

# Σημειώσεις Διαφορικές Εξισώσεις

Καναβούρας Κωνσταντίνος  
<http://users.auth.gr/konkanant>

2016, Εαρινό εξάμηνο

# Μέρος I

## Σεβαστιάδης

Χρήστος Σεβαστιάδης

### Κεφάλαιο 1

#### Ορισμός: Διαφορική εξίσωση

Μια εξίσωση που αποτελείται από μια συνάρτηση και τις παραγώγους της

**Langrange's**  $x', x'', x''', x^{(4)}, \dots$

**Newton's**  $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$

**Leibniz'**  $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}$

π.χ.

$$x(t) \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2 \frac{dx(t)}{dt} = x(t) \sin(t)$$

#### Ορισμός 1.1: Τάξη

**Τάξη** ονομάζεται ο μεγαλύτερος βαθμός παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

#### Ορισμός 1.2: Βαθμός

**Βαθμός** ονομάζεται η μεγαλύτερη δύναμη παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση

### Κεφάλαιο 2 Διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

#### Ορισμός

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

#### 2.1 Χωριζόμενες διαφορικές εξισώσεις

Τυπική μορφή:

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)} = \frac{dx}{dt} \implies \underbrace{N(t, x) dx}_{N(x)} + \underbrace{M(t, x) dt}_{M(t)} = 0$$

Αν δηλαδή τα  $N(t, x)$ ,  $M(t, x)$  εξαρτώνται μόνο από τα  $x$  και  $t$  αντίστοιχα, η εξίσωση ονομάζεται **χωριζόμενη**, και το αποτέλεσμα της μπορεί να βρεθεί με ολοκληρώματα:

$$\int N(x) dx + \int M(t) dt = c$$

**Άσκηση: 2.1**

$$x \, dx - t^2 \, dt = 0$$

$$N(x) = x, \quad M(t) = -t^2$$

$$\int x \, dx + \int (-t^2) \, dt = c \implies$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}t^3 = c \implies$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}t^3 + 2c} \implies$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}t^3 + \kappa}$$

$$\text{με } \kappa = 2c$$

**Άσκηση: 2.2**

$$x' = x^2 t^3$$

$$\implies \frac{dx}{dt} = x^2 t^3$$

$$\implies \frac{1}{x^2} dx - t^3 dt = 0$$

$$\implies \int \frac{1}{x^2} dx + \int (-t^3) dt = c$$

$$\implies -\frac{1}{x} - \frac{t^4}{4} = c$$

$$\implies -\frac{1}{x} = c + \frac{t^4}{4}$$

$$\implies -\frac{4}{x} = 4c + t^4$$

$$\implies x = \frac{-4}{t^4 + \kappa}, \quad \text{με } \kappa = 2c$$

**Άσκηση: 2.3**

$$x' = \frac{t+1}{x^4+1}$$

$$\implies \frac{dx}{dt} = \frac{t+1}{x^4+1}$$

$$\implies (x^4+1) dx + (-t-1) dt = 0$$

$$\implies \int (x^4+1) dx + \int (-t-1) dt = c$$

$$\implies \frac{x^5}{5} + x - \frac{t^2}{2} - t = c$$

Παρατηρούμε ότι, χωρίς αρχική συνθήκη, βρίσκουμε γενικές λύσεις ως αποτέλεσμα. Με τη χρήση μιας αρχικής συνθήκης, μπορούμε να βρούμε και την ειδική λύση της εξίσωσης.

**Άσκηση: 2.4**

$$e^t dt - x dx = 0; \quad x(0) = 1 \leftarrow \text{αρχική συνθήκη}$$

$$\Rightarrow \int x dx + \int (-e^t) dt = c$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - e^t = c$$

$$\Rightarrow x^2 = 2e^t + 2c$$

$$\Rightarrow x^2 = 2e^t + \kappa, \quad \text{με } \kappa = 2c$$

Όμως  $x(0) = 1$ , άρα:

$$\begin{cases} x^2 = 2e^t + \kappa \\ x(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x(0)^2 = 2e^0 + \kappa \Rightarrow \boxed{\kappa = -1}$$

Επομένως τελικά:

$$x^2 = 2e^t - 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2e^t - 1} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{2e^t - 1}}$$

Η αρχική συνθήκη πράγματι επαληθεύει το αποτέλεσμα  $x$ . Πρέπει όμως και  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2e^t - 1 \geq 0$ .

Από τη διαφορική εξίσωση έχουμε  $x' = \frac{e^t}{x}$ , άρα πρέπει  $2e^t - 1 > 0 \Rightarrow \boxed{t > \ln \frac{1}{2}}$ .

$$\int_{x_0}^x N(x) dx + \int_{t_0}^t M(t) dt = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

**Άσκηση: 2.5**

$$x \cos x dx + (1 - 6t^5) dt = 0; \quad t(\pi) = 0$$

$$x_0 = \pi, \quad t_0 = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^x x \cos x dx + \int_0^t (1 - 6t^5) dt = 0$$

$$\Rightarrow x \sin x \Big|_{\pi}^x + \cos x \Big|_{\pi}^x + (t - t^6) \Big|_0^t = 0$$

$$\Rightarrow x \sin x + \cos x + 1 + t - t^6$$

$$\Rightarrow \boxed{x \sin x + \cos x + 1 = t - t^6}$$

**2.2 Ομοιογενείς**

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)}$$

**Ορισμός 2.1**

Αν  $\forall a \in \mathbb{R} : f(at, ax) = f(t, x)$ , λέμε ότι η εξίσωση είναι **ομοιογενής**.

### Θεώρημα

Αν μια εξίσωση είναι ομοιογενής, μπορούμε να την λύσουμε μειώνοντάς/μετατρέποντάς την σε χωριζόμενη, εφαρμόζοντας το μαθηματικό κόλπο που ονομάζεται "αντικατάσταση μεταβλητής", δηλαδή, όπου  $u$  συνάρτηση:

$$x = ut \implies \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$$

### Άσκηση: 2.6

$$x' = \frac{x+t}{t}$$

$\implies \frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{t}$ , μη χωριζόμενη.

$$f(t, x) = \frac{dx}{dt}, \quad f(at, ax) = \frac{ax + at}{at} = \frac{x+t}{t} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω  $x = ut$ ,  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$ , άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u &= \frac{ut+t}{t} \\ \implies \frac{du}{dt}t + u &= u + 1 \\ \implies t \frac{du}{dt} &= 1 \\ \implies \frac{1}{t} dt - du &= 0 \text{ χωριζόμενη} \\ \implies \int \frac{1}{t} dt + \int (-1) du &= c \\ \implies \ln|t| - u &= c \\ \implies u = \ln|t| - c \text{ με } c = -\ln|\kappa| \\ \implies u &= \ln|\kappa t| \\ \implies \frac{x}{t} = \ln|\kappa t| &\implies x = t \ln|\kappa t| \end{aligned}$$

**Άσκηση: 2.7**

$$x' = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3}, \text{ μη χωριζόμενη.}$$

$$f(t, x) = \frac{dx}{dt}, \quad f(at, ax) = \frac{2(ax)^4 + (at)^4}{(at)(ax)^3} = \frac{a^4 2x^4 + a^4 t^4}{a^4 tx^3} = \frac{2x^4 + t^4}{tx^3} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω  $x = ut$ ,  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$ , άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{du}{dt}t + u = \frac{2(ut)^4 + t^4}{t(ut)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt}t + u = \frac{2u^4 t^4 + t^4}{u^3 t^3}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt}t + u = \frac{2u^4 + 1}{u^3}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt}t = \frac{2u^4 + 1}{u^3} - u = \frac{u^4 + 1}{u^3}$$

$$\Rightarrow \frac{u^3}{u^4 + 1} du - \frac{1}{t} dt = 0 \text{ χωριζόμενη}$$

$$\Rightarrow \int \frac{u^3}{u^4 + 1} du + \int \frac{-1}{t} dt = c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \ln(u^4 + 1) - \ln|t| = c$$

$$\Rightarrow \boxed{u^4 + 1 = (\kappa t)^4} \text{ με } c = \ln|x|$$

$$x = ut \Rightarrow u = \frac{x}{t} \Rightarrow \left(\frac{x}{t}\right)^4 + 1 = (\kappa t)^4$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{t^4} + 1 = \kappa^4 t^4$$

$$\Rightarrow \boxed{x^4 = c_1 t^8 - t^4} \text{ με } c_1 = \kappa^4$$

**Άσκηση: 2.8**

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{tx}; x(1) = -2$$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{t^2 + x^2}{tx}$ , μη χωριζόμενη.

$$f(t, x) = \frac{dx}{dt}, \quad f(at, ax) = \frac{(at)^2 + (ax)^2}{(at)(ax)} = \frac{a^2 t^2 + a^2 x^2}{a^2 tx} = \frac{t^2 + x^2}{tx} \text{ ομοιογενής}$$

Θέτω  $x = ut$ ,  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$ , άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u &= \frac{t^2 + (ut)^2}{t(ut)} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t + u &= \frac{t^2 + t^2 u^2}{t^2 u} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t + u &= \frac{1 + u^2}{u} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt}t &= \frac{1 + u^2 - u^2}{u} = \frac{1}{u} \\ \Rightarrow u du - \frac{1}{t} dt &= 0 \text{ χωριζόμενη} \\ \Rightarrow \int u du + \int \frac{-1}{t} dt &= c \\ \Rightarrow \frac{u^2}{2} - \ln|t| &= c \\ \Rightarrow u^2 &= 2 \ln|t| + 2c \\ \Rightarrow \boxed{u^2 = \ln t^2 + \kappa} &\text{ με } \kappa = 2c \\ x = ut \Rightarrow u = \frac{x}{t} \Rightarrow \frac{x^2}{t^2} &= \ln t^2 + \kappa \\ \Rightarrow \boxed{x^2 = t^2 \ln t^2 + \kappa t^2} \end{aligned}$$

Επειδή  $x(1) = -2$ , έχουμε:

$$(-2)^2 = 1^2 \ln 1^2 + \kappa 1^2 \Rightarrow 4 = 0 + \kappa \Rightarrow \boxed{\kappa = 4}$$

Επομένως τελικά:

$$x^2 = t^2 \ln t^2 + 4t^2 \Rightarrow \boxed{x = -\sqrt{t^2 \ln t^2 + 4t^2}}$$

**2.3 Ακριβείς****Ορισμός**

Όταν:

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t}$$

τότε η εξίσωση λέγεται ακριβής ή πλήρης.

