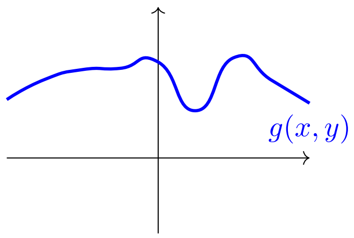
```
\draw[->] (0,-1) -- (0,2);
\draw[->] (-2,0) -- (2,0);

\draw [blue, very thick]
plot [smooth, tension=1, domain=-2:2, samples=9] (\x,{1+rand/2}) node[below];
```

Την Τρίτη μάθημα 8:30 χωρίς διάλειμμα
Σήμα - σύστημα

$\boxed{\underbrace{g}_{\text{εξαρτημένη}} = f(\underbrace{t}_{\text{ανεξάρτητη}})}$ $\qquad g = f(\vec{r}, t) \qquad \vec{E}(\vec{r}, t)$

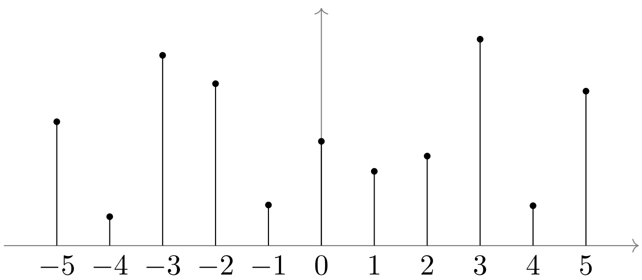
Αναλογικό

Αν t συνεχής $\in \mathbb{R}$
και y συνεχής $\in \mathbb{R}$



Διακριτού χρόνου / Διακριτό (discrete)

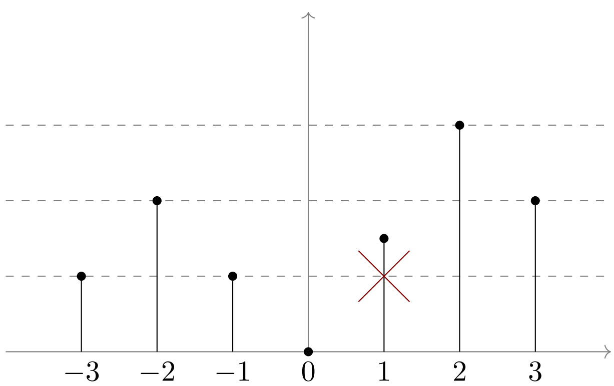
t διακριτό $\rightarrow \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}$
g συνεχής $\in \mathbb{R}$



7^{o} εξάμηνο

Κβαντισμένο

$n \in \mathbb{Z}$
g διακριτή



Στοχαστικό Περιέχει και τις τρεις κατηγορίες

Σύστημα

$$\xrightarrow[\text{input signal}]{x(t)} \boxed{\text{system}} \xrightarrow[\text{output signal}]{y(t)}$$

Περιοδικά σήματα

Αν $\exists T \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = x(t+T)$ τότε $x(t)$ **περιοδικό σήμα** με περίοδο T.
Ή θα είναι 0, ή θα συνεχιστεί για πάντα.

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t)\,\mathrm{d}t \; \forall t$$

Η σύνθεση μιας συνάρτησης με μια περιοδική συνάρτηση είναι περιοδική;

Απόδ. Έστω g μία περιοδική συνάρτηση:

$$\begin{aligned}\big(f \circ g\big)(x) &= f\left(g(x)\right) = f\left(g(x+T)\right) = \\ &= \big(f \circ g\big)(x+T)\end{aligned}$$

Συμμετρίες

- Αν $x(t) = x(-t)\ \forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **άρτια συνάρτηση** (even function).
- Αν $x(t) = -x(t)\ \forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **περιττή συνάρτηση** (odd function).

$$\forall x(t) \quad \exists\, x_0(t), x_e(t) : x(t) = x_e(t) + x_0(t)$$

Απόδ.

