Σημειώσεις Λογισμού ΙΙ

Καναβούρας Κωνσταντίνος
http://users.auth.gr/konkanant

2016, Εαρινό εξάμηνο

Περιεχόμενα

Μέρος I
Ατρέας

- 2 ώρες Ζάχαρης (3.5 μον.)
- 4 ώρες εγώ (6.5 μον.)
  http://users.auth.gr/natreas

- Ρασσιάς Θ.
- Κωνσταντινίδου Μ.
- Ξένος
- Σημειώσεις

Διανυσματικές συναρτήσεις
Καμπύλες στο χώρο

Ορ. Μία συνάρτηση $\mathbf{r} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ απαρτίζεται από:
(α). το πεδίο ορισμού της A που είναι υποσύνολο της πραγματικής ευθείας και
(β). έναν τύπο έτσι ώστε σε κάθε πραγματικό αριθμό $t \in A$ αντιστοιχεί **ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ** $\mathbf{r}(t)$ στο (διανυσματικό) χώρο $\mathbb{R}^n$ δηλαδή:

$$A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : \mathbf{r}(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$$

όπου $f_1 : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **συνήθεις** πραγματικές συναρτήσεις.

Πεδίο ορισμού διανυσματικής συνάρτησης είναι εκείνο το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για όλα τα σημεία του οποίου ο τύπος της συνάρτησης **ΕΧΕΙ ΝΟΗΜΑ**.
Πρακτικά, αν

$$\mathbf{r}(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)\,,$$

τότε το πεδίο ορισμού της $\mathbf{r}$ προκύπτει από τη **συναλήθευση** των πεδίων ορισμού ΟΛΩΝ των συναρτήσεων $f_1, \dots, f_n$.
π.χ.

$$\mathbf{r}(t) = \left(\ln t, \sqrt{1-t^2}\right) \quad \leftarrow \text{διανυσματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής}$$

Πρέπει

$$\begin{cases} t > 0 \text{ (λόγω λογαρίθμου)} \\ \quad \text{και} \\ 1 - t^2 > 0 \text{ (λόγω ρίζας)} \end{cases}$$

Άρα Π.Ο. της $\mathbf{r}$ είναι το $(0, 1]$.

Όριο και συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων

Θ. Έστω $\mathbf{r} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r}(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$ διανυσματική συνάρτηση και t_0 είναι σημείο συσσώρευσης (σ.σ.) του A. Τότε:

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \iff \begin{cases} \lim_{t\to t_0} f_1(t) = a_1 \\ \quad\vdots \\ \lim_{t\to t_0} f_n(t) = a_n \end{cases}$$

Επίσης, αν $_0 \in A$ είναι και σ.σ. του , τότε:

$$\mathbf{r} \text{ συνεχής στο }_0 \iff f_1, f_2, \ldots, f_n \text{ συνεχείς στο }_0$$

δηλ.

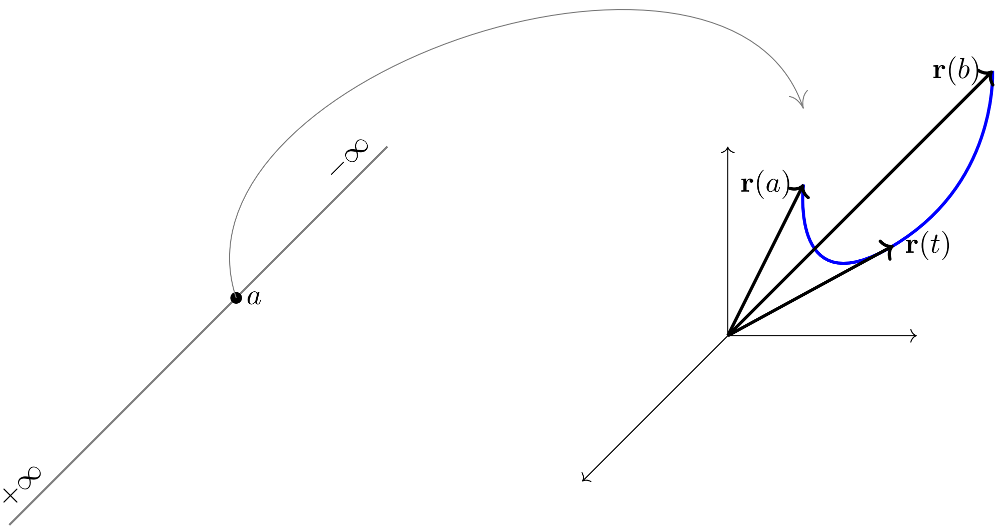
$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) \iff \begin{cases} \lim_{t\to t_0} f_1(t) = f_1(t_0) \\ \vdots \\ \lim_{t\to t_0} f_n(t) = f_n(t_0) \end{cases}$$

Καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$

Ορ. Έστω , $\in \mathbb{R}$ με $<$. Κάθε **ΣΥΝΕΧΗΣ** διανυσματική συνάρτηση:

$$\gamma : \boxed{[a, b]} \to \mathbb{R}^n : \mathbf{r}_\gamma(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\big)$$

καλείται καμπύλη στο χώρο $\mathbb{R}^n$ (και το γράφημά της καλείται ΙΧΝΟΣ της γ).



Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ καμπύλη.

- Η γ θα καλείται **ΑΠΛΗ** αν είναι 1-1, δηλ. $\forall t \in (a, b)$ με $t_1 \neq t_2 \implies \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ (δηλ. ΔΕΝ αυτοτέμνεται).
- Η γ καλείται **ΑΝΟΙΚΤΗ**, αν
$$\mathbf{r}(a) \neq \mathbf{r}(b),$$
αλλιώς **ΚΛΕΙΣΤΗ**.
- Όλες οι καμπύλες $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$
$$\mathbf{r}_\gamma(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\big)$$
λέμε ότι είναι καμπύλες σε **ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ** μορφή και οι $\begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \vdots \\ x_n = f_n(t) \end{cases}$ καλούνται παραμετρικές εξισώσεις της γ.
- Δύο καμπύλες μπορεί να έχουν το **ΙΔΙΟ ΙΧΝΟΣ**.

π.χ.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\gamma_1}(t) &= (\cos t, \quad \sin t) \quad t\in[0,2\pi)\\ \mathbf{r}_{\gamma_2}(t) &= (\cos t, -\sin t) \quad t\in[0,2\pi)\end{aligned}$$

Δηλαδή το ίχνος είναι το ίδιο ΑΛΛΑ αλλάζει η ΦΟΡΑ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ ή ο προσανατολισμός.

Έτσι, σε κάθε καμπύλη γ σε παραμετρική μορφή αντιστοιχεί με φυσικό τρόπο ένας **ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ** (ή ΦΟΡΑ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ), πάντα προς την κατεύθυνση αύξησης των γ.

- Έστω $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^n$ καμπύλες.

  Καλώ **ΑΝΤΙΘΕΤΗ** της γ_1, συμβολικά $-\gamma_1$, την καμπύλη που έχει ίδιο ΙΧΝΟΣ με τη γ_1 αλλά **αντίθετη** φορά διαγραφής.

$$-\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n : \mathbf{r}_{-\gamma_1}(t) - \mathbf{r}_{\gamma_1}(a+b-t)$$

- Αν $\mathbf{r}_{\gamma_1}(b) = r_{\gamma_2}(b)$, ορίζω την καμπύλη $\gamma_1+\gamma_2$ ως εξής:

$$\gamma_1+\gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{R}^n : \mathbf{r}_{\gamma_1+\gamma_2}(t) = \begin{cases}\mathbf{r}_{\gamma_1}, & t\in[a,b]\\ \mathbf{r}_{\gamma_2}, & t\in(b,c]\end{cases}$$

- Έστω $\phi : [c,d] \to [a,b]$ **συνεχής** και γνησίως **μονότονη** συνάρτηση. Τότε η **σύνθεση**:

$$\gamma_1\circ\phi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$$

  είναι καμπύλη που καλείται **ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ** της γ_1 και έχει το **ΙΔΙΟ ΙΧΝΟΣ** με τη γ_1.

- Αν ϕ γν. αύξουσα, τότε η σύνθεση έχει και ίδιο προσανατολισμό, αλλιώς αντίθετο προσανατολισμό σε σχέση με τη γ_1.

Παραδείγματα καμπύλων σε παραμετρική μορφή

- Έστω $A, B \in \mathbb{R}^n$, το $\overrightarrow{AB}$ παραμετροποιείται ως:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (\text{αρχή}) + (\text{πέρας} - \text{αρχή}), \quad \boxed{t\in[0,1]}\\ &= (a_1,\dots,a_n) + t\left((b_1,\dots,b_n)-(a_1,\dots,a_n)\right)\\ &= \left(a_1+t(b_1-a_1),\dots,a_n+t(b_n-a_n)\right), \quad \boxed{t\in[0,1]}\end{aligned}$$

  επειδή για κάθε σημείο $X\in\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

- Κύκλος $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$ στο χώρο $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{r}(t) = \left(f_1(t), f_2(t)\right), \quad t\in[a,b] \quad \leftarrow \text{ παραμετροποίηση γενικά}$$

  Ειδικότερα

$$\mathbf{r}(t) = (a+R\cos t, b+R\sin t), \quad t\in[0,2\pi)$$

  με θετική φορά διαγραφής (αντιωρολογιακή).

  Ή:

$$\mathbf{r}(t) = (a+R\cos t, b-R\sin t), \quad t\in[0,2\pi)$$

  με αρνητική φορά διαγραφής.

- Συνάρτηση $y = f(x)$ πραγματική όπου $x \in [a, b]$

$$\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big), \quad t \in [a, b] \quad \leftarrow \text{ παραμετροποίηση γενικά}$$

Ειδικότερα

$$\mathbf{r}(t) = \big(t, f(t)\big) \quad t \in [a, b)$$

- Έλλειψη $\left(\frac{x-a}{A}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{B}\right)^2 = 1 \quad (\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} \frac{x-a}{A} & = \cos t \\ \frac{y-b}{B} & = \sin t \end{cases}, \text{ τότε } \begin{cases} \frac{x}{A} = a + A\cos t \\ \frac{y}{B} = b + B\sin t \end{cases}$$

Έτσι $\mathbf{r}(t) = (x, y) = (a + A\cos t, b + B\sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$

- Υπερβολή $\left(\frac{x-a}{A}\right)^2 - \left(\frac{y-b}{B}\right)^2 = 1 \quad (\mathbb{R}^2)$

$$\mathbf{r}(t) = (a + A\cosh t, b + B\sinh t), \quad t \in [0, 2\pi)$$

Παράγωγος διανυσματικών συναρτήσεων μίας μεταβλητής

Ορ. Έστω $\mathbf{r} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : \mathbf{r}(t) = \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big), \quad t_0 \in A$ είναι σ.σ. του . Θα λέμε ότι η $\mathbf{r}$ παραγωγίσιμη στο t_0 αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)}{h}$$

το οποίο είναι **ΔΙΑΝΥΣΜΑ** που συμβολίζουμε με $\mathbf{r}'(t_0)$ ή $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$.

- Αν η $\mathbf{r}$ παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του , λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο .

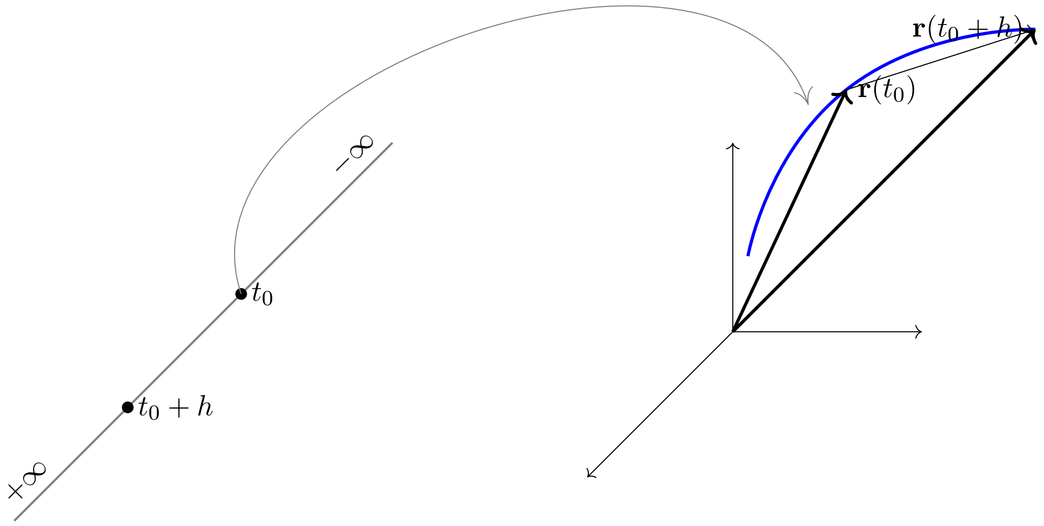
Θεώρημα

$\mathbf{r}$ παραγωγίσιμη στο $A \iff f_1, \ldots, f_n$ παραγ. στο A και

$$\mathbf{r}'(t) = \big(f_1'(t), \ldots, f_n'(t)\big)$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Έστω $h > 0$



Το $\mathbf{r}'(t)$ έχει τη διεύθυνση της εφαπτόμενης ευθείας της $\mathbf{r}$ στο σημείο $\mathbf{r}(_0)$ και φορά τη φορά της κίνησης. Μπορεί να αναπαριστά π.χ. την ταχύτητα ενός υλικού σημείου.

Εξίσωση (Διανυσματική) εφαπτόμενης ευθείας καμπύλης $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$ παραγωγίσιμης στο σημείο t_0

Αρκεί να ξέρω σημείο της ευθείας και διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία

Προσοχή!!!

$$\mathbf{r}_{\text{εφ}}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \lambda \cdot \mathbf{r}'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ιδιότητες παραγώγου

Έστω $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ παραγωγ. καμπύλες, τότε:

- $\big(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2\big)'(t) = \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2'(t)$
- $\big(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\big)'(t) = \mathbf{r}_1' \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2'(t)$
- $$\begin{aligned}[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]'(t) = &[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3] + \\ &[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2', \mathbf{r}_3] + \\ &[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3']\end{aligned}$$

Πρόταση

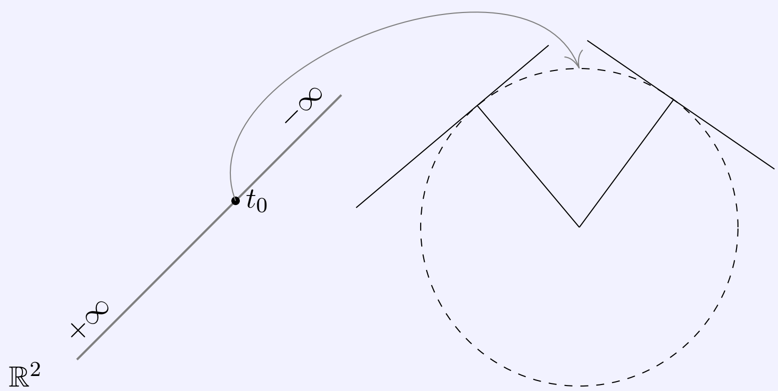
Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n : \mathbf{r}_\gamma(t) = \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big)$ είναι μια παραγωγίσιμη καμπύλη στο $[a,b]$. *Τότε*:

$$\big|\mathbf{r}_\gamma(t)\big| = c = \text{σταθερά } \forall t \iff \mathbf{r}_\gamma(t) \perp \mathbf{r}'_\gamma(t) \ \forall t$$

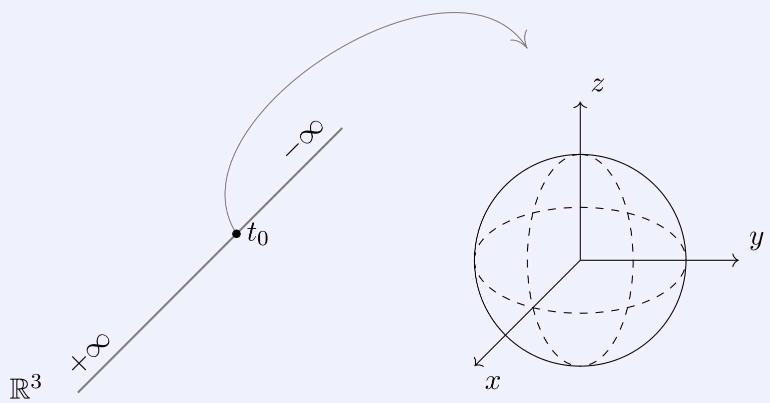
Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_\gamma(t)| = c &\iff \\
|\mathbf{r}_\gamma(t)|^2 = c^2 &\iff \\
\mathbf{r}_\gamma(t) \cdot \mathbf{r}_\gamma(t) = c^2 &\iff \\
(\mathbf{r}_\gamma \cdot \mathbf{r}_\gamma)'(t) = 0 &\iff \\
\mathbf{r}'_\gamma \cdot \mathbf{r}_\gamma + \mathbf{r}_\gamma \cdot \mathbf{r}'_\gamma = 0 &\iff \\
\mathbf{r}'_\gamma \cdot \mathbf{r}_\gamma = 0 &\iff \\
&\mathbf{r}_\gamma \perp \mathbf{r}'_\gamma
\end{aligned}$$

□



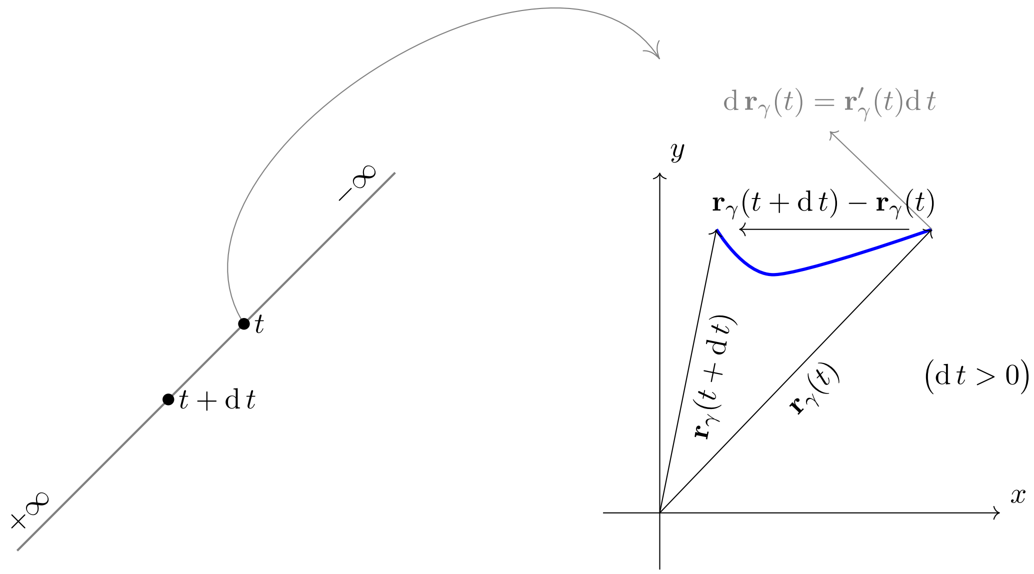
$\big|\mathbf{r}_\gamma(t)\big| = c \ \forall t$ σημαίνει κύκλος



$\big|\mathbf{r}_\gamma(t)\big| = c \ \forall t$ σημαίνει καμπύλη πάνω στη σφαίρα κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας c

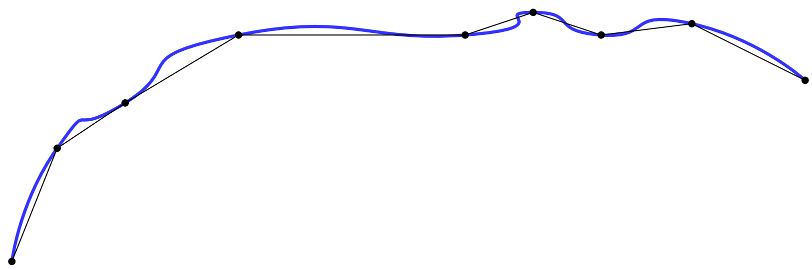
Διαφορικό καμπύλης

Ορίζω $\mathrm{d}\mathbf{r}_\gamma(t) = \mathbf{r}'_\gamma(t)\,\mathrm{d}t$, **διάνυσμα** πάνω στην εφαπτόμενη καμπύλη στο σημείο t και φορά που καθορίζεται από το πρόσημο του $\mathrm{d}t$.



Για $\mathrm{d}t \to 0$, δηλ. κοντά στο t ισχύει:

$$\mathbf{r}_\gamma(t+dt) - \mathbf{r}_\gamma(t) \approx d\mathbf{r}_\gamma(t)$$



Ορ. Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ καμπύλη σε παραμετρική μορφή.

1. Η γ καλείται **ΟΜΑΛΗ** αν είναι παραγωγίσιμη και $\mathbf{r}'_\gamma \neq \mathbf{0}\ \forall t$
2. Η γ καλείται **ΛΕΙΑ** αν είναι ΟΜΑΛΗ και η $\mathbf{r}_\gamma$ είναι **ΣΥΝΕΧΗΣ** συνάρτηση στο $[a,b]$. Αν η $\mathbf{r}'_\gamma$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a,b]$, τότε η $\mathbf{r}_\gamma$ καλείται τμηματικά λεία.

Ορ. Έστω $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n : \mathbf{r}_\gamma(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$ είναι μια καμπύλη. Ορίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα της $\mathbf{r}_\gamma$ ως εξής:

$$\underbrace{\int_a^b \mathbf{r}_\gamma(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{διάνυσμα στον } \mathbb{R}^n} = \left(\int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Επίσης, υπάρχει παραγωγίσιμη καμπύλη $\mathbf{q} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{r}_\gamma(t) \quad \forall t$$

Η $\mathbf{q}$ καλείται αντιπαράγωγος της γ. Το σύνολο $\big\{\mathbf{q}(t) + \bar{\mathbf{c}} : \mathbf{q}$ μια αντιπαράγωγος της $\mathbf{r}_\gamma$ και $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ σταθερά$\big\}$ καλείται ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ της $\mathbf{r}_\gamma$, συμβολικά $\int \mathbf{r}_\gamma(t)\,\mathrm{d}t$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{r}_\gamma(t)\,\mathrm{d}t &= \left(\int f_1(t)\,\mathrm{d}t, \int f_2(t)\,\mathrm{d}t, \dots, \int f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \left(q_1(t) + \overbrace{c_1}^{c_1\in\mathbb{R}\text{ αυθαίρετη σταθερά}}, q_2(t) + \overbrace{c_2}^{c_2\in\mathbb{R}\text{ αυθαίρετη σταθερά}}, \dots, q_n(t) + \overbrace{c_n}^{c_n\in\mathbb{R}}\right)\\
&= \big(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)\big) + (c_1, \dots, c_n) = \mathbf{q}(t) + \underbrace{\mathbf{c}}_{\text{αυθαίρετο διάνυσμα}} \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Συμπέρασμα

Η καμπυλότητα και η στρέψη είναι εκτός ύλης

Ασκήσεις

Άσκ. 1 Αν $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n : \mathbf{r}^n(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$ είναι ΟΜΑΛΗ καμπύλη, ΝΔΟ:

$$\mathbf{r}_\gamma(t) \cdot \mathbf{r}'_\gamma(t) = |\mathbf{r}_\gamma(t)| \cdot \big(|\mathbf{r}_\gamma(t)|\big)'$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_\gamma(t) \cdot \mathbf{r}'_\gamma(t) &= \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big) \cdot \big(f'_1(t), \dots, f'_n(t)\big)\\
&= f_1(t)f'_1(t) + f_2(t)f'2(t) + \dots + f_n(t)f'_n(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_\gamma(t)| \cdot \big(|\mathbf{r}_\gamma(t)|\big)' &= \sqrt{f_1^2(t) + \dots + f_n^2(t)} + \left(\sqrt{f_1^2(t) + \dots + f_n^2(t)}\right)'\\
&= \sqrt{f_1^2(t) + \dots + f_n^2(t)} + \frac{1}{2}\frac{2f_1(t)f'1(t) + \dots + 2f_n(t) = f'_n(t)}{\sqrt{f_1^2(t) + \dots + f_n^2(t)}}\\
&= f_1(t)f'_1(t) + f_2(t)f'2(t) + \dots + f_n(t)f'_n(t)
\end{aligned}$$

□

Άσκ. 2 Αν $\mathbf{r}_\gamma(t) = t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (t^2 - 3)\boldsymbol{\kappa}$, υπολογίστε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της καμπύλης στο σημείο $(2,2,1)$.

Απάντηση.

$$\begin{cases} \mathbf{i} & = (1,0,0)\\ \mathbf{j} & = (0,1,0)\\ \boldsymbol{\kappa} & = (0,0,1) \end{cases}$$

$$\mathbf{r}_\gamma(t) = \left(t, 2, t^2 - 3\right)$$

$$\mathbf{r}_{\text{εφ}}(t) = (\text{σημείο ευθείας γνωστό}) + t\,(\text{διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία})\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

- Γνωστό σημείο το $M = (2,2,1)$. Έτσι $(2,2,1) = (t, 2, t^2 - 3) \implies \begin{cases} t & = 2\\ 2 & = 2\\ t^2 - 3 & = 1 \end{cases} \implies t = 2$

- Διάνυσμα γνωστό παράλληλο στην εφαπτομένη στο $(2,2,1)$ είναι το $\mathbf{r}'_\gamma(2)$.

$$\mathbf{r}'_\gamma(t) = (1,0,2t)$$
$$\mathbf{r}'_\gamma(2) = (1,0,4)$$

και τελικά:

$$\boxed{\mathbf{r}_{\text{εφ}}(t) = (2,2,1) + t(1,0,4), \quad t \in \mathbb{R}}$$

διανυσματική εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας

□

Άσκ. 3 [Απάντηση] Αν $\mathbf{v}(t) = \big(2\cos t, -t\sin(t^2), 2t\big)$ είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου, βρείτε την εξίσωση κίνησης $\mathbf{r}_\gamma$, αν $\mathbf{r}_\gamma(0) = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'_\gamma(t) \implies \int \mathbf{r}'_\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t \implies \mathbf{r}_\gamma(t) = \int \mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t = \big(\int 2\cos t\,\mathrm{d}t, \int -t\sin(t^2)\,\mathrm{d}t, \int 2t\,\mathrm{d}t\big) = \Big(2\sin t + c_1, \frac{\cos(t^2)}{2} + c_2, t^2 + c_3\Big)$, όπου $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές (ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ μεταξύ τους).

$$(1,0,3) \overset{\text{υποθ.}}{=} \mathbf{r}_\gamma(0) = \left(c_1, \frac{1}{2} + c_2, c_3\right) \implies \begin{cases} c_1 &= 1 \\ c_2 + \frac{1}{2} &= 0 \\ c_3 &= 3 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -\frac{1}{2} = 0 \\ c_3 &= 3 \end{cases}$$

Τελικά:

$$\mathbf{r}_\gamma(t) = \left(2\sin t + 1, \frac{\cos(t^2) - 1}{2}, t^2 + 3\right)$$

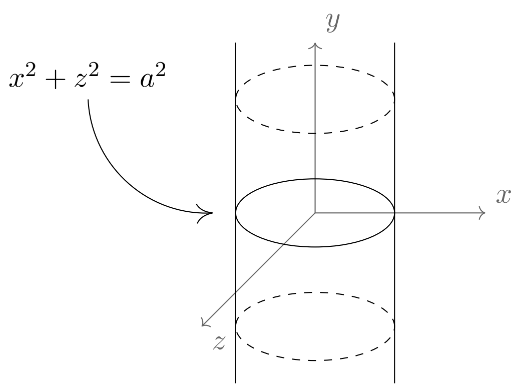
□

Άσκ. 4 Να παραμετροποιηθούν οι καμπύλες:

1. $\left\{\underbrace{x^2 + z^2 = a^2}_{\text{άπειρος κύλινδρος}}, \underbrace{2x + 3y + 7 = 1}_{\text{επίπεδο}}\right\}$
2. $\left\{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = a^2}_{\text{σφαίρα}}, \underbrace{2x + 3y + z = 1}_{\text{επίπεδο}}\right\}$

Απάντηση. 1. Η καμπύλη προκύπτει ως τομή "άπειρου" κυλίνδρου $x^2+z^2 = a^2$ και επιπέδου $2x+3y+z = 1$.

Ενδεικτικό σχήμα Έστω π.χ. ότι αυτή η καμπύλη είναι η τομή κυλίνδρου και επιπέδου.



Παραμετροποίηση καμπύλης

Γενικά:
$$\mathbf{r}_\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)\,, \quad t \in [a,b]$$

$$\underbrace{\mathbf{r}_{\text{προβολής}}(t)}_{\text{πάντοτε είναι ο κύκλος } \{x^2+z^2=a^2, y=0\}} = \big(x(t), 0, z(t)\big)$$

Αλλά ο κύκλος $\{x^2+z^2=a^2, y=0\}$ μπορεί να παραμετροποιηθεί ως εξής:
$$\mathbf{r}_{\text{προβολής}}(t) = (a\cos t, 0, a\sin t)\,, \quad t \in [0, 2\pi)$$

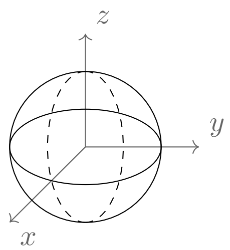
Έτσι
$$\mathbf{r}_\gamma(t) = \big(a\cos t, y(t), a\sin t\big)\,, t \in [0, 2\pi)$$

όπου $2x+3y+z=1 \implies y = \frac{1-z-2x}{3} = \frac{1-a\sin t-2a\cos t}{3}$.

Τελικά:
$$\mathbf{r}_\gamma(t) = \left(a\cos t, \frac{1-a\sin t-2a\cos t}{3}, a\sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi)$$

2.
Έχουμε **ΤΟΜΗ** σφαίρας και επιπέδου που είναι **ΠΑΝΤΑ κύκλος**.

Ενδεικτικό σχήμα



Θέτω $z=t$, οπότε $x^2+y^2=a^2-t^2$, $y=2x$, $x^2=\frac{a^2-t^2}{5}$ και προχωρώ λύνοντας 2×2 σύστημα

ή

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= a^2 \\ y &= 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+(2x)^2+z^2 &= a^2 \\ y &= 2x \end{cases} \iff \begin{cases} 5x^2+z^2 &= a^2 \\ y &= 2x \end{cases}$$

Οι παραστάσεις είναι ισοδύναμες, δηλαδή η καμπύλη εκφράζεται ως τομή κυλίνδρου και επιπέδου, και ανάγομαι στο ερώτημα (α). Έτσι:
$$\mathbf{r}_\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)\,, t \in [a,b]$$
$$\underbrace{\mathbf{r}_{\text{προβολής}}(t)}_{\text{είναι πάντα η έλλειψη } \{5x^2+z^2=a^2, y=0\}} = \big(x(t), 0, z(t)\big)$$

Άρα:
$$\mathbf{r}_{\text{προβολής}}(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\cos t, 0, a\sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi)$$

και έτσι
$$\mathbf{r}_\gamma(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\cos t, y(t), a\sin t\right)$$

με $y(t) = 2x(t) = \frac{2a}{\sqrt{5}}\cos t$

Τελικά:
$$\mathbf{r}_\gamma(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\cos t, \frac{2a}{\sqrt{5}}\cos t, a\sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi)$$

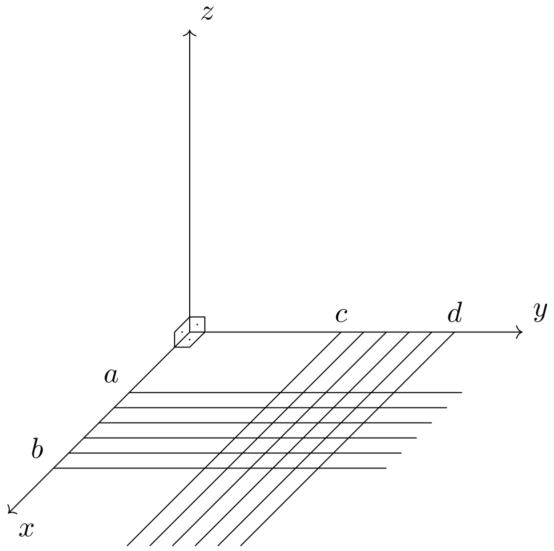
□

Διπλά Ολοκληρώματα

> Όποιος δεν κατάλαβε τα διπλά ολοκληρώματα, ας μην πάει παρακάτω.