Υπάρχει  $dF(t, x) = N(t, x) dx + M(t, x) dt$  με Γενική Λύση  $F(t, x) = c$ .

**Άσκηση: 2.16**

$$(t + \sin x) dt + (t \cos x - 2x) dx = 0$$

$$\underbrace{(t + \sin x) dt}_{M(t,x) dt} + \underbrace{(t \cos x - 2x) dx}_{N(t,x) dx} = 0$$

Δοκιμή:

$$\begin{cases} M(t, x) = t + \sin x \\ N(t, x) = t \cos x - 2x \end{cases} \implies \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \cos x = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = \cos x$$

Άρα η ΔΕ είναι ακριβής, επομένως υπάρχει  $F(t, x)$  τέτοια ώστε:

$$dF = N(t, x) dx + M(t, x) dt$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad \leftarrow \text{ολικό διαφορικό της } F$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = N(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = M(t, x) \xrightarrow{\text{ολοκλήρωση ως προς } t}$$

$$\implies \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt = \int (t + \sin x) dt \implies$$

$$\implies F(t, x) = \frac{1}{2}t^2 + t \sin x + \overbrace{h(x)}^{\text{ολοκληρωτική σταθερά}}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= t \cos x + h'(x) \\ \implies t \cos x - 2x &= t \cos x + h'(x) \\ \implies h'(x) &= -2x \\ \implies \int h'(x) dx &= \int (-2x) dx \\ \implies h(x) &= -x^2 + c_1 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \frac{1}{2}t^2 + t \sin x - x^2 + c_1 = c \xrightarrow{c_2 = c - c_1} \\ \implies \frac{1}{2}t^2 + t \sin x - x^2 &= c_2 \quad \text{Γενική λύση} \end{aligned}$$



Άσκηση: 2.17

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2 + xe^{tx}}{2x - te^{tx}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2 + xe^{tx}}{2x - te^{tx}} \xrightarrow{\text{διαφορική μορφή}} \underbrace{(2 + xe^{tx})}_{M(t,x)=2+xe^{tx}} dt + \underbrace{(te^{tx} - 2x)}_{N(t,x)=te^{tx}-2x} dx = 0$$

Δοκιμή:

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = e^{tx} + xte^{tx} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = xte^{tx} + e^{tx}$$

συνεπώς είναι ακριβής, οπότε υπάρχει  $F(t, x)$ , με  $dF = M(t, x) dt + N(t, x) dx$ , με λύση  $F(t, x) = c$ .

$$\text{Ολικό διαφορικό} \rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= N(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = M(t, x) = 2 + xe^{tx} \xrightarrow{\text{ολοκλήρωση ως προς } t} \\ \Rightarrow \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt &= \int (2 + xe^{tx}) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow F(t, x) &= 2t + e^{tx} + h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Παραγωγή ως προς } x \rightarrow \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} &= te^{tx} + h'(x) \Rightarrow te^{tx} + h'(x) = te^{tx} - 2x \Rightarrow \\ &\Rightarrow h'(x) = -2x \Rightarrow \\ &\Rightarrow h(x) = \int (-2x) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow h(x) = -x^2 + c_1 \end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$\begin{aligned} F(t, x) &= 2t + e^{tx} - x^2 + c_1 \\ \Rightarrow 2t + e^{tx} - x^2 + c_1 &= c \\ \Rightarrow \boxed{2t + e^{tx} - x^2 = c_2, \quad c_2 = c - c_1} \end{aligned}$$

**Άσκηση: 2.19**

$$(2x^2t - 2x^3) dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2) dx = 0$$

$$\underbrace{(2x^2t - 2x^3)}_{M(t,x)=2x^2t-2x^3} dt + \underbrace{(4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)}_{N(t,x)=4x^3-6x^2t+2xt^2} dx = 0$$

$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 4xt - 6x^2 = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = 0 - 6x^2 + 4xt$ , ΔΕ ακριβής, οπότε υπάρχει  $F(t, x)$  με  $dF(t, x) = M(t, x) dt + N(t, x) dx$  με λύση  $F(t, x) = c$ .

$$dF(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = N(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = M(t, x) = 2x^2t - 2x^3 \implies$$

$$\implies \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt = \int (2x^2t - 2x^3) dt \implies$$

$$\implies F(t, x) = x^2t^2 - 2x^3t + h(x)$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 2xt^2 - 6x^2t + h'(x) \implies$$

$$\implies \cancel{2xt^2} - \cancel{6x^2t} + h'(x) = 4x^3 - 6x^2t + \cancel{2xt^2} \implies$$

$$\implies h'(x) = 4x^3 \xrightarrow{\text{ολοκλ.}} h(x) = x^4 + c_1$$

Άρα:

$$F(t, x) = x^2t^2 - 2x^3t + x^4 + c_1 \implies$$

$$\implies x^2t^2 - 2x^3t + x^4 + c_1 = c \implies$$

$$\implies x^2t^2 - 2x^3t + x^4 = c - c_1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} (x^2 - xt)^2 = c_2 \\ c_2 = c - c_1 \end{cases} \implies$$

$$\xrightarrow{c_2 = \pm \sqrt{c_2}} x^2 - xt = c_3 \xrightarrow{\substack{ax^2+bx+c=0 \\ \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}} \implies$$

$$\implies \boxed{x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4c_3}}{2}, \quad c_3 = \pm \sqrt{c_2}}$$

**Άσκηση: 2.20**

$$2tx \, dt + (1 + t^2) \, dx = 0; \quad x(2) = -5$$

$$\underbrace{2tx}_{M(t,x)} \, dt + \underbrace{(1 + t^2)}_{N(t,x)} \, dx = 0; \quad x(2) = -5$$

$$M(t, x) = 2tx, \quad N(t, x) = 1 + t^2 \quad (1)$$

$F(t, x)$ , με  $dF(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x} \, dx + \frac{\partial F}{\partial t} \, dt$ .

$$dF(t, x) = N(t, x) \, dx + M(t, x) \, dt$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = N(t, x) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} &= M(t, x) = 2tx \implies \\ \implies \int \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \, dt &= \int (2tx) \, dt \implies \\ \implies F(t, x) &= t^2 x + h(x) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = t^2 + h'(x) \\ (2), (1) \end{array} \right. &\implies \\ \implies t^2 + h'(x) &= 1 + t^2 \implies h'(x) = 1 \implies \\ \implies \left\{ \begin{array}{l} h(x) = x + c_1 \\ (3) \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} F(t, x) = t^2 x \\ (4) \end{array} \right. \implies t^2 x + c_1 \\ \implies t^2 x + x &= c_2 \quad (c_2 = c - c_1) \implies x = \frac{c_2}{t^2 + 1} \implies (x(2) = 5)5 = \frac{c_2}{2^2 + 1} \implies x = \frac{-25}{t^2 + 1} \\ \implies F(t, x) &= t^2 x + x + c_1 \end{aligned} \quad (4)$$

## Κεφάλαιο 3 Overview

### 3.1 Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ - Ordinary Differential Equations)

**Ορισμός 3.1**

Εμπλέκουν:

- μία ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ.  $t, x$ )
- μια εξαρτημένη και τις παραγώγους της (π.χ.  $\dot{y}, y, u$ )

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

**Μη συνήθειες** είναι οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Partial Differential Equations - PDE) που εμπλέκουν:

- πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές (π.χ.  $x, y, z$ )

- μία εξαρτημένη μεταβλητή και τις μερικές παραγώγους της

### 3.2 1<sup>η</sup> τάξης ΔΕ

#### Ορισμός 3.2

όταν

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

#### Ορισμός 3.3: Τυπικής μορφής

$$f(t, x) = \frac{-M(t, x)}{N(t, x)}$$

Διαφορική μορφή

$$N(t, x) dx + M(t, x) dt = 0$$

#### Ορισμός 3.4: Χωριζόμενη

όταν

$$\begin{cases} N(t, x) = N(x) \\ M(t, x) = M(t) \end{cases}$$

τότε

$$N(x) dx + M(t) dt = 0$$

με λύση

$$\int N(x) dx + \int M(t) dt = c$$

ή

$$\int_{x_0}^x N(x) dx + \int_{t_0}^t M(t) dt = 0$$

#### Ορισμός 3.5: Ομογενής - Ομοιογενής

όταν  $\forall a \in \mathbb{R}$

$$F(at, ax) = f(t, x)$$

τότε θέτω  $x = ut$ , άρα  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$

