \cos(x + iy) = 0 \iff \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = 0 \xrightarrow{\text{ορ. sin \& cos}} \\ & \cos x \cdot \frac{e^{-y} + e^y}{2} - \sin x \cdot \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = 0 \iff \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y = 0 \iff \\ & \left| \begin{array}{l} \cos x \cdot \cosh y = 0 \\ \text{και} \\ \sin x \cdot \sinh y = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sin x = 0 \end{array} \right. \text{ ή } \left| \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sinh y = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{array} \right., k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Τελικά**  $\cos z \iff \boxed{z = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$  και έτσι  $g$  είναι ολόμορφη στο

$$\mathbb{C} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Άσκ.** Έστω  $f(x + iy) = (x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$

(i) Να γραφεί η  $f$  συναρτήσει του  $z = x + iy$

(ii) Να βρείτε όλα τα σημεία, όπου η  $f$  είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη

(iii) Να βρείτε όλα τα σημεία στα οποία η  $f$  είναι ολόμορφη

(i)  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$   
 $(z = x + iy)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left(\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2\right) \\ &= \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - i(z - \bar{z}) + i\left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4}\right) \\ &= \frac{z^2 + 2|z|^2 + \bar{z}^2}{4} - i(z - \bar{z} - |z|^2) \end{aligned}$$

(ii) Προφανώς  $\left| \begin{array}{l} \text{Re}(f) := u(x, y) = x^2 + 2y \\ \text{Im}(f) := v(x, y) = x^2 + y^2 \end{array} \right.$



- Οι  $u$  και  $v$  είναι συνεχείς (ως πολυωνυμικές)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\bullet \begin{cases} u_x = v_y \\ \text{ΚΑΙ} \\ u_y = -v_x \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = 2y \\ \text{ΚΑΙ} \\ 2 = -2x \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ \text{ΚΑΙ} \\ x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ \text{ΚΑΙ} \\ y = -1 \end{cases}$$

Άρα η  $f$  είναι μιγαδ. παραγ. **μόνον** στο  $\boxed{z = -1 - i}$ , και μάλιστα εφ' όσον  $f(z) = f'(x + iy) = u_x + iv_x$ :

$$f'(-1 - i) = 2(-1) + i2(-1) = \underline{-2 - i2}$$

(iii) ΔΕΝ υπάρχουν σημεία όπου η  $f$  είναι ολόμορφη.

## Κεφάλαιο 3 Μιγαδική ολοκλήρωση

### Εισαγωγή

#### Ορισμός

Καλούμε **καμπύλη** στο μιγαδικό επίπεδο κάθε συνεχή συνάρτηση

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

όπου  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.

**Έτσι:**  $\gamma(t)$  καλείται

**ΑΠΛΗ** αν είναι 1-1 (δεν αυτοτέμνεται)

**ΚΛΕΙΣΤΗ** αν έχει ίδια αρχή και πέρας

**ΛΕΙΑ** αν είναι παραγωγίσιμη στο  $[a, b]$  με συνεχή παράγωγο

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

και μη μηδενική παράγωγο  $\forall t$

- Κάθε τέτοια καμπύλη έχει ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ (φορά διαγραφής) προς την κατεύθυνση αύξησης του  $t$

**π.χ.**  $\gamma(t) = e^{it}, t \in (-\pi, \pi]$

$$\gamma(t) = e^{-it}, t \in (-\pi, \pi]$$

- Αν  $\gamma$  κλειστή λέω ότι είναι θετικά προσανατολισμένη αν η φορά διαγραφής είναι η αντιωρολογιακή
- $-\gamma$ : ίδιο ίχνος με τη  $\gamma$ , αλλά αντίθετη φορά διαγραφής
- $\gamma_1 + \gamma_2$ :

### Ορισμός

Έστω  $f = f(z)$  ΣΥΝΕΧΗΣ μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής και  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  λεία καμπύλη. Καλώ επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $f$  ΠΑΝΩ στη  $\gamma$  να είναι ο ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\gamma'(t) dt}_{d\gamma(t)}$$

### ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$$\begin{aligned} d\gamma(t) &= d(x(t) + iy(t)) = \\ &= dx(t) + i dy(t) = (x'(t) + iy'(t)) dt \end{aligned}$$

$$d\gamma(t) = \gamma'(t) dt$$

Οι κλασικές ιδιότητες των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων έργου ισχύουν στους μιγαδικούς. Ενδεικτικά:

- $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$
- $\int_{\gamma} (af + by)(z) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$
- $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz \leq M \cdot (\text{μήκος της } \gamma) \text{ όπου } M \text{ μέγιστο της } |f| \text{ επί της } \gamma$
- $\int_{\gamma} |dz| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt := \text{μήκος της καμπ. } \gamma$

**Πρόταση:** Έστω  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  συνεχής επί καμπύλης λείας  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ .

**Τότε:**

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \underbrace{\left( \int_{\gamma} u dx - v dy \right)}_{\text{επικαμπύλιο ολοκλ. διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2} + i \underbrace{\left( \int_{\gamma} u dy + v dx \right)}_{\text{επικαμπύλιο ολοκλ. διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2}$$

**Απόδ.**

$$\begin{aligned}
 & \int_{\gamma} (u + iv) d(x + iy) \\
 &= \int_a^b \left[ u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \right] (x'(t) + iy'(t)) dt \\
 &= \int_a^b \left( u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \right) dt + i \int_a^b \left( u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t) \right) dt \\
 &\stackrel{\text{op.}}{=} \left( \int_{\gamma} u dx - v dy \right) + i \left( \int_{\gamma} u dy + v dx \right)
 \end{aligned}$$

Ορίζω  $\bar{f}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$

**Τότε**

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} u dx - v dy &\stackrel{\text{λογ. II}}{:=} \text{έργο του πεδίου } \bar{f} \text{ επί της καμπύλης } \gamma \\
 \int_{\gamma} u dy + v dx &\stackrel{\text{λογ. II}}{:=} \underline{\text{ροή}} \text{ του } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma
 \end{aligned}$$

### 3.1 Αντιπαράγωγος και ανεξαρτησία δρόμου

#### Ορισμός

Έστω  $f = f(z)$  είναι μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση (μιγαδικής μεταβλητής) σε τόπο GCC (τόπος := ανοικτό και συνεκτικό σύνολο). Αν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση  $F = F(z)$ , έτσι ώστε:

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G, \text{ τότε η } F \text{ καλείται αντιπαράγωγος της } f.$$

**Θ.**

Έστω  $f = f(z)$  είναι συνεχής μιγαδική συνάρτηση σε τόπο  $G$ . Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- Η  $f$  είναι ΜΟΝΑΔΙΚΗ αντιπαράγωγο  $F$  (με προσέγγιση σταθεράς)

- $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ , για ΚΑΘΕ κλειστή λεία καμπύλη εντός του  $G$

- $\oint_{\gamma} f(z) dz$  είναι ανεξάρτητο του δρόμου (δηλαδή εξαρτάται μόνον από το αρχικό και τελικό σημείο του δρόμου)

Οι συνήθεις αντιπαράγωγοι εξακολουθούν να ισχύουν, π.χ.:

$$\begin{aligned}\int z^n dz &= \frac{z^{n+1}}{n+1} + c, \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \\ \int \frac{1}{z} dz &= \text{Log} z + c, \forall z \in \mathbb{C}^* \\ \int z^{-n} dz &= \frac{z^{-n+1}}{-n+1} + c, \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}, c \in \mathbb{C} \text{ στάθερα} \\ \int \sin z dz &= -\cos z + c \\ \int \cos z dz &= \sin z + c \\ &\text{κλπ.}\end{aligned}$$

### 3.2 Θεώρημα Cauchy

Έστω  $f = f(z)$  είναι **ολόμορφη** συνάρτηση **πάνω** και στο **εσωτερικό απλής**, κλειστής και λείας καμπύλης  $\gamma$ .

Τότε:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Απόδ.** Έστω  $f = u + iv$ , όπου  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πάνω και στο εσωτερικό της  $\gamma$ . Τότε:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} f(z) dz &= \left( \oint_{\gamma} u dx - v dy \right) + i \left( \oint_{\gamma} u dy + v dx \right) \\ &\stackrel{\text{Θεώρ. Green}}{=} \iint_R (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_R (u_x - v_y) dx dy\end{aligned}$$

και επειδή η  $f$  ολόμορφη ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann  $\forall (x, y)$  στο εσωτερικό της  $\gamma$ , δηλαδή το  $R$ , άρα:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz \stackrel{u_x=v_y}{\stackrel{u_y=v_x}}{=} \iint_R 0 dx dy + i \iint_R 0 dx dy = 0$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \underbrace{a}_{\text{έργο του πεδίου } f \text{ κατά μήκος } \gamma} + i \underbrace{b}_{\text{ροή του πεδίου } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma}$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Αν υπάρχει έστω και ένα σημείο όπου η  $f$  δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο εσωτερικό της  $\gamma$ , τότε το **θεώρ. Cauchy δεν ισχύει εν γένει**.

π.χ  $\oint_{|z|=1 \text{ με θετική φορά}} \frac{dz}{z}$

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \stackrel{\gamma(t)=e^{it}}{=} \int_{t \in [0, 2\pi)} \frac{dz}{z} \stackrel{\text{ορ.}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{it})}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})^2}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i$$

### Θ.: Παραμόρφωση δρόμων

Έστω  $f = f(z)$  είναι ολόμορφη σε τόπο  $G$  με σύνολο  $\partial G = \gamma_1 \cup \gamma_2$  όπου  $\gamma_1, \gamma_2$  απλές λειστές καμπύλες, λείες, με κοινό προσανατολισμό π.χ. όπως στο σχήμα. Τότε  $\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz$

**Απόδ.** Φέρνω δύο ευθ. τμήματα  $L_1$  και  $L_2$  που διαμερίζουν το  $G$  σε δύο χωρία έστω  $G_1, G_2$ . Τότε το  $\theta$ . Cauchy ισχύει και στο  $G_1$  και στο  $G_2$ .

$$\begin{aligned} & \bullet \int_{\gamma_1^+ + L_1 + \gamma_2^+ + L_2} f(z) dz = 0 \quad (\theta. \text{ Cauchy για το χωρίο } G_1) \\ & \bullet \int_{\gamma_2^- - L_1 - \gamma_2^- - L_2} f(z) dz = 0 \quad (\theta. \text{ Cauchy για το χωρίο } G_2) \\ & \Rightarrow \left| \begin{aligned} & \left( \int_{\gamma_1^+} + \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^+} + \int_{L_2} \right) f(z) dz = 0 \\ & \left( \int_{\gamma_1^-} - \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^-} - \int_{L_2} \right) f(z) dz = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \oint_{\gamma_1} f(z) dz - \oint_{\gamma_2} f(z) dz = 0 \end{aligned}$$

**Πόρισμα (Γενικευμένο θεώρ. Cauchy)** Έστω  $f = f(z)$  ολόμορφη σε τόπο  $G$  με σύνολο  $\partial G = \Gamma \cup (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n)$ , όπου:

- $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  απλές, κλειστές, λείες και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΕΣ καμπύλες
- Οι  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  βρίσκονται εντός της  $\Gamma$  και
- Κάθε καμπύλη  $\gamma_j \quad j = 1, \dots, n$  βρίσκεται εκτός των υπόλοιπων  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n$

$$\text{Τότε: } \oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \oint_{\gamma_j} f(z) dz$$

### Θ.: Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy

Έστω  $f = f(z)$  είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμημ. λείας και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ καμπύλης  $\gamma$ . Τότε ΓΙΑ ΚΑΘΕ σημείο  $z_0$  ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της  $\gamma$  ισχύει:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

**Απόδειξη** Έστω  $|z - z_0| = r$  κύκλος ακτίνας  $r$  κατάλληλης ώστε ο δίσκος  $|z - z_0| \leq r$  να βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό της  $\gamma$ .

Τότε από το θεώρημα παραμόρφ. δρόμων, εφ' όσον  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  ολόμορφη στο γραμμοσκιασμένο χωρίο, έχουμε:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \underbrace{\oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz}_{I_2} + \underbrace{\oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz}_{I_1}$$

Για το  $I_2$  έχω:

$$I_2 = \oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \stackrel{z = z_0 + re^{i\theta}}{\substack{\theta \in [0, 2\pi]}} f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta \\ = 2\pi i f(z_0)$$

$$\left( \begin{array}{lll} l = l' & \iff & |l - l'| < \epsilon \forall \epsilon > 0 \\ & \implies & \text{προφ. ισχύει} \\ & \impliedby & \text{'Εστω } l \neq l' \implies |l - l'| \geq \epsilon_0 > 0 \text{ άτοπο} \implies l = l' \end{array} \right)$$

**Έτσι:**

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = I_1$$

$$|I_1| \leq \oint_{|z - z_0| = r} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} dz \leq M \cdot \oint_{|z - z_0| = r} \frac{1}{|z - z_0|} dz,$$

όπου  $M = \max \{ |f(z) - f(z_0)| \mid \forall z : |z - z_0| = r \}$

$$= M \oint_{|z - z_0| = r} \frac{1}{r} |dz| \\ = \frac{M}{r} \underbrace{\oint_{|z - z_0| = r} |dz|}_{\text{μήκος καμπύλης}} = \frac{2\pi Mr}{r} = 2\pi M$$

Αλλά  $f$  ολόμορφη στο  $z_0$ , άρα  $f$  συνεχής στο  $z_0$ .

Εξ' ορισμού λοιπόν:  $\forall \epsilon > 0 \exists r_1 > r > 0 : \forall z : 0 < |z - z_0| < r < r_1 \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

Έτσι  $\forall \epsilon > 0$  μπορώ να βρω ακτίνα  $r : |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \forall z : |z - z_0| = r$ , δηλ.  $M \leq \epsilon$  και τελικά

$$|I_1| \leq 2\pi M \leq 2\pi \epsilon \forall \epsilon > 0 \implies I_1 = 0$$

### Θ.: Ολοκληρ. τύπος Cauchy για παραγώγους

Έστω  $f$  είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης  $\gamma$ .