Έστω $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \; z = f(x,y)$ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών ΦΡΑΓΜΕΝΗ επί της **ορθογώνιας περιοχής**:

$$R = \big\{(x,y) : a \leq x \leq b,\; c \leq y \leq d\big\}$$



(1) Διαμερίζω το ορθογώνιο R μέσω διαμέρισης:

$$\Delta = \big(\Delta_x, \Delta_y\big)$$

όπου $\begin{cases} \Delta_x & = \{a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b\} \\ \Delta_y & = \{c = y_1 < y_2 < \cdots < y_N = d\} \end{cases}$ σε στοιχειώδη ορθογώνια $\Omega_{n,\kappa}$ με εβαδόν:

$${}_{n,\kappa} = (x_{n+1} - x_n)\,(y_{k+1} - y_k)$$

$n = 1, \ldots, N-1,\; k = 1, \ldots, M-1$

(2) Έστω $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n}) \in \Omega_{n,\kappa}$ είναι ΤΥΧΑΙΟ σημείο του $\Omega_{n,\kappa}$. Ορίζω τις τιμές $f(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n})$.

(3) Ορίζω το **άθροισμα**:

$$S_{N,M,f} := \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{M-1} \underbrace{f(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n}) \cdot E_{n_k}}_{\text{παριστάνει τον "όγκο"}}$$

(4) Έστω $|\Delta| = \max \left\{ \delta_{n,\kappa} : \begin{cases} n = 1, \ldots, N_1 \\ k = 1, \ldots, M-1 \end{cases} \right\}$ (όπου $\delta_{n,k} = \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}$ είναι το μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου $\Omega_{n,k}$) είναι το ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΛΑΤΟΣ της διαμέρισης Δ. Αν

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S_{\Delta,f} = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{M-1} f(\tilde{x_n}, \tilde{y_n}) \cdot E_{n_k} = \lambda \in \mathbb{R}$$

ανεξάρτητα της επιλογής της διαμέρισης Δ και ανεξάρτητα της επιλογής των σημείων $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n}) \in \Omega_{n,\kappa}$.

Τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στην ορθογώνια περιοχή R και γράφουμε:

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lambda \in \mathbb{R}$$

Προσεγγιστικά,

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \sum\sum f(x_n,y_k)\,(x_{n+1}-x_n)\,(y_{n+1}-y_n)$$

Γενίκευση ορισμού σε μη ορθογώνια χωρία

Έστω $f : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ΦΡΑΓΜΕΝΗ συνάρτηση πάνω σε **ΦΡΑΓΜΕΝΟ χωρίο** T με το **σύνορο αυτού** ∂T να είναι σύνολο ΑΜΕΛΕΗΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ.

Έστω $T \subset R$, όπου R είναι οποιοδήποτε **ορθογώνιο χωρίο** που καλύπτει το T.

Ορίζω την επέκταση της f στο ορθογώνιο χωρίο R ως εξής:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in T \\ 0, & (x,y) \in R - T \end{cases}$$

Αν η $g : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη επί του **ορθογωνίου** R, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη επί του T και:

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Θεώρημα 1

Έστω $f : T \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\textbf{συνεχής}}$ συνάρτηση επί ΦΡΑΓΜΕΝΟΥ χωρίου T (το σύνορο ∂T του οποίου είναι σύνορο αμελητέου εμβαδού) **ΕΚΤΟΣ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΣ από ένα σύνολο σημείων αμελητέου εμβαδού**. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη επί του T.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Σύνολα αμελητέου εμβαδού:

(1) Το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων

(2) Τμηματικά λείες καμπύλες πεπερασμένου μήκος (ή το πολύ αριθμήσιμη ένωση τέτοιων)

Αριθμήσιμο σύνολο A

Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία του συνόλου φυσικών $\mathbb{N}$ με το A.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$$

π.χ

- Το $[a,b] \subset \mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο
- Το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο
- Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο

π.χ. Έστω $T = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (μοναδιαίος κυκλικός δίσκος)

- $f : T \to \mathbb{R} : f(x,y) = x^2 + x^2 y$
  συνεχής στο T, άρα ολοκληρώσιμη
- $f : T \to \mathbb{R} : f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 3, & T - \{(x,x) : |x| \leq 1\} \end{cases}$
  ολοκληρώσιμη διότι είναι συνεχής στο δίσκο T εκτός από ένα σύνολο σημείων αμελητέου εμβαδού (το σύνολο $\{(x,x) : |x| < 1\}$)

- $f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) : x, y \text{ ρητός} \\ 0 & (x,y) : x, y \text{ άρρητος} \end{cases}, \ (x,y) \in [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$

  δεν είναι ολοκληρώσιμη

Ιδιότητες

Ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες του ολοκληρώματος.
Έστω $f, g : T \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε φραγμένο χωρίο T (με σύνορο αμελητέου εμβαδού). Τότε:

(1) $af \pm bg$ ολοκλ. επί του T και

$$\iint_T \big(af \pm bg\big)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a \iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \pm b \iint_T g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(2) $f \cdot g,\ \frac{f}{g}(g \neq 0),\ |f|$ ολοκλ. επί του T και

$$\left| \iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right| \leq \iint_T \big|f(x,y)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(3) Αν $f(x,y) \leq g(x,y)\ \forall (x,y)$, τότε:

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_T g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(4) Αν T χωρίο αμελητέου εμβαδού, τότε:

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

(5) Αν $T = T_1 \cup T_2$ και $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ (ή σύνολο αμελητέου εμβαδού), τότε:

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{T_1} f(x,y) + \iint_{T_2} f(x,y)$$

(6) Αν $m \leq f(x,y) \leq M$, τότε:

$$mE(T) \leq \iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq ME(T)$$

όπου $E(T) =$ εμβαδόν χωρίου T

(7) **Θεώρημα μέσης τιμής:** Αν $m \leq f(x,y) \leq M$ και $g(x,y) \geq 0\ \forall (x,y) \in T$, τότε υπάρχει $\mu \in [m, M]$:

$$\iint_T f(x,y) g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mu \iint_T g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Αν επιπλέον f **συνεχής** επί του T και το T **συνεκτικό**, υπάρχει $(x_0, y_0) \in T$:

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(x_0, y_0) \iint_T g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Υπολογισμός (πρακτικός) Διπλών Ολοκληρωμάτων

Σε Ορθογώνια Χωρία

Θεώρημα 2 (Fubini)

Έστω $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής επί ορθογωνίου χωρίου $R = \{(x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Τότε και οι συναρτήσεις $g(x) = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ και $h(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ είναι συνεχείς επί των $[a, b]$ και $[c, d]$ αντίστοιχα, και:

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y$$

Με άλλα λόγια:

$$\boxed{\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y} \qquad (1)$$

Σημείωση

(1) Ξεκινάω να ολοκληρώνω ως προς όποια μεταβλητή θέλω, ΠΑΝΤΑ ΑΠΟ ΜΕΣΑ ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΞΩ. Κάθε φορά ολοκληρώνω ως προς μία μεταβλητή, ΚΡΑΤΩΝΤΑΣ τις υπόλοιπες ΣΤΑΘΕΡΕΣ.

π.χ. Ποιο το διπλό ολοκήρωμα της:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

επί του χωρίου $T = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 3\}$?

$$I = \underbrace{\int_2^3 \int_0^1}_{\text{εξειδίκευση ορίων}} (x^2 + y^2) \underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{τυχαία επιλογή}} = \int_2^3 \frac{x^3}{3} + y^2 x \Big|_0^1 \mathrm{d}y = \int_2^3 \left(\frac{1}{3} + y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3}\Big|_2^3 = \ldots$$

Σε μη ορθογώνια χωρία

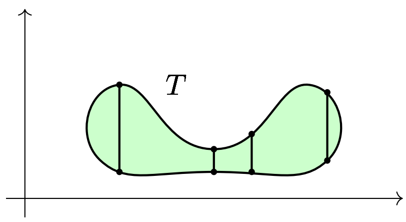
Έστω $T \subset \mathbb{R}^2$ ΦΡΑΓΜΕΝΟ χωρίο (με σύνορο αμελητέου εμβαδού). Τότε,

(α□) Το T καλείται **κανονικό ως προς y**, αν T είναι **συνεκτικό** και $\boxed{\text{κάθε}}$ ευθεία $\parallel$ **y′y ΕΝΤΟΣ του T** τέμνει το σύνορο του T **ακριβώς σε ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ**.

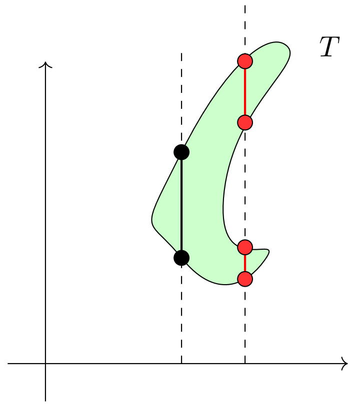
(β□) Το T καλείται **κανονικό ως προς x**, αν T είναι **συνεκτικό** και $\boxed{\text{κάθε}}$ ευθεία $\parallel$ **x′x ΕΝΤΟΣ του T** τέμνει το σύνορο του T **ακριβώς σε ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ**.

(γ□) Το T καλείται κανονικό αν είναι κανονικό ως προς x □ ως προς y.

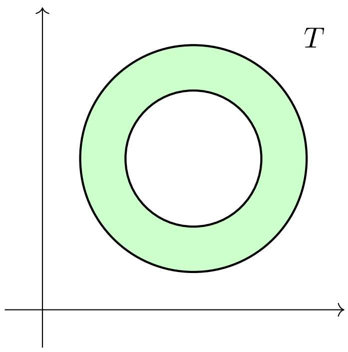
- Ένα χωρίο:
  - μπορεί να ΜΗΝ είναι ΚΑΝΟΝΙΚΟ
  - μπορεί να είναι κανονικό ως προς y αλλά όχι ως προς x, και αντιστρόφως.
- Αν T μη κανονικό, το σπάω σε ΕΝΩΣΗ κανονικών (ως προς x ή y) χωρίων.



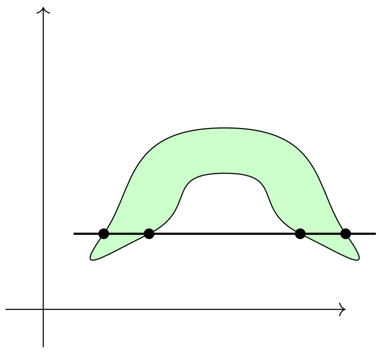
(α□) Κανονικό ως προς y



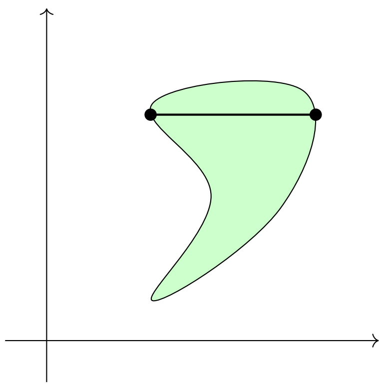
(β□) Μη κανονικό ως προς y



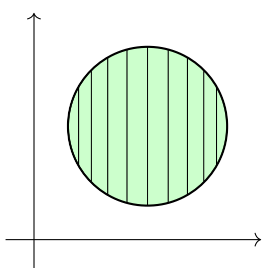
(γ□) Μη κανονικό



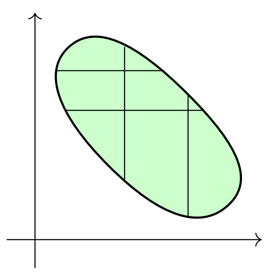
(δ□) Μη κανονικό ως προς x
Κανονικό ως προς y



(ε□) Κανονικό ως προς x
Μη κανονικό ως προς y



(□□) Κανονικό



(ζ□) Κανονικό

Θεώρημα 3 (Fubini)

Έστω $f : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής επί φραγμένου χωρίου T (με σύνορο αμελητέου εμβαδού).

1. Αν T είναι κανονικό ως προς y χωρίο της μορφής:

$$T = \{(x, y) : \ a \le x \le b, \ g(x) \le y \le h(x)\}$$

όπου $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, τότε:

$$\iint_T f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

2. Αν T είναι κανονικό ως προς x χωρίο της μορφής:

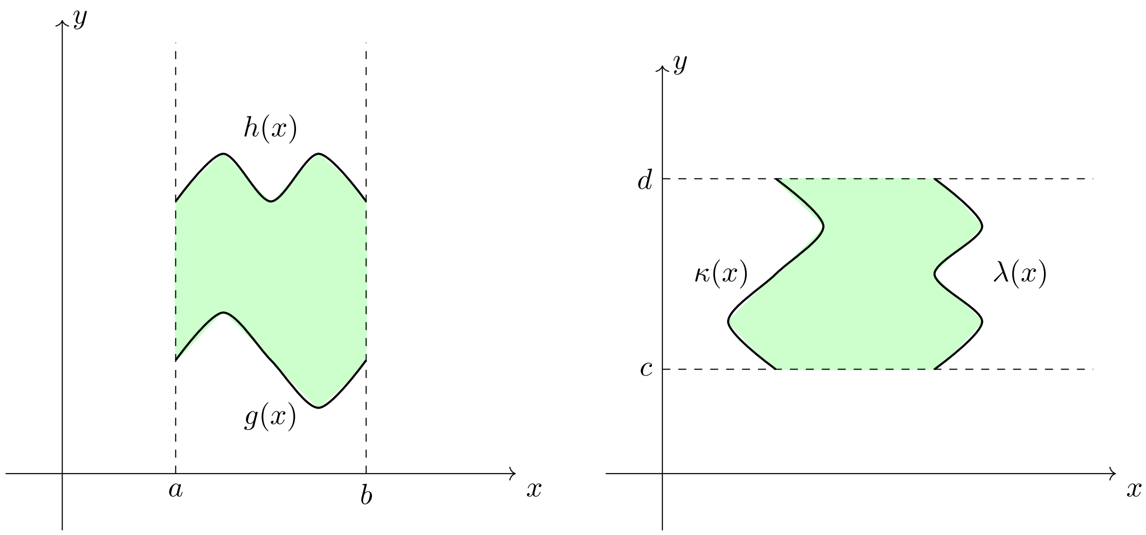
$$T = \{(x, y) : \ c \le y \le d, \ \kappa(x) \le x \le \lambda(x)\}$$

όπου $\kappa, \lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, τότε:

$$\iint_T f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\kappa(x)}^{\lambda(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

3. Αν T κανονικό, τότε:

$$\iint_T f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\kappa(x)}^{\lambda(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$



Εφαρμογές διπλού ολοκληρώματος

(1) **ΟΓΚΟΣ**: Έστω $\boxed{f = f(x, y) \ge 0}$ $\forall (x, y) \in T$, όπου $T \in \mathbb{R}^2$ φραγμένο σύνολο με σύνορο αμελητέου εμβαδού. Τότε, αν f ολοκληρώσιμη επί του T, έχουμε:

$$V = \iint_T f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

όπου V είναι ο όγκος του $\boxed{\text{στερεού}}$ μεταξύ της επιφάνειας $z = f(x, y)$ του χωρίου T και της κυλινδρικής επιφάνειας με **οδηγό καμπύλη** την καμπύλη του συνόρου του χωρίου T και οι γενέτειρες $\parallel zz'$.

(2) Έστω $\rho = \rho(x, y)$ είναι συνεχής πυκνότητα μάζας/φορτίου επί φραγμένου χωρίου T με σύνορο αμελητέου εμβαδού.

Τότε $\iint_T \rho(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\phi =$ Συνολική μάζα/φορτίο επί του επιπέδου χωρίου T.

$$\iint_T \rho(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \approx \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{n=1}^{M} \rho(x_k, y_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)(\phi_{k+1} - y_k)$$

(3) Αν $f(x, y) = 1)\ \forall (x, y) \in T$, όπου T φραγμένο χωρίο με σύνορο αμελητέου εμβαδού, τότε:

$$\iint_T 1\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \text{Συνολικό εμβαδό του χωρίου } T$$

Αλλαγή μεταβλητής στα διπλά ολοκληρώματα

Θεώρημα 4

Έστω $\mathbb{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to G \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{F}(u, v) = \big(x(u, v),\ y(u, v)\big)$$

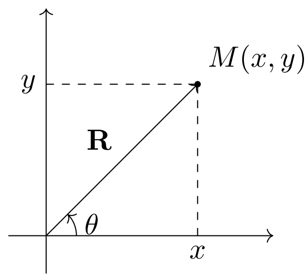
είναι διανυσματικό πεδίο, παραγωγίσιμο και αντιστρέψιμο, δηλαδή:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0\ \forall (u, v) \in D$$

Αν $f : G \to \mathbb{R}\ f = f(x, y)$ συνεχής επί του G, τότε:

$$\iint_G f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_D f\left(x(u, v),\ y(u, v)\right) \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

Εφαρμογή σε πολικές συντεταγμένες



$$(x, y) \leftrightarrow (\rho, \theta)$$
$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\theta$$

Τότε

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\sin\theta \end{vmatrix} = \rho$$

Δηλαδή

$$\iint_G f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta$$

Μη γνήσια ολοκληρώματα εκτός ύλης.

Ασκήσεις

Άσκηση 1 Υπολογίστε το:

$$\iint_T (x^2y + x\cos y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

επί του χωρίου:

$$T = \big\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ -\pi \le y \le \pi\big\}$$

$$\begin{aligned}
I &= \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\int_0^1 (x^2y + x\cos y)\,\mathrm{d}x}^{\text{τα } x \text{ με τα } \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}y}^{\text{τα } y \text{ με τα } \mathrm{d}y} \quad \underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{το επέλεξα τυχαία}} \\
\text{(διαδοχική ολοκλήρωση ΠΑΝΤΑ από μέσα προς τα έξω)} &= \int_{\pi}^{\pi} \frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}\cos y \Big|_0^1 \mathrm{d}y \\
&= \int_{\pi}^{\pi} \left(\frac{y}{3} + \frac{\cos y}{2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{y^2}{6} + \frac{\sin y}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Άσκηση 2 Υπολογίστε το $\iint_T (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ επί του κλειστού και φραγμένου χωρίου μεταξύ των καμπύλων $y = x^2$ και $x = y^2$.

(α) Υποτυπώδες σχήμα

Σημεία τομής

$$\begin{cases} y &= x^2 \\ x &= y^2 \end{cases} \implies \begin{cases} y &= y^4 \\ x &= y^2 \end{cases} \implies \begin{cases} y(1-y^3) &= 0 \\ x &= y^4 \end{cases} \implies \begin{cases} y &= 0 \\ x &= 0 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} y &= 1 \\ x &= 1 \end{cases}$$

(β) Το χωρίο T είναι κανονικό ως προς y. Πράγματι, τυχαία ευθεία $\epsilon \parallel y'y$ **εισέρχεται στο T μέσω της** $\boxed{\textbf{ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ } \mathbf{y = x^2}}$ **και εξέρχεται από το T μέσω της** $\boxed{\textbf{ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ } \mathbf{y = \sqrt{x}}}$.

Τότε το T γράφεται ως:

$$T = \Big\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\Big\}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_T (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,\underbrace{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}_{\text{αναγκαστικά διότι έχω θεωρήσει ότι το χωρίο κανονικό ως προς } y} \\
&= \int_0^1 x^2 y + \frac{y^3}{3}\bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\bigg|_0^1 \\
&= \frac{2}{7} + \frac{2}{15} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21}
\end{aligned}$$

Άσκηση 3 Υπολογίστε τον όγκο του στερεού μεταξύ της επιφάνειας $z = f(x,y) = 1 + xy$, και των επιπέδων $y = 0,\ z = 0,\ x + y = 1,\ y = x \quad (x, y \geq 0)$.

Γνωρίζω ότι

$$V = \iint_{\underbrace{\boxed{T}}_{?}} \underbrace{f(x,y)}_{?}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(A) Υποτυπώδες σχήμα

(B) Προς ολοκλήρωση χωρίο

$$V = \iint_T (1+xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Το χωρίο T είναι κανονικό (δηλ. και ως προς x και ως προς y). Θα εργασθώ Επιλέγοντας το χωρίο T να είναι κανονικό ως προς x.

Τότε έχω:

$$
\begin{aligned}
V &= \overbrace{\int_0^{\frac{1}{2}}}^{\text{προβολή του χωρίου } T \text{ στον άξονα } y'y} \underbrace{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (1+xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{μεταβλητά όρια στο εσωτερικό ολοκλήρωμα}} \\
&\text{κανονικό ως προς } x, \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_y^{1-y} (1+xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x + \frac{x^2}{2} y \Big|_y^{1-y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-y) + \frac{y}{2}(1-y)^2 - y - \frac{y^3}{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - y + \frac{y}{2} - y^2 + \frac{y^3}{2} - y - \frac{y^3}{2}\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{3}{2}y - y^2\right) \mathrm{d}y \\
&= y - \frac{3}{4}y^2 - \frac{y^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{16} - \frac{1}{24} \\
&= \frac{24-9-2}{18} = \frac{13}{48}
\end{aligned}
$$

Σημείωση

Αν θεωρήσουμε το χωρίο T κανονικό ως προς y, τότε θα είχα:

$$
V = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^x (1+xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-x} (1+xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x
$$

Άσκηση 4 Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$
I = \int_0^3 \int_y^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

(A) Σην άσκηση, όπως είναι γραμμένο το προς ολοκλήρωση χωρίο, έχει θεωρηθεί κανονικό **ως προς** x.

(B) Ποιό είναι το χωρίο? Σχεδίαση (υποτυπώδης) Το προς ολοκλήρωση χωρίο είναι το γραμμοσκιασμένο στο σχήμα

(Γ) Θεωρώ το χωρίο αυτό κανονικό ως προς y (το οποίο ισχύει) και έχω:

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^3 \int_0^x e^{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 y e^{x^2}\Big|_0^x \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^x x e^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} e^{x^2}\Big|_0^3 \\
&= \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 5 Μετασχηματίστε τα χωρία

(1) $A = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

(2) $B = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 18x\}$

σε πολικές συντεταγμένες.

(1)

$$A' = \{(\rho, \theta) : 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

(2)

$$
\begin{cases}
x^2 + y^2 = 1 & \text{(κύκλος κέντρου } (0,0) \text{ ακτ. } 1\text{)} \\
x^2 + y^2 = 18x & \text{(κύκλος κέντρου } (9,0) \text{ ακτ. } 9\text{)}
\end{cases}
$$

$$x^2 - 18x + y^2 = 0 \implies x^2 - 2 \cdot 9x + 9^2 - 9^2 + y^2 = 0 \implies (x-9)^2 + y^2 = 9^2$$

Περιγράφω τις συνοριακές καμπύλες $\begin{cases} x^2 + y^2 &= 11 \\ x^2 + y^2 &= 18x \end{cases}$ σε πολικές συντεταγμένες ($x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$)

- $\rho^2 = 1 \implies \boxed{\rho = 1}$
- $\rho^2 = 18\rho\cos\theta \implies \boxed{\rho = 18\cos\theta}$

Λύνω το σύστημα $\begin{cases} \rho &= 1 \\ \rho &= 18\cos\theta \end{cases}$ (μου δίνει τα κοινά σημεία τομής των δύο κύκλων)

$$18\cos\theta = 1 \implies \cos\theta = \frac{1}{18} \implies \theta = \arccos\left(\frac{1}{18}\right)$$

$$A' = \left\{(\rho, \theta) : 1 \le \rho \le 18\cos\theta,\ -\arccos\left(\frac{1}{18}\right) \le \theta \le \arccos\left(\frac{1}{18}\right)\right\}$$

Άσκηση 6 Υπολογίστε το $\iint_t (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ επί του δίσκου $T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

Με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες **έχουμε**:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_T (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Αν δεν χρησιμοποιούσα πολικές συντεταγμένες:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 y + \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3} \\
&=^{x=\sin x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \left(\sin^2 y\cdot\cos y + \frac{\cos y}{3}\right)^3 \cos y\,\mathrm{d}y \\
&=^{\cos 2y = 2\cos^2 y - 1}_{1-2\cos^2 y} \dots
\end{aligned}
$$

Άσκηση 7 Υπολογίστε το $\iint_T \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ επί του χωρίου $T = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le kx\right\}$ $(R>0)$

(A) Σχήμα Έχουμε $x^2+y^2 \le Rx \implies x^2 - Rx + y^2 \le 0 \implies \underbrace{x^2 - 2\cdot\frac{R}{2}\cdot x + \left(\frac{R}{2}\right)^2}_{\left(x-\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{R^2}{4}} - \left(\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \le 0$, κυκλικός δίσκος κέντρου $\left(\frac{R}{2},0\right)$ και ακτίνας $\frac{R}{2}$.

Θα πρέπει να μετασχηματισθεί σε πολικές συντεταγμένες

$$
A = \left\{(\rho,\theta) : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le R\cos\theta\right\}
$$

Τότε:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2-\rho^2}\cdot \overbrace{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}^{\text{κατ' ευθείαν μπορώ να κάνω την αλλαγή}} \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\cos\theta} (R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(R^2-\rho^2)\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{R\cos\theta} \mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin^3\theta| \\
&= \frac{R^3\pi}{3} - \frac{2R^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi R^3}{3} + \frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,\mathrm{d}(\cos\theta) \\
&= \frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\cos\theta + \frac{\pi R^3}{3} \\
&= \frac{2R^3}{3}\left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi R^3}{3} \\
&= \frac{\pi R^3}{3} - \frac{4R^3}{9}
\end{aligned}
$$

$$\int_a^b f\left(g(x)\right) \underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}g(x)}$$

SOS!

Άσκηση

Υπολογίστε τον όγκο του φραγμένου στερεού μεταξύ των επιφανειών $\overbrace{z = 3x^2}^{\text{κυλινδρική επιφάνεια γιατί λείπει το } y}$ και $\underbrace{z = 4 - x^2 - y^2}_{\text{παραβολοειδές}}$

(Α) Υποτυπώδες σχήμα

(Β) Χωρίο ολοκλήρωσης Η **προβολή** της τομής των δύο επιφανειών είναι:

$$\begin{cases} z &= 3x^2 \\ z &= 4 - x^2 - y^2 \end{cases} \implies 3x^4 - x^2 - y^2 \implies 4x^2 + y^2 = 4 \implies x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ (έλλειψη)}$$

Άρα ολοκληρώνω εντός του χωρίου T

(Γ) Τι ολοκληρώνω?

$$\begin{aligned} V &= \iint_T \left(z_{\max} - z_{\min}\right)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_T (4 - x^2 - y^2) - 3x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

(Δ) Υπολογισμός

$$V = \iint_T (4 - 4x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Θα χρησιμοποιήσω το μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= 2\rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ 2\cos\theta & 2\rho\sin\theta \end{vmatrix} = 2\rho$$

και

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \underset{\substack{x=\rho\cos\theta \\ y=2\rho\sin\theta}}{\implies} \rho^2 = 1 \implies \boxed{\rho = 1}$$

άρα το χωρίο T μετασχηματίζεται στο:

$$T' = \left\{(\rho,\theta) :\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$

άρα:

$$\begin{aligned} V &= \iint_T \left(4 - 4x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{T'} \left(4 - 4\rho^2\cos^2\theta - 4\rho^2\sin^2\theta\right) \mathbf{2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= 8\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - \rho^2\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= 8 \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right)\mathrm{d}\rho = 4\pi \end{aligned}$$

Άσκηση Υπολογίστε το εμβαδόν μεταξύ των καμπύλων $\rho = a\sin\theta,\ \rho = a\left(1-\cos\theta\right),\quad a>0$ στο ΑΝΩ ημιεπίπεδο.

(A)

$$E = \iint_T 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{T'} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

Εννοείται η άσκηση μπορεί να λυθεί και με τον τύπο του εμβαδού του Λογισμού Ι.

Άρα:

- $a\sin\theta \geq a(1-\cos\theta)\ \forall\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$
- $a\sin\theta \leq a(1-\cos\theta)\ \forall\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi]$

$$\begin{aligned} E = &\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{a(1-\cos\theta)}^{a\sin\theta} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta + \\ &+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{a\sin\theta}^{a(1-\cos\theta)} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Άσκηση Υπολογίστε το $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ επί του χωρίου του σχήματος:

Θα εφαρμόσουμε αλλαγή μεταβλητών:

$$\begin{cases} u &= x-y \\ v &= x+y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x &= \frac{u+v}{2} \\ y &= \frac{-u+v}{2} \end{cases}$$

άρα

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Άρα:

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbf{D'}} e^{\frac{u}{v}}\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Σχεδίαση χωρίου D'

- $x+y=1 \underset{x=\frac{u+v}{2}}{\overset{x=\frac{u+v}{2}}{\Longrightarrow}} \frac{u+v}{2}+\frac{-u+v}{2} = 1 \Longrightarrow \boxed{v=1}$
- $x+y=2 \Longrightarrow \frac{u+v}{2}+\frac{-u+v}{2} = 2 \Longrightarrow \boxed{v=2}$
- $x=0 \Longrightarrow \frac{u+v}{2}=0 \Longrightarrow \boxed{v=-u}$
- $y=0 \Longrightarrow \frac{-u+v}{2}=0 \Longrightarrow \boxed{v=u}$

Τελικά

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 ve^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 v(e-e^{-1})\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{4}\,v^2\Big|_1^2\cdot\left(e-\frac{1}{e}\right) = \frac{3}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

Τριπλά Ολοκληρώματα

Έστω $f : R \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ **φραγμένη** συνάρτηση επί ορθογωνίου **παραλληλεπιπέδου**

$$R = \big\{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq b_1,\ a_2 \leq y \leq b_2,\ a_3 \leq z \leq b_3\big\}$$

και $\Delta = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$, όπου

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \{a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b_1\} \\ \Delta_y &= \{a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = b_2\} \\ \Delta_z &= \{a_3 = z_0 < z_1 < \cdots < z_N = b_3\} \end{aligned}$$

διαμέριση του R σε $\cdot M \cdot K$ "στοιχειώδη" ορθογώνια παραλληλεπίπεδα $\Omega_{n,m,k}$ όγκου

$$V_{n,m,k} = (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n)(z_{n+1} - z_n) \qquad \begin{cases} n &= 0, \ldots, N-1 \\ m &= 0, \ldots, M-1 \\ k &= 0, \ldots, K-1 \end{cases}$$

Έστω $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_m}, \widetilde{z_k})$ είναι τυχαίο σημείο στο ορθογ. παρ/δο $\Omega_{n,m,k}$ και ορίζω την $f(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_m}, \widetilde{z_k})\ \forall_{n,m,k}$.
Θεωρώ το άθροισμα:

$$S(f, \Delta) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} f(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_m}, \widetilde{z_k}) V_{n,m,k}$$

Έστω $|\Delta| = \max\big\{\delta_{n,m,k} :\ n = 0, \ldots, N-1,\ m = 0, \ldots, M-1,\ k = 0, \ldots, K-1\big\}$ είναι το πλάτος της έδιαμρισης Δ, όπου:

$$\delta_{n,m,k} = \max\big\{|\rho\rho'| :\ \forall \rho, \rho; \in \Omega_{n,m,k}\big\}$$

Αν $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} S(f, \Delta) = \lambda \in \mathbb{R}$, ανεξάρτητα της διαμέρισης Δ και της επιλογής των σημείων $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_m}, \widetilde{z_k}) \in \Omega_{n,m,k}$, τότε λέμε ότι υπάρχει το τριπλό ολοκλήρωμα της f επί του παραλ/δου R και γράφουμε:

$$\iiint_R f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \lambda \in \mathbb{R}$$

Ο ορισμός γενικεύεται και για κλειστά και φραγμένα στερεά του $\mathbb{R}^3$ ως εξής:
Έστω $S \subset \mathbb{R}^3$ κλειστό και φραγμένο στερεό με σύνορο αμελητέου όγκου (π.χ. το σύνορό του αποτελείται από ένωση επιφανειών $z = f(x, y)$). Έστω

$$S \subset \Omega$$

όπου Ω ορθογ. παρ/δο που καλύπτει το S.
Αν $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ορίζω την επέκτασή της στο Ω ως εξής:

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in S \\ 0, & (x, y, z) \in \Omega - S \end{cases}$$

Αν η $g : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη επί του Ω, τότε ορίζουμε:

$$\iiint_S f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iiint_\Omega g(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

και αποδεικνύεται ότι ο ορισμός αυτός **ΔΕΝ** εξαρτάται απ' την επιλογή του $\Omega \supset S$.

Θεώρημα

Έστω $f : S \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (όπου S κλειστό και φραγμένο στερεό με σύνορο αμελητέου όγκου) **ΣΥΝΕΧΗΣ** στο S, **εκτός ενδεχομένως** από ένα σύνολο σημείων αμελητέου όγκου.
Τότε η f ολοκληρώσιμη επί του S.

Ιδιότητες

Όπως στα διπλά.

Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων

$\boxed{\text{A}}$ **Σε ορθογώνια παραλ/δα**

Θ (Fubini) Έστω $f : R \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ **ΣΥΝΕΧΗΣ** επί ορθογ. παρ/δου

$$R = \big\{(x, y, z) : a_1 \le x \le b_1,\ a_2 \le y \le b_2,\ a_3 \le z \le b_3\big\}$$

Έστω

$$\begin{aligned} D_{xy} &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \\ D_{yz} &= [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \\ D_{xz} &= [a_1, b_1] \times [a_3, b_3] \end{aligned}$$

είναι οι ορθογώνιες προβολές του παρ/δου R στα επίπεδα $xy,\ yz$ και xz αντιστοίχως.

Τότε οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z, \\ g(y, z) &= \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x, \\ g(x, z) &= \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

είναι **συνεχείς** επί των προβολών D_{xy}, D_{yz}, D_{xz} αντιστοίχως και

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_{D_{xy}} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y && \begin{cases} \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} \cdots \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_3}^{b_3} \cdots \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{cases} \\ &= \iint_{D_{yz}} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z && \begin{cases} \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_1}^{b_1} \cdots \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\ \int_{a_2}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \cdots \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{cases} \\ &= \iint_{D_{xz}} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y && \begin{cases} \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2} \cdots \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ \int_{a_3}^{b_3}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \cdots \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \end{cases} \end{aligned}$$

π.χ. Υπολογίστε το $\iint_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$ επί του στερεού $S = \big\{(x, y, z) : -1 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 2,\ -4 \le z \le 7\big\}$. $\blacksquare$

$$\begin{aligned} I &= \underbrace{\int_{-4}^{7} \underbrace{\int_0^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} xyz\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}z} \\ &= \int_{-4}^{7}\int_0^2 xz\frac{y^2}{2}\bigg|_{-1}^{1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-4}^{7}\int_0^2 \left(\frac{xz}{2} - \frac{xz}{2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$ **Σε κλειστά και φραγμένα χωρία**

- Έστω $S \in \mathbb{R}^3$ κλειστό και φραγμένο στερεό με σύνορο αμελητέου όγκου. Θα λέμε ότι το S είναι κανονικό ως προς z αν το S είναι συνεκτικό και ΚΑΘΕ ευθεία $\parallel z'z$ που διέρεται και από το εσωτερικό του στερεού S τέμνει το σύνορο του S **ακριβώς** σε δύο σημεία ΚΑΙ η προβολή του S στο Oxy επίπεδο είναι χωρίο κανονικό ως προς x **ή** ως προς y.

S κανονικό ως προς z:

$$S = \big\{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy},\ f(x, y) \le z \le g(x, y)\big\}$$

Θεώρημα (Fubini)

$f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση επί στερεού S με σύνορο αμελητέου όγκου και D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} είναι οι ορθογώνιες προβολές του στερεού S πάνω στα επίπεδα Oxy, Oxz και Oyz αντίστοιχα.

- Αν S είναι κανονικό ως προς z στερεό της μορφής

$$S = \big\{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy},\ A(x, y) \le z \le B(x, y)\big\}$$

τότε

$$\iiint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} \left(\int_{A(x,y)}^{B(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

- Αν S είναι κανονικό ως προς **y** στερεό της μορφής

$$S = \big\{(x, y, z) : (x, z) \in D_{yz}, \Gamma(x, z) \le y \le \Delta(x, z)\big\}$$

τότε

$$\iiint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{xz}} \left(\int_{\Gamma(x,z)}^{\Delta(x,z)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

- Αν S κανονικό ως προς x στερεό της μορφής

$$S = \big\{(x, y, z) : (y, z) \in D_{yz},\ K(y, z) \le x \le \Lambda(y, z)\big\}$$

τότε

$$\iiint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{yz}} \left(\int_{K(y,z)}^{\Lambda(y,z)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{3}$$

- Αν S κανονικό, τότε:

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (1) = (2) = (3)$$

Εφαρμογές τριπλού ολοκληρώματος

1 Αν $w = f(x, y, z) = 1\ \forall (x, y, z) \in S$ όπου S κλειστό και φραγμένο στερεό, τότε

$$\iiint_S 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \text{όγκος του στερεού } S$$

2 Αν $\rho = r\rho(x, y, z)$ συνεχής πυκνότητα μάζας/φορτίου επί στερεού S κλειστού και φραγμένου, τότε

$$\iiint_S \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \text{συνολική μάζα/φορτίο επί του στερεού } S$$

3 Αν $w = f(x, y, z) \ge 0\ \forall (x, y, z) \in S$ όπου w είναι μια υπερ-επιφάνεια, τότε το $\iiint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$ υπερ-όγκος του υπερ-στερεού που περικλείεται από την w και το $Oxyz$-χώρο.

Αλλαγή μεταβλητής

Ακριβώς όπως στα διπλά ολοκληρώματα.
Ενδιαφέρομαι κυρίως για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(Α) Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$(x,y,z) \leftrightarrow_{\text{κυλινδρ.}} (\rho,\theta,z)$$

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x}\ (x\neq 0) \\ z &= z \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta & x_z \\ y_\rho & y_\theta & y_z \\ z_\rho & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \leftrightarrow \boxed{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

Μετασχηματισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$(x,y,z) \xleftrightarrow{1-1} (r,\theta,\phi)$$

όπου $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$,
θ: η προσανατολισμένη γωνία μεταξύ της ημιευθείας Ox $(\theta=0)$ και ημιευθείας OM. $(0\leq\theta<2\pi$ ή $-\pi\leq\theta<\pi$,
ϕ: η γωνία μεταξύ του ημιάξονα Oz $(\phi=0)$ και της ημιευθείας OM. $(0\leq\phi\leq\pi)$

Έχουμε:

$$\boxed{\begin{matrix} x &= r\cos\theta\sin\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\phi \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\theta &= \frac{z}{x} \quad (x\neq 0) \\ \cos\phi &= \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{matrix}}$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2} \xleftrightarrow{\text{σφαιρικές}} \boxed{r=R}$$

Τότε $\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{vmatrix} = \cdots = \boxed{-r^2\sin\phi}$

Άρα $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \to \left|\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(\rho,\theta,\phi)}\right| \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \boxed{r^2\sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}$

Μη γνήσια τριπλά ολοκληρώματα εκτός ύλης

Ασκήσεις

Άσκηση Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_S x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$$

όπου S το στερεό που περικλείεται από τις επιφάνειες $x=0,\ y=0,\ z=0$ και $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (a,b,c\neq 0)$.

$\boxed{\text{A}}$ **Υποτυπώδες σχήμα**

- Είναι στερεό κανονικό ως προς z

$$\left.\begin{array}{r}\text{επιφάναια "εισόδου"}\\ \text{επιφάνεια "εξόδου"}\end{array}\right\}\text{τυχαίας ευθείας } (\epsilon) \parallel z'z \text{ που διέρχεται και από το εσωτερικό του } S$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{z = 0}\\ &z = c\left(1 - \tfrac{x}{a} - \tfrac{y}{b}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{B}}$ **Υπολογισμός**

$$I = \iiint_S x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \overset{\text{στερεό } S \text{ κανονικό ως προς } z}{=} \iint_{\underbrace{D_{xy}}_{\text{η προβολή του στερεού στο } Oxy \text{ επίπεδο}}} \left(\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} x^2\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$\boxed{\mathbf{\Gamma}}$ **Υπολογισμός** D_{xy}

$\boxed{\mathbf{\Delta}}$ **Τελικός υπολογισμός**

$$\begin{aligned}I &= \iint_{D_{xy}} x^2 z\Big|_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_{D_{xy}} x^2\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\overset{\text{εργάζομαι θεωρώντας } D_{xy} \text{ κανονικό ως προς } x}{=} \int_0^b\int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} x^2\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\mathbf{dx}\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^b\left(\int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)}\left(x^2-\frac{x^3}{a}-\frac{x^2y}{b}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \dots\end{aligned}$$

$$\iiint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

- Σχήμα για το S
- Το S κανονικό ως προς π.χ. z, τότε:

$$\iiint_S = \iint_{\underbrace{D_{xy}}}\left(\int_{\text{επιφ. εισόδου}}^{\text{επιφ. εξόδου}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{cases}D_{xy} \text{ προβολή του } S \text{ στο } xy\\ D_{xy} \text{ κανονικό ως προς } x \text{ ή } y?\end{cases}$$

- Τότε $\iint_{D_{xy}}\left(\quad\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}\cdots$

Άσκηση Υπολογίστε τον όγκο του στερεού

$$S = \left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \le 2az,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

όπου $a > 0$

Θεωρία

$$V = \iiint_S 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$\boxed{\text{Α}}$ **Υποτυπώδες σχήμα**

- $$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2 = 2az \\ \implies & x^2+y^2+(z^2-2az+a^3)-a^2 = 0 \\ \implies & \boxed{x^2+y^2+(z-a)^2 = a^2} \end{aligned}$$

  σφαίρα κέντρου $(0,0,a)$ και ακτίνας a

- Η $x^2+y^2+z^2 \leq 2az$ είναι **το** εσωτερικό (και το σύνορο) της σφαίρας του σχήματος

- $$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

- Καμπύλη τομής των δύο επιφανειών

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & = 2az \\ x & = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \implies \begin{cases} x^2+y^2+(x^2+y^2) & = 2a\sqrt{x^2+y^2} \\ z & = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} x^2+y^2 & = a\sqrt{x^2+y^2} \\ z & = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & = a \\ z & = a \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} x^2+y^2 & = a^2 \\ z & = a \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \text{κύκλος } x^2+y^2=a^2 \\ \text{στο επίπεδο } z=a \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Β}}$ **Υπολογισμός** $\quad S$ κανονικό ως προς z. $\left.\begin{array}{c}\text{επιφάναια "εισόδου"} \\ \text{επιφάνεια "εξόδου"}\end{array}\right\}$ ευθεία $(\epsilon) \parallel z'z$ (δεν χρειάζεται να το γράψω)

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2+y^2} && \text{(είσοδος)} \\ z &= a+\sqrt{a^2-x^2-y^2} && \text{(έξοδος)} \end{aligned}$$

οπότε:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_S 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &\overset{\theta}{=} \iint_{D_{xy}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} 1 \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_{xy}} \left(a+\sqrt{a^2-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Γ}}$ D_{xy}**: προβολή του S στο Oxy επίπεδο**

$\boxed{\Delta}$ **Υπολογισμός της (1) με χρήση πολικών συντεταγμένων**

$$
\begin{aligned}
I =& \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(a+\sqrt{a^2-\rho^2}-\rho\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
=& 2\pi\left(\int_0^a a\rho+\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\mathrm{d}\rho \\
=& \, 2\pi a\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^a - 2\pi\frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^a - \frac{2\pi}{2}\int_0^a (a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(a^2-\rho^2) \\
=& \pi a^2 - \frac{2\pi}{3}a^3 - \frac{2\pi}{3}(a^2-\rho^2)\bigg|_0^a \\
=& \frac{\pi a^3}{3}+\frac{2\pi}{3}a^3 \\
=& \pi\mathbf{a^3}
\end{aligned}
$$

Άσκηση Υπολογίστε το $\iiint_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ επί του στερεού $S=\left\{(x,y,z):\ \mathbf{a^2}\leq\mathbf{x^2}+\mathbf{y^2}+\mathbf{z^2}\leq\mathbf{b^2},\ z\geq 0\ \right\}$.

$\boxed{\mathrm{A}}$ **Σχήμα** Η προβολή επί του Oxy επίπεδο είναι:

$\boxed{\mathrm{B}}$ Θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμό σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$
\left|\begin{array}{ll}
x = r\cos\theta\sin\phi & (0\leq\theta<2\pi) \\
y = r\sin\theta\sin\phi & (0\leq\phi\leq\pi) \\
z = r\cos\phi & \text{στη γενική μορφή}
\end{array}\right.
$$

$\boxed{\Gamma}$ **Υπολογισμός**

$$
I = \int_{\underbrace{0}_{\text{διότι ΔΕΝ υπάρχει "κάτω" ημισφαίριο}}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\underbrace{0}_{\text{διότι η προβολή } D_{x,y} \text{ είναι ο δίσκος του σχήματος}}}^{3\pi} \int_a^{\overbrace{b}^{\text{διότι η επιφάνεια εισόδου είναι η σφαίρα } r=a \text{ και η επιφάνεια εξόδου η σφαίρα } r=b}} \left[(r\cos\theta\sin\phi)^2+(r\sin\theta\sin\phi)^2\right]\cdot\mathbf{r^2}\sin\phi\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi
$$

$$
\begin{aligned}
=& \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{2\pi}{0}}\left(\int_a^b r^4\sin^3\phi\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\pi \\
=& \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sin^3\phi\frac{r^5}{5}\bigg|_a^b\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
=& \frac{b^5-a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\sin^3\phi\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\phi \\
=& \frac{b^5-a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\phi\cdot\theta\Big|_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\phi \\
=& \frac{b^5-a^5}{5}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi \\
=& -\frac{2\pi}{5}(b^5-a^5)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\phi)\,\mathrm{d}(\cos\phi) \\
=& -\frac{2\pi}{5}(b^5-a^5)\cdot\left(\cos\phi-\frac{\cos^3\phi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
=& \frac{2\pi}{5}(b^5-a^5)\cdot\frac{2}{3} \\
=& \frac{4\pi}{15}(b^5-a^5)
\end{aligned}
$$

Άσκηση Υπολογίστε το:

$$\int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Το προς ολοκλήρωση στερεό έχει θεωρηθεί κανονικό ως προς z. Ολοκληρώνοντας στο τετράγωνο της επιφάνειες εισόδου $z = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ και εξόδου $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, παίρνω $\boxed{x^2+y^2+z^2} = R^2$.

Αλλά το $\underbrace{\int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \Big(\quad \mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{D_{xy}\text{: η προβολή του προς ολοκλήρωση στερεού στο } Oxy \text{ επίπεδο}}$.

Το D_{xy} έχει θεωρηθεί κανονικό ως προς x.

Τελικά S είναι το εξής:
Εφαρμόζω σφ. συντεταγμένες (για το S) και έχω:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^R (r\cos\theta\sin\phi)^2 + (r\sin\theta\sin\phi)^2 \cdot r^2\sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^R r^4\sin^2\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &= \text{υπολογισμός όπως στην προηγούμενη άσκηση} \end{aligned}$$

Άσκηση Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_{-R}^R \int_o^{\sqrt{R^2-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{R\sqrt{x^2+y^2}} (z^2 z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

σε κυλινδρικές συντεταγμένες ($(x,y,z) \leftrightarrow (\rho,\theta,z)$. Το προς ολοκλήρωση στερεό είναι το:

$$S = \Big\{(x,y,z):\ -R \le y \le R,\ 0 \le x \le \sqrt{R^2-y^2},\ x^2+y^2 \le z \le R\sqrt{x^2+y^2}\Big\}$$

- $D_{xy} :=$ η προβολή του S πάνω στο Oxy επίπεδο, την οποία οπωσδήποτε πρέπει να σχεδιάσω.

  Τότε ερμηνεύω το $\underbrace{\int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}}_{\text{μαθηματικό μοντέλο του } D_{xy}} \Big(\quad \Big)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}y$.

  D_{xy} κανονικό ως προς x:

- **Κυλινδρικές συντεταγμένες**

  $x = \rho\cos\theta$
  $y = \rho\sin\theta$. Έτσι:
  $z = z$

$$
\begin{aligned}
I =& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \left(\int_{\rho^2}^{R\cdot\rho} \rho^2 \cos^2\theta z \,\mathrm{d}z \right) \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \\
=& \int_{-\frac{\pi}{2}} \int_0^R \rho^2 \cos^2\theta \left.\frac{z^2}{2}\right|_{\rho^2}^{R\rho} \mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \\
=& \int_{-\frac{\pi}{2}} \int_0^R \left(\frac{R^2\rho^2}{2} - \frac{\rho^7}{2} \right) \cos^2\theta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \\
=& \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot \left(\frac{R^2\rho^6}{6} - \left.\frac{R^8}{8}\right|_0^R \right) \mathrm{d}\theta \\
=& \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta R^8 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) \\
=& \left(\frac{R^8}{12} - \frac{R^8}{16} \right) \int_{-\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right) \mathrm{d}\theta \\
=& \left(\frac{R^8}{12} - \frac{R^8}{16} \right) \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Τύποι αποτετραγωνισμού

$$
\begin{aligned}
\cos(2\theta) =& 2\cos^2\theta - 1 \\
=& 1 - 2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

Άσκηση Υπολογίστε τον όγκο του στερεού

$$
S = \left\{ (x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}
$$

$a, b, c \neq 0$

$$
V = \iiint_S 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z
$$

Θα χρησιμοποιήσω μετασχηματισμό "τύπου" σφαιρικών συντεταγμένων.
Έχω:

$$
\left|
\begin{aligned}
& x = a \cdot r \cos \overbrace{\theta}^{\text{αζιμουθιακή}} \sin \overbrace{\phi}^{\text{πολική}} \\
& y = b \cdot r \sin\theta \sin\phi \\
& z = c \cdot r \cos\phi
\end{aligned}
\right.
$$

Τότε $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \implies \boxed{r \leq 1}$
Επίσης $\left| \frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(r,\theta,\phi)} \right| = \cdots = \mathbf{abc} \cdot r^2 \sin\phi$
Τότε

$$
\begin{aligned}
V =& \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 1 \cdot abc \cdot r^2 \sin\phi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \\
=& abc \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \sin\phi \,\mathrm{d}\phi \int_0^1 r^2 \,\mathrm{d}r = \boxed{\frac{4\pi}{3} abc}
\end{aligned}
$$

Διανυσματικά Πεδία, Διαφορικοί τελεστές

Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Ορ. Έστω $n, m > 1$. Κάθε απεικόνιση $\mathbf{F}$ ή $\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_n),\ \ldots,\ f_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

καλείται διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών.

Στην παραπάνω οι $f_1, \ldots, f_m : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι **πραγματικές** συναρτήσεις πολλών μεταβλητών που καλούται **συνιστώσες** ή **συντεταγμένες** συναρτήσεις του πεδίου $\mathbb{F}$ (ως προς καρτεσιανό πάντα σύστημα συντ/νων).

Πεδίο ορισμού είναι η συναλήθευση των πεδίων ορισμού των συνιστωσών συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_m$

π.χ

$$\underbrace{\mathbf{F}(x, y, z)}_{\mathbb{R}^3} = \underbrace{(x, y)}_{\mathbb{R}^2} \quad \text{προβολή του } P = (x, y, z) \text{ στο } Oxy \text{ επίπεδο}$$

π.χ

$$\underbrace{\mathbf{F}(x, y)}_{\text{2 ανεξάρτητες μεταβλητές}} = \underbrace{(x + 2y,\ x - y,\ x + 3y)}_{\text{Διάνυσμα με 3 συν/νες}} = (x, x, x) + (2y, -y, 3y) = \underbrace{x(1, 1, 1) + y(2, -1, 3)}_{\substack{\text{παραμετρική παράσταση} \\ \text{επιπέδου που διέρχεται} \\ \text{από το } (1,-2,3) \text{ και} \\ \text{παράγεται από τα γραμμ.} \\ \text{ανεξ. διαν. } (1,1,1) \text{ κ } (2,-1,3)}}$$

- $\mathbf{F}(x, y, z) = \Big(x, y, z, \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}\Big)$

  Πρέπει: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

  $$\mathbf{F} : \text{μοναδιαία σφαιρική μπάλα του } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

  Γεωμετρικά είναι το τμήμα της υπερσφαίρας

  $$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, \text{ για } w \geq 0$$

- $\mathbf{F}(x, y) = \Big(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\Big)$

  $$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (το τμήμα κώνου } z^2 = x^2 + y^2 \text{ για } z \geq 0)$$

  Γενικότερα Κάθε διαν. συνάρτηση της μορφής $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)\big)$, παριστάνει μία υπερ-επιφάνεια στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$ διανυσματική συνάρτηση, P_0 **σ.σ.** του πεδίου ορισμού της $\mathbf{F}$ και $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Τότε:

$$\lim_{P \to P_0} \mathbf{F}(P) = \vec{\lambda} \iff \begin{cases} \lim_{P \to P_0} f_1(x_1, \ldots, x_n) & = \lambda_1 \\ \quad \vdots & \\ \lim_{P \to P_0} f_m(x_1, \ldots, x_n) & = \lambda_m \end{cases}$$

$$\mathbf{F} \text{ συνεχής στο } P_0 \iff f_1, \ldots, f_m \text{ είναι συνεχείς στο } P_0$$

Έστω ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των συνιστωσών συναρτήσεων:

$$\frac{\partial f_i(P)}{\partial x_j}, \quad \begin{array}{l} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{array}$$

και είναι συνεχείς σε μια περιοχή σημείου P, για κάθε P στο πεδίο ορισμού.

Ορίζουμε τη μερική παράγωγο:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(P)}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_1(P)}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_m(P)}{\partial x_j} \right)$$

Η $\mathbf{F}$ είναι διαφορίσιμη στο P και ο $m \times n$ **ΙΑΚΩΒΙΑΝΟΣ** πίνακας $J_{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(P)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(P)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(P)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(P)}{\partial x_n} \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{bmatrix}$ καλείται **παράγωγος** της $\mathbf{F}$ στο P, συμβολικά και $\mathbf{F}'(P)$ ή $\mathrm{D}\mathbf{F}(P)$. Για σημεία Q "κοντά" στο P ισχύει:

$$\mathbf{F}(Q) - \mathbf{F}(P) \approx \underbrace{\mathbf{F}'(P) \cdot (Q-P)}_{\mathrm{d}\mathbf{F}_P(Q) \rightarrow \text{ διαφορικό του } \mathbf{F} \text{ στο } \mathbb{R}}$$

π.χ $\mathbf{F}(x,y) = \big(x+2y^2,\ x-3y,\ 2x^2+y+1\big)$

$$\mathbf{F}'(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 4y \\ 1 & -3 \\ 4x & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Διανυσματικά πεδία

Ορ. Κάθε διανυσματική συνάρτηση πολλών μεαβλητών της μορφής:

$$\mathbf{F} \text{ ή } \vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

καλείται διανυσματικό πεδίο.

Ερμηνεία Σε ΚΑΘΕ ΣΗΜΕΙΟ του χώρου $\mathbb{R}^b$ ασκείται μια ΔΥΝΑΜΗ με τύπο $\mathbf{F}(P)$

Παραδείγματα

Α. Γραμμικά πεδία Αν $A_{n\times n}$ είναι πίνακας πραγματικός, τότε:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to R^n : \mathbf{F}(x_1,\dots,x_n) = A_{n\times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

π.χ $\mathbf{F}(x,y) = (x+y,\ 2x-3y)$. Είναι γραμμικό?
ΝΑΙ, διότι:

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x+y+z+1,\ 3x-y-z,\ -x+2y+4)$. Είναι γραμμικό?

  ΟΧΙ, διότι γράφεται ως:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  Γίνεται όμως γραμμικό αν μετατεθεί κατά $(1,0,4)$. Τέτοια πεδία λέγονται **αφφινικά**.

Β. Πεδία κλίσεων

- Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμο βαθμωτό πεδίο (ή αριθμητικό πεδίο, ή πραγματική συνάρτηση n-μεταβλητών).

  Τότε το πεδίο

$$\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n :\ \mathbf{F}(P) = \nabla f(P)$$
$$\text{ή } \mathbf{F}(x_1,\ldots,x_n) = \left(\tfrac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n}\right)$$

  καλείται πεδίο κλίσεων της f.

  Η f καλείται (βαθμωτό) ΔΥΝΑΜΙΚΟ του πεδίου $\mathbf{F}$.

π.χ. Έστω $\vec{r} = (x_1,\ldots,x_n)$ και $r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.

Ορίζω συνάρτηση **ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ**

$$f(\vec{r}) = \frac{c}{r} \qquad \Big(\, c \text{ σταθερά} \,\Big)$$

Ορίζω

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla f = -\nabla\left(\frac{c}{r}\right) \\
&= -c\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -c\frac{-\nabla r}{r^2} = c\frac{\nabla r}{r^2} \\
\nabla r &= \nabla\left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right) = \nabla\left((x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \left(\left[(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}\right]_{x_1},\ \ldots,\ \left[(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}\right]_{x_n}\right) \\
&= \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\vec{r}}{r}
\end{aligned}$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{c}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}}$$

Αν q ακίνητο σημειακό φορτίο (μαζί με το πρόσημό του) στην αρχή των αξόνων, τότε:

$$\mathbf{E}_q = q\mathbf{E}$$

είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει το φορτίο q.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \mathbf{Q}\cdot\mathbf{E}_q \\
&= \frac{c\cdot q\cdot Q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}
\end{aligned}
$$

(Για $c = k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ σταθερά Coulomb), τότε **F** δύναμη Coulomb.

Γ. Κεντρικά διανυσματικά πεδία Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση.

$\vec{r} = (x_1,\dots,x_n)$ το διάνυσμα θέσης σημείου $P\in\mathbb{R}^n$ και $r = |\vec{r}|$. Τότε το πεδίο $\mathbf{F} : A\subseteq\mathbb{R}^n - \big\{(0,\dots,0)\big\}\to\mathbb{R}^n$:

$$
\boxed{\mathbf{F}(\vec{r}) = f(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}}
$$

καλείται κεντρικό πεδίο διότι **ο ΦΟΡΕΑΣ** των εικόνων $\mathbb{F}(\vec{r})$ ΤΑΥΤΙΖΕΤΑΙ με το **ΦΟΡΕΑ** του διανύσματος θέσης $\vec{r}$.

$$
\left.\begin{array}{l}\text{το πεδίο Coulomb}\\ \text{το βαρυτικό πεδίο}\end{array}\right\}\text{ΕΙΝΑΙ ΚΕΝΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ}
$$

Παράσταση πεδίων

Α Με χρήση Η/Υ

Β Διακριτοποιώ και σε κάθε σημείο P, ζωγραφίζω το διάνυσμα $\mathbf{F}(P)$ με αφετηρία το P.

π.χ $\mathbf{F}(x,y) = (-y,\ x)$

$$
\begin{cases}
\mathbf{F}(1,0) &= (-0,1) = (0,1)\\
\mathbf{F}(0,1) &= (-1,0)\\
\mathbf{F}(-1,0) &= (-0,-1) = (0,-1)\\
\mathbf{F}(0,-1) &= (1,0)
\end{cases}
$$

Γ (Με χρήση διανυσματικών γραμμών)

Παραδοχή Σε κάθε σημείο P, οι τιμές του πεδίου $\mathbf{F}(P)$ είναι ταχύτητες κατά την κίνηση κάποιου υλικού σημείου στο χώρο. Οι τροχιές (δηλαδή οι καμπύλες) κίνησης καλούνται **διανυσματικές** γραμμές του πεδίου.

Δηλ. αν **r** είναι καμπύλη κίνησης, τότε:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{r})\\
\Longrightarrow\ &\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \quad t\in[a,b]
\end{aligned}
$$

π.χ Έστω $F(x,y) = (-y,x)$.

Έστω $\mathbf{r}(t) = \Big(x(t),t(t)\Big)$

Τότε λόγω (1) έχω:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) &\Longrightarrow \big(x'(t),y'(t)\big) = \big(-y(t),x(t)\big)\\
&\Longrightarrow \begin{cases} x' &= -y\\ y' &= x\end{cases} \Longrightarrow \frac{y'}{x'} = -\frac{x}{y} \Longrightarrow xx' + yy' = 0\\
&\Longrightarrow \boxed{x^2+y^2 = c^2}\ (c\in\mathbb{R}\ \text{αυθαίρετη σταθερά})
\end{aligned}
$$

Διαφορικοί τελεστές

Έστω :

- $V_n(E) = \{f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}$ ο χώρος όλων των **διαφορίσιμων** πραγματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών (ή βαθμωτών ή αριθμητικών πεδίων)
- $\mathbf{V}_{n,m}^{(E)} = \{\mathbf{F} : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}$ ο χώρος των ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΩΝ διανυσμ. συναρτήσεων πολλώ μεταβλητών και
- $\mathbf{V}_n(E) = \left\{\mathbf{F} : E \subseteq \mathbb{R}^{(n)} \to \mathbb{R}^{\mathbf{n}}\right\}$ ο χώρος όλων των **ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΩΝ διανυσμ. πεδίων**

Διαφορικός τελεστής κλίσης

Συμβολίζω:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

τον **τελεστή** κλίσης που δρα ως εξής:

- $$\nabla : \underbrace{V_n(E)}_{\text{αριθμ. πεδίο διαφορ.}} \to \underbrace{\mathbf{V}_n(E)}_{\text{διανυσμ. πεδίο διαφορ.}} :$$
  $$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right), \quad E \subseteq \mathbb{R}^n$$

- $$\nabla : \underbrace{\mathbf{V}_n(E)}_{\text{διαν. πεδίο διαφορ.}} \to \underbrace{\mathbf{V}_{n,n^2}(E)}_{\text{διάνυσμ. συνάρτ. διαφορ. } E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n^2}}$$
  :
  $$\nabla\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_n}\right)$$

Απόκλιση διανυσμ. πεδίου

Έστω $\mathbf{F} : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$\forall P = (x_1, \dots, x_n) \in E$ έχουμε:

$$\mathbf{F}(P) = \big(f_1(P), \dots, f_n(P)\big)$$

όπου $f_1, \dots, f_n$ είναι διαφορίσιμα αριθμητικά πεδία.

Ορ. Καλούμε ΑΠΟΚΛΙΣΗ του πεδίου **F** στο σημείο P, συμβολικά $\mathrm{div}\mathbf{F}(P)$ να είναι ο **ΑΡΙΘΜΟΣ**:

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(P) = \frac{\partial f_1(P)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(P)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n(P)}{\partial x_n}$$

Παρατηρώ (• εσωτερικό γινόμενο) ότι:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\ \mathbf{F}(P) &= \nabla \bullet \mathbf{F}(P) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \bullet \big(f_1(P), \dots, f_n(P)\big) \\ &= \frac{\partial f_1(P)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f(P)}{\partial x_n} \end{aligned}$$

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$\text{div} \;:\overset{\text{συμβολισμός}}{=} \nabla \bullet$$

Έτσι η **απόκλιση** μπορεί να θεωρηθεί ως ένας **διαφορικός τελεστής που δρα ως εξής**:

$$\nabla \bullet : \underbrace{\mathbf{V}_n(E)}_{\text{διαφορίσιμο }\textbf{διαφορίσιμο}} \to \underbrace{V_n(E)}_{\text{πεδίο βαθμωτό πεδίο}}$$

π.χ $\mathbf{F}(x,y) = (x + 2y^2,\ -x^2 + y^2)$

$$\nabla \bullet \mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial(x+2y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-x^2+y^2)}{\partial y} = \boxed{1+2y}$$

Η απόκλιση είναι ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ τελεστής, δηλαδή:

$$\nabla \bullet \big(a\mathbf{F} + b\mathbf{G}\big) = a\nabla \bullet \mathbf{F} + b\nabla \bullet \mathbf{G}$$

και επίσης ισχύει:

Αν $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμο αριθμητικό πεδίο και $\mathbf{F} : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμο διαν. πεδίο, τότε:

$$\nabla \bullet (f\mathbf{F}) = \nabla f \bullet \mathbf{F} + f\nabla \bullet \mathbf{F}$$

Ορ. Ένα διανυσμ. πεδίο $\mathbf{F} : E \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\nabla \bullet \mathbf{F} = 0 \quad \forall P \in E$ καλείται **ασυμπίεστο** ή **σωληνοειδές**

Περιστροφή διανυσμ. πεδίου στον $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$

Έστω $\mathbb{F} : E \subseteq \mathbb{R}^{\nVdash} \to R^{\nVdash}$.
$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z),\ f_3(x,y,z)\big)$ διαφορίσιμο διαν. πεδίο επί του E.

Ορ. Καλούμε περιστροφή του πεδίου $\mathbf{F}$ στο σημείο $P = (x,y,z) \in E$ να είναι το <u>διάνυσμα</u>:

$$\text{rot } \mathbf{F}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(P) & f_2(P) & f_3(P) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3(P)}{\partial} - \frac{\partial f_2(P)}{\partial z},\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\text{rot } := \nabla x$$

και αυτό το συμβολισμό θα χρησιμοποιούμε στο εξής.