## Κεφάλαιο 4

### 4.1 ΔΕ 1<sup>η</sup> τάξης

TM (Τυπική μορφή):  $x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$

ΔM (Διαφορική μορφή):  $N(t, x) dx + M(t, x) dt = 0$

Ακριβής:  $\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} \rightarrow dF(t, x)$

$$dF(t, x) = N(t, x) dx + M(t, x) dt$$

$$F(t, x) = c$$

$$\underbrace{G(t, x) \cdot (N(t, x) dx + M(t, x) dt)} = 0$$

Μπορεί να υπάρχει τέτοια συνάρτηση

### Άσκηση: 2.23 Ολοκληρωτικός παράγοντας, επίλυση μέσω ελέγχου

$$x dt - t dx = 0$$

$$M(t, x) = x, \quad N(t, x) = t$$

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = 1, \quad \frac{dN(t, x)}{dt} = -1 \text{ δεν είναι ακριβής.}$$

υποφύγιος

$$\underbrace{G(t, x)} = -\frac{1}{t^2}$$

$$-\frac{1}{t^2}(x dt - t dx) = 0 \implies -\frac{x}{t^2} dt + \frac{1}{t^2} dx = 0$$

$$M(t, x) = -\frac{x}{t^2} \quad N(t, x) = \frac{1}{t}$$

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = -\frac{1}{t^2} = \underbrace{\frac{\partial N(t, x)}{\partial t}}_{\text{ακριβής}} = -\frac{1}{t^2}$$

$$\text{Av } \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) \equiv g(t) \implies G = e^{\int g(t) dt}$$

Με διαφορά μερικών παραγώγων:

$$\text{Av } \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = h(x) \implies G = e^{\int g(t) dx}$$

### Άσκηση: 2.25

$$x^2 dt + tx dx = 0, \quad M(t, x) = x^2, \quad N(t, x) = tx$$

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = x \text{ όχι ακριβής}$$

$$\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{1}{x^2} (2x - x) = \frac{1}{x} = h(x)$$

$$G(t, x) = e^{-\int h(x) dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} (x^2 dt + tx dx) = 0 \implies x dt + t dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1 = \frac{\partial N}{\partial t} = 1 \text{ ακριβής}$$

Μορφή των όρων  $N, M$  αν  $M = xf(tx)$  και  $N = tg(tx)$ , τότε:

$$G(t, x) = \frac{1}{tM - xN}$$

**Άσκηση: 2.26**

$$x' = \frac{tx^2 - x}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{tx^2 - x}{t} \Rightarrow t dx - (tx^2 - x) dt = 0 \Rightarrow x(1 - tx) dt + t dx = 0$$

$$M(t, x) = x \cdot (1 - tx) \Rightarrow \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = 1 - 2tx \neq \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = 1 \text{ όχι ακριβής}$$

αλλά:  $M = xf(t)$  και  $N = tg(tx)$ .

Επομένως:

$$G(t, x) = \frac{1}{tM - xN} = \frac{1}{tx(1 - tx) - xt} = \frac{1}{-t^2x^2} = -\frac{1}{(tx)^2}$$

Είναι:

$$-\frac{1}{(tx)^2} (x(1 - tx) dt + t dx) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{tx - 1}{t^2x} dt - \frac{1}{tx^2} dx = 0$$

και συνεχίζω με τη μέθοδο της ακριβούς.

**Κεφάλαιο 5 Θεωρία των Λύσεων**

Μορφή ΔΕ  $n^{\text{ος}}$  τάξης:

$$b_n(t) \cdot x^{(n)} + b_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \dots + b_2(t)x'' + b_1(t)x' + b_0(t)x = g(t)$$

όπου:  $g(t), b_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) εξαρτώνται αποκλειστικά από το  $t$ .

Αν  $g(t) \equiv 0$ , τότε η ΔΕ είναι ομογενής (ΟΜ - homogenous).

Αν  $g(t) \neq 0$ , τότε η ΔΕ είναι μη ομογενής (ΜΟ - non-homogenous).

Όταν όλοι οι συντελεστές  $b_j(t)$  είναι σταθερές, τότε ΔΕΣΣ (σταθερών συντελεστών).

Όταν ένας τουλάχιστον  $b_j(t)$  δεν είναι σταθερά, ΔΕΜΣ (μεταβλητών συντελεστών).

**Θεώρημα 5.1**

ΔΕ  $n$  τάξης με  $n$  ΑΣ (αρχικές συνθήκες):

$$x(t_0) = c_0, x'(t_0) = c_1, x''(t_0) = c_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

$$\Delta E \quad b_n(t)x^{(n)} + b_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + b_2(t)x'' + b_1(t)x' + b_0(t)x = g(t)$$

Αν  $g(t)$  και  $b_i$  συνεχείς σε διάστημα  $\phi$  που περιλαμβάνει το  $t_0$  και  $b_n(t) \neq 0$  στο  $\phi$ , τότε το πρόβλημα έχει μία μοναδική λύση (ορισμένη στο  $\phi$ ).

**Ορισμός 5.1**

Το σύνολο  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$  είναι ΓΕ (γραμμικά εξαρτημένο) για ένα διάστημα  $\Delta$  όταν υπάρχουν συντελεστές όχι όλοι μηδενικοί τέτοιοι ώστε:

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) \equiv 0 \quad \Delta$$

### Θεώρημα 5.2

Έστω η ομογενής  $n$ -οστής τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση  $L(x) = 0$ .

Αν  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  είναι λύσεις, τότε και ο γραμμικός τους συνδυασμός είναι γενική λύση της ομογενούς:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) \quad \text{ΓΛ (Γενική Λύση)}$$

### Θεώρημα 5.3: Βροσκιανή

Ορίζουσα  $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} W \neq 0 \text{ έστω σε ένα σημείο } \in \Delta & \rightarrow \text{ΓΑ (Γραμμικά Ανεξάρτητες)} \\ W \equiv 0 \text{ και κάθε συνάρτηση είναι λύση της ίδιας ΔΕ} & \rightarrow \text{ΓΕ (Γραμμικά Εξαρτημένες)} \end{cases}$$

### Θεώρημα 5.4

Ομογενής ΔΕ

$$\overbrace{L(x)}^{\text{Ομογενής ΔΕ}} = \phi(t)$$

$$\text{Έστω } \begin{cases} x_n(t) & \text{ΓΛ της ΟΜ (Ομογενούς)} \\ x_p(t) & \text{ΕΛ της ΜΟ (Μη ομογενούς)} \end{cases}$$

Τότε είναι ΓΛ ΜΟ (Γενική Λύση Μη Ομογενούς)  $n$ :

$$x(t) = x_n(t) + x_p(t)$$

### Άσκηση: 3.2

$$\{1-t, 1+t, 1-3t\}$$

$$\begin{aligned} W(1-t, 1+t, 1-3t) &= \begin{vmatrix} 1-t & 1+t & 1-3t \\ \frac{d(1-t)}{dt} & \frac{d(1+t)}{dt} & \frac{d(1-3t)}{dt} \\ \frac{d^2(1-t)}{dt^2} & \frac{d^2(1+t)}{dt^2} & \frac{d^2(1-3t)}{dt^2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-t & 1+t & 1-3t \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(β)

$$c_1(1-t) + c_2(1+t) + c_3(1-3t) = 0$$

$$\underbrace{(c_1 + c_2 - 3c_3)}_0 t + \underbrace{(c_1 + c_2 + c_3)}_0 \equiv 0$$

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 - 3c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2c_3c_2 \\ c_2 = c_3 \\ c_3 \text{ αυθαίρετη σταθερά} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 1 \\ c_1 = -2 \\ c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ΓΕ}$$

**Άσκηση: 3.3**

Βρείτε την Βροσκιανή:

$$\{t, t^2, t^3\}$$

$$W(t, t^2, t^3) = \begin{vmatrix} t & t^2 & t^3 \\ \frac{d(t)}{dt} & \frac{d(t^2)}{dt} & \frac{d(t^3)}{dt} \\ \frac{d^2(t)}{dt^2} & \frac{d^2(t^2)}{dt^2} & \frac{d^2(t^3)}{dt^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} t & t^2 & t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 2t^3$$

 $(-\infty, \infty), t = 3, W = 54 \neq 0 \implies \text{ΓΑ, θαυμάσια!}$ 
**Άσκηση: 3.4**

$$\{t^3, |t^3|\} \quad [-1, 1]$$

$$c_1 t^3 + c_2 |t^3| \equiv 0$$

$$|t^3| = t^3, \quad t \geq 0 \quad / \quad |t^3| = -t^3, \quad t \leq 0$$

$$\begin{cases} c_1 t^3 + c_2 t^3 \equiv 0 & t \geq 0 \\ c_1 t^3 - c_2 t^3 \equiv 0 & t < 0 \end{cases} \implies c_1 = c_2 = 0 \text{ ΓΑ}$$

$$\frac{d|t^3|}{dt} = \begin{cases} 3t^2 & \text{αν } t > 0 \\ 0 & \text{αν } t = 0 \\ -3t^2 & \text{αν } t < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \text{για } t > 0 : & W(t^3, |t^3|) = \begin{vmatrix} t^3 & |t^3| \\ 3t^2 & 3t^2 \end{vmatrix} \equiv 0 \\ \text{για } t = 0 : & W(t^3, |t^3|) = 0 \\ \text{για } t < 0 : & W(t^3, |t^3|) = \begin{vmatrix} t^3 & -t^3 \\ 3t^2 & -3t^2 \end{vmatrix} \equiv 0 \end{cases}$$



**Άσκηση: 3.5**

$$x'' - 2x' + x = 0$$

$e^t, te^t$  Λύσεις

Ο γραμμικός συνδυασμός  $X = c_1 e^t + c_2 t e^t$  είναι λύση της εξίσωσης;

$$W(e^t, te^t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0$$

Άρα οι εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, άρα, επειδή είναι λύσεις της διαφορικής, ο γραμμικός συνδυασμός τους είναι γενική λύση.