Αν  $z_0$  σημείο στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της  $\gamma$ , τότε η  $f$  ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΚΑΘΕ ΤΑΞΗΣ στο σημείο  $z_0$  και μάλιστα:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

### 3.3 Εφαρμογές

#### (1) Θεώρ. μέσης τιμής Gauss

Αν  $f$  ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό θετικά προσανατολισμένου κύκλου  $|z - z_0| = R$ , τότε:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$$

**Απόδειξη** Εφαρμόζω τον ολοκλ. τύπο του Cauchy με τα δεδομένα μου και έχω:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \\ &\stackrel{\text{ορισμός}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} d(z_0 + Re^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= \text{ζητούμενο} \end{aligned}$$

(2) **Ανισότητα Cauchy** Έστω  $f$  ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό θετικά προσανατολισμένου κύκλου  $|z - z_0| = R$  και  $M_R = \max \{ |f(z)|, \forall z : |z - z_0| = R \}$

**Τότε:**

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_R}{R^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Απόδ.** Εφαρμόζουμε τον ολοκλ. τύπο Cauchy για παραγώγους προσαρμοσμένο στα δεδομένα:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} |dz| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} M_R \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{|z-z_0|^{n+1}} |dz| \\ &= \frac{n!}{2\pi} M_R \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{R^{n+1}} |dz| \\ &= \frac{n!}{2\pi} M_R \frac{1}{R^{n+1}} \underbrace{\oint_{|z-z_0|=R} |dz|}_{\text{μήκος κύκλου } z-z_0=R} \\ &= \frac{n!}{2\pi} M_R \frac{1}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n! M_R}{R^n} \end{aligned}$$

#### (3) Θεώρ. Liouville

Κάθε **ακεραία** συνάρτηση (δηλ. ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$ ) και φραγμένη στο  $\mathbb{C}$  είναι η σταθερή συνάρτηση.

**Απόδ.** Έστω  $z \in \mathbb{C}$  τυχαίο. Χρησιμοποιώ ανισότητα Cauchy για  $n = 1$ :

$$|f'(z)| \leq \frac{1! M_R}{R}, \quad M_R = \max \left\{ |f(z)| : |z - z_0| = R \right\}$$

Αφού  $f$  εξ' υποθέσεως είναι φραγμένη, άρα  $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

**Δηλ.**  $|f'(z)| \leq \frac{M_R}{R} \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

Τότε  $|f'(z)| = 0 \iff f'(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C} \iff f(z) = c \in \mathbb{C}$

#### (4) Αρχή μεγίστου/ελαχίστου

Έστω  $f$  ολόμορφη σε ανοικτό και συνεκτικό σύνολο  $G$  και μη σταθερή στο  $G$ . Τότε η  $|f|$  **ΔΕΝ** έχει μέγιστη τιμή στο  $G$ .

Αν μάλιστα  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$ , τότε η  $|f|$  **ΔΕΝ** έχει ελάχιστη τιμή στο  $G$ .

Ειδικά αν  $G$  είναι και **ΦΡΑΓΜΕΝΟ** και η  $f$  είναι συνεχής στο σύνολο του  $G$  (το οποίο είναι απλή, λεία καμπύλη), τότε η  $|f|$  **ΠΑΙΡΝΕΙ ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΠΑΝΩ στο σύνολο του  $G$** . Ομοίως αν  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$ , τότε η  $|f|$  παίρνει ελάχιστη τιμή ΠΑΝΩ στο σύνολο του  $G$ .

**Άσκ.** Υπολογίστε το  $\int_{\gamma} (i\bar{z} - z) dz$

όπου  $\gamma$  είναι η παραβολή  $y = 2t^2 + 1$  με αρχή το σημείο  $(1, 3)$  και πέρας το σημείο  $2, 9$ .

Γενικά, μπορώ να κινηθώ μέσω ορισμού, αντιπαραγώγου ή θεωρημάτων. Η  $\bar{z}$  δεν έχει παράγωγο, άρα δεν έχει αντιπαράγωγο (διαφορετικά από προηγούμενη εφαρμογή θα είχε άπειρες παραγώγους).

**Έχουμε:**

$$\int_{\gamma} (i\bar{z} - z) dz = i \int_{\gamma} \bar{z} dz - \int_{\gamma} z dz = I_1 + I_2$$

- όσον αφορά το  $I_2$ , εφ' όσον η  $f(z) = z$  είναι ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  ως πολυώνυμο, έχει μοναδική αντιπαράγωγο (με προσέγγιση σταθεράς), άρα:

$$\int_{\gamma} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{z_0=1+3i}^{z_1=2+9i}$$

(αντιπαράγωγος  $\xrightarrow{\text{θεωρία}}$  ανεξαρτησία δρόμου)

$$\begin{aligned} &= \frac{(2+9i)^2}{2} - \frac{(1+3i)^2}{2} \\ &= \frac{69}{2} - 15i \\ &= B \end{aligned}$$



- Για το  $I_1$ :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= i \int_{\gamma} \bar{z} \, dz \quad \text{ορισμός} \\
 &\quad \text{διότι η } \bar{z} \text{ ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο} \\
 &\quad \stackrel{(t, 2t^2+1)}{t+i(2t^2+1)=\gamma(t)} \int_1^2 \overline{\gamma(t)} \, d(\gamma(t)) \\
 &= \int_1^2 \left[ t - i(2t^2 + 1) \right] \underbrace{[1 + 4ti] \, dt}_{\gamma'(t) \, dt := d\gamma(t)} \\
 &= i \int_1^2 \left[ t + 4t(2t^2 + 1) \right] + i[1 + 2t^2 + 4t^2] \, dt \\
 &= i \int_1^2 (5t + 8t^3) + i(6t^2 + 1) \, dt \\
 &= i \left[ \frac{5t^2}{2} + 2t^4 \right]_1^2 - (2t^3 + t)_1^2 \\
 &= A + B
 \end{aligned}$$

### Τελικά

Από εδώ και στο εξής, μέχρι νεωτέρας, όλοι μαζί, Τρίτη και Πέμπτη.

**Άσκ.** Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$(α) \oint_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{z \cos z}{2z+1} \, dz$$

$$(β) \oint_{|z|=3} \frac{z^3+2}{(z-2)^3} \, dz$$

$$(γ) \oint_{|z|=2} \frac{\rho^z}{z^2-1} \, dz$$

Όλες οι καμπύλες θεωρούνται προσανατολισμένες με τη θετική φορά.

(α) Θα χρησιμοποιήσω ολοκλ. τύπο Cauchy.

Έστω  $f(z) = z \cos z$ , ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  άρα και πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2}$$

**Προφανώς:**

$$\begin{aligned}
 &\oint_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{z \cos z}{2z+1} \, dz \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{z \cos z}{z - \left(-\frac{1}{2}\right)} \, dz,
 \end{aligned}$$

όπου  $z_0 = -\frac{1}{2} \in \underline{\text{εσωτερικό του κύκλου } |z - \frac{1}{2}| = \frac{3}{2}}$ , ο οποίος είναι θετικά προσανατολισμένος.

Τότε ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες ώστε να έχω

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{z \cos z}{z - (-\frac{1}{z})} dz \\ &= |z \cos z|_{z_0=-\frac{1}{2}} \Rightarrow \oint_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{z \cos z}{z + \frac{1}{2}} dz = 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \cos\left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

**Τελικά:**  $\boxed{\oint_{\gamma} \frac{z \cos z}{2z+1} dz = \frac{-\pi i}{2} \cos\left(-\frac{1}{2}\right)}$

(β) Θα χρησιμοποιήσω τύπο Cauchy για παραγώγους με  $n = 2$ .

Έστω  $g(z) = z^3 + 2$ , προφανώς ακεραία (ολόμορφη σε όλο το  $\mathbb{C}$ ), άρα ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου μας.

Επίσης,  $z_0 = 2 \in$  εσωτερικό του θετικά προσανατολισμένου κύκλου μας, άρα από τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε:

$$\begin{aligned} g''(2) &= \frac{2!}{2\pi i} \oint_{|z|=3} \frac{g(z)}{(z-2)^3} dz \quad (g(z) = z^3 + 2) \\ \Rightarrow \oint_{|z|=3} \frac{z^3 + 2}{(z-2)^3} dz &= \pi i \cdot g''(2) \end{aligned}$$

$$g'(z) = 3z^2$$

$$g''(z) = 6z$$

$$g''(2) = 12$$

**Τελικά**  $\oint_{|z|=3} \frac{z^3 + 2}{(z-2)^3} dz = 12\pi i$

(γ) Χρησιμοποιώ κατ' αρχήν γενικευμένο θεώρημα Cauchy, και έχω:

$$\begin{aligned} I_{\text{ζητούμενο}} &= \oint_{\gamma_1} \frac{e^z dz}{(z-1)(z+1)} + \oint_{\gamma_2} \frac{e^z dz}{(z-1)(z+1)} \\ &= \oint_{\gamma_1} \frac{e^z/(z+1)}{z-1} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^z/(z-1)}{z+1} dz \\ &\stackrel{\text{τύπος Cauchy}}{=} 2\pi i \frac{e^z}{z+1} \Big|_{z=1} + 2\pi i \frac{e^z}{z-1} \Big|_{z=-1} \\ &= \pi i e - \pi i e^{-1} \end{aligned}$$

(διότι οι αριθμητές  $\begin{cases} a(z) = \frac{e^z}{z+1} \\ b(z) = \frac{e^z}{z-1} \end{cases}$  είναι ολόμορφες συναρτήσεις πάνω και στο εσωτερικό των καμπύλων  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  αντιστοίχως και  $z_0 = 1 \in$  εσωτερικό της  $\gamma_1$  ενώ  $z_1 = -1 \in$  εσωτερικό  $\gamma_2$ )

**Θέμα:** Υπολογίστε το  $\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-i)^2} dz$  για όλες τις τιμές του  $R$ , όπου  $R > 0$  και  $R \neq 1$

(α)  $R < 1$

Τότε  $I = 0$  από θεώρ Cauchy αφού ανωμαλία  $z_0 = i$  εκτός κύκλου  $|z| = R$

(β)  $R > 1$

Τότε  $z_0 = i \in$  εσωτερικό κύκλου  $|z| = R$  οπότε χρησιμοποιώ τύπο Cauchy για παραγώγους και βρίσκω

$$I = 0$$

.

**Άσκ.** Έστω  $f$  ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό κύκλου  $|z| = R$ , με  $f(z) \neq 0 \forall z$  στο εσωτερικό του κύκλου και  $f(z) = c$  για κάθε  $z$  πάνω στον κύκλο  $|z| = R$ .

ΝΔΟ  $|f(z)| = A \geq 0 \forall z$  στο εσωτερικό του κύκλου.

Θα χρησιμοποιήσω αρχή μεγίστου/ελαχίστου, η οποία λέει ότι η  $|f(z)|$  παίρνει τόσο τη μέγιστη, όσο και την ελάχιστη τιμή της ΠΑΝΩ στον κύκλο  $|z| = R$ .

Εφ' όσον όμως  $f(z) = c \forall z : |z| = R$  τότε  $|f(z)| = |c| = \text{σταθερό} \forall z$  πάνω στον κύκλο, όπου όμως η  $|f|$  παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Άρα η  $\max |f| = \min |f| \forall z : |z| = R$ , συνεπώς  $|f| = \text{σταθερά} \forall z$  στο εσωτερικό του κύκλου.

**Άσκ.** Έστω  $f$  ακεραία και  $|f(z)| \leq A|z| \forall z \in \mathbb{C}$ . ΝΔΟ  $f(z) = cz$ , όπου  $c \in \mathbb{C}$  σταθερά.

Θα χρησιμοποιήσω ανισότητα Cauchy για  $n = 2$ , προσπαθώντας να δείξω ότι:

$$|f''(z)| = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

τότε  $f'(z) = c \implies f(z) = cz + d \quad c, d \in \mathbb{C}$ . Από υπόθεση, για  $z = 0$  έχω  $|f(0)| \leq A \cdot 0 \implies f(0) = 0$  άρα  $d = 0$ .

Ανισότητα Cauchy

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \cdot M_R}{R^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

όπου  $M_R = \max \left\{ |f(z)| : |z - z_0| = R \right\}$

Έτσι για  $n = 2$  έχω για  $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f''(z_0) \leq \frac{2! \cdot M_R}{R^2} = \frac{2MR}{R^2}$$

Για  $|z - z_0| = R$  δηλ. για  $z = z_0 + Re^{i\theta}$  έχω  $|f(z)| \stackrel{\text{εξ' υποθέσεως}}{\leq} A|z| = A|z_0 + Re^{i\theta}| \leq A|z_0| + AR$

**Τότε:**

$$|f''(z_0)| \leq \frac{2(|z_0| + R)}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

άρα  $|f''(z_0)| = 0 \forall z_0 \in \mathbb{C}$ , άρα  $f''(z_0) = 0 \forall z_0 \in \mathbb{C}$ .

## Κεφάλαιο 4 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα και εφαρμογές

### Ορισμός

Έστω  $f = f(z)$  μιγαδική συνάρτηση. Ένα σημείο  $z_0 \in \mathbb{C}$  καλείται **ΑΝΩΜΑΛΟ σημείο** της  $f$ , εάν είτε η  $f$  ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ στο  $z_0$ , είτε ορίζεται στο  $z_0$  αλλά δεν έχει "καλή συμπεριφορά" στο  $z_0$ , π.χ. δεν είναι ολόμορφη στο  $z_0$

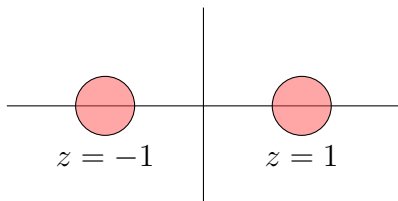
- Αν  $z_0$  είναι ανώμαλο σημείο της  $f$ , τότε το  $z_0$  καλείται **ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ ανώμαλο σημείο** της  $f$ , εάν η  $f$  είναι ολόμορφη στον Ανοικτό δακτύλιο

$$0 < |z - z_0| < R$$

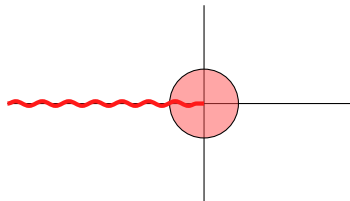
για κάποιο  $R > 0$ , διαφορετικά το  $z_0$  καλείται ΜΗ απομονωμένο ανώμαλο σημείο.

π.χ.

- $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$  ( $z_0 = 1, z_0 = -1$ ) απομονωμένα ανώμαλα σημεία της  $f$



- $g(z) = \text{Log} z$  ( $z_0 = 0$  μη απομονωμένη ανωμαλία. Επίσης τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα των πραγματικών είναι μη απομονωμένα ανώμαλα σημεία του λογάριθμου)



- $h(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$  ( $z_0 = 0$  το μοναδικό μεμονωμένο σημείο)

Έστω  $z_0$  είναι **ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ** ανώμαλο σημείο μιας συνάρτησης  $f$ . Τότε υπάρχει κάποιος δακτύλιος

$$0 < |z - z_0| < R$$

όπου η  $f$  είναι ολόμορφη και η  $f$  αναπτύσσεται σε σειρά Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^k, \quad \forall 0 < |z - z_0| < R$$

Δηλ.