Έτσι η περιστροφή ∇f είναι ένας τελεστής:

$$\nabla x : \underbrace{\mathbf{V}_B(E)}_{\text{χώρος διαν. πεδ}} \to \underbrace{\mathbf{V}_b(E)}_{\text{χώρος διαν. πεδίων}} \quad \mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F}$$

- Η περιστροφή είναι γραμμικός τελεστής:

$$\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}$$

- Αν $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμο αριθμητικό πεδίο, τότε:

$$\nabla times(f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f\nabla \times \mathbf{F}$$

Ορ. Αν

$$\nabla \times \mathbf{F}(P) = 0 \quad \forall P \in E$$

τότε το πεδίο $\mathbf{F}$ καλείται **ΑΣΤΡΟΒΙΛΟ**

Ορ. Αν $\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y),\ Q(x,y)\big)$ διαφορίσιμο πεδίο επί συνόλου $E \subseteq \mathbb{R}$.
Τότε ορίζουμε:

$$\nabla \times \mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

Ιδιότητες

(1) Κάθε πεδίο κλίσεων είναι

ΑΣΤΡΟΒΙΛΟ

Με άλλα λόγια, αν $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ αριθμητικό πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης, τότε:

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$$

Απόδ. Έστω f όπως παραπάνω, και $P = (x,y,z) \in E$

$$\nabla f = \big(f_x, f_y, f_z\big)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \big(f_{zy} - f_{yz},\ f_{xz} - f_{zx},\ f_{yx} - f_{xy}\big) = (0,0,0) \quad \forall P \in E$$

(2) Έστω $f : E \subseteq \mathbb{R}^n$ αριθμ. πεδίο, και $P = (x_1, \ldots, x_n) \in E$
και υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $2^{ης}$ τάξης του f.

Τότε ορίζουμε:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right) \bullet \big(f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\big) \\ &= \tfrac{\partial f_{x_1}}{\partial x_1} + \tfrac{\partial f_{x_2}}{\partial x_2} + \cdots + \tfrac{\partial f_{x_n}}{\partial x_n} \\ &= f_{x_1^2} + f_{x_2^2} + \cdots + f_{x_n^2} \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε τον τελεστή

$$\nabla^2 := \nabla \cdot \nabla$$

και τον καλούμε τελεστή Laplace ή Λαπλασιανή. Ισχύει δε:

$$\nabla^2 : \underbrace{V_n(E)}_{\text{αριθμ. πεδίο}} \to \underbrace{V_n(E)}_{\text{αριθμ. πεδίο}} : \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

(3) Τα κεντρικά διανυσματικά πεδία είναι **αστρόβιλα**. (βλέπε άσκ. παρακαλώ)

(4) Έστω $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z),\ G(x,y,z),\ R(x,y,z)\big)$ διαφορίσιμο πεδίο. Τότε

$$\mathbf{F}' = J_{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ίχνος } J_{\mathbb{F}} :&= \text{άθροισμα όλων των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του } J_{\mathbf{F}} \\ &= P_x + Q_y + R_z = \nabla \cdot \mathbb{F} \end{aligned}$$

Αν $\mathbf{F}$ ασυμπίεστο $\iff$ Ίχνος του $J_{\mathbf{F}}$ ισούται με μηδέν.

- Επίσης: $\mathbf{F}$ αστρόβιλο $\iff$ $J_{\mathbf{F}}$ ένας συμμετρικός πίνακας

(5) Έστω $\mathbf{F} : E \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ διαν. πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους $2^{\text{ης}}$ τάξης. Τότε:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

Έστω $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. Τότε:

$$\nabla \times \mathbf{F} = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \\ &= R_{yx} - Q_{zx} + R_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0 \end{aligned}$$

(6) Έστω $\mathbf{F} : E \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ διαν. πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους επί ΚΥΡΤΟΥ χωρίου E, και επιπλέον υποθέτουμε ότι το $\mathbf{F}$ Είναι ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟ στο E.

Τότε υπάρχει διαφορίσιμο διαν. πεδίο $\mathbf{G}$ έτσι ώστε:

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$$

Το $\mathbf{G}$ καλείται ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ του $\mathbf{F}$.

Ένας τύπος για το $\mathbf{G}$ είναι:

$$\mathbf{G} = -\vec{r} \times \int_0^1 \mathbf{F}(t\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{r}$$

($\vec{r}$ διάνυσμα θέσης) αλλά δεν είναι μοναδικός. Πράγματι, και το πεδίο:

$$\mathbf{G} + \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ οποιοδήποτε διαφορίσιμο πεδίο})$$

είναι επίσης διανυσματικό δυναμικό του $\mathbf{F}$ διότι $\nabla \times (\mathbf{G} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{G} + \cancelto{0}{\nabla \times (\nabla f)} = \nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$

Ισχύει και το αντίστροφο.

$$\begin{aligned} \text{Αστρόβιλο πεδίο } &\xrightarrow[\text{συνθήκη}]{+} \text{έχει βαθμωτό δυναμικό}, \exists f : E\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \mathbf{F} = \nabla f \\ \text{Ασυμπ. πεδίο } &\to \text{έχει διαν. δυναμ.}, \exists \mathbf{G} :\ \mathbf{F} : \nabla \times \mathbf{G} \end{aligned}$$

(7) Αν $\mathbf{F} : e \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ διαν. πεδίο με συνεχείς μερικές παραγ. επί κυρτού χωρίου E, τότε υπάρχει διαφορίσιμο αριθμ. πεδίο $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και διαφορ. διαν. πεδίο $\mathbf{G} : E \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\nabla f}_{\text{αστρόβιλο}} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{G}}_{\text{ασυμπίεστο}}$$

Ασκήσεις

Άσκ. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} :\ u = u(x, y, z)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους.
ΝΔΟ το πεδίο $\nabla u \times \nabla f(u)$ είναι αστρόβιλο.

$$\begin{aligned} \nabla u &= (u_x, u_y, u_z) \\ \nabla f(u) &= f'(u) \cdot \nabla u \text{(παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης)} \end{aligned}$$

άρα:

$$\begin{aligned} \nabla u \times \nabla f(u) &= \nabla u \times f'(u) \cdot \nabla u \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ f'(u)u_x & f'(u)u_y & f'(u)u_z \end{vmatrix} \qquad = f'(u) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Άσκ. Έστω $\vec{r} = (x, y, z),\ r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και
$\mathbf{F}(x, y, z) := \mathbf{F}(\vec{r}) = \frac{f(r)}{r} \cdot \vec{r}$ διανυσμ. πεδίο επί του $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

- ΝΔΟ $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{rf'(r)+2f(r)}{r}$.
  Για ποιες f το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι ασυμπίεστο στο $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$
- ΝΔΟ $\mathbf{F}$ αστρόβιλο στον $R^3 - \{(0,0,0)\}$

Από τύπο θεωρίας έχω:

$$\nabla \cdot \left(\frac{f(r)}{r} \cdot \vec{r}\right) = \nabla \left(\frac{f(r)}{r} \cdot \vec{r} + \frac{f(r)}{r} \nabla \vec{r}\right) \tag{4}$$

–

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{r} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x, y, z) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{f(r)}{r}\right) &\overset{\text{παραγ. πηλίκου}}{=} \frac{\nabla f(r) \cdot r - f(r) \nabla r}{r^2} \\ &= \frac{r \cdot f'(r) \cdot \nabla r - f(r) \nabla r}{r^2} = \frac{rf'(r) - f(r)}{r^2} \nabla r \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} \nabla r &= \nabla \left((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \left((x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}_x, (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}_y, (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}_z\right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ &= \frac{\vec{r}}{r}. \end{aligned}$$

Άρα:

$$\boxed{\nabla \left(\frac{f(r)}{r} = \frac{rf'(r) - f(r)}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}\right)}$$

Αντικαθιστώ στην (1) και έχω:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{rf'(r) - f(r)}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot \vec{r} + \frac{f(r)}{r} \cdot 3 \\ &= \frac{rf'(r) - f(r)}{r^3} \cdot r^2 + 3 \frac{f(r)}{r} \\ &= \frac{rf'(r) + 2f(r)}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 &\implies \\ rf'(r) + 2f(r) = 0 &\implies \\ f'(r) + \frac{2}{r} f(r) = 0 & \end{aligned}$$

(ομογενής συνήθης γραμμική δ.ε.)

Άρα:

$$f(r) = ce^{-\int \frac{2}{r}\, \mathrm{d}r} = ce^{-2 \ln x} = \frac{c}{r^2}$$

– Από θεωρία έχουμε:

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\frac{f(r)}{r} \cdot \vec{r}\right) &= \nabla \left(\frac{f(r)}{r} \times \vec{r} + \frac{f(r)}{r} \nabla \times \vec{r}\right) \\ &= \frac{rf'(r) - f(r)}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r} + \frac{f(r)}{r} \nabla \times \vec{r} \end{aligned} \tag{5}$$

–

$$\nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0) = \vec{0},$$

άρα αντικαθιστώ στη (2).
Έουμε ότι $\nabla \times \mathbb{F} = 0$ επειδή $\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$ και $\nabla \times \vec{r} = \vec{0} \quad \forall P \in \mathbb{R}^3 - \big\{(0,0,0)\big\}$

Άσκ. Έστω $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$ διαν. πεδίου του οποίου οι συνιστώσες P, Q, R έχουν μερικές παραγώγους 2ης τάξης.
ΝΔΟ:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \Big(\nabla^2 P,\ \nabla^2 Q,\ \nabla^2 R\Big)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{F} &\overset{\text{εξ' ορισμού}}{=} \nabla \bullet \nabla \mathbf{F} \\ &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathbf{F}_x,\ \mathbf{F}_y,\ \mathbf{F}_z\right) \\ &= \tfrac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \tfrac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \tfrac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x}(P_x, Q_x, R_x) + \tfrac{\partial}{\partial x}(P_y, Q_y, R_y) + \tfrac{\partial}{\partial z}(P_z, Q_z, R_z) \\ &= (P_{xx}, Q_{xx}, R_{xx}) + (P_{yy}, Q_{yy}, R_{yy}) + (P_{zz}, Q_{zz}, R_{zz}) \\ &= (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz},\ Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz},\ R_{xx} + R_{yy} + R_{zz}) \\ &= \Big(\nabla^2 P, \nabla^2 Q, \nabla^2 R\Big)\end{aligned}$$

Άσκ. Έστω $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : u = u(x,y,z)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης. ΝΔΟ

- $\nabla \cdot (u \nabla u) = |\nabla u|^2 + u \nabla^2 u$
- Το πεδίο $u \nabla u$ είναι αστρόβιλο στον $\mathbb{R}^3$.

- $\nabla u = (u_x, u_y, u_z)$, άρα

$$\begin{aligned} u\nabla u &= u(u_x, u_y, u_z) \\ &= (uu_x, uu_y, uu_z) \end{aligned}$$

$\nabla \cdot (u \nabla u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (uu_x, uu_y, uu_z) = \frac{\partial (uux)}{\partial x} + \frac{\partial uu_y}{\partial y} + \frac{\partial uu_z}{\partial z} = (u_x u_x + uu_{xx}) + (u_y u_y + uu_{yy}) + (u_z u_z + uu_{zz}) = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + u \underbrace{(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})}_{\text{Λαπλασιανή της } u} = |\nabla u|^2 + u \nabla^2 u$

- Αρκεί ΝΔΟ $\nabla \times (u \nabla u) = \vec{0}$ παντού στο $\mathbb{R}$.

– Είτε μέσω ορισμού:

$$\nabla \times (u\nabla u) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ uu_x & uu_y & uu_z \end{vmatrix} = \cdots = (0,0,0) = \vec{0}$$

– Είτε με χρήση της ιδιότητας: $\boxed{\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f \nabla \times \mathbf{F}}$ $\quad f = u, \quad \mathbf{F} = \nabla u$

$$\nabla \times (u\nabla u) = \cancelto{\vec{0}}{\nabla u \times \nabla u} + \cancelto{0}{u\nabla x (\nabla u)} = \vec{0}$$

Επικαμπύλια ολοληρώματα

Θ1 Έστω $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχές διανυσμ. πεδίο σε **τόπο** D, τότε:

$$\mathbf{F} \text{ συντηρητικό στο } D \iff \underbrace{\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0}_{\text{για κάθε } \textbf{κλειστή}\text{, λεία καμπύλη εντός του} D}$$

Σημ.: Στο εξής, αν γ είναι κλειστή και λεία καμπύλη, γράφουμε $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ $\Big($αντί $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\Big)$

Απόδ. Έστω $A, B \in D$ **ΤΥΧΑΙΑ** σημεία και έστω γ_1, γ_2 **τυχαίες** καμπύλες με αρχή A κ πέρας B κ ίχνη όπως στο σχήμα.

Παρατηρούμε ότι $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ είναι κλειστή καμπύλη:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \oint_{\gamma_1 - \gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{\gamma_2} \\ &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{\gamma_2} \end{aligned}$$

Άρα:

$$\boxed{\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{\gamma_2}} \tag{6}$$

Διότι αν $\mathbf{F}$ συντηρ. $\overset{\text{ορ.}}{\Longrightarrow} \int_{\gamma'} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ ανεξάρτητο του δρόμου $\implies$ δεξι μελος (6) $= 0 \overset{(6)}{\Longrightarrow} \oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$.

Αντίστροφα: Αν $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \implies$ δεξί μέλος (6) ισούται με μηδέν $\implies \int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ ανεξάρτητο δρόμου $\implies$ $\mathbf{F}$ συντηρητικό.

Θ2. Έστω $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχές διαν. πεδίο επί **τόπου** D. Τότε:

$\mathbf{F}$ συντηρητικό στο $D \iff \mathbf{F}$ είναι πεδίο κλίσεων στο D, δηλ. $\mathbf{F} = \nabla f$ για κάποια $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερ. πα

Απόδ. ``$\Leftarrow$" Έστω $\mathbf{F}$ πεδίο κλίσεων, δηλ. $\mathbf{F} = \nabla f$.

Τότε αν γ οποιαδήποτε καμπύλη με παραμετροποίηση $\mathbf{r}$, λεία και κλειστή έχουμε:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &\overset{\text{ορισμός}}{=} \\ \int_a^b \nabla f\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t &= \\ \int_a^b (f \circ \mathbf{r})'(t)\,\mathrm{d}t &= \\ = f\big(\mathbf{r}(b)\big) - \mathbf{f}\big(\mathbf{r}(a)\big) &= 0 \end{aligned}$$

, διότι η γ κλειστή καμπύλη, άρα $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Άρα από Θ1 το $\mathbf{F}$ συντηρητικό πεδίο.

Σημείωση: Η συνάρτηση βαθμωτού δυναμικού συντηρητικού πεδίου $\mathbf{F}$ βρίσκεται ως εξής:

$$\boxed{f(P) - f(A) = \int_A^P \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}$$

όπου $A \in D$ σημείο του $\mathbf{D}$ που εσείς επιλέγετε,
$(x_1, \ldots, x_n) = P$ **τυχαίο σημείο του** D και:

$$\int_A^P \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \text{ συμβολισμός που δηλώνει ότι το επικαμπύλιο ολοκλ. είναι ανεξάρτητο του δρόμου}$$

Τελικά $\mathbf{F}$ συντηρητικό σε τόπο $D \iff \oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ για κάθε κλειστή λεία καμπύλη εντός του D

$$\iff \mathbf{F} = \nabla f$$

$^*_*\mathbf{\Pi}^*_*$ Αν D είναι **ΑΠΛΑ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ** του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbf{D}$, τότε:

$$\mathbb{F} \text{ συντηρητικό στο } D \iff \mathbf{F} \text{ αστρόβιλο στο } D$$

- Αν D **ΔΕΝ** είναι ***απλά*** συνεκτικό, τότε **ΔΕΝ** συνεπάγεται κατά ανάγκη ότι ατρόφιβο πεδίο είναι συντηρητικό. Μπορεί ΝΑΙ, μπορεί ΟΧΙ.

Θεώρημα Green *στο επίπεδο*

Έστω γ είναι απλή, **κλειστή** και τμηματικά λεία καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$. Τότε αυτή χωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε δύο χωρία, που καλούμε **εσωτερικά της** γ, και ένα μη φραγμένο **χωρίο που καλούμε εξωτερικό της** γ.

Επίσης μια τέτοια (**κλειστή**) καμπύλη λέμε ότι είναι ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ Ανν η φορά διγραφής της είναι η **αντιωρολογιακή**.

Θ (Green) Έστω γ είναι μια απλή, **ΚΛΕΙΣΤΗ**, τμημ. λεία και ΘΕΤΙΚΑ **ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ** καμπύλη και

$$\mathbb{F}(x, y) = \big(P(x, y),\ Q(x, y)\big)$$

διανυσματικό πεδίο με ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΡΙΚΕΣ παραγώγους **ΠΑΝΩ κ στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της** γ.

Αν συμβολίσουμε $\boxed{\gamma := \partial D}$ (δηλ. η γ είναι το σύνορο του εσωτερικού D της γ), τότε:

$$\boxed{\oint_{\partial D} = \iint_D (Q_x - P_y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}$$

, ή ισοδύναμα:

$$\boxed{\underbrace{\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}_{\text{Το έργο του πεδίου } \mathbf{F} \text{ κατά μήκος του συνόρου } \partial D} \quad \underbrace{=}_{\text{ισούται με}} \quad \underbrace{\iint_D \nabla \times \mathbf{F}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}_{\text{τη συνολική περιστροφή του πεδίου } \mathbf{F} \text{ στο εσωτερικό } D}}$$

Υπό τις προϋποθέσεις του Θ. Green, αν ισχύει:

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y) = \vec{0}$$

πάνω κ στο εσωτερικό της συνοριακής καμπύλης ∂D, τότε

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Αν το πεδίο **F ΔΕΝ** έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πάνω κ στο εσωτερικό της ∂D, τότε το παραπάνω θεώρημα ΔΕΝ ισχύει, αλλά έχουμε το ακόλουθο:

Θ (Παραμόρφωσης δρόμου) Έστω γ_1, γ_2 είναι απλές, κλειστές, τμημ. λείες και ΘΕΤΙΚΑ προσανατολισμένες καμπύλες, έτσι ώστε:

$\boxed{\text{π.χ η } \gamma_2 \text{ να βρίσκεται στο εσωτερικό της } \gamma_1}$

Αν $\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y),\ Q(x,y)\big)$ έχει ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ πάνω σε **ΦΡΑΓΜΕΝΟ** χωρίο R με σύνορο

$$\partial R = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

τότε:

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{\gamma_1} = \oint_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{\gamma_2} + \iint_R (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Γενικεύοντας το Θ. παραμόρφωσης δρόμων για περισσότερες καμπύλες, προκύπτει το:

Γενικευμένο Θ. Green

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{\Gamma} = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{\gamma_j} + \iint R(Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

όπου:

- $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ απλές, κλειστές, τμ. λείες θετικά προσαν.
- $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ στο εσωτερικό της Γ
- κάθε γ_i στο εξωτερικό κάθε άλλης καμπύλης γ_μ, $\quad \forall \mu = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$
- $\mathbf{F} = (P, Q)$ έχει συνεχείς μερ. παραγ. επί του γραμμοσκιασμένου χωρίου R

Εφαρμογή: Ξέρουμε ότι

$$\mathrm{E}(D) = \iint_d 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Έστω $\mathbf{F} = (P, Q)$ έ.ώ:

$$Q_x - P_y = 1$$

π.χ $\mathbf{F} = (0, x)$
ή $\mathbf{F} = (-y, 0)$,
τότε από Θ. Green έχω:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{E}(D) \end{aligned}$$

Το Θ. Απόκλισης $\boxed{\text{στο επίπεδο}\mathbb{R}^2}$ ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ
Παρασκευή 3-5μμ μάθημα με Ατρέα.

Υπολογίστε τη μάζα καλώδίου πυνκότητας $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, που απλώνεται κατά μήκος της τεθλασμένης γραμμής $P_0 \to P_1 \to P_2$ με $P_0 = (1,1,1),\ P_1 = (2,2,0),\ P_2 = (2,2,2)$

Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
M &\overset{\text{συμβ.}}{=} \underbrace{\int_{\varGamma} \rho \, \mathrm{d}s}_{\text{επικαμπύλιο 1ου είδους}} \\
&= \int_{\gamma_1+\gamma_2} \rho \, \mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_1} \rho \, \mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} \rho \, \mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

όπου $\gamma_1 := \overrightarrow{P_0P_1},\ \gamma_2 := \overrightarrow{P_1P_2}$

Γενικά, θυμάμαι ότι

$$
\int_{\varGamma} \rho \, \mathrm{d}s = \int_a^b \rho\left(\mathbf{r}(t)\right) \left|\mathbf{r}'(t)\right| \mathrm{d}t
$$

όπου $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ η παραμετροποίηση της καμπύλης $\varGamma$.

- Για το $\int_{\gamma_1} \rho \, \mathrm{d}s := \int_{\overrightarrow{P_0P_1}} \rho \, \mathrm{d}s$
- Μια παραμετροποίση του $\overrightarrow{P_0P_1}$ είναι η

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_1(t) &= (\text{αρχή}) + t(\text{πέρας} - \text{αρχή}) \quad \forall t \int [0,1] \\
\mathbf{r}_1(t) &= \overrightarrow{OP_0} + t(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) \\
&= (1,1,1) + t\left((2,2,0) - (1,1,1)\right) \\
&\boxed{\mathbf{r}_1(t) = (1+t, 1+t, 1-t) \quad \forall t \in [0,1]}
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{r}_1'(t) = (1,1,-1)$
- $\left|\mathbf{r}_1'(t)\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$
- Χρειάζομαι το $\rho\left(\mathbf{r}_1(t)\right)$, δηλ.:

$$
\rho\left(\mathbf{r}_1(t)\right) = (1+t)^2 + (1+t)^2 + (1-t)^2 \implies \cdots \implies \int_{\gamma_1} = \dots
$$

- Ομοίως για γ_2

Άσκ. Υπολογίστε το έργο του πεδίου

$$
\mathbf{F}(x,y) = \left(x^2 - y,\ x + y^2\right)
$$

επί του τμήματος της παραβολής $y = x^2 + 1$ με αρχή το σημείο $A = (0,1)$ κ πέρας το σημείο $B = (3,10)$

Στο πρόχειρο βλέπω:

$$
\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} = \int \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \cdot \mathbf{r}'(t) \, \mathrm{d}t
$$

Έχω επικαμπύλιο 2$^{\text{ου}}$ είδους

$$
W = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}
$$

Θα παραμετροποιήσουμε την καμπύλη γ του τμήματος παραβολής

$$
\mathbf{r}(t) = \left(t,\ t^2 + 1\right), \quad t \in [0,3]
$$

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$$

Έτσι από τύπο έχω:

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^3 \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^3 \left(t^2 - (t^2+1),\ t + (t^2+1)^2\right) \underbrace{\cdot}_{\text{εσωτερικό γινόμενο!!!}} (1, 2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^3 \left[-1 + 2t\left(t + (t^2+1)^2\right)\right] \mathrm{d}t \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

Άσκ. Δίνεται το πεδίο $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$

(1) Είναι το $\mathbf{F}$ συντηρητικό στο πεδίο ορισμού του?

(2) Αν ναι, βρείτε τη συνάρτηση βαθμωτού δυναμικού του f, αν $f(0,0,0) = 0$

(3) Ποιές οι ισοδυναμικές επιφάνειες του $\mathbf{F}$?

(1) Π.Ο. του $\mathbb{F}$ είναι το $\mathbb{R}^3$ (διότι οι συνιστώσες συναρτήσεις είναι πολυώνυμα).
Άρα το πεδίο ορισμού είναι ΑΠΛΑ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ αφού είναι το $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{F} \text{ έχει συνεχείς μερικές παραγ.} \\ \text{σε ΑΠΛΑ συνεκτικό σύνολο}\end{array} + \mathbf{F} \text{ αστρόβιλο στο } D \implies \mathbf{F} \text{ συντηρητικό στο } D}$$

Έτσι $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (0,0,0) = \vec{0} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \implies \mathbf{F}$ αστρόβιλο σε απλά συνεκτικό σύνολο, το $\mathbb{R}^3 \xRightarrow{\text{θεωρία}} \mathbf{F}$ συντηρητικό στο $\mathbb{R}^3$

(2) Αφού $\mathbf{F}$ συντηρ. $\Rightarrow \mathbf{F}$ πεδίο κλίσεων στο $\mathbb{R}^3$, δηλ. $\mathbf{F} = \nabla f$.
Έτσι:

$$f(P) - f(A) = \int_A^P \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \quad \text{(τύπος)}$$

όπου A σημείο δικής σας επιλογής και $P = (x,y,z)$ τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}^3$.
Για $A = (0,0,0),\ P = (x,y,z)$, έχω:

$$f(x,y,z) - \cancelto{0}{f(0,0,0)} = \int_0^P \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \implies$$

$$\implies f(x,y,z) = \int_O^P \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}, \quad O = (0,0,0)$$

Εφόσον $\mathbf{F}$ συντηρητικό στο $\mathbb{R}^3$, το $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}r$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου, άρα μπορώ να επιλέξω όποιον τύπο καμπύλης εγώ επιθυμώ, αρκεί να έχει αρχή την $\mathrm{O}(0,0,0)$ και πέρας $P = (x,y,z)$. Επιλέγω να εργασθώ στο ευθ. τμήμα $\overrightarrow{OP}$. Έχω:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \text{αρχή} + t(\text{πέρας} - \text{αρχή}) \\
&= (0,0,0) + t\left((x,y,z) - (0,0,0)\right) \quad \forall t \in [0,1] \\
\implies & \boxed{\mathbf{r}(t) = (tx, ty, tz) \quad \forall t \in [0,1]} \\
\mathbf{r}'(t) &= (x,y,z) \quad \forall t \in [0,1],\ \text{οπότε} \\
\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) &= \left((tx)^2, (ty)^2, (tz)^2\right).
\end{aligned}$$

Έτσι

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^1 \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^1 \Big(t^2x^2, t^2y^2, t^2, z^2\Big) \underbrace{\cdot}_{\text{εσ. γιν}} (x,y,z)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (t^2x^2, t^2y^2, t^2z^2)\,\mathrm{d}t \\
&= (x^2+y^2+z^2)\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \\
\implies f(x,y,z) &= \frac{x^3+y^3+z^3}{3}
\end{aligned}
$$

(3) Για να βρω τις ισοδυναμικές επιφάνειες,
Θέτω:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= c, \quad c\in\mathbb{R} \\
\frac{x^3+y^3+z^3}{3} &= c \\
\implies x^3+y^3+z^3 &= c' \quad (c'=3c)
\end{aligned}
$$

Άσκ. Υπολογίστε το έργο του πεδίου $\mathbf{F}(x,y) = (x^2, xy)$ επί του τριγώνου με πλευρές $y = 1+x,\ y = 1-x,\ y=0$ Εφόσον έχω καμπύλη απλή, κλειστή, τμ. λεία, ΘΕΤΙΚΑ προσανατολισμένη, χρησιμοποιώ Θ. Green (αν και μπορώ και με ορισμό)

$$
\begin{aligned}
W = \int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^1\int_{y-1}^{1-y} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 xy\big|_{y-1}^{-y+1}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \big(y(1-y) - y(y-1)\big)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 (y-y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= y^2 - \frac{2y^3}{3}\Bigg|_0^1 = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

****Άσκ.**** Δίνεται το πεδίο $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$

(1) ΝΔΟ το $\mathbf{F}$ αστρόβιλο στο $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

(2) Υπολογίστε την κυκλοφορία του $\mathbf{F}$ επί του κύκλου $(x-2)^2+(y-2)^2 = 1$ με θατική φορά.

(3) Υπολογίστε το έργο του $\mathbf{F}$ κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής, λείας καμπύλης γ που περιέχει το $(0,0)$ με θετική φορά διαγραφής

(4) Είναι το $\mathbf{F}$ συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2 - \big\{(0,0)\big\}$?

(1)

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \tfrac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{-(x^2+y^2)+x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= 0 \quad \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 - \big\{(0,0)\big\} \text{ όπου στο } (0,0) \text{ το πεδίο } \mathbf{F}\ \mathbf{\Delta EN} \text{ ορίζεται καν.}
\end{aligned}
$$

Άρα $\mathbf{F}$ αστρόβιλο στο $\mathbb{R}^2 - \big\{(0,0)\big\}$

(2) Σκέφτομαι να εφαρμόσω Θ. Green:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Παρατηρώ ότι πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου ∂D, το πεδίο $\mathbf{F}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους (πηλίκα πολυωνύμων) και έτσι μπορώ να χρησιμοποιήσω Θ. Green:

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \iint_D \nabla \times \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}
$$

διότι στο ερ. (α) είδαμε ότι $\nabla \times \mathbf{F}(x,y) = \vec{0}\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 - \big\{(0,0)\big\}$ άρα και πάνω κ στο εσωτερικό του κύκλου

(3) Εδώ, εφόσον στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ κάθε τέτοιας καμπύλης υπάρχει τουλάχιστον μία ανωμαλία (εδώ στο σημείο $(0,0)$), το θ. Green **ΔΕΝ** μπορεί να εφαρμοσθεί.

Χρησιμοποιώ γενικευμένο θ. Green.

Με κέντρο το $(0,0)$ και οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ (ακτίνα) ορίζω κύκλο $\gamma : x^2+y^2=\varepsilon^2$ με θετική φορά (και φυσικά με κάποιο $\varepsilon > 0$ ώστε ο δίσκος $x^2+y^2 \le \varepsilon^2$ να είναι εξ' ολοκλήρου μέσα - στο εσωτερικό δηλαδή - στη γ).

Στο γραμμοσκιασμένο χωρίο R το πεδίο έχει συνεχείς μερικές παραγώγους κ ισχύει το γενικευμένο θ. Green:

0 διότι από (α) το $\mathbf{F}$ αστρόβιλο στο $\mathbb{R}^2 \supset \mathbb{R}^2 - \big\{(0,0)\big\}$

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \cancel{\iint_R \nabla \times \mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \\
&= \oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{R}
\end{aligned}
$$

Αλλά μια παραμετροποίηση του κύκλου $x^2+y^2=\varepsilon^2$ είναι η:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= (\varepsilon\cos t, \varepsilon \sin t)\,, \quad t \int [0,2\pi) \\
\mathbf{r}'(t) &= (-\varepsilon \sin t, \varepsilon\cos t)
\end{aligned}
$$

Άρα:

$$
\begin{aligned}
\oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &\overset{\text{τύπος}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varepsilon \sin t}{\varepsilon^2}, \frac{-\varepsilon\cos t}{\varepsilon^2}\right) \underbrace{\bullet}_{\text{εσωτ. γιν}} (-\varepsilon\sin t, \varepsilon \cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t - \cos^2 t\right)\mathrm{d}t = -2\pi.
\end{aligned}
$$

(4) $\boxed{\text{Αστρόβιλο + Απλά συνεκτικό} \implies \text{Συντηρητικό}}$

Αν ήταν συντηρητικό στο $\mathbb{R} - \{(0,0)\}$, θα έπρεπε **ΓΙΑ ΚΑΘΕ** κλειστή, λεία καμπύλη γ εντός του $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ να έχουμε:

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0,$$

άτοπο λόγω ερωτήματος (γ). Δηλ. το **F ΔΕΝ** είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Άσκ. Υπολογίστε το $\int_\gamma (x^2 - y)\,\mathrm{d}x + (x + y^2)\,\mathrm{d}y$ κατά μήκος του τμήματος έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

όπως στο σχήμα.

$\boxed{\text{Συμβολισμός: } \mathbf{F}(x,y) = \left(x^2 - y,\ x + y^2\right)}$

- Έστω μια παραμετροποίηση του τμήματος της έλλειψης της μορφής:

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t,\ -b\sin t)\,, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Αντικαθιστώ στον τύπο όπου $\left| \begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = -b\sin t \end{array} \right.$ και έχω:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(a\cos t)^2 + b\sin t\right] \mathrm{d}(a\cos t) + \left[a\cos t + (-b\sin t)^2\right] \mathrm{d}(-b\sin t) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-a\left(a^2\cos^2 t + b\sin t\right)\sin t - b\left(a\cos t + b^2\sin^2 t\right)\cos t\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -a^3\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -b^3\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-ab\pi}{2} + a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}(\cos t) - b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}(\sin t) \\
&= -\frac{\pi ab}{2} + a^3 \frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - b^3\frac{\sin^3 t}{t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{\pi ab}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

Παραμετροποιημένες επιφάνειες, επιφανειακά ολοκληρώματα και εφαρμογές

Ποιο είναι το εμβαδόν σφαίρας?
Ποιο είναι το εμφαδόν ελλειψοειδούς?
Ποιο είναι το εμβαδόν μιας επιφάνειας καμπυλωτής?
Το κεφάλαιο λοιπόν έρχεται να δώσει απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα.

Ορ. Έστω $D \in \mathbb{R}^2$ τόπος του $\mathbb{R}^2$, και $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{r}(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big)$ ΣΥΝΕΧΗΣ διανυσμ. συνάρτηση δύο μεταβλητών. Τότε καλούμε την εικόνα αυτής $\mathbf{r}(D)$ **ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ** Σ σε παραμετρική μορφή.

Αν η $\mathbf{r}$ είναι 1-1, τότε η επιφάνεια Σ καλείται ΑΠΛΗ. Στο εξής ασχολούμαστε μόνο με απλές επιφάνειες.