Μη ομογενής:  $x'' - 2x' + x = e^{3t}$

Ειδική λύση:  $\frac{1}{4}e^{3t} \rightarrow x_p = \frac{1}{4}e^{3t}$

Γενική λύση μη ομογενούς:  $\underbrace{x(t)}_{\text{MO}} = \underbrace{x_h(t)}_{\text{OM}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{MO}}$

Άρα:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{4} e^{3t}$$

## Κεφάλαιο 6

### 6.1 ΓΡ/ΔΕ/1<sup>ης</sup>

- $\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)$   
 ή  $\underbrace{f(t, x)}_{f(t, x) = \frac{dx}{dt}} = q(t) - p(t)x$

Τότε ΟΠ (Ολοκληρωτικός Παράγοντας)  $G(t) = e^{\int p(t) dx}$ . Πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό παράγοντα παίρνουμε:

$$G(t) \frac{dx}{dt} + G(t)p(t)x = G(t)q(t)$$

ή

$$\frac{d(Gt)}{dt} = Gq(t)$$

που είναι μια ακριβής διαφορική εξίσωση.

Λύση:

$$x(t) = e^{-\int p(t) dt} \left( \int e^{\int p(t) dt} q(t) dt + c \right)$$

Αν τα  $p(t) = a$  και  $q(t) = b$  είναι σταθερά:

$$\frac{dx}{dt} + ax = b, \quad x(t) = e^{-at} \left( \frac{b}{a} e^{at} + c \right) = \frac{b}{a} + c e^{-at}$$

#### 6.1.1 Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)x^n, \quad \text{με } n \neq 1, 0$$

Αντικατάσταση μεταβλητών:  $u = x^{1-n} \rightarrow x, x'$

**Άσκηση: 4.1**ΓΡ/ΔΕ/1<sup>ns</sup>

$$x' - 3x = 6$$

$$\frac{dx}{dt} + ax = b$$

$$a = -3, \quad b = 6$$

$$x(t) = \frac{b}{a} + ce^{-at} = \frac{6}{-3} + ce^{3t} \implies x(t) = ce^{3t} - 2$$

**Άσκηση: 4.2**ΓΡ/ΔΕ/1<sup>ns</sup>

$$\frac{dx}{dt} - 2tx = t$$

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t) \implies \begin{cases} p(t) = -2t \\ q(t) = t \end{cases}$$

$$\text{ΟΠ } G(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int (-2t) dt}$$

$$\int (-2t) dt = -t^2 \quad \text{άρα } G(t) = e^{-t^2}$$

$$e^{-t^2} \frac{dx}{dt} - 2te^{-t^2} x = te^{-t^2} \implies \frac{d}{dt} (xe^{-t^2}) = te^{-t^2} \implies \int \frac{d}{dt} (xe^{-t^2}) dt = \int te^{-t^2} dt \implies$$

$$\implies xe^{-t^2} = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + c \implies \boxed{x = ce^{t^2} - \frac{1}{2}}$$

**Άσκηση: 4.3**

$$x' + \left(\frac{4}{t}\right)x = t^4$$

$$x' + p(t)x = t^4 \quad p(t) = \frac{4}{t}, \quad q(t) = t^4$$

$$G(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int \frac{4}{t} dt} = e^{4 \ln |t|} = e^{\ln t^4} = t^4$$

$$t^4 \frac{dx}{dt} + t^4 \left(\frac{4}{t}\right)x = t^4 \cdot t^4 \implies \frac{d}{dt} (t^4 x) = t^8 \implies$$

$$\implies \int \frac{d}{dt} (t^4 x) dt = \int t^8 dt \implies t^4 x = \frac{1}{9}t^9 + c \implies \boxed{x = \frac{1}{9}t^5 + \frac{c}{t^4}}$$

**Άσκηση: 4.4**

$$x' + x = \sin t$$

$$x(\pi) = 1$$

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t) \quad p(t) = 1, \quad q(t) = \sin t$$

$$G(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int 1 dt} = e^t$$

$$\begin{aligned} e^t (x' + x) &= e^t \sin t \implies \\ \implies \int \frac{d}{dt} (e^t x) &= \int e^t \sin t dt \implies \\ \implies e^t x &= \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + c \implies \\ \implies x(t) &= ce^{-t} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \end{aligned}$$

$$1 = ce^{-\pi} + \frac{1}{2} \sin \pi - \frac{1}{2} \cos \pi \implies c = e^{\pi}$$

$$\begin{aligned} \text{ΕΛ} \quad x(t) &= \frac{1}{2} e^{\pi} e^{-t} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \implies \\ \implies x(t) &= \frac{1}{2} (e^{\pi-t} + \sin t - \cos t) \end{aligned}$$

**Άσκηση: 4.6**

$$\frac{dz}{dx} - xz = -x; \quad z(0) = 4$$

$$p(x) = -x, \quad q(x) = -x$$

$$G(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int (-x) dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} \left( \frac{dz}{dx} - xz \right) &= e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) \implies \\ \frac{d}{dx} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} z \right) &= e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) \implies \\ \int \frac{d}{dx} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} z \right) dx &= \int \left( e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) \right) dx \implies \\ e^{-\frac{x^2}{2}} z &= e^{-\frac{x^2}{2}} + c \implies \\ z &= ce^{\frac{x^2}{2}+1} \quad \Gamma\Lambda \\ -4 &= ce^{\frac{0^2}{2}+1} \implies c = -5 \implies z(x) = -5e^{\frac{x^2}{2}+1} \quad \text{ΕΛ} \end{aligned}$$

Άσκηση: 4.7

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{2}{3}x^4$$

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$G(x) = e^{\int \left(-\frac{2}{x}\right)} = e^{-2 \ln |x|} = e^{\ln x^{-2}}$$

$$G(x) = x^{-2}$$

$$x^{-2}\left(z' - \frac{2}{x}z\right) = \frac{2}{3}x^4x^{-2} \implies \dots \implies z(x) = cx^2 + g^2x^5$$

Άσκηση: 4.10

$$y' + xy = xy^2$$

Bernoulli

$$u = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1} \implies$$

$$u = \frac{1}{y} \implies y = \frac{1}{u} \text{ και } y' = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2} u'$$

$$-\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} + x \frac{1}{u} = x \left(\frac{1}{u}\right)^2 \implies u' - xu = -x$$

$$G(x) = e^{\int (-x) dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad e^{-\frac{x^2}{2}} u' - e^{-\frac{x^2}{2}} xu = e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) \implies$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left( u e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$\int \frac{d}{dx} \left( u e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = \int \left( -x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \implies$$

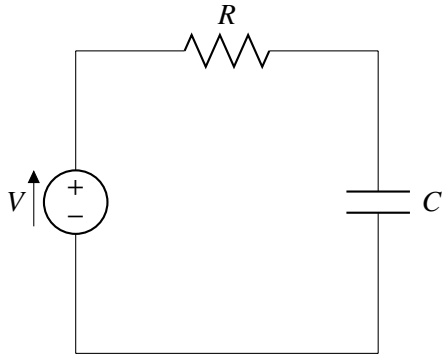
$$u e^{-\frac{x^2}{2}} + c \implies \boxed{u = c e^{\frac{x^2}{2}} + 1} \quad \Gamma \Lambda \frac{1}{y} = c e^{\frac{x^2}{2}} + 1 \implies \boxed{y(x) = \frac{1}{c e^{\frac{x^2}{2}} + 1}}$$

