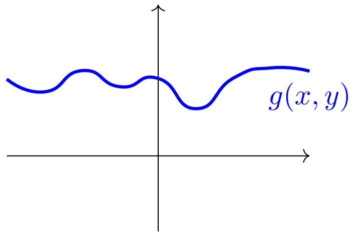
Την Τρίτη μάθημα 8:30 χωρίς διάλειμμα

Σήμα - σύστημα

$$\boxed{\underbrace{g}_{\text{εξαρτημένη}} = f(\underbrace{t}_{\text{ανεξάρτητη}})} \qquad g = f(\vec{r}, t) \qquad \vec{E}(\vec{r}, t)$$

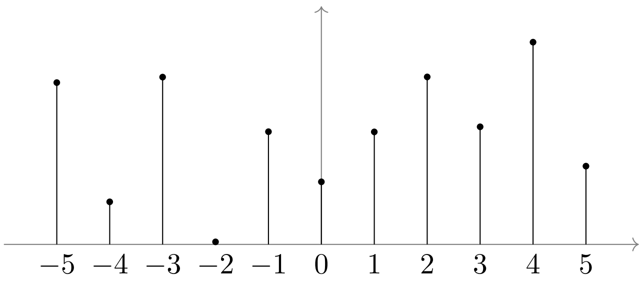
Αναλογικό

Αν t συνεχής $\in \mathbb{R}$
και y συνεχής $\in \mathbb{R}$



Διακριτού χρόνου / Διακριτό (discrete)

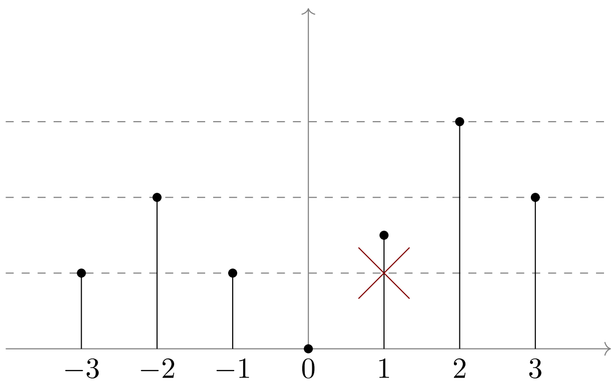
t διακριτό $\to \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$
g συνεχής $\in \mathbb{R}$



7º εξάμηνο

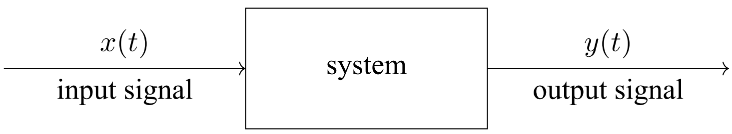
Κβαντισμένο

$n \in \mathbb{Z}$
g διακριτή



Στοχαστικό Περιέχει και τις τρεις κατηγορίες

0.1 Σύστημα



0.2 Περιοδικά σήματα

Αν $\exists T \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = x(t+T)$ τότε $x(t)$ **περιοδικό σήμα** με περίοδο T.
Ή θα είναι 0, ή θα συνεχιστεί για πάντα.

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t)\,\mathrm{d}t\ \forall t$$

Η σύνθεση μιας συνάρτησης με μια περιοδική συνάρτηση είναι περιοδική;

Απόδ. Έστω g μία περιοδική συνάρτηση:

$$\begin{aligned}\big(f \circ g\big)(x) &= f\left(g(x)\right) = f\left(g(x+T)\right) = \\ &= \big(f \circ g\big)(x+T)\end{aligned}$$

0.3 Συμμετρίες

- Αν $x(t) = x(-t)\ \forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **άρτια συνάρτηση** (even function).
- Αν $x(t) = -x(t)\ \forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **περιττή συνάρτηση** (odd function).

$\forall x(t) \quad \exists\, x_0(t), x_e(t) : x(t) = x_e(t) + x_0(t)$

Απόδ.