π.χ.

$$\mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, \sqrt{R^2-u^2-v^2}\right) \qquad \text{(άνω ημισφαίριο κέντρου } (0,0,0) \text{ κ ακτίνας } R>0)$$
$$\mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, u^2+v^2\right) \qquad \text{(κυκλικό παραβολοειδές)}$$
$$\mathbf{r}(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v) \qquad \text{κύλινδρος } \forall u \in [0,2\pi), v \in \mathbb{R}$$

Έστω Σ είναι μια $\boxed{\text{απλή}}$ επιφάνεια με παραμετροποίηση

$$\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2\mathbb{R}^3 : \mathbf{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

Αν $u = u_0$ σταθεροποιημένο, τότε η

$$\mathrm{C}_{u_0} := \big(x(u_0,v), y(u_0,v), z(u_0,v)\big)$$

είναι **καμπύλη** πάνω στην επιφάνεια Σ, και για $v = v_0$ σταθεροποιημένο, η

$$\mathrm{C}_{v_0} = \big(x(u,v_0), y(u,v_0), z(u_v 0)\big)$$

είναι μια άλλη **καμπύλη** πάνω στην επιφάνεια Σ. Έτσι, αν $Q_0 = \mathbf{r}(u_0,v_0) \in \Sigma$, τότε το Q_0 ορίζεται ως η τομή των **καμπύλων** C_{u_0} και C_{v_0}, ακριβώς όπως το σημείο $P_0 = (u_0,v_0) \in D$ ορίζεται ως τομή των ευθειών $u = u_0$ και $v = v_0$. Για διάφορες τιμές των u,v προκύπτει λοιπόν ένα δίκτυο παραμετρικών γραμμών πάνω στην επιφάνεια Σ και οι ... καλούνται ακτινικές γραμμές στην επιφάνεια Σ.

Έστω Σ είναι μια $\boxed{\text{απλή και διαφορίσιμη}}$ επιφάνεια με παραμετροποίηση

$$\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

Έστω $Q_0 = \mathbf{r}(u_0,v_0)$ σημείο της επιφάνειας Σ. Τότε η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφ. Σ στο σημείο Q_0 (σε παραμετρική μορφή) είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(u,v) &= \mathbf{r}(u_0,v_0) + \mathrm{J}_{\mathbf{r}}(u_0,v_0)\cdot(P-P_0)\\
&= \begin{bmatrix} x(u_0,v_0)\\ y(u_0,v_0)\\ z(u_0,v_0)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0)\\ y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0)\\ z_u(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u-u_0\\ v-v_0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} x(u_0,v_0) + x_u(u_0,v_0)(u-u_0) + x_v(u_0,v_0)(v-v_0)\\ y(u_0,v_0) + y_u(u_0,v_0)(u-u_0) + y_v(u_0,v_0)(v-v_0)\\ z(u_0,v_0) + z_u(u_0,v_0)(u-u_0) + z_v(u_0,v_0)(v-v_0)\end{bmatrix}\\
&= \mathbf{r}(u_0,v_0) + \mathbf{r}_u(u_0,v_0)(u-u_0) + \mathbf{r}_v(u_0,v_0)(v-v_0)\\
\mathbf{T}(u,v) &= \mathbf{r}(u_0,v_0) + \mathbf{r}_u(u_0,v_0)(u-u_0) + \mathbf{r}_v(u_0,v_0)(v-v_0)
\end{aligned}$$

(εξίσ. επιπέδου που διέρχεται από το $Q_0 = \mathbf{r}(u_0,v_0)$ και παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{r}_u(u_0,v_0)$ και $\mathbf{r}_v(u_0,v_0)$ υπό την προϋπόθεση $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0) \neq \vec{0}$

Ορ. Αν Σ απλή κ διαφορίσιμη επιφάνεια, καλούμε **ΚΑΘΕΤΟ** της επιφάνειας σε σημείο της $Q_0 = \mathbf{r}(u_0,v_0)$ να είναι το διάνυσμα $\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0)$.

Τότε

- η Σ καλείται **ΟΜΑΛΗ**, αν $\mathbf{n}(u,v) \neq 0$ σε κάθε σημείο (u,v)
- η Σ καλείται **ΛΕΙΑ**, αν η Σ είναι *ομαλή*,και η $\mathbf{r}$ είναι όχι μόνον διαφορίσιμη, αλλά και η παράγωγός της είναι συνεχής συνάρτηση των u,v
- η Σ καλείται **προσανατολίσιμη**, αν είναι *ΟΜΑΛΗ* και η κάθετος αυτής $\mathbf{n}(u,v)$ είναι συνεχής συνάρτηση των u και v

Προφανώς:

$$\text{ΛΕΙΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ} \implies \text{ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΙΜΗ}$$

Στο εξής ασχολούμαστε αποκλειστικά με λείες επιφάνειες.

Ορ. Κάθε προσανατολίσιμη επιφάνεια λέμε ότι έχει δύο όψεις. Η μια όψη καθορίζεται απ' την κατεύθυνση της καθέτου $\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ και η άλλη απ' την κατεύθυνση της $-\mathbf{n}_0 = \frac{-\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ (σε κάθε σημείο της)

Η Σ καλείται **προσανατολισμένη** αν εμείς έχουμε ορίσει στη Σ έναν προσανατολισμό ως θετικό.

Ορ. Έστω Σ λεία επιφάνεια. Καλούμε **σύνορο** της Σ την καμπύλη (ή καμπύλες) ή σημείο (ή σημεία), μέσω των οποίων περνάμε (με συνεχή τρόπο) από τη μια όψη της επιφάνειας Σ στην άλλη όψη. Αν το σύνορο της Σ είναι το $\emptyset$, η Σ καλείται $\boxed{\text{κλειστή}}$ επιφ., αλλιώς καλείται $\boxed{\text{ανοικτή}}$.

Ορ. Έστω Σ λεία, ανοικτή, προσανατολισμένη επιφάνεια. Θα λέμε ότι το σύνορό της διαγράφεται με τη θετική φορά, αν κινούμενη κατά μήκος τους συνόρου με το κεφάλι μας να δείχνει προς τον προσανατολισμό (που ήδη έχουμε ορίσει), τότε αφήνουμε την επιφάνεια πάντα στο αριστερό μας χέρι.

Παραδείγματα

- Έστω $z = f(x,y) \quad (x,y) \in D$ είναι μια λεία επιφάνεια.

  Παραμετροποίηση αυτής:

$$\mathbf{r}(x,y) = \big(x, y, f(x,y) \quad (x,y) \in D\big)$$

$$\mathbf{n}(x,y) = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \big(-f_x, -f_y, 1\big)$$

  Προφανώς $\quad \mathbf{n}(x,y) \neq 0 \; \forall (x,y)$, ομαλή και μάλιστα λεία επιφάνεια, αφού f λεία (δελ. f_x, f_y συνεχείς)

- **Σφαίρα** $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

  1ος τρόπος

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{cases} \Big(x, y, c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\Big) & \text{(άνω ημισφαίριο)} \\ \Big(x, y, c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\Big) & \text{(κάτω ημισφαίριο)} \end{cases}, \; \forall (x,y) : (x-a)^2 - (y-b)^2 \le R$$

  2ος τρόπος $\quad$ με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (a + R\cos\theta \sin\varphi, \; b + R\cos\theta\sin\varphi, \; c + R\cos\varphi)$$

- Κύλινδρος $(x-a)^2 - (y-b)^2 = R^2, \quad c \le z \le d$

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (a + R\cos\theta, \; b + R\sin\theta, \; z) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \; c \le z \le d$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \cdots$$

Εμβαδόν επιφάνειας σε παραμετρική μορφή
Επιφανειακά ολοκλ. 1ου είδους

Έστω Σ είναι λεία επιφάνεια με παραμετροποίηση

$$\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

Ποιο το εμβαδόν της επιφάνειας Σ?

Για απλότητα θεωρούμε D να είναι ορθογώνιο χωρίο. Θεωρούμε μια διαμέριση Δ του ορθογωνίου D σε $N \cdot M$ στοιχειώδη ορθογώνια που με τη σειρά της διαμερίζει την επιφ. Σ σε $N \cdot M$ στοιχειώδη καμπυλόγραμμα παρ/μα όπως στο σχήμα

Έστω στοιχειώδες ορθογώνιου του D Αν η Διαμέριση Δ είναι πολύ πυκνή, δηλ. το πλάτος της $|\Delta| \to 0$, τότε χωρίς μεγάλο σφάλμα θεωρώ ότι το εμβαδόν στοιχειώδους καμπυλόγραμμου παραλληλογράμμου ισούται με:

$$E_{\substack{\text{στοιχειώδους}\\ \text{καμπύλης}\\ \text{παρ/μου}}} \approx E_{\substack{\text{παρ/μου}\\ Q_{ij}Q_{ij}^1Q'_{ij}Q_{ij}^2}} = \underbrace{\left|\overrightarrow{Q_{ij}Q_{ij}^1} \times \overrightarrow{Q_{ij}Q_{ij}^2}\right|}_{\begin{pmatrix}\text{εφαρμογή εξωτ. γινομένου}\\ \text{βλέπε αναλυτική γεωμετρία}\end{pmatrix}}$$

Αλλά $\left(E = |\vec{a} \times \vec{b}|\right)$

$$\left|\begin{array}{l} \overrightarrow{Q_{ij}Q_{ij}^1} \overset{\text{διαφορικό}}{\approx} \mathbf{r}_u(u_i, v_j)\,\mathrm{d}u_i \\ \overrightarrow{Q_{ij}Q_{ij}^2} \approx \mathbf{r}_v(u_i, v_j)\,\mathrm{d}v_i \end{array}\right\}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} E_{\substack{\text{στοιχ. καμπύλ.}\\ \text{παρ/μου}}} &\approx \left|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)\right| \mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}v_j \\ &= \left|\mathbf{n}(u_i, v_j)\,\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}v_j\right| \end{aligned}$$

Έτσι

$$E \approx \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} \left|\mathbf{n}(u_i, v_j)\right| \mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}v_j$$

Εφόσον η $\underline{\mathbf{n}(u, v)}$ είναι και συνεχής συνάρτηση, το παραπάνω διπλό άθροισμα τείνει στον αριθμό:

$$E = \iint_D \left|\mathbf{n}(u, v)\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

υπό την προϋπόθεση ότι το πλάτος διαμέρισης τείνει στο μηδέν.

Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται και για μη ορθογώνια χωρία.

Ορ. Έστω Σ λεία επιφάνεια με παραμετροποίηση $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ είανι **συνεχές** βαθμωτό πεδίο πάνω στην επιφάνεια Σ. Καλούμε επιφανειακό ολοκλήρωμα $1^{\text{ου}}$ είδους του βαθμωτού πεδίου **πάνω** στην επιφάνεια Σ, συμβολικά

$$\iint_\Sigma f\,\mathrm{d}S,$$

(όπου η ποσότητα

$$\mathrm{d}S = \left|\mathbf{n}(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right|$$

καλείται διαφορικό εμβαδού της επιφ. Σ) να είναι ο **ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ**

$$\underbrace{\iint_\Sigma f\,\mathrm{d}S}_{\text{συμβολισμός}} = \underbrace{\iint_D f\left(\mathbf{r}(u, v)\right)\left|\mathbf{n}(u, v)\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}_{\text{διπλό ολοκλήρωμα}}$$

Εφαρμογές

- $\iint\limits_\Sigma f\,\mathrm{d}S =$ συνολική μάζα/φορτίο πάνω στην επιφάνεια Σ, αν f πυκνότητα μάζας/φορτίου
- $\iint\limits_\Sigma f\,\mathrm{d}S =$ εμβαδόν της επιφάνειας Σ

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων

Έστω Σ λεία επιφάνεια με παραμετροποίηση $\mathbf{r} : \mathbf{D} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \to \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ και $\mathbf{F} : \Sigma \to \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ είναι **ΣΥΝΕΧΕΣ** διανυσματικό πεδίο επί της επιφ. Σ.
(π.χ. $\mathbf{F}$ πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{F} = \mathbf{v}$ ή πυκνότητα ροής $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$).

Έστω για απλότητα D ορθογώνιο χωρίο, Δ διαμέριση του D σε π.χ. $N \cdot M$ το πλήθος στοιχειώδη ορθογώνια, που μετη σειρά της διαμερίζει την επιφ. Σ σε $N \cdot M$ το πλήθος στοιχειώδη καμπυλόγραμμα παρ/δα.

Έστω ένα τέλειο στοιχειώδες καμπυλόγραμμο παρ/δο της μορφής Τότε το

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\mathbf{u_i}, \mathbf{v_j})\right) \underbrace{\cdot}_{\text{εσωτ. γιν}} \left(\overrightarrow{Q_{ij}Q_{ij}^1} \times \overrightarrow{Q_{ij}Q_{ij}^2}\right) \\ =&\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\mathbf{u_i}, \mathbf{v_j})\right) \cdot \left(\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}(\mathbf{u_i}, \mathbf{v_j})\, \mathrm{d}\mathbf{u_i}\, \mathrm{d}\mathbf{v_j}\right) \\ =&\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\mathbf{u_i}, \mathbf{v_j})\right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u_i}, \mathbf{v_j})\, \mathrm{d}\mathbf{u_i}\, \mathrm{d}\mathbf{v_j} \end{aligned}$$

προσεγγίζει τον **ΟΓΚΟ** που ``ρέει'' διαμέσου

προς την καυτεύθυνση της καθέτου $\mathbf{n}$ (αν $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} > \mathbf{0}$) στο (u_i, v_j) είτε προς την αντίθετη κατεύθυνση αν $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} < \mathbf{0}$ στο $\left(u_i, v_j\right)$). Αν αθροίσω ως προς όλα τα στοιχειώδει καμπυλόγραμμα χωρία παίρνω:

$$\Phi(\underbrace{\text{flux}}_{\text{ροή}}) \approx \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\mathbf{u_i}, \mathbf{v_j})\right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u_i}, \mathbf{v_j})\, \mathrm{d}\mathbf{u_i}\, \mathrm{d}\mathbf{v_j}$$

και εφ' όσον η $\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ **συνεχής** πάνω στη Σ, όσο το πλάτος της διαμέρισης Δ τείνει στο μηδέν, το παραπάνω διπλό άθροισμα τείνει στον ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

$$\iint_D \underbrace{\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}_{\text{διπλό ολοκλήρ.}} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

Ορ. Αν Σ λεία επιφάνεια με παραμετροποίηση $\mathbf{r} : \mathbf{D} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \to \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ και κάθετο $\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}$ και $\mathbf{F}$ συνεχές πεδίο επί της Σ, καλούμε επιφανειακό ολοκλ. του πεδίου $\mathbf{F}$ επί της Σ ή **ΡΟΗ**, συμβολικά:

$$\Phi = \iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

να είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\Phi = \iint \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{D}} \underbrace{\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}_{\text{διπλό ολοκλ.}} \mathrm{d}\mathbf{u}\, \mathrm{d}\mathbf{v}$$

όπου

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \mathrm{d}\mathbf{u}\, \mathrm{d}\mathbf{v}$$

καλείται διαφορικό της επιφάνειας Σ.

Παρατηρήσεις

•

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \mathrm{d}\mathbf{u}]\mathbf{difv} \\ &= \iint_D \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right) \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\left|\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right|}}_{\mathbf{n_0}} \underbrace{\left|\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v}_{\mathrm{d}S} \\ &= \iint_\Sigma \underbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n_0}}_{\text{επιφ. ολοκλ. } 1^{\text{ου}} \text{ είδους}} \mathrm{d}S \end{aligned}$$

- Το επιφανειακό ολοκλ. διανυσμ. πεδίων **ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ** απ' τον προσανατολισμό της επιφάνειας Σ.

- $\mathbf{F} = (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3})$, $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \big(\mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{y}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{z}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\big)$
  $\mathbf{n} = \mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & x_u & y_u & z_u & x_y & y_y & z_y \end{vmatrix} = \left(\frac{\mathrm{D}(\mathbf{y},\mathbf{z})}{\mathrm{D}(\mathbf{u},\mathbf{v})}, \frac{\mathrm{D}(\mathbf{z},\mathbf{x})}{\mathrm{D}(\mathbf{u},\mathbf{v})} \cdot \frac{\mathrm{D}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\mathrm{D}(\mathbf{u},\mathbf{v})}\right)$
  Τότε

$$\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_D \Big(f_1\left(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right), f_2\left(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right) f_3\left(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\right)\Big) \cdot \left(\frac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)}, \frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)} \cdot \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$\overset{\text{συμβ.}}{=} \iint_\Sigma \underbrace{f_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + f_2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + f_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{συμβολισμός για επιφ. ολοκλ. πεδίου}}$$

  Τέλος, εφόσον $n_0 = \left(\mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{i}}, \mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{j}}, \mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{k}}\right)$
  Άρα

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_0}\,\mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \iint_\Sigma (f_1, f_2, f_3) \cdot \left(\mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{i}}, \mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{j}}, \mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{k}}\right) \mathrm{d}S \\ &= \iint_\Sigma f_1 \cdot \left(\mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{i}}\right) + \iint_\Sigma f_2 \cdot \left(\mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{j}}\right) + \iint_\Sigma f_3 \cdot \left(\mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{k}}\right) \end{aligned}$$

  Τα

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma f_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_\Sigma f_1 \cdot \left(\mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{i}}\right) \\ \iint_\Sigma f_2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_\Sigma f_2 \cdot \left(\mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{j}}\right) \\ \iint_\Sigma f_3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_\Sigma f_3 \cdot \left(\mathbf{n_0} \cdot \tilde{\mathbf{k}}\right) \end{aligned}$$

  καλούνται επιφ. ολοκλ. $2^{\text{ου}}$ είδους

Έστω Σ απλή, κλειστή, λεία επιφάνεια. Τότε χωρίζει τον $\mathbb{R}^3$ σε ένα φραγμένο στερεό, **το εσωτερικό** της Σ, και σε ένα μη φραγμένο στερεό, το εξωτερικό της.

Αν Σ κλειστή επιφάνεια, γράφουμε:

$$\oiint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \quad \left(\text{αντί } \iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\right)$$

***Θ* Απόκλισης (Gauss)** Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ κανονικό και φραγμένο στερεό με σύνορο $\partial\Omega$ και είναι απλή, $\boxed{\text{ΚΛΕΙΣΤΗ}}$, τμημ. λεία επιφάνεια, με **ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΟΨΗ της**. Αν

$$\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

διανυσματικό πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους στο Ω και στα σύνορα του $\partial\Omega$, τότε:

$$\underbrace{\oiint_{\partial\Omega}}_{\substack{\text{ροή του πεδίου } \mathbf{F} \\ \text{διαμέσου της επιφάνειας } \partial\Omega}} \quad \underbrace{=}_{\text{ισούται}} \underbrace{\iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{\substack{\text{με τη συνολική} \\ \text{απόκλιση του } \mathbf{F} \\ \text{στο στερεό } \Omega}}$$

* Υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις, αν το **F** είναι ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΟ στο Ω και στο σύνορό του $\partial\Omega$, τότε:

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

Αν το πεδίο **τουλάχιστον σ' ένα σημείο τού** Ω έχει ανωμαλία (δεν έχει συνεχείς μερικές παραγ.) τότε το θ. Gauss **δεν** ισχύει, αλλά παρ' όλα αυτά ισχύει το ακόλουθο:

Θ (Γενικευμένο θεώρ. απόκλισης) Αν $\Omega_0,\ \Omega_1, \dots,\ \Omega_n$ είναι κανονικά φραγμένα στερεά, έτσι ώστε $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ στο εσωτερικό του Ω_0 και κάθε στερεό Ω_j στο εσωτερικό του $\Omega_i\ \forall i \neq j$, τότε αν $\partial\Omega_0, \dots, \partial\Omega_n$ είναι απλές, κλειστές, τμημ. λείες επιφάνειες προσανατολισμένες στην εξωτερική όψη, και αν $\mathbf{F} : \Omega_0 - \left(\bigcup_{i=1}^N \Omega_i\right) \to \mathbb{R}^3$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πάνω στο σύνορο $\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_n$ και στο στερεό

$$\Omega_0 = \left(\bigcup_{i=1}^N \Omega_i\right)$$

, τότε

$$\oiint_{\partial\Omega_0} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \oiint_{\partial\Omega_i} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iiint_{\Omega_0 - \left(\bigcup_{i=1}^N \Omega_i\right)} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

Τύπος Stokes (Γενίκευση θεωρήματος Green για τον $\mathbb{R}^3$ Έστω Σ είναι απλή, $\boxed{\text{ΑΝΟΙΚΤΗ}}$, τμημ. λεία και **προσανατολισμένη** επιφάνεια με παραμετροποίηση

$$\mathbf{r}\ \ D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{r}(u, v) = \big(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\big)$$

ώστε η **r** έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης.

Αν $\partial\Sigma$ είναι το σύνορο της επιφάνειας Σ, και είναι μια απλή, κλειστή, λεία καμπύλη με τη **ΘΕΤΙΚΗ ΦΟΡΑ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ** και $\mathbf{F} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο με **συνεχείς μερικές παραγώγους** στην επιφ. Σ και στο σύνορό της $\partial\Sigma$, τότε:

$$\underbrace{\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}_{\substack{\text{έργο/κυκλοφορία του πεδίου } \mathbf{F} \\ \text{κατά μήκος της } \partial\Sigma}} \quad \underbrace{=}_{\text{ισούται}} \quad \underbrace{\iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}_{\substack{\text{με τη συνολική} \\ \text{περιστροφή του } \mathbf{F} \\ \text{πάνω στην επιφ. } \Sigma}}$$

ροή $\leftrightarrow$ απόκλιση

έργο/κυκλοφ. $\leftrightarrow$ περιστροφή

Παρατηρήσεις

(1) Αν Σ είναι απλή, ΚΛΕΙΣΤΗ, τμ. λεία επιφάνεια, τότε υπό τις προϋποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος ισχύει:

$$\oiint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

.

Πράγματι, αν Σ επιφάνεια με προσανατολισμό όπως στο Σχήμα και E επίπεδο που την τέμμνει σε καμπύλη με προσανατολισμό όπως στο σχήμα.

Τότε, αν Σ_1, Σ_2 επιφάνειες όπως στο σχήμα, με εφαρμογή του τύπου Stokes έχουμε:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\Sigma_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

και

$$\oint_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\Sigma_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\begin{aligned} (+) \quad 0 &= \iint_{\Sigma_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_2} \nabla \times \mathbf{S} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \end{aligned}$$

(2) Αν Σ_1, Σ_2 απλές, ανοικτές, τμημ. λείες επιφ. με **ΚΟΙΝΟ προσανατολισμό** και **ΚΟΙΝΟ σύνορο**, τότε

$$\iint_{\Sigma_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

THE END

Ασκήσεις

Άσκ. Υπολογίστε το εμβαδόν της επιφάνειας $z = x^2 + y^2$ για $0 \leq z \leq 9$.

Έχω επιφανειακό ολοκλήρωμα $1^{\text{ου}}$ είδους

$$E = \iint_{\Sigma} 1 \cdot \underbrace{\mathrm{d}S}_{\text{διαφορικό εμβαδού επιφ.}} \overset{\text{τύπος}}{=} \iint_{D} 1 \underbrace{\left|\mathbf{n}(u,v)\right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v}_{\mathrm{d}S}$$

D: προβολή της επιφάνειας που με ενδιαφέρει στο επίπεδο (u, v)

- Μια παραμετροποίηση της επιφάνειας είναι η εξής:

$$\mathbf{r}(x,y) = \Big(x,\ y,\ x^2 + y^2\Big),\ \forall\ (x,y) : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 9}_{\text{προβολή της επιφάνειας στο } Oxy \text{ επίπεδο}}$$

-

$$\mathbf{n}(x,y) = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

-

$$\left|\mathbf{n}(x,y)\right| = \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
E &\overset{\text{τύπος}}{=} \iint_{x^2+y^2\leq 9} \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&\overset{\substack{\text{πολικές} \\ x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^3 \Big(1 + 4\rho^2\Big)^{\frac{1}{2}} \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^3 \Big(1 + 4\rho^2\Big)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}(1 + 4\rho^2) \frac{1}{8} \\
&= \frac{\pi}{4} (1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Big|_0^3 \\
&= \frac{\pi}{6} \Big(37^{\frac{3}{2}} - 1\Big)
\end{aligned}$$

Άσκ. Υπολογίστε το εμβαδόν σφαίρας $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Αρκεί να υπολογίσω το εμβαδόν του άνω ημισφαιρίου:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad \text{δηλ.}$$

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

Έχω επιφανειακό ολοκλήρωμα $1^{\text{ου}}$ είδους

$$E=\iint_{\Sigma} 1\cdot \underbrace{\mathrm{d}S}_{\text{διαφορικό εμβαδού επιφ.}} \overset{\text{τύπος}}{=} \iint_D 1 \underbrace{\left|\mathbf{n}(u,v)\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}_{\mathrm{d}S}$$

D: προβολή της επιφάνειας που με ενδιαφέρει στο επίπεδο (u,v)

- Μια παραμετροποίηση της επιφάνειας είναι η εξής:

$$\mathbf{r}(x,y)=\left(x,\ y,\ \sqrt{R^2-x^2-y^2}\right),\ \forall\,(x,y): \underbrace{x^2+y^2\le 9}_{\text{προβολή της επιφάνειας στο } Oxy \text{ επίπεδο}}$$

- $\mathbf{n}(x,y)=\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{vmatrix}=\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},1\right)$
- $\left|\mathbf{n}(x,y)\right|=\sqrt{\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}+1}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

Έτσι:

$$E_{\substack{\text{άνω}\\\text{ημισφ.}}}=\iint_{x^2+y^2\le R^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\substack{\text{πολικές}\\ x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta}}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi R\int_0^R\left(R^2-\rho^2\right)\mathrm{d}\left(R^2-\rho^2\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-2\pi R\left(R^2-\rho^2\right)\Big|_0^R$$

$$=2\pi R^2$$

Τελικά

$$\mathrm{E}_{\text{σφαίρας}}=2\cdot 2\pi R^2=4\pi R^2$$

Άσκ. Υπολογίστε τη ροή του πεδίου $\mathbf{F}(x,y,z):\left(3xy^2,\ xe^z,\ z^3\right)$ διαμέσου κλειστής επιφάνειας που ορίζεται από τον κύλινδρο $y^2+z^2=a^2$ και τα επίπεδα $x=-1$ και $x=2$. Θεωρήστε την επιφ. προσανατολισμένη προς την εξωτερική της όψη.

Έχω πεδίο που ορίζεται στο $\mathbb{R}^3$ με συνεχείς μερικές παραγώγους σ' όλο το $\mathbb{R}^3$ και εφόσον έχω ροή μπορώ να χρησιμοποιήσω το θεώρ. απόκλισης Gauss

$$\oiint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

όπου

Έτσι

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iiint_\Omega \tfrac{\partial}{\partial x}\left(3xy^2\right) + \tfrac{\partial}{\partial y}\left(xe^z\right) + \tfrac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \iiint_\Omega \left(3y^2 + 0 + 3z^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= 3\iiint_\Omega (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&\underset{\begin{cases} y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \\ x = x \end{cases}}{\overset{\text{κυλινδρικές}}{=}} \quad 3\int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^2 \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= 3\cdot 3\cdot 2\pi \cdot \int_0^a \rho^3\,\mathrm{d}\rho - 18\pi \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^a \\
&= \frac{9\pi a^4}{2}
\end{aligned}
$$

Αυτήν την άσκηση να την ξέρουμε σαν θεωρία.

Άσκ

Ακίνητο σημειακό φορτίο $-q$ στο σημείο $(0,0,0)$ ορίζει πεδίο έντασης

$$\mathbf{E} = \frac{-q\vec{r}}{r^3},\ \vec{r} = (x,y,z)$$

και $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(1) ΝΔΟ $\mathbf{E}$ ασυμπίεστο στο $\mathbb{R}^3 - \big\{(0,0,0)\big\}$

(2) Δείξτε ότι η ροή του πεδίου $\mathbf{E}$ διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής, απλής, λείας επιφάνειας που περιέχει το $(0,0,0)$ στο εσωτερικό της και είναι προσανατολισμένη προς την εξωτερική όψη ισούται με

$$\Phi = -4\pi q$$

(3) ΝΔΟ $\mathbf{E}$ συντηρητικό στον $\mathbb{R}^3 - \big\{(0,0,0)\big\}$

(1) Έχω Π.Ο του πεδίου $\mathbf{E} := \mathbb{R}^3 - \big\{(0,0,0)\big\}$
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \big\{(0,0,0)\big\}$ έχω:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{-q\vec{r}}{r^3}\right) = -q\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \underset{\text{γνωστός}}{\overset{\text{τύπος}}{=}} -q\left(\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\cdot \vec{r} + \frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{r}\right)$$

$$\nabla\cdot\vec{r} = \left(\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z} \cdot (x,y,z)\right) = \tfrac{\partial x}{\partial x} + \tfrac{\partial y}{\partial y} + \tfrac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\cancelto{0}{\nabla 1}\cdot r^3 - 1\cdot\nabla r^3}{r^6} = \frac{-\nabla r^3}{r^6} = \frac{-3r^2\nabla r}{r^6} = \frac{-3\nabla r}{r^4}$$

Αλλά $\nabla r = \nabla\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\vec{r}}{r}$.

Τελικά

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= -q\left(\frac{-3\cdot\vec{r}}{r^5}\cdot\vec{r}+\frac{1}{r^3}\cdot 3\right)\\
&= -q\left(\frac{-3}{r^5}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r})+\frac{3}{r^3}\right)\\
&= -q\left(\frac{-3r^2}{r^5}-\frac{3}{r^3}\right)=0
\end{aligned}
$$

(2) Έστω Σ κλειστή επιφ. όπως στο σχήμα.

Αφού έχω ανωμαλία στο $(0,0,0)$ ορίζω σφαίρα:

$$\Sigma_1 : x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$$

(για $\varepsilon>0$ τυχαίο, αλλά τέτοιο ώστε η σφαιρική μπάλα $x^2+y^2+z^2\leq\varepsilon^2$ να βρίσκεται στο εσωτερικό της επιφ. Σ)

Θεωρώ τη Σ_1 προς τα έξω προσανατολισμένη και εφαρμόζω γενικευμένο θεώρ. Gauss.

0 λόγω ερωτήμ. (1)

$$\oiint_{\Sigma}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=\oiint_{x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}+\cancel{\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

όπου Ω στερεό, φραγμένο με σύνορο $\Sigma\cup\Sigma_1$

$$
\begin{aligned}
&= \oiint_{x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2}\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\\
&\overset{\text{ορισμός}}{=} \oiint_{x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}_0\,\mathrm{d}S\\
&\overset{\text{τύπος}}{=} \left(\iint_D \mathbf{E}\begin{pmatrix}\text{πάνω στο}\\ \text{σύνορο}\end{pmatrix}\cdot\mathbf{n}_0\begin{pmatrix}\text{πάνω στο}\\ \text{σύνορο}\end{pmatrix}\cdot\left|\mathbf{n}(x,y)\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\\
&\overset{\mathbf{n}_0=\frac{\vec{r}}{r}}{=} \iint_{x^2+y^2\leq\varepsilon^2}\frac{-q\cdot\vec{r}_{\text{σφαίρας}}}{\varepsilon^3}\cdot\frac{\vec{r}_{\text{σφαίρας}}}{\varepsilon}\left|\mathbf{n}(x,y)\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\overset{\vec{r}_{\text{σφαίρας}}\cdot\vec{r}_{\text{σφαίρας}}=\varepsilon^2}{=} -q\iint_{x^2+y^2\leq\varepsilon^2}\frac{\varepsilon^2}{2^4}\left|\mathbf{n}(x,y)\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{-q}{\varepsilon^2}\iint_{x^2+y^2\leq\varepsilon^2}\left|\mathbf{n}(x,y)\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= -\frac{q}{\varepsilon^2}\iint_{x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2}1\,\mathrm{d}S\\
&= -\frac{q}{\varepsilon^2}\text{Εμβ. σφαίρας}\\
&= \frac{-q}{\varepsilon^2}4\pi t^2
\end{aligned}
$$

Περίφημος νόμος του Gauss Η ροή του πεδίου της έντασης διαμέσου κλειστής, προς τα έξω προσανατολισμένης επιφάνειας είναι ανάλογη του φορτίου στο εσωτερικό της επιφάνειας.

(3) Το πεδίο $\mathbf{E}$ έντασης είναι ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ, άρα από θεωρία είναι ΑΣΤΡΟΒΙΛΟ στο σύνολο $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

Επειδή το $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ είναι σύνολο ΑΠΛΑ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ, από θεώρημα έχουμε ότι το $\mathbf{E}$ συντηρητικό στο $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

E είναι ΣΥΝΟΛΟ **ΑΠΛΑ** συνεκτικό: Κάθε **κλειστή** καμπύλη στο E μπορεί με **συνεχή τρόπο** να ``συσταλεί", σε **σημείο** του E παραμένοντας ΠΑΝΤΑ στο E.