## Μέρος II

# Κεχαγιάς: Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

(Fourier, Laplace) Τετάρτη 17:00-18:30

## Κεφάλαιο 7 Κεφάλαιο 7: Εισαγωγή στην ανάλυση του Φουριερ



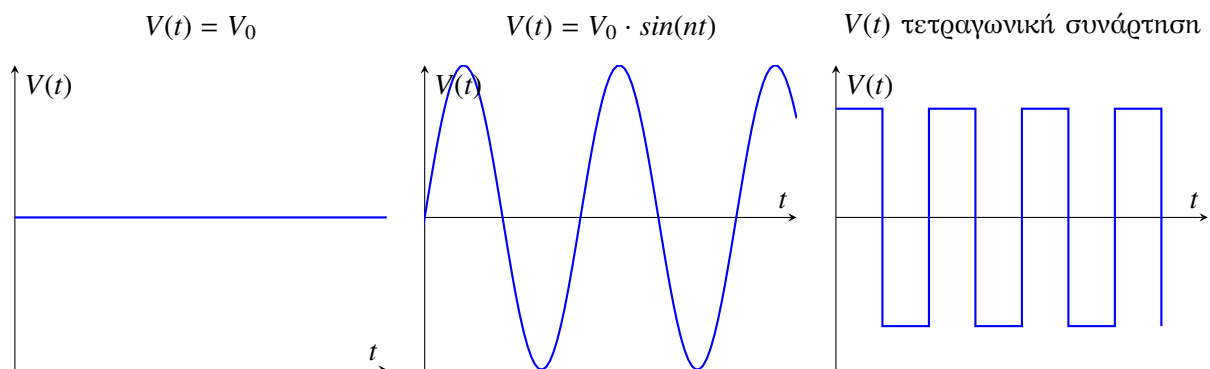
Η συμπεριφορά του κυκλώματος μπορεί να περιγραφεί με μια διαφορική εξίσωση.  
 $Q(t)$ : Το φορτίο του πυκνωτή σε χρονική στιγμή  $t$

$$v_1 = R \cdot i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$v_2 = \frac{Q(t)}{C}$$

$$v_1 + v_2 = V(t) \implies \frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{RC} = \frac{1}{R}V(t), \quad \text{με αρχική συνθήκη } Q(0) = 0$$

Θα προσπαθήσω να λύσω την εξίσωση για τρεις περιπτώσεις:



### 7.0.2 $V(t) = V_0$

$$\frac{dx}{dt} + ax = b$$

Θα εξετάσω τη γενική λύση  $x_0(t)$  της ομογενούς ΔΕ, και θα ψάξω μία ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ.

Ομογενής:  $b = 0 \implies \frac{dx}{dt} = -ax \implies x(t) = ce^{-at}$ .  
 $x(0) = 0 \implies c = 0 \implies x_0(t) = 0$ .

Μη ομογενής:  $\frac{dx}{dt} + ax = b$ .

$$x(t) = k \implies \frac{dx}{dt} + ak = b \implies k = \frac{b}{a} \implies x(t) = k = \frac{b}{a}$$

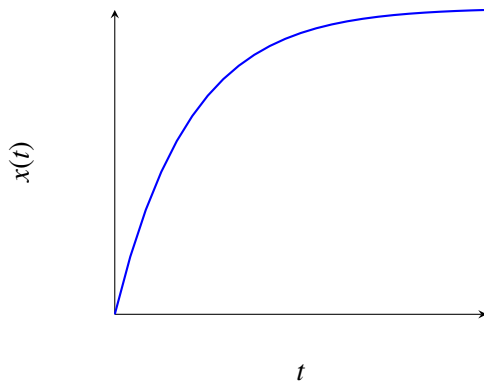
### Θεώρημα

Η γενική λύση της μη ομογενούς είναι:

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t)$$

Άρα

$$\begin{cases} x(t) = ce^{-at} - \frac{b}{a} \\ x(0) = 0 \end{cases} \implies 0 = x(0) = c - \frac{b}{a} \implies c = \frac{b}{a} \implies x(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \text{ ή και } x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$



$$a = \frac{1}{RC}, \quad b = \frac{V_0}{R}$$

### 7.0.3 $V(t) = V_0 \sin(nt)$

$$\frac{dx}{dt} + ax = b \sin(nt)$$

Είναι  $x_h(t) = ce^{-at}$ .

Υποθέτω  $x(t) = c_2 \sin(nt) + c_3 \cos(nt)$ . Τότε  $\frac{dx}{dt} = nc_2 \cos(nt) - nc_3 \sin(nt)$ :

$$\frac{dx}{dt} + ax = (ac_2 - nc_3) \sin(nt) + (ac_3 + nc_2) \cos(nt) = b \sin(nt) \implies$$

$$\implies \begin{cases} ac_2 - nc_3 = b \\ nc_2 + ac_3 = 0 \end{cases} \implies \dots \implies \begin{cases} c_2 = \frac{ab}{a^2 + n^2} \\ c_3 = -\frac{bn}{a^2 + n^2} \end{cases}$$

Θυμάμαι ότι  $x(t) = x_h(t) + x_i(t) = c_1 e^{-at} + \frac{ab}{a^2 + n^2} \sin(nt) - \frac{bn}{a^2 + n^2} \cos(nt)$  και από το  $x(0) = 0$  βρίσκω  $c_1 = \frac{bn}{a^2 + n^2}$ .

Άρα:

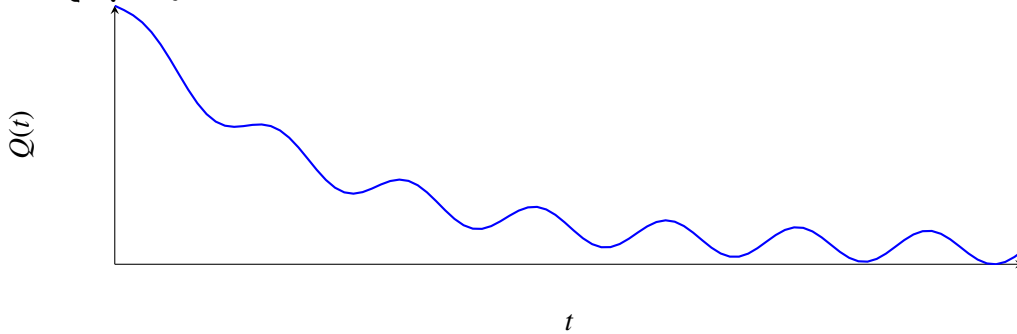
$$x(t) = \frac{bn}{a^2 + n^2} + \frac{ab}{a^2 + n^2} \sin(nt) - \frac{bn}{a^2 + n^2} \cos(nt)$$

Για το RC κύκλωμα,  $a = \frac{1}{RC} \leftarrow$  χρονική σταθερά κυκλώματος,  $b = \frac{V_0}{R}$ , άρα:

$$Q(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2 R^2 n^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{C V_0 \sin(nt) - C^2 R n V_0 \cos(nt)}{C^2 R^2 n^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
 p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t) &= \\
 \sqrt{p^2 + q^2} \left( \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cos \omega t + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \sin \omega t \right) &= \\
 \sqrt{p^2 + q^2} (\sin \phi \cos \omega t + \cos \phi \sin \omega t) &= \\
 \sqrt{p^2 + q^2} \sin(\omega t + \phi), \quad \phi = \arctan \frac{p}{q}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής φορτίζει περισσότερο αν είναι μικρότερη η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος.



#### 7.0.4 $V(t) = \text{square}(t)$

$$V(t) = \sum_{n=(1,3,5,\dots)} \frac{4}{n\pi} \sin(nt) = \frac{4}{\pi} \sin(nt) + \frac{4}{3\pi} \sin(3t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5t) + \frac{4}{7\pi} \sin(7t) + \dots$$

Έτσι γίνεται η ανάλυση Fourier, και αυτό θα το δούμε την επόμενη Τετάρτη, που θα πάμε στο Κεφάλαιο 8, που λέει σειρές Fourier.

$$\begin{aligned}
 V_N(t) &= \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^N \frac{4}{n\pi} \sin(nt) \\
 V(t) &= \sum_{n=(1,3,5,\dots)}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(nt) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_N(t)
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) = \frac{V_0 \sin(nt)}{R} \implies Q_n(t) = \frac{V_0 C^2 R n}{C^2 R^2 n^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{C V_0 \sin(nt) - C^2 R n V_0 \cos(nt)}{C^2 R^2 n^2 + 1}$$

Οπότε αν:

$$\begin{aligned}
 \frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) &= \frac{4}{\pi} \frac{\sin(nt)}{R} \implies Q_1(t) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{C^2 R}{C^2 R^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \dots \right) \\
 \frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) &= \frac{4}{3\pi} \frac{\sin(3t)}{R} \implies Q_3(t) = \frac{4}{3\pi} \left( \frac{3C^2 R}{9C^2 R^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}} + \dots \right) \\
 \frac{dR}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) &= \frac{4}{5\pi} \frac{\sin(5t)}{R} \implies Q_5(t) = \dots
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$Q(t) = \sum_{n \in \{1,3,5,\dots\}} Q_n(t)$$

Γιατί όμως, αν  $V_1(t) \rightarrow Q_1(t)$ ,  $V_2(t) \rightarrow Q_2(t)$ , τότε  $k_1 V_1 + k_2 V_2 = k_1 Q_1 + k_2 Q_2$  σε αυτό το κύκλωμα (αρχή επαλληλίας/γραμμικότητα);

## Κεφάλαιο 8 Κεφάλαιο 8: Σειρές Φουριερ

### Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f(t)$  λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο  $[t_1, t_2]$  ανν μπορώ να διαμερίσω:

$$[t_1, t_2] = [\tau_0, \tau_1] \cup [\tau_1, \tau_2] \cup \dots \cup [\tau_{n-1}, \tau_n]$$

όπου  $\tau_0 = t_1$ ,  $\tau_n = t_2$ , τέτοια ώστε  $f(t)$  συνεχής στο κάθε  $(\tau_{i-1}, \tau_i)$ , και υπάρχουν  $\lim_{t \rightarrow \tau_i^-} f(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \tau_i^+} f(t) \forall i$

π.χ

Η  $f(t)$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $[-\pi, 3\pi]$ , επειδή, για  $t_1 = -\pi, t_2 = 3\pi$ :

$$[-\pi, 3\pi] = [-\pi, 0] \cup [0, \pi] \cup [\pi, 2\pi] \cup [2\pi, 3\pi]$$

Στα  $(-\pi, 0)$ ,  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$ ,  $(2\pi, 3\pi)$  η  $f$  είναι συνεχής, και υπάρχουν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια, άρα η  $f$  είναι τμηματικά συνεχής.