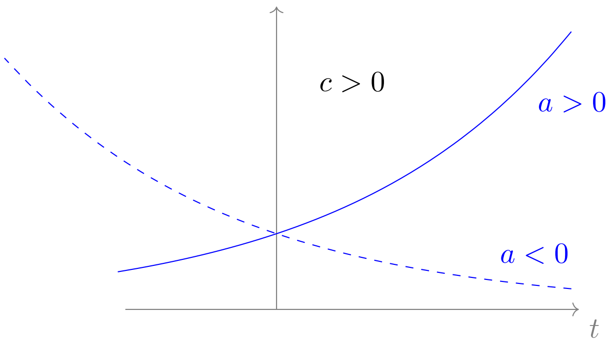
$$\begin{aligned} x_e(t) &= \frac{x(t) + x(-t)}{2} \\ x_o(t) &= \frac{x(t) - x(-t)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\underbrace{{}_e}_{\text{άρτια}} y_e &= z_e \\ x_o y_o &= z_e \\ x_e y_0 &= z_0 \\ \int_{-A}^{A} x_0(t)\,\mathrm{d}t &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t)\,\mathrm{d}t &= ?\ \text{(εξαρτάται)} \\ \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} x_0(t)\,\mathrm{d}t &= 0 \quad \text{(principal Cauchy value)} \end{aligned}$$

Χαρακτηριστικά σήματα

1) **Εκθετικό σήμα**

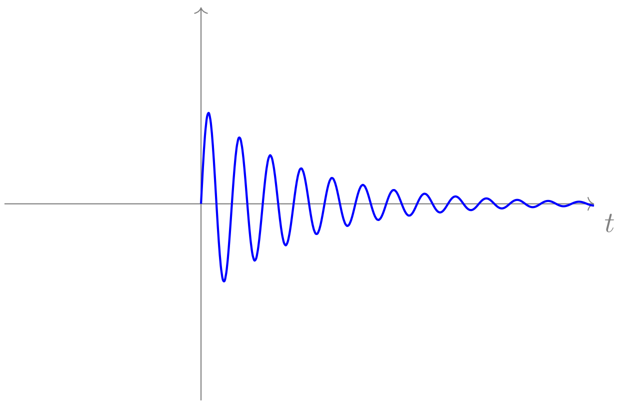
$$x(t) = ce^{at} \quad a \in \mathbb{R} \quad c > 0$$



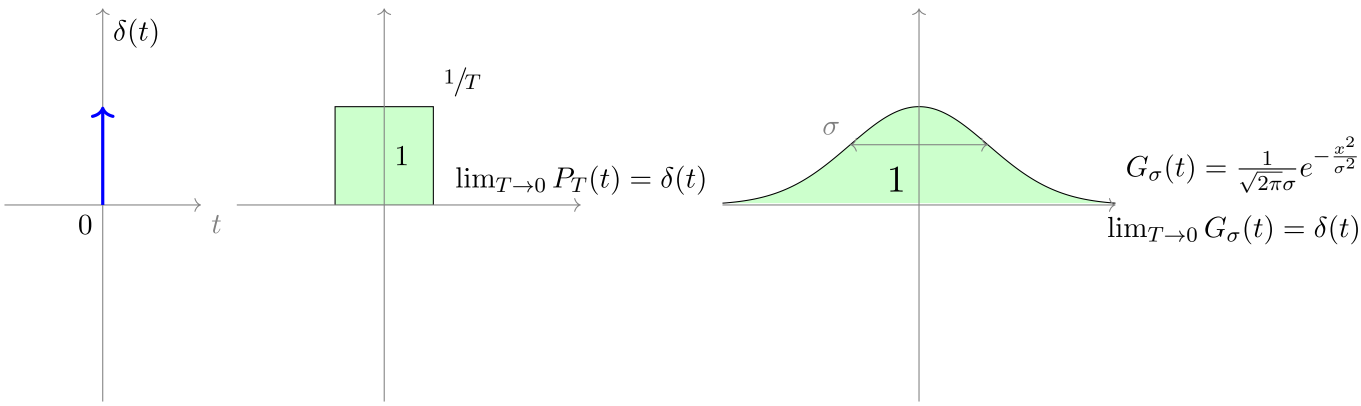
$$x(t) = ce^{(\sigma t + j\omega)t} = ce^{\sigma t}e^{j\omega t} = ce^{\sigma t}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right]$$

2) **(Συν)ημιτονοειδή σήματα**

$$x(t) = A\cos(\omega t \pm \phi) = a\mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega t+\phi)}\right\} = A\frac{e^{j(\omega t \pm \phi)} + e^{-j(\omega t \pm \phi)}}{2}$$