Άσκ. Μα επαληθευτεί ο τύπος Stokes για το πεδίο $\mathbf{F} = (y,\ -2xz,\ yz^2)$ και την (ανοικτή) επιφάνεια του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ για $z \leq 1$ με τον προσανατολισμό του σχήματος

$$\oint_{\underbrace{\partial\Sigma}_{\text{σύνορο επιφ. (ΠΡΟΣΟΧΗ! Με θετική φορά)}}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_\Sigma \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

- Το σύνορο $\partial\Sigma$ είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ πάνω στο επίπεδο z=1, με θετική φορά όπως στο σχήμα.

  Όσον αφορά το $\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ έχουμε

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \overset{\text{τύπος}}{=} \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

  Μια παραμετροποίηση του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ στο επίπεδο $z = 1$ είναι η:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1)\ \ \forall t \in [0, 2\pi)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t,\ \cos t, 0)$$

  και αντικαθιστώ

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \Big(\sin t, -2\cos t, \sin t \cdot 1^2\Big) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - 2\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} -1 - \cos^2 t\,\mathrm{d}t = -2\pi - \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= -2\pi - \int_0^{2\pi} 1 + \cos(2t)\,\mathrm{d}t = -2\pi - \pi = -3\pi
\end{aligned}$$

- Όσον αφορά τον όρο $\iint_\Sigma \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$

  Παρατήρηση: Αν Σ_1 είναι το τμήμα επιπέδου $z = 1$ για κάθε $(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1$, τότε ισχύει ότι:

$$\iint_\Sigma \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

  με την κάθετο της Σ_1 να είναι όπως στο σχήμα

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -2xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z + 2x,\ 0, -2z - 1)$$

$$\iint_{\Sigma_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \overset{\text{τύπος}}{=} \iint_D \nabla \times \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(x, y)\big) \cdot \mathbf{n}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

  όπου $\mathbf{r}(x, y)$ είναι η παραμετροποίηση της Σ_1 και $D :=$ προβολή της Σ_1 στο Oxy επίπεδο

Παραμετροπ. της $\Sigma_1 : z = 1$

$$\mathbf{r}(x,y) = (x,y,1) \ \forall (x,y) : x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\mathbf{n}(x,y) = \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

Τελικά

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_{\Sigma_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(1^2 + 2x,\ 0,\ -2 \cdot 1 \cdot 1\right) \cdot (0,0,1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} -3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -3 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= -3 \cdot \text{εμβαδόν δίσκου } x^2 + y^2 = 1 \\
&= -3\pi
\end{aligned}$$

Μέρος II
Ζάχαρης

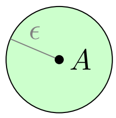
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$$\begin{aligned} P &= (x_1, \dots, x_n) \quad R^n \\ A &= (a_1, \dots, a_n) \quad R^n \\ B &= (b_1, \dots, b_n) \quad R^n \end{aligned}$$

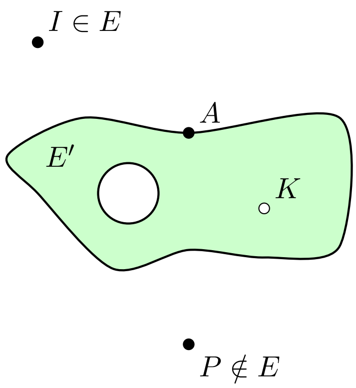
$$\begin{aligned} d(A,B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} \\ \left\| \overrightarrow{OA} \right\| &= \sqrt{(a_1)^2 + \cdots + (a_n)^2} \\ \left\| \overrightarrow{OA} \right\| &= \sqrt{(b_1)^2 + \cdots + (b_n)^2} \end{aligned}$$

Περιοχή σημείου ακτίνας ϵ $\Pi_\epsilon(A)$

$$\Pi_\epsilon(A) = \left\{ P \in \mathbb{R}^n : d(P, A) < \epsilon \right\}$$



Σημείο συσσώρευσης



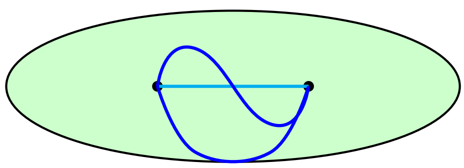
$$E = (E' - \{K\}) \cup \{I\}$$

- Σημείο συσσώρευσης: $\left(\Pi_\epsilon(P) - \{P\}\right) \cap E \neq \emptyset$
- Παράγωγο σύνολο: $'$ (τα σημεία συσσώρευσης του)
- Κλειστότητα του : $\cup E'$
- Συνοριακό σημείο : $\forall \epsilon > 0 : \Pi_\epsilon(A) \cap E \neq \emptyset$ και $\Pi_\epsilon(A) \cap (\mathbb{R}^n - E) \neq \emptyset$ (το αλλά και το συμπληρωματικό του ανήκουν σε κάθε περιοχή του).
- Κλειστό σύνολο: Συμπεριλαμβάνει το σύνορο
- Ανοικτό σύνολο: Δεν συμπεριλαμβάνει κανένα συνοριακό σημείο
- Οι χώροι $\emptyset$ και $\mathbb{R}^n$ θεωρούνται κλειστοί και ανοικτοί.

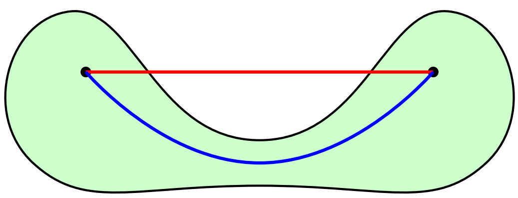
Συνεκτικό σύνολο (ή συναφές) Κάθε δύο σημεία του συνόλου μπορούν να ενωθούν με μια γραμμή που ανήκει στο σύνολο.

Κυρτό σύνολο Κάθε δύο σημεία του συνόλου μπορούν να ενωθούν με *ευθεία* γραμμή που ανήκει στο σύνολο.

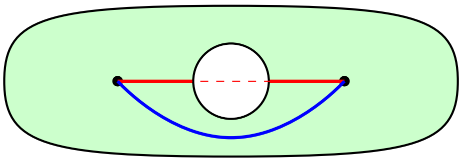
Απλά συνεκτικό σύνολο Κάθε καμπύλη του συνόλου θα ανήκει μέσα στο σύνολο αν τη σφίξω.



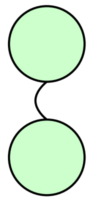
συνεκτικό, κυρτό, απλά συνεκτικό



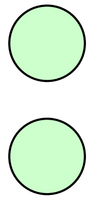
συνεκτικό, απλά συνεκτικό



συνεκτικό



συνεκτικό, απλά συνεκτικό



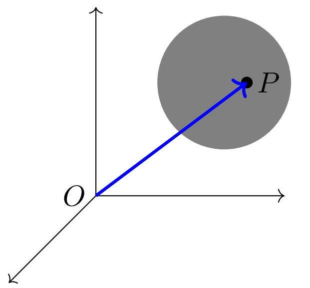
απλά συνεκτικό

Η μόνη συσχέτιση που ισχύει είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \text{κυρτό} &\implies \text{συνεκτικό} \\ \text{κυρτό} &\implies \text{απλά συνεκτικό} \end{aligned}$$

Φραγμένο σύνολο ανν $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = d(O,P)$ πεπερασμένη

Σχήμα 3: Φραγμένο σύνολο



Συμπαγές σύνολο ανν είναι φραγμένο και περιέχει το σύνορο

Ορισμός συνάρτησης

$E \subseteq \mathbb{R}^n, \quad B \subseteq \mathbb{R}$

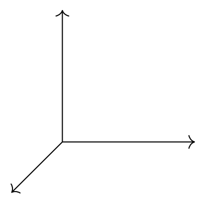
$$f : E \to B : z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$P = (x_1, \ldots, x_n) \to \text{πρότυπα ή αρχέτυπα, } z \text{ εικόνες}$$

Για συνάρτηση από το $\mathbb{R}^n$, χρειάζομαι $n+1$ άξονες. Άρα γραφικές παραστάσεις θα κάνουμε για συναρτήσεις το πολύ 2 μεταβλητών, με προοπτική παράσταση ή ισουψείς καμπύλες.

Πολυωνυμική συνάρτηση Περιέχει όρους της μορφής $a x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}, \quad m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$.

Σχήμα 4: Τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων



π.χ.

$$\begin{aligned} w &= 3x^4y^2z^3 + 4x^5yz^2 - 7x^3yz \\ w &= f(x,y,z) \end{aligned}$$

$$\max\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) = \text{βαθμός}(f)$$

Ρητή συνάρτηση

$$\frac{f(P)}{g(P)} = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} \quad f, g \text{ πολυωνυμικές}$$

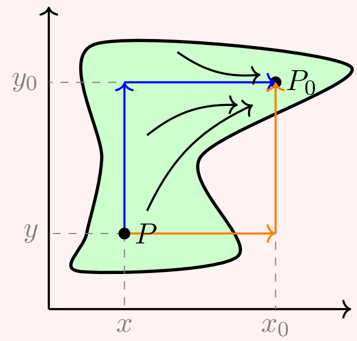
Όριο συνάρτησης

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lambda$$

Διπλά όρια

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

Δεν έχουν απαραίτητα σχέση με το κανονικό όριο (και μπορεί να έχουν διαφορετική τιμή)! Η ύπαρξη ή/και ισότητα των ορίων δεν είναι διαγνωστική για το όριο της συνάρτησης. Αν υπάρχει το λ και **υπάρχουν** τα παραπάνω όρια, τότε είναι ίσα με λ. Αν τα παραπάνω όρια **υπάρχουν** και **δεν** είναι ίσα, τότε το λ **δεν** υπάρχει.



Μεθοδολογία

$$w = f(x,y) \quad \text{ή}$$
$$w = f(x,y,z)$$

$$\lim_{P\to P_0}$$

1. Επιλέγω για την $f(x,y)$ μια καμπύλη $y=g(x)$ του που περνά από το $_0$ ή
   επιλέγω για την $f(x,y,z)$ μια καμπύλη $y=g(x)$ και $z=h(x)$ του που περνά από το $_0$
2. Αντικαθιστώ και καταλήγω στον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x\to x_0}$
3. Αν το αποτέλεσμα εξαρτάται από τις παραμέτρους τις καμπύλης, τότε το όριο δεν υπάρχει, ενώ αν δεν εξαρτάται, το αποτέλεσμα είναι μη διαγνωστικό.

Μεθοδολογία

Για όρια ρητών συναρτήσεων $\frac{f(P)}{g(P)}$ στο $(0,0)$:

1. Αν $B\left[f(P)\right] > B\left[g(P)\right]$, μάλλον το όριο υπάρχει.
2. Αν $B\left[f(P)\right] \leq B\left[g(P)\right]$, μάλλον το όριο δεν υπάρχει.

Ιδιότητες ορίων

Αν $\lim_{P\to P_0} f(P) = \lambda_1$ και $\lim_{P\to P_0} g(P) = \lambda_2$ τότε:

(1) $\lim_{P\to P_0} f(P) \pm g(P) = \lambda_1 \pm \lambda_2$

(2) $\lim_{P\to P_0} f(P) \cdot g(P) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

(3) $\lim_{P\to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

(4) $\lim_{P\to P_0} \sqrt[n]{f(P)} = \sqrt[n]{\lim_{P\to P_0} f(P)} = \sqrt[n]{\lambda_1}$ (εφ' όσον ορίζεται)

(5) $\lim_{P\to P_0} |f(P)| = |\lim_{P\to P_0} f(P)| = |\lambda_1|$ $(\lambda_1 > 0, f(P) > 0)$

(6) $\lim_{P\to P_0} f(P)^{g(P)} = \left[\lim_{P\to P_0} f(P)\right]^{\lim_{P\to P_0} g(P)}$

(7) Κρ. παρεμβολής:

1. $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$
2. $\lim_{P\to P_0} f(P) = \lim_{P\to P_0} h(P) = \lambda$

Τότε $\lim_{P\to P_0} g(P) = \lambda$

(8)
1. $|g(P)| \leq h(P)$
2. $\lim_{P\to P_0} h(P) = 0$

Τότε $\lim_{P\to P_0} g(P) = 0$

(9) Αν **1)** $\lim_{P\to P_0} f(P) = 0$ και **2)** η g είναι φραγμένη, τότε $\lim_{P\to P_0} f(P)g(P) = 0$.

Προϋπόθεση για τις παραπάνω ιδιότητες είναι να μην οδηγούμαστε σε απροσδιοριστία (π.χ. $\frac{\infty}{\infty}$)

Σύνθεση συναρτήσεων

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$g : B \to C \subseteq \mathbb{R}$$

Ορίζω:

$$(g \circ f)(P) = g\big(f(P)\big)$$

Έστω $\lim_{P\to P_0} f(P) = m$. Τότε, αν οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού, έχω:

$$(g \circ f)(P) = g(m) = \lambda$$

Συνέχεια συνάρτησης

Μια συνάρτηση ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο όταν το όριό της σε εκείνο το σημείο υπάρχει και είναι ίσο με την τιμή της εκεί.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}$$

Μεθοδολογία

$$\lim_{(x,y)\to(\pm\infty,\pm\infty)} f(x,y)$$

Για $u = \frac{1}{x} \to 0,\ v = \frac{1}{y} \to 0,$

$$\lim_{(x,y)\to(\pm\infty,\pm\infty)} f(x,y) = \lim_{(u,v)\to(0,0)} f(u,v)$$

Ασκήσεις

(1)

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x^2+y}{x+y^3} + \cos(xy) = \frac{7}{29} + \cos(6)$$

(2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Αντικαθιστώ με πολικές συντεταγμένες:

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ =& \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\theta\, r^4 \sin^4\theta}{r^4} \\ =& \lim_{r\to 0^+} r\cos\theta \sin^4\theta = 0 \end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2-y^2)^2}$$

Θέτω $x = \lambda\sqrt{y} \implies y = \frac{1}{\lambda^2}x^2$.

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2-y^2)^2} \\ =& \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda^2|y|\cdot y}{\left(\lambda^2|y|+y\right)^2} \\ =& \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda^2 y^2}{\left(\lambda^2 y+y\right)^2} \\ =& \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda^2 y^2}{y^2\left(\lambda^2+1\right)^2} \\ =& \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+1)^2} \end{aligned}$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

(4)

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+2y}{x^2+y^2}$$

$u = \frac{1}{x} \to 0,\ v = \frac{1}{y} \to 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+2y}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{u}+\frac{2}{v}}{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}} \\
&= \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2v^2\left(\frac{1}{u}+\frac{2}{v}\right)}{u^2v^2\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)} \\
&= \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{uv(2u+v)}{u^2+v^2}
\end{aligned}$$

$u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin\theta(2r\cos\theta + r\sin\theta)}{r^2} =$$
$$\lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta(2\cos\theta+\sin\theta) = 0$$

(5)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^2+y^2}$$

Αντικαθιστώ με σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\boxed{\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\phi\, r\sin\theta\sin\phi\, r\cos\theta}{r^2}$$
$$= \lim_{r\to 0} r^2(\sin^3\theta\cos\theta\cos^3\phi\sin\phi) = 0$$

(6)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2} \\
&\qquad = \lim_{x\to 0} \frac{x+\lambda x}{x^2+\lambda^2x^2} \\
&\qquad = \lim \frac{x(1+\lambda)}{x^2(1+\lambda^2)} \\
&\qquad = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\lambda}{x(1+\lambda^2)} \\
&\qquad = \frac{1+\lambda}{0^+(1+\lambda^2)}
\end{aligned}$$

Ανάλογα με το πρόσημο του $(1+\lambda)$, μπορεί να το όριο να είναι $\pm$ σε πρόσημο, άρα δεν υπάρχει.

Κανόνα De L' Hospital δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, παρά μόνο όταν έχω μόνο μία μεταβλητή!

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} &= \\
&= \lim_{r\to0^+} \frac{1-\cos r}{r^2} \\
&= \lim_{r\to0^+} \frac{(1-\cos r)'}{(r^2)'} \\
&= \lim_{r\to0^+} \frac{\sin r}{2r} \\
&= \lim_{r\to0^+} \frac{(\sin r)'}{(2r)'} \\
&= \lim_{r\to0^+} \frac{\cos r}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{(2+y^3)\tan(x^3+y^3)}{x^3+y^3} + \frac{\tan(x^5y^5)}{\tan(x^5)\tan(y^5)}\right] &= \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (2+y^3)\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^3+y^3)}{x^3+y^3} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan}{\tan(}
\end{aligned}
$$

Αν θέσω $x^3+y^3=u$, έχω:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = \lim_{u\to0} \frac{\tan u}{u} = \lim_{u\to0} \frac{(\tan u)'}{u'} = \lim_{u\to0} \frac{1}{\cos^2 u} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^5+y^5)}{\tan(x^5)\tan(y^5)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{\tan(x^5+y^5)}{x^5y^5}}{\frac{\tan(x^5)}{x^5}\cdot\frac{\tan(y^5)}{y^5}} = \frac{\lim_{v\to0}\frac{\tan v}{v}}{\lim_{w\to0}\frac{\tan w}{w}\cdot\lim_{z\to0}\frac{\tan z}{z}} \qquad \begin{pmatrix} x^5y^5 & = v \\ x^5 & = w \\ y^5 & = z \end{pmatrix}$$

Άρα $\lim\left(\cdots\right) = 3$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^x \quad (y \geq 0)$$

(1) $y=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^x = \lim_{x\to0^+} 0^x = 0$$

(2) $y=x$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^x = \lim_{x\to0^+} x^x = 0 = \lim_{x\to0^+} e^{\ln x^x} = \\
&\lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to0^+}\ln x^x} = e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = \\
&e^{\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}} = e^{\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)} = e^{\lim_{x\to0^+}-x} = \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Επομένως το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

Θέτοντας $y=\lambda x$, έχω:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} &= \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2x^4}{\lambda^2x^4+x^2(1-\lambda)^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2x^2}{\lambda^2x^2+x^2(1-\lambda)^2}
\end{aligned}$$

Για $\lambda=1$, γίνεται $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2}=1$.

Για $\lambda=-1$, γίνεται $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+4}=0$.

Παρατηρούμε ότι για δύο διαφορετικές διαδρομές έχουμε διαφορετικό αποτέλεσμα, άρα το όριο δεν υπάρχει.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^2z^3}{x^2+y^2+z^2} &= \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{r\sin\theta\cos\theta\cdot r^2\sin^2\theta\sin^2\phi\cdot r^3\cos^3\theta}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \underbrace{r^4}_{0}\cdot\big(\underbrace{\cdots}_{\varphi}\big) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y+x^2}{x-y} &= \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\phi+r\sin\phi+r^2\cos^2\phi}{r(\cos\phi-\sin\phi)} \\
&= \lim \frac{\cos\phi+\sin\phi}{\cos\phi-\sin\phi}+r\frac{\cos^2\phi}{\cos\phi-\sin\phi}
\end{aligned}$$

Επειδή παρατηρώ ότι υπάρχει πιθανότητα απροσδιοριστίας, θα προσπαθήσω να αποδείξω ότι δεν υπάρχει το όριο.

Θέτω $y=\lambda x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\lambda x+x^2}{x-\lambda x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\lambda+x)}{x(1-\lambda)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\lambda+x}{1-\lambda} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^{|\frac{1}{y}|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\ln|x|^{|\frac{1}{y}|}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{y}\ln|x|} \\
&= e^{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln|x|}{y}} \\
&= e^{\frac{\lim_{x\to 0}\ln|x|}{\lim_{y\to 0}|y|}} \\
&= e^{\frac{-\infty}{0^+}} \\
&= e^{-\infty} = 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-y}\right)} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-y}\right)}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{1-y})^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y-1)(\sqrt{x}+\sqrt{1-y}}{|x|-|1-y|} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y-1)(\sqrt{x}+\sqrt{1-y})}{x-(1-y)} = 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x+\sin y}{\tan(2x)+\sin y}$$

(1) $y = x$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x+\sin x}{\tan(2x)+\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{2\sin x}{\tan(2x)+\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{2\cos x}{\frac{2}{\cos^2(2x)+\cos x}} = \frac{2}{\frac{2}{1}+1} = \frac{2}{3}$$

(2) $y = -x$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x-\sin x}{\tan(2x)-\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{0}{\tan(2x)-\sin x} = 0$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{x}$$

Θα βρω το πεδίο ορισμού:

$$\begin{cases} x+y\geq 0 & \implies y\geq -x \\ x-y\geq 0 & \implies y\leq x \\ x\neq 0 \end{cases}$$

Επειδή το $(0,1)$ είναι απομονωμένο σημείο (δεν είναι σημείο συσσώρευσης), δεν έχει νόημα ο υπολογισμός του ορίου εκεί.

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} e^{\frac{x+y}{x^2+y^2}} \left[1+\sin\left(\frac{3}{|x|+|y|}\right)\right]^{|x|+|y|} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} e^{\frac{r\cos\phi+r\sin\phi}{r^2}} \left[1+\sin\left(\frac{3}{r\left(|\cos\phi|+|\sin\phi|\right)}\right)\right]^{r\left(|\cos\phi|+|\sin\phi|\right)}$$

$$= \cancelto{1}{\lim_{r\to\infty} e^{\frac{\cos\phi+\sin\phi}{r}}} \cdot \lim_{r\to\infty} \left[1+\sin\left(\frac{3}{r\left(|\cos\phi|+|\sin\phi|\right)}\right)\right]^{r\left(|\cos\phi|+|\sin\phi|\right)}$$

Θέτω $t = \frac{1}{r\left(|\cos\phi| + |\sin\phi|\right)}$, άρα το όριο γίνεται:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^+} \left[1 + \sin(3t)\right]^{\frac{1}{t}} \\
&= e^{\lim_{t\to 0^+} \ln\left[1+\sin(3t)\right]^{\frac{1}{t}}} \\
&= e^{\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\left[1+\sin(3t)\right]}{t}} \\
&= e^{\lim t\to 0^+ \frac{3\cdot\cos(3t)}{1+\sin(3t)}}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 - y^2 + 2y^3 - z}{x^2 + y^2 + z^2}
$$

Θέτω $\begin{cases} y = \lambda x \\ z = \mu x \end{cases}$. Το όριο γίνεται:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - \lambda^2 x^2 + 2\lambda^3 x^3 - \mu x}{x^2 + \lambda^2 + \mu^2 x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x - \lambda^2 x + 2\lambda^3 x^2 - \mu)}{x^2(1 + \lambda^2 + \mu^2)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\lambda^2) + 2\lambda^3 x^2 - \mu}{x(1 + \lambda^2 + \mu^2)} = \frac{-\mu}{0} = \begin{cases} -\infty & = \text{για } \mu = 1 \\ \infty & = \text{για } \mu = -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} + x^2 y \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)
$$

Όριο, διπλά όρια?

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{xy}{x^2+y^2} + x^2 y \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{x^2 y}_{\mu} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\varphi}
$$

$$
\lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} \cos\theta\ \sin\theta
$$

Εναλλακτικός τρόπος:

$$
y = \lambda x, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2(1+\lambda^2)} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}
$$

Άρα δεν υπάρχει το όριο.

Για τα διπλά όρια:

$$
\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0\cdot y}{0^2+y^2} + 0^2 y \sin\left(\frac{1}{0^2}\right)\right) = 0 = \lim_{y\to 0}(0) = 0
$$

$$
\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} + x^2\cdot 0 \sin\left(\frac{x}{0^2}\right)\right) = 0 = \lim_{x\to 0}(0) = 0
$$

Παρατηρούμε ότι τα διπλά όρια υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους, αλλά το όριο της συνάρτησης δεν υπάρχει.

Άσκηση

$$f(x,y,z)=\frac{x\sin x+y\sin y+z\sin z}{x^2+y^2+z^2}\qquad \mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$$

Τροποποίηση συνάρτησης ώστε να είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^3$, δηλαδή:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{\cdots}{\cdots}, & \mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}\\ ??? & (0,0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x\sin x+y\sin y+z\sin z}{x^2+y^2+z^2}=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{\sin x}{x}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{\sin y}{y}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{\sin z}{z}\right)$$
$$=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\cancelto{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}+\lim_{(x,y,z)\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\cancelto{1}{\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}+\lim_{(x,y,z)\to 0}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\cancelto{1}{\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}}$$
$$=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=1 \qquad \blacksquare$$

Άρα τελικά:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{\cdots}{\cdots}, & \mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}\\ 1 & (0,0,0)\end{cases}$$

Άσκηση

$$f(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{\tan x-\tan y},\quad D=\overbrace{\left[0,\frac{\pi}{4}\right]^2}^{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{4}]}-\{(x,y):\ x=y\}$$

Τροποποίηση της $f(x,y)$ ώστε η $f(x,y)$ να είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]^2$

$$\frac{\sin x-\sin y}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}}=\frac{\sin x-\sin y}{\frac{\sin x\cos y-\sin y\cos x}{\cos x\cos y}}=\frac{\sin x-\sin y}{\sin(x-y)}\cos x\cos y=$$
$$=\frac{\cancel{2\sin\frac{x-y}{2}}\cos\frac{x+y}{2}}{\cancel{2\sin\frac{x-y}{2}}\cos\frac{x-y}{2}}\cos x\cos y=\frac{\cos\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2}}\cos x\cos y$$

$$\lim_{(x,y)\to(x,x)}f(x,y)=\frac{\cos\frac{2x}{2}}{\cos 0}\cos x\cos x=\cos^3 x$$

Άρα τελικά:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin x-\sin y}{\tan x-\tan y}, & \left[0,\frac{\pi}{4}\right]^2-\{(x,y):\ x=y\}\\ \cos^3 x, & x=y\end{cases}$$

Κατευθυνόμενη Παράγωγος

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial\vec{a}}=\nabla_{\vec{a}}f(P_0)=\vec{D}_{\vec{a}}f(P_0)=\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{f(P_0+t\vec{a})}^{f(P)}-f(P_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{r}_{P_0}+t\vec{a})-f(r\vec{_{P_0}})}{t}$$

$$\frac{\Delta f}{t}=\tan\phi$$

Μερικές παράγωγοι:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{e_1}} &= \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \\
\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{e_2}} &= \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t}
\end{aligned}
$$

(αντίστοιχα ορίζονται και για περισσότερες διαστάσεις - δε συμπεριλαμβάνεται σε αυτόν τον ορισμό ο άξονας των z, αφού δεν είναι μέρος του πεδίου ορισμού)

Παράδειγμα Έστω $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} + x^2 y \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Τότε:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} &= \frac{y(x^2+y^2) - xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + y\left[2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right)\right] \\
\tfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} &= \frac{x(x^2+y^2) - xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} + x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}
$$

Για να είναι συνεχής μια συνάρτηση στο σημείο P_0, αρκεί:

$$
\begin{cases} \exists f_x, f_y \quad \pi_\epsilon(P_0) \\ f_x, f_y \text{ πεπερασμένες} \end{cases} \implies \text{ΜΕΡΙΚΩΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ}
$$

Αν η συνάρτηση είναι μερικώς παραγωγίσιμη, υπάρχει η λύση (Gradient) συνάρτησης.

Gradient συνάρτησης $f(x_1,\ldots,x_n)$

$$
\begin{gathered}
\operatorname{grad} f = \nabla f(x_1,\ldots,x_n) = \left[f_{x_1}(P)\ldots f_{x_n}(P)\right] \\
\nabla f = \left[f_x f_y\right]
\end{gathered}
$$

$$
\nabla f(P_0) = \left(f_{x_1}(P_0), f_{x_2}(P_0), \ldots, f_{x_n}(P_0)\right)
$$

Η ύπαρξη του $\nabla f(P_0)$ προϋποθέτει:

1. $\exists f_{x_i}(P_0) \quad i = 1,\ldots,n$
2. $f_{x_i}(P_0) \to$ πεπερασμένη

Πότε η f είναι συνεχής στο P_0?

Πότε η f είναι παραγωγίσιμη (διαφορίσιμη) στο P_0?

- $\exists\ f_{x_i}$
- f_{x_i} συνεχείς

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\implies\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right|=0$$

$$\lim_{P\to P_0}\frac{\left|f(P)-f(P_0)-f'(P_0)(\overbrace{P-P_0}^{\vec{r_P}-\vec{r_{P_0}}})\right|}{|\overrightarrow{PP_0}|}$$

Τα διανύσματα γνωρίζουμε ότι γράφονται ως πίνακες μίας διάστασης:

$$\vec{r_P}-\vec{r_{P_0}}=\begin{bmatrix}x_{1P}-x_{1P_0}\\x_{2P}-x_{2P_0}\\\vdots\\x_{nP}-x_{nP_0}\end{bmatrix}$$

$$f'(x_0)=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\left|f(P_0+t\vec{a})-f(P_0)-f'(P_0)t\vec{a}\right|}{|t||\vec{a}|}=0\implies$$

$$\lim_{t\to0}\left|\frac{f(P_0+t\vec{a})-f(P_0)-f'(P_0)t\vec{a}}{t}\right|=0\implies$$

$$\left|\lim_{t\to0}\frac{f(P_0+t\vec{a})}{t}-f'(P_0)\vec{a}\right|=0\implies$$

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{a}}-f'(P_0)\vec{a}=0\implies$$

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{a}}=f'(P_0)\cdot\vec{a}$$

Συσχέτιση με Gradient

$$\tfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{e_i}}=f'(P_0)\vec{e_1}\implies$$

$$\tfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{e_i}}=\begin{bmatrix}b_1 & \cdots & b_i & \cdots & b_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\to\text{ 1 μόνο γραμμή }\implies$$

$$\boxed{\tfrac{\partial f(P_0)}{\partial x_1}=b_i}$$

$$f'(P_0)=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{x_1}(P_0) & f_{x_2}(P_0) & \cdots & f_{x_n}(P_0)\end{bmatrix}=\nabla\mathbf{f}(\mathbf{P_0})$$

Βέβαια η $f'(P_0)$ ορίζεται μόνο αν οι επιμέρους παράγωγοι είναι συνεχείς!

Φυσική σημασία

$$\left|\tfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{a}}\right|=\left|f'(P_0)\vec{a}\right|\implies\left|\tfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{a}}\right|=\left|\nabla f(P_0)\cdot\vec{a}\right|\le\left|\nabla f(P_0)\right|\cdot\cancelto{1}{|\vec{a}|}\implies\boxed{\left|\tfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{a}}\right|\le\left|\nabla f(P_0)\right|}$$

Άρα το gradient προσδιορίζει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης.
Το διάνυσμα της κατεύθυνσης όπου μεγιστοποιείται ο ρυθμός μεταβολής είναι το:

$$\vec{a}=\frac{\nabla f(P_0)}{\left|\nabla f(P_0)\right|}$$

Θεώρημα Μέσης Τιμής

$$f : \underbrace{E}_{\text{κυρτό σύνολο}} \subseteq \mathbb{R}^n \to R$$

Επάνω στην ευθεία που ενώνει τα P_0 και P_1, υπάρχει σημείο P^* τέτοιο ώστε:

$$f(P_1) - f(P_0) = f'(P^*)\big(P_1 - P_0\big)$$

Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

$$\frac{\partial^m f(P)}{\partial x_{km} \dots \partial x_{k2} \partial x_{k1}} = f_{x_{k1} x_{k2} \dots x_{km}}(P) = \frac{\partial}{\partial x_{km}} \left(\cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{k2}} \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x_{k1}} \right) \right) \right)$$

π.χ.

$$f = f(x, y, z)$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

Η συνέχεια των μερικών παραγώγων μέχρι κάποια τάξη, επιτρέπει την αντιμετάθεση των παραγώγων. Για παράδειγμα, αν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και 2ης τάξης, ισχύει:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} \neq \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$$

Επίσης συμβολίζω:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$
$$\frac{\partial^3 f(P)}{\partial x \partial y \partial z} = f_{zyx}(P)$$
$$\frac{\partial^3 f(P)}{\partial x^2 \partial y} = f_{yx^2}(P)$$

(προσοχή στην αλλαγή φοράς των $x,\ y,\ z$!)

Να σημειωθεί ότι η χρήση των ∂ και $f_{\dots}$ είναι καθαρά θέμα συμβολισμού.

Αρμονική συνάρτηση $f = f(_1, \dots, x_n)$

$$f_{x_1^2}(P) + f_{x_2^2}(P) + \dots + f_{x_n^2}(P) = 0 \iff \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_n^2} = 0$$

και τα μέγιστα & ελάχιστα της συνάρτησης λαμβάνονται πάνω στο όριο του πεδίου ορισμού της.