### 8.0.5 Συνθήκες του Dirichlet

1. Η  $f(t)$  είναι ορισμένη στο  $(-L, L)$
2. Η  $f(t)$  είναι τμηματικά συνεχής στο  $(-L, L)$
3. Η  $f(t)$  είναι περιοδική με περίοδο  $2L$ .

### Θεώρημα

Έστω  $f(t)$  η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο  $(-L, L)$ . Τότε:

1. Για κάθε σημείο συνέχειας της  $f(t)$ :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$$

όπου:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$$

2. Σε κάθε σημείο ασυνέχειας  $\tau$ :

$$\frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow \tau^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow \tau^+} f(t) \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi \tau}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi \tau}{L}$$

**Παρ.**  $f(t)$  = τετραγωνικός παλμός



**Λύση** Η  $f(t)$  ικανοποιεί τις Σ.Δ με  $L = \pi$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dt = -1 + 1 = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{-\cos nt}{n} \right)_{t=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{1 - \cos n\pi}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1 - (-1)^n}{n} \right) = \frac{2}{n\pi} \text{ για άρτια } n \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 = a_2 = \dots = 0 \\ b_1 &= \frac{4}{\pi}, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi} \\ b_2 &= 0, \quad b_4 = 0, \dots \end{aligned}$$

**Απόδειξη** (Μερική)

Θα δεχτούμε ότι η  $f(t)$  γράφεται στη μορφή  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$ , και θα δείξουμε τους τύπους  $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$ ,  $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$   
Έστω  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$ . Τότε:

$$\int_{-L}^L f(t) dt = \int_{-L}^L f(t) \cdot 1 dt = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt + \int_{-L}^L a_1 \cos \frac{\pi t}{L} dt + \int_{-L}^L a_2 \cos \frac{2\pi t}{L} dt + \dots = a_0 \cdot L + 0 + 0 + \dots$$

Άρα:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

**Συνέχεια απόδειξης** Υποθέτω ότι υπάρχει **κάποια** σειρά της μορφής \*, θα δείξω ότι οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους \*\*. ίο Παρνω τυχόν  $m \in \mathbb{N}$  και εξετάζω το

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt &= \\ &= \int_{-L}^L \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \cos \frac{m\pi t}{L} dt \\ &= \underbrace{\int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos \frac{m\pi t}{L} dt}_{=0 \text{ ολοκληρώνω πάνω σε } m \text{ περιόδους}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L a_n \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt}_{= \frac{b_n}{2} \left( \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi t + m\pi t}{L} dt + \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi t - m\pi t}{L} dt \right) = 0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt \\ &\stackrel{\cos a \cdot \cos \beta = \frac{\cos(a+\beta) + \cos(a-\beta)}{2}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \int_{-L}^L \left( \cos \frac{(n+m)\pi t}{L} + \cos \frac{(n-m)\pi t}{L} \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} 0, & n \neq m \\ a_n L, & n = m \end{cases} \\ &= a_m L \end{aligned}$$

Επομένως:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

Αντιστοίχως αποδεικνύεται και η σχέση για το  $b_m$ .

Να σημειωθεί ότι οι συνθήκες του Dirichlet είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες.

## 8.0.6

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-in\pi t} L dt$$

**Απόδειξη**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} = \frac{a_0}{2} +$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dots e^{\frac{in\pi t}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{in\pi t}{L}} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

Άρα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$$

όπου:

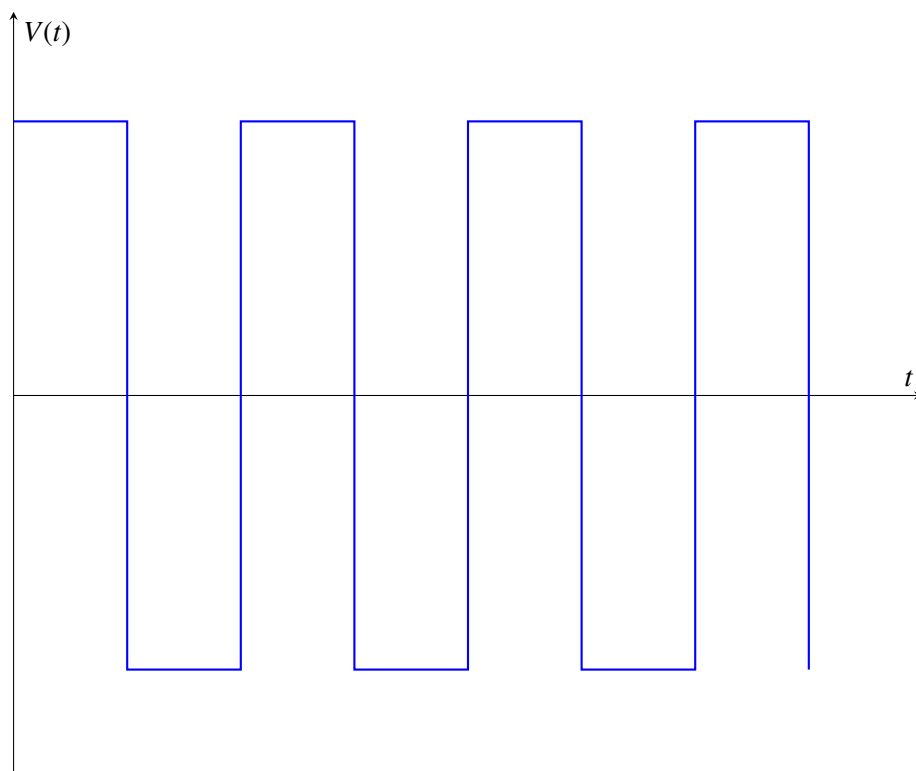
$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & n \in \mathbb{Z}^+ \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, & n \in \mathbb{Z}^- \\ \frac{a_0 + ib_0}{2}, & n = 0 \end{cases}$$

Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη να αποδειχθεί ότι:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{\frac{-in\pi t}{L}} dt$$

## 8.1 Παράδειγμα

$V(t)$  τετραγωνική συνάρτηση



Θα βρω την **εκθετική** σειρά της  $f(t)$ .

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot e^{-int} dt + \int_0^{\pi} (1) \cdot e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( - \int_{-\pi}^0 e^{-int} dt + \int_0^{\pi} e^{-int} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{-int}}{-in} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{e^{-int}}{-in} \Big|_0^{\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{-in} - \frac{e^{-in\pi}}{-in} - \frac{e^{-in\pi}}{-in} + \frac{1}{-in} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2}{-in} - \frac{2 \cos(n\pi)}{-in} \right) \\
 c_n &= \frac{i}{n\pi} \cdot (1 - \cos n\pi)
 \end{aligned}$$

$n$	$c_n$
-2	0
-1	$\frac{2i}{\pi}$
0	0
1	$-\frac{2i}{\pi}$
2	0
3	$\frac{2i}{3\pi}$

Άρα:

$$f(t) = \dots + \frac{2i}{3\pi} e^{i3t} + \frac{2i}{\pi} e^{-it} - \frac{2i}{\pi} e^{it} - \frac{2i}{3\pi} e^{i3t} + \dots$$

Ερωτήματα για τον αναγνώστη:

1. Πότε έχει η τριγωνομετρική σειρά μόνο ημίτονα/μόνο συνημίτονα;
2. Πότε έχει η εκθετική σειρά μόνο πραγματικούς/μόνο εκθετικούς όρους;

## 8.2

### Ορισμός

Συμβολίζω με  $\mathcal{F}_L$  το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet (με ημιπερίοδο  $L$ )

### Θεώρημα

Το  $\mathcal{F}_L$  είναι διανυσματικός χώρος.

**Απόδειξη** Έστω  $f, g \in \mathcal{F}_L$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$ . Θα δείξω ότι  $\kappa f + \lambda g \in \mathcal{F}_L$ .

## Πράγματι

1. Αν οι  $f, g$  είναι ορισμένες στο  $[-L, L]$  τότε και η  $\kappa f + \lambda g$  είναι ορισμένη στο  $[-L, L]$ .
- 2.

$$\begin{aligned}(\kappa f + \lambda g)(t + 2L) &= \kappa f(t + 2L) + \lambda g(t + 2L) \\ &= \kappa f(t) + \lambda g(t) \\ &= (\kappa f + \lambda g)(t)\end{aligned}$$

Άρα η  $\kappa f + \lambda g$  έχει περίοδο  $2L$ .