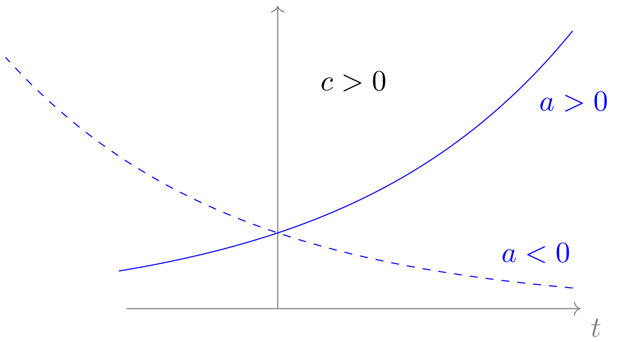
$$\begin{aligned}x_e(t) &= \frac{x(t)+x(-t)}{2} \\ x_o(t) &= \frac{x(t)-x(-t)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\underbrace{\ _e\ }_{\text{άρτια}} y_e &= z_e \\ x_o y_o &= z_e \\ x_e y_0 &= z_0 \\ \int_{-A}^{A} x_0(t)\,\mathrm{d}t &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t)\,\mathrm{d}t &= ?\ \text{(εξαρτάται)} \\ \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} x_0(t)\,\mathrm{d}t &= 0 \quad \text{(principal Cauchy value)}\end{aligned}$$

Χαρακτηριστικά σήματα

1) **Εκθετικό σήμα**

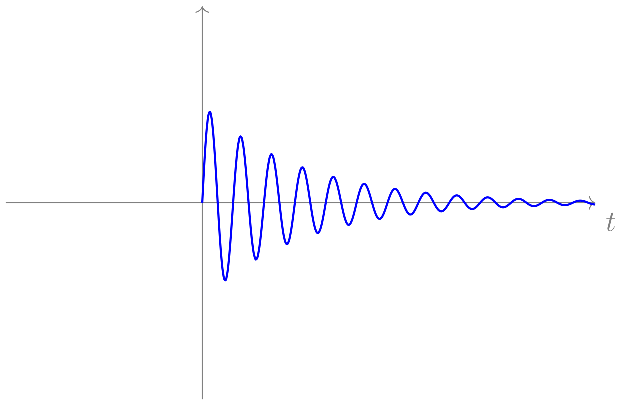
$$x(t) = ce^{at} \quad a \in \mathbb{R} \quad c > 0$$



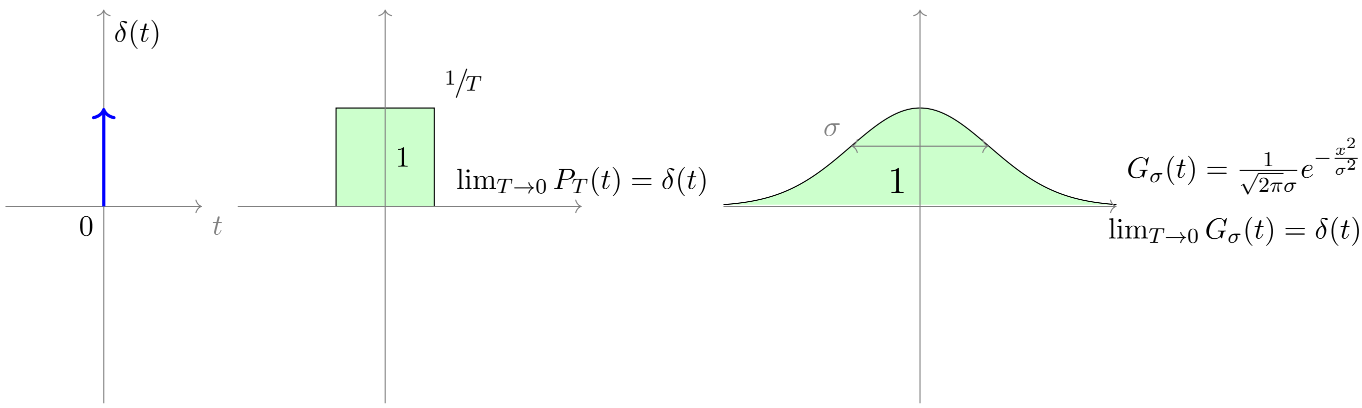
$$x(t) = ce^{(\sigma t + j\omega)t} = ce^{\sigma t}e^{j\omega t} = ce^{\sigma t}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right]$$

2) **(Συν)ημιτονοειδή σήματα**

$$x(t) = A\cos(\omega t \pm \phi) = a\mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega t + \phi)}\right\} = A\frac{e^{j(\omega t \pm \phi)} + e^{-j(\omega t \pm \phi)}}{2}$$



3) **Δέλτα Dirac $\delta(t)$**



Ορ.

