`http://users.auth.gr/natreas`

Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5

Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6

Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marsden (πιο μαθηματικό)

Μέρος I

Ατρέας

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Έστω $\mathbb{C} = \left\{ z = \overbrace{(x,y)}^{\text{γεωμετρική παράσταση μιγαδικού}};\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $x_2 = (x_2, y_2)$, τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο $\lambda \in \mathbb{R}$ με μιγαδικό z

Αν $z = (x, y)$, τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

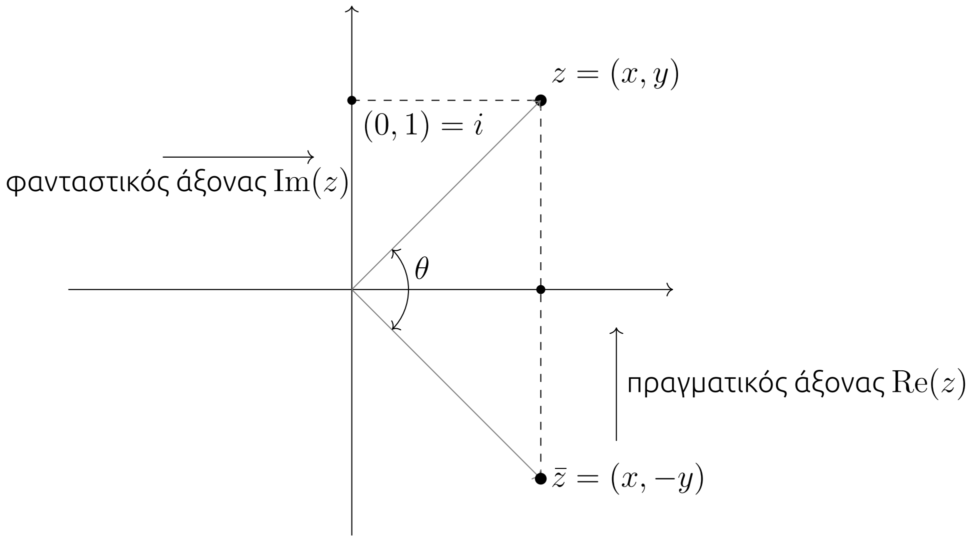
Αν $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$, τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{C}$ είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} A = \big\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\big\}$$

- $(x,0),(y,0) \in A \implies (x,0)+(y,0) = (x+y,0) \in A$
- $(x,0)(y,0) = (xy,0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$1 = (1,0)$$
$$x = (x,0)$$

Ορίζω:

$$i = (0,1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$$
$$\boxed{i^2 = -1}$$

Έτσι:

$$z = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$
$$\underset{i=(0,1)}{\overset{x=(x,0)}{=}} x\cdot 1 + yi$$
$$\implies \boxed{z = x + iy}$$

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z = (x,y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\overset{\text{πολικές}}{\underset{\text{του } (x,y)}{=}} \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta =$$

$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1}$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$z = |z| \underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}$$
$$= |z| \cdot e^{i\theta}$$

όπου στο εξής:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$\boxed{\text{τύπος του Euler}}$

Τελικά:

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}} \text{(πολική μορφή μιγαδικών)}$$

Σημείωση: $\cos\theta + i\sin\theta$

$$\overset{\text{σειρές}}{\underset{\text{McLaurin}}{=}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$\overset{i^2=-1}{=} \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right)$$

$$= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα $\mathrm{Arg}z$ (μη μηδενικού) μιγαδικού z να είναι η γωνία θ που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του $\mathbb{C}$ με την ημιευθεία OA, όπου A το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του $z = x + iy$.

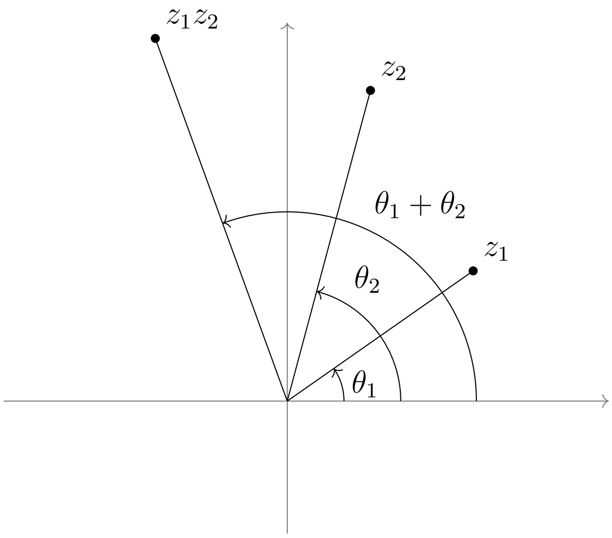
Έτσι:

$z = |z|e^{i\mathrm{Arg}\, z}$ πολική μορφή του z

$$z_1z_2 = |z_1|e^{i\mathrm{Arg}\, z_1}|z_2|e^{i\mathrm{Arg}\, z_2}$$

$$\boxed{z_1z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2)}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$$
$$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$



Ιδιότητα: $z\bar{z} = |z|^2$

Κεφάλαιο 2 Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

π.χ.

$$f(z) = z^2 \implies f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\mathrm{Re}(f)} + i\underbrace{(2xy)}_{\mathrm{Im}(f)}$$

$$\underset{\text{μορφή}}{\overset{\text{γεωμετρική}}{=}} (x^2 - y^2,\ 2xy)$$

Τελικά: $\boxed{f(x,y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)}$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

π.χ.

$$f(z) = \frac{1}{|z|\bar{z}} \overset{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z}$$

$$\overset{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\overset{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \overset{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

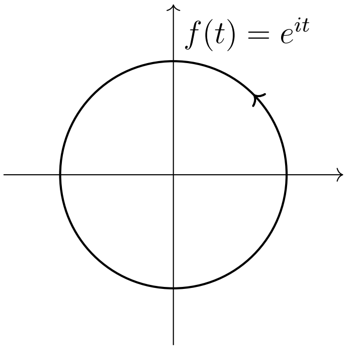
$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιγ. μεταβλ.}} \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} \begin{array}{l}\text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big)\end{array}$$

όπου u, v πραγματ. συναρτ. 2 μεταβλητών

Υπάρχουν $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής
π.χ

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{it},\ t \in (0,\pi] \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

$t \to (\cos t, \sin t)$ καμπύλη $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$



Η γραφ. παράσταση της $f(t) = e^{it},\ t \in (-\pi,\pi)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0,0)$ με αντιωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1,t) = (1,0) + t(0,1)$$

Το πεδίο ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδ. μεταβλητών υπολογίζεται ως συνήθως (με τις πραγματικές συναρτήσεις) ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ Διαφοροποιήσεις

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Πρέπει ο παρον. να είναι διάφορος του μηδενός: Έτσι $z \neq 0$ Άρα Π.Ο $= \mathbb{C} - \Big\{(0,0)\Big\}$

$$g(z) = \frac{z}{z^2+2}$$

Σημείωση Η g είναι **ρητή** συνάρτηση (δηλ. πηλίκο δύο (μιγαδικών) πολυωνύμων).
Κάθε συνάρτηση της μορφής $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ καλείται (μιγαδικό) πολυώνυμο.
Πρέπει παρον. $\neq 0$ δηλ:

$z^2 + 2 = 0$ (**ΠΡΟΣΟΧΗ!!** Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού N έχει ΑΚΡΙΒΩΣ N ρίζες στο $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} & z^2 + 2 = 0 \xRightarrow{i^2=-1} z^2 - 2i^2 = 0 \\ & \implies \left(z - \sqrt{2}i\right)\left(z + \sqrt{2}i\right) = 0 \\ & \implies \boxed{z = \pm\sqrt{2}i} \end{aligned}$$

Τελικά Π.Ο = $\mathbb{C} - \left\{\pm\sqrt{2}i\right\}$

$$\boxed{h(z) = \mathrm{Arg}\, z,\ \text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}}$$

Για $z = 0$ ΔΕΝ ορίζεται όρισμα, επειδή $0 = |0| \cdot e^{i\theta}\ \forall\theta$

Σημείωση $az^2 + bz + c = 0$
$a, b, c \in \mathbb{C}$

Λύνεται με διακρίνουσα κατά τα γνωστά.

Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα Horner για πολυώνυμα (με πραγματικούς συντελεστές) βαθμού $N \geq 3$.

$$\begin{aligned} a(z) &= e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= (e^x \cos y,\ e^x \sin y)\,, \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

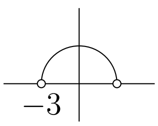
Ως διανυσματικό πεδίο προφανώς Π.Ο = $\mathbb{R}^2$

Έτσι Π.Ο = $\mathbb{C}$.

$l(z) = \mathrm{Log}$ (αντίστροφη της e^z)

$$\underbrace{\mathrm{Log}}_{\text{μιγαδικός λογάριθμος}} \overset{\text{ορισμός}}{:=} \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$$

Π.Ο $= \mathbb{C} - \{0\}$



$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(3) &= \ln|-3| = i\mathrm{Arg}\,(-3) \\ &= \ln 3 + i\pi \end{aligned}$$

$$\lambda(z) = \sin z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\left(\begin{array}{ll} e^{i\theta} & = \cos\theta + i\sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi] \\ e^{-i\theta} & = \cos\theta - i\sin\theta \\ \hline \sin\theta & = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array}\right)$$

Π.Ο = $\mathbb{C}$

$$m(z) = \cos z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Π.Ο $= \mathbb{C}$

Όλες οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες ισχύουν στο $\mathbb{C}$ όπως στο $\mathbb{R}$.

$$h(z) = \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{2k\pi + \operatorname{Arg} z}{n}} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

(Η $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται ως το **σύνολο** όλων των λύσεων της εξίσωσης $z^n = a, \quad a \in \mathbb{C}$)

Π.Ο $= \mathbb{C} - \{0\}$

2.1 Όριο/Συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής

Ορισμός

Έστω $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ μιγ. συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι σ.συσσ. του A και έστω $a = a_0 + ib_0$. Τότε

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a_0 \\ \textbf{ΚΑΙ} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b_0 \end{cases}$$

Επίσης, αν $z_0 \in A$, τότε
f συνεχής στο σημείο z_0

$$\Updownarrow$$

οι συναρτήσεις $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ΣΥΝΕΧΕΙΣ στο σημείο $(x_0, y_0$ (ως πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

Έτσι:

$$\left.\begin{array}{l} \text{οι πολυωνυμικές} \\ \text{η εκθετική} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\sin z, \cos z) \\ \text{οι υπερβολικές } (\operatorname{ch}, \operatorname{sh}) \end{array}\right\} \text{συνεχείς στο } \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{οι ρητές} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\tan z, \cot z) \end{array}\right\} \text{συνεχείς στο } \textbf{πεδίο ορισμού τους}$$

Ορίζω το ∞ του μιγαδικού επιπέδου να είναι το σύνολο σημείων που απέχουν "άπειρη" απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται ως:

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, όπου:

$$\infty + z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
$$\infty \cdot z = \infty \quad \forall z \neq 0$$
$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \neq \infty$$

Όλες οι πράξεις του ορίου που ξέρετε ισχύουν και στους μιγαδικούς (αρκεί να μην εμφανίζονται οι γνωστές απροσδιόριστες μορφές):

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Ο κανόνας De l' Hospital ισχύει στους μιγαδικούς.

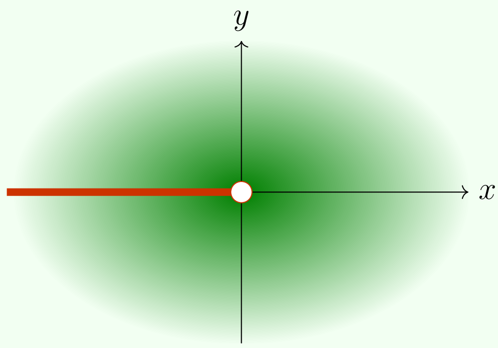
Σημείωση:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \mathbb{C} \iff \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = a \in \mathbb{C}$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \iff \lim_{z\to z_0} \left|f(z)\right| = 0$$

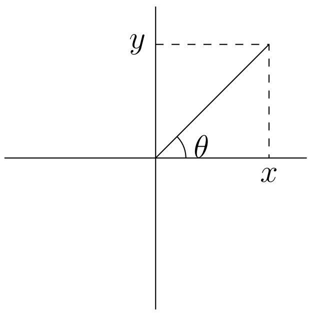
Θ.

Έστω $\operatorname{Arg} z : \mathbb{C} - \{0\} \to (-\pi, \pi]$
Τότε η $\operatorname{Arg} z$ **είναι συνεχής** στο σύνολο:

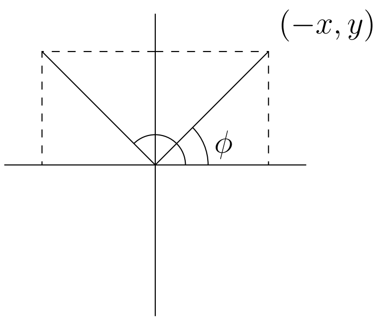
$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ ΚΑΙ } y = 0\}$$



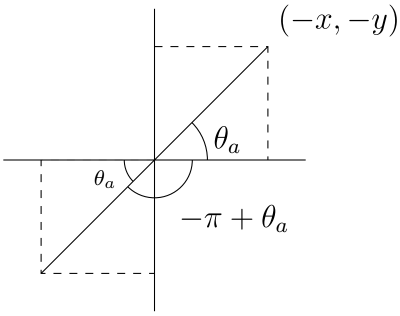
Έστω $z = x + iy$
(α) $x > 0,\ y > 0$



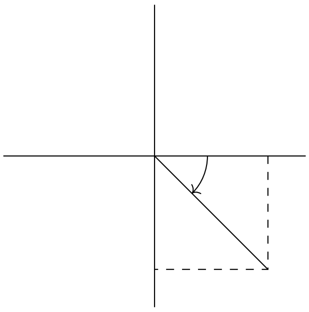
(β) $x < 0,\ y > 0$



(γ) $x < 0,\ y < 0$



(δ) $x > 0,\ y < 0$



$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x, y > 0 \\ \pi - \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y > 0 \\ -\pi + \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y < 0 \\ -\arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x > 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Για $\begin{matrix} x = 0, & \text{τότε } \operatorname{Arg} := \frac{\pi}{2} \text{ ή } -\frac{\pi}{2} \\ y = 0, & \text{τότε } \operatorname{Arg} := 0 \text{ ή } \pi \end{matrix}$

Έστω $z_0 = x_0 < 0$

- Έστω $z = x_0 + it \quad (t > 0)$

  Για $t \to 0^+,\ z \to z_0 = x_0$, αλλά:

$$\lim_{z\to z_0} \operatorname{Arg} z \overset{z=x_0+it}{=} \lim_{t\to 0^+} \operatorname{Arg}(x_0+it) \overset{\text{2ο τετ.}}{=} \lim_{t\to 0^+} \left(\pi - \arctan\left|\frac{t}{x_0}\right|\right) = \pi - \arctan 0 = \pi$$

- Για $z = x_0 + it \quad (t < 0)$, τότε:

$$t \to 0^-, \quad z \to z_0, \text{ και}$$

$$\lim_{z\to z_0} \operatorname{Arg} z = \lim_{t\to 0^-} \operatorname{Arg}(x_0+it) \overset{\text{3ο τετ.}}{=} -\pi + \arctan 0 = -\pi$$

Άρα το όριο στο $z_0 = x_0$ ΔΕΝ υπάρχει, και έτσι η $\operatorname{Arg} z$ ασυνεχής στα $z = x_0$ με $x_0 \le 0$.

Αν $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$ πού είναι ασυνεχής;

2.2 Μιγαδική παράγωγος

Την εβδομάδα της 28ης θα γίνουν κανονικά τα μαθήματα του Ατρέα.

Ορισμός

Έστω $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο σημείο z_0, αν υπάρχει το ΟΡΙΟ:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a \in \mathbb{C}$$

(ή ισοδύναμα $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = a \in \mathbb{C}$)
Στο εξής το όριο αυτό συμβολίζουμε με $f'(z_0)$ ή $\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z}$

Ορισμός

Αν $f : A \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$, θα λέμε στο εξής ότι η f είναι ΟΛΟΜΟΡΦΗ (ή ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - holomorphic/analytic) **στο σημείο $\mathbf{z_0}$**, εάν η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **ΣΕ ΚΑΘΕ ΣΗΜΕΙΟ** του ανοικτού δίσκου 

$$D_\epsilon(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon \right\}$$

για κάποιο $\epsilon > 0$

Αν f ολόμορφη σε ΚΑΘΕ σημείο του A λέμε ότι η f ολόμορφη στο A.

Ορισμός

Αν A μη ανοικτό, λέμε ότι η f ολόμορφη στο A, αν υπάρχει $B \supset A$, B ανοικτό ώστε η f στο B.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες της παραγώγου που γνωρίζετε ισχύουν και για τη μιγαδική παράγωγο

π.χ. Έστω f, g **μιγαδικά** παραγωγίσιμες σε σημείο z_0. Τότε:

- f παραγ. στο $z_0 \implies f$ συνεχής στο z_0
- $\left(af \pm by\right)'(z_0) = af'(z_0) + bg'(z_0)\ \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $\left(fg\right)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \quad \left(g(z_0) \neq 0\right)$
- Ο κανόνας αλυσίδας ισχύει στις μιγαδικές συναρτήσεις:

  $$\left(h \circ g\right)'(z_0) = h'\left(g(z_0)\right) g'(z_0)$$

  υπό την προϋπόθεση ότι η σύνθεση καλά ορισμένη

Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης Έστω f ολόμορφη σε σημείο z_0 με $f'(z_0) \neq 0$.
Αν $w_0 = f(z_0)$, τότε υπάρχουν $\epsilon, \epsilon' > 0$ ώστε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : \mathrm{D}_\epsilon(w_0) \to \mathrm{D}_{\epsilon'}(z_0)$ καλά ορισμένη, ολόμορφη στο w_0 και

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Θ.: Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = f(x+iy) = u(x+y)+iv(x,y)$.
Θεωρώ $z = x+iy,\ z_0 = x_0 + iy_0$ και A ανοικτό.
Τότε:
f μιγαδικά παραγωγίσιμη στο z_0

$$\Updownarrow$$

(α) Η $\mathbf{F}(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big)$ είναι **διαφορίσιμο** διανυσμ. πεδίο στο σημείο (x_0, y_0)

$$\boxed{\text{ΚΑΙ}}$$

(β)

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{εξισώσεις C-R}}$$

Πόρισμα (ΠΡΑΚΤΙΚΟΤΑΤΟ) Αν $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι έτσι ώστε:

(α) u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0) και "κοντά" στο (x_0, y_0)

(β) $\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{C-R}}$

Τότε ($\implies$) η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$

Παρ.