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^k + \cdots$$

Θα λέμε ότι:

- Το  $z_0$  είναι **ΑΠΑΛΕΙΨΙΜΗ ανωμαλία**, εάν:

$$a_n = 0 \quad \forall n < 0$$

όπου  $a_n \in \mathbb{C}$  οι συντελεστές του αναπτύγματος Laurent της  $f$  "γύρω" από το  $z_0$ .

**π.χ.**  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$   $z_0 = 0$  (ανώμαλο σημείο)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots \quad \text{δεν είναι απαλείψιμη ανωμαλία στο } 0$$

- Το  $z_0$  καλείται **ΠΟΛΟΣ** της  $f$  τάξης  $k \in \mathbb{N}$ , εάν

$$a_n = 0 \quad \forall n < -k$$

Τότε το ανάπτυγμα Laurent της  $f$  γίνεται:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Έτσι έχουμε:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \underbrace{\left( a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \dots + a_0(z - z_0)^k + \dots \right)}_{=g(z)}$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \quad \forall 0 < |z - z_0| < R$$

όπου  $g = g(z)$  είναι ολόμορφη συνάρτηση στο  $z_0$  με  $g(z_0) \neq 0$ .

**Τελικά:** (εναλλακτικός ορισμός)

$z_0$  πόλος της  $f$  τάξης  $k \in \mathbb{N}$

$\Updownarrow$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \text{ με } g \text{ κάποια ολόμορφη συνάρτηση στο } z_0 \text{ για την οποία } \boxed{g(z_0) \neq 0}$$

- Το  $z_0$  καλείται **ΟΥΣΙΩΔΗΣ ΑΝΩΜΑΛΙΑ** της  $f$ , εάν υπάρχει ΑΠΕΙΡΟ ΠΛΗΘΟΣ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ όρων  $a_n$  στο ανάπτυγμα Laurent της  $f$  ΜΕ ΔΕΙΚΤΕΣ  $n$  να είναι ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

**π.χ.** Τι είδους ανωμαλία είναι το σημείο  $z_0$  για τη συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 - 1} &= \frac{1}{(z - 1)(z + 1)} \quad \text{αλλά} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z - 1) + 2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{z-1}{2} \right)^n, \quad \left| \frac{z-1}{2} \right| < 1 \quad \left( \frac{1}{1-z} = \sum z^n \quad |z| < 1 \right) \\ \frac{1}{z^2 - 1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z - 1) - \frac{1}{16}(z - 1)^2 + \dots \quad 0 < \left| \frac{z-1}{2} \right| < 1 \end{aligned}$$

Το  $z_0 = 1$  είναι πόλος 1ης τάξης εξ' ορισμού.

ΠΡΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ για ταξινόμηση ΑΠΟΜΕΝΩΜΕΝΩΝ ανώμαλων σημείων:

Έστω  $z_0$  είναι απομονωμένο ανώμαλο σημείο της  $f$ . Τότε:

•  $z_0$  είναι απαλείψιμη ανωμαλία  $\iff$  υπάρχει το  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}$  (όχι το  $\infty$ )

•  $z_0$  πόλος τάξης  $k$   $\iff$  Ο  $k \in \mathbb{N}$  ο μοναδικός φυσικός ώστε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lambda \in \mathbb{C} - \underbrace{\{0\}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ εδώ! Το όριο θέλω μη μηδενικό (επειδή μηδενίζεται για όλα τα επόμενα  $n > k$ )

•  $z_0$  ουσιώδης ανωμαλία της  $f$   $\iff$  Το  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  ΔΕΝ υπάρχει

**Τελικά:**

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \begin{cases} = \lambda \in \mathbb{C} & \implies z_0 \text{ απαλείψιμη ανωμαλία} \\ \infty & \implies z_0 \text{ πόλος} \\ \text{ΔΕΝ υπάρχει} & \implies z_0 \text{ ουσιώδης ανωμαλία} \end{cases}$$

#### 4.0.1 Πώς βρίσκουμε (κάποιες φορές) την τάξη ενός πόλου $z_0$

##### Λήμμα

Έστω  $f = f(z)$  ολόμορφη σε σημείο  $z_0$ . Τότε:

$$z_0 \text{ ρίζα της } f \text{ πολ/τας } \kappa \iff f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(\kappa-1)}(z_0) = 0 \text{ και } f^{(\kappa)}(z_0) \neq 0$$

##### Απόδειξη

"  $\Leftarrow$  " Αφού  $f$  ολόμορφη στο  $z_0$  **αναπτύσσεται ΠΑΝΤΑ** σε σειρά Taylor "γύρω" από το  $z_0$  ως εξής:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= \cancel{f(z_0)} + \cancel{f'(z_0)}(z - z_0) + \dots + \frac{\cancel{f^{(k-1)}(z_0)}}{(k-1)!} (z - z_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k + \dots \\ &= (z - z_0)^k \underbrace{\left( \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} + \dots \right)}_{=h(z)} \end{aligned}$$

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z), \text{ όπου } h(z) \text{ ολόμορφη στο } z_0 \text{ με } h(z_0) \neq 0$$

"  $\Rightarrow$  " Τότε  $f(z) = (z - z_0)^k h(z)$ , όπου  $h$  ολόμορφη στο  $z_0$  με  $h(z_0) \neq 0$ . Παραγωγίζοντας  $k-1$  φορές παίρνουμε  $f^{(j)}(z_0) = 0 \forall j = 0, 1, \dots, k-1$ , ενώ  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ .

• Έστω τώρα  $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$ , όπου  $a, b$  είναι ολόμορφες στο  $z_0$ . Υποθέτουμε ότι το  $z_0$  είναι ρίζα αριθμητή πολ/τας  $K$  ( $K = 0, 1, 2, \dots$ ) και ρίζα παρονομαστή πολ/τας  $\Lambda$  ( $\Lambda = 1, 2, 3, \dots$ ). Τότε:

$$z_0 \text{ είναι: } \begin{cases} \text{απαλείψιμη ανωμαλία για την } f & \text{εάν: } K \geq \Lambda \\ \text{πόλος τάξης } \Lambda - K & \text{εάν: } K < \Lambda \end{cases}$$

#### 4.0.2 Υπολογισμός ολοκληρωτικού υπολοίπου σε απομονωμένο ανώμαλο σημείο $z_0$

##### Ορισμός: Ολοκληρωτικό υπόλοιπο

Σειρά Laurent της  $f$  στο  $z_0$ :

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

Ο όρος  $a_{-1} = \oint_{\gamma} f(z) dz$  καλείται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της  $f$  στο  $z_0$ , συμβολικά  $\text{Res}(f, z_0)$ .

Έστω  $z_0$  είναι απομονωμένο ανώμαλο σημείο συνάρτησης  $f$ .

- Αν  $z_0$  **απαλείψιμη ανωμαλία**, τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της  $f$  στο  $z_0$

$$\text{Res}(f, z_0) = 0$$

Τελικά:

$$z_0 \text{ απαλείψιμο} \implies \text{Res}(f, z_0) = 0$$

- Αν  $z_0$  είναι πόλος τάξης  $N$ , τότε το  $\text{Res}(f, z_0)$  βρίσκεται ως εξής:

Εφόσον  $z_0$  πόλος τάξης  $N$  έχουμε:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + a_0(z - z_0)^k + \cdots$$

$$\implies \left( (z - z_0)^k f(z) \right)^{\overbrace{(k-1)}^{\text{παράγωγος}}} = (k-1)!a_{-1} + a_0(k \cdots 2)(z - z_0) + \cdots$$

$$\implies \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \left( (z - z_0)^k f(z) \right)^{(k-1)} \right] = (k-1)!a_{-1}$$

$$\implies a_{-1} \stackrel{\text{op.}}{=} \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \left( (z - z_0)^k f(z) \right)^{(k-1)} \right]$$

**Προσοχή!** Το  $(k-1)$  είναι **ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ!**

- $z_0$  **ουσιώδης ανωμαλία**: Τότε **αναγκαστικά** θα πρέπει να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της  $f$  στο  $z_0$  και μέσω αυτού να υπολογίσετε τον όρο  $a_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$

##### Θ.: Ολοκληρωτικών υπολοίπων

Έστω  $f = f(z)$  είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμημ. λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης  $\gamma$ , εκτός **ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΩΝ ΑΝΩΜΑΛΩΝ** σημείων  $z_1, \dots, z_n$  στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της  $\gamma$ . Τότε:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j)$$

### Θ.: Αρχή ταυτισμού

Έστω  $f = f(z)$  είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμηματικά λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης  $\gamma$ .

Αν  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  ακολουθία σημείων στο εσωτερικό της  $\gamma$ , με  $z_k \neq z_\lambda \ \forall k \neq \lambda$  και είναι τέτοια ώστε  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$  ανήκει στο εσωτερικό της  $\gamma$ .

Τότε, εάν  $f(z_k) = 0 \ \forall k$  ισχύει

$$f(z) = 0 \quad \forall z \text{ στο εσωτερικό της } \gamma$$

**Άσκηση** Να ταξινομηθούν όλα τα ανώμαλα σημεία των συναρτήσεων

(α)  $f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^2}$

(β)  $g(z) = \frac{e^z}{z^3}$

(γ)  $h(z) = \frac{\cos(1/2)}{z}$

(δ)  $k(z) = \frac{z}{e^z - 1}$

και να υπολογιστούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στα σημεία αυτά.

(α) Ανώμαλα σημεία της  $f$  (σημεία όπου η  $f$ ) "πιθανώς" δεν ορίζεται ή αν ορίζεται δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη):

"Το μοναδικό ανώμαλο σημείο είναι αυτό που μηδενίζει τον παρονομαστή, δηλαδή το  $z_0 = 0$ ."

Προφανώς το  $z_0 = 0$  μηδενίζει τον παρονομαστή της  $f$  δύο φορές, δηλαδή το  $z_0 = 0$  είναι διπλή ρίζα του παρονομαστή.

**Έστω**

$$a(z) = \text{"αριθμητής"} = 1 - \cos(z), \quad a(0) = 1 - \cos(0) = 0$$

$$a'(z) = \sin(z), \quad a'(0) = 0$$

$$a''(z) = \cos(z), \quad a''(0) = 1 \neq 0$$

Άρα το  $z_0 = 0$  είναι **διπλή** ρίζα του αριθμητή.

Επομένως, το  $z_0 = 0$  είναι "απαλείψιμη ανωμαλία", διότι:

πολλαπλότητα ρίζας  $z_0 = 0$  του αριθμητή = 2  $\geq$  πολλαπλότητα ρίζας  $z_0 = 0$  του παρονομαστή = 2

Αφού το  $z_0 = 0$  είναι απαλείψιμη ανωμαλία:

$$\boxed{\text{Res}(f, 0) = 0}$$

(β) Το  $z_0 = 0$  είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της  $g$ . Προφανώς η ρίζα του παρονομαστή είναι πολλαπλότητας 3. Το  $z_0 = 0$  δεν μηδενίζει τον αριθμητή, διότι  $e^{0^2} = 1 \neq 0$ , άρα η πολλαπλότητα του  $z_0 = 0$  για τον αριθμητή είναι ίση με 0 και έτσι το  $z_0 = 0$  είναι **πόλος**, τάξης:

$$\left. \begin{array}{l} \text{πολλαπλότητα ρίζας } z_0 = 0 \text{ του παρονομαστή} \\ - \\ \text{πολλαπλότητα ρίζας } z_0 = 0 \text{ του αριθμητή} \end{array} \right\} 3 - 0 = 3$$



Τότε:

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(g, 0) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left( [z - 0]^3 \frac{e^{z^2}}{z^3} \right)'' \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \left( e^{z^2} \right)'' \right] \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left( 2ze^{z^2} \right)' \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left( 2e^{z^2} + 4z^2 e^{z^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1
 \end{aligned}$$

(γ) Το μοναδικό ανώμαλο σημείο είναι το  $z_0 = 0$

### Σημείωση

Αν  $z_0$  είναι **πόλος** για συνάρτηση  $f$  και αν η  $g$  είναι ακεραία, τότε το  $z_0$  είναι ουσιώδους ανωμαλία για την  $g \cdot f$ .

Έτσι, με βάση τη σημείωση αυτή το  $z_0$  είναι ουσιώδους ανωμαλία.

**Άρα:**

$\text{Res}(h, 0) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} a_1$  (ο οποίος είναι συντελεστής του  $\frac{1}{z - z_0} \stackrel{z_0=0}{=} \frac{1}{z}$ ), στο ανάπτυγμα Laurent της  $h$  με κέντρο το  $z_0$

**Επομένως:**

$$\begin{aligned}
 \cos(z) &\stackrel{\text{McLaurin}}{=} 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad z \in \mathbb{C} \\
 \cos\left(\frac{1}{z}\right) &= 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} - \dots \quad z \in \mathbb{C} - \{0\} \\
 \frac{1}{z} \cdot \cos\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z^3} - \dots \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}
 \end{aligned}$$

**Έτσι:**

$$\text{Res}(h, 0) = \text{"συντελεστής του } \frac{1}{z} \text{ στο ανάπτυγμα Laurent της } h" = 1.$$

$$(δ) \quad k(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

Σημεία που μηδενίζουν παρονομαστή

$$e^z = 1 \iff z = \log 1 = \ln 1 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Άρα τα σημεία  $z_k = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$  ανώμαλα σημεία της  $k(z)$ .

Για  $n = 0$  έχουμε  $z_0 = 0$  ανώμαλο σημείο της  $k(z)$  που μηδενίζει τον παρονομαστή και αριθμητή 1 φορά άρα απαλείψιμο.

$$\text{Res}(k, 0) = 0$$

Για  $n \neq 0$  έχουμε  $z_n = 2n\pi i$  μηδενίζουν μια φορά παρονομαστή, καμία αριθμητή, άρα πόλοι 1<sup>ης</sup> τάξης.