Ονομάζω το $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ τελεστή Laplace (Λαπλασιανή), και συμβολίζω:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \to \text{Τελεστής Laplace}$$

Άρα ο επάνω ορισμός γίνεται:

$$\iff \boxed{\nabla^2 f(P)} = 0$$

Διαφορικό

$$\overbrace{\mathrm{d}f(P_0)}^{\text{διαφορικό }1^{\text{ης}}\text{ τάξης ή ολικό διαφορικό}} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\,\mathrm{d}y \quad (+\dots)$$
$$= \begin{bmatrix} f_x(P_0) & f_y(P_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{bmatrix} = \nabla f(P_0)\,\mathrm{d}P = \nabla f(P_0)\,\mathrm{d}\vec{r}$$

Διαφορικό $2^{\text{ης}}$ τάξης

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) &= \mathrm{d}\big(f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y\big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}(f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y \\
&= \left(f_{x^2}\,\mathrm{d}x + f_x\frac{\partial\,\mathrm{d}x}{\partial x} + f_{yx}\,\mathrm{d}y + f_y\cancel{\frac{\partial\,\mathrm{d}y}{\partial x}}\right)\mathrm{d}x + \left(f_{xy}\,\mathrm{d}x + f_x\cancel{\frac{\partial\,\mathrm{d}x}{\partial y}} + f_{y^2}\,\mathrm{d}y + f_y\frac{\partial\,\mathrm{d}y}{\partial y}\right)\mathrm{d}y \\
&= \underbrace{f_{x^2}(\mathrm{d}x)^2}_{} + f_x\,\mathrm{d}^2 x + \underbrace{f_{yx}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + f_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{} + \underbrace{f_{y^2}(\mathrm{d}y)^2}_{} + f_y\,\mathrm{d}^2 y \\
&\overset{\text{εφόσον υπάρει συνέχεια παραγώγων}}{=} f_{x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2f_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + f_{y^2}(\mathrm{d}y)^2 + f_x\,\mathrm{d}^2 x + f_y\,\mathrm{d}^2 y
\end{aligned}$$

Αν $\mathrm{d}x =$ σταθ. και $\mathrm{d}y =$ σταθ. τότε $\mathrm{d}^2 x = \mathrm{d}^2 y = 0$.

$$\mathrm{d}^2 f = (f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y)^{(2)}$$

Ομοίως

$$\mathrm{d}^3 f = (f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y)^{(3)} = f_{x^3}(\mathrm{d}x)^3 + 3f_{x^2y}(\mathrm{d}x)^2\,\mathrm{d}y + 3f_{xy} = \mathrm{d}x(\mathrm{d}y)^2 + f_{y^3}(\mathrm{d}y)^3$$

Κριτήριο ύπαρξης ολικού διαφορικού

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad P, Q \to \text{συνεχείς μερικές παραγώγους } 1^{\text{ης}} \text{ τάξης}$$

$$\begin{aligned}
f = f(x,y) \qquad \mathrm{d}f &= P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y & f_x(x,y) = P(x,y) &\implies \frac{\partial}{\partial y} f_{xy} = P_y \\
\mathrm{d}f &= f_x(x,y)\,\mathrm{d}x + f_y(x,y)\,\mathrm{d}y & f_y(x,y) = Q(x,y) &\implies \frac{\partial}{\partial x} f_{yx} = Q_x
\end{aligned}$$
$$\implies \boxed{P_y = Q_x}$$

$$\int_{A_0}^{A} \mathrm{d}f = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \big[P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big] \implies$$
$$f(A) - f(A_0) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} \big[P(x,y)\,\mathrm{d}x + \cancel{Q(x,y)\,\mathrm{d}y}\big] + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} \big[\cancel{P(x,y)\,\mathrm{d}x} + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big] \implies$$
$$\boxed{f(A) = f(A_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,\mathrm{d}t}_{\text{προσοχή στα ορίσματα! γίνονται συχνά λάθη!}}}$$

$\vec{F} = (P,Q)$

$$\underbrace{df}_{\text{βαθμωτό ή αριθμητικό δυναμικό του πεδίου } \vec{F}} = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = (P,Q)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

Σε 3 διαστάσεις

$$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$f = f(x,y,z)$

$$\begin{cases}\mathrm{d}f &= P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}f &= f_x(x,y,z)\,\mathrm{d}x + f_y(x,y,z)\,\mathrm{d}y + f_z(x,y,z)\,\mathrm{d}z\end{cases} \implies \begin{cases}f_x &= P\\ f_y &= Q\\ f_z &= R\end{cases} \implies \begin{cases}\begin{cases}f_{xy} &= P_y\\ f_{yx} &= Q_x\end{cases} & \implies P_y = Q_x\\ \begin{cases}f_{yz} &= Q_z\\ f_{zy} &= R_y\end{cases} & \implies Q_z = R_y\\ \begin{cases}f_{xz} &= P_z\\ f_{zx} &= R_x\end{cases} & \implies P_z = R_x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{d}f &= P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = (P,Q,R)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z) = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\\ \mathrm{d}f &= f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y + f_z\,\mathrm{d}z = (f_x,f_y,f_z)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z) = \nabla f\,\mathrm{d}\vec{r}\end{cases} \implies \vec{F} = \nabla f$$

$$\implies \nabla\times\vec{F} = \nabla\times\nabla f$$

$$\implies \boxed{\nabla\times\vec{F} = 0}$$

$\vec{F} = (P,Q,R)$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} = \overrightarrow{e_1}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \overrightarrow{e_2}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\nabla\times\vec{F} = \vec{e}_1(R_y - Q_z) - \vec{e}_2(R_x - P_z) + \vec{e}_3(Q_x - P_y) = 0 \implies \begin{cases}R_y &= Q_z\\ R_x &= P_z\\ Q_z &= P_y\end{cases}$$

Αστρόβιλο πεδίο

(1) $\vec{F} = \nabla f$

(2) $\nabla\times\vec{F} = 0$

(3) $\int_{A_0}^{A}\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = f(A) - f(A_0)$

$$\int_{A_0}^{A}\vec{F}\,\mathrm{d}r = \int_{A_0}^{A}\nabla f\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{A_0}^{A}\mathrm{d}f = f(A) - f(A_0)$$

Ένα αστρόβιλο πεδίο είναι και συντηρητικό όταν ο χώρος είναι απλά συνεκτικός.

$$f(A) - f(A_0) = \int_{A_0}^{A}\vec{F}\,\mathrm{d}r \implies$$

$$f(A) = f(A_0) + \int_{A_0}^{B}(\cancel{P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y} + R\,\mathrm{d}z) + \int_{B}^{\Gamma}(\cancel{P\,\mathrm{d}x} + Q\,\mathrm{d}y + \cancel{P\,\mathrm{d}z}) + \int_{\Gamma}^{A}(P\,\mathrm{d}x + \cancel{Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z}) \implies$$

$$f(A) = f(A_0) + \int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y}Q(x_0,t,z)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x}P(t,y,z)\,\mathrm{d}t$$

Άσκηση

$$\underbrace{(3x^2 + 6xy^2)}_{P(x,y)=f_x}\,\mathrm{d}x + \underbrace{(6x^2 + 4y^3)}_{Q(x,y)=f_y}\,\mathrm{d}y$$

Να δειχθεί ότι η έκφραση αυτή αποτελεί ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης $f(x, y)$, και να βρεθεί η μορφή της συναρτησης αυτής.

$$\begin{cases} P = 3x^2 + 6xy^2 & \implies P_y = 12xy \\ Q = 6x^2y + 4y^3 & \implies Q_x = 12xy \end{cases} \implies P_y = Q_x$$

$$\begin{aligned} f_x = 3x^2 + 6xy^2 &\implies \tfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \\ &\implies \mathrm{d}f = (3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x \\ &\implies f(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x + g(y) \\ &\implies f(x, y) = x^2 + 3x^2y^2 + g(y)(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y = 6x^2y + 4y^2 &\implies \tfrac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3 \\ &\implies 6x^2y + \tfrac{\partial g(y)}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3 \\ &\implies g(y) = \int 4y^3\,\mathrm{d}y + c \\ &\implies g(y) = y^4 + c(2) \end{aligned}$$

$$(1)\ \text{κ}\ (2) \implies \boxed{f(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + \cancel{c}}$$

Αν θεωρήσουμε ότι $x = y = 0 \implies \boxed{c = 0}$

Συναρτηστιακή εξάρτηση

$$f_1(x_1, \ldots, x_n),\ f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

$\phi(f_1, \ldots, f_n) = 0$

$$\text{Ιακωβιανός πίνακας } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Για $m > n$ πάντα υπάρχει συναρτησιακή εξάρτηση.

$$\begin{cases} \text{rank}[J] < m \rightarrow & f_1, \ldots, f_m \text{ συναρτησιακά εξαρτημένες} \\ \text{rank}[J] = m \rightarrow & f_1, \ldots, f_m \text{ συναρτησιακά ανεξάρτητες} \end{cases}$$

Ειδική περίπτωση $\mathbf{m} = \mathbf{n}$:

$$\begin{cases} |J| = 0 \rightarrow & f_1, \ldots, f_m \text{ συναρτησιακά εξαρτημένες} \\ |J| \neq 0 \rightarrow & f_1, \ldots, f_m \text{ συναρτησιακά ανεξάρτητες} \end{cases}$$

Αν $m < n$:

$$rank[J] \leq \min(m, n) = n < m \implies$$
$$rank[J] < m \rightarrow\rightarrow \qquad f_1, \ldots, f_m \text{ συναρτησιακά εξαρτημένες}$$

Άσκηση

$$f_1 = ye^x \cos z,\ f_2 = ye^x \sin z,\ f_3 = y^2 e^{2x}$$

Να βρεθεί αν οι συναρτήσεις είναι συναρτηστιακά εξαρτημένες.

$\mathbf{m = n = 3}$

$$\begin{aligned}
|J| =& \begin{vmatrix} f_{1x} & f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z} \\ f_{3x} & f_{3y} & f_{3z} \end{vmatrix} \\
=& \begin{vmatrix} ye^x \cos z & e^x \cos z & -ye^x \sin z \\ ye^x \sin z & e^x \sin z & ye^x \cos z \\ 2y^2 e^{2x} & 2ye^{2x} & 0 \end{vmatrix} \\
=& \left| 2y^2 e^{2x}(e^{2x} y \cos^2 z + e^{2x} y \sin^2 z) - 2ye^{2x}(e^{2x} y^2 \cos^2 z + e^{2x} y^2 \sin^2 z) \right| \\
=& 2y^2 e^{2x} e^{2x} y \cancel{(\cos^2 z + \sin^2 z)} - 2ye^{2x} e^{2x} y^2 \cancel{(\cos^2 z + \sin^2 z)} = 0
\end{aligned}$$

Με το μάτι φαίνεται ότι η εξάρτηση είναι $f_1^2 + f_2^2 = f_3$.

Ασκήσεις

1)

$$\begin{aligned}
f(x,y) =& \ln\left[\tan\left(\frac{x}{y}\right)\right] \\
g(x,y) =& x^{x^y} \\
h(x,y,z) =& \arctan\left(\frac{x+y+z}{x-y}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_x =& \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{y}\right)} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)} \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{\sin(x/y)}{\cos(x/y)}} \frac{1}{\cos^2(x/y)} \frac{1}{y} = \frac{2}{y \cdot \sin(2x/y)} \\
f_y =& \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{y}\right)} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{\frac{\sin(x/y)}{\cos(x/y}} \frac{1}{\cos^2(x/y)} \frac{x}{y^2} = -\frac{2x}{y^2 \sin(2x/y)} \\
g_x =& \left(x^{x^y}\right)_x = \left(e^{e^{\sin x} \cdot \ln x}\right)_x = e^{e^{y \ln x} \cdot \ln x} \left(e^{y \ln x} \cdot \ln x\right)_x \\
=& x^{x^y} \left[\left(e^{y \ln x}\right)_x \cdot \ln x + e^{y \ln x} (\ln x)_x\right] = x^{x^y} \left(e^{y \ln x} \cdot \frac{y}{x} \ln x + e^{y \ln x} \frac{1}{x}\right) \\
=& x^{x^y} \left(x^y \frac{y}{x} \ln x + x^y \frac{1}{x}\right) = x^{x^y} \cdot x^{y-1} (y \ln x + 1) = x^{x^y + y - 1} (y \ln x + 1) \\
g_y =& \left(x^{x^y}\right)_y = \left(e^{e^{y \ln x} \ln x}\right)_y = e^{e^{y \ln x} \ln x} \left(e^{y \ln x \ln x}\right)_y \\
=& x^{x^y} \ln x e^{y \ln x} = x^{x^y} (\ln x)^2 x^y = x^{x^y + y} (\ln x)^2 \\
h_x =& \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y+z}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{1(x-y) - (x+y+z)}{(x-y)^2} = \frac{\cancel{(x-y)^2}}{(x-y)^2 + (x+y+z)^2} \frac{-2y - z}{\cancel{(x-y)^2}} = \frac{-2y - z}{(x-y)^2 + (x+y+z)^2} \\
h_y =& \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y+z}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{1(x-y) - (x+y+z)(-1)}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2 + (x+y+z)^2} \frac{2x + 2}{(x-y)^2} = \frac{2x + z}{(x-y)^2 + (x+y+z)^2} \\
h_z =& \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y+z}{x-y}\right)^2} \frac{1}{x-y} = \frac{x-y}{(x-y)^2 + (x+y+z)^2}
\end{aligned}$$

2)

$$z = x^3 - xy + 3y^2$$
$$P_0 = (5,\ 4) \to P = (4.8,\ 4.1)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x =& -0.2 \implies x - x_0 = -0.2 \implies x = x_0 - 0.2 = 4.8 \\
\mathrm{d}y =& 0.1 \implies y - y_0 = 0.1 \implies y = y_0 + 0.1 = 4.1 \\
\Delta z =& z_P - z_{P_0} = (4.8^3 - 4.8 \cdot 4.1 + 3 \cdot 4.1) - (5^3 - 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2) = -4.658 \\
\mathrm{d}z_{P_0} =& z_x(P_0)\,\mathrm{d}x + z_y(P_0)\,\mathrm{d}y \\
=& (3x^2 - y_0)\,\mathrm{d}x + (-x_0 + 6y_0)\,\mathrm{d}y \\
=& (3 \cdot 5^2 - 4)(-0.2) + (-5 + 6.4)0.1 = \mathbf{-12.3}
\end{aligned}$$

3)

$$f(x, y, z) = xyz$$
$$P_0 = (1,\ 0,\ 3) \to P_1 = (4,\ 1,\ 0)$$

(1) Ρυθμός μεταβολής της f

(2) Μέγιστος ρυθμός μεταβολής και αντίστοιχη κατεύθυνση

(3) Ελάχιστος ρυθμός μεταβολής και αντίστοιχη κατεύθυνση

(α)

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{P_0 P_1}}{|P_O \vec{P_1}|} = \frac{(3, 1, -3)}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2}} = \left(\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}, -\frac{3}{\sqrt{19}}\right) \tag{7}$$

$$\tfrac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{a}} = \nabla f(P_0)\vec{a} \tag{8}$$

$$\nabla f(P_0) = \big(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)\big) = (y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0) = (0, 3, 0) \tag{9}$$

$$(2) \xrightarrow{(1),\,(3)} \tfrac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{a}} = (0, 3, 0) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}, -\frac{3}{\sqrt{19}}\right) = \boxed{\frac{3}{\sqrt{19}}} \tag{10}$$

(β)

$$\vec{e}_{\max} = \frac{\nabla f(P_0)}{\big|\nabla f(P_0)\big|} = \frac{(0, 3, 0)}{3} = (0, 1, 0)$$

(γ)

$$\vec{e}_{\min} = \frac{-\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|} = (0, -1, 0)$$

4)

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Να αποδείξετε ότι η f:

(1) Δεν είναι αρμονική

(2) Είναι διαρμονική

Αρμονικές συναρτήσεις

- **Αρμονική:** $\nabla^2 f = f_{x^2} + f_{y^2} + f_{z^2} = 0$
- **Διαρμονική:** $\nabla^2 \left(\nabla^2 f \right) = 0$

$(\forall x, y, z)$

$$f_x = \tfrac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{f}, \quad f_y = \frac{y}{f}, \quad f_z = \frac{z}{f}$$

$$f_{x^2} = (f_x)_x = \left(\frac{x}{f}\right)_x = \frac{1 \cdot f - x f_x}{f^2} = \frac{f - x \cdot \frac{x}{f}}{f^2} = \frac{f^2 - x^2}{f^3}$$

$$f_{y^2} = \frac{f^2 - y^2}{f^3}, \; f_{z^2} = \frac{f^2 - z^2}{f^3}$$

$$\nabla^2 f = \frac{f^2 - x^2}{f^3} + \frac{f^2 - y^2}{f^3} + \frac{f^2 - z^2}{f^3} = \frac{3f^2 - (x^2+y^2+z^2)}{f^3} = \frac{3f^2 - f^2}{f^3} = \frac{2f^2}{f^3} = \frac{2}{f} \neq 0$$

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 f \right) = \nabla^2 \left(\frac{2}{f} \right) = 2 \left[\left(\frac{1}{f}\right)_{x^2} + \left(\frac{1}{f}\right)_{y^2} + \left(\frac{1}{f}\right)_{z^2} \right]$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)_x = -\frac{f_x}{f^2} = -\frac{x}{f^3}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)_{x^2} = \left(-\frac{x}{f^3}\right)_x = -\frac{f^3 - x^3 f^2 f_x}{f^6} = -\frac{f^3 - 3x f^2 \frac{x}{f}}{f^6} = -\frac{f(f^2 - 3x^2)}{f^6} = -\frac{f^2 - 3x^2}{f^5}$$

Άρα:

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 f \right) 2 \left[\left(\frac{1}{f}\right)_{x^2} + \left(\frac{1}{f}\right)_{y^2} + \left(\frac{1}{f}\right)_{z^2} \right] =$$

$$= 2 \left(-\frac{f^2 - 3x^2}{f^5} - \frac{f^2 - 3y^2}{f^5} - \frac{f^2 - 3z^2}{f^5} \right) = -2 \frac{3f^2 - e(x^2+y^2+z^2)}{f^5} = -2 \frac{3f^2 - 3f^2}{f^5} = 0$$

5)

$$z = f(x^2 + y^2)$$

με συνεχείς παραγώγους $2^{\text{ης}}$ τάξης

(1) ν.δ.ο $y z_x - x z_y = 0$

(2) ν.δ.ο $y^2 z_{x^2} - 2xy z_{xy} + x^2 z_{y^2} = x z_x + y z_y$

$z = f(v)$ όπου $v = x^2 + y^2 = g(x,y) \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v}$

$$z_x = \tfrac{\partial z}{\partial x} = \tfrac{\partial z}{\partial v} \tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = f_v \cdot 2x = 2x f_v \qquad z_y = \tfrac{\partial z}{\partial y} = \tfrac{\partial z}{\partial v} \tfrac{\partial v}{\partial y} = 2y f_v$$

$$y z_x - x z_y = y 2x f_v - x 2y f_v = 0$$

$$z_{x^2} = (z_x)_x = (2xf_x)_x = 2\left(f_v + x\frac{\partial f_v}{\partial x}\right) = 2(f_v + x\frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}) = 2(f_v + xf_{y^2}2x) = 2f_v + 4x^2 f_{v^2}$$
$$z_{y^2} = (z_y)_y = (2yf_v)_y = 2f_v + 4y^2 f_{v^2}$$
$$z_{xy} = (z_x)_y = (2xf_v)_y = 2x(f_v)_y = 2x\frac{\mathrm{d}f_v}{\mathrm{d}y} = 2x\frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2xf_{v^2}2y = 4xyf_{v^2}$$

Άρα:

$$y^2 z_{x^2} - 2xyz_{xy} + x^2 z_{y^2} = y^2(2f_v + 4x^2 f_{v^2}) - 2x6 \cdot 4xyf_{v^2} + x^2(2f_v + 4y^2 f_{v^2}) =$$
$$= 2y^2 f_v + 4x^2y^2 f_{v^2} - 8x^2y^2 f_{v^2} + 2x^2 f_v + 4x^2y^2 f_{v^2} = x(2xf_v) + y(2yf_v) = xz_x + yz_y$$

Άσκηση Δίνεται συνάρτηση $z = z(u, v)$ όπου $u = e^x \cos y$ κ $v = e^x \sin y$.

Αν η z έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $2^{\text{ης}}$ να δειχθεί ότι:

(1) $z_x^2 + z_y^2 = (u^2 + v^2)(z_u^2 + z_v^2)$

(2) $z_{x^2} + z_{y^2} = (u^2 + v^2)(z_{u^2} + z_{v^2})$

$$z = z(u, v) \implies \mathrm{d}z = z_u\,\mathrm{d}u + z_v\,\mathrm{d}v \implies$$
$$\left.\begin{array}{l|r} u = g(x,y) & \mathrm{d}z = z_u(u_x\,\mathrm{d}x) + z_v(v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y) \\ v = h(x,y) & \mathrm{d}z = z_x\,\mathrm{d}x + z_y\,\mathrm{d}y \end{array}\right\} \implies$$
$$\begin{cases} z_x &= z_u u_x + z_v v_x \\ z_y &= z_u u_y + z_v v_y \end{cases}$$

$$u = e^x \cos y \implies \begin{cases} u_x &= e^x \cos y = u \\ u_y &= -e^x \sin y = -v \end{cases} \qquad v = e^x \sin y \implies \begin{cases} v_x &= e^x \sin y = v \\ v_y &= e^x \cos y = u \end{cases}$$

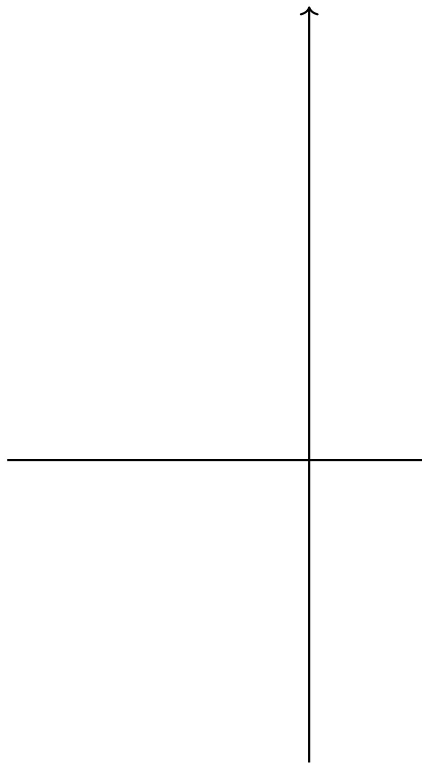
$$(1) \xRightarrow{(3),(5)} z_x = z_u u + z_v v (7)$$
$$(2) \xRightarrow{(4),(6)} z_y = z_u v + z_v u (8)$$

(1)

$$\begin{aligned} z_x^2 + z_y^2 &= (z_u u + z_v v)^2 + (-z_u v + z_v u)^2 = \\ &= z_u^2 u^2 + z_v^2 v^2 + euvz_u z_v + z_u^2 v^2 + z_v^2 u^2 - 2uvz_u z_v \\ &= z_u^2(u^2 + v^2) + z_v^2(u^2 + v^2) = (u^2 + v^2)(z_u^2 + z_v^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{x^2} &= (z_x)_x = (z_u u + z_v v)_u u_x + (z_u u + z_v v)_v v_x \\ &= (z_{u^2} u + z_u + z_{vu} v)u + (z_{uv} u + z_{v^2} v + z_v)v && (11) \\ z_{y^2} &= (z_y)_y = (-z_u v + z_v u)_u u_y + (-z_u v + z_v u)_v u_y \\ &= (-z_{u^2} v + z_{vu} u + z_v)(-v) + (-z_{uv} v - z_u + z_{v^2} u)u && (12) \\ z_{x^2} + z_{y^2} &= u(z_{u^2} u + z_u + z_{uv} v - z_{uv} v - z_u + z_{v^2} u) + v(z_{uv} u + z_{v^2} v + z_v + z_{u^2} v - z_{uv} u - z_v) \\ &= u^2(z_{u^2} + z_{v^2}) + v^2(z_{u^2} + z_{v^2}) \\ &= (u^2 + v^2)(z_{u^2} + z_{v^2}) && (13) \end{aligned}$$

Άσκηση $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$



Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής στο $P_0 = (1,2)$ κατά τη μετακίνηση στο $P_1 = (3,4)$.

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{a}} = \nabla f(x_0,y_0)\vec{a} = -3\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0,y_0) &= \big(f_x(1,2), f_y(1,2)\big) = \Big((3x^2 - 3_y)_{P_0}, (-3x+2y)_{P_0}\Big) \\ &= (3\cdot 1^2 - 3\cdot 2, -3\cdot 1 + 2\cdot 2) = (-3,1) \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{|\overrightarrow{P_0P_1}|} = \frac{(3-1,\ 4-2)}{\sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2}} = \frac{(2,2)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Άσκηση $f(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 3$^{\text{ης}}$ τάξης.
Αν $\underbrace{f(x,y)}_{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0}$ αρμονική ΝΔΟ $f_x(x,y)$ είναι επίσης αρμονική.

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial^2 f_x(x,y)}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 f_x(x,y)}{\partial y^2} = \tfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[\tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] + \tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \tfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^2 \partial x} \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left[\tfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right] + \tfrac{\partial}{\partial x}\left[\tfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right] = \tfrac{\partial}{\partial x}\left[\tfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right] = \tfrac{\partial 0}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Άσκηση Δίνεται συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

(1) Να υπολογιστούν οι f_x κ' f_y $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(2) Είναι η $f(x,y)$ συνεχής στο $\mathbb{R}^2$?

(3) Είναι η $f(x,y)$ διαφορίσιμη στο $(0,0)$?

(1) Για $(x,y)\neq(0,0)$: $f_x(x,y)=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y(x^2+y^2)-x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

Ομοίως θα προκύψει ότι $f_y(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

Για $(x,y)=(0,0)$:

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\implies$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-\cancelto{0}{f(0,0)}}{h}\implies$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\cdot 0}{\sqrt{h^2+0^2}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot 0}{\cancel{h}\sqrt{h^2+0}}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-\cancelto{0}{f(x_0,y_0)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0\cdot h}{\sqrt{0^2+h^2}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0\cdot\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot\sqrt{0^2+h^2}}$$

(2α)

$$f_x=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\cancel{r^3}\sin^3\phi}{\cancel{r^3}}\to\ \text{πεπερασμένο}$$

$$f_y=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\cancel{r^3}\cos^3\phi}{\cancel{r^3}}\to\ \text{πεπερασμένο}$$

Άρα σ/ς

(2β) Θα ελεγθεί η συνέχεια στο $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\cancelto{0}{f(0,0)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0^+}\frac{r^{\cancel{2}}\cos\phi\sin\phi}{\cancel{r}}=0$$

(3α)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=f_x(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{r\to 0^+}\frac{\cancel{r^3}\sin^3\phi}{\cancel{r^3}}$$

(3β)

$$\lim_{P\to P_0}\frac{\left|f(P)-f(P_0)-f'(P_0)(P-P_0)\right|}{|\overrightarrow{P_0P_1}|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - \left(\cancel{f_x(0,0), f_y(0,0)} \right)^0 \cdot (x,y) \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|f(x,y)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x^2+y^2}$$
$$= \sin^3 \phi$$

Πεπλεγμένη συνάρτηση

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0 \qquad \text{π.χ } x\cos y + ye^2 + x^2 y \cos z = 0$$

Μπορεί η Φ να λυθεί μονοσήμαντα ως προς y?

Αν $\exists P_0 = (x_{01} \dots, x_{0n}, y_0)$ κ $\pi_\varepsilon(P_0)$

(1) $\Phi_{x_i} \quad (i = 1, \dots, n),\ \Phi_y$ συνεχείς

(2) $\Phi(P_0) = 0$

(3) $\Phi_y(P_0) = \frac{\partial \Phi(P_0)}{\partial y} \neq 0$

Τότε:

(1) $y = f(x_1, \dots, x_n)$

(2) $y_{x_i} = -\frac{\partial \Phi_{x_i}}{\partial \Phi_y}$

π.χ $z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_z}$

Απόδ. (2)

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = 0 &\implies \mathrm{d}\Phi = \Phi_{x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \dots + \Phi_{x_n}\,\mathrm{d}x_n + \Phi_y\,\mathrm{d}y = 0 \\
&\implies \Phi_{x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \dots + \Phi_{x_n}\,\mathrm{d}x_n + \Phi_y(y_{x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \dots + y_{x_n}\,\mathrm{d}x_n) \\
&\implies (\Phi_{x_1} + \Phi_y y_{x_1})\,\mathrm{d}x_1 + \dots + (\Phi_{x_n} + \Phi_y y_{x_n})\,\mathrm{d}x_n = 0 \\
&\implies \Phi_{x_i} + \Phi_y y_{x_i} = 0 \implies y_{x_i} = -\frac{\Phi_{x_i}}{\Phi_y}
\end{aligned}$$

$$\Phi(x,y,z) = 0 \implies z = f(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Phi &= \Phi_x(P_0)\,\mathrm{d}x + \Phi_y(P_0)\,\mathrm{d}y + \Phi_z(P_0)\,\mathrm{d}z \\
&= \nabla\Phi(P_0) \bullet \mathrm{d}\vec{r} = 0 \implies \\
&\implies \boxed{\nabla\Phi(P_0) \perp \mathrm{d}\vec{r}}
\end{aligned}$$

Συνέπειες

$$\begin{aligned}
\nabla\Phi(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 &\implies \\
\big(\Phi_x(P_0), \Phi_y(P_0), \Phi_z(P_0)\big) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 &\implies \\
\Phi_x(P_0)(x - x_0) + \Phi_y(P_0)(y - y_0) + \Phi_z(P_0)(z - z_0) &= 0
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\, \nabla\Phi(P_0) \implies$$
$$(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = \lambda \left(\Phi_x(P_0), \Phi_y(P_0), \Phi_z(P_0)\right) \implies$$
$$\implies \underbrace{\begin{cases} x &= x_0 + \lambda\Phi_x(P_0) \\ y &= y_0 + \lambda\Phi_y(P_0) \\ z &= z_0 + \lambda\Phi_z(P_0) \end{cases}}_{\text{παραμετρικές εξισώσεις}} \implies \lambda = \underbrace{\boxed{\frac{x - x_0}{\Phi_x(P_0)} + \frac{y - y_0}{\Phi_y(P_0)} + \frac{z - z_0}{\Phi_z(P_0)}}}_{\text{Αλγεβρικές εξισώσεις}}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} \implies \overrightarrow{OP} = \overline{OP_0} + \lambda\vec{b}$$
$$\implies (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \Phi_x(P_0) & \Phi_y(P_0) & \Phi_z(P_0) \\ H_x(P_0) & H_y(P_0) & H_z(P_0) \end{vmatrix}$$
$$\implies (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda \begin{bmatrix} & \vec{e_1}\left(\Phi_y(P_0)H_z(P_0) - \Phi_z(P_0)H_y(P_0)\right) \\ - & \vec{e_2}\left(\Phi_x(P_0)H_z(P_0) - \Phi_z(P_0)H_x(P_0)\right) \\ + & \vec{e_3}\left(\Phi_x(P_0)H_y(P_0) - \Phi_y(P_0)H_x(P_0)\right) \end{bmatrix}$$
$$\implies \lambda = \frac{x - x_0}{\Phi_y(P_0)H_z(P_0) - \Phi_z(P_0)H_y(P_0)} + \frac{y - y_0}{\Phi_x(P_0)H_z(P_0) - \Phi_z(P_0)H_x(P_0)} + \frac{z - z_0}{\Phi_x(P_0)H_y(P_0) - \Phi_y(P_0)H_x(P_0)}$$

Άσκηση

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1 = 0$$

Να εξεταστεί εάν $y = f(x,z) \to$ λύνεται μονοσήμαντα σε περιοχή του σημείου $P_1 = (0,0)$.
Να υπολογιστούν οι $f_x(0,0),\ f_z(0,0)$.