3. Αν η  $f$  και η  $g$  είναι τμ. συνεχείς στο  $[-1, 1]$ , τότε και η  $\kappa f + \lambda g$  είναι τμ. συνεχείς.

Από τα 1,2,3, η  $\kappa f + \lambda g \in \mathcal{F}_L$ .

## Θεώρημα

Το σύνολο  $\left\{e^{\frac{i n \pi t}{L}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$  είναι μια ορθογώνια βάση του  $\mathcal{F}_L$ .

**Δηλαδή** κάθε  $f(t) \in \mathcal{F}_L$  μπορεί να γραφεί:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i n \pi t}{L}}$$

Επιπλέον  $\forall n, m, m \neq n \quad e^{\frac{i n \pi t}{L}} \perp e^{\frac{i m \pi t}{L}}$

Δηλαδή:

$$e^{\frac{i n \pi t}{L}} \cdot e^{\frac{i m \pi t}{L}} = 0$$

Δηλαδή:

$$\int_{-L}^L e^{\frac{i n \pi t}{L}} \cdot e^{\frac{i m \pi t}{L}} dt = 0$$

Για να ορίσω το εσωτερικό γινόμενο, θέλω  $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_n x_n \bar{x}_n = \sum (x_n)^2$

$$f \cdot g = \int_{-L}^L f(t) \overline{g(t)} dt$$

Άρα

$$e^{\frac{i n \pi t}{L}} \cdot e^{\frac{i m \pi t}{L}} = \int_{-L}^L e^{\frac{i n \pi t}{L}} e^{\frac{i m \pi t}{L}} dt = \int_{-L}^L e^{\frac{i(m-n)\pi t}{L}} dt = \begin{cases} 2L, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

- $\mathcal{F}_L$  το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν Dirichlet
- Το  $\mathcal{F}_L$  είναι  $\Delta X$
- Το  $\left\{e^{\frac{i n \pi t}{L}}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  είναι μια ορθογώνια βάση του  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$
- Το  $\left\{\cos \frac{i n \pi t}{L}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\sin \frac{i n \pi t}{L}\right\}_{n=1}^{\infty}$  είναι μια ορθογώνια βάση του  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$
- $\underbrace{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i n \pi t}{L}}$ , με

περιοδική, με ημιπερίοδο  $L$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{\frac{i n \pi t}{L}} dt$$

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= [x_1 x_2 x_3] = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \\
&= \text{Proj}(\vec{x}, \vec{e}_1) + \text{Proj}(\vec{x}, \vec{e}_2) + \text{Proj}(\vec{x}, \vec{e}_3) \\
&= \sum_{n=1}^3 \vec{x} \cdot \vec{e}_n \cdot \frac{\vec{e}_n}{\|\vec{e}_n\|}
\end{aligned}$$

Άρα:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Proj}\left(f(t), e^{\frac{in\pi t}{L}}\right)$$

$$\text{όπου } \text{Proj}\left(f(t), e^{\frac{in\pi t}{L}}\right) = f(t) \bullet e^{\frac{in\pi t}{L}} \frac{e^{\frac{in\pi t}{L}}}{\left\|e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\|}$$

$$\begin{aligned}
f(t) \bullet e^{\frac{in\pi t}{L}} &= \int_{-L}^L f(t) \cdot \overline{e^{\frac{in\pi t}{L}}} dt \\
\left\|e^{\frac{in\pi t}{L}}\right\| &= \int_{-L}^L e^{\frac{in\pi t}{L}} \cdot e^{-\frac{in\pi t}{L}} dt = 2L
\end{aligned}$$

### Θεώρημα 8.1: Plancherel

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_n c_n \bar{r}_n$$

$$H \begin{cases} f(t) = \sum_n c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \\ f(t) = \sum_n r_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \end{cases}$$

### Απόδειξη

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \overline{g(t)} dt &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \right) \overline{\left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{\frac{im\pi t}{L}} \right)} dt \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{L}} \bar{r}_m e^{-\frac{im\pi t}{L}} \right) dt \\
&= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n \bar{r}_m \underbrace{\int_{-L}^L e^{\frac{i(n-m)\pi t}{L}} dt}_{\begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2L & m = n \end{cases}} \\
&= \frac{1}{2L} 2L \sum_n c_n \bar{r}_n
\end{aligned}$$

Γενικά:

$$f(t) \leftrightarrow \vec{c} = [\dots c_{-1} c_0 c_1 c_2 \dots]$$

(με την επιφύλαξη ότι σε πεπερασμένο αριθμό σημείων μπορεί να αλλάζει η τιμή της συνάρτησης)  
Σύμφωνα με το θεώρημα:

$$\begin{aligned}
f(t) &\leftrightarrow \vec{c} \\
g(t) &\leftrightarrow \vec{r} \\
\frac{1}{2L} f \bullet g &= \vec{c} \bullet \vec{r}
\end{aligned}$$

**Θεώρημα 8.2: Πόρισμα (Parseval)**

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(t)|^2 dt = \sum_n |c_n|^2$$

**Θεώρημα 8.3**

Αν  $f(t) \in \mathcal{F}_L$  και  $f(t) = \sum_n c_n e^{\frac{in\pi t}{L}}$ , τότε:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_n c_n \frac{in\pi}{L} e^{\frac{in\pi t}{L}} \\ \int f(t) &= \sum_n c_n \frac{L}{in\pi} e^{\frac{in\pi t}{L}} \end{aligned}$$

Τα ίδια για ημίτονα και συνημίτονα

**Παράδειγμα** Δίνεται η  $f(t) = \begin{cases} |t| & t \in [-\pi, \pi] \\ \text{περιοδική επέκταση} & t \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$  Να βρεθεί η Σειρά (Fourier) της  $f(t)$ .

**Λύση** Αφού λοιπόν  $g(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left( \sin t + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$ , τότε:

$$\begin{aligned} f(t) &= c - \frac{4}{\pi} \left( \cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} \right) \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} = c \end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} \right)$$

Παρατηρώ ότι η  $f$  έχει ασθενέστερες υψηλές συχνότητες από τη  $g$ .

**Παράδειγμα** Να υπολογιστεί το:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Είναι

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3} + \frac{\sin \frac{5\pi}{2}}{5} \right) \\ 1 = g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right) = S_1 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα** Να υπολογιστεί το:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} 0 = f(0) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) \\ \frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \end{aligned}$$

## Κεφάλαιο 9 Κεφάλαιο 9: Μετασχηματισμός Φουριερ

### Θεώρημα

Έστω ότι η  $f(t)$  ικανοποιεί τα εξής:

1. Τις συνθήκες Dirichlet  $\forall L \in \mathbb{R}$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  (δηλ. η  $f(t)$  είναι απολύτως ολοκληρώσιμη)

Τότε:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

όπου:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

**Απόδειξη** Δίνεται η  $f(t)$ . Διαλέγω τυχόν  $t$  και ορίζω την  $f_T(t) = f(t) \quad \forall t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ , που έχει σειρά Fourier:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{\frac{in2\pi t}{T}}$$

όπου

$$c(n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{in2\pi t}{T}} dt$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = n \cdot \delta\omega = \frac{2n\pi}{T}$$

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{in2\pi t}{T}} dt \right) e^{\frac{in2\pi t}{T}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2\pi}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{\frac{in2\pi t}{T}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} \delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right)}_{F(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Την  $F(\omega)$  την ονομάζουμε **Fourier μετασχηματισμένη** της  $f(t)$ , και γράφουμε:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega)$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}f(t) \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega))$$

**Παρ.**

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| \geq a \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a 1e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-a}^a \\
 &= \frac{2}{\omega} \left( \frac{-e^{-i\omega a}}{2i} \right) \\
 &= 2 \frac{\sin(\omega a)}{\omega}
 \end{aligned}$$

Παρ.

$$f(t) = e^{-|t|}$$

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt &= -\frac{1}{1+i\omega} \Big|_{t=0}^{\infty} \\
 &= -\frac{1}{1+i\omega} (e^{-(1+i\omega)\cdot\infty} - e^{-(1+i\omega)\cdot 0}) \\
 &= -\frac{1}{1+i\omega} (0 - 1) \\
 &= \frac{1}{1+i\omega}
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt &= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \\
 &= \boxed{\frac{2}{1+\omega^2} = \mathcal{F}(e^{-|t|})}
 \end{aligned}$$

Ο Μ/Σ Fourier εφαρμόζεται μόνο σε απόλυτα ολοκληρώσιμες  $f(t)$ . Δηλαδή υποθέτω ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = M < \infty$$

Αυτό το κάνω, διότι  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < M < \infty$  είναι ικανή συνθήκη για να υπάρχει το  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ . Έχει μία σημαντική συνέπεια:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$$

Για παράδειγμα, οι  $\mathcal{F}(e^t)$  και  $\mathcal{F}(e^{-t})$  δεν υπάρχουν, ενώ ο  $\mathcal{F}(e^{-|t|})$  υπάρχει διότι η  $e^{-|t|}$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Επίσης  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| d\omega = M' < \infty$

### Θεώρημα 9.1

$$\mathcal{F}(\kappa f + \lambda g) = \kappa \mathcal{F}(f) + \lambda \mathcal{F}(g)$$

Παρ.

$$\mathcal{F}(3 \cdot \text{square} + 5 \cdot e^{-|t|}) = 6 \frac{\sin(\omega)}{\omega} + \frac{10}{1+\omega^2}$$



Η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται για τον αναγνώστη.