Έτσι:

$$\begin{aligned}\text{Res}(k, z_n) &= \frac{1}{1} \lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n) k(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n) \frac{z}{e^z - 1} \stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{z + z - z_n}{e^z} = \frac{z_n}{e^{z_n}} = \frac{2n\pi i}{e^{2n\pi i}} = 2n\pi i\end{aligned}$$

(2) Υπολογίστε το  $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{\cosh z} dz$

- (α) τύπος (θεώρ. ολοκλ. υπολοίπων)
- (β) ανώμαλα σημεία, θέλεις ΕΝΤΟΣ καμπύλης
- (γ) ταξινόμηση ανώμαλων
- (δ) υπολ.  $\text{Res}(f, z_j)$ ,  $z_j$  ανώμαλα

(α) Από θεωρία έχω:

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res} \left( \frac{e^z}{\cosh z}, z_j \right)$$

όπου  $z_j$  ανώμαλα σημεία εντός κύκλου:  $|z| = 3$

(β) Ανώμαλα σημεία της  $e^z / \cosh z$ :

$$\begin{aligned}\cosh z &= 0 \stackrel{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0 \\ e^z + \frac{1}{e^z} &= 0 \stackrel{\substack{z \neq 0 \\ \forall z}}{\Leftrightarrow} e^{2z} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow 2z = \log(-1) = \ln(-1) + i(\pi + 2i\pi) \\ &\Rightarrow \boxed{z = \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

$$z = \frac{\pm\pi i}{2}, \frac{\pm 3\pi i}{2}, \frac{\pm 5\pi i}{2} \text{ ανώμαλα σημεία}$$

Άρα μένουν οι  $z_1 = \frac{\pi i}{2}$  και  $z_2 = \frac{-\pi i}{2}$  βρίσκονται ΕΝΤΟΣ κύκλου  $|z| = 3$ .

Έτσι από θεώρημα ολοκλ. υπολοίπων έχουμε:

$$I = 2\pi i \left( \text{Res} \left( \frac{e^z}{\cosh z}, \frac{\pi i}{2} \right) + \text{Res} \left( \frac{e^z}{\cosh z}, \frac{-\pi i}{2} \right) \right)$$

(γ) Αλλά το  $z_1 = \frac{\pi i}{2}$  είναι πόλος 1<sup>ης</sup> τάξης, διότι

- μηδενίζει μια φορά τον παρονομαστή, αφού

$$A(z) = \cosh z, \quad \cosh\left(\frac{\pi i}{2}\right) = 0$$

$$A'(z) = \sinh z, \quad \sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right) \neq 0$$

(τα μηδενικά του  $\sinh z$  είναι στα  $k\pi i$ )

και προφανώς δε μηδενίζει καθόλου τον αριθμητή, αφού

$$e^z \neq 0 \quad \forall z$$

άρα και

$$e^{\pi i/2} \neq 0$$

(δ) Ακριβώς με την ίδια λογική, το  $z_1 = -\frac{\pi i}{2}$  είναι πόλος 1<sup>ης</sup> τάξης.

(ε)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{2}} \left( \left( z - \frac{\pi i}{2} \right) \frac{e^z}{\cosh z} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{2}} \frac{e^z \left( z - \frac{\pi i}{2} \right) + e^z}{\sinh z} \\ &= \frac{e^z}{\sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right)} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, -\frac{\pi i}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi i}{2}} \left( \left( z + \frac{\pi i}{2} \right) \frac{e^z}{\cosh z} \right) \\ &= \frac{e^{-\pi i/2}}{\sinh(\pi i/2)} \end{aligned}$$

(□) Τελικά

$$I = 2\pi i \left( \frac{e^{\pi i/2}}{\sinh(\pi i/2)} + \frac{e^{-\pi i/2}}{\sinh(-\pi i/2)} \right)$$

## 4.1 Εφαρμογές ολοκλ. υπολοίπων

### 4.1.1 Λήμμα Jordan

Έστω  $f = f(z)$  είναι ολόμορφη στο διάτρητο δίσκο

$$0 < |z - z_0| < R,$$

το  $z_0$  είναι **ΑΠΛΟΣ ΠΟΛΟΣ** της  $f$  (δηλ. πόλος 1<sup>ης</sup> τάξης), και έστω  $\gamma_\rho$  είναι το τόξο  $\gamma_\rho := \{z : z = z_0 + \rho e^{i\theta}\}$  και  $\rho < R$ . Τότε:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = i(\theta_1 - \theta_0) \operatorname{Res}(f, z_0)$$

**Απόδ.**

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \int_{\gamma_\rho} \left( \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z) \right) dz, \text{ όπου}$$

$h = h(z)$  ολόμορφη στο  $z_0$ , διότι το  $z_0$  είναι απλός πόλος της  $f$ .

$$\begin{aligned} I_0 &= a_{-1} \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_\rho} h(z) dz \\ &= a_{-1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} i \rho e^{i\theta} d\theta + \int_{\gamma_\rho} h(z) dz \\ I_0(\rho) &= \text{Res}(f, z_0) \cdot i(\theta_1 - \theta_0) + \int_{\gamma_\rho} h(z) dz \end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο,  $\rho \rightarrow 0^+$ , έχουμε:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = i(\theta_1 - \theta_0) \text{Res}(f, z_0) + \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\rho} h(z) dz$$

$$\text{Αρκεί ΝΔΟ } \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\rho} h(z) dz = 0.$$

Αλλά  $h$  ολόμορφη στο  $z_0 \implies h$  συνεχής στο  $z_0 \implies h$  φραγμένη σε μία περιοχή του  $z_0$ . Έτσι:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_\rho} \right| &\leq \int_{\gamma_\rho} |h(z)| |dz| \leq M \cdot \int_{\gamma_\rho} |dz| \\ &= (\theta_1 - \theta_0) \rho M \rightarrow 0, \end{aligned}$$

όπου  $M$  είναι άνω φράγμα της  $h$  σε μια περιοχή του  $z_0$ .

(α) Υπολογισμός περιήλων ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

Θ.

Έστω  $f = f(z)$  ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  εκτός από πεπερασμένου πλήθους απομονωμένα ανώμαλα σημεία, και η  $f$  τέτοια ώστε

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0.$$

Υποθέτουμε ότι η  $f$  έχει:

- ανώμαλα σημεία  $z_1, \dots, z_n$  ΣΤΟ ΑΝΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ  $\text{Im}(z) > 0$
- ανώμαλα σημεία  $w_1, \dots, w_k$  ΣΤΟ ΚΑΤΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ  $\text{Im}(z) < 0$
- ΠΟΛΟΥΣ 1<sup>ης</sup> τάξης μόνον  $\zeta_1, \dots, \zeta_r$  πάνω στον ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΞΟΝΑ.

Τότε:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \overbrace{\text{Res}(f, z_j)}^{\text{άνω ημιεπίπεδο}} + \pi i \sum_{\lambda=1}^r \overbrace{\text{Res}(f, z_\lambda)}^{\text{απλοί πόλοι πάνω σε πραγμ. άξονα}}$$

ή ισοδύναμα:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = -2\pi i \sum_{\mu=1}^k \overbrace{\text{Res}(f, w_\mu)}^{\text{κάτω ημιεπίπεδο}} - \pi i \sum_{\lambda=1}^r \overbrace{\text{Res}(f, \zeta_\lambda)}^{\text{απλοί πόλοι πάνω σε πραγμ. άξονα}}$$

#### 4.1.2 Ασκήσεις

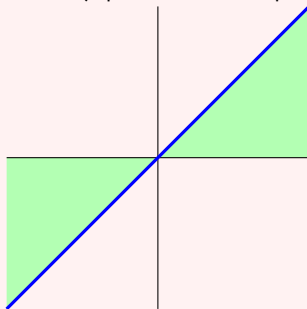
**Άσκ.** Υπολογίστε το  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x+1)(x^2+4x+5)}$

τέτοια ολοκληρώματα καλούνται καταχρηστικά ή κατά Cauchy

Το  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$  δεν υπάρχει, επειδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{N, M \rightarrow 0} \int_N^M x dx$$

που εξαρτάται από την διαδρομή που ακολουθούν τα  $M, N$ .



(α) Θεωρώ  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+4z+5)^2}$

(β) Ελέγχω αν ισχύει η συνθήκη

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{(z+1)(z^2+4z+5)^2} &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z^5} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{4}{z}+\frac{5}{z^2}\right)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^4} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{4}{z}+\frac{5}{z^2}\right)^2} = 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

(γ) Υπολογίζω **όλα** τα ανώμαλα σημεία της  $f$  και τα ταξινομώ:

$$\begin{aligned} (z+1)(z^2+4z+5)^2 &= 0 \iff \\ \iff z_0 &= -1 \text{ (απλή ρίζα)} \quad \text{και } z_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} \\ \iff z_0 &= -1 \text{ (απλή)} \quad \text{και } z_{1,2} = -2 \pm i \text{ (διπλές ρίζες)} \end{aligned}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} z_0 &= -1 \quad (\text{απλός πόλος στον πραγματικό άξονα}) \\ z_1 &= -2 + i \quad (\text{διπλός πόλος στο άνω ημιεπίπεδο}) \\ z_2 &= -2 - i \quad (\text{διπλός πόλος στο κάτω ημιεπίπεδο}) \end{aligned}$$

(δ) Τύπος:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = + \overbrace{2\pi i \cdot \text{Res}(f, -2+i)}^{\text{ανώμαλο στο άνω ημιεπίπεδο}} + \pi i \text{Res}(f, -1)$$

(ε) Υπολογισμός ολοκλ. υπολοίπου

$$\begin{aligned} \bullet \text{Res}(f, -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{(z+1)(z^2+4z+5)^2} = \frac{1}{4}. \\ \bullet \text{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left( (z-z_1)^2 \frac{1}{(z+1)(z-z_1^2)(z-z_2)^2} \right)' \\ \text{όπου } z_1 &= -2+i, \quad z_2 = -2-i \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left( \frac{1}{(z+1)(z-z_2)^2} \right)' = - \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z-z_2)^2 + 2(z+1)(z-z_2)}{(z+1)^2(z-z_2)^4} \\ &= - \frac{(z_1-z_2) + 2(z_1+1)}{(z_1+1)^2(z_1-z_2)^3} \\ z_1-z_2 &= \cancel{-2+i} + \cancel{2+i} \\ &= - \frac{2i + 2(i-1)}{(i-1)^2(2i)^3} = \frac{4i-2}{+2 \cdot 8} \\ &= \boxed{\frac{2i-1}{8}} \end{aligned}$$

(ϐ) Τελικό αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x+1)(x^2+4x+5)^2} &= 2\pi i \cdot \frac{2i-1}{8} + \pi i \cdot \frac{1}{4} \\ &= -\frac{\pi}{2} - \cancel{\frac{\pi i}{4}} + \cancel{\frac{\pi i}{4}} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(2) Υπολογίστε το  $\oint_{\gamma} \frac{1}{z(z-z_1)^2} dz$ , όπου  $\gamma$  είναι το τετράγωνο: με θετική φορά.

Εφαρμόζω θεώρ. ολοκλ. υπολοίπων

$$I = 2\pi i \cdot \text{Res} \left( f, \begin{array}{c} \text{στα ανώμαλα σημεία} \\ \textbf{ΕΝΤΟΣ} \text{ τετραγώνου} \end{array} \right) + \overset{\text{πάνω στην καμπύλη}}{i\frac{\pi}{2} \text{Res}(f, 0)}$$

$$\bullet \text{Res}(f, 0) \stackrel{\substack{z=0 \text{ απλός} \\ \text{πόλος}}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(z-z_1)^2} = \frac{1}{z_1^2}$$

$$\bullet \text{Res}(f, z_1) \stackrel{\substack{\text{δεύτερης} \\ \text{πόλος}}}{=} \lim_{z \rightarrow z_1} \left( (z-z_1)^2 \frac{1}{z(z-z_1)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow z_1} -\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)}$$

Αντικαθιστώντας παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

## Μέρος II

# Κεχαγιάς

Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

## Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί αριθμοί

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$x, y \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1$$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$

$$= x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_1y_2 + i^2x_2y_1$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

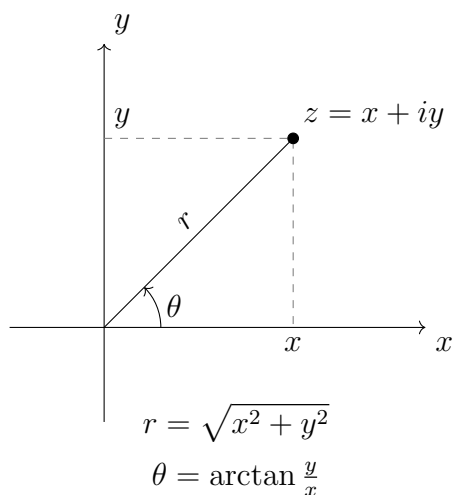
$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\operatorname{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$$





$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow \text{μέτρο του } z$$

γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ.  $z = x \in \mathbb{R}$ ,  $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ )

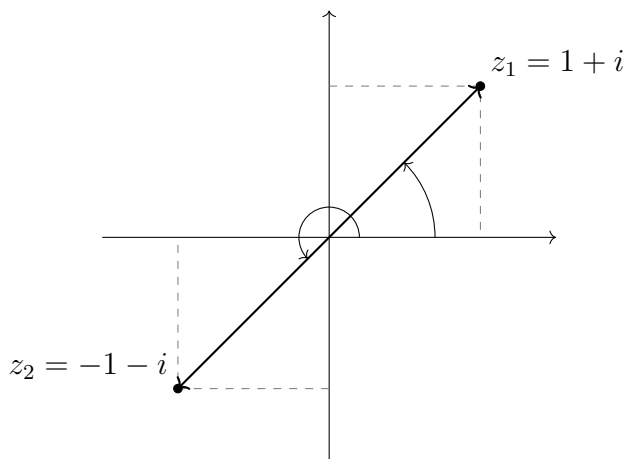
$$\begin{aligned} z = x + iy &= r \cdot \cos \theta + ir \sin \theta \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \quad (\text{Euler}) \end{aligned}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ διότι}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \cos \theta + ir \sin \theta \end{aligned}$$



$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}e^{i(-3\pi/4)} = \sqrt{2}e^{i13\pi/4}$$

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Γενικά: } -1 - i = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## 1.1 Συναρτήσεις

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z = x + iy$$

$$\text{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^\circ \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \quad \theta_0 = \arctan \left( \left| \frac{y}{x} \right| \right)$$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$$

$$\text{Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση } \arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \text{mod}(z) \cdot e^{i\text{Arg}(z)} \\ &= \text{mod}(z) \cdot e^{i(\text{Arg}(z) + 2k\pi)} \end{aligned}$$

$$z_1 = \text{mod}(z_1)e^{i\text{Arg}(z_1)}$$

$$z_2 = \text{mod}(z_2)e^{i\text{Arg}(z_2)}$$

$$z_1 z_2 = \text{mod}(z_1)\text{mod}(z_2)e^{i(\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2))}$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \text{ επειδή}$$

$$\text{Arg}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) = \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi$$