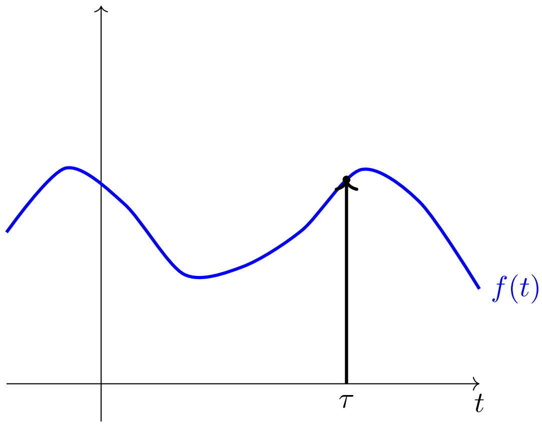
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)\ \forall f(t)$$

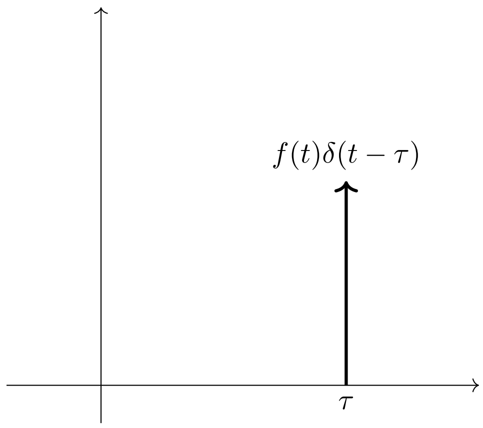
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = f(\tau)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)$$





Ιδιότητες της $\delta(t)$

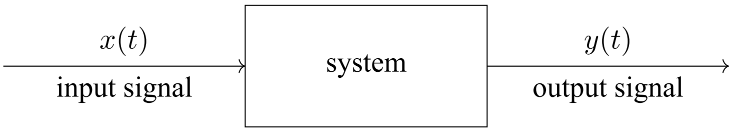
1. **Κλιμάκωση**

$$a \in \mathbb{R} : \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

Απόδ.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\boxed{\delta(at)}\,\mathrm{d}t}_{\substack{at=\xi \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\xi}{a}}} = \int_{-\infty_{(a)}}^{\infty_{(a)}} \phi\left(\frac{\xi}{a}\right)\delta(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{a} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi\left(\frac{\xi}{a}\right)}{|a|}\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{\phi(0)}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\boxed{\frac{\delta(t)}{|a|}}\mathrm{d}t$$

2. $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$
3. $f(t)\delta(t-\xi) = f(g)\delta(t-\xi)$



$y(t) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$
$\forall x_1(t)\; x_n(t)$
$y_1(t) = \mathscr{L}\left\{x_1(t)\right\}$
$y_2(t) = \mathscr{L}\left\{x_2(t)\right\}$

Για const $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$
$$y(t) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$$

ανν

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

τότε

$$\mathscr{L}: \text{ γραμμικό σύστημα}$$

- $g(t) = \mathscr{L}\left\{x(t)\right\}$
  $x'(t) = x(t-\tau)$
  ανν $y'(t) = \mathscr{L}\left\{x'(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{x(t-\tau)^2\right\} = y(t-\tau)$
  τότε το σύστημα $\mathscr{L}$ είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.

Υποστηρίζω ότι ένα γραμμικό & ΑΚΜ σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική απόκριση $h(t)$.

Απόδ. Από παραπάνω, γνωρίζουμε ότι $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \\
&\overset{\text{linearity}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{L}\left\{x(\tau)\delta(t-\tau)\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathscr{L}\left\{\delta(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\
&\underset{TSI}{\overset{\text{ΑΚΜ}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\underbrace{h(t-\tau)}_{\text{linear time-shift invariant}}\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

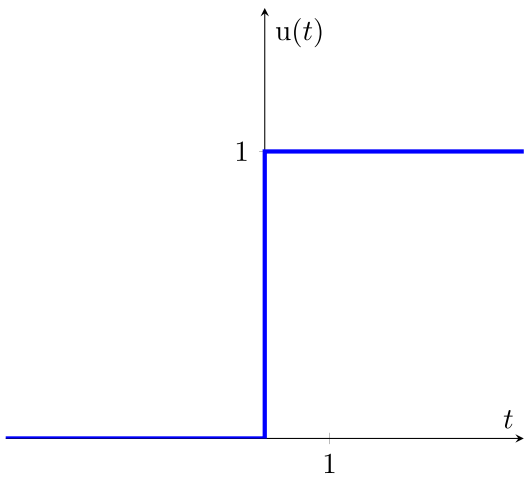
- $\delta(t) = \delta(-t)$ άρτια συνάρτηση
- $\delta^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t)$, για την οποία αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\ \phi^{(n)}(t)\Big|_{t=0}$$

0.3.1 Βηματική Συνάρτηση (Unit Step Function)

$$\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{N}_{\mathrm{u}}\left\{\phi(t)\right\} = \int_0^{\infty} \underbrace{\phi(t)}_{\text{number}}\,\mathrm{d}t$$