Το Wolfram επιστρέφει τους Μ/Σ Fourier με διαφορετικό παράγοντα, για λόγους συμμετρίας! ( $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  έναντι  $\frac{1}{2\pi}$ ). Στις σημειώσεις τηρείται η ιστορική σύμβαση που ακολουθείται και από προγράμματα όπως, π.χ. Matlab.

### Θεώρημα 9.2

Έστω  $F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$ , τότε:

$$\mathcal{F}(F(t)) = 2\pi f(-\omega)$$

Δηλαδή:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(t))) = 2\pi f(-t)$$

Απόδ.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t)) &= F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) &= f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \\ 2\pi f(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)e^{-i\tau t} d\tau = 2\pi f(-t) \\ &= \mathcal{F}(F(\tau)) = 2\pi f(-t)\end{aligned}$$

Παρ.

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

Λύση

$$\dots = \int_{-\infty}^{\infty} \dots$$

ή

Παρατηρώ ότι  $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{-|t|}\right) = \frac{1}{1+\omega^2} = F(\omega) = F(-\omega)$

Άρα  $F(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \mathcal{F}(F(t)) = 2\pi f(-\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

### Θεώρημα 9.3

$$\mathcal{F}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Απόδ.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(at)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}at} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}at} d(at) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa)e^{-i\frac{\omega}{a}\kappa} d\kappa = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

Παρ.

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{4+9t^2}\right) = \frac{1}{4} \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\frac{9}{4}t^2}\right) = \frac{1}{4} \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}t\right)^2}\right)$$

$$\text{Για } f(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad F(\omega) = \pi e^{-|\omega|},$$

$$f\left(\frac{3}{2}t\right) = \frac{1}{1+\frac{9}{4}t^2} \rightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{2\pi}{3}e^{-\left|\frac{3\omega}{2}\right|}$$

Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι  $\frac{1}{4} \frac{2\pi}{3} e^{-\left|\frac{3\omega}{2}\right|}$

### Θεώρημα

Έστω  $F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$ . Τότε

1.  $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega F(\omega)$
2.  $\mathcal{F}\left(\int f(t) dt\right) = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$
3.  $\mathcal{F}(-itf(t)) = \frac{dF}{d\omega}$

Απόδ.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \\ &= f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d(e^{-i\omega t}) \\ &= f(\infty)e^{-i\omega\infty} - f(-\infty)e^{i\omega\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega)f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= 0 - 0 + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega F(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) \end{aligned}$$

Θέτω  $g(t) = \int f(t) dt$ , οπότε  $\frac{dg}{dt} = f(t)$ .

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}\left(\frac{dg}{dt}\right) = i\omega G(\omega) \implies \mathcal{F}\left(\int g(t) dt\right) = G(\omega) = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$

Το (3) δείχνεται όπως το (1).

### Ορισμός: Βηματική συνάρτηση του Heaviside

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{t=0}^{\infty} = \boxed{\frac{1}{i\omega} = \mathcal{F}(h(t))}$$

**Παρ.**

$$\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}h(t)$$

**Λύση**

$$i\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = \frac{1}{i\omega} (???)$$

Είναι  $\mathcal{F}(f(t)e^{i\omega t}) = F(\omega - \omega_0)$ .

Θέτω  $f(t) = h(t)$ ,  $e^{i\omega t} = e^{-t}$ . Δηλαδή  $\omega_0 = \frac{1}{i} = i$ , οπότε  $\mathcal{F}(e^{-t}h(t)) = \frac{1}{1+i\omega}$ .

Άρα

$$\begin{aligned} i\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) &= \frac{1}{i\omega + 1} \implies Y(\omega) = \frac{1}{(i\omega + 1)(i\omega + 2)} \\ &\implies Y(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega} - \frac{1}{2 + i\omega} \\ &\implies \mathcal{F}^{-1}(Y(\omega)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1 + i\omega}\right) - \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2 + i\omega}\right) \\ &\implies \boxed{y(t) = e^{-t}h(t) - e^{-2t}h(t)} \end{aligned}$$

είναι η λύση της δοθείσας εξίσωσης. Πού πήγε η σταθερά. Ποιες είναι οι αρχικές συνθήκες.

Αν πήγαινα να την λύση αλλιώς:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = f(t)$$

Ομογενής  $\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ , γενική λύση  $y_h(t) = ce^{-2t}$ .

Ειδική λύση της μη ομογενούς  $y_p(t)$ .

Γενική λύση της μη ομογενούς:  $y(t) = ce^{-2t} + y_p(t)$ . Ποια είναι η τιμή της  $c$ .

Είναι  $c = 0$  διότι ζητώ λύση η οποία έχει μετασχηματισμό Φουριερ. Άρα πρέπει  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (ce^{-2t} + y_p(t)) = 0$ , άρα  $c = 0$ .

Δηλαδή κρυβόταν από την εκφώνηση του προβλήματος ότι  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = 0$ .

**Παρ.** Υπολογίστε  $\mathcal{F}\left(\frac{t}{(t^2+1)^2}\right)$

**Λύση**  $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$ , τότε  $\frac{df}{dt} = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$ .

$$\mathcal{F}\left(\frac{t}{(t^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = -\frac{1}{2}i\omega\mathcal{F}(f) = -\frac{1}{2}i\omega\pi e^{-|\omega|}$$

**Παρ.** Να υπολογιστεί ο  $\mathcal{F}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$ .

**Λύση** Θέτω  $f(t) = \frac{1}{1+t^2} \implies F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$ .

Οπότε  $\mathcal{F}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = \frac{1}{-i}\mathcal{F}(-it \cdot f(t)) = i\frac{dF}{d\omega}$ .

**Προσοχή**

$$G(\omega) = i\frac{dF}{d\omega} = \pi i \frac{d}{d\omega}(e^{-|\omega|}) = \begin{cases} \pi i e^{\omega} & \omega < 0 \\ \text{ΚΕΦ. 11} & \omega = 0 \\ -\pi i \cdot e^{-|\omega|} & \omega > 0 \end{cases}$$

### Θεώρημα: Plancherel/Parseval

Plancherel

$$f \bullet g = \frac{1}{2\pi} F \bullet G$$

δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) \overline{G(\omega)} d\omega$$

Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Η απόδειξη είναι εύκολη και υπάρχει στις σημειώσεις.

### Συνέλιξη

#### Ορισμός: Σπουδαίος Ορισμός

Η **συνέλιξη** των  $f(t)$ ,  $g(t)$  συμβολίζεται  $f * g$  και ορίζεται:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

### Παράδειγμα

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Περίπτωση  $t < -2$  Τότε

$$\begin{aligned} (g * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{-2} g(\tau) g(t - \tau) d\tau + \int_{-2}^{-1} g(\tau) g(t - \tau) d\tau + \int_{-1}^{\infty} g(\tau) g(t - \tau) d\tau = 0 \end{aligned}$$

Μετά από πράξεις θα δούμε ότι

$$(g * g)(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ 2 - t & -2 < t < 0 \\ 2 + t & 0 \leq t < 2 \\ 0 & 2 < t \end{cases}$$

### Θεώρημα

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$$

### Απόδειξη

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * g) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-i\omega t} dt \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) e^{-i\omega t} dt \\&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \right) d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-i\omega(t - \tau)} d(t - \tau) \right) e^{-i\omega\tau} d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau \\&= G(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\&= G(\omega) F(\omega)\end{aligned}$$

### Θεώρημα: Πόρισμα

$$\begin{aligned}f * g &= g * f \\f * (g + h) &= f * g + f * h \\(f * g) * h &= f * (g * h)\end{aligned}$$

**Απόδ.**

$$\mathcal{F}(f * g) = F(\omega)G(\omega) = G(\omega)F(\omega) = \mathcal{F}(g * f)$$

ομοίως και τα υπόλοιπα.

**Παρ.** Να βρεθεί ο  $\mathcal{F}(\pi * \pi)$ .

**Λύση**

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\pi(t)) &= \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} \\ \mathcal{F}(\lambda(2t)) = \mathcal{F}(\pi(t) * \pi(t)) &= \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} = \frac{4 \sin^2 \omega}{\omega^2}\end{aligned}$$

Τι να κάνω όταν η  $f(t)$  δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη;

Θα δουλέψω με την  $g(t) = e^{-\sigma t} f(t)$  και θα περιοριστώ στο  $t \geq 0$ .

Τότε η  $g(t)$  θα είναι (για αρκετά μεγάλο  $\sigma$ ) απολύτως ολοκληρώσιμη, και μπορώ να πάρω  $\mathcal{F}(g(t)) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-i(\sigma + i\omega)t} dt \stackrel{\text{Θέτοντας } s = \sigma + i\omega}{=} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}(f(t))$