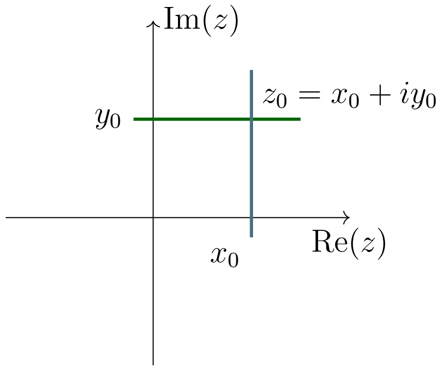
$$\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy),\ \text{άρα} \end{aligned}$$

$$f = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right.$$

Παρατηρήσεις

(α) Έστω f μιγαδικά παραγ. συνάρτηση σε σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$



- Έστω $z = x + iy_0 \quad (x \in \mathbb{R})$ είναι τυχαίο σημείο της "οριζόντιας" ευθείας που διέρχεται από το z_0
- Για $x \to x_0$, τότε $z = x + iy_0 \to x_0 + iy_0 = z_0$ (δηλ. $z \to z_0$ όταν $x \to x_0$ πάνω στην οριζόντια ευθεία)

Τότε για $z = x + iy_0$ έχω:

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) + iv(x,y_0) - \big(u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)\big)}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \\
&= u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) \\
&\implies \boxed{f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)} := \tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}
\end{aligned}
$$

Με όμοιο τρόπο, αν εργαστούμε κατά μήκος της "κάθετης" ευθείας που διέρχεται από το z_0, έχουμε:

$$
\boxed{f'(z_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0)} := -i\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}
$$

(β) Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} \\
\implies &\boxed{\mathrm{d}f(z_0) = f'(z_0)\,\mathrm{d}z}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{d}z :=$ στοιχειώδης όγκος
στο επίπεδο xy

$\mathrm{d}f(z_0) :=$ στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο uv
στο οποίο μετασχηματίζεται το $\mathrm{d}z$
μέσω της απεικόνισης f

$$
\mathrm{d}f(z_0) = \left|f'(z_0)\right| e^{i \operatorname{Arg} f'(z_0)}\,\mathrm{d}z \quad \big(f'(z_0) \neq 0\big)
$$

Για τις παραγώγους στοιχειωδών συναρτήσεων ισχύουν τα συνήθη από την πραγματική ανάλυση.

π.χ Αν $f(z) = e^z$, τότε $(e^z)' = e^z \; \forall z \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
f(z) = e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + \sin y) \\
&= \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i\underbrace{(e^x \sin y)}_{v(x,y)}
\end{aligned}
$$

Ορίζω $\begin{cases} u(x,y) = \mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y \\ v(x,y) = \mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y \end{cases}$

- u, v καλά ορισμένες $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, και επιπλέον u, v είναι **ΣΥΝΕΧΕΙΣ** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $\begin{array}{ll} u_x = e^x \cos y & u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y & v_y = e^x \cos y \end{array}$, έτσι παρατηρώ ότι $\begin{cases} & u_x = v_y \\ \text{ΚΑΙ} & u_y = -v_x \end{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\xRightarrow{\text{πόρισμα}}$ $f(z) = e^z$ μιγαδικά παραγωγίσιμη $\forall z \in \mathbb{C}$

- Γνωρίζω ότι αν η $f = u + iv$ είναι μιγ. παραγ., τότε $f'(z) = u_x + iv_x$.

  Έτσι στην προκειμένη περίπτωση:

$$f'(z) = (e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^z$$

π.χ $\text{Log}z = \frac{1}{z} \, \forall z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 0\}$ $\Big($υπό την προϋπόθεση ότι $\text{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$ $\Big)$

διότι $\text{Log}z = w \overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} z = e^w$, άρα $\forall z \in \mathbb{C}^*$, από το θεώρ. παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης έχουμε: $(\text{Log}z)' = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$

Με την ίδια λογική (και με χρήση των ιδιοτήτων παραγώγου) αποδεικνύεται ότι

- $(z^n)' = nz^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(z^{-n})' = -nz^{-n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$
- $(z^a)' = az^{a-1} \quad \forall a \in \mathbb{Q}$ ή a άρρητος ή a έχει μη μηδενικό φανταστικό μέρος $\quad \forall z \in \mathbb{C}^* (\mathbb{C}^*$ όπως στο λογά
- $(\sin z)' = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cos z)' = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\sinh z)' = \cosh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cosh z)' = \sinh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(a^z)' = a^z \text{Log}a \quad \forall z \int \mathbb{C}$

κλπ.

2.3 Ασκήσεις

ΝΔΟ η $f(z) = \bar{z}$ ΔΕΝ είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **σε κανένα** σημείο του $\mathbb{C}$.

- $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$, ορίζω $\left| \begin{array}{l} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{array} \right.$

- Προφανώς u και v καλά ορισμένες και συνεχείς $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, αλλά:

  $$u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$, άρα αφού η μία από τις δύο εξισ. C-R δεν ισχύει $\underline{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$, η $f(z) = \bar{z}$ **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγ. $\forall z \in \mathbb{C}$.

$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$

$\left| \begin{array}{l} u = e^x \cos y_0 \\ v = e^x \sin y_0 \end{array} \right.$

Άσκ. 2 Η συνάρτηση $f(z) = |z|$ **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε **ΚΑΝΕΝΑ** σημείο του $\mathbb{C}$.

Οι εξισώσεις C-R σε πολικές συντ/νες είναι οι εξής:

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\theta \quad \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi] \\ u_\theta = -\rho v_\rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) \\ &= f\left(|z| e^{i \operatorname{Arg} z}\right) = f\left(\rho e^{i\theta}\right) = u(\rho,\theta) + iv(\rho,\theta) \end{aligned}$$

$f(z) = |z| = \rho$, άρα $\begin{cases} u(\rho,\theta) = \rho \\ v(\rho,\theta) = 0 \end{cases}$

Οι u, v καλά ορισμένες και συνεχείς $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$ αλλά

$$u_\rho = 1 \neq \frac{1}{\rho} \cdot 0 = \frac{1}{\rho} v_\theta \quad \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$$

και αφού μία από τις εξισώσεις C-R δεν ισχύει $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$ αναγκαστικά η $f(z) = |z|$ δεν είναι μιγαδικά παραγ. σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

π.χ

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad z \neq 0 \\ &\overset{|z|^2 = z\bar{z}}{=} \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη.

Άσκ. 3 Υπολογίστε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{e^{z^2} - 1}{z^2}$

(β) $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1}$

(γ) $\lim\limits_{z \to \infty} e^z$

Στα όρια ισχύει ο De L' Hospital

(α)

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2} \underbrace{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L'Hospital}}{=}}}_{\text{διότι } e^{z^2} - 1 \text{ και } z^2 \text{ μιγ. παραγ.}} \lim_{z \to 0} \frac{2ze^{z^2} - 0}{2z} = \lim_{z \to 0} e^{z^2} = e^0 = 1$$

(β) Θα προσπαθήσω να αποδείξω ότι το όριο δεν υπάρχει, κάτι που φαντάζομαι επειδή μέσα στο όριο υπάρχει ο $\bar{z}$.

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του οριζόντιου άξονα" που διέρχεται από το $z_0 = 1$.
  Δηλ. θεωρώ σημεία z της μορφής

  $$z = x + i0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

  Προφανώς για $x \to 1$, έχω: $z \to z_0 = 1$.
  Τότε $\forall z = x$ έχω:

  $$\lim_{z\to 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1} \underset{\text{του οριζ. άξονα}}{\overset{\text{κατα μήκος}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-1} = 1$$

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του κάθετου άξονα" που διέρχεται από το $z_0 = 1$, δηλαδή σημεία:

  $$z = 1 + ix \quad (x \in \mathbb{R})$$

  Προφανώς για $x \to 0$, έχω $z \to z_0 = 1$, και

  $$\lim_{z\to 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1} \underset{\text{του κατακόρυφου άξονα}}{\overset{\text{κατα μήκος}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(1+ix)^2 - 1}{(1-ix)^2 - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + 2ix - x^2 - \cancel{1}}{\cancel{1} - 2ix - x^2 - \cancel{1}}$$
  $$= \lim_{x\to 0} \frac{2ix - x^2}{-2ix - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2i - x}{-2i - x} = \frac{2i}{-2i} = -1$$

Εφόσον $1 \neq -1$ το όριο ΔΕΝ υπάρχει.

(γ) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = ?$

- Έστω $z = x \quad (x < 0)$, για $x \to -\infty$, τότε $z \to \infty$ και $\lim\limits_{z\to\infty} e^z = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- Έστω $z = x \quad (x > 0)$, για $x \to +\infty$, τότε $z \to \infty$, αλλά: $\lim\limits_{z\to\infty} e^z = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, συνεπώς το $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ ΔΕΝ υπάρχει.

Άσκ. 4 Αν $f(z) = u + iv$ είναι ακεραία (ολόμορφη στο $\mathbb{C}$) και αν

$$au + bv = c$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ σταθερές όχι όλες ίσες με μηδέν, ΝΔΟ $f(z) = A,\ A \in \mathbb{C}$ σταθερά.

- Έστω $\underline{c = 0}$, εξ' υποθέσεως $a^2 + b^2 \neq 0$
- Έστω $c \neq 0$, πάλι πρέπει $a^2 + b^2 \neq 0$ (διότι αλλιώς $0 = c$, άτοπο)
- Τελικά $a^2 + b^2 \neq 0$ σε κάθε περίπτωση.

$$\begin{cases} au_x + bv_x = 0 \\ au_y + bv_y = 0 \end{cases} \implies \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[u_y = -v_x \text{ αφού } f \text{ ακεραία}]{u_x = v_y} \begin{bmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_y \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2$$

και επειδή $a^+b^2 \neq 0$, πρέπει $u_x^2 + u_y^2 = 0$ για να έχει λύση το σύστημα $\implies u_x = 0$ και $u_y = 0 \overset{\text{C-R}}{\implies}$ $u_x = u_y = v_x = v_y = 0\, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \implies f(z) = A \in \mathbb{C}$ σταθερά.

Άσκ. Βρείτε τα σημεία ολομορφίας των συναρτήσεων:

(α) $f(z) = \mathrm{Log}(z-i)$

(β) $g(z) = \tan z$

(α) Έστω ότι $\mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$. Τότε είναι γνωστό ότι η $\mathrm{Log} z$ είναι μιγαδικά παραγ. στο $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x+iy \quad x \leq 0$ και $y = 0\}$.

Έτσι η $\mathrm{Log}(z-i)$ είναι μιγ. παραγ. στο σύνολο

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C} - \big\{x+iy : \mathrm{Re}(z-i) \leq 0 \text{ και } \mathrm{Im}(z-i) = 1\big\} \\
&\overset{z=x+iy}{=} \mathbb{C} - \{x+iy : x \leq 0 \text{ και } y-1 = 0\} \\
&= \mathbb{C} - \{x+iy : x \leq 0 \text{ και } y = 1\}
\end{aligned}$$

(β) $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ εκτός των σημείων που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

- $\cos z = 0 \iff \cos(x+iy) = 0 \iff \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = 0 \overset{\text{ορ. sin \& cos}}{\iff} \cos x \cdot \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} - \sin x \cdot \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = 0 \iff \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y = 0 \iff$ $\left|\begin{array}{c} \cos x \cdot \cosh y = 0 \\ \text{και} \\ \sin x \cdot \sinh y = 0 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{c} \cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sin x = 0 \\ \text{(Αδύνατο)} \end{array}\right.$ ή $\left|\begin{array}{c} \cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sinh y = 0 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$.

  Τελικά $\cos z \iff \boxed{z = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \int \mathbb{Z}}$ και έτσι g είναι ολόμορφη στο

$$\mathbb{C} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Άσκ. Έστω $f(x+iy) = (x^2+2y) + i(x^2+y^2)$

(i) Να γραφεί η f συναρτήσει του $z = x+iy$

(ii) Να βρείτε όλα τα σημεία, όπου η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη

(iii) Να βρείτε όλα τα σημεία στα οποία η f είναι ολόμορφη

(i) $x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
$\big(z = x+iy\big)$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left(\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2\right) \\
&= \frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} - i\,(z-\bar{z}) + i\left(\frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} - \frac{z^2-2z\bar{z}+z^2}{4}\right) \\
&= \frac{z^2+2|z|^2+\bar{z}^2}{4} - i\left(z-\bar{z}-|z|^2\right)
\end{aligned}$$

(ii) Προφανώς $\left|\begin{array}{l} \mathrm{Re}(f) := u(x,y) = x^2+2y \\ \mathrm{Im}(f) := v(x,y) = x^2+y^2 \end{array}\right.$

- Οι u και v είναι συνεχείς (ως πολυωνυμικές) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\begin{cases} u_x = v_y \\ \text{ΚΑΙ} \\ u_y = -v_x \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = 2y \\ \text{ΚΑΙ} \\ 2 = -2x \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ \text{ΚΑΙ} \\ x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ \text{ΚΑΙ} \\ y = -1 \end{cases}$

Άρα η f είναι μιγαδ. παραγ. **μόνον** στο $\boxed{z = -1 - i}$, και μάλιστα εφ' όσον $f(z) = f'(x+iy) = u_x + iv_x$:

$$f'(-1-i) = 2(-1) + i2(-1) = \underline{-2 - i2}$$

(iii) ΔΕΝ υπάρχουν σημεία όπου η f είναι ολόμορφη.

Κεφάλαιο 3 Μιγαδική ολοκλήρωση

Εισαγωγή

Ορισμός

Καλούμε **καμπύλη** στο μιγαδικό επίπεδο κάθε συνεχή συνάρτηση

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} : \gamma(t) = x(t) = iy(t)$$

όπου $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.

Έτσι: $\gamma(t)$ καλείται

ΑΠΛΗ αν είναι 1-1 (δεν αυτοτέμνεται)
ΚΛΕΙΣΤΗ αν έχει ίδια αρχή και πέρας
ΛΕΙΑ αν είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με συνεχή παράγωγο

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

και μη μηδενική παράγωγο $\forall t$

- Κάθε τέτοια καμπύλη έχει ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ (φορά διαγραφής) προς την κατεύθυνση αύξησης του t

π.χ. $\gamma(t) = e^{it},\ t \in (-\pi, \pi]$
$\gamma(t) = e^{-it},\ t \in (-\pi, \pi]$

- Αν γ κλειστή λέω ότι είναι θετικά προσανατολισμένη αν η φορά διαγραφής είναι η αντιωρολογιακή
- $-\gamma$: ίδιο ίχνος με τη γ, αλλά αντίθετη φορά διαγραφής
- $\gamma_1 + \gamma_2$:

Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ ΣΥΝΕΧΗΣ μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής και $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ λεία καμπύλη. Καλώ επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f ΠΑΝΩ στη γ να είναι ο ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\underbrace{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}\gamma(t)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\gamma(t) &= \mathrm{d}\big(x(t) + iy(t)\big) = \\ &= \mathrm{d}x(t) + i\,\mathrm{d}y(t) = \big(x'(t) + iy'(t)\big)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\gamma(t) = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Οι κλασικές ιδιότητες των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων έργου ισχύουν στους μιγαδικούς. Ενδεικτικά:

- $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\displaystyle\int_\gamma (af + by)(z)\,\mathrm{d}z = a\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z \;\forall a, b \in \mathbb{C}$
- $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\gamma \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}z \le M \cdot$ (μήκος της γ) όπου M μέγιστο της $|f|$ επί της γ
- $\displaystyle\int_\gamma |\,\mathrm{d}z| = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t :=$ μήκος της καμπ. γ

Πρόταση: Έστω $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ συνεχής επί καμπύλης λείας $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

Τότε:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \underbrace{\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y\right)}_{\substack{\text{επικαμπύλιο ολοκλ.}\\ \text{διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2}} + i\underbrace{\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x\right)}_{\substack{\text{επικαμπύλιο ολοκλ.}\\ \text{διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2}}$$

Απόδ.

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (u+iv)\,\mathrm{d}(x+iy)\\
&=\int_a^b \Big[u\left(x(t),y(t)\right)+iv\left(x(t),y(t)\right)\Big]\left(x'(t)+iy'(t)\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_a^b \Big(u\left(x(t),y(t)\right)x'(t)-v\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\Big)\,\mathrm{d}t+i\int_a^b \Big(u\left(x(t),y(t)\right)y'(t)+v\left(x(t),y(t)\right)x'(t)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&\overset{\text{ορ.}}{=}\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y\right)+i\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}y+v\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

Ορίζω $\bar f(z)=u(x,y)-iv(x,y)$
Τότε

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y \overset{\text{Λογ. ΙΙ}}{:=} \text{έργο του πεδίου } \bar f \text{ επί της καμπύλης } \gamma$$

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}y+v\,\mathrm{d}x \overset{\text{Λογ. ΙΙ}}{:=} \underline{\text{ροή}} \text{ του } \bar f \text{ διά μέσου της } \gamma$$

3.1 Αντιπαράγωγος και ανεξαρτησία δρόμου

Ορισμός

Έστω $f=f(z)$ είναι μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση (μιγαδικής μεταβλητής) σε τόπο GCC (τόπος := ανοικτό και συνεκτικό σύνολο). Αν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $F=F(z)$, έτσι ώστε:

$$F'(z)=f(z)\ \forall z\in\mathbf{G},\ \text{ τότε η } F \text{ καλείται αντιπαράγωγος της } f.$$

Θ.

Έστω $f=f(z)$ είναι συνεχής μιγαδική συνάρτηση σε τόπο $\mathbf{G}$. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- Η f είναι ΜΟΝΑΔΙΚΗ αντιπαράγωγο F (με προσέγγιση σταθεράς)
- $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0,$ για ΚΑΘΕ κλειστή λεία καμπύλη εντός του G
- $\oint\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου (δηλαδή εξαρτάται μόνον από το αρχικό και τελικό σημείο τ

Οι συνήθεις αντιπαράγωγοι εξακολουθούν να ισχύουν, π.χ.:

$$\int z^n \,\mathrm{d}z = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c, \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$$

$$\int \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = \mathrm{Log} z + c, \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\int z^{-n} \,\mathrm{d}z = \frac{z^{-n+1}}{-n+1} + c, \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}, c \in \mathbb{C} \text{ στάθερα}$$

$$\int \sin z \,\mathrm{d}z = -\cos z + c$$

$$\int \cos z \,\mathrm{d}z = \sin z + c$$

κλπ.

3.2 Θεώρημα Caychy

Έστω $f = f(z)$ είναι **ολόμορφη** συνάρτηση **πάνω** και στο **εσωτερικό απλής**, κλειστής και λείας καμπύλης γ.

Τότε:

$$\oint_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = 0$$

Απόδ. Έστω $f = u + iv$, όπου $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πάνω και στο εσωτερικό της γ. Τότε:

$$\oint_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \left(\oint_\gamma u \,\mathrm{d}x - v \,\mathrm{d}y \right) + i \left(\oint u \,\mathrm{d}y + v \,\mathrm{d}x \right)$$

$$\overset{\text{Θεώρ.}}{\underset{\text{Green}}{=}} \iint_R (-v_x - u_y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + i \iint_R (u_x - v_y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

και επειδή η f ολόμορφη ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann $\forall (x, y)$ στο εσωτερικό της γ, δηλαδή το R, άρα:

$$\oint_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z \overset{u_x = v_y}{\underset{u_y = v_x}{=}} \iint_R 0 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + i \iint_\gamma 0 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0$$

$$\int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \underbrace{a}_{\text{έργο του πεδίου } f \text{ κατά μήκος } \gamma} + i \overbrace{b}^{\text{ροή του πεδίου } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν υπάρχει έστω και ένα σημείο όπου η f δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο εσωτερικό της γ, τότε το **θεώρ. Cauchy δεν ισχύει εν γένει**.