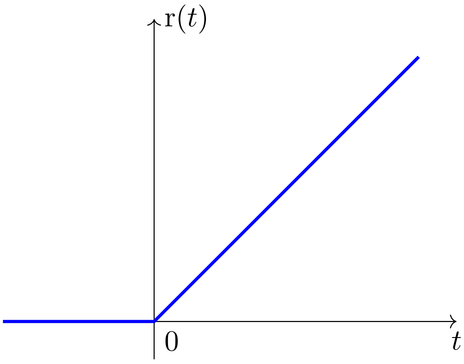


$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{u}(t)$$

$$\mathrm{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{\infty} \delta(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

0.3.2 Ράμπα

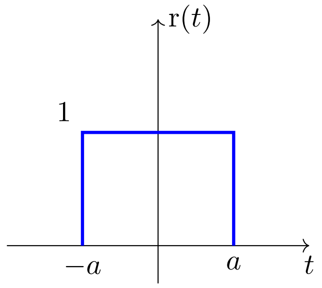
$$\mathrm{r}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = t\mathrm{u}(t)$$

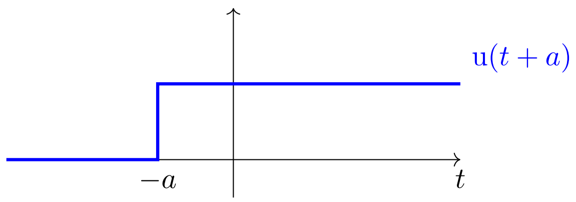


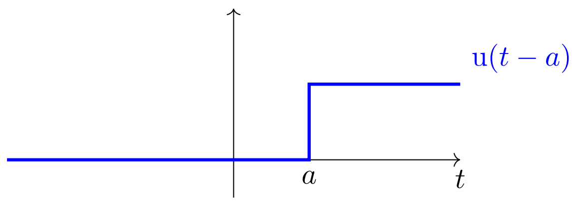
$$\mathrm{u}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{r}(t)$$

0.3.3 Ορθογωνικός παλμός (Rectangular Pulse function)

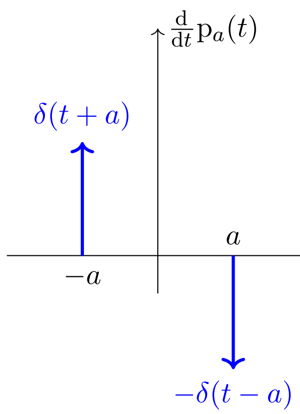
$$\mathrm{p}_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$





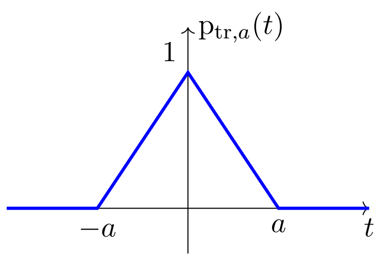


$$\begin{aligned} \mathrm{p}_a(t) =& \mathrm{u}(t+a) - \mathrm{u}(t-a) \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{p}_a(t) =& \delta(t+a) - \delta(t-a) \end{aligned}$$

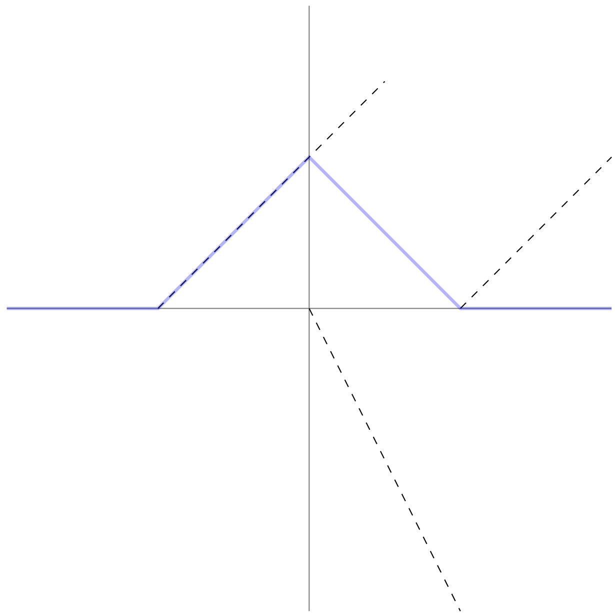


0.3.4 Τριγωνικός Παλμός (Triangular Pulse function)

$$\mathrm{p}_{\mathrm{tr},a} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$



$$p_{\mathrm{tr},a}(t) = \frac{1}{a}\left[\mathrm{r}(t+a) + \mathrm{r}(t-a) - 2\mathrm{r}(t)\right]$$