Γενικά, αν  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ , τότε:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Όμως:

$$\begin{aligned} \arg(z^z) &= \arg(z) + \arg(z) \\ &\neq 2\arg(z) \end{aligned}$$

διότι:

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

$$A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\}$$

$$2A = \{2a : a \in A\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \{1 + 4, 1 + 5, 2 + 4, 2 + 5, 3 + 4, 3 + 5\} = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$2A = \{2, 4, 6\}$$

## 1.2 η-οστές ρίζες

$$z = a^{1/n} \iff z^n = a$$

Δηλ. ποιο  $z$  ικανοποιεί αυτή

$$a = |a|e^{i\theta}$$

$$z = re^{i\phi}$$

$$(re^{i\phi})^n = |a|e^{i\theta}$$

$$\implies r^n \cdot e^{in\phi} = |a|e^{i\theta}$$

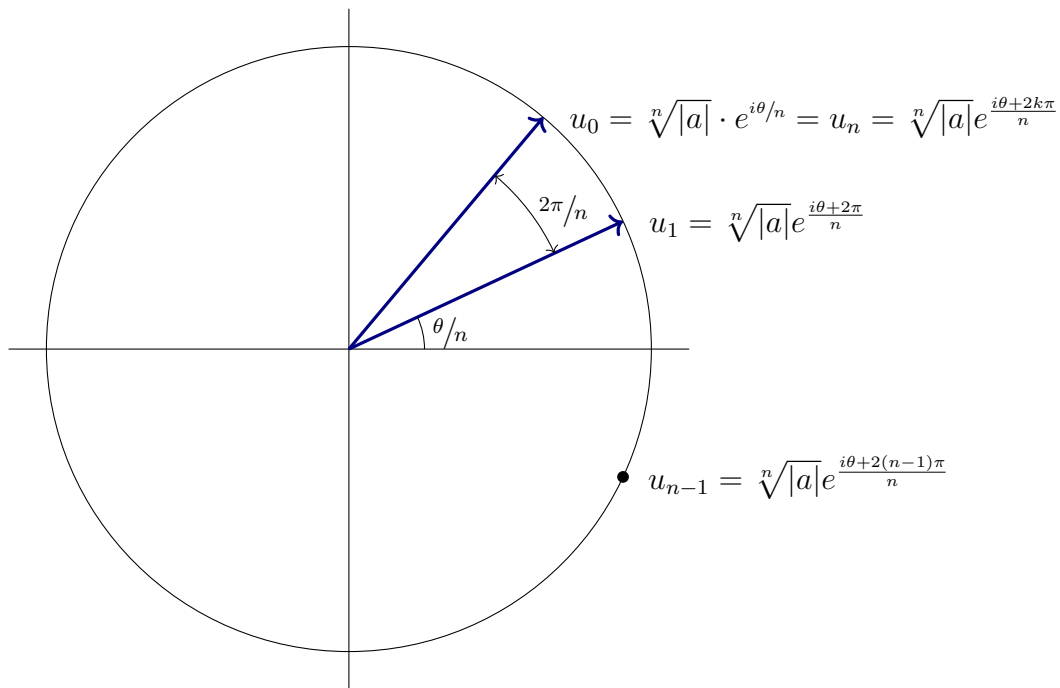
$$\implies r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi) = |a| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} r^n = |a| \implies r = \sqrt[n]{|a|} \\ \cos(n\phi) = \cos \theta \\ \sin(n\phi) = \sin \theta \implies \end{array} \right. \implies n\phi = \theta + 2k\pi \in \mathbb{Z} \implies \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$\implies z = a^{1/n} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Όμως αρκεί να πάρω  $k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ )

$$a^{1/n} = \left\{ \sqrt[n]{|a|}e^{i\theta/n}, \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\theta+2\pi}{n}}, \dots \right.$$

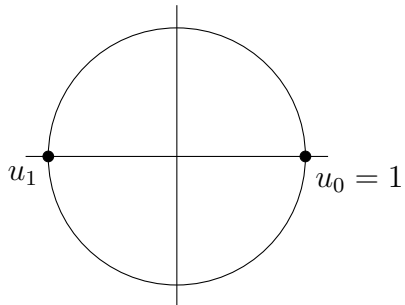


**Παρ.**  $a^{1/2} = 1^{1/2}$

$$a = 1 = 1 \cdot e^{i0} \quad |a| = 1, \theta = 0$$

$$u_0 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2\cdot 0\cdot \pi}{2}\right)} = e^{i0} = 1$$

$$u_1 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2\cdot \pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1$$



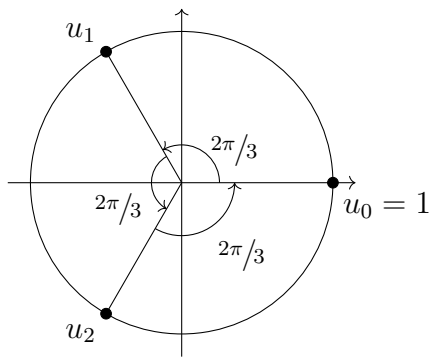
**Παρ.**  $a^{1/3} = 1^{1/3} = z$

$$a = 1 = e^{i0}, |a| = 1, \theta = 0$$

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$u_2 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$



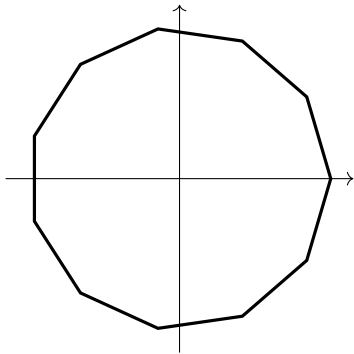
### Διαφορετικά

$$\begin{aligned}
 1^{1/3} = z &\iff 1 = z^3 \\
 &\iff z^3 - 1 = 0 \\
 &\iff (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \\
 &\iff (z - 1) \left( z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left( z + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Παρ.  $1^{1/11} = z \iff 1 = z^{11}$

$$\begin{aligned}
 &\iff z^{11} - 1 = 0 \\
 &\iff (z - 1)(z^{10} + z^9 + \dots + z + 1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{10}\}$$



## Κεφάλαιο 2 Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$$e^z, \log(z)$$

$$e^z \stackrel{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ήξερα } e^x &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 e^{iy} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} .
 \end{aligned}$$

Τώρα η νέα συνάρτηση  $e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

Παρ.

$$\begin{aligned}e^{1+i} &= ee^i = e \cdot (\cos 1 + i \sin 1) \\&= e \cdot \cos 1 + i \cdot e \cdot \sin 1\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(e^{1+i}) = e \cos 1$$

$$\operatorname{Im}(e^{1+i}) = e \sin 1$$

$$\log(e) = 1$$

$$\log(-1) = \log(e^{i(\pi+2k\pi)}) = i(\pi + 2k\pi)$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\theta$$

**Ορίζω**

**Πλειότιμη**  $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$

**Μονότιμη**  $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z)$  είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$\begin{aligned}\log(1+i) &= \log(\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2k\pi)}) \\&= \log(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right\}$$

## 2.1

Από σήμερα:  $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Πριν 7 ημέρες:  $e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i \sin y$

**Σήμερα:**  $\exp(z) \stackrel{\text{op}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Θ.

Η  $\exp(z)$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε  $z \in \mathbb{C}$  και ικανοποιεί:

(1)  $\forall z : (\exp(z))' = \exp(z)$

(2)  $\forall z_1, z_2 : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$

(3)  $\forall \theta \in \mathbb{R} : \exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$

**Απόδ.**

(1)

$$\begin{aligned}(\exp(z))' &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)' \\&= 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \exp(z)\end{aligned}$$

(2)  $g(z) = \exp(z) \exp(\zeta - z)$

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dz} &= \exp(z) \exp(\zeta - z) + \exp(z) \exp(\zeta - z)(-1) = 0 \\&\implies g(z) = c \implies c = g(0) = \exp(\zeta) \\&\implies \exp(\zeta) = g(z) = \exp(z) \exp(\zeta - z)\end{aligned}$$

**Θέτω:**  $z = z_1, \zeta = z_1 + z_2$

**Οπότε:**

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

(3)

$$\begin{aligned}\exp(i\theta) &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) \\&= \cos \theta + i \sin \theta\end{aligned}$$

$$\exp(z) = e^z$$

$$\exp(1+i) = 1 + (1+i) + \frac{(1+i)^2}{2!} + \dots$$

$$e^{1+i} = 1 + (i+1) + \dots$$

ή ο αρ.  $e = 2.718$  υψωμένος στη μιγαδική δύναμη  $1+i$

**Θ.**

Η  $\exp(z)$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi i$

**Απόδ.**

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \exp(2\pi i) = \exp(z)$$

Η εικόνα του συνόλου  $A \subseteq \mathbb{C}$  υπό την συνάρτηση  $f(z)$  Δηλ.

$$f(A) = \{w = f(z), z \in A\}$$

**Παρ.** Να δειχθεί ότι  $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Διότι: έστω  $w = re^{i\phi} \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

Θα βρω  $z = \rho e^{i\theta} = x + iy$  τ.ώ:  $\exp(z) = w$ .

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy)$$

$$w = re^{i\phi}$$

$$\exp(x) = |\exp(z)| = |w| = r \implies \boxed{x = \ln(r)}$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(w)$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(\exp(x) \exp(iy)) = y$$

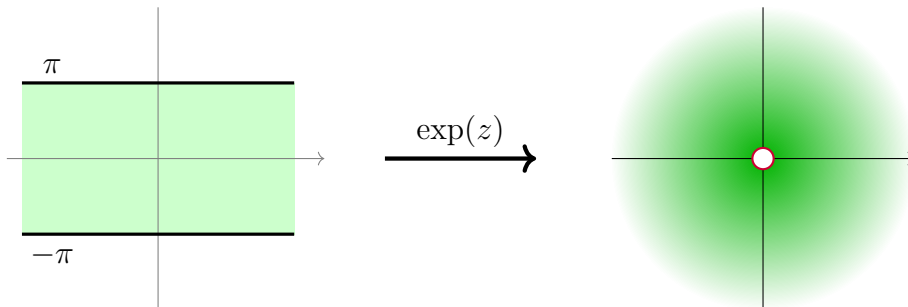
$$\text{Arg}(w) = \text{Arg}(re^{i\phi}) = \phi$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(w) \implies \boxed{y = \phi}$$

Τελικά  $z = x + iy = \ln(r) + i\phi$  ικανοποιεί  $\exp(z) = re^{i\phi} = w$ . Άρα  $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Στην πραγματικότητα, δεν χρειαζομαι όλο το  $\mathbb{C}$  διότι:

$$\exp(U) = \mathbb{C} - \{0\}, \quad \text{όπου } U = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi)\}$$



## 2.2 Λογαριθμική Συν.

$$w = \overbrace{\log(z)}^{\text{πλειότιμη}} \iff z = \exp(w)$$

$$w = \log(1 + i)$$

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$$

$$\log(1 + i) = \log\left(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{2}) + \log\left(e^{i[\frac{\pi}{4} + 2k\pi]}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \left\{ \dots, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{7\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{17\pi}{4}, \dots \right\}$$

$$\boxed{\log(z) = \ln(r) + i\arg(z)} \leftarrow \text{πλειότιμη}$$

$$\boxed{\text{Log}(z) = \ln(r) + i\text{Arg}(z)} \leftarrow \begin{array}{l} \text{μονότιμη} \\ \text{ασυνεχής για } x \in (-\infty, 0] \end{array}$$



## 2.3 Μιγαδικές δυνάμεις

$$z^c = e^{\log(z^c)} = e^{c \log z} = e^{c(\ln(|z|) + i \arg(z))}$$

ή

$$z^c = e^{\text{Log}(z^c)} = e^{c(\ln(|z|) + i \text{Arg}(z))}$$

$$\underbrace{(1+i)^{2-i}}_{\substack{z=1+i \\ c=2-i}} = e^{(2-i) \log(1+i)} = e^{(2-i)(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))}$$

$$z = 1 + i$$

$$c = 2 - i$$

$$\begin{aligned} &= e^{(2 \ln(\sqrt{2}) + (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)) + i(-\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 4k\pi)} \\ &= e^{2 \ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi} \cdot e^{i(-\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 4k\pi)} \\ &= 2e^{\pi/4 + 2k\pi} \cdot \left[ \cos\left(-\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 4k\pi\right) + i \sin\left(-\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 4k\pi\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+i} &= (1+i)^{1/2} = e^{1/2 \cdot \log(1+i)} \\ &= e^{1/2(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} \\ &= e^{1/2 \ln(\sqrt{2})} \cdot e^{i(\frac{\pi}{8} + k\pi)} \\ &= \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{\pi}{8} + k\pi)} \\ &= \sqrt[4]{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right) \right) \\ &= \begin{cases} \sqrt[4]{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) \\ \sqrt[4]{2} \left( \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) \right) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(-1)^i = e^{\log((-1)^i)} = e^{i \log(-1)} = e^{i(i(2k+1)\pi)} = e^{-(2k+1)\pi}$$

$$\begin{aligned} (1+i)^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2} \log(1+i)} = e^{\sqrt{2}(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} \\ &= \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot e^{i\sqrt{2}(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} \\ &= \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi\right) \right] \\ \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi\right) \\ \implies \frac{\sqrt{2}\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi + 2m\pi \implies 2k\sqrt{2}\pi = 2m\pi \implies \sqrt{2} = m/k \end{aligned}$$

$$(1+i)^{p/q} = \dots$$

$$m = \lambda q$$

**Παρ.** Να βρεθούν οι τιμές του  $n$  τ.ώ:

$$c_n = \sum_{k=0}^n i^k \in \mathbb{I}$$

$n$	
0	1
1	$1 + i$
2	$1 + i + i^2 = 1$
3	$1 + i + i^2 + i^3 = 0$
4	1
5	$1 + i$
6	$i$
$\vdots$	$\vdots$

Αρα  $\forall_{n,m} : c_n = c_{n+4m}$

Οι φανταστικές τιμές του  $c_n$  προκύπτουν για

$$n = 2, 3, \\ 6, 7, \\ 10, 11,$$

**Απ.**  $n \in \{m + 4l : m \in \{2, 3\}, l \in \mathbb{N}_0\}$

**Παρ.** Να λυθεί η  $(1 + z)^{2n} = -(1 - z)^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$

**Λύση** Φαίνεται άμεσα ότι  $z \neq 1$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{2n} = -1 &\implies \\ \frac{1+z}{1-z} &= (-1)^{1/2n} = \left( e^{i(2k+1)\pi} \right)^{1/2n} \\ z &= \frac{e^{i(2k+1)\pi/2n} - 1}{e^{i(2k+1)\pi/2n} + 1} \\ &= \frac{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) - 1}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + 1} \\ &= \frac{2 \sin^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i 2 \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)}{\begin{cases} \cos\phi - 1 = -2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ \cos\phi + 1 = 2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \end{cases} \frac{2 \cos^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i 2 \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)}{2 \cos^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i 2 \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \left[ -\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \right]}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \left[ \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \right]} \\ z_k &= i \tan\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1 \end{aligned}$$

## 2.4

### 2.4.1 Η γραμμική απεικόνιση

**Τύπος:**  $f(z) = az + b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$

Προφανώς η  $w = f(z) = az + b$  είναι 1-1 συνάρτηση και εύκολα βρίσκουμε την αντίστροφή της λύνοντας την  $w = az + b$  ως προς  $z$ .