3) **Δέλτα Dirac $\delta(t)$**



Ορ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)\ \forall f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = f(\tau)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)$$

Ιδιότητες της $\boldsymbol{\delta(t)}$

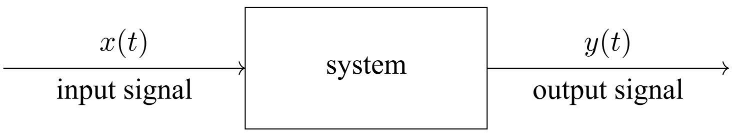
1. **Κλιμάκωση**

$$a \in \mathbb{R} : \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

Απόδ.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\boxed{\delta(at)}\,\mathrm{d}t}_{\substack{at=\xi \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\xi}{a}}} = \int_{-\infty_{(a)}}^{\infty_{(a)}} \phi\left(\frac{\xi}{a}\right)\delta(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{a} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi\left(\frac{\xi}{a}\right)}{|a|}\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{\phi(0)}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\boxed{\frac{\delta(t)}{|a|}}\mathrm{d}t$$

2. $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$
3. $f(t)\delta(t-\xi) = f(g)\delta(t-\xi)$



$y(t) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$
$\forall x_1(t)\; x_n(t)$
$y_1(t) = \mathscr{L}\left\{x_1(t)\right\}$
$y_2(t) = \mathscr{L}\left\{x_2(t)\right\}$

Για const $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$$
$$y(t) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$$

ανν

$$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

τότε

$$\mathscr{L}: \text{ γραμμικό σύστημα}$$

- $g(t) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$
  $x'(t) = x(t-\tau)$
  ανν $y'(t) = \mathscr{L}\left\{x'(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{x(t-\tau)^2\right\} = y(t-\tau)$
  τότε το σύστημα $\mathscr{L}$ είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.

Υποστηρίζω ότι ένα γραμμικό & ΑΚΜ σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική απόκριση $h(t)$.

Απόδ. Από παραπάνω, γνωρίζουμε ότι $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \\
&\overset{\text{linearity}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{L}\left\{x(\tau)\delta(t-\tau)\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathscr{L}\left\{\delta(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\
&\underset{TSI}{\overset{\text{AKM}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\underbrace{h(t-\tau)}_{\text{linear time-shift invariant}}\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

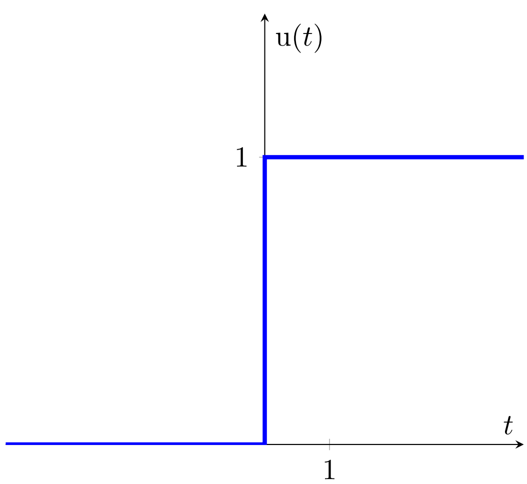
- $\delta(t) = \delta(-t)$ άρτια συνάρτηση
- $\delta^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t)$, για την οποία αποδεικνύεται ότι:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\,\phi^{(n)}(t)\Big|_{t=0}
$$

Βηματική Συνάρτηση (Unit Step Function)

$$
\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}
$$

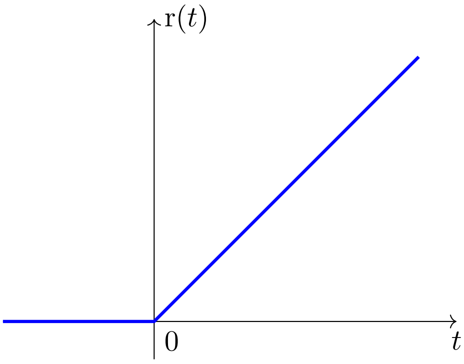
$$
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{N}_{\mathrm{u}}\left\{\phi(t)\right\} = \int_{0}^{\infty} \underbrace{\phi(t)}_{\text{number}}\mathrm{d}t
$$



$$\begin{aligned}\delta(t) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{u}(t)\\ \mathrm{u}(t) &= \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{\infty}\delta(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