0.4 Χαρακτηριστικά Μεγέθη

1) **Μέση τιμή (Mean Value)**

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\mathrm{d}t$$

Αν περιοδική τότε

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \frac{1}{T} = \int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

2) **Ενεργός τιμή (Root Mean Square Value)**

$$\overline{\overline{x(t)}} = \left[\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t\right]^{1/2}$$

Αν ημιτονοειδές σήμα $\bar{\bar{x}}(t) = \frac{x_{\max}}{\sqrt{2}}$

3) **Ενέργεια - Ισχύς**

- Στιγμιαία ισχύς (Instant power)

$$p(t) = x^2(t)$$

- Μέση ισχύς (Mean power)

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \left(\overline{\overline{x(t)}}\right)^2$$

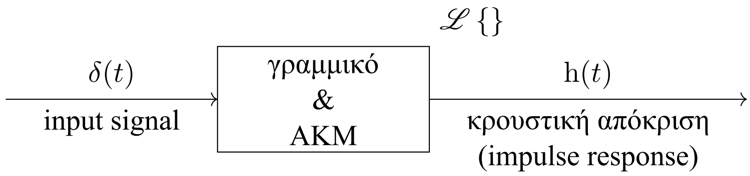
- Ενέργεια (Energy)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t = (t_2 - t_1)\left(\overline{\overline{x(t)}}\right)^2$$

Σήματα $\begin{cases} \textbf{Σήμα ενέργειας} \text{ αν } \lim_{T\to\infty} W < \infty \\ \\ \textbf{Σήμα ισχύος} \text{ αν } \lim_{T\to\infty} \overline{p(t)} > 0 \\ \text{Υπάρχουν και σήματα που δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος.} \end{cases}$

0.5 Συνέλιξη

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau$$



$$h(t) = \mathscr{L}\left\{\delta(t)\right\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{x(t)}_{\text{είσοδος}}\ \underbrace{*}_{\text{συνέλιξη}}\ \underbrace{h(t)}_{\text{κρουστική απόκριση}}$$

Συνέλιξη - Convolution

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$ **Αντιμεταθετική**

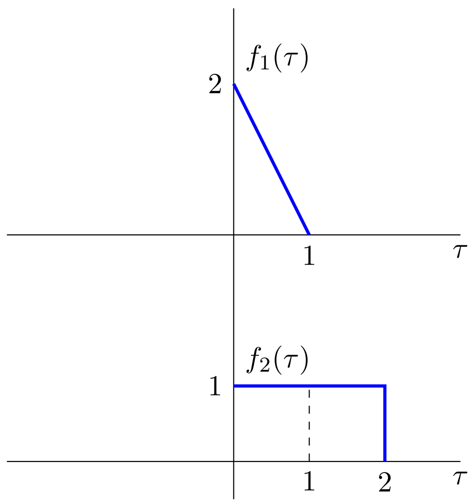
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)y(\lambda)[-\,\mathrm{d}\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda)x(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = y(t) * x(t)$$

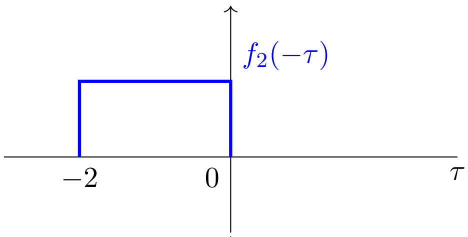
- $x_1(t) * \left[x_2(t) * x_3(t)\right] = \left[x_1(t) * x_2(t)\right] * x_3(t)$ **Προσεταιριστική**

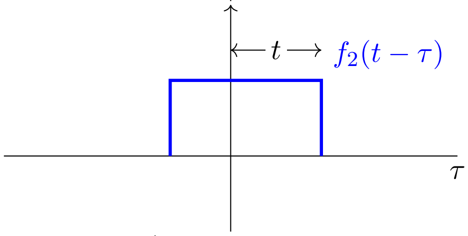
Παρ.