π.χ $\displaystyle \oint_{|z|=1 \text{ με θετική φορά}} \frac{\mathrm{d}z}{z}$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \overset{\gamma(t)=e^{it}}{\underset{t\in[0,2\pi)}{=}} \overset{\text{ορ.}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\left(e^{it}\right)}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})^2}{e^{it}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} = 2\pi i$$

Θ.: Παραμόρφωση δρόμων

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη σε τόπο G με σύνολο $\partial G = \gamma_1 \cup \gamma_2$ όπου γ_1, γ_2 απλές λειστές καμπύλες, λείες, με κοινό προσανατολισμό π.χ. όπως στο σχήμα Τότε $\oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$

Απόδ. Φέρνω δύο ευθ. τμήματα L_1 και L_2 που διαμερίζουν το G σε δύο χωρία έστω G_1, G_2. Τότε το θ. Cauchy ισχύει και στο G_1 και στο G_2.

- $\displaystyle\int_{\gamma_1^+ + L_1 + \gamma_2^+ + L_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (θ. Cauchy για το χωρίο G_1)
- $\displaystyle\int_{\gamma_2^- - L_1 - \gamma_2^- - L_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (θ. Cauchy για το χωρίο G_2)

$$\implies \left| \begin{array}{l} \left(\int_{\gamma_1^+} + \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^+} + \int_{L_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \\ \left(\int_{\gamma_1^-} - \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^-} - \int_{L_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \end{array} \right. \implies \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Πόρισμα (Γενικευμένο θεώρ. Cauchy) Έστω $f = f(z)$ ολόμορφη σε τόπο G με σύνορο $\partial G = \Gamma \cup (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_2)$, όπου:

- $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ απλές, κλειστές, λείες και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΕΣ καμπύλες
- Οι $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ βρίσκονται εντός της Γ και
- Κάθε καμπύλη $\gamma_j \quad j = 1, \ldots, n$ βρίσκεται εκτός των υπόλοιπων $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n$

  Τότε: $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$

Θ.: Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμημ. λείας και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ καμπύλης γ.
Τότε ΓΙΑ ΚΑΘΕ σημείο z_0 ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ ισχύει:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z}$$

Απόδειξη Έστω $|z-z_0| = r$ κύκλος ακτίνας r κατάλληλης ώστε ο δίσκος $|z-z_0| \le r$ να βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό της γ.

Τότε από το θεώρημα παραμόρφ. δρόμων, εφ' όσον $\frac{f(z)}{z-z_0}$ ολόμορφη στο γραμμοσκιασμένο χωρίο, έχουμε:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \underbrace{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z}_{I_2} + \underbrace{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z}_{I_1}$$

Για το I_2 έχω:

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \underset{\theta\in[0,2\pi]}{\overset{z=z_0+re^{i\theta}}{=}} f(z_0)\int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} rie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi i f(z_0) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{lcl} l = l' & \iff & |l-l'| < \epsilon\ \forall \epsilon > 0 \\ \text{''} & \implies \text{''} & \text{προφ. ισχύει} \\ \text{''} & \impliedby \text{''} & \text{Έστω } l \neq l' \implies |l-l'| \ge \epsilon_0 > 0 \text{ άτοπο } \implies l = l' \end{array} \right)$$

Έτσι:

$$\boxed{\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) = I_1}$$

$$|I_1| \le \oint_{|z-z_0|=r} \frac{\left|f(z)-f(z_0)\right|}{|z-z_0|}\,\mathrm{d}z \le M\cdot \oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{|z-z_0|}\,\mathrm{d}z,$$

όπου $M = \max\left\{\left|f(z)-f(z_0)\right|\ \forall z : |z-z_0| = 1\right\}$

$$\begin{aligned} &= M\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{r}|\,\mathrm{d}z| \\ &= \frac{M}{r}\underbrace{\oint_{|z-z_0|=r} |\,\mathrm{d}z|}_{\text{μήκος καμπύλης}} = \frac{2\pi M r}{r} = \underline{2\pi M} \end{aligned}$$

Αλλά f ολόμορφη στο z_0, άρα f συνεχής στο z_0.

Εξ' ορισμού λοιπόν: $\forall\epsilon > 0\ \exists r_1 > r > 0 :\ \forall z : 0 < |z-z_0| < r < r_1 \implies \left|f(z)-f(z_0)\right| < \epsilon$

Έτσι $\forall\epsilon > 0$ μπορώ να βρω ακτίνα r : $\left|f(z)-f(z_0)\right|$ $\forall z$: $|z-z_0| = r$, δηλ. $M \le \epsilon$ και τελικά $|I_1| \le 2\pi M \le 2\pi\epsilon\ \forall\epsilon > 0 \implies I_1 = 0$

Θ.: Ολοκληρ. τύπος Cauchy για παραγώγους

Έστω f είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ.
Αν z_0 σημείο στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ, τότε η f ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΚΑΘΕ ΤΑΞΗΣ στο σημείο z_0 και μάλιστα:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

Ο Ατρέας θα δίνει τύπους σε τυπολόγιο: `http://users.auth.gr/natreas/Efarmosmena/ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ.pdf`

3.3 Εφαρμογές

(1) **Θεώρ. μέσης τιμής Gauss**

Αν f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό θετικά προσανατολισμένου κύκλου $|z - z_0| = R$, τότε:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

Απόδειξη Εφαρμόζω τον ολοκλ. τύπο του Cauchy με τα δεδομένα μου και έχω:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \\ &\underset{\text{ορισμός}}{\overset{z=z_0+Re^{i\theta}}{=}} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)}{Re^{i\theta}} \mathrm{d}\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)}{\cancel{Re^{i\theta}}} i\cancel{Re^{i\theta}} \,\mathrm{d}\theta \\ &= \text{ζητούμενο} \end{aligned}$$

(2) **Ανισότητα Cauchy** Έστω f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό θετικά προσανατολισμένου κύκλου $|z - z_0| = R$ και $M_R = \max\left\{\left|f(z)\right|, \ \forall z : |z - z_0| = R\right\}$

Τότε:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M_R}{R^n}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Απόδ. Εφαρμόζουμε τον ολοκλ. τύπο Cauchy για παραγώγους προσαρμοσμένο στα δεδομένα:

$$\begin{aligned} \left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z\right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{\left|f(z)\right|}{|z - z_0|^{n+1}} |\mathrm{d}z| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} M_R \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{|z - z_0|^{n+1}} |\mathrm{d}z| \\ &= \frac{n!}{2\pi} M_R \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{R^{n+1}} |\mathrm{d}z| \\ &= \frac{n!}{2\pi} M_R \frac{1}{R^{n+1}} \underbrace{\oint_{|z-z_0|=R} |\mathrm{d}z|}_{\text{μήκος κύκλου } z - z_0 = R} \\ &= \frac{n!}{2\pi} M_R \frac{1}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n!M_R}{R^n} \end{aligned}$$

(3) **Θεώρ. Liouville**

Κάθε **ακεραία** συνάρτηση (δηλ. ολόμορφη στο $\mathbb{C}$) και φραγμένη $\boxed{\text{στο } \mathbb{C}}$ είναι η σταθερή συνάρτηση.

Απόδ. Έστω $z \in \mathbb{C}$ τυχαίο. Χρησιμοποιώ ανισότητα Cauchy για $n = 1$:

$$\left|f'(z)\right| \leq \frac{1!\, M_R}{R}, \quad M_R = \max\left\{\left|f(z)\right| : |z - z_0| = R\right\}$$

Αφού f εξ' υποθέσεως είναι φραγμένη, άρα $\exists \underline{M > 0}$: $\left|f(z)\right| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Δηλ. $\left|f'(z)\right| \leq \dfrac{M_R}{R} \leq \dfrac{M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{0}$

Τότε $\left|f'(z)\right| = 0 \iff f'(z) = 0 \forall z \in \iff f(z) = c \in \mathbb{C}$

(4) **Αρχή μεγίστου/ελαχίστου**

Έστω f ολόμορφη σε ανοικτό και συνεκτικό σύνολο G και μη σταθερή στο G. Τότε η $|f|$ **ΔΕΝ έχει μέγιστη τιμή** στο G.

Αν μάλιστα $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$, τότε η $|f|$ **ΔΕΝ έχει ελάχιστη τιμή στο $\mathbf{G}$**.

Ειδικά αν G είναι και **ΦΡΑΓΜΕΝΟ** και η f είναι συνεχής στο σύνορο του G (το οποίο είναι απλή, λεία καμπύλη), τότε η $|f|$ **παίρνει ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΠΑΝΩ στο σύνορο του $\mathbf{G}$**. Ομοίως αν $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$, τότε η $|f|$ παίρνει ελάχιστη τιμή ΠΑΝΩ στο σύνορο του G.

Άσκ. Υπολογίστε το $\int_\gamma (i\bar{z} - z)\,\mathrm{d}z$
όπου γ είναι η παραβολή $y = 2t^2 + 1$ με αρχή το σημείο $(1, 3)$ και πέρας το σημείο $2, 9$.

Γενικά, μπορώ να κινηθώ μέσω ορισμού, αντιπαραγώγου ή θεωρημάτων. Η $\bar{z}$ δεν έχει παράγωγο, άρα δεν έχει αντιπαράγωγο (διαφορετικά από προηγούμενη εφαρμογή θα είχε άπειρες παραγώγους).

Έχουμε:

$$\int_\gamma (i\bar{z} - z)\,\mathrm{d}z = i\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z - \int_\gamma z\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2$$

- όσον αφορά το I_2, εφ' όσον η $f(z) = z$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ ως πολυώνυμο, έχει μοναδική αντιπαράγωγο (με προσέγγιση σταθεράς), άρα:

$$\int_\gamma z\,\mathrm{d}z = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{z_0=1+3i}^{z_1=2+9i}$$

(αντιπαράγωγος $\xRightarrow{\text{θεωρία}}$ ανεξαρτησία δρόμου)

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2+9i)^2}{2} - \frac{(1+3i)^2}{2} \\
&= \frac{69}{2} - 15i \\
&= B
\end{aligned}$$

- Για το I_1:

$$
\begin{aligned}
I_1 = i\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z \ &\underset{\text{διότι η } \bar{z} \text{ ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο}}{\overset{\text{ορισμός}}{=}} \\
&\underset{t+i(2t^2+1)=\gamma(t)}{\overset{(t,2t^2+1)}{=}} \int_1^2 \overline{\gamma(t)}\,\mathrm{d}\big(\gamma(t)\big) \\
&= \int_1^2 \Big[t - i\left(2t^2+1\right)\Big]\underbrace{[1+4ti]\,\mathrm{d}t}_{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t:=\mathrm{d}\gamma(t)} \\
&= i\int_1^2 \Big[t + 4t\left(2t^2+1\right)\Big] + i\left[1+2t^2+4t^2\right]\mathrm{d}t \\
&= i\int_1^2 \left(5t+8t^3\right) + i\left(6t^2+1\right)\mathrm{d}t \\
&= i\left[\frac{5t^2}{2}+2t^4\right]_1^2 - \left(2t^3+t\right)_1^2 \\
&= A + B
\end{aligned}
$$

Τελικά

Από εδώ και στο εξής, μέχρι νεωτέρας, όλοι μαζί, Τρίτη και Πέμπτη.

Άσκ. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

(α) $\displaystyle\oint_{\left|z-\frac{1}{z}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{2z+1}\,\mathrm{d}z$

(β) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^3+2}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z$

(γ) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\rho^z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

Όλες οι καμπύλες θεωρούνται προσανατολισμένες με τη θετική φορά.

(α) Θα χρησιμοποιήσω ολοκλ. τύπο Cauchy.

Έστω $f(z) = z\cos z$, ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ άρα και πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου

$$\left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

Προφανώς:

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{2z+1}\,\mathrm{d}z \\
=\ &\frac{1}{2}\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{z-\left(-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

όπου $z_0 = -\frac{1}{2} \in$ <u>εσωτερικό</u> του κύκλου $\left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$, ο οποίος είναι <u>θετικά προσανατολισμένος</u>.

Τότε ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες ώστε να έχω

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{z-\left(-\frac{1}{z}\right)}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left|z\cos z\right|_{z_0=-\frac{1}{2}} \implies \oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{z+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Τελικά: $\boxed{\oint_\gamma \frac{z\cos z}{2z+1}\,\mathrm{d}z = \frac{-\pi i}{2}\cos\left(-\frac{1}{2}\right)}$

(β) Θα χρησιμοποιήσω τύπο Cauchy για παραγώγους με $\mathbf{n}=\mathbf{2}$.

Έστω $g(z)=z^3+2$, προφανώς ακεραία (ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$), άρα ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου μας.

Επίσης, $z_0=2\ \in$ εσωτερικό του θετικά προσανατολισμένου κύκλου μας, άρα από τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε:

$$g''(2) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_{|z|=3} \frac{g(z)}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z \qquad \big(g(z)=z^3+2\big)$$

$$\implies \oint_{|z|=3}\frac{z^3+2}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z = \pi i\cdot g''(2)$$

$$g'(z)=3z^2$$
$$g''(z)=6z$$
$$g''(2)=12$$

Τελικά $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{z^3+2}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z = 12\pi i$

(γ) Χρησιμοποιώ κατ' αρχήν γενικευμένο θεώρημα Cauchy, και έχω:

$$\begin{aligned}
I_{\text{ζητούμενο}} &= \oint_{\gamma_1}\frac{e^z\,\mathrm{d}z}{(z-1)(z+1)} + \oint_{\gamma_2}\frac{e^z\,\mathrm{d}z}{(z-1)(z+1)} \\
&= \oint_{\gamma_1}\frac{e^z/(z+1)}{z-1}\,\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_2}\frac{e^z/(z-1)}{z+1}\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{τύπος}}{\underset{\text{Cauchy}}{=}} 2\pi i\frac{e^z}{z+1}\bigg|_{z=1} + 2\pi i\frac{e^z}{z-1}\bigg|_{z=-1} \\
&= \pi i e - \pi i e^{-1}
\end{aligned}$$

(διότι οι αριθμητές $\left|\begin{array}{l} a(z)=\frac{e^z}{z+1} \\ b(z)=\frac{e^z}{z-1}\end{array}\right.$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις πάνω και στο εσωτερικό των καμπύλων γ_1 και γ_2 αντιστοίχως και $z_0=1\in$ εσωτερικό της γ_1 ενώ $z_1=-1\in$ εσωτερικό γ_2)

Θέμα: Υπολογίστε το $\displaystyle\oint_{|z|=R}\frac{1}{(z-i)^2}\,\mathrm{d}z$ για όλες τις τιμές του R, όπου $R>0$ και $R\neq 1$

(α) $\underline{R < 1}$

Τότε $I = 0$ από θεώρ Cauchy αφού ανωμαλία $z_0 = i$ εκτός κύκλου $|z| = R$

(β) $\underline{R > 1}$

Τότε $z_0 = i \in$ εσωτερικό κύκλου $|z| = R$ οπότε χρησιμοποιώ τύπο Cauchy για παραγώγους και βρίσκω

$$I = 0$$

.

Άσκ. Έστω f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό κύκλου $|z| = R$, με $f(z) \neq 0\, \forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου και $f(z) = c$ για κάθε z πάνω στον κύκλο $|z| = R$.

ΝΔΟ $\big|f(z)\big| = A \geq 0\, \forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου.

Θα χρησιμοποιήσω αρχή μεγίστου/ελαχίστου, η οποία λέει ότι η $\big|f(z)\big|$ παίρνει τόσο τη μέγιστη, όσο και την ελάχιστη τιμή της ΠΑΝΩ στον κύκλο $|z| = R$.

Εφ' όσον όμως $f(z) = c\, \forall z : |z| = R$ τότε $\big|f(z)\big| = |c| =$ σταθερό $\forall z$ πάνω στον κύκλο, όπου όμως η $|f|$ παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Άρα η $\max|f| = \min|f|\; \forall z : |z| = R$, συνεπώς $|f| =$ σταθερά $\forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου.

Άσκ. Έστω f ακεραία και $\big|f(z)\big| \leq A|z| \forall z \in \mathbb{C}$. ΝΔΟ $f(z) = cz$, όπου $c \in \mathbb{C}$ σταθερά.

Θα χρησιμοποιήσω ανισότητα Cauchy για $n = 2$, προσπαθώντας να δείξω ότι:

$$\big|f''(z)\big| = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

τότε $f'(z) = c \implies f(z) = cz + d \quad c, d \in \mathbb{C}$. Από υπόθεση, για $z = 0$ έχω $\big|f(0)\big| \leq A \cdot 0 \implies f(0) = 0$ άρα $d = 0$.

Ανισότητα Cauchy

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n! \cdot M_R}{R^n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

όπου $M_R = \max\Big\{\big|f(z)\big| : |z - z_0| = R\Big\}$

Έτσι για $n = 2$ έχω για $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f''(z_0) \leq \frac{2! \cdot M_R}{R^2} = \frac{2MR}{R^2}$$

Για $|z - z_0| = R$ δηλ. για $z = z_0 + Re^{i\theta}$ έχω $\big|f(z)\big| \overset{\text{εξ' υποθέσεως}}{\leq} A|z| = A\left|z_0 + Re^{i\theta}\right| \leq A|z_0| + AR$

Τότε:

$$\big|f''(z_0)\big| \leq \frac{2\left(|z_0 + R|\right)}{R^2} \xrightarrow[R\to\infty]{0}$$

άρα $\big|f''(z_0)\big| = 0\, \forall z_0 \in \mathbb{C}$, άρα $f''(z_0) = 0\, \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

Κεφάλαιο 4 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα και εφαρμογές

Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ μιγαδική συνάρτηση. Ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$ καλείται **ΑΝΩΜΑΛΟ σημείο** της f, εάν είτε η f ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ στο z_0, είτε ορίζεται στο z_0 αλλά δεν έχει "καλή συμπεριφορά" στο z_0, π.χ. δεν είναι ολόμορφη στο z_0

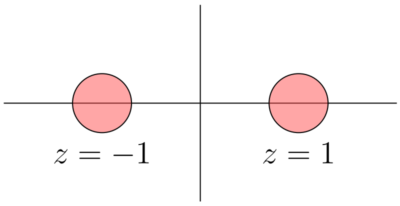
- Αν z_0 είναι ανώμαλο σημείο της f, τότε το z_0 καλείται **ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ ανώμαλο σημείο** της f, εάν η f είναι ολόμορφη στον Ανοικτό δακτύλιο

  $$0 < |z - z_0| < R$$

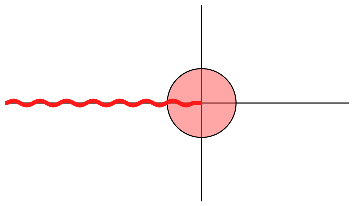
  για κάποιο $R > 0$, διαφορετικά το z_0 καλείται ΜΗ απομονωμένο ανώμαλο σημείο.