(1) $\Phi_x = \cos y - z\sin x$
$\Phi_y = -x\sin y + \cos z$
$\Phi_z = -y\sin z + \cos x$

(2) $\Phi(P_0) = 0$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, y_0, 0)$

$\Phi(P_0) = \cancel{0\cos y_0} + y_0\cancelto{1}{\cos 0} + \cancel{0\cos 0} - 1 = 0 \implies y_0 = 1$

(3) $\Phi_y(P_0) \neq 0 \implies -x_0\sin y_0 + \cos z_0 = 1 \neq 0$

Τελικά γίνεται $\boxed{y = f(x,z)}$.

$$f_x = y_x = \tfrac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y} = -\frac{\cos y_0 - z_0\sin x_0}{-x_0\sin y_0 + \cos z_0} = -\cos 1$$
$$f_z = y_z = \tfrac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\Phi_z}{\Phi_y} = -\frac{-y_0\sin z_0 + \cos x_0}{-x_0\sin y_0 + \cos z_0} = -1$$

Άσκηση

$$\Phi(x,y,z) = e^z + x^2y + z + 5 = 0$$

Θεωρείται ότι από την $\Phi(x,y,z)$ προκύπτει η $z = f(x,y)$.
$z_{xy} = ?$

$$\begin{array}{l|l} \Phi_x = 2xy & z_x = -\frac{\Phi_x}{\Phi_z} = -2\frac{2xy}{e^z+1} \\ \Phi_y = x^2 & z_y = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z} = -\frac{x^2}{e^z+1} \\ \Phi_z = e^z + 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} z_{xy} = (z_x)_y = -\left(\frac{2xy}{e^z+1}\right)_y &= -\frac{2x(e^z+1) - 2xy \cdot \boxed{z_y}}{(e^z+1)^2} \\ &= -\frac{2x(e^z+1) + 2xye^z\frac{x^2}{e^z+1}}{(e^z+1)^2} \\ &= \frac{-2x(e^z+1)^2 - 2x^3ye^z}{(e^z+1)^3} \end{aligned}$$

Άσκηση Αν $z = uv$ όπου $u = u(x, y)$ κ $v = v(x, y)$
$u^2 + v^2 - x - y = 0$ και $u^2 - v^2 + 3x + y = 0$
να υπολογιστούν οι z_x και z_y.
SOS

1) Κατασκευάζω τις πεπλεγμένες συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, u, v) = u^2 + v^2 - x - y = 0 \\ \Phi_2(x, y, u, v) = u^2 - v^2 + 3x + y = 0 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Phi_1 = \Phi_{1x}\,\mathrm{d}x + \Phi_{1y}\,\mathrm{d}y + \Phi_{1u}\,\mathrm{d}u + \Phi_{1v}\,\mathrm{d}v = 0 \implies \\ \mathrm{d}\Phi_1 = \Phi_{1x}\,\mathrm{d}x + \Phi_{1y}\,\mathrm{d}y + \Phi_{1u}(u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y) + \Phi_{1v}(v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y) = 0 \implies \\ \mathrm{d}\Phi_1 = \big(\Phi_{1x} + \Phi_p 1uu_x + \Phi_{1v}v_x\big)\,\mathrm{d}x + \big(\Phi_{1y} + \Phi_{1u}u_y + \Phi_{1v}v_y\big)\,\mathrm{d}y \implies \\ \begin{cases} \Phi_{1u}u_x + \Phi_{1v}v_x & = -\Phi_{1x} \\ \Phi_{1u}u_y + \Phi_{1v}v_y & = -\Phi_{1y} \end{cases} \end{aligned}$$

3) Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο:

$$\begin{cases} \Phi_{2u}u_x + \Phi_{2v}v_x & = -\Phi_{2x} \\ \Phi_{2u}u_y + \Phi_{2v}v_y & = -\Phi_{2y} \end{cases}$$

4) Λύση Α συστήματος

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} -\Phi_{1x} & \Phi_{1v} \\ -\Phi_{2x} & \Phi_{2v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi_{1u} & \Phi_{1v} \\ \Phi_{2u} & \Phi_{2v} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2v \\ -3 & -2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2u}$$

$$v_x = \frac{\begin{vmatrix} \Phi_{1u} & -\Phi_{1x} \\ \Phi_{2u} & -\Phi_{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi_{1u} & \Phi_{1v} \\ \Phi_{2u} & \Phi_{2v} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 2u & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2u}$$

Λύση Β-συστήματος

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} -\Phi_{1y} & \Phi_{1v} \\ -\Phi_{2y} & \Phi_{2v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi_{1u} & \Phi_{1v} \\ \Phi_{2u} & \Phi_{2v} \end{vmatrix}} = 0$$

$$v_y = \frac{\begin{vmatrix} \Phi_{1u} & -\Phi_{1y} \\ \Phi_{2u} & -\Phi_{2y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi_{1u} & \Phi_{1v} \\ \Phi_{2u} & \Phi_{2v} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2v}$$

Για να λύσω την άσκηση, μπορώ να σκεφτώ ότι $z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial uv}{\partial x} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}$, ή:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}z = z_u\,\mathrm{d}u + z_v\,\mathrm{d}v \implies \\
&\mathrm{d}z = z_u(u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y) + z_v(v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y) \implies \\
&\mathrm{d}z = (z_u u_x + z_v v_x)\,\mathrm{d}x + (z_u u_y + z_v v_y)\,\mathrm{d}y \implies \\
&\mathrm{d}z = z_x\,\mathrm{d}x + z_y\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_x &= z_u u_x + z_v v_x = \\
&= v\left(-\frac{1}{2u}\right) + u\frac{1}{v} = \frac{u}{v} - \frac{v}{2u} \\
z_y &= z_u u_y + z_v v_y = \\
&= v \cdot 0 + u\frac{1}{2v} = \frac{u}{2v}
\end{aligned}$$

Άσκηση Επιφάνεια $z = x^2 + 4y^2 - 2$.
Ζητείται η εξίσωση του εφαπτ. επιπέδου στην επιφάνεια παράλληλου στο επίπεδο $2x + y - z = 4$.
Επίσης ζητείται το σημείο τομής $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Πεπλεγμένη μορφή $\Phi(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - z - 2 = 0$.
Εξ. εφαπτόμενου επιπέδου:

$$\begin{aligned}
&\Phi_x(P_0)(x - x_0) + \Phi_y(P_0)(y - y_0) + \Phi_z(P_0)(z - z_0) = 0 \\
\implies &2x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0.(1)
\end{aligned}$$

Παρατηρώ ότι:

$$\frac{2x_0}{2} = \frac{8y_0}{1} = \frac{-1}{-1} \implies \begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$z_0 = x_0^2 + 4y_0^2 - 2 \implies z_0 = -\frac{15}{16}$$

$$\begin{aligned}
(1) &\implies 2(x - 1) + \left(y - \frac{1}{8}\right) - \left(z + \frac{15}{16}\right) = 0 \\
&\implies 2x + y - z = \frac{49}{16}
\end{aligned}$$

Άσκηση Επιφάνεια $x^2 + y^2 = 4z^2$
Ζητείται η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου κ της κάθετης ευθείας στην επιφάνεια στο σημείο $P_0 = (6, -8, 5)$ αυτής.

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$$

Εξίσ. εφαπτ. επιπ.:

$$\begin{aligned} \Phi_x(P_0)(x - x_0) + \Phi_y(P_0)(y - y_0) + \Phi_z(P_0)(z - z_0) = 0 \\ \implies 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 8z_0(z - z_0) = 0 \implies \\ \implies 12(x - 6) - 16(y + 8) - 40(z - 5) = 0 \implies \\ \implies 3(x - 6) - 4(y + 8) - 10(z - 5) = 0 \implies \boxed{3x - 4y - 10z = 0} \end{aligned}$$

Εξ. κάθ. ευθείας:

$$\frac{x - x_0}{\Phi_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{\Phi_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{\Phi_z(P_0)} \implies$$
$$\frac{x - 6}{3} = \frac{y + 8}{-4} = \frac{z - 5}{10}$$

Άσκηση Να βρεθεί η εξ. της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 14 \\ x + y + z & = 6 \end{cases}$ στο σημείο $P_0 = (1, 2, 3)$

όπου $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$
και $g(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \nabla f(P_0) \times \nabla g(P_0) \\ & \implies \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \lambda \nabla f(P_0) \times \nabla g(P_0) \implies \\ & \implies (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ f_x(P_0) & f_y(P_0) & f_z(P_0) \\ g_x(P_0) & g_y(P_0) & g_z(P_0) \end{vmatrix} \implies (x - 1,\ y - 2,\ z - 3) = \lambda \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ & \implies \begin{cases} x - 1 & = \lambda \cdot (-2) \\ y - 2 & = \lambda \cdot 4 \\ z - 3 & = \lambda \cdot (-2) \end{cases} \\ & \implies \boxed{\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 3}{-2}} \end{aligned}$$

$$f(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^k f_{P_0}(P)}{k!} = \underbrace{\frac{d^0 f_{P_0}}{0!}}_{f(P_0)} + \frac{\mathrm{d}^1 f_{P_0}(P)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f_{P_0}(P)}{2!} + \frac{\mathrm{d}^3 f_{P_0}(P)}{3!} + \dots$$

$$\mathrm{d}^k f_{P_0}(P) = \left[f_{x_1}(P_0)(x_1 - x_{10}) + \dots + f_{x_n}(P_0)(x_n - x_{n0}) \right]^{(k)}$$

Άσκηση Να αναλυθεί η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ γύρω από το σημείο $P_0 = (1, 1)$ σε σειρά Taylor χρησιμοποιώντας όρους μέχρι $3^{ης}$ τάξης.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f_{P_0}(P) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f_{P_0}(P) + \frac{1}{6}\,\mathrm{d}^3 f_{P_0}(P)$$

$$f(x_0,y_0) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}f_{P_0}(P) = f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0) \\ &f = \tfrac{1}{xy} \implies \begin{cases} f_x = -\frac{1}{x^2y} \\ f_y = -\frac{1}{xy^2} \end{cases} \end{aligned}\right\} \implies \mathrm{d}f_{P_0}(P) = \left(-\frac{1}{x^2y}\right)_{P_0}(x-1) + \left(-\frac{1}{xy^2}{}_{P_0}(y-1)\right) \implies$$

$$\implies \mathrm{d}f_{P_0}(P) = -(x-1) - (y-1) = 2 - x - y$$

$$\mathrm{d}^2 f_{P_0}(P) = \big[f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0)\big]^{(2)} = f_{x^2}(P_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(P_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{y^2}(P_0)(y-y_0)$$

$$f_{x^2} = (f_x)_x = \left(-\frac{1}{x^2y}\right)_x = \frac{2}{x^3y}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \left(-\frac{1}{x^2y}\right)_y = \frac{1}{x^2y^2}$$

$$f_{y^2} = (f_y)_y = \left(-\frac{1}{xy^2}\right)_y = \frac{2}{xy^3}$$

$$\implies \mathrm{d}^2 f_{P_0}(P) = \left(\frac{2}{x^3y}{}_{P_0}\right)(x-x_0)^2 + 2\left(\frac{1}{x^2y^2}\right)_{P_0}(x-x_0)(y-y_0) + \left(\frac{2}{xy^3}\right)_{P_0}(y-y_0)^2$$

$$\implies \mathrm{d}^2 f_{P_0}(P) = 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^3 f_{P_0}(P) &= \big[f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0)\big]^{(3)} = \\ &= f_{x^3}(P_0)(x-x_0)^3 + 3f_{x^2y}(P_0)(x-x_0)^2(y-y_0) + 3f_{xy^2}(P_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f_{y^3}(P_0)(y-y_0)^3 \end{aligned}$$

$$f_{x^3} = (f_{x^2})_x = -\frac{6}{x^4y}$$

$$f_{x^2y} = (f_{x^2})_y = -\frac{2}{x^3y^2}$$

$$f_{xy^2} = (f_{xy})_y = -\frac{2}{x^2y^3}$$

$$f_{y^3} = (f_{y^2})_y = -\frac{6}{xy^4}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^3 f_{P_0}(P) &= -6(x-1)^3 + 3\cdot(-2)(x-1)^2(y-1) + 3\cdot(-2)(x-1)(y-1)^2 - 6(y-1)^3 \\ \mathrm{d}^2 f_{P_0}(P) &= 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2 \\ \mathrm{d}f_{P_0}(P) &= 2 - x - y \\ f(P_0) &= 1 \end{aligned}$$

Άρα:

$$f(x,y) = 1+2-x-y+(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2-(x-1)^3-(x-1)^2(y-1)-(x-1)(y-1)^2-(y-1)^3$$

Στάσιμα σημεία

1. Τοπικά μέγιστα
2. Τοπικά ελάχιστα
3. Σαγματικά σημεία

Υπολογισμός: $\nabla f(x_1,\ldots,x_n)=0 \implies \left.\begin{cases} f_{x_1} &= 0\\ f_{x_2} &= 0\\ \vdots \\ f_{x_n} &= 0\end{cases}\right\} P_0$

Χαρακτηρισμός $H_f = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n}\\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n}\\ \vdots & & \ddots & \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n}\end{bmatrix}$ εσσιανός

$f_{x_ix-J}=f_{x_jx_i}$ όταν η f έχει συνεχείς μερ. παραγώγους 2ης τάξης
$\mathrm{H}_f=\mathrm{H}_f^T \implies$ έχει πραγματικές ιδιοτιμές

Κριτήριο (για στάσιμο σημείο)

- Αν $\mathrm{H}_f(P_0)$ είναι θετικά ορισμένος, τότε το P_0 είναι ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ
- Αν $\mathrm{H}_f(P_0)$ είναι αρνητικά ορισμένος, τότε το P_0 είναι ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ
- Αν $\mathrm{H}_f(P_0)$ είναι μικτά προσημασμένος, τότε το P_0 είναι ΣΑΓΜΑΤΙΚΟ.

1. Θετικά ορισμένος πίνακας A:
   (α□) $uAu^T>0\;\forall u\in\mathbb{R}^n-\left\{\vec{0}\right\}$ (ορισμός)
   (β□) Έχει μόνο θετικές ιδιοτιμές
   (γ□) Κύριες ελάσσονες ορίζουσες $\mathrm{D}_k>0,\ k=1,\cdots,n$
2. Αρνητικά ορισμένος πίνακας A:
   (α□) $uAu^T<0\;\forall u\in\mathbb{R}^n-\left\{\vec{0}\right\}$ (ορισμός)
   (β□) Έχει μόνο αρνητικές ιδιοτιμές
   (γ□) Κύριες ελάσσονες ορίζουσες $(-1)^k\mathrm{D}_k>0,\ k=1,\cdots,n$ (δηλ. $\mathrm{D}_1<0,\mathrm{D}_2>0,\mathrm{D}_3<0,\ldots$)
3. Μικτά προσημασμένος A:
   (α□) $\exists u_1,u_2\in\mathbb{R}^n-\left\{\vec{0}\right\},\ \begin{matrix}u_1Au_1^T>0\\ u_2Au_2^T<0\end{matrix}$ (ορισμός - δεν αποκλείονται τα μηδενικά αποτελέσματα)
   (β□) Έχει τουλάχιστον 1 θετική και 1 αρνητική ιδιοτιμή (δεν αποκλείονται ιδιοτιμές 0)
   (γ□) Υπό την προϋπόθεση ότι $\mathrm{D}_n=\det[A]\neq 0$ (χωρίς να αποκλείονται εσωτερικα D_k)
   Όταν δεν ακολουθείται στις D_k η αλληλουχία προσήμων $(+++++\cdots)$ ή $(-+-+-\cdots)$ και να υπάρχει τουλάχιστον μία $\mathrm{D}_k>0$ και μία $\mathrm{D}_k<0$
   (δ□) Αν $\det[A]=0$, 2 στοιχεία κύριας διαγωνίου ετερόσημα.
   (ε□) Αν $\det[A]\neq 0$ και $\mathrm{Tr}[A]=0$

Διερεύνηση περίπτωσης συνάρτησης 2 μεταβλητών
$z=f(x,y)$

1. $\nabla f(x,y)=0 \implies \left.\begin{cases} f_x &= 0\\ f_y &= 0\end{cases}\right\} P_0$

$$\begin{array}{lll} & \to f_{xx}(P_0) > 0 \text{ κ } \det\left[\mathrm{H}_f(P_0)\right] > 0 & \to \overbrace{\mathrm{H}_f}^{\text{τοπικό ελάχιστο}} \text{ θ.ό} \\ 2.\ \mathrm{H}_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} & \to f_{xx}(P_0) < 0 \text{ κ } \det\left[\mathrm{H}_f(P_0)\right] > 0 & \to \overbrace{\mathrm{H}_f}^{\text{τοπικό μέγιστο}} \text{ α.ό} \\ & \to \det\left[\mathrm{H}_f(P_0)\right] < 0 & \to \underbrace{H_f}_{\text{σαγματικό}} \text{ μ.π} \\ & \to \det\left[\mathrm{H}_f(P_0)\right] = 0 & \to \text{δεν ξέρω} \end{array}$$

Άσκηση Να βρεθούν τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$

$$\nabla f = 0 \implies \begin{cases} f_x & = 3x^2 - 3y = 0 \implies y = x^2 \\ f_y & = 3y^2 - 3x = 0 \implies x = y^2 \end{cases}$$

$$x = x^4 \implies x^4 - x = 0 \implies x(x^3 - 1) = 0 \implies \underbrace{x}_{x=0}\underbrace{(x-1)}_{x=1}(\underbrace{x^2 + x + 1}_{\Delta<0}) = 0$$

$x = 1 \implies y = 1 \quad \to (1, 1)$

$x = 0 \implies y = 0 \quad \to (0, 0)$

$$\mathrm{H}_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H}_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = -9 < 0 \to \text{μ.π} \to (0, 0) \text{ σαγμ.}$$

$$\mathrm{H}_f(1, 1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} = 27 > 0 \\ f_{xx} = 6 > 0 \end{array} \to \text{θ.ο} \to (1, 1) \text{ τοπ. ελάχιστο}$$

Άσκηση $v = xyz \quad x + y + z = 5$

$\implies z = 5 - x - y$

$$V(x, y) = xy(5 - x - y) = 5xy - x^2y - xy^2 \qquad \left(\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\nabla V = 0 \implies \begin{cases} v_x & = 5y - 2xy - y^2 = 0 \implies y(5 - 2x - y) = 0 \underset{y\neq 0}{\implies} 2x + y = 5 \implies y = 5 - 2 \\ v_y & = 5x - x^2 - 2xy = 0 \implies x(5 - x - 2y) = 0 \overset{x\neq 0}{\implies} x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\implies x + 2(5 - 2x) = 5 \implies -3x = -5 \implies x = \frac{5}{3}$$

$$y = 5 - 2x = 5 - 2\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$z = 5 - x - y = \frac{5}{3}$$

$$\mathrm{H}_f = \begin{bmatrix} -2y & 5 - 2x - 2y \\ 5 - 2x - 2y & -2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \to \mathrm{D}_1 = -\frac{10}{3} < 0 \quad \mathrm{D}_2 = \frac{25}{3} > 0$$

Άσκηση $f(x, y) = x^4 - y^3 - 2(x - y)^2$

$$\nabla f = 0 \implies \begin{cases} f_x &= 4x^3 - 4(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \implies y = x - x^3 \\ f_y &= 4y^3 + 4(x-y) = 4y^3 + 4x - 4y = 0 \implies y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$

$(2) \overset{(1)}{\implies} \left(x - x^3\right)^3 + x - \left(x - x^3\right) = 0 \implies \left(x - x^3\right)^3 + x^3 = 0 \implies \left(x - x^3 + x\right)\left[\left(x - x^3\right)^2 - \left(x - x^3\right)x + x^2\right] = 0 \implies \left(2x - x^3\right)\left(x^2 + x^6 - 2x^4 - x^2 + x^4 + x^2\right) = 0 \implies x\left(2 - x^2\right)\left(x^6 - x^4 + x^2\right) = 0 \implies$

$$\underbrace{x^3}_{x=0}\left(\underbrace{2 - x^2}_{x=\pm\sqrt{2}}\right)\left(x^4 - x^2 + 1\right) = 0$$

$$(1) \begin{array}{l} \xrightarrow{x=0} \quad y = 0 \\ \xrightarrow{x=+\sqrt{2}} \quad y = -\sqrt{2} \\ \xrightarrow{x=-\sqrt{2}} \quad y = +\sqrt{2} \end{array}$$

$$\mathrm{H}_f = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}$$

1. $P_0 = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \to \mathrm{H}_f(P_0) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$ $\begin{array}{ll} \mathrm{D}_1 > 0 & \mathrm{H}_f \to \text{θ.ο} \\ \mathrm{D}_2 > 0 & P_0 \to \text{ τοπικό ελάχιστο} \end{array}$

2. $P_0 = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \uparrow$

3. $P_0 = (0,0) \to \mathrm{H}_f = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad \det\left[\mathrm{H}_f(P_0)\right] = 0$

$y = 0$

$$f_1(x) = x^4 - 2x^2$$

$$\left.\begin{array}{r} f_1'(x) = 4x^3 - 4x \implies f_1'(0) = 0 \\ f_1''(x) = 12x^2 - 4 \implies f_1''(0) - 4 < 0 \end{array}\right\} \text{τοπ. max}$$

$y = x$

$$f_2(x) = 2x^4$$
$$f_2'(x) = 8x^3 \implies f_2'(0) = 0 \to \text{ τοπικό min}$$

Άρα είναι σαγματικό.

Άσκηση $\quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3 + 3xy + 3yz + 3xz$

$$\nabla f = 0 \implies \begin{cases} f_x &= 3x^2 + 3y + 3z = 0 \implies x^3 + y + z = 0 \quad (1) \\ f_y &= 3y^2 + 3x + 3z = 0 \implies y^2 + x + z = 0 \quad (2) \\ f_z &= 3z^2 + 3x + 3y = 0 \implies z^2 + x + y = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) - (2) : x^2 + y - y^2 - x = 0 &\implies \\ &\implies x^2 - y^2 - (x - y) = 0 \implies \\ &\implies (x-y)(x+y) - (x-y) = 0 \implies \\ &\implies (x-y)(x+y-1) = 0 \implies \begin{cases} x + y = 1(4) \\ \text{ή} \\ \boxed{x = y} \quad (5) \end{cases} \end{aligned}$$

(3) κ (4): $z^2 + 1 = 0 \implies z^2 = -1$ ΑΤΟΠΟ

(1) κ (5): $x^2 + x + z = 0$
(2) κ (5): $x^2 + x + z = 0 \implies z = -x - x^2 \quad (6)$
(3) κ (5): $z^2 + 2x = 0 \quad (7)$

$$\begin{aligned}(6) \text{ κ } (7) : \left(-x - x^2\right)^2 + 2x = 0 \\ \implies x^2 + x^4 + 2x^3 + 2x = 0 \\ \implies x^3(x+2) + x(x+2) = 0 \\ \implies (x+2)(x^3 + x) = 0 \\ \implies x(x+2)(x^2+1) = 0\end{aligned}$$

$$(6) \begin{array}{l} \xrightarrow{x=0} \quad z = 0 \\ \xrightarrow{x=-2} \quad z = -2 \end{array}$$

$(0,0,0)$ $(-2,-2,-2)$

$$\mathrm{H}_f = \begin{bmatrix} 6x & 3 & 3 \\ 3 & 6y & 3 \\ 3 & 3 & 6z \end{bmatrix}$$

$$(1)\ \mathrm{H}_f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \left.\begin{array}{l} \to \operatorname{Tr}\left[\mathrm{H}_f(0,0,0)\right] = 0 \\ \to \det\left[\mathrm{H}_f(0,0,0)\right] \neq 0 \end{array}\right\} \text{μικτά προσημασμένος} \implies \text{σαγμ.}$$

$$(2)\ \mathrm{H}_f(0,0,0) = \begin{bmatrix} -12 & 3 & 3 \\ 3 & -12 & 3 \\ 3 & 3 & -12 \end{bmatrix} \left.\begin{array}{ll} \mathrm{D}_1 = -12 < 0 & - \\ \mathrm{D}_2 = 135 > 0 & + \\ \mathrm{D}_3 = -1350 < 0 & - \end{array}\right\} \text{αρν. ορισμένος} \implies \text{τοπικό max}$$

Υπολογισμός στασίμων σημείων συνάρτησης $z = f(x,y)$ επάνω σε καμπύλη $g(x,y) = 0$

(1) Κατασκευάζουμε τη βοηθητική συνάρτηση $\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, $\lambda =$ πολ/στής Lagrange

(2) Βρίσκουμε τα στάσιμα σημεία $P_0 = (x_0, y_0, \lambda_0)$ της $\Phi(x,y,\lambda)$ από της σχέση $\nabla\Phi(x,y,\lambda) = 0$

(3) Κατασκευάζουμε τον εσσιανό πίνακα της Φ : $\mathrm{H}_\Phi(x,y)$ για $\forall P_0$

(4) Βρίσκουμε τα μη μηδενικά διανύσματα (v,w) που ικανοποιούν τη συνθήκη $\nabla g(x,y) \cdot (v,w) = 0$

(5) Κατασκευάζουμε την παράσταση $\begin{bmatrix} v & w \end{bmatrix} \mathrm{H}_\Phi(P_0) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \to \begin{cases} > 0\ \forall (v,w) & \text{τότε } P_0 \text{ τοπικό} \\ < 0\ \forall (v,w) & \text{τότε } P_0 \text{ τοπικό} \\ \lesseqgtr 0 \text{ τουλάχιστον για κάποια } (v,w) & \text{τότε } P_0 \text{ σαγμ.} \end{cases}$

Άσκηση Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + y^2$, υπό τον περιορισμό $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$

$g(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

$\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda\left(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8\right) \qquad (1)$

$$\nabla\Phi(x,y,\lambda) = 0 \implies \begin{cases} \Phi_x & = 2x + 10\lambda x + 6\lambda y = 0 \quad (2) \\ \Phi_y & = 2y + 6\lambda x + 10\lambda y = 0 \quad (3) \\ \Phi_\lambda & = 5x^2 + 6xy + 5^2 - 8 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

(2) κ (3) : $2x + 2y + 16\lambda x + 16\lambda y = 0 \implies x + y + 8\lambda(x+y) = 0$

$$\implies (x+y)(1+8\lambda) = 0 \implies \begin{cases} x & = -y \\ \text{ή} & \\ \lambda & = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

1η περ. $x = -y$

$$\left.\begin{array}{l}(2): -2y - 10\lambda y + 6\lambda y = 0 \implies -2y - 4\lambda y = 0 \implies -2y(1+2\lambda) = 0 \\ (3): 2y - 6\lambda y + 10\lambda y = 0 \implies 2y + 4\lambda y = 0 \implies 2y(1+2\lambda) = 0\end{array}\right\} y = 0 \text{ ή } \lambda = -\tfrac{1}{2}$$

$(4): 5y^2 - 6y^2 + 5y^2 = 8 \implies 4y^2 = 8 \implies y^2 = 2 \implies y = \sqrt{2}$ ή $\sqrt{-2}$

$A = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right) \implies f(A) = 4$

$B = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right) \implies f(B) = 4$

2η περ. $\lambda = -\frac{1}{8}$

$(2): 2x - \frac{10}{8}x - \frac{6}{8}y = 0 \implies x = y \quad (5)$

$(3): 2y - \frac{6}{8}x - \frac{10}{8}y = 0 \implies \frac{6}{8}y - \frac{6}{8}x = 0$

(4) κ $(5): 5x^2 + 6x^2 + 5x^2 = 8 \implies 16x^2 = 8 \implies x^2 = \frac{1}{2} \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{8}\right) \implies f(\Gamma) = 1$

$\Delta = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{8}\right) \implies f(\Delta) = 1$

Εδώ από τις τιμές της συνάρτησης, φαίνεται ότι τα Γ, Δ είναι σημεία τοπικού & ολικού ελαχίστου, ενώ τα A, B είναι σημεία τοπικού & ολικού μεγίστου. Η άσκηση εδώ έχει τελειώσει. Αν προχωρούσαμε με τη μεθοδολογία θα είχαμε:

$$\mathrm{H}_\Phi = (x,y) = \begin{bmatrix}\Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+10\lambda & 6\lambda & \\ 6\lambda & 2+10\lambda & (6)\end{bmatrix}$$

Έστω διανύσματα (v, w) που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\begin{aligned}\nabla g(x,y)\cdot(v,w) = 0 &\implies (10x_0 + 6y,\ 6x_0 + 10y_0)\cdot(v,w) = 0 \\ &\implies (10x_0 + 6y_0)v + (6x_0 + 10y_0)w = 0 \qquad (7)\end{aligned}$$

1. Σημείο A: $\mathrm{H}_\Phi(A) = \begin{bmatrix}-3 & -3 \\ -3 & -3\end{bmatrix}$

   $(7): \left(10\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\right)v + \left(6\sqrt{2} - 10\sqrt{2}w\right) = 0 \implies \underline{v = w}$

   $\begin{bmatrix}v & w\end{bmatrix}\mathrm{H}_\Phi(A)\begin{bmatrix}v \\ w\end{bmatrix} = [v\ w]\begin{bmatrix}-3 & -3 \\ -3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}vw\end{bmatrix} = [v\ w]\begin{bmatrix}-3v-3w \\ -3v-3w\end{bmatrix} = (-3v-3w)v + (-3v-3w)w =$ $-3(v+w)v - 3(v+w)w = -3(v+w)^2 = -3(2v)^2 = -12v^2 < 0$

   $A \to$ τοπικό max

2. Το B θα το κάνετε μόνοι σας.

3. Σημείο Γ: $\mathrm{H}_\Phi(\Gamma) = \begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$

   $(7): \left(\frac{10}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}}\right)v + \left(\frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{10}{\sqrt{2}}\right)w = 0 \implies v = -w$

   $\begin{bmatrix}v & w\end{bmatrix}\mathrm{H}_\Phi(\Gamma)\begin{bmatrix}v \\ w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v & w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v \\ w\end{bmatrix} = \left(\frac{3}{4}v - \frac{3}{4}w\right)v + \left(-\frac{3}{4}v + \frac{3}{4}w\right)w = \frac{3}{4}(v-w)v -$ $\frac{3}{4}(v-w)w = \frac{3}{4}(v-w)^2 = \frac{3}{4}(2v)^2 > 0$

   $\Gamma \to$ τοπικό ελάχιστο

4. Το Δ αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

Άσκηση Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-8)^2 + 10$ επί του χωριου $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Εύρεση στάσιμων σημείων εντός του D $(x^2 + y^2 < 1)$

$$\nabla f(x,y) = 0 \implies \left\{ \begin{array}{ll} f_x = 2(x-2) = 0 & \implies x = 2 \\ f_y = 2(y-8) = 0 & \implies y = 8 \end{array} \right\}$$

2. Εύρεση στάσιμων σημείων επί του ∂D $(x^2 + y^2 = 1)$ $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) = \lambda g(x,y) = (x-2)^2 + (y-8)^2 + 10 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

$$\nabla\Phi(x,y,\lambda) = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \Phi_x = 2(x-2) + 2\lambda x = 0 \implies x = \frac{2}{1+\lambda}(1) \\ \Phi_y = 2(y-8) + 2\lambda y = 0 \implies y = \frac{8}{1+\lambda}(2) \\ \Phi_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right\} \frac{4}{(1+\lambda)^2 + \frac{64}{(1+\lambda)^2}} = 1 \implies$$

$(1+\lambda)^2 = 68 \implies \lambda = \pm\sqrt{68} - 1$

Για $\lambda = \sqrt{68} - 1$ $\quad (1) \implies x = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $(2) \implies y = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Για $\lambda = -\sqrt{68} - 1$ $\quad (1) \implies x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $(2) \implies y = \frac{-4}{\sqrt{17}}$

$$\begin{array}{ll} \min \leftarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, \sqrt{68} - 1\right) & f(A) = 62.5 \\ \max \leftarrow B = \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, -\sqrt{68} - 1\right) & f(B) = 95.5 \end{array}$$

Άσκηση Περσινό θέμα

Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στάσιμα σημεία της $f(x,y) = x^2 + y^3 - 6y$

$$\nabla f(x,y) = 0 \implies \left\{ \begin{array}{ll} f_x & = 2x = 0 \implies x = 0 \\ f_y & = 3y^2 - 6 = 0 \implies y^2 = 2 \implies y = \pm\sqrt{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nearrow A = \left(0, \sqrt{2}\right) \\ \searrow B = \left(0, -\sqrt{2}\right) \end{array}$$

$$\mathrm{H}_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix} \begin{array}{l} \nearrow \mathrm{H}_f(\underbrace{A}_{\text{τοπικό ελάχιστο}}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \searrow \mathrm{H}_f(\underbrace{B}_{\text{σαγματικό}}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

Άσκηση Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στάσιμα σημεία της $f(x,y) = x - 2y$ επάνω στην καμπύλη $x^2 + y^2 = 4$

$$\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x - 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 4) \qquad (1)$$

$$\nabla\Phi(x,y,\lambda) = 0 \implies \begin{cases} \Phi_x = 1 + 2\lambda x = 0 & (2) \\ \Phi_y = -2 + 2\lambda y = 0 & (3) \\ \Phi_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 & (4) \end{cases}$$

$(2) : x = -\frac{1}{2\lambda} \qquad (5)$

$(3) : y = \frac{1}{\lambda} \qquad (6)$

$(4) \xRightarrow{(5),(6)} \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 4 \implies \frac{5}{4\lambda^2} = 4 \implies \lambda^2 = \frac{5}{16} \implies \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Για } \lambda = \frac{5}{4}\ (5) : x = \frac{-2}{\sqrt{5}}\ (6) : y = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \text{Για } \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{4}\ (5) : x = \frac{2}{\sqrt{5}}\ (6) : y = -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \to A = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{4}\right) \to f(A) = -\frac{10}{\sqrt{5}} & \min \\ \to B = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}}{4}\right) \to f(B) = \frac{10}{\sqrt{5}} & \max \end{array}$$