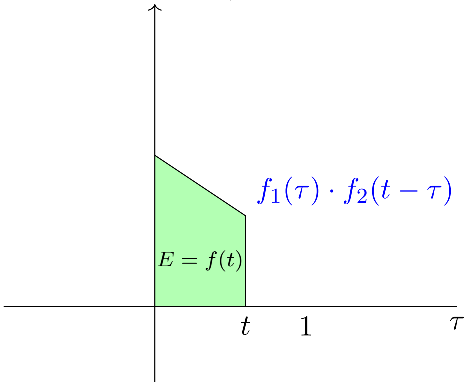
$$f_1(t) = 2(1-t)\left[\mathrm{u}(t) - u(t-1)\right]$$
$$f_2(t) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-\tau)$$

Γραφική μέθοδος υπολογισμού συνέλιξης

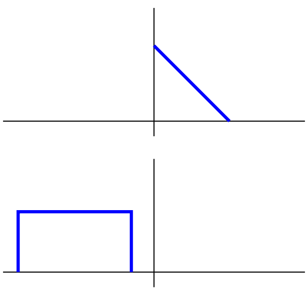






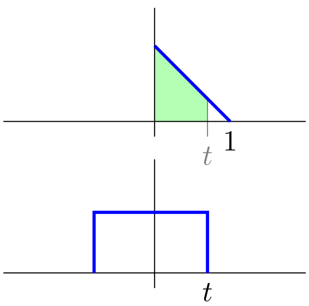


- $t < 0$



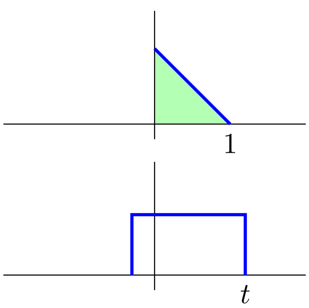
$f(t) = 0$

- $0 < t < 1$



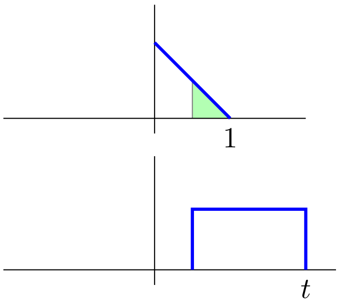
$f(t) = \frac{1}{2}(2 + 2 - 2t)t = (2 - t)t$

- $1 < t < 2$



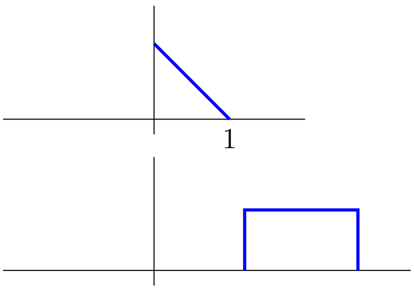
$f(t) = 1$

- $2 < t < 3$

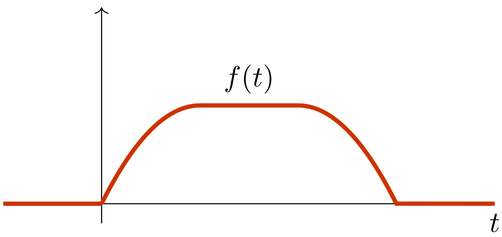


$f(t) = \frac{(t-1)\cdot 2\cdot\big(1-(t-2)\big)}{2} = (t-1)(3-t)$

- $t > 3$



$f(t) = 0$



Αναλυτική μέθοδος Παρατηρώ ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau)\mathrm{u}(t-\xi)\mathrm{u}(\phi-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(\phi-\xi)$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2(1-\tau)}_{x(\tau)}\big[\mathrm{u}(\tau)-\mathrm{u}(\tau+1)\big]\big[\mathrm{u}(t-\tau)-\mathrm{u}(t-\tau-2)\big]\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\big[\mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau)-\mathrm{u}(\tau-1)\mathrm{u}(t-\tau)-\mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau-2)+\mathrm{u}(\tau-1)\mathrm{u}(t-\tau-2)\big]\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{0}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t) - \int_{1}^{x} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t-1) - \int_{0}^{t-2} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t-2) + \int_{1}^{t-2} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t-3) \\
&= (2t-t^2)\mathrm{u}(t)-\big[2t-t^2-1\big]\mathrm{u}(t-1)-\big[2(t-2)-(t-2)^2\big]\mathrm{u}(t-2)+\big[2(t-2)-(t-2)^2-1\big]\mathrm{u}(t-3)
\end{aligned}$$