π.χ.

- $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ $\quad(z_0 = 1, z_0 = -1)$ απομονωμένα ανώμαλα σημεία της f



- $g(z) = \text{Log}z$ ($z_0 = 0$ μη απομονωμένη ανωμαλία. Επίσης τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα των πραγματικών είναι μη απομονωμένα ανώμαλα σημεία του λογάριθμου)



- $h(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$ ($z_0 = 0$ το μοναδικό μεμονωμένο σημείο)

Έστω z_0 είναι **ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ** ανώμαλο σημείο μιας συνάρτησης f. Τότε υπάρχει κάποιος δακτύλιος

$$0 < |z - z_0| < R$$

όπου η f είναι ολόμορφη και η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^k, \quad \forall 0 < |z - z_0| < R$$

Δηλ.

$$f(z) = \dots + \frac{a{-}n}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^k + \dots$$

Θα λέμε ότι:

- Το z_0 είναι **ΑΠΑΛΕΙΨΙΜΗ ανωμαλία**, εάν:

  $$a_n = 0 \quad \forall n < 0$$

  όπου $a_n \in \mathbb{C}$ οι συντελεστές του αναπτύγματος Laurent της f "γύρω" από το z_0.

π.χ. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ $\quad z_0 = 0$ (ανώμαλο σημείο)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$
$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$
$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots \quad \text{δεν είναι απαλείψιμη ανωμαλία στο } 0$$

- Το z_0 καλείται **ΠΟΛΟΣ** της f τάξης $k \in \mathbb{N}$, εάν

  $$\boxed{a_n = 0 \quad \forall n < -k}$$

  Τότε το ανάπτυγμα Laurent της f γίνεται:

  $$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

  Έτσι έχουμε:

  $$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \underbrace{\Big(a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \dots + a_0(z-z_0)^k + \dots\Big)}_{=g(z)}$$

  $$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} \quad \forall 0 < |z-z_0| < R$$

  όπου $g = g(z)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο z_0 με $g(z_0) \neq 0$.

  Τελικά: (εναλλακτικός ορισμός)

  z_0 πόλος της f τάξης $k \in \mathbb{N}$

  $\Updownarrow$

  $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ με g κάποια ολόμορφη συνάρτηση στο z_0 για την οποία $\boxed{g(z_0) \neq 0}$

- Το z_0 καλείται **ΟΥΣΙΩΔΗΣ ΑΝΩΜΑΛΙΑ** της f, εάν υπάρχει ΑΠΕΙΡΟ ΠΛΗΘΟΣ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ όρων a_n στο ανάπτυγμα Laurent της f ΜΕ ΔΕΙΚΤΕΣ n να είναι ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

π.χ. Τι είδους ανωμαλία είναι το σημείο z_0 για τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-1} &= \frac{1}{(z-1)(z+1)} \overset{\text{απλά}}{\underset{\text{κλάσματα}}{=}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)+2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^k, \quad \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \qquad \left(\frac{1}{1-z} = \sum z^n \quad |z| < 1\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z-1) - \frac{1}{16}(z-1)^2 + \dots \quad 0 < \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$$

Το $z_0 = 1$ είναι πόλος 1^{ης} τάξης εξ' ορισμού.

ΠΡΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ για ταξινόμηση ΑΠΟΜΕΝΩΜΕΝΩΝ ανώμαλων σημείων:
Έστω z_0 είναι απομονωμένο ανώμαλο σημείο της f. Τότε:

- z_0 είναι απαλείψιμη ανωμαλία $\iff$ υπάρχει το $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}$ (όχι το ∞)
- z_0 πόλος τάξης k $\iff$ Ο $k \in \mathbb{N}$ ο μοναδικός φυσικός ώστε
$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = \lambda \in \mathbb{C} - \underbrace{\{0\}}_{\text{ΠΡΟΣΟΧΗ εδώ! Το όριο θέλω μη μηδενικό (επειδή μηδενίζεται για όλα τα επόμενα } n>k)}$$
- z_0 ουσιώδης ανωμαλία της f $\iff$ Το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ <u>ΔΕΝ</u> υπάρχει

Τελικά:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \begin{cases} = \lambda \in \mathbb{C} & \Longrightarrow z_0 \text{ απαλείψιμη ανωμαλία} \\ \infty & \Longrightarrow z_0 \text{ πόλος} \\ \text{ΔΕΝ υπάρχει} & \Longrightarrow z_0 \text{ ουσιώδης ανωμαλία} \end{cases}$$

4.0.1 Πώς βρίσκουμε (κάποιες φορές) την τάξη ενός πόλου z_0

Λήμμα

Έστω $f = f(z)$ ολόμορφη σε σημείο z_0. Τότε:

z_0 ρίζα της f πολ/τας κ $\iff$ $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(\kappa-1)}(z_0) = 0$ και $f^{(\kappa)}(z_0) \neq 0$

Απόδειξη

" $\Longleftarrow$ " Αφού f ολόμορφη στο z_0 **αναπτύσσεται ΠΑΝΤΑ** σε σειρά Taylor "γύρω" από το z_0 ως εξής:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(z_0)}}{n!}(z-z_0)^n \\ &= \cancel{f(z_0)} + \cancel{f'(z_0)}(z-z_0) + \cdots + \frac{\cancel{f^{(k-1)}(z_0)}}{(k-1)!}(z-z_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \ldots \\ &= (z-z_0)^k \underbrace{\left(\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} + \ldots\right)}_{=h(z)} \end{aligned}$$

$$f(z) = (z-z_0)^k h(z), \text{ όπου } h(z) \text{ ολόμορφη στο } z_0 \text{ με } h(z_0) \neq 0$$

" $\Longrightarrow$ " Τότε $f(z) = (z-z_0)^k h(z)$, όπου h ολόμορφη στο z_0 με $h(z_0) \neq 0$. Παραγωγίζοντας $k-1$ φορές παίρνουμε $f^{(j)}(z_0) = 0 \; \forall j = 0, 1, \ldots, k-1$, ενώ $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

- Έστω τώρα $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$, όπου a, b είναι ολόμορφες στο z_0. Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα αριθμητή πολ/τας K ($K = \mathbf{0}, 1, 2, \ldots$) και ρίζα παρονομαστή πολ/τας Λ ($\Lambda = \mathbf{1}, 2, 3, \ldots$). Τότε:

$$z_0 \text{ είναι: } \begin{cases} \text{απαλείψιμη ανωμαλία για την } f & \text{εάν: } K \geq \Lambda \\ \text{πόλος τάξης } \Lambda - K & \text{εάν: } K < \Lambda \end{cases}$$

4.0.2 Υπολογισμός ολοκληρωτικού υπολοίπου σε απομονωμένο ανώμαλο σημείο z_0

Ορισμός: Ολοκληρωτικό υπόλοιπο

Σειρά Laurent της f στο z_0:

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

Ο όρος $a_{-1} = \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ καλείται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0, συμβολικά $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

Έστω z_0 είναι απομονωμένο ανώμαλο σημείο συνάρτησης f.

- Αν $\mathbf{z_0}$ **απαλείψιμη ανωμαλία**, τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0

  $$\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$$

  Τελικά:

  $$\boxed{z_0 \text{ απαλείψιμο } \implies \mathrm{Res}(f, z_0) = 0}$$

- Αν z_0 είναι πόλος τάξης N, τότε το $\mathrm{Res}(f, z_0)$ βρίσκεται ως εξής:

  Εφόσον z_0 πόλος τάξης N έχουμε:

  $$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

  $$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + \ldots$$

  $$\implies \Big((z-z_0)^k f(z)\Big)^{\overbrace{\scriptstyle\text{παράγωγος}}^{(k-1)}} = (k-1)!a_{-1} + a_0(k\cdots 2)(z-z_0) + \ldots$$

  $$\implies \lim_{z\to z_0}\left[\Big((z-z_0)^k f(z)\Big)^{(k-1)}\right] = (k-1)!a_{-1}$$

  $$\implies \boxed{a_{-1} \overset{\text{ορ.}}{=} \mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\Big((z-z_0)^k f(z)\Big)^{(k-1)}\right]}$$

  Προσοχή! Το $^{(k-1)}$ είναι **ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ**!

- z_0 **ουσιώδης ανωμαλία**: Τότε **αναγκαστικά** θα πρέπει να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της f στο z_0 και μέσω αυτού να υπολογίσετε τον όρο $a_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0)$

Θ.: Ολοκληρωτικών υπολοίπων

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμημ. λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ, εκτός **ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΩΝ ΑΝΩΜΑΛΩΝ** σημείων $z_1, \ldots, z_n$ στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ. Τότε:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_j)$$

Θ.: Αρχή ταυτισμού

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμηματικά λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ.
Αν $\{z_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{Z}}$ ακολουθία σημείων στο εσωτερικό της γ, με $z_\kappa \neq z_\lambda\ \forall \kappa \neq \lambda$ και είναι τέτοια ώστε $\lim_{\kappa \to \infty} z_\kappa = z_0$ ανήκει στο εσωτερικό της γ.
Τότε, εάν $f(z_\kappa) = 0\ \forall \kappa$ ισχύει

$$f(z) = 0 \quad \forall z \text{ στο εσωτερικό της } \gamma$$

Άσκηση Να ταξινομηθούν όλα τα ανώμαλα σημεία των συναρτήσεων

(α) $f(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{z^2}$

(β) $g(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$

(γ) $h(z) = \dfrac{\cos\left({}^1\!/_z\right)}{z}$

(δ) $k(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$

και να υπολογιστούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στα σημεία αυτά.

(α) Ανώμαλα σημεία της f (σημεία όπου η f) "πιθανώς" δεν ορίζεται ή αν ορίζεται δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη):

"Το μοναδικό ανώμαλο σημείο είναι αυτό που μηδενίζει τον παρονομαστή, δηλαδή το $\boxed{z_0 = 0}$."

Προφανώς το $z_0 = 0$ μηδενίζει τον παρονομαστή της f δύο φορές, δηλαδή το $z_0 = 0$ είναι διπλή ρίζα του παρονομαστή.

Έστω

$$\begin{aligned} a(z) &= \text{"αριθμητής"} = 1-\cos(z), \quad a(0) = 1-\cos(0) = 0 \\ a'(z) &= \sin(z), \quad a'(0) = 0 \\ a''(z) &= \cos(z), \quad a''(0) = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Άρα το $z_0 = 0$ είναι **διπλή** ρίζα του αριθμητή.

Επομένως, το $z_0 = 0$ είναι "απαλείψιμη ανωμαλία", διότι:

$$\text{πολλαπλότητα ρίζας } z_0 = 0 \text{ του αριθμητή} = 2 \ \geq\ \text{πολλαπλότητα ρίζας } z_0 = 0 \text{ του παρονομαστή} = 2$$

Αφού το $z_0 = 0$ είναι απαλείψιμη ανωμαλία:

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, 0) = 0}$$

(β) Το $z_0 = 0$ είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της g. Προφανώς η ρίζα του παρονομαστή είναι πολλαπλότητας 3. Το $z_0 = 0$ δεν μηδενίζει τον αριθμητή, διότι $e^{0^2} = 1 \neq 0$, άρα η πολλαπλότητα του $z_0 = 0$ για τον αριθμητή είναι ίση με 0 και έτσι το $z_0 = 0$ είναι **πόλος**, τάξης:

$$\left.\begin{array}{l} \text{πολλαπλότητα ρίζας } z_0 = 0 \text{ του παρονομαστή} \\ \qquad - \\ \text{πολλαπλότητα ρίζας } z_0 = 0 \text{ του αριθμητή} \end{array}\right\} 3 - 0 = 3$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g,0) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left([z-0]^3\frac{e^{z^2}}{z^3}\right)'' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\lim_{z\to 0}\left[\left(e^{z^2}\right)''\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(2ze^{z^2}\right)' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(2e^{z^2}+4z^2e^{z^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2 = 1
\end{aligned}$$

(γ) Το μοναδικό ανώμαλο σημείο είναι το $z_0 = 0$

Σημείωση

Αν z_0 είναι **πόλος** για συνάρτηση f και αν η g είναι ακεραία, τότε το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία για την $g \cdot f$.

Έτσι, με βάση τη σημείωση αυτή το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία.

Άρα:

$\operatorname{Res}(h,0) \overset{\text{ορισμός}}{=} a_1$ (ο οποίος είναι συντελεστής του $\dfrac{1}{z-z_0} \overset{z_0=0}{=} \dfrac{1}{2}$), στο ανάπτυγμα Laurent της h με κέντρο το z_0

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\cos(z) &\overset{\text{McLaurin}}{=} 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad z \in \mathbb{C} \\
\cos\left(\frac{1}{z}\right) &= 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} - \dots \quad z\, in \mathbb{C} - \{0\} \\
\frac{1}{z}\cdot\cos\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z^3} - \dots \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}
\end{aligned}$$

Έτσι:

$$\operatorname{Res}(h,0) = \text{"συντελεστής του } \frac{1}{z} \text{ στο ανάπτυγμα Laurent της } h\text{"} = 1.$$

(δ) $k(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$

Σημεία που μηδενίζουν παρονομαστή

$$e^z = 1 \iff z = \log 1 = \ln 1 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Άρα τα σημεία $z_k = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$ ανώμαλα σημεία της $k(z)$.

Για $n = 0$ έχουμε $z_0 = 0$ ανώμαλο σημείο της $k(z)$ που μηδενίζει τον παρονομαστή και αριθμητή 1 φορά άρα απαλείψιμο.

$$\operatorname{Res}(k,0) = 0$$

Για $\underline{n \neq 0}$ έχουμε $z_n = 2n\pi i$ μηδενίζουν μια φορά παρονομαστή, καμία αριθμητή, άρα πόλοι 1ης τάξης.

Έτσι:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(k,z_n) &= \frac{1}{1}\lim_{z\to z_n}(z-z_n)k(z) \\
&= \lim_{z\to z_n}(z-z_n)\frac{z}{e^z-1} \overset{\text{L' Hosp.}}{=} \\
&= \lim_{z\to z_n}\frac{z+z-z_n}{e^z} = \frac{z_n}{e^{z_n}} = \frac{2n\pi i}{e^{2n\pi i}} = 2n\pi i
\end{aligned}$$

(2) Υπολογίστε το $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{\cosh z}\,\mathrm{d}z$

(α) τύπος (θεώρ. ολοκλ. υπολοίπων)

(β) ανώμαλα σημεία, θέλεις ΕΝΤΟΣ καμπύλης

(γ) ταξινόμηση ανώμαλων

(δ) υπολ. $\operatorname{Res}(f,z_j),\ z_j$ ανώμαλα

(α) Από θεωρία έχω:

$$I = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh h}, z_j\right)$$

όπου z_j ανώμαλα σημεία εντός κύκλου: $|z| = 3$

(β) Ανώμαλα σημεία της ${e^z}/{\cosh z}$:

$$\cosh z = 0 \overset{\text{ορ.}}{\iff} \frac{e^z+e^{-z}}{2} = 0 \iff e^z + e^{-z} = 0$$

$$e^z + \frac{1}{e^z} = 0 \underset{\forall z}{\overset{z\neq 0}{\iff}} e^{2z}+1 = 0 \iff e^{2z} = -1 \iff 2z = \log(-1) = \ln(-1) + i(\pi + 2i\pi)$$

$$\implies \boxed{z = \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)i, \quad k\in\mathbb{Z}}$$

$z = \dfrac{\pm\pi i}{2}, \dfrac{\pm 3\pi i}{2}, \dfrac{\pm 5\pi i}{2}$ ανώμαλα σημεία

Άρα μένουν οι $z_1 = \frac{\pi i}{2}$ και $z_2 = \frac{-\pi i}{2}$ βρίσκονται ΕΝΤΟΣ κύκλου $|z| = 3$.

Έτσι από θεώρημα ολοκλ. υπολοίπων έχουμε:

$$I = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{\pi i}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{-\pi i}{2}\right)\right)$$

(γ) Αλλά το $z_1 = \frac{\pi i}{2}$ είναι πόλος 1ης τάξης, διότι

- μηδενίζει μια φορά τον παρονομαστή, αφού

$$\begin{aligned} A(z) &= \cosh z, \quad \cosh\left(\frac{\pi i}{2}\right) = 0 \\ A'(z) &= \sinh z, \quad \sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right) \neq 0 \end{aligned}$$

(τα μηδενικά του $\sinh z$ είναι στα $k\pi i$)
και προφανώς δε μηδενίζει καθόλου τον αριθμητή, αφού

$$e^z \neq 0 \quad \forall z$$

άρα και

$$e^{\pi i/2} \neq 0$$

(δ) Ακριβώς με την ίδια λογική, το $z_1 = -\frac{\pi i}{2}$ είναι πόλος 1ης τάξης.

(ε)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{z\to\frac{\pi i}{2}} \left(\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)\frac{e^z}{\cosh z}\right) \overset{\text{L' Hospital}}{=} \\ &= \lim_{z\to\frac{\pi i}{2}} \frac{e^z\left(z-\frac{\pi i}{2}\right) + e^z}{\sinh z} \\ &= \frac{e^z}{\sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right)} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{-\pi i}{2}\right) &= \lim_{z\to\frac{-\pi i}{2}} \left(z + \frac{\pi i}{2}\right)\frac{e^z}{\cosh z} \\ &= \frac{e^{-\pi i/2}}{\sinh\left(\pi i/2\right)} \end{aligned}$$

(□) Τελικά

$$I = 2\pi i\left(\frac{e^{\pi i/2}}{\sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right)} + \frac{e^{-\pi i/2}}{\sinh\left(\frac{-\pi i}{2}\right)}\right)$$

4.1 Εφαρμογές ολοκλ. υπολοίπων

4.1.1 Λήμμα Jordan

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη στο διάτρητο δίσκο

$$0 < |z - z_0| < R,$$

το z_0 είναι **ΑΠΛΟΣ ΠΟΛΟΣ** της f (δηλ. πόλος 1ης τάξης), και έστω γ_ρ είναι το τόξο $\gamma_\rho := \left\{z : z = z_0 + \rho e^{i\theta}\right\}$ και $\rho < R$. Τότε:

$$\lim_{\rho\to 0^+} \int_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = i\,(\theta_1 - \theta_0)\operatorname{Res}(f, z_0)$$

Απόδ.

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\rho} \left(\frac{a_{-1}}{z-z_0} + h(z)\right)\mathrm{d}z, \text{ όπου}$$

$h = h(z)$ ολόμορφη στο z_0, διότι το z_0 είναι <u>απλός πόλος</u> της f.

$$\begin{aligned} I_0 &= a_{-1}\int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_\rho} h(z)\,\mathrm{d}z \\ &= a_{-1}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\gamma_\rho} h(z)\,\mathrm{d}z \\ I_0(\rho) &= \mathrm{Res}(f,z_0)\cdot i(\theta_1-\theta_0) + \int_{\gamma_\rho} h(z)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο, $\rho \to 0^+$, έχουμε:

$$\lim_{\rho\to 0^+}\int_{\gamma_r ho} f(z)\,\mathrm{d}z = i(\theta_1-\theta_0)\,\mathrm{Res}(f,z_0) + \lim_{\rho\to 0^+}\int_{\gamma_\rho} h(z)\,\mathrm{d}z$$

Αρκεί ΝΔΟ $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\int_{\gamma_\rho} h(z)\,\mathrm{d}z = 0.$
Αλλά h ολόμορφη στο $z_0 \implies h$ συνεχής στο $z_0 \implies h$ φραγμένη σε μία περιοχή του z_0. Έτσι:

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_\rho}\right| &\leq \int_{\gamma_\rho} \big|h(z)\big|\,|\mathrm{d}z| \leq M\cdot\int_{\gamma_\rho} |\mathrm{d}z| \\ &= (\theta_1-\theta_0)\rho M \to 0, \end{aligned}$$

όπου M είναι άνω φράγμα της h σε μια περιοχή του z_0.