Έτσι:  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: f(z) = az + b$  και μπορώ να την επεκτείνω στο  $\bar{\mathbb{C}}$  με 1-1 τρόπο θέτοντας

$$f(\infty) = \infty$$

#### Γεωμετρική ερμηνεία

- Προφανώς, από τη δομή της, η γραμμική απεικόνιση απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και κύκλους σε κύκλους.

**Ερώτηση** Έστω  $f(z) = az + b$ .

Αν  $Ax + By + \Gamma = 0$  ευθεία τυχαία, βρείτε πού αυτή απεικονίζεται μέσω της  $f(z)$ .

$$\begin{aligned} w &= u + iv = az + b \\ &= u(x, y) + iv(x, y) = a(x + iy) + b \end{aligned}$$

$$\bullet \quad w = az + b \iff z = \frac{w-b}{a} \iff x + iy = \frac{u+iv-(b_0+ib_1)}{a_0+ia_1} = \frac{[(u-b_0)+i(v-b_1)][a_0-a_1i]}{|a|^2} = \frac{(u-b_0)a_0+a_1(v-b_1)}{|a|^2} + i \frac{-a_1(u-b_0)+a_0(v-b_1)}{|a|^2}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_0u + a_1v - (a_0b_0 + a_1b_1)}{|a|^2} \\ y &= \frac{-a_1u + a_0v - (a_1b_0 + a_0b_1)}{|a|^2} \end{aligned}$$

(μπορεί να είναι λάθος)

$$\begin{aligned} Ax + By + \Gamma &= 0 \\ \iff A(a_0u + a_1v - (a_0b_0 + a_1b_1)) + B(-a_1u + a_0v - (a_1b_0 + a_0b_1)) + \Gamma|a|^2 &= 0 \end{aligned}$$

### 2.4.2 Αντιστροφή $f(z) = \frac{1}{z}$ ( $z \neq 0$ )

Προφανώς:  $\mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}: f(z) = \frac{1}{z}$   
και μπορεί να επεκταθεί στο  $\bar{\mathbb{C}}$  θέτοντας  $f(0) = \infty$  και  $f(\infty) = 0$ .

Εννοείται ότι είναι 1-1 με  $w = \frac{1}{z} \iff \frac{1}{w}$  δηλ. για  $\begin{cases} w = u + iv \\ z = x + iy \end{cases}$  έχουμε:

$$x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \iff \begin{cases} x = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2 + v^2} \end{cases} \quad (2)$$

Έτσι φαίνεται ότι η συνάρτηση αυτή απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.

Πράγματι, αν  $Ax + By + \Gamma = 0$  τυχαία ευθεία στο επίπεδο του  $z$ , τότε από (2):

$$A \frac{u}{u^2 + v^2} - B \frac{v}{u^2 + v^2} + \Gamma = 0$$

$$\iff \boxed{Au - Bv + \Gamma(u^2 + v^2) = 0}$$

•  $\Gamma = 0$  τότε  $Au - Bv = 0$  άρα ευθεία απεικον. σε ευθεία, ενώ:

•  $\Gamma \neq 0$  τότε  $u^2 + v^2 + \frac{A}{\Gamma}u - \frac{B}{\Gamma}v = 0$  **δηλ.** κύκλος

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

Η  $f(z) = \frac{1}{z}$  απεικονίζει το εσωτερικό μοναδιαίου κύκλου  $|z| = 1$  με κέντρο το  $z = 0$ , στο εξωτερικό του (με 1-1 τρόπο, και αντιστρόφως).

**Πράγματι:**

$$z : |z| < 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } |f(z)| = \frac{1}{|z|} > 1 \implies |f(z)| > 1$$

$$z : |z| > 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } |f(z)| = \frac{1}{|z|} < 1 \implies |f(z)| < 1$$

$$z : |z| = 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$$

### 2.4.3 Μετασχ. Möbius

Καλούμε ρητογραμμικό μετασχηματισμό (Möbius) κάθε συνάρτηση

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (\text{με } ad - bc \neq 0)$$

Προφανώς:  $f : \mathbb{C} - \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} - \{a/c\}$ , αν  $c \neq 0$

ή  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  αν  $c = 0$

Η  $f$  είναι 1-1 (εύκολο).

- Αποδεικνύεται ότι ο μετασχ. Möbius είναι σύνθεση διαστολής, περιστροφής, μετάθεσης και αντιστροφής, άρα απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.
- Ο μετασχ. Möbius (στην περίπτωση ευθείας ή κύκλου) απεικονίζει συμπληρωματικούς τόπους σε συμπληρωματικούς τόπους.
- Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ μετασχ. Möbius που απεικονίζει ΤΡΙΑ σημεία  $z_1, z_2, z_3$  σε ΤΡΙΑ ΑΛΛΑ σημεία  $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2), w_3 = f(z_3)$ , και έχει τη μορφή:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

## 2.4.4 Τριγωνομετρικές και αντίστροφές τους

π.χ.

- Η συνάρτηση

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

είναι  $2\pi$ -περιοδική, άρα μη αντιστρέψιμη στο  $\mathbb{C}$

Έστω  $E_k = \{x + iy : \kappa\pi - \frac{\pi}{2} < x < \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  είναι "κατακόρυφες λωρίδες".  
Για  $k=0$ , έχω:

Τότε η  $\sin z$  γίνεται 1-1 με πεδίο τιμών το σύνολο

$$A = \mathbb{C} - \{u + iv : |u| \geq 1 \text{ και } v = 0\}$$

Έτσι η  $\sin : E_k \rightarrow A$  είναι 1-1 (για κάθε συγκεκριμένο  $k \in \mathbb{Z}$ ), άρα αντιστρέψιμη.

- Από  $w = \sin z$  παίρνω:

$$\begin{cases} u(x, y) = \sin x \cosh y \\ v(x, y) = \cos x \sinh y \end{cases}$$

- Για  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικονίζεται}]{\sin z} (\cosh y, 0)$

Αλλά  $\cosh y$  δεν είναι 1-1  $\forall y$ , επομένως η  $\sin z$  ΔΕΝ μπορεί να είναι 1-1 πάνω στην  $x = \frac{\pi}{2}$ , η οποία εξαιρείται από το πεδίο ορισμού. Έτσι, από το πεδίο τιμών, εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \geq 1, v = 0\}$$

- Για  $x = -\frac{\pi}{2}$ , ομοίως εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \leq -1, v = 0\}$$

- Για  $x=0$ ,  $y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικον.}]{\sin z} (0, \sinh y)$  και επειδή  $\sinh y$  1-1 γν. αύξ. με πεδίο τιμών το  $\mathbb{R} \forall y$  η  $x=0$  απειον. στην  $v=0$ .

- Έστω  $x = a$  ( $a \neq \pm \frac{\pi}{2}$ ),  $a \neq 0$ .

$$\text{Τότε: } \begin{cases} u = \sin a \cosh y \\ v = \cos a \sinh y \end{cases} \implies \boxed{\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1}. \text{ Αν } a \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ τότε } \begin{cases} u > 0 \\ v \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ και}$$

αντίστοιχα για  $a \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ .

Έτσι ορίζουμε:

$$= \arcsin : E' \rightarrow E_k :$$

$$\arcsin z = w \iff z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2}$$

$$\iff e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \iff e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{4 - 4z^2}}{2}$$

$$\implies iw = \log \left( z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}} \right)$$

$$\implies \boxed{\arcsin z = \log \left( z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}} \right)}$$

- Τρίτη 22/11 Ατρέας, 2 τμήματα
- Πέμπτη 24/11 Κεχαγιάς, 2 τμήματα
- Παρασκευή 25/11 Κεχαγιάς, 2 τμήματα

## Κεφάλαιο 3 Ακολουθίες & Σειρές (Μιγαδικών αριθμών/συναρτήσεων)

### Ορισμός

Ακολουθία  $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$

### Ορισμός

Λέμε ότι η  $u_n(z)$  τείνει σε  $u(z)$ .

Γράφουμε  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = u(z)$

$$\forall z, \forall \epsilon > 0 \exists N_{\epsilon, z} : n \geq N_{\epsilon, z} \implies |u_n(z) - u(z)| < \epsilon$$

Παρ.  $u_n(z) = 1 + \frac{z}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} = 1$  διότι

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, \forall \epsilon > 0 : n \geq \frac{|z|}{\epsilon} + 1 &\implies \left| 1 + \frac{z}{n} - 1 \right| < \epsilon \\ &\iff \left| \frac{z}{n} \right| < \epsilon \\ &\iff n > \frac{|z|}{\epsilon} \end{aligned}$$

### Ορισμός

Έστω ακολουθία  $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$

Ορίζω νέα ακολουθία  $(S_1(z))_{n=1}^{\infty}$  ως εξής:

$$\begin{aligned} S_1(z) &= u_1(z) \\ S_2(z) &= u_1(z) + u_2(z) \\ &\dots \\ S_n(z) &= u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) \end{aligned}$$

Εάν  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$  γράφω  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = S(z)$  και το ονομάζω **σειρά**.

**Παρ.** για  $n \in \mathbb{N}$  ορίζω  $u_n(z) = z^n \cdot (1 - z)$ . Τότε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n(1 - z) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (z^n - z^{n+1}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (z - z^2 + z^2 - z^3 + z^3 - z^4 + \dots - z^{N+1}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (z - z^{N+1}) = z - \lim_{N \rightarrow \infty} z^{N+1} \\ &\stackrel{\text{Θέτω } z=re^{i\theta}}{=} z - \lim_{N \rightarrow \infty} r^N e^{iN\theta} \\ &= z \text{ όταν } |z| < 1 \end{aligned}$$

Τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (1 - z) = \begin{cases} z & \text{όταν } |z| < 1 \\ \text{δεν ορίζεται} & \text{όταν } |z| \geq 1 \end{cases}$$

(Για  $z = 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} = 0^n(1 - z) = 0 = z$ )  
 Ισχύει  $|z| < 1 \implies \lim_{N \rightarrow \infty} z^N = 0$ , διότι

$$\begin{aligned} \forall z \text{ με } |z| < 1, \epsilon > 0 \quad n \geq \frac{\ln e}{\ln |z|} + 1 &\implies |z^n| < \epsilon \\ &\iff |z|^n < \epsilon \\ &\iff n \cdot \ln |z| < \ln e \\ &\iff n < \frac{\ln e}{\ln |z|} \end{aligned}$$

### Ορισμός

Λέω ότι η  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$  **συγκλίνει απολύτως** αν  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$  συγκλίνει.

### Ορισμός

Λέμε ότι η  $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$  **συγκλίνει ομοιόμορφα** στην  $u(z)$  αν

$$\forall z, \forall \epsilon > 0 \exists \underbrace{N_{\epsilon}}_{\text{Το } N_{\epsilon} \text{ δεν εξαρτάται από το } z} : n \geq N_{\epsilon} \implies |u_n(z) - u(z)| < \epsilon$$

Παρόμοια πράγματα λέμε και για την  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$

**Παρ.** Η  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (1 - z)$  συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε  $z$  με  $|z| \leq \frac{1}{2}$   
**Διότι**

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N z^n(1 - z) = z - \lim_{N \rightarrow \infty} z^{N+1}$$

→ Αρκεί να δείξω ότι  $z^{N+1} \rightarrow 0$  ομοιόμορφα.

$$\forall z, |z| \leq \frac{1}{2}, \forall \epsilon > 0, \forall n \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} + 1 \implies |z^{N+1}| < \epsilon$$

Ισχυρίζομαι ότι

$$\forall z, |z| \leq \frac{1}{2}, \forall \epsilon > 0, \forall n \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln \frac{1}{2}} + 1 \implies |z^{N+1}| < \epsilon$$

$$\text{διότι } |z| \leq \frac{1}{2} \implies \frac{\ln \epsilon}{\ln \frac{1}{2}} \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|}$$

Θ.

Έστω  $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$  ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z)$  ομοιόμορφα στο χωρίο  $\Delta$ .

$$\text{Τότε } \int_c u(z) dz = \int_c \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c u_n(z) dz$$

Θ.

Θέτω  $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$  ακολουθία αναλυτικών (ολόμορφων) συναρτήσεων και  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z)$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο χωρίο  $D$ . Τότε

$$\frac{du}{dz} = \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n}{dz}$$

Θ.

Αν συγκλίνει η  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ , τότε συγκλίνει και η  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Θ.

Αν συγκλίνει η  $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(z)|$  και  $\forall n, z : |u_n(z)| \leq |v_n(z)|$ , τότε συγκλίνει και η

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$$

Θ.: Κριτήριο του λόγου

Έστω  $L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right|$ . Τότε

$L(z) < 1$  η  $\sum_{n=1}^{\infty}$  συγκλίνει

$L(z) > 1$  η  $\sum_{n=1}^{\infty}$  δεν συγκλίνει

$L(z) = 1$  δεν μπορούμε να αποφανθούμε



## Θ.: Κριτήριο της ρίζας

Έστω  $L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|}$ . Τότε

$$L(z) < 1 \quad \eta \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{συγκλίνει}$$

$$L(z) > 1 \quad \eta \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{δεν συγκλίνει}$$

$$L(z) = 1 \quad \text{δεν μπορούμε να αποφανθούμε}$$

**Παρ.** Η  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$  συγκλίνει όταν  $|z| \leq 1$ , δεν συγκλίνει όταν  $|z| > 1$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \quad L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)(n+2)}{z^n/n(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z| \frac{n}{n+2} = |z|$$

Όταν  $|z| = 1$ , τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Αφού συγκλίνει απολύτως, συγκλίνει (για κάθε  $z : |z| = 1$ )

**Παρ.**  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$  συγκλίνει όταν  $|z| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N z^n &= z + z^2 + z^3 + \dots + z^N \\ &= z \cdot (1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1}) \\ &= z \cdot \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{z}{1 - z} (1 - z^N) \\ &= \frac{z}{1 - z} \quad \text{για } N \rightarrow \infty \text{ όταν } |z| < 1 \end{aligned}$$

Για  $|z| > 1$  δεν συγκλίνει.

