Σημειώσεις Διαφορικές Εξισώσεις

Καναβούρας Κωνσταντίνος
http://users.auth.gr/konkanant

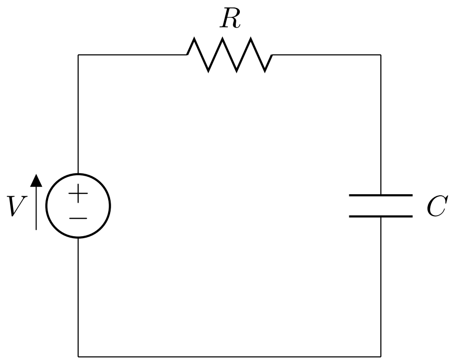
2016, Εαρινό εξάμηνο

Μέρος I

Κεχαγιάς: Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

(Fourier, Laplace) Τετάρτη 17:00-18:30

Κεφάλαιο 1 Κεφάλαιο 7: Εισαγωγή στην ανάλυση του Φουριερ



Η συμπεριφορά του κυκλώματος μπορεί να περιγραφεί με μια διαφορική εξίσωση.
$Q(t)$: Το φορτίο του πυκνωτή σε χρονική στιγμή t

$$v_1 = R \cdot i(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$
$$v_2 = \frac{Q(t)}{C}$$
$$\boxed{v_1 + v_2 = V(t) \implies \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q(t)}{RC} = \frac{1}{R}V(t), \quad \text{με αρχική συνθήκη } Q(0) = 0}$$

Θα προσπαθήσω να λύσω την εξίσωση για τρεις περιπτώσεις:

1. $V(t) = V_0$
2. $V(t) = V_0 \cdot \sin(nt)$
3. $V(t)$ square wave

1.0.1 $V(t) = V_0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b$$

Θα εξετάσω τη γενική λύση $x_0(t)$ της ομογενούς ΔΕ, και
θα ψάξω μία ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ.

Ομογενής: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -ax \implies x(t) = ce^{-at}$.
$x(0) = 0 \implies c = 0 \implies x_0(t) = 0$.

Μη ομογενής: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b$.

$$x(t) = k \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ak = b \implies k = \frac{b}{a} \implies x(t) = k = \frac{b}{a}$$

Θεώρημα

Η γενική λύση της μη ομογενούς είναι:

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t)$$

Άρα

$$\begin{cases} x(t) = ce^{-at} - \frac{b}{a} \\ x(0) = 0 \end{cases} \implies 0 = x(0) = c + \frac{b}{a} \implies x(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \text{ ή και } x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

$$a = \frac{1}{RC}, \quad b = \frac{V_0}{R}$$

1.0.2 $V(t) = V_0 \sin(nt)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = b\sin(nt)$$

Είναι $x_h(t) = ce^{-at}$.
Υποθέτω $x(t) = c_2 \sin(nt) + c_3 \cos(nt)$. Τότε $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = nc_2 \cos(nt) - nc_3 \sin(nt)$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = (ac_2 - nc_3)\sin(nt) + (ac_3 + nc_2)\cos(nt) = b\sin(nt) \implies$$

$$\implies \begin{cases} ac_2 - nc_3 & = b \\ nc_2 + ac_3 & = 0 \end{cases} \implies \cdots \implies \begin{cases} c_2 & = \frac{ab}{a^2+n^2} \\ c_3 & = -\frac{bn}{a^2+n^2} \end{cases}$$

Θυμάμαι ότι $x(t) = x_h(t) + x_i(t) = c_1 e^{-at} + \frac{ab}{a^2+n^2}\sin(nt) - \frac{bn}{a^2+n^2}\cos(nt)$ και από το $x(0) = 0$ βρίσκω $c_1 = \frac{bn}{a^2+n^2}$.
Άρα:

$$x(t) = \frac{bn}{a^2+n^2} + \frac{ab}{a^2+n^2}\sin(nt) - \frac{bn}{a^2+n^2}\cos(nt)$$

Για το RC κύκλωμα, $a = \frac{1}{RC} \leftarrow$ χρονική σταθερά κυκλώματος, $b = \frac{V_0}{R}$, άρα:

$$Q(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2R^2n^2+1} e^{\frac{t}{RC}} + \frac{CV_0 \sin(nt) - C^2 R n V_0 \cos(nt)}{C^2R^2n^2+1}$$

$$\begin{aligned} p\cos(\omega t) + q\sin(\omega t) &= \\ \sqrt{p^2+q^2}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos\omega t + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin\omega t\right) &= \\ \sqrt{p^2+q^2}\,(\sin\phi\cos\omega + \cos\phi\sin\omega t) &= \\ \sqrt{p^2+q^2}\sin(\omega t + \phi), \quad \phi = \arctan\frac{p}{q} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής φορτίζει περισσότερο αν είναι μικρότερη η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος.

1.0.3 $V(t) = \mathrm{square}(t)$

$$V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)} \frac{4}{n\pi}\sin(nt) = \frac{4}{\pi}\sin(nt) + \frac{4}{3\pi}\sin(3t) + + \frac{4}{5\pi}\sin(5t)\frac{4}{7\pi}\sin(7t) + \cdots$$

Έτσι γίνεται η ανάλυση Fourier, και αυτό θα το δούμε την επόμενη Τετάρτη, που θα πάμε στο Κεφάλαιο 8, που λέει σειρές Fourier.

$$V_N(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{N} \frac{4}{n\pi}\sin(nt)$$

$$V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\sin(nt) = \lim_{t\to\infty} V_N(t)$$

Άρα:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{V_0 \sin(nt)}{R} \implies Q_n(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2 R^2 n^2 + 1} e^{\frac{t}{RC}} + \frac{C V_0 \sin(nt) - C^2 R n V_0 \cos(nt)}{C^2 R^2 n^2 + 1}$$

Οπότε αν:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{\pi}\frac{\sin(nt)}{R} \implies Q_1(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{C^2 R}{C^2 R^1 + 1} e^{-\frac{1}{RC}} + \cdots\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{3\pi}\frac{\sin(3t)}{R} \implies Q_3(t) = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{3C^2 R}{9C^2 R^1 + 1} e^{-\frac{1}{RC}} + \cdots\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{4}{5\pi}\frac{\sin(5t)}{R} \implies Q_5(t) = \cdots$$

Άρα:

$$Q(t) = \sum_{n \in \{1,3,5,\dots\}} Q_n(t)$$

Γιατί όμως, αν $V_1(t) \to Q_1(t), \quad V_2(t) \to Q_2(t)$, τότε $k_1 V_1 + k_2 V_2 = k_1 Q_1 + k_2 Q_2$ σε αυτό το κύκλωμα· (αρχή επαλληλίας)