(α) Υπολογισμός περίπλοκων ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Θ.

Έστω $f = f(z)$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους απομονωμένα ανώμαλα σημεία, και η f τέτοια ώστε

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0.$$

Υποθέτουμε ότι η f έχει:

- ανώμαλα σημεία $z_1, \ldots, z_n$ ΣΤΟ ΑΝΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\mathrm{Im}(z) > 0$
- ανώμαλα σημεία $w_1, \ldots, w_k$ ΣΤΟ ΚΑΤΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\mathrm{Im}(z) < 0$
- ΠΟΛΟΥΣ 1ης τάξης μόνον $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ πάνω στον ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΞΟΝΑ.

Τότε:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \overbrace{\mathrm{Res}(f, z_j)}^{\text{άνω ημιεπίπεδο}} + \pi i \sum_{\lambda=1}^{r} \overbrace{\mathrm{Res}(f, z_\lambda)}^{\text{απλοί πόλοι πάνω σε πραγμ. άξονα}}$$

ή **ισοδύναμα**:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{\mu=1}^{k} \overbrace{\mathrm{Res}(f, w_\mu)}^{\text{κάτω ημιεπίπεδο}} - \pi i \sum_{\lambda=1}^{r} \overbrace{\mathrm{Res}(f, \zeta_\lambda)}^{\text{απλοί πόλοι πάνω σε πραγμ. άξονα}}$$

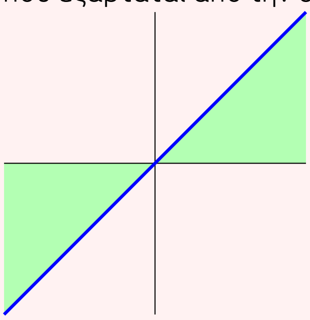
4.1.2 Ασκήσεις

Άσκ. Υπολογίστε το $\underbrace{\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R}}_{\text{τέτοια ολοκληρώματα καλούνται καταχρηστικά ή κατά Cauchy}} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+4x+5)}$

Το $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ δεν υπάρχει, επειδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x = \lim_{N,M\to 0} \int_{N}^{M} x\,\mathrm{d}x$$

που εξαρτάται από την διαδρομή που ακολουθούν τα M, N.



(a) Θεωρώ $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+4z+5)^2}$

(β) Ελέγχω αν ισχύει η συνθήκη

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{(z+1)(z^2+4z+5)^2} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^5} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{4}{z}+\frac{5}{z^2}\right)^2}$$
$$= \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^4} \cdot \lim_{z\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{4}{z}+\frac{5}{z^2}\right)^2} = 0 \cdot 1 = 0$$

(γ) Υπολογίζω **όλα** τα ανώμαλα σημεία της f και τα ταξινομώ:

$$(z+1)(z^2+4z+5)^2 = 0 \iff$$
$$\iff z_0 = -1 \text{ (απλή ρίζα)} \quad \text{και } z_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$
$$\iff z_0 = -1 \text{ (απλή)} \quad \text{και } z_{1,2} = -2 \pm i \text{ (διπλές ρίζες)}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} z_0 &= -1 && \text{(απλός πόλος στον πραγματικό άξονα)} \\ z_1 &= -2+i && \text{(διπλός πόλος στο άνω ημιεπίπεδο)} \\ z_2 &= -2-i && \text{(διπλός πόλος στο κάτω ημιεπίπεδο)} \end{aligned}$$

(δ) Τύπος:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = +\overbrace{2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f,-2+i)}^{\text{ανώμαλο στο άνω ημιεπίπεδο}} + \pi i \operatorname{Res}(f,-1)$$

(ε) Υπολογισμός ολοκλ. υπολοίπου

- $\operatorname{Res}(f,\,-1) = \lim_{z\to-1} (z+1)\dfrac{1}{(z+1)(z^2+4z+5)^2} = \dfrac{1}{4}.$
- $\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} \left((z-z_1)^2 \dfrac{1}{(z+1)(z-z_1^2)(z-z_2)^2} \right)'$
  όπου $z_1 = -2+i,\ z_2 = -2-i$

$$= \lim_{z\to z_1} \left(\frac{1}{(z+1)(z-z_2)^2} \right)' = -\lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_2)^2 + 2(z+1)(z-z_2)}{(z+1)^2(z-z_2)^4}$$
$$= -\frac{(z_1-z_2)+2(z_1+1)}{(z_1+1)^2(z_1-z_2)^3}$$

$z_1 - z_2 = \cancel{-2} + i + \cancel{2} + i$

$$= -\frac{2i+2(i-1)}{(i-1)^2(2i)^3} = \frac{4i-2}{+2\cdot 8}$$
$$= \boxed{\frac{2i-1}{8}}$$

(ζ) Τελικό αποτέλεσμα

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+4x+5)^2} = 2\pi i \cdot \frac{2i-1}{8} + \pi i \cdot \frac{1}{4}$$
$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cancel{i}}{\cancel{4}} + \frac{\pi \cancel{i}}{\cancel{4}} = -\frac{\pi}{2}$$

(2) Υπολογίστε το $\oint_\gamma \frac{1}{z\left(z-z_1\right)^2}\,\mathrm{d}z$, όπου γ είναι το τετράγωνο: με θετική φορά.

Εφαρμόζω θεώρ. ολοκλ. υπολοίπων

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(f,\ \begin{array}{l}\text{στα ανώμαλα σημεία}\\ \textbf{ΕΝΤΟΣ}\text{ τετραγώνου}\end{array}\right) + i\frac{\pi}{2}\operatorname{Res}(f, \overbrace{\ 0\ }^{\text{πάνω στην καμπύλη}})$$

- $\operatorname{Res}(f,0) \underset{\text{πόλος}}{\overset{z=0\text{ απλός}}{=}} \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z-z_1)^2} = \frac{1}{z_1^2}$
- $\operatorname{Res}(f,z_1) \underset{\text{πόλος}}{\overset{\text{δεύτερης}}{=}} \lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)^2\frac{1}{z(z-z_1)^2} = \lim_{z\to z_1} -\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)}\right)$

Αντικαθιστώντας παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

4.1.3 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$

όπου R είναι μια ρητή συνάρτηση των $\sin\theta$ και $\cos\theta$

Μεθοδολογία: Θέτουμε $z = e^{i\theta}, \quad \theta\in[0,2\pi)$
Τότε:

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(e^{i\theta}\right) = ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = iz\,\mathrm{d}\theta$$

άρα $\boxed{\mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta}$

Επίσης: $\begin{cases}\cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}\\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}\end{cases}$

Αντικαθιστούμε τα παραπάνω και παίρνουμε:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \oint_{|z|=1} K(z)\,\mathrm{d}z,$$

όπου K είναι μια ρητή συνάρτηση του z. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το θ. ολοκλ. υπολοίπων, και έχουμε:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(K,z_j),$$

όπου $z_j,\, {\scriptstyle j=1,\ldots,n}$ ανώμαλα σημεία της K εντός του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$.

Παράδειγμα: Υπολογίστε το $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{2+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$

(α) Θέτω $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$

Τότε

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(e^{i\theta}\right) = ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = iz\,\mathrm{d}z$$

άρα $\boxed{\mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta}$

- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{z - z^{-1}}{2i} = \dfrac{z^2 - 1}{2iz}$
- $\cos(2\theta) = \dfrac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} \overset{z=e^{i\theta}}{=} \dfrac{z^2 + z^{-2}}{2} = \dfrac{z^4 + 1}{2z^2}$

Τότε

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{2 + \frac{z^2-1}{2iz}} \frac{\mathrm{d}z}{iz} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{z^4 + 1}{z^2(z^2 + 4iz - 1)}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

(β) Ανώμαλα σημεία: Εκείνα που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Άρα

$$z^2(z^2 + 4iz - 1) = 0 \iff$$

$$z = 0 \text{ (διπλή)} \quad \text{ή} \quad z_{1,2} = \frac{-4i \pm \sqrt{16i^2 + 4}}{2} = -2i \pm i\sqrt{3} = i\left(-2 \pm \sqrt{3}\right)$$

Από αυτά με ενδιαφέρουν μόνον τα ανώμαλα σημεία ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου, δηλ.:

$$z_0 = 0 \text{ (διπλή)}$$
$$z_1 = i\left(-2 + \sqrt{3}\right)$$

(γ) Ταξινόμηση ανώμαλων σημείων και υπολογισμός ολοκληρωτικών υπολοίπων

$z_0 = 0$ είναι πόλος 2ης τάξης (μηδενίζει δύο φορές τον παρονομαστή, καμία τον αριθμητή)

$z_1 = i\left(-2 + \sqrt{3}\right)$ πόλος 1ης τάξης

> Ο τύπος $\operatorname{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(N-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \left((z - z_0)^N f(z)\right)^{(N-1)}$ θα δίνεται

και έτσι αν $f(z) = {(z^4+1)}/{z^2(z^2+4iz-1)}$, τότε

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \to 0} \left(\cancel{z^2} \frac{z^4 + 1}{\cancel{z^2}(z^2 + 4iz - 1)}\right)' \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{4z^3(z^2 + 4iz - 1) - (2z + 4i)(z^4 + 1)}{(z^2 + 4iz - 1)^2} \\ &= -4i \end{aligned}$$

Έστω $z_1 = i\left(-2+\sqrt{3}\right)$ και $z_2 = i\left(-2-\sqrt{3}\right)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z\to z_1} \cancel{(z-z_1)} \frac{z^4+1}{z^2\cancel{(z-z_1)}(z-z_2)} \\
&= \frac{z_1^4+1}{z_1^2(z_1-z_2)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{3}-2\right)^4+1}{-\left(\sqrt{3}-2\right)^2\cdot i2\sqrt{3}} = i\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)^4+1}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)^2}
\end{aligned}$$

(δ) Τελικά από θεώρημα ολοκλ. υπολοίπων έχω:

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i\left(-4i + i\frac{(\sqrt{3}-2)^4+1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^2}\right) \\
&= 8\pi - \pi\cdot\frac{(\sqrt{3}-2)^4+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^2}
\end{aligned}$$

4.1.4 Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης f

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x$$

όπου $x\in\mathbb{R},\ \omega\in\mathbb{R}$

Θ.

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ εκτός πεπερασμένου πλήθους απομονωμένων ανώμαλων σημείων και η f έτσι ώστε:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$

Υποθέτουμε ότι:

(α) Η f έχει ανώμαλα σημεία $z_1,\ldots,z_n$ στο ΑΝΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\operatorname{Im}(z)>0$

(β) Η f έχει ανώμαλα σημεία $w_1,\ldots,w_m$ στο ΚΑΤΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\operatorname{Im}(z)<0$

(γ) Η f έχει **ΑΠΛΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ** $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ πάνω στον **πραγματικό άξονα**.

Τότε

(α) Αν $\boxed{\omega<0}$, έχουμε:

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{-i\omega z}, z_j\right) + \pi i\sum_{\mu=1}^{r}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{-i\omega z}, \zeta_\mu\right)$$

(β) Αν $\boxed{\omega>0}$, έχουμε:

$$\hat{f}(\omega) = -2\pi i\sum_{\lambda=1}^{m}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{-\omega z}, \underset{\substack{\text{κάτω}\\\text{ημιεπ.}}}{w_\lambda}\right) - \pi i\sum_{\mu=1}^{r}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{-i\omega z}, \zeta_\mu\right).$$

Μέρος II
Κεχαγιάς

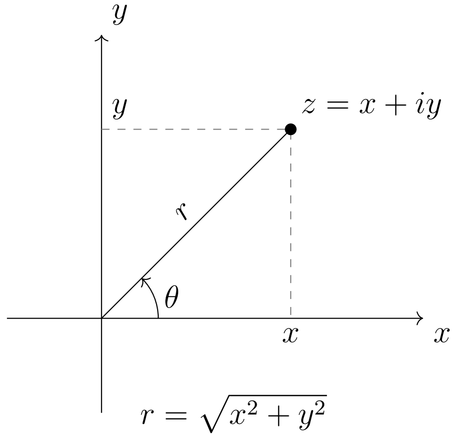
Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί αριθμοί

$$
\begin{aligned}
z =& x + iy \in \mathbb{C} \\
&x, y \in \mathbb{R} \qquad i^2 = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 + iy_1 \\
z_2 &= x_2 + iy_2 \\
z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\
&= x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy^2)(x_2 - iy_2)} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2} \\
z &= x + iy \\
\bar{z} &= x - iy \\
\mathrm{Re}(z) &= x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{Im}(z) &= y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$



$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta = \arctan \tfrac{y}{x}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow$ μέτρο του z

γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ. $z = x \in \mathbb{R},\ |z| = \sqrt{x^2} = |x|$)

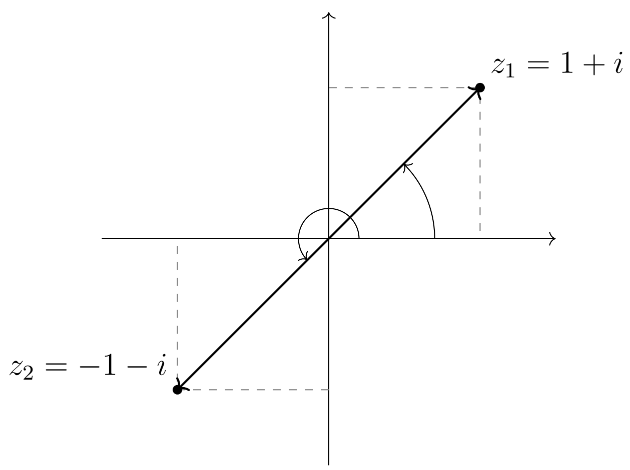
$$\begin{aligned} z = x + iy &= r \cdot \cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \quad \text{(Euler)} \end{aligned}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ διότι

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r\cos\theta + ir\sin\theta \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
&z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} \\
&r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
&\theta_1 = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z_2 = -1 - i = \sqrt{2} e^{i5\pi/4} = \sqrt{2} e^{i\cdot\left(-3\pi/4 = \sqrt{2} e^{i13\pi/4}\right)} \\
&r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\
&\theta_2 = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Γενικά: $-1 - i = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

1.1 Συναρτήσεις

$$
\mathbb{C} \to \mathbb{R}
$$

$$
\begin{aligned}
&z = x + iy \\
&\operatorname{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2} \\
&\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^\circ \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \qquad \theta_0 = \arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right) \\
&\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \ \operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi)
\end{aligned}
$$

Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση $\arg(z) = \big\{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\big\}$

$$
\begin{aligned}
z = x + iy &= \operatorname{mod}(z) \cdot e^{i\operatorname{Arg}(z)} \\
&= \operatorname{mod}(z) \cdot e^{i\left(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \operatorname{mod}(z_1) e^{i\operatorname{Arg}(z_1)} \\
z_2 &= \operatorname{mod}(z_2) e^{i\operatorname{Arg}(z_2)} \\
z_1 z_2 &= \operatorname{mod}(z_1)\operatorname{mod}(z_2) e^{i\cdot\left(\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)\right)} \\
\operatorname{Arg}(z_1 z_2) &\neq \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \text{ επειδή} \\
\operatorname{Arg}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}} e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) &= \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi
\end{aligned}
$$

Γενικά, αν $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, τότε:

$$
\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)
$$

Όμως:

$$
\begin{aligned}
\arg(z^z) &= \arg(z) + \arg(z) \\
&\neq 2\arg(z)
\end{aligned}
$$

διότι:

$$
\begin{aligned}
&A = \{a_1, a_2, \dots\} \\
&B = \{b_1, b_2, \dots\} \\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \\
&A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\} \\
&2A = \{2a : a \in A\} \\
&A = \{1, 2, 3\} \\
&B = \{4, 5\} \\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \{1+4, 1+5, 2+4, 2+5, 3+4, 3+5\} = \{5, 6, 7, 8\} \\
&A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\} \\
&2A = \{2, 4, 6\}
\end{aligned}
$$

1.2 n-οστές ρίζες

$$z = a^{1/n} \iff z^n = a$$

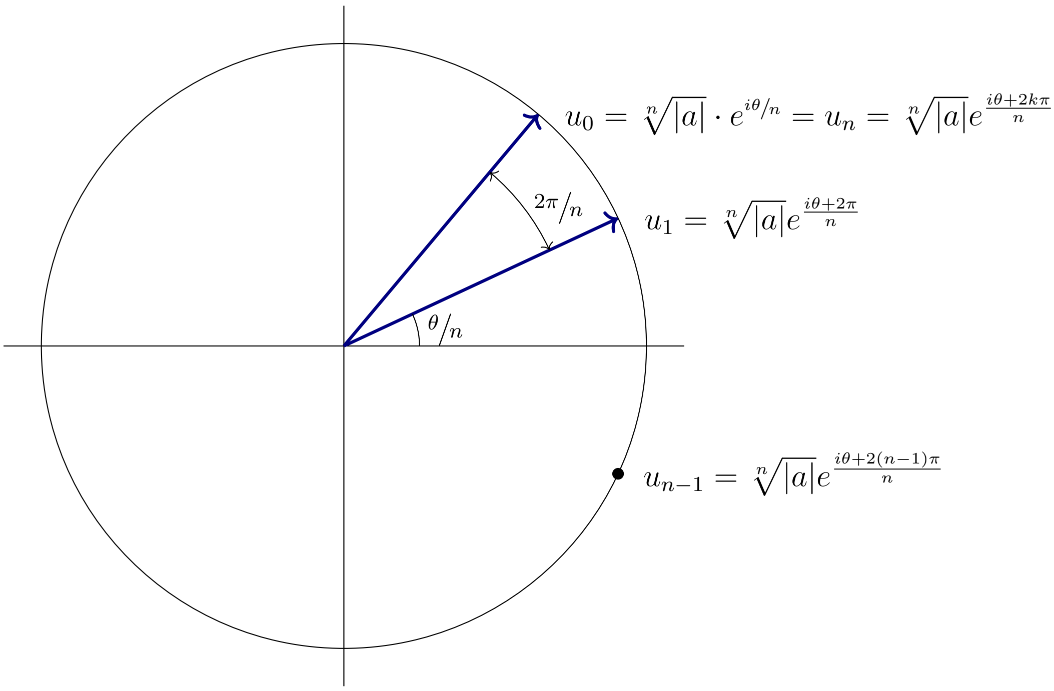
Δηλ. ποιο z ικανοποιεί αυτή

$$
\begin{aligned}
&a = |a|e^{i\theta} \\
&z = re^{i\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(re^{i\phi}\right)^n = |a|e^{i\theta} \\
\Longrightarrow\ & r^n \cdot e^{in\phi} = |a|e^{i\theta} \\
\Longrightarrow\ & r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi) = |a| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\
\Longrightarrow\ & \begin{cases} r^n = |a| \implies r = \sqrt[n]{|a|} \\ \left.\begin{array}{l} \cos(n\phi) = \cos\theta \\ \sin(n\phi) = \sin\theta \implies \end{array}\right| \implies n\phi = \theta + 2k\pi \ \in \mathbb{Z} \implies \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \\
\Longrightarrow\ & z = a^{1/n} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\theta\, +\, 2k\pi)/n} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