Ράμπα

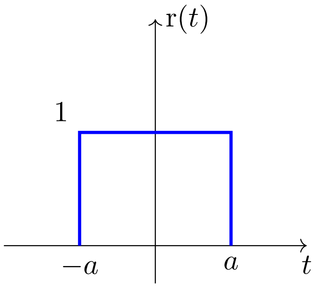
$$\mathrm{r}(t) = \int_{-\infty}^{t}\mathrm{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = t\mathrm{u}(t)$$

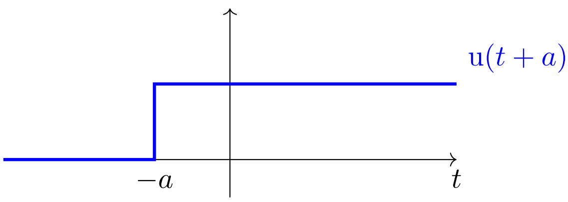


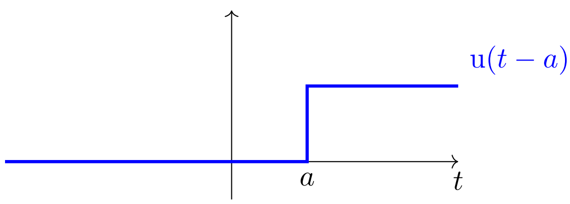
$$\mathrm{u}(t) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{r}(t)$$

Ορθογωνικός παλμός (Rectangular Pulse function)

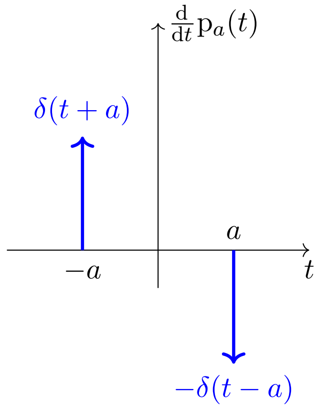
$$\mathrm{p}_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$





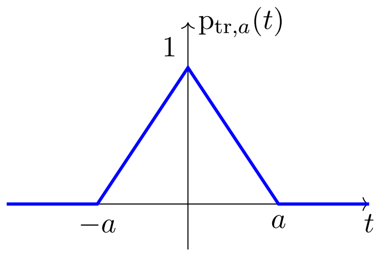


$$\begin{aligned}\mathrm{p}_a(t) &= \mathrm{u}(t+a) - \mathrm{u}(t-a)\\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{p}_a(t) &= \delta(t+a) - \delta(t-a)\end{aligned}$$



Τριγωνικός Παλμός (Triangular Pulse function)

$$\mathrm{p}_{\mathrm{tr},a} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$



$$p_{\mathrm{tr},a}(t) = \frac{1}{a}\left[\mathrm{r}(t+a) + \mathrm{r}(t-a) - 2\mathrm{r}(t)\right]$$

Χαρακτηριστικά Μεγέθη

1) **Μέση τιμή (Mean Value)**

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\mathrm{d}t$$

Αν περιοδική τότε

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{1}{T} = \int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

2) **Ενεργός τιμή (Root Mean Square Value)**

$$\overline{\overline{x(t)}} = \left[\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t\right]^{1/2}$$

Αν ημιτονοειδές σήμα $\bar{\bar{x}}(t) = \frac{x_{\max}}{\sqrt{2}}$

3) **Ενέργεια - Ισχύς**

- Στιγμιαία ισχύς (Instant power)

$$p(t) = x^2(t)$$

- Μέση ισχύς (Mean power)

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \left(\overline{\overline{x(t)}}\right)^2$$

- Ενέργεια (Energy)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t = (t_2 - t_1)\left(\overline{\overline{x(t)}}\right)^2$$

Σήματα $\begin{cases} \textbf{Σήμα ενέργειας} \text{ αν } \lim\limits_{T\to\infty} W < \infty \\ \\ \textbf{Σήμα ισχύος} \text{ αν } \lim\limits_{T\to\infty} \overline{p(t)} > 0 \\ \text{Υπάρχουν και σήματα που δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος.} \end{cases}$