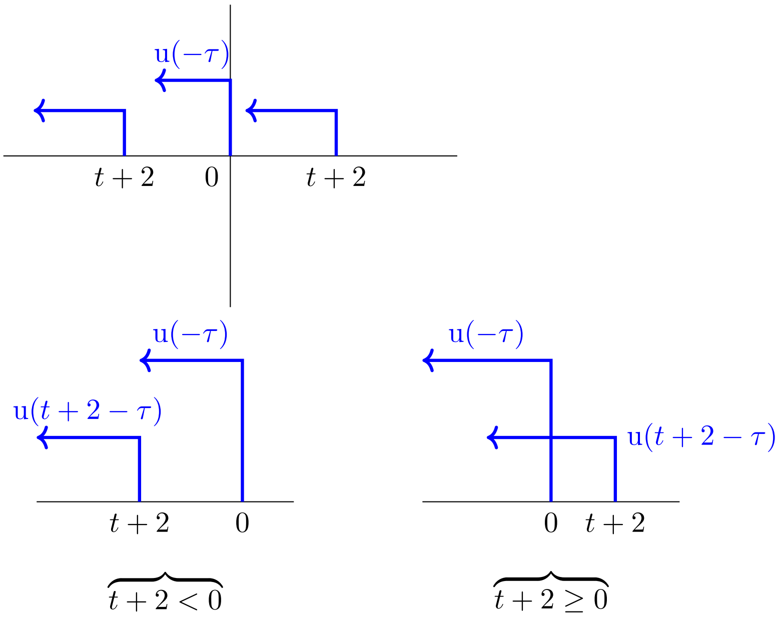
Ex

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= e^t\mathrm{u}(-t) \\
f_2(t) &= \mathrm{u}(t+2) - u(t+1) \\
f &= f_1 * f_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}\left(-(t-\tau)+2\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}(\tau-t+2)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t-2}^{0} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t-2) \\
&= e^{\tau}\big|_{t-2}^{0}\,\mathrm{u}(2-t) \\
&= \left[1-e^{t-2}\right]\mathrm{u}(2-t)
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau)\mathrm{u}(\tau-\xi)\mathrm{u}(\phi-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(\phi-\xi)
$$

Ex.



$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{t}\mathrm{u}(-t) \\
y(t) &= \mathrm{u}(t+2) \\
z(t) &= x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}\left[(t-\tau)+2\right]\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\left[1-\mathrm{u}(t)\right]\mathrm{u}(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(\tau)u(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{u}\left(t+\cancelto{1}{2-(-\infty)}\right) - \int_{0}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t+2) \\
&= e^{t+2} - \left[e^{t+2}-1\right]\mathrm{u}(t+2)
\end{aligned}
$$

Ex.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{t}\mathrm{u}(-t) \\
y(t) &= \mathrm{u}(t+2) - \mathrm{u}(t+1) \\
z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\left[\mathrm{u}(t-\tau+2) - \mathrm{u}(t-\tau+1)\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}(t-\tau+1)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\left[1-\mathrm{u}(\tau)\right]\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\left[1-\mathrm{u}(\tau)\right]\mathrm{u}(t-\tau+1)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(t-\tau+1)\,\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau+1 \\
&= \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau - \int_{0}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t+2) + \int_{0}^{t+1} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t+1) \\
&= \int_{t+1}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau - \left[e^{t+2}-1\right]\mathrm{u}(t+2) + \left[e^{t+1}-1\right]\mathrm{u}(t+1)
\end{aligned}
$$

$\exists h(t)$ ανν LTI

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t) * h(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

Έστω ότι η $x(t) = e^{j\omega t}$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau}_{h(t)\xrightarrow{FT}H(\omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t} \\
y(t) &= A_1 e^{j\omega_1 t} H(\omega_1) + A_2 e^{j\omega_2 t} H(\omega_2)
\end{aligned}
$$

Κεφάλαιο 1 Συναρτηστιακοί χώροι

Διανυσματικός χώρος S

$\bar{x}, \quad \bar{y} \quad S$

Εσωτερικό γινόμενο

$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in \mathbb{C}$

1) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^*$

2) $c \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle c\bar{x}, \bar{y} \rangle$

3) $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$

4) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$ με $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$ ανν $\bar{x} = \bar{0}$

Νόρμα

$\bar{x} \in S$

$||\bar{x}|| \geq 0$

1) $||\bar{x}|| = 0$ ανν $\bar{x} = \bar{0}$

2) $||a\bar{x}|| = |a| ||\bar{x}|| \quad x \in \mathbb{C}$

3) $||\bar{x} + \bar{y}|| \leq ||\bar{x}|| + ||\bar{y}||$

Μέτρο: Απόσταση μεταξύ $\bar{x}, \bar{y} \in S$

1) $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \qquad d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ ανν $\bar{x} = \bar{y}$

2) $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$

3) $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{y}, \bar{z}) \quad \bar{z} \in S$