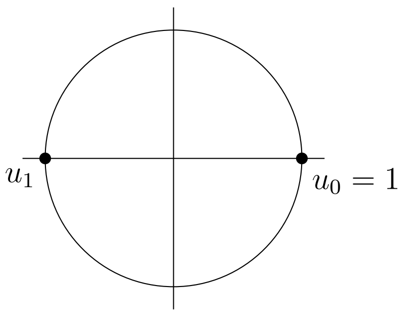
(Όμως αρκεί να πάρω $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$)

$$a^{1/n} = \Big\{ \quad \sqrt[n]{|a|}e^{i\theta/n},\ \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\theta + 2\pi}{n}}, \dots$$



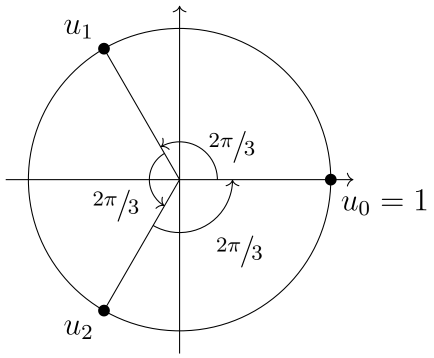
Παρ. $a^{1/2} = 1^{1/2}$

$$a = 1 = 1 \cdot e^{i0} \quad |a| = 1, \theta = 0$$
$$u_0 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2\cdot 0\cdot \pi}{2}\right)} = e^{i0} = 1$$
$$u_1 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2\cdot \pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1$$



Παρ. $a^{1/3} = 1^{1/3} = z$

$$a = 1 = e^{i0}, |a| = 1, \theta = 0$$
$$u_0 = 1$$
$$u_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$
$$u_2 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$



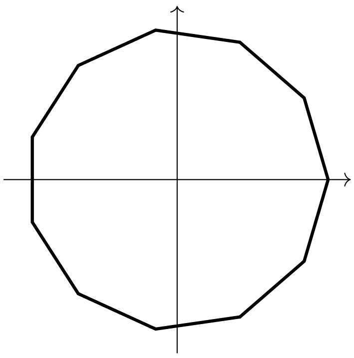
Διαφορετικά

$$\begin{aligned} 1^{1/3} = z &\iff 1 = z^3 \\ &\iff z^3 - 1 = 0 \\ &\iff (z-1)(z^2+z+1) = 0 \\ &\iff (z-1)\left(z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Παρ. $1^{1/11} = z \iff 1 = z^{11}$

$$\begin{aligned} &\iff z^{11} - 1 = 0 \\ &\iff (z-1)(z^{11} + z^{10} + \cdots + z^1 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\{u_0 9, u_1, \ldots, u_{10}\}$$



Κεφάλαιο 2 Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$e^z, \ \log(z)$

$$e^z \overset{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Ήξερα $\begin{array}{l} e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ e^{iy} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \end{array}$.

Τώρα η νέα συνάρτηση $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

Παρ.

$$\begin{aligned} e^{1+i} = ee^i &= e \cdot (\cos 1 + i \sin 1) \\ &= e \cdot \cos 1 + i \cdot e \cdot \sin 1 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\left(e^{1+i}\right) = e \cos 1$$

$$\operatorname{Im}\left(e^{1+i}\right) = e \sin 1$$

$$\log(e) = 1$$

$$\log(-1) = \log\left(e^{i(\pi+2k\pi)}\right) = i(\pi + 2k\pi)$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$$\log(z) = \ln\left(|z|\right) + i\theta$$

Ορίζω

Πλειότιμη $\log(z) = \ln\left(|z|\right) + i\arg(z)$

Μονότιμη $\operatorname{Log}(z) = \ln\left(|z|\right) + i\operatorname{Arg}(z)$ είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$\begin{aligned} \log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i\left(\pi/4+2k\pi\right)}\right) \\ &= \log\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}$$

2.1

Από σήμερα: $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Πριν 7 ημέρες: $\cancel{e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i \sin y}$

Σήμερα: $\exp(z) \overset{\text{ορ}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Θ.

Η $\exp(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z \in \mathbb{C}$ και ικανοποιεί:

(1) $\forall z : \left(\exp(z)\right)' = \exp(z)$

(2) $\forall z_1, z_2 : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

(3) $\forall \theta \in \mathbb{R} : \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

Απόδ.

(1)

$$\big(\exp(z)\big)' = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)'$$
$$= 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \exp(z)$$

(2) $g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)$

$$\tfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} = \exp(z)\exp(\zeta - z) + \exp(z)\exp(\zeta - z)(-1) = 0$$
$$\implies g(z) = c \implies c = g(0) = \exp(\zeta)$$
$$\implies \exp(\zeta) = g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)$$

Θέτω: $z = z_1,\ \zeta = z_1 + z_2$

Οπότε:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$$

(3)

$$\exp(i\theta) = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$
$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\cdot\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right)$$
$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

$\exp(z) \quad e^z$

$$\exp(1+i) = 1 + (1+i) + \frac{(1+i)^2}{2!} + \dots$$
$$e^{1+i} = 1 + (i+1) + \dots$$

ή ο αρ. $e = 2.718$ υψωμένος στη μιγαδική δύναμη $1+i$

Θ.

Η $\exp(z)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$

Απόδ.

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)\exp(2\pi i) = \exp(z)$$

Η εικόνα του συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}$ υπό την συνάρτηση $f(z)$ Δηλ.

$$f(A) = \big\{w = f(z),\ z \in A\big\}$$

Παρ. Να δειχθεί ότι $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Διότι: έστω $w = re^{i\phi} \in \mathbb{C} - \{0\}$.

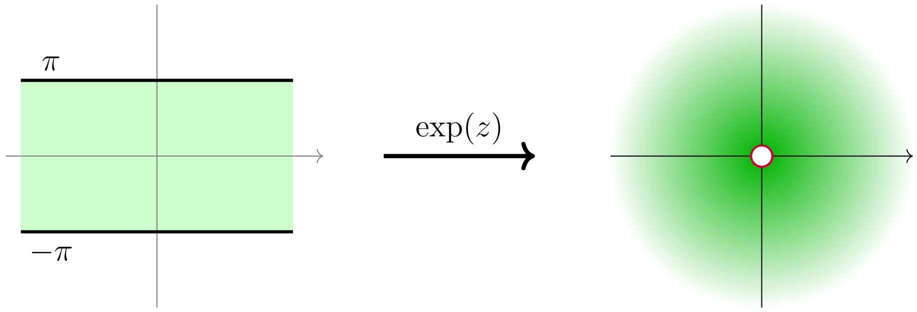
Θα βρω $z = \rho e^{i\theta} = x + iy$ τ.ώ: $\exp(z) = w$.

$$
\begin{aligned}
&\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy)\\
&w = re^{i\phi}\\
&\exp(x) = \big|\exp(z)\big| = |w| = r \implies \boxed{x = \ln(r)}\\
&\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}(w)\\
&\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}\big(\exp(x)\exp(iy)\big) = y\\
&\operatorname{Arg}(w) = \operatorname{Arg}(re^{i\phi}) = \phi\\
&\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}(w) \implies \boxed{y = \phi}
\end{aligned}
$$

Τελικά $z = x + iy = \ln(r) + i\phi$ ικανοποιεί $\exp(z) = re^{i\phi} = w$. Άρα $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Στην πραγματικότητα, δεν χρειάζομαι όλο το $\mathbb{C}$ διότι:

$$\exp(U) = \mathbb{C} - \{0\}\,, \quad \text{όπου } U = \big\{x + iy : x \in \mathbb{R},\ y \in (-\pi, \pi]\big\}$$



2.2 Λογαριθμική Συν.

$$w = \overbrace{\log(z)}^{\text{πλειότιμη}} \iff z = \exp(w)$$

$$
\begin{aligned}
w &= \log(1+i)\\
1 + i &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}\\
\log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\right)\\
&= \ln(\sqrt{2}) + \log\left(e^{i\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]}\right)\\
&= \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k \int \mathbb{Z}\\
&= \left\{\ldots, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{7\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{17\pi}{4}, \ldots\right\}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\log(z) = \ln(r) + i\arg(z)} \leftarrow$ πλειότιμη

$\boxed{\operatorname{Log}(z) = \ln(r) + i\operatorname{Arg}(z)} \leftarrow$ μονότιμη
ασυνεχής για $x \in (-\infty, 0]$

2.3 Μιγαδικές δυνάμεις

$$z^c = e^{\log(z^c)} = e^{c\log z} = e^{c\left(\ln\left(|z|\right)+i\arg(z)\right)}$$

ή

$$z^c = e^{\operatorname{Log}(z^c)} = e^{c\left(\ln\left(|z|\right)+i\operatorname{Arg}(z)\right)}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{(1+i)^{2-i}}_{\substack{z=1+i\\ c=2-i}} &= e^{(2-i)\log(1+i)} = e^{(2-i)\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}\\
&= e^{\left(2\ln\left(\sqrt{2}\right)+\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)+i\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}+4k\pi\right)}\\
&= e^{2\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot e^{i\left(-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}+4k\pi\right)}\\
&= 2e^{\pi/4+2k\pi}\cdot\left[\cos\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}+\cancel{4k}\pi\right)+i\sin\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}+\cancel{4k}\pi\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+i} = (1+i)^{1/2} &= e^{1/2\cdot\log(1+i)}\\
&= e^{1/2\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}\\
&= e^{1/2\ln\left(\sqrt{2}\right)}\cdot e^{\frac{1}{2}\left(\pi/4+2k\pi\right)}\\
&= \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)}\\
&= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right)\\
&= \begin{cases}\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right)\end{cases}
\end{aligned}$$

$$(-1)^i = e^{\log\left((-1)^i\right)} = e^{i\log(-1)} = e^{i\left(i(2k+1)\pi\right)} = e^{-(2k+1)\pi}$$

$$\begin{aligned}
(1+i)^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}\log(1+i)} = e^{\sqrt{2}\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}\\
&= \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\cdot e^{i\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi}\\
&= \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right)\right]\\
&\cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right)\\
&\implies \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi+2m\pi \implies 2k\sqrt{2}\pi = 2m\pi \implies \sqrt{2} = {}^{m}\!/_{k}
\end{aligned}$$

$$(1+i)^{p/q} = \dots$$
$$m = \lambda q$$

Παρ. Να βρεθούν οι τιμές του n τ.ώ:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} i^k \in \mathbb{I}$$

n	
0	1
1	$1+i$
2	$1+i+i^2=1$
3	$1+i+i^2+i^3=0$
4	1
5	$1+i$
6	i
$\vdots$	$\vdots$

Αρα $\forall_{n,m} : c_n = c_{n+4m}$
Οι φανταστικές τιμές του c_n προκύπτουν για

$$\begin{aligned} n =& 2,3, \\ & 6,7, \\ & 10,11, \end{aligned}$$

Απ. $n \in \left\{m+4l : m \in \{2,3\}, l \in \mathbb{N}_0\right\}$

Παρ. Να λυθεί η $(1+z)^{2n} = -(1-z)^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$

Λύση Φαίνεται άμεσα ότι $z \neq 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} &= -1 \implies \\ \frac{1+z}{1-z} &= (-1)^{1/2n} = \left(e^{i(2k+1)\pi}\right)^{1/2n} \\ z &= \frac{e^{i(2k+1)\pi/2n}-1}{e^{i(2k+1)\pi/2n}+1} \\ &= \frac{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) - 1}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + 1} \\ &\underset{\begin{cases}\cos\phi - 1 = -2\sin^2\frac{\phi}{2} \\ \cos\phi + 1 = 2\cos^2\frac{\phi}{2}\end{cases}}{=} -\frac{2\sin^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i2\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i2\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\left[-\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\right]}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\left[\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\right]} \\ z_k &= i\tan\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \qquad k = 0,1,\ldots,2n-1 \end{aligned}$$

2.4

2.4.1 Η γραμμική απεικόνιση

Τύπος: $f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}$

Προφανώς η $w = f(z) = az + b$ είναι 1-1 συνάρτηση και εύκολα βρίσκουμε την αντίστροφή της λύνοντας την $w = az + b$ ως προς z.

Έτσι: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = az + b$ και μπορώ να την επεκτείνω στο $\bar{\mathbb{C}}$ με 1-1 τρόπο θέτοντας

$$f(\infty) = \infty$$

Γεωμετρική ερμηνεία

- Προφανώς, από τη δομή της, η γραμμική απεικόνιση απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και κύκλους σε κύκλους.

Ερώτηση Έστω $f(z) = az + b$.

Αν $Ax + By + \Gamma = 0$ ευθεία τυχαία, βρείτε πού αυτή απεικονίζεται μέσω της $f(z)$.

$$\begin{aligned} w &= u + iv = az + b \\ &= u(x, y) + iv(x, y) = a(x + iy) + b \end{aligned}$$

- $w = az + b \iff z = \frac{w-b}{a} \iff x + iy = \frac{u+iv-(b_0+ib_1)}{a_0+ia_1} = \frac{\big[(u-b_0)+i(v-b_1)\big]\big[a_0-a_1 i\big]}{|a|^2} = \frac{(u-b_0)a_0+a_1(v+b_1)}{|a|^2} + i\frac{-a_1(u-b_0)+a_0(v-b_1)}{|a|^2}$

Άρα:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_0 u + a_1 v - (a_0 b_0 + a_1 b_1)}{|a|^2} \\ y &= \frac{-a_1 u + a_0 v - (a_1 b_0 + a_0 b_1)}{|a|^2} \end{aligned}$$

(μπορεί να είναι λάθος)

$$\begin{aligned} & Ax + By + \Gamma = 0 \\ \iff & A\Big(a_0 u + a_1 v - (a_0 b_0) - (a_0 b_0 + a_1 b_1\Big) + B\Big(-a_1 u + a_0 v - (a_1 b_0 + a_0 b_1)\Big) + \Gamma|a|^2 = 0 \end{aligned}$$

2.4.2 Αντιστροφή $f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$

Προφανώς: $\mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} : f(z) = \frac{1}{z}$
και μορεί να επεκταθεί στο $\bar{\mathbb{C}}$ θέτοντας $f(0) = \infty$ και $f(\infty) = 0$.

Εννοείται ότι είναι 1-1 με $w = \frac{1}{z} \iff \frac{1}{w}$ δηλ. για $\begin{cases} w = u + iv \\ z = x + iy \end{cases}$ έχουμε:

$$x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \iff \left| \begin{array}{l} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2+v^2} \end{array} \right. \tag{2}$$

Έτσι φαίνεται ότι η συνάρτηση αυτή απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.

Πράγματι, αν $Ax + By + \Gamma = 0$ τυχαία ευθεία στο επίπεδο του z, τότε από (2):

$$A\frac{u}{u^2+v^2} - B\frac{v}{u^2+v^2} + \Gamma = 0$$
$$\iff \boxed{Au - Bv + \Gamma\left(u^2+v^2\right) = 0}$$

- $\underline{\Gamma = 0}$ τότε $Au - By = 0$ άρα ευθεία απεικον. σε ευθεία, ενώ:
- $\underline{\Gamma \neq 0}$ τότε $u^2 + v^2 + \frac{A}{\Gamma}u - \frac{B}{\Gamma}v = 0$ **δηλ.** κύκλος

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

Η $f(z) = \frac{1}{z}$ απεικονίζει το εσωτερικό μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ με κέντρο το $z = 0$, στο εξωτερικό του (με 1-1 τρόπο, και αντιστρόφως).

Πράγματι:

$$z : |z| < 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } \left|f(z)\right| = \frac{1}{|z|} > 1 \implies \left|f(z)\right| > 1$$
$$z : |z| > 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } \left|f(z)\right| = \frac{1}{|z|} < 1 \implies \left|f(z)\right| < 1$$
$$z : |z| = 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$$

2.4.3 Μετασχ. Möbius

Καλούμε ρητογραμμικό μετασχηματισμό (Möbius) κάθε συνάρτηση

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (\text{με } ad - bc \neq 0)$$

Προφανώς: $f : \mathbb{C} - \left\{-{}^{d}/_{c}\right\} \to \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, αν $c \neq 0$
ή $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αν $c = 0$

Η f είναι 1-1 (εύκολο).

- Αποδεικνύεται ότι ο μετασχ. Möbius είναι σύνθεση <u>διαστολής</u>, <u>περιστροφής</u>, <u>μετάθεσης</u> και <u>αντιστροφής</u>, άρα απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.
- Ο μετασχ. Möbius (στην περίπτωση ευθείας ή κύκλου) απεικονίζει συμπληρωματικούς τόπους σε συμπληρωματικούς τόπους.

- Αποδεικνύεται ότι <u>υπάρχει</u> ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ μετασχ. Möbius που απεικονίζει ΤΡΙΑ σημεία z_1, z_2, z_3 σε ΤΡΙΑ ΑΛΛΑ σημεία $w_1 = f(z_1),\ w_2 = f(z_2),\ w_3 = f(z_3)$, και έχει τη μορφή:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

2.4.4 Τριγωνομετρικές και αντίστροφές τους

π.χ.

- Η συνάρτηση

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

είναι 2π-περιοδική, άρα μη αντιστρέψιμη στο $\mathbb{C}$

Έστω $E_k = \left\{x + iy : \kappa\pi - \frac{\pi}{2} < x < \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, y \in \mathbb{R}\right\}, k \in \mathbb{Z}$ είναι "κατακόρυφες λωρίδες". Για $\underline{k = 0}$, έχω:

Τότε η $\sin z$ γίνεται 1-1 με πεδίο τιμών το σύνολο

$$A = \mathbb{C} - \left\{u + iv : |u| \geq 1 \text{ και } v = 0\right\}$$

Έτσι η $\sin : E_k \to A$ είναι 1-1 (για κάθε συγκεκριμένο $k \in \mathbb{Z}$), άρα αντιστρέψιμη.