Για  $|z| = 1$  δεν συγκλίνει (τουλάχιστον για κάποιες τιμές).

Εναλλακτικά, με κριτήριο ρίζας:  $L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z^n|} = |z|$

και κριτήριο λόγου:  $L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| = |z|$

**Παρ.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$

$$L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(z+2)^{n+1}}{(n+1)^3 4^{n+1}}}{\frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z+2|}{4} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^3 = \frac{|z+2|}{4} \rightarrow \begin{cases} |z+2| < 4 & \text{συγκλίνει} \\ |z+2| = 4 & * \\ |z+2| > 4 & \text{δεν συγκλίνει} \end{cases}$$

Αν  $|z+2| = 4$ , ελέγχουμε αν συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)^3 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

Παρ.  $\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$

$$L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!|z|^{n+1}}{n!|z|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|z| = \begin{cases} \infty & |z| \neq 0 \\ 0 & |z| = 0 \end{cases}$$

- $\sum \frac{z^n}{n(n+1)}$  συγκλίνει για  $|z| \leq 1$
- $\sum z^n$  συγκλίνει για  $|z| \leq 1$
- $\sum \frac{(z+2)^n}{(n+1)34^n}$  συγκλίνει για  $|z+2| \leq 4$
- $\sum n!z^n$  συγκλίνει για  $|z| = 0$

### Ορισμός

Δυναμοσειρά:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

Θ.

Για κάθε δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  υπάρχει  $R \geq 0$ , τ.ώ:

$|z - z_0| < R$  η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα  
 $|z - z_0| > R$  η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει

Στο  $|z - z_0| = R$  η ΔΣ μπορεί να συγκλίνει σε κάποια σημεία και να μην συγκλίνει σε άλλα. Αυτό παρατηρούμε και στα 4 παραπάνω παραδείγματα.

Όταν  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \rightarrow$  σειρά Taylor.

Όταν  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \rightarrow$  σειρά Laurent.

Η σειρά Laurent περιλαμβάνει την Taylor ως ειδική περίπτωση.

Αν είναι "γνήσια" σειρά Laurent ( $a_n \neq 0$  για κάποια αρνητικά  $n$ ), τότε το  $z_0$  λέγεται ανώμαλο σημείο της σειράς Laurent.

Από την ΑΛΛΗ ΕΒΔΟΜΑΔΑ  
ΤΡΙ και ΠΕ στον ΑΤΡΕΙΑ ΚΑΙ ΤΑ 2 τμήματα

Θ.

Για κάθε ΔΣ  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  υπάρχει αριθμός  $R \geq 0$  (ακτίνα σύγκλισης) τ.ώ

(α) Η ΔΣ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα στο  $\underbrace{D_R(z_0)}_{\text{δίσκος σύγκλισης}} = \{z : |z - z_0| < R\}$

(β) Η ΔΣ αποκλίνει στο  $\{z : |z - z_0| > R\}$

(γ) Σε κάθε σημείο του συνόρου του δίσκου σύγκλισης  $\{z : |z - z_0| = R\}$  η ΔΣ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει

Θ.

Για κάθε ΔΣ  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ,  $\forall z \in D_R(z_0)$  ισχύουν:

(α)

$$\frac{d f}{d z} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n-1}$$

(β) Για κάθε  $C \subseteq D_R(z_0)$

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z - z_0)^n dz$$

Θ.

Έστω  $f(z)$  αναλυτική στο εσωτερικό κλειστής καμπύλης  $C$ . Έστω  $z_0$ ,  $z$  σημεία στο εσωτερικό της  $C$ . Τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{C'} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n-1}} dz \right) (z - z_0)^n$$

**ΠΑΡ.** Να βρεθεί η σειρά Taylor της  $f(z) = \sin z$ , γύρω από το  $z_0 = 0$ .

**ΛΥΣΗ**

$$\begin{array}{ll} f(z) = \sin(z) & f(0) = 0 \\ f'(z) = \cos(z) & f'(0) = 1 \\ f''(z) = -\sin(z) & f''(0) = 0 \\ f'''(z) = -\cos(z) & f'''(0) = -1 \end{array}$$

$$\sin(z) = 0(z - z_0)^0 + \frac{1}{1!}(z - z_0)^1 + \frac{0}{2!}(z - z_0)^2 + \frac{1}{3!}(z - z_0)^3 + \dots$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

**ΠΑΡ.** Να βρεθεί η σειρά Taylor

**Α' τρόπος**

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}/2, \quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}/2$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1/2, \quad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1/2, \dots$$

$$\sin(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^3$$

**Β' τρόπος**  $u = z - \pi/3 \implies z = u + \pi/3$

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sin(u + \pi/3) = \sinh \cos \frac{\pi}{3}^{1/2} + \cosh \sin \frac{\pi}{3}^{\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}u^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}u^3 + \dots \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \dots \end{aligned}$$

**ΠΑΡ.** Να βρεθεί η σειρά Taylor της  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  γύρω από το  $z_0 = 2$

**ΛΥΣΗ**

$$z - 2 = u$$

$$z - 1 = u + 1$$

$$1 - z = -(1 + u)$$

$$\forall u : |u| < 1 : \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{1+u} = -1 + u - u^2 + u^3 - \dots$$

$$|z - 2| < 1 : \frac{1}{1-z} = -1 + (z - 2) - (z - 2)^2 + (z - 2)^3$$

(για  $z = 3$ ,  $f(z) = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ )

**ΠΑΡ.** Να βρεθεί η σειρά Taylor της  $f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3}$  γύρω από το  $z_0 = 0$

$$\begin{aligned}\frac{z}{z^2-2z-3} &= \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{3}z + \frac{8}{36}z^2 + \dots\end{aligned}$$

$$|z| < 1 \quad \left| \frac{z}{3} \right| < 1 \implies |z| < 3$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-2z-3} &= \frac{1}{(z-1)^2-4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \left( 1 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^4 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^6 + \dots \right)\end{aligned}$$

$$|z-1| < 2: \quad \frac{1}{z^2-2z-3} = -\frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2}{4} - \frac{\left(\frac{z-1}{2}\right)^4}{4} - \dots$$

**Θ.**

Έστω  $R_2 < R_1$ ,  $C_1 = \{z : |z - z_0| = R_1\}$   
 $C_2 = \{z : |z - z_0| = R_2\}$

$A_{R_2, R_1}(z_0) = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$  δακτύλιος χωρίς σύνορο

$\bar{A}_{R_2, R_1}(z_0) = \{z : R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2\}$  δακτύλιος με σύνορο

Έστω  $f(z)$  αναλυτική στο  $\bar{A}_{R_2, R_1}(z_0)$ . Τότε  $\forall z \in A_{R_1, R_2}(z_0)$  ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Αυτή λέγεται σειρά Laurent (Λοράντ) της  $f(z)$  γύρω από το  $z_0$ .

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

(η  $C$  εντός του  $A_{R_2, R_1}(z_0)$ )

**ΠΑΡ.** Βρείτε την σειρά Laurent της  $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$  γύρω από το  $z_0 = 0$ .

### Λύση

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \cdot \sin z \\ &= \frac{1}{z^2} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)\end{aligned}$$

$$\forall z : 0 < |z| < \infty : \quad \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

Το  $z_0 = 0$  είναι **πόλος** πρώτης τάξης.

**ΠΑΡ**  $\frac{\sin z}{z}$

$$0 < |z| < \infty : \quad \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Το  $z_0 = 0$  είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο.

**ΠΑΡ** Να βρεθεί η σειρά Laurent της  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}$  γύρω από το  $z_0 = -1$

### Λύση

$$\begin{aligned}\frac{e^{2z}}{(z+1)^2} &= \frac{e^{-2}}{(z+1)^2} \cdot e^{2(z+1)} \\ &= e^{-2} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \left( 1 + 2(z+1) + \frac{4 \cdot (z+1)^2}{2!} + \frac{8 \cdot (z+1)^3}{3!} + \dots \right)\end{aligned}$$

$$0 < |z+1| < \infty : \quad \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} = \frac{e^{-2}}{(z+1)^2} + \frac{2e^{-2}}{z+1} + 2e^{-2} + \frac{4e^{-2}}{3} \cdot (z+1) + \dots$$

Παρατηρώ ότι  $z_0 = -1$  είναι πόλος 2<sup>ης</sup> τάξης

$$\oint \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz = \oint \frac{e^{-2}}{(z+1)^2} dz + \oint \frac{2e^{-2}}{z+1} dz + \oint \frac{4e^{-2}}{3} (z+1) dz + \dots$$

$$\oint \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz = 2e^{-2} 2\pi i$$

### Ορισμός

Έστω  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ .

Έστω  $n_1$  ο ελάχιστος  $n$  τ.ώ.  $a_n \neq 0$ .

(αν δεν υπάρχει το ελάχιστο, θέτω  $n_1 = -\infty$ )

α. Αν  $-n_1 = 0$ , τότε το  $z_0$  είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο (πόλος μηδενικής τάξης)

β. Αν  $\infty > -n_1 > 0$ , τότε το  $z_0$  είναι πόλος τάξης  $-n_1$

γ. Αν  $n_1 = -\infty$ , τότε το  $z_0$  είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο (πόλος  $\infty$  τάξης)

Η  $f(z) = e^{1/z}$  έχει το  $z_0 = 0$  πόλο άπειρης τάξης.

### 3.1 Δέκα Σειρές Laurent

1.  $f(z) = (z - 2) \sin(z - 1)$  γύρω από το  $z_0 = 1$

**Λύση**

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - 1) \sin(z - 1) - \sin(z - 1) \\ &= (z - 1)^2 - \frac{(z - 1)^4}{3!} + \frac{(z - 1)^6}{5!} - \dots - \left( z - 1 - \frac{(z - 1)^3}{3!} + \frac{(z - 1)^5}{5!} - \dots \right) \\ &= -(z - 1) + (z - 1)^2 + \frac{(z - 1)^3}{3!} - \frac{(z - 1)^4}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Ισχύει  $\forall z \in \mathbb{C}$

2.  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$ ,  $z_0 = -2$

**Λύση**

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z + 1)(z + 2)} = -\frac{1}{z + 1} + \frac{2}{z + 2} \\ g_2(z) &= \frac{1}{z + 2} \\ g_1(z) &= -\frac{1}{z + 1} = -\frac{1}{z + 2 - 1} = \frac{1}{1 - (z + 2)} = 1 + (z + 2) + (z + 2)^2 + \dots \quad 0 < |z + 2| < 1 \\ f(z) &= g_2(z) + g_1(z) \\ &= \frac{2}{z + 2} + 1 + (z + 2) + (z + 2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Σε δυνάμεις της  $(z + 2)$  αλλά μακριά από το  $z_0 = -2$  (δηλ.  $|z + 2| > 1$ )

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2}{z + 2} + \frac{1}{1 - (z + 2)} \\ \frac{1}{1 - (z + 2)} &= -\frac{1}{z + 2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{z + 2} + 1} \\ &= -\frac{1}{z + 2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z + 2}} = -\frac{1}{z + 2} \left( 1 + \frac{1}{z + 2} + \frac{1}{(z + 2)^2} + \dots \right) \\ f(z) &= \frac{1}{z + 2} - \frac{1}{(z + 2)^2} - \frac{1}{(z + 2)^3} - \dots \end{aligned}$$

Το  $z_0 = -2$  είναι πόλος 1<sup>ης</sup> τάξης.

3. Η ίδια σειρά, γύρω και κοντά στο  $z_0 = -1$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z + 1} + \frac{2}{z + 2} \\ g_2(z) &= \frac{2}{z + 2} = \frac{2}{1 + (z + 1)} = 2 \cdot (1 - (z + 1) + (z + 1)^2 - (z + 1)^3 + \dots) \\ f(z) &= -\frac{1}{z + 1} + 2 - 2 \cdot (z + 1) + 2(z + 1)^2 - 2(z + 1)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{z+1} + 2 - 2 \cdot (z-1) + 2(z+1)^2 - 2(z+1)^3 + \dots = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} \quad 0 < |z+1| < 1$$

$$\frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} \quad 0 < |z+2| < 1$$

Θα επιβεβαιώσω ότι οι δύο αυτές σειρές είναι ίσες μεταξύ τους και με την τιμή της συνάρτησης.

$$f(-3/2) = \frac{-3/2}{9/4 - 3/2 + 3/4} = 6$$

$$f_1(-3/2) = 2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 6$$

$$f_2(-3/2) = 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 6$$

4.  $f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z-1)^2}$  γύρω από το  $z_0 = 0$

**Λύση**

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} = \left( \frac{1}{1-z} \right)' = (1 + z + z^2 + z^3 + \dots)' = 0 + 1 + 2z + 3z^2 + \dots$$

$$f_2(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots$$

$$f(z) = f_1 f_2 = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 3 + 4z + 5z^2 + \dots$$

5.  $f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z-1)^2}$ ,  $z_0 = 1$

$$f_2(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(1+(z-1))^2}$$

$$\frac{1}{(1+u)^2} = 1 - 2u + 3u^2 - \dots$$

$$\frac{1}{z^2} = 1 - 2(z-1) + 3(z-1)^2 - \dots$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)} + 3 - 4(z-1) + \dots$$

$$\frac{1}{(1+u)^2} = \frac{1}{1+2u+u^2}$$



$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 + 2u + u^3 + \dots \\ \hline 1 + 2u + u^2 & 1 - 2u + 3u^2 + \dots \\ -2u - u^2 & \\ -2u - 4u^2 - 2u^3 & \\ 3u^2 + 2u^3 & \end{array}$$

Ομοίως, τη σειρά της  $\frac{1}{z^2+3z+2}$  γύρω από το  $z_0 = -1$  μπορώ να την βρω αντικαθιστώντας:

$$\frac{1}{z^2 + 3z + 2} = \frac{1}{(z+1)^2 + (z-1)} = \frac{1}{u^2 + u}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & u + u^2 \\ \hline 1 + u & \frac{1}{u} - 1 + \dots \\ -u & \end{array}$$

6.  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  γύρω από το  $z_0 = 0$

**Λύση**

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} \cdot (1 + z + z^2 + \dots) \\ &= -\frac{1}{z} - 1 - z - \dots \end{aligned}$$

για  $0 < |z| < 1$

7.  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  γύρω από το  $z_0 = 0$  για  $|z| > 1$

**Λύση**  $f(z) = f_1(z)f_2(z)$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z} \\ f_2(z) &= \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) \\ f(z) &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

8.  $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ , να βρεθούν όλες οι δυνατές σειρές Laurent γύρω από το  $z_0 = 0$ .