  - Από $w = \sin z$ παίρνω:

$$\left| \begin{array}{l} u(x,y) = \sin x \cosh y \\ v(x,y) = \cos x \sinh y \end{array} \right.$$

  - Για $x = \frac{\pi}{2},\ y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικονίζεται}]{\sin z} (\cosh y, 0)$

    Αλλά $\cosh y$ δεν είναι 1-1 $\forall y$, επομένως η $\sin z$ ΔΕΝ μπορεί να είναι 1-1 πάνω στην $x = \frac{\pi}{2}$, η οποία εξαιρείται από το πεδίο ορισμού. Έτσι, από το πεδίο τιμών, εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \geq 1,\ v = 0\}$$

  - Για $x = -\frac{\pi}{2}$, ομοίως εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \leq 1,\ v = 0\}$$

  - Για $\underline{x = 0}$, $y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικον.}]{\sin z} (0, \sinh y)$ και επειδή $\sinh y$ 1-1 γν. αύξ. με πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$ $\forall y$ η $x = 0$ απειον. στην $u = 0$.
  - Έστω $x = a \quad (a \neq \pm\frac{\pi}{2}),\ a \neq 0.$

    Τότε: $\left| \begin{array}{l} u = \sin a \cosh y \\ v = \cos a \sinh y \end{array} \right. \implies \boxed{\dfrac{u^2}{\sin^2 a} - \dfrac{v^2}{\cos^2 a} = 1}$. Αν $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\left| \begin{array}{l} u > 0 \\ v \in \mathbb{R} \end{array} \right.$, και αντίστοιχα για $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

    Έτσι ορίζουμε:

$$= \operatorname{arcsin} : E' \to E_k :$$

$$\begin{aligned} \arcsin z = w &\iff z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2} \\ &\iff e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \iff e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{4 - 4z^2}}{2} \\ &\implies iw = \log\left(z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}}\right) \\ &\implies \boxed{\arcsin z = \log\left(z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}}\right)} \end{aligned}$$

- **Τρίτη 22/11** Ατρέας, 2 τμήματα
- **Πέμπτη 24/11** Κεχαγιάς, 2 τμήματα
- **Παρασκευή 25/11** Κεχαγιάς, 2 τμήματα

Κεφάλαιο 3 Ακολουθίες & Σειρές (Μιγαδικών αριθμών/συναρτήσεων)

Ορισμός

Ακολουθία $\left(u_n(z)\right)_{n=1}^{\infty}$

Ορισμός

Λέμε ότι η $u_n(z)$ τείνει σε $u(z)$.
Γράφουμε $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z)$

$$\forall z, \forall \epsilon > 0\, \exists N_{\epsilon,z} : n \geq N\epsilon, z \implies \left|u_n(z) - u(z)\right| < \epsilon$$

Παρ. $u_n(z) = 1 + \frac{z}{n}$

$\lim_{n\to\infty} = 1$ διότι

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C}, \forall \epsilon > 0 : n \geq \frac{|z|}{\epsilon} + 1 &\implies \left|\underbrace{1 + \frac{z}{n} - 1}\right| < \epsilon \\ &\iff \left|\frac{z}{n}\right| < \epsilon \\ &\iff n > \frac{|z|}{\epsilon}\end{aligned}$$

Ορισμός

Έστω ακολουθία $\left(u_n(z)\right)_{n=1}^{\infty}$

Ορίζω νέα ακολουθία $\left(S_1(z)\right)_{n=1}^{\infty}$ ως εξής:
$$\begin{aligned}S_1(z) &= u_1(z) \\ S_2(z) &= u_1(z) + u_2(z) \\ &\cdots \\ S_n(z) &= u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z)\end{aligned}$$

Εάν $\exists \lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ γράφω $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = S(z)$ και το ονομάζω **σειρά**.

Παρ. για $n \in \mathbb{N}$ ορίζω $u_n(z) = z^n \cdot (1-z)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n(1-z) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(z^n - z^{n+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(z - z^2 + z^2 - z^3 + z^3 - z^4 + \cdots - z^{N+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(z - z^{N+1}\right) = z - \lim_{N\to\infty} z^{N=1} \\
&\overset{\text{Θέτω } z=re^{i\theta}}{=} z - \lim_{N\to\infty} r^N e^{iN\theta} \\
&= z \text{ όταν } |z| < 1
\end{aligned}$$

Τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (1-z) = \begin{cases} z & \text{όταν } |z| < 1 \\ \text{δεν ορίζεται} & \text{όταν } |z| \geq 1 \end{cases}$$

(Για $z = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} = 0^n(1-z) = 0 = z$)
Ισχύει $|z| < 1 \implies \lim_{N\to\infty} z^N = 0$, διότι

$$\begin{aligned}
\forall z \text{ με } |z| < 1, \epsilon > 0 \quad n \geq \frac{\ln e}{\ln|z|} + 1 \implies |z^n| < \epsilon \\
&\iff |z|^n < \epsilon \\
&\iff n \cdot \ln|z| < \ln e \\
&\iff n < \frac{\ln e}{\ln|z|}
\end{aligned}$$

Ορισμός

Λέω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ **συγκλίνει απολύτως** ανν $\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n(z)\right|$ συγκλίνει.

Ορισμός

Λέμε ότι η $\left(u_n(z)\right)_{n=1}^{\infty}$ **συγκλίνει ομοιόμορφα** στην $u(z)$ ανν

$$\forall z, \forall \epsilon > 0 \exists \underbrace{N_\epsilon}_{\text{Το } N_e \text{ δεν εξαρτάται από το } z} : \quad n \geq N_\epsilon \implies \left|u_n(z) - u(z)\right| < \epsilon$$

Παρόμοια πράγματα λέμε και για την $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)}$

Παρ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (1-z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε z με $|z| \leq \frac{1}{z}$
Διότι

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} z^n(1-z) = z - \lim_{N\to\infty} z^{N+1}$$

$\rightarrow$ Αρκεί να δείξω ότι $z^{N+1} \rightarrow 0$ ομοιόμορφα.

$$\forall z, |z| \leq \frac{1}{2}, \forall \epsilon > 0, \forall n \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} + 1 \implies \left|z^{N+1}\right| < \epsilon$$

Ισχυρίζομαι ότι

$$\forall z, |z| \leq \frac{1}{z}, \forall \epsilon > 0, \forall n \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln \frac{1}{2}} + 1 \implies \left|z^{N+1}\right| < \epsilon$$

διότι $|z| \leq \dfrac{1}{2} \implies \dfrac{\ln \epsilon}{\ln \frac{1}{2}} \geq \dfrac{\ln \epsilon}{\ln |z|}$

Θ.

Έστω $\left(u_n(z)\right)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z)$ ομοιόμορφα στο χωρίο Δ.

Τότε $\displaystyle\int_c u(z)\,\mathrm{d}z = \int_c \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c u_n(z)\,\mathrm{d}z$

Θ.

Θέτω $\left(u_n(z)\right)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία αναλυτικών (ολόμορφων) συναρτήσεων και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο χωρίο D. Τότε

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum u_n(z)\right) = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$$

Θ.

Αν συγκλίνει η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n(z)\right|$, τότε συγκλίνει και η ${}_{n=1}^{\infty} u_n(z)$

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Θ.

Αν συγκλίνει η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|v_n(z)\right|$ και $\forall n, z \;:\; \left|u_n(z)\right| \;\leq\; \left|v_n(z)\right|$, τότε συγκλίνει και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n(z)\right|$

Θ.: Κριτήριο του λόγου

Έστω $L(z) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|$. Τότε

$$\begin{aligned} &L(z) < 1 \quad \text{η } \sum_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει} \\ &L(z) > 1 \quad \text{η } \sum_{n=1}^{\infty} \text{ δεν συγκλίνει} \\ &L(z) = 1 \quad \text{δεν μπορούμε να αποφανθούμε} \end{aligned}$$

Θ.: Κριτήριο της ρίζας

Έστω $L(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|}$.. Τότε

$$\begin{aligned} &L(z) < 1 && \text{η } \sum_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει} \\ &L(z) > 1 && \text{η } \sum_{n=1}^{\infty} \text{ δεν συγκλίνει} \\ &L(z) = 1 && \text{δεν μπορούμε να αποφανθούμε} \end{aligned}$$

Παρ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\cdot(n+1)}$ συγκλίνει όταν $|z| \leq 1$, δεν συγκλίνει όταν $|z| > 1$

$$\text{Θέτω } L(z) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)(n+2)}{z^n/n(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} |z| \frac{n}{n+2} = |z|$$

Όταν $|z| = 1$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Αφού συγκλίνει απολύτως, συγκλίνει (για κάθε $z : |z| = 1$)

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ συγκλίνει όταν $|z| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} z^n &= z + z^2 + z^3 + \cdots + z^N \\ &= z \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}) \\ &= z \cdot \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{z}{1-z} \left(1 - z^N\right) \\ &= \frac{z}{1-z} \text{ για } N \to \infty \text{ όταν } |z| < 1 \end{aligned}$$

Για $|z| > 1$ δεν συγκλίνει.
Για $|z| = 1$ δεν συγκλίνει (τουλάιστον για κάποιες τιμές).
Εναλλακτικά, με κριτήριο ρίζας: $L(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z^n|} = |z|$
και κριτήριο λόγου: $L(z) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| = |z|$

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(z+2)^{n+1}}{(n+1)^3 4^n}}{\frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z+2|}{4} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^3 = \frac{|z+2|}{4} \to \begin{cases} |z+2| < 4 & \text{συγκλίνει} \\ |z+2| = 4 & * \\ |z+2| > 4 & \text{δεν συγκλίνει} \end{cases}$$

Αν $|z+2| = 4$, ελέγχουμε αν συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|z|^{n+1}}{n!|z|^n} = \lim_{n\to\infty}(n+1)|z| = \begin{cases} \infty & |z| \neq 0 \\ 0 & |z| = 0 \end{cases}$$

- $\sum \frac{z^n}{n(n+1)}$ συγκλίνει για $|z| \leq 1$
- $\sum z^n$ συγκλίνει για $|z| \leq 1$
- $\sum \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$ συγκλίνει για $|z+2| \leq 4$
- $\sum n! z^n$ συγκλίνει για $|z| = 0$

Ορισμός

Δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

Θ.

Για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ υπάρχει $R \geq 0$, τ.ώ:

$|z - z_0| < R$ η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα
$|z - z_0| > R$ η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει

Στο $|z - z_0| = R$ η ΔΣ μπορεί να συγκλίνει σε κάποια σημεία και να μην συγκλίνει σε άλλα. Αυτό παρατηρούμε και στα 4 παραπάνω παραδείγματα.

Όταν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \to$ σειρά Taylor.

Όταν $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \to$ σειρά Laurent.

Η σειρά Laurent περιλαμβάνει την Taylor ως ειδική περίπτωση.

Αν είναι "γνήσια" σειρά Laurent ($a_n \neq 0$ για κάποια αρνητικά n), τότε το z_0 λέγεται ανώμαλο σημείο της σειράς Laurent.

Από την ΑΛΛΗ ΕΒΔΟΜΑΔΑ
ΤΡΙ **και** ΠΕ στον ΑΤΡΕΙΑ **ΚΑΙ ΤΑ 2** τμήματα

Θ.

Για κάθε ΔΣ $f(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}$ υπάρχει αριθμός $R \geq 0$ (ακτίνα σύγκλισης) **τ.ώ**

(α) Η ΔΣ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα στο $\underbrace{D_R}_{\text{δίσκος σύγκλισης}}(z_0) = \{z : |z-z_0| < R\}$

(β) Η ΔΣ αποκλίνει στο $\{z : |z-z_0| > R\}$

(γ) Σε κάθε σημείο του συνόρου του δίσκου σύγκλισης $\{z : |z-z_0| = R\}$ η ΔΣ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει

Θ.

Για κάθε ΔΣ $f(z) = \sum_{n=0} a_n (z-z_0)^n$, $\forall z \in D_R(z_0)$ ισχύουν:

(α)

$$\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d} z} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z-z_0)^{n-1}$$

(β) Για κάθε $C \subseteq D_R(z_0)$

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-z_0)^n\,\mathrm{d}z$$

Θ.

Έστω $f(z)$ αναλυτική στο εσωτερικό κλειστής καμπύλης C. Έστω $z_0,\ z$ σημεία στο εσωτερικό της C. Τότε

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(z-z_0)^n}$$

$$\boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{C'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n-1}}\,\mathrm{d}z\right)(z-z_0)^n}$$

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \sin z$, γύρω από το $z_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(z) & f(0) &= 0 \\ f'(z) &= \cos(z) & f'(0) &= 1 \\ f''(z) &= -\sin(z) & f''(0) &= 0 \\ f'''(z) &= -\cos(z) & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

$$\sin(z) = 0(z - \cancelto{0}{z_0})^0 + \frac{1}{1!}(z - \cancelto{0}{z_0})^1 + \frac{0}{2!}(z - \cancelto{0}{z_0})^2 + \frac{1}{3!}(z - \cancelto{0}{z_0})^3 + \dots$$
$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor

Α' τρόπος

$$f\left({}^{\pi}\!/_{3}\right) = {}^{\sqrt{3}}\!/_{2} \quad , f''\left({}^{\pi}\!/_{3}\right) = -{}^{\sqrt{3}}\!/_{2}$$
$$f'\left({}^{\pi}\!/_{3}\right) = {}^{1}\!/_{2} \quad , f'''\left({}^{\pi}\!/_{3}\right) = -{}^{1}\!/_{2}, \dots$$

$$\sin(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(z - {}^{\pi}\!/_{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(z - {}^{\pi}\!/_{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(z - {}^{\pi}\!/_{3}\right)^3$$

Β' τρόπος $u = z - {}^{\pi}\!/_{3} \implies z = u + {}^{\pi}\!/_{3}$

$$\begin{aligned}
\sin(z) = \sin(u + {}^{\pi}\!/_{3}) &= \sinh \cancelto{{}^{1}\!/_{2}}{\cos\frac{\pi}{3}} + \cosh \cancelto{{}^{\sqrt{3}}\!/_{2}}{\sin {}^{\pi}\!/_{3}} \\
&= \frac{1}{2}\left(u - {}^{u^3}\!/_{3!} + {}^{u^5}\!/_{5!} - \dots\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}u^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}u^3 + \dots \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \dots
\end{aligned}$$

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \frac{1}{1-z}$ γύρω από το $z_0 = 2$

ΛΥΣΗ

$$z - 2 = u$$
$$z - 1 = u + 1$$
$$1 - z = -(1 + u)$$
$$\forall u : |u| < 1 : \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{1+u} = -1 + u - u^2 + u^3 - \dots$$
$$|z - 2| < 1 : \frac{1}{1-z} = -1 + (z-2) - (z-2)^2 + (z-2)^3$$

(για $z = 3,\ f(z) = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$)

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3}$ γύρω από το $z_0 = 0$

$$\begin{aligned}\frac{z}{z^2-2z-3} &= \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z-3}\\ &= \frac{1}{4}\cdot(1 - z + z^2 - z^3 + \dots) - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\\ &= \frac{1}{4}\cdot(1 - z + z^3 - z^3 + \dots) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \dots\right)\\ &= -\frac{1}{3}z + \frac{8}{36}z^2 + \dots\end{aligned}$$

$|z| < 1 \quad \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \implies |z| < 3$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-2z-3} &= \frac{1}{(z-1)^2-4} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-1}{z}\right)^2}\\ &= -\frac{1}{4}\cdot\left(1 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{2}\right) - \left(\frac{z-1}{2}\right)^6 + \dots\right)\end{aligned}$$

$$|z-1| < 2 : \quad \frac{1}{z^2-2z-3} = -\frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2}{4} - \frac{\left(\frac{z-1}{z}\right)}{4}$$

Θ.

Έστω $R_2 < R_1$, $\begin{array}{l} C_1 = \{z : |z - z_0| = R_1\} \\ C_2 = \{z : |z - z_0| = R_2\}\end{array}$

$$\begin{aligned}A_{R_2,R_1}(z_0) &= \{z :\ R_1 < |z - z_0| < R_2\} &&\text{δακτύλιος χωρίς σύνορο}\\ \bar{A}_{R_2,R_1}(z_0) &= \{z :\ R_1 \le |z - z_0| \le R_2\} &&\text{δακτύλιος με σύνορο}\end{aligned}$$

Έστω $f(z)$ αναλυτική στο $\bar{A}_{R_2,R_1}(z_0)$. Τότε $\forall z \in A_{R_1,R_2}(z_0)$ ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_0(z - z_0)^n$$

Αυτή λέγεται σειρά Laurent (Λοράντ) της $f(z)$ γύρω από το z_0.

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

(η C εντός του $A_{R_2,R_1}(z_0)$)

ΠΑΡ. Βρείτε την σειρά Laurent της $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ γύρω από το $z_0 = 0$.

Λύση

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin z}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\cdot \sin z \\
&= \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) \\
\forall z : 0 < |z| < \infty : \quad \frac{\sin z}{z^2} &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z}{5!} - \dots
\end{aligned}
$$

Το $z_0 = 0$ είναι **πόλος** πρώτης τάξης.

ΠΑΡ $\frac{\sin z}{z}$

$$0 < |z| < \infty : \quad \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Το $z_0 = 0$ είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο.

ΠΑΡ Να βρεθεί η σειρά Laurent της $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}$ γύρω από το $z_0 = -1$

Λύση

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{2z}}{(z+1)^2} &= \frac{e^{-2}}{(z+1)^2}\cdot e^{2(z+1)} \\
&= e^{-2}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}\cdot\left(1 + 2(z+1) + \frac{4\cdot(z+1)^2}{2!} + \frac{8\cdot(z+1)^3}{3!} + \dots\right) \\
0 < |z+1| < \infty : \quad \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} &= \frac{e^{-2}}{(z+1)^2} + \frac{2e^{-2}}{z+1} + 2e^{-2} + \frac{4e^{-2}}{3}\cdot(z+1) + \dots
\end{aligned}
$$

Παρατηρώ ότι $z_0 = -1$ είναι πόλος 2ης τάξης

$$\oint \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}\,\mathrm{d}z = \cancelto{0}{\oint_C \frac{e^{-2}}{(z+1)^2}}\,\mathrm{d}z + \cancelto{2e^{-2}2\pi i}{\oint_C \frac{2e^{-2}}{z+1}\,\mathrm{d}z} + \cancelto{0}{\oint_C \frac{4e^{-2}}{3}(z+1)\,\mathrm{d}z} + \dots$$

$$\boxed{\oint \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} = 2e^{-2}2\pi i}$$

Ορισμός

Έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.
Έστω n_1 ο ελάχιστος n τ.ώ. $a_n \neq 0$.
(αν δεν υπάρχει το ελάχιστο, θέτω $n_1 = -\infty$)

α. Αν $-n_1 = 0$, τότε το z_0 είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο (πόλος μηδενικής τάξης)

β. Αν $\infty > -n_1 > 0$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $-n_1$

γ. Αν $n_1 = -\infty$, τότε το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο (πόλος ∞ τάξης)

Η $f(z) = e^{1/z}$ έχει το $z_0 = 0$ πόλο άπειρης τάξης.