**Λύση** Τα ΑΣ (ανώμαλα σημεία) είναι  $z_1 = 1$  και  $z_2 = -2$ . Οπότε

Αυτή είναι η άσκηση που θα πέσει στις εξετάσεις αν δεν έχει κέφι ο Κεχαγιάς.

**1η σειρά:**  $|z| < 1$

**2η σειρά:**  $1 < |z| < 2$

**3η σειρά:**  $2 < |z|$

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{f_1(z)} + \underbrace{\frac{1}{z+2}}_{f_2(z)} = f_1(z) + f_2(z)$$

**1η σειρά**  $|z| < 1$

$$f_1(z) = -(1 + z + z^2 + \dots)$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots\right)}_{|\frac{z}{2}| < 1}$$

άρα για  $\forall z : |z| < 1$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{5z}{4} - \frac{7z^2}{8} - \dots$$

**2η σειρά**  $1 < |z| < 2$  με  $u = 1/z$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{\frac{1}{u} - 1} = \frac{u}{1-u} \\ &= u(1 + u + u^2) + \dots \\ &= u + u^2 + u^3 + \dots \\ f_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \\ f_2(z) &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} \end{aligned}$$

Τελικά:

$$f(z) = \dots - 1/z^2 - 1/2 - z/4 + z^2/8 + \dots$$

**3η σειρά**  $2 < |z|$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \\ f_2(z) &= \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} \\ &= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \dots\right) \\ f_2(z) &= \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} - \dots \\ f(z) &= f_1 + f_2 = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} \end{aligned}$$

## Κεφάλαιο 4 Αρμονικές συναρτήσεις

Θ.

Αν η  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(x_0, y_0)$  τότε

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{c} \text{Cauchy-} \\ \text{Riemann} \end{array} \right)$$

**Παρ.**  $f(z) = z^3 = (x + iy)^3$

$$\begin{aligned} &= x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + (iy)^3 \\ &= (x^3 - 3xy^2) + i \cdot (3x^2y - y^3) \end{aligned}$$

Δηλ. 
$$\begin{aligned} u &= x^3 - 3xy^2 & u_x &= 3x^2 - 3y^2 = v_y \\ v &= 3x^2y - y^3 & u_y &= -6xy = -v_x \end{aligned}$$

### Ορισμός

Λέμε την  $u(x, y)$  **αρμονική** στο χωρίο  $D$  αν  $\forall (x, y) \in D$ :

(α) Οι  $u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$  είναι συνεχείς

(β) Ισχύει η εξίσωση του Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

### Θ.

Αν η  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  είναι **αναλυτική στο D**, τότε οι  $u(x, y), v(x, y)$  είναι αρμονικές στο  $D$

**Απόδ.** Αφού η  $f(z)$  είναι αναλυτική ισχύουν

$$\left. \begin{aligned} u_x &= v_y \\ v_x &= -u_y \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} u_{xx} &= v_{yx} \\ v_{xy} &= u_{yx} \end{aligned} \right\} \implies u_{xx} = -u_{yy} \implies u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Ομοίως δείχνεται  $v_{xx} + v_{yy} = 0$ .

**Παρ.**  $f(z) = z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$   
Θα δείξω ότι οι  $u, v$  αρμονικές

### Λύση

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_x)_x = (3x^2 - 3y^2)_x = 6x \\ u_{yy} &= (u_y)_y = (-6xy)_y = -6x \\ u_{xx} + u_{yy} &= 6x - 6x = 0 \quad \text{άρα η } u \text{ αρμ.} \\ v_{xx} &= (v_x)_x = (6xy)_x = 6y \\ v_{yy} &= (v_y)_y = (3x^2 - 3y^2)_y = -6y \\ v_{xx} + v_{yy} &= 6y - 6y = 0 \quad \text{άρα η } v \text{ αρμ.} \end{aligned}$$

### Ορισμός

Αν η  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  είναι αναλυτική, λέμε ότι οι  $u, v$  είναι **συζυγείς αρμονικές**

**Παρ.** Να βρεθεί η συζυγής αρμονική της  $u = x^2 - y^2$

**Λύση** Από την εκφώνηση υποτίθεται ότι υπάρχει αναλυτική  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , με  $u(x, y) = x^2 - y^2$ . Τότε:

$$u_x = 2x = v_y \implies v(x, y) = \int 2x \, dy = 2xy + c(x)$$

$$\implies v_x = 2y + \frac{dc}{dx} = -u_y = 2y \implies \frac{dc}{dx} = 0$$

$$\implies c \text{ σταθ.}$$

**Τελικά**  $v(x, y) = 2xy + c$ ,  $f(z) = \underbrace{x^2 - y^2}_u + \underbrace{i2xy}_v + \tilde{c} = (x + iy)^2 + \tilde{c} = \boxed{z^2 + \tilde{c} = f(z)}$

**Παρ.** Να βρεθεί η συζυγής αρμονική της  $u = e^x \cos y$

**Λύση** Με το μάτι  $f(z) = e^z$ ,  $v(x, y) = e^x \sin y$

**Αλλιώς**  $u = e^x \cos y$ ,  $u_x = e^x \cos y = v_y \implies v = e^x \sin y + c \implies v_x = e^x \sin y + \frac{dz}{dx} = -u_y \implies \dots \implies v = e^x \sin y + c$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \cos y + ie^x \sin y + \tilde{c} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) + \tilde{c} \\ &= e^x = e^x e^{iy} + \tilde{c} = e^z + \tilde{c} = f(z) \end{aligned}$$

#### 4.0.1 Τι σημαίνει/σε τι χρησιμεύει/τι είναι η εξίσωση του Laplace;

Η λύση της Εξ. Laplace περιγράφει προβλήματα όπως

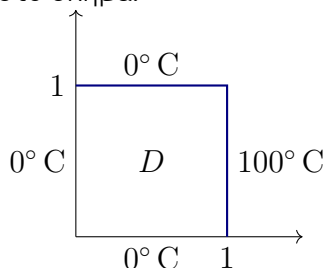
- (1) μετάδοση θερμότητας σε σταθερή κατάσταση
- (2) ροή ρευστών
- (3) πυκνότητα ηλ. φορτίου
- (4) δυναμικό μέσα σε έναν αγωγό

Η εξ. Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  είναι διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Αν αυτή ισχύει σε κάποιο χωρίο  $D$  και την εφοδιάσω με **οριακές συνθήκες** (τιμές της  $u(x, y)$  στο  $\partial D$  - σύνορο του  $D$ ), τότε έχω μοναδική λύση στο πρόβλημα Dirichlet:

$$(1) \forall (x, y) \in D : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$(2) \forall (x, y) \in \partial D : u(x, y) = F(x, y)$$

**Παρ.** Ένα μεταλλικό τετράγωνο έλασμα  $D$  έχει σταθερές θερμοκρασίες στα άκρα του, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η θερμοκρασία του ελάσματος δίνεται από τη λύση του:

$$(1) \forall (x, y) : \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix} : u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$(2) \forall (x, y) : \begin{matrix} u(x, 0) = 0 \\ u(x, 1) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(1, y) = 100 \end{matrix}$$

Τι σχέση έχουν όλα αυτά με

(1) Μιγαδικές συναρτήσεις;

(2) Λογισμό II;

Τι ασκήσεις μπαίνουν στις εξετάσεις;

Τι σημαίνει η εξ. Laplace;

### Διακριτοποίηση εξίσωσης Laplace

$$\forall (x, y) \in D : u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\forall (x, y) \in \partial D : u(x, y) = \underbrace{F(x, y)}_{\text{δεδομένη συνάρτηση}}$$

$$u_x(m\delta, n\delta) \simeq \frac{u((m+1)\delta, n\delta) - u(m\delta, n\delta)}{\delta}$$

$$u_x((m-1)\delta, n\delta) \simeq \frac{u(m\delta, n\delta) - u((m-1)\delta, n\delta)}{\delta}$$

$$u_{xx}(m\delta, n\delta) \simeq \frac{u_x(m\delta, n\delta) - u_x((m-1)\delta, n\delta)}{\delta}$$

$$u_{xx} \simeq \frac{u((m+1)\delta, n\delta) - 2u(m\delta, n\delta) - u((m-1)\delta, n\delta)}{\delta^2}$$

$$u_{yy} \simeq \frac{u(m\delta, (n+1)\delta) - 2u(m\delta, n\delta) - u(m\delta, (n-1)\delta)}{\delta^2}$$

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = \frac{-4u(m\delta, n\delta) + u((m+1)\delta, n\delta) + u(m\delta, (n+1)\delta) + u((m-1)\delta, n\delta) + u(m\delta, (n-1)\delta)}{\delta^2}$$

$$\implies u(m\delta, n\delta) = \frac{u((m+1)\delta, n\delta) + u((m-1)\delta, n\delta) + u(m\delta, (n+1)\delta) + u(m\delta, (n-1)\delta)}{4}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η εξίσωση Laplace δηλώνει ότι η τιμή σε κάθε σημείο είναι ο μέσος όρος της τιμής των 4 γειτονικών σημείων.

**Παρ.** Στο προηγούμενο πρόβλημα:

$$\begin{aligned} u(1/2, 1/2) &= \frac{1}{4} \left( u(1/2, 0) + u(1/2, 1) + u(0, 1/2) + u(1, 1/2) \right) \\ \implies u(1/2, 1/2) &= \frac{1}{4} (0 + 0 + 0 + 100) \\ &= 25 \end{aligned}$$

Τότε θα μπορούσαμε να βρούμε τη λύση λύνοντας ένα σύστημα 9x9, ή με υπολογιστική προσέγγιση.

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in D : u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ \forall (x, y) \in \partial D : u(x, y) &= \underbrace{F(x, y)}_{\text{δεδομένη συνάρτηση}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} \operatorname{Re} \left( \frac{u(x, y) + iv(x, y)}{x - x_0 + i(y - y_0)} d(x + iy) \right) \\ v(x_0, y_0) &= \dots\end{aligned}$$

Από θεώρημα του Gauss/Μέσης Τιμής:

$$\begin{aligned}\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta} \\ u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta \\ v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta\end{aligned}$$

, δηλαδή σε κάθε σημείο η τιμή είναι ο μέσος όρος των γειτόνων.

Αυτά που μπαίνουν στις εξετάσεις είναι: Να βρεθεί η συζυγής αρμονική, και να λυθεί η εξίσωση Laplace, κάτι που θα μάθουμε τις επόμενες Παρασκευές.

## 4.1 Αρμονικές στην εξίσωση Laplace

**Παρ.** Δίνεται το χωρίο  $D = \{z : a < \operatorname{Re}(z) < b\}$   
 $\forall (x, y) \in D : u_{xx} + u_{yy} = 0$   
 Να βρεθεί  $u(x, y)$  τ.ώ  $\forall y : u(a, y) = u_1$   
 $\forall y : u(b, y) = u_2$

**Λύση** Λόγω συμμετρίας υποθέτω ότι  $u(x, y) = u(x)$  οπότε  $0 = u_{xx} + u_{yy} = u_{xx} \implies u_x = k \implies u = kx + \lambda$   
 Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες:

$$\left. \begin{aligned}u_1 = u(a) &= ka + \lambda \\ u_2 = u(b) &= kb + \lambda\end{aligned} \right| \implies \boxed{u(x, y) = \frac{u_1 - u_2}{a - b}x + \frac{?}{u_1}}$$

$$\begin{aligned}u &= kx + \lambda \\ v &= 0 \\ u_y = -v_x &\implies 0 = -v_x \implies v = c(y) \\ \implies v_y = \frac{dc}{dy} = u_x &= k \implies v(y) = ky + c' \\ \implies f(x, y) = u + iv &= kx + \lambda + i(ky + c') \\ \implies f(z) &= kz + c''\end{aligned}$$

**Παρ.**

$$\hat{u}(\rho, \theta) = u(\theta)$$

$$D = \{(\rho, \theta) : \theta_1 < \theta < \theta_2\}$$

$$D = \{z : \theta_1 < \text{Arg}(z) < \theta_2\}$$

$$u(z) = u_1 \text{ όταν } \text{Arg}(z) = \theta_1$$

$$u(z) = u_2 \text{ όταν } \text{Arg}(z) = \theta_2$$

Παρατηρώ ότι  $\text{Arg}(z) = \text{Im}(\text{Log}(z))$

Άρα με  $f(z) = \text{Log}(z)$ , η  $\text{Arg}(z)$  είναι αρμονική όπως και η  $u(z) = k \cdot \text{Arg}(z) + \lambda$ , ισοδύναμα

$$u(x, y) = k \cdot \arctan(y, x) + \lambda$$

Σημείωση:  $\arctan(y, x) = \text{Arg}(x + iy)$

$$u(x, y) = \frac{u_1 - u_2}{\theta_1 - \theta_2} \arctan(y, x) + \lambda$$

**Παρ.**  $u(x, y) = g(r)$

Παρατηρώ ότι  $f(z) = \underbrace{\text{Log}(z)}_{\text{αναλυτική}} = \underbrace{\ln r}_{\text{αρμονική}} + i \text{Arg}(z)$

Άρα υποθέτω λύση της μορφής:

$$u(x, y) = k \ln r + \lambda \implies \dots$$

$$u(x, y) = \frac{u_1 - u_2}{R_1 - R_2} \ln(r) + c$$

**Παρ.**

$$u(x, y) = \frac{u_2 - u_1}{\theta_2 - \theta_1} \arctan(y, x) + u_1 = \boxed{\frac{1}{\pi} \arctan(y, x) = u(x, y)}$$

$$x < 0 : u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \arctan(0, x) = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$x > 0 : u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \arctan(0, x) = \frac{0}{\pi} = 0$$

**Παρ.**  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctan(y, x - x_0)$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & x < x_1 \\ u_1 & x_1 < x < x_2 \\ u_2 & x_2 < x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & x_N < x \end{cases}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N (u_n - u_{n-1}) \arctan(y, x_n - x) + u_0$$