3.1 Δέκα Σειρές Laurent

1. $f(z) = (z-2)\sin(z-1)$ γύρω από το $z_0 = 1$

Λύση

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (z-1)\sin(z-1) - \sin(z-1) \\
&= (z-1)^2 - \frac{(z-1)^4}{3!} + \frac{(z-1)^6}{5!} - \dots - \left(z - 1 - \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^5}{5!} - \dots\right) \\
&= -(z-1) + (z-1)^2 + \frac{(z-1)^3}{3!} - \frac{(z-1)^4}{3!} + \dots
\end{aligned}
$$

Ισχύει $\forall z \in \mathbb{C}$

2. $f(z) = \frac{1}{z^2+3z+2}, \quad z_0 = -2$

Λύση

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z}{(z+1)(z+2)} = -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} \\
g_2(z) &= \frac{1}{z+2} \\
g_1(z) &= -\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{z+2-1} = \frac{1}{1-(z+2)} = 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots \qquad 0 < |z+2| < 1 \\
f(z) &= g_2(z) + g_1(z) \\
&= \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots
\end{aligned}
$$

Σε δυνάμεις της $(z+2)$ αλλά μακριά από το $z_0 = -2$ (δηλ. $|z+2| > 1$)

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{2}{z+2} + \frac{1}{1-(z+2)} \\
\frac{1}{1-(z+2)} &= -\frac{1}{z+2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{z+2} + 1} \\
&= -\frac{1}{z+2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z+2}} = -\frac{1}{z+2}\left(1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \dots\right) \\
f(z) &= \frac{1}{z+2} - \frac{1}{(z+2)^2} - \frac{1}{(z+2)^3} - \dots
\end{aligned}
$$

Το $z_0 = -2$ είναι πόλος 1ης τάξης.

3. Η ίδια σειρά, γύρω και κοντά στο $z_0 = -1$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} \\
g_2(z) &= \frac{2}{z+2} = \frac{2}{1+(z+1)} = 2 \cdot \big(1 - (z+1) + (z+1)^2 - (z+1)^3 + \dots\big) \\
f(z) &= -\frac{1}{z+1} + 2 - 2 \cdot (z-1) + 2(z+1)^2 - 2(z+1)^3 + \dots
\end{aligned}
$$

$$\boxed{-\frac{1}{z+1}+2-2\cdot(z-1)+2(z+1)^2-2(z+1)^3+\cdots=\frac{z}{z^2+3z+2}}\ \boxed{0<|z+1|<1}$$

$$\boxed{\frac{2}{z+2}+1+(z+2)+(z+2)^2+\cdots=\frac{z}{z^2+3z+2}}\ \boxed{0<|z+2|<1}$$

Θα επιβεβαιώσω ότι οι δύο αυτές σειρές είναι ίσες μεταξύ τους και με την τιμή της συνάρτησης.

$$\begin{aligned}
f\left(-3/2\right) &= \frac{-3/2}{9/4-3/2+3/4} &&= 6\\
f_1\left(-3/2\right) &= 2+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots &&= 6\\
f_2\left(-3/2\right) &= 4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots &&= 6
\end{aligned}$$

4. $f(z)=\frac{1}{z^2\cdot(z-1)^2}$ γύρω από το $z_0=0$

Λύση

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{z^2}\\
f_2(z) &= \frac{1}{(z-1)^2}\\
\frac{1}{1-z} &= 1+z+z^2+\ldots\\
\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{(1-z)^2} &= \left(\frac{1}{1-z}\right)'=(1+z+z^2+z^3+\ldots)'=0+1+2z+3z^2+\ldots\\
f_2(z) &= 1+2z+3z^2+\ldots\\
f(z)=f_1f_2 &= \frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}+3+4z+5z^2+\ldots
\end{aligned}$$

5. $f(z)=\frac{1}{z^2\cdot(z-1)^2},\quad z_0=1$

$$\begin{aligned}
f_2(z) &= \frac{1}{(z-1)^2}\\
f_1(z) &= \frac{1}{z^2}=\frac{1}{\big(1+(z-1)\big)^2}\\
\frac{1}{(1+u)^2} &= 1-2u+3u^2-\ldots\\
\frac{1}{z^2} &= 1-2(z-1)+3(z-1)+\ldots\\
f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2}-\frac{2}{(z-1)}+3-4(z-1)+\ldots
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1+u)^2}=\frac{1}{1+2u+u^2}$$

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1+2u+u^3+\dots \\ \hline
1+2u+u^2 & 1-2u+3u^2+\dots \\
-2u-u^2 & \\
-2u-4u^2-2u^3 & \\
3u^2+2u^3 &
\end{array}
$$

Ομοίως, τη σειρά της $\frac{1}{z^2+3z+2}$ γύρω από το $z_0 = -1$ μπορώ να την βρω αντικαθιστώντας:

$$\frac{1}{z^2+3z+2} = \frac{1}{(z+1)^2+(z-1)} = \frac{1}{u^2+u}$$

$$
\begin{array}{l|l}
1 & u+u^2 \\ \hline
1+u & \frac{1}{u}-1+\dots \\
-u &
\end{array}
$$

6. $f(z) = \frac{1}{z\cdot(z-1)}$ γύρω από το $z_0 = 0$

Λύση

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z}\cdot(1+z+z^2+\dots) \\
&= -\frac{1}{z}-1-z-\dots
\end{aligned}
$$

για $0 < |z| < 1$

7. $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ γύρω από το $z_0 = 0$ για $|z| > 1$

Λύση $f(z) = f_1(z)f_2(z)$

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{z} \\
f_2(z) &= \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right) \\
f(z) &= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\dots
\end{aligned}
$$

8. $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$, να βρεθούν όλες οι δυνατές σειρές Laurent γύρω από το $z_0 = 0$.

Λύση Τα ΑΣ (ανώμαλα σημεία) είναι $z_1 = 1$ και $z_2 = -2$. Οπότε

Αυτή είναι η άσκηση που θα πέσει στις εξετάσεις αν δεν έχει κέφι ο Κεχαγιάς.

1η σειρά: $|z| < 1$

2η σειρά: $1 < |z| < 2$

3η σειρά: $2 < |z|$

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{f_1(z)} + \underbrace{\frac{1}{z+2}}_{f_2(z)} = f_1(z) + f_2(z)$$

1η σειρά $|z| < 1$

$$f_1(z) = -(1 + z + z^2 + \dots)$$
$$f_2(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots\right)}_{\left|\frac{z}{2}\right|<1}$$

άρα για $\forall z : |z| < 1$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{5z}{4} - \frac{7z^2}{8} - \dots$$

2η σειρά $1 < |z| < 2$ με $u = {}^1\!/_z$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{\frac{1}{u} - 1} = \frac{u}{1-u} \\ &= u(1 + u + u^2) + \dots \\ &= u + u^2 + u^3 + \dots \\ f_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \\ f_2(z) &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} \end{aligned}$$

Τελικά:

$$f(z) = \dots - {}^1\!/_{z^2} - {}^1\!/_2 - {}^z\!/_4 + {}^{z^2}\!/_8 + \dots$$

3η σειρά $2 < |z|$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \\ f_2(z) &= \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} \\ &= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \dots\right) \\ f_2(z) &= \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} - \dots \\ f(z) &= f_1 + f_2 = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 4 Αρμονικές συναρτήσεις

Θ.

Αν η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε

$$\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) &= -v_x(x_0,y_0) \end{aligned} \quad \left(\text{Cauchy-Riemann}\right)$$

Παρ. $f(z) = z^3 = (x+iy)^3$

$$= x^3 + 3x^2 iy + 3xi^2y^2 + (iy)^3$$
$$= (x^3 - 3xy^2) + i \cdot (3x^2y - y^3)$$

<u>Δηλ.</u> $u = x^3 - 3xy^2 \qquad u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y$
$v = 3x^2y - y^3 \qquad u_y = -6xy = -v_x$

Ορισμός

Λέμε την $u(x,y)$ **αρμονική** στο χωρίο D ανν $\forall (x,y) \in D$:

(α) Οι u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} είναι συνεχείς

(β) Ισχύει η εξίσωση του Laplace

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$

Θ.

Αν η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι **αναλυτική στο $\mathbf{D}$**, τότε οι $u(x,y),\ v(x,y)$ είναι αρμονικές στο D

Απόδ. Αφού η $f(z)$ είναι αναλυτική ισχύουν

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ v_x &= -u_y \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} u_{xx} &= v_{yx} \\ v_{xy} &= u_{yx} \end{aligned}\right\} \implies$$
$$u_{xx} = -u_{yy} \implies u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Ομοίως δείχνεται $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Παρ. $f(z) = z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$
Θα δείξω ότι οι u, v αρμονικές

Λύση

$$u_{xx} = (u_x)_x = (3x^2 - 3y^2)_x = 6x$$
$$u_{yy} = (u_y)_y = (-6yy) = -6x$$
$$u_{xx} + u_{yy} = 6x - 6x = 0 \quad \text{άρα η } u \text{ αρμ.}$$
$$v_{xx} = (v_x)_x = (6xy)_x = 6y$$
$$v_{yy} = (v_y)_y = (3x^2 - 3y^2)_y = -6y$$
$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{άρα η } v \text{ αρμ.}$$

Ορισμός

Αν η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι αναλυτική, λέμε ότι οι u, v είναι **συζυγείς αρμονικές**

Παρ. Να βρεθεί η <u>συζυγής αρμονική</u> της $u = x^2 - y^2$

Λύση Από την εκφώνηση υποτίθεται ότι υπάρχει αναλυτική $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, με $u(x,y) = x^2 - y^2$. Τότε:

$$\begin{aligned}
&u_x = 2x = v_y \implies v(x,y) = \int 2x \,\mathrm{d}y = 2xy + c(x) \\
&\implies v_x = 2y + \tfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = -u_y = 2y \implies \tfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0 \\
&\implies c \text{ σταθ.}
\end{aligned}$$

Τελικά $v(x,y) = 2xy + c,\ f(z) = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i\underbrace{2xy}_{v} + \tilde{c} = (x+iy)^2 + \tilde{c} = \boxed{z^2 + \tilde{c} = f(z)}$

Παρ. Να βρεθεί η συζυγής αρμονική της $u = e^x \cos y$

Λύση Με το μάτι $f(z) = e^z,\ v(x,y) = e^x \sin y$

Αλλιώς $u = e^x \cos y,\ u_x = e^x \cos y = v_y \implies v = e^x \sin y + c \implies v_x = e^x \sin y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -u_y \implies \cdots \implies v = e^x \sin y + c$

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^x \cos y + ie^x \sin y + \tilde{c} \\
&= e^x(\cos y + i \sin y) + \tilde{c} \\
&= e^x = e^x e^{iy} + \tilde{c} = e^z + \tilde{c} = f(z)
\end{aligned}$$

4.0.1 Τι σημαίνει/σε τι χρησιμεύει/τι είναι η εξίσωση του Laplace;

Η λύση της Εξ. Laplace περιγράφει προβλήματα όπως

(1) μετάδοση θερμότητας σε σταθερή κατάσταση

(2) ροή ρευστών

(3) πυκνότητα ηλ. φορτίου

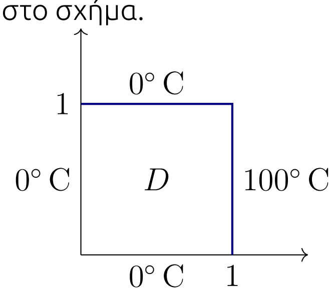
(4) δυναμικό μέσα σε έναν αγωγό

Η εξ. Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ είναι διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Αν αυτή ισχύει σε κάποιο χωρίο D και την εφοδιάσω με **οριακές συνθήκες** (τιμές της $u(x,y)$ στο ∂D - σύνορο του D), τότε έχω μοναδική λύση στο πρόβλημα Dirichlet:

(1) $\forall (x,y) \in D : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(2) $\forall (x,y) \in \partial D : u(x,y) = F(x,y)$

Παρ. Ένα μεταλλικό τετράγωνο έλασμα D έχει σταθερές θερμοκρασίες στα άκρα του, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η θερμοκρασία του ελάσματος δίνεται από τη λύση του:

(1) $\forall (x,y) : \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{array} : u_{xx} + u_{yy} = 0$

(2) $\forall (x,y) : \begin{array}{l} u(x,0) = 0 \\ u(x,1) = 0 \\ u(0,y) = 0 \\ u(1,y) = 100 \end{array}$

Τι σχέση έχουν όλα αυτά με

(1) Μιγαδικές συναρτήσεις;

(2) Λογισμό ΙΙ;

Τι ασκήσεις μπαίνουν στις εξετάσεις;
Τι σημαίνει η εξ. Laplace;

Διακριτοποίηση εξίσωσης Laplace

$$\begin{aligned}
&\forall (x,y) \in D : u_{xx} + u_{yy} = 0 \\
&\forall (x,y) \in \partial D : u(x,y) = \underbrace{F(x,y)}_{\text{δεδομένη συνάρτηση}} \\
&u_x(m\delta, n\delta) \simeq \frac{u\big((m+1)\delta, n\delta\big) - u(m\delta, n\delta)}{\delta} \\
&u_x\big((m-1)\delta, n\delta\big) \simeq \frac{u(m\delta, n\delta) - u\big((m-1)\delta, n\delta\big)}{\delta} \\
&u_{xx}(m\delta, n\delta) \simeq \frac{u_x(m\delta, n\delta) - u_x\big((m-1)\delta, n\delta\big)}{\delta} \\
&u_{xx} \simeq \frac{u\big((m+1)\delta, n\delta\big) - 2u(m\delta, n\delta) - u\big((m-1)\delta, n\delta\big)}{\delta^2} \\
&u_{yy} \simeq \frac{u\big(m\delta, (n+1)\delta\big) - 2u(m\delta, n\delta) - u\big(m\delta, (n-1)\delta\big)}{\delta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = u_{xx} + u_{yy} &= \frac{-4u(m\delta, n\delta) + u\big((m+1)\delta, n\delta\big) + u\big(m\delta, (n+1)\delta\big) + u\big((m-1)\delta, n\delta\big) + u\big(m\delta, (n-}{\delta^2} \\
\implies u(m\delta, n\delta) &= \frac{u\big((m+1)\delta, n\delta\big) + u\big((m-1)\delta, n\delta\big) + u\big(m\delta, (n+1)\delta\big) + u\big(m\delta, (n-1)\delta\big)}{4}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η εξίσωση Laplace δηλώνει ότι η τιμή σε κάθε σημείο είναι ο μέσος όρος της τιμής των 4 γειτονικών σημείων.

Παρ. Στο προηγούμενο πρόβλημα:

$$\begin{aligned}
u\left(1/2, 1/2\right) &= \frac{1}{4}\Big(u\left(1/2, 0\right) + u\left(1/2, 1\right) + u\left(0, 1/2\right) + u\left(1, 1/2\right)\Big) \\
\implies u\left(1/2, 1/2\right) &= \frac{1}{4}(0 + 0 + 0 + 100) \\
&= 25
\end{aligned}$$

Τότε θα μπορούσαμε να βρούμε τη λύση λύνοντας ένα σύστημα 9x9, ή με υπολογιστική προσέγγιση.

$$\forall (x,y) \in D : u_{xx} + u_{yy} = 0$$
$$\forall (x,y) \in \partial D : u(x,y) = \underbrace{F(x,y)}_{\text{δεδομένη συνάρτηση}}$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$
$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} \mathrm{Re}\left(\frac{u(x,y) + iv(x,y)}{x - x_0 + i(y - y_0)}\,\mathrm{d}(x+iy)\right)$$
$$v(x_0, y_0) = \cdots$$

Από θεώρημα του Gauss/Μέσης Τιμής:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta}$$
$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

, δηλαδή σε κάθε σημείο η τιμή είναι ο μέσος όρος των γειτόνων.

Αυτά που μπαίνουν στις εξετάσεις είναι: Να βρεθεί η συζυγής αρμονική, και να λυθεί η εξίσωση Laplace, κάτι που θα μάθουμε τις επόμενες Παρασκευές.

4.1 Αρμονικές στην εξίσωση Laplace

Παρ. Δίνεται το χωρίο $D = \{z : a < \mathrm{Re}(z) < b\}$

Να βρεθεί $u(x,y)$ τ.ώ
$$\begin{aligned} &\forall (x,y) \in D &&: u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ &\forall y &&: u(a,y) = u_1 \\ &\forall y &&: u(b,y) = u_2 \end{aligned}$$

Λύση Λόγω συμμετρίας υποθέτω ότι $u(x,y) = u(x)$ οπότε $0 = u_{xx} + u_{yy} = u_{xx} \implies u_x = k \implies u = kx + \lambda$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες:

$$\left.\begin{aligned} u_1 = u(a) = ka + \lambda \\ u_1 = u(b) = kb + \lambda \end{aligned}\right| \implies \boxed{u(x,y) = \frac{u_1 - u_2}{a - b} x + \underset{u_1}{?}}$$

$$u = kx + \lambda$$
$$v = 0$$
$$u_y = -v_x \implies 0 = -v_x \implies v = c(y)$$
$$\implies v_y = \tfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}y} = u_x = k \implies v(y) = ky + c'$$
$$\implies f(x,y) = u + iv = kx + \lambda + i(ky + c')$$
$$\implies f(z) = kz + c''$$

Παρ.

$$\begin{aligned}
&\hat{u}(,\rho,\theta) = u(\theta)\\
&D = \big\{(\rho,\theta) : \theta_1 < \theta < \theta_2\big\}\\
&D = \big\{z : \theta_1 < \mathrm{Arg}\,(z) < \theta_2\big\}\\
&u(z) = u_1 \text{ όταν } \mathrm{Arg}\,(z) = \theta_1\\
&u(z) = u_2 \text{ όταν } \mathrm{Arg}\,(z) = \theta_2
\end{aligned}$$

Παρατηρώ ότι $\mathrm{Arg}\,(z) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{Log}(z)\big)$
Άρα με $f(z) = \mathrm{Log}(z)$, η $\mathrm{Arg}\,(z)$ είναι αρμονική όπως και η $u(z) = k \cdot \mathrm{Arg}\,(z) + \lambda$, ισοδύναμα
$\boxed{u(x,y) = k \cdot \arctan(y,x) + \lambda}$
Σημείωση: $\arctan(y,x) = \mathrm{Arg}\,(x+iy)$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{u_1 - u_2}{\theta_1 - \theta_2}\arctan(y,x) + \lambda}$$

Παρ. $u(x,y) = g(r)$
Παρατηρώ ότι $f(z) = \underbrace{\mathrm{Log}(z)}_{\text{αναλυτική}} = \underbrace{\ln r}_{\text{αρμονική}} + i\mathrm{Arg}\,(z)$
Άρα υποθέτω λύση της μορφής:

$$\begin{aligned}
&u(x,y) = k\ln r + \lambda \implies \ldots\\
&u(x,y) = \frac{u_1 - u_2}{R_1 - R_2}\ln(r) + c
\end{aligned}$$

Παρ.

$$\begin{aligned}
&u(x,y) = \frac{u_2 - u_1}{\theta_2 - \theta_1}\arctan(y,x) + u_1 = \boxed{\frac{1}{\pi}\arctan(y,x) = u(x,y)}\\
&x < 0 : u(x,0) = \frac{1}{\pi}\arctan(0,x) = \frac{\pi}{\pi} = 1\\
&x > 0 : u(x,0) = \frac{1}{\pi}\arctan(0,x) = \frac{0}{\pi} = 0
\end{aligned}$$

Παρ. $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\arctan(y, x - x_0)$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_0 & x < x_1\\ u_1 & x_1 < x < x_2\\ u_2 & x_2 < x < x_3\\ \vdots & \vdots\\ u_n & x_N < x \end{cases}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}(u_n - u_{n-1})\arctan(y, x_n - x) + u_0$$