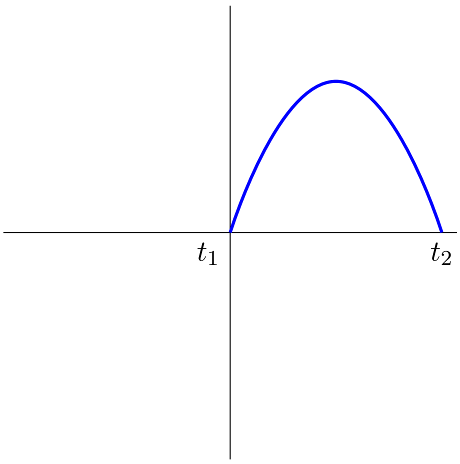
Συναρτησιακός χώρος

$$x(t), y(t) \in S = \big\{ x(t) / x(t) : [t_1, t_2] \to \mathbb{R} \big\}$$

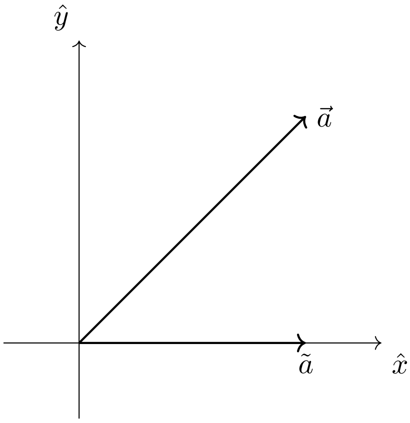
$$\big\langle x(t), y(t) \big\rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y(t) \, \mathrm{d}t$$

$$\big|\big| x(t) \big|\big| = \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \, \mathrm{d}t \right]^{1/2}$$

$$d\big(x(t), y(t)\big) = \left[\int_{t_1}^{t_2} \big[x(t) - y(t) \big]^2 \, \mathrm{d}t \right]^{1/2}$$



$$\text{Αν } \left\langle \phi_1(t), \phi_2(t) \right\rangle = 0 \quad \phi_1(t) \perp \phi_2(t)$$
$$\left\langle \phi_1(t), \phi_1(t) \right\rangle = 1 \quad \phi_1(t) \text{ κανονική}$$



Τερατοχώρος

$\hat{x}, \hat{y}$ όχι εξαρτημένα (συνευθειακά)
Ποια είναι η καλύτερη προσέγγιση για το $\vec{a}$ εφ' όσον δεν υπάρχει το $\vec{y}$;
$\tilde{a}$ best γιατί $\mathrm{d}(\vec{a}, \tilde{a})$ min.
Άρα:

$$\tilde{a} = k\hat{x}$$
$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$
$$\vec{a} - \tilde{a} = (a_x - k)\hat{x} - a_y\hat{y}$$
$$d(\vec{a}, \tilde{a}) = \sqrt{(a_x - k)^2 + a_y^2}$$
$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(d(\vec{a}, \tilde{a})\right) = \frac{a_x - k}{\cdots} = 0 \implies k = a_x = \tilde{a} \cdot \hat{x}$$
$$\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x$$

Η βέλτιστη έκφραση του $\vec{a}$ στο δισδιάστατο χώρο είναι το ίδιο το $\vec{a}$.

Μη κάθετα διανύσματα

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$
$$\vec{a} - \tilde{a} = (a_x - k)\hat{x} + a_y\hat{y}$$
$$\mathrm{d}(\vec{a},\tilde{a}) = ||\vec{a}-\tilde{a}|| = \sqrt{(\vec{a}-\tilde{a})(\vec{a}-\tilde{a})} = \Big(\big[(a_x-k)\hat{x}+a_y\hat{y}\big]\cdot\big[(a_x-k)\hat{x}+a_y\hat{y}\big]\Big)^{1/2}$$
$$\Big[(a_x-k)^2 + a_y^2 + 2(a_x-k)a_y\hat{x}\cdot\hat{y}\Big]^{1/2}$$
$$\vec{a}_{\text{best}} = (\vec{a}\cdot\hat{x})\hat{x} \neq a_x$$
$$\boxed{\vec{a}\cdot\hat{x} = a_x + a_y\cos\phi \neq a_x}$$

Συναρτηστιακός κόσμος $\phi_n(t)$ παράγουν χώρο με το μηχανισμό:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(t) \quad t\in\Delta$$

$\phi_n(t)$ ανεξάρτητες μεταξύ τους (βάση απειροδιάστατου χώρου)

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=0}^{M} \underbrace{\hat{a}_n}_{\neq a_n,\ \text{επειδή η βάση δεν είναι ορθοκανονική}} \phi_n(t) \text{ βέλτιστη, ώστε η απόσταση με την } f \text{ να είναι ελάχιστη}$$

$$\begin{aligned}
\overbrace{I^2}^{\text{σφάλμα}} &= \int_\Delta \Big[f(t)-\hat{f}(t)\Big]^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_\Delta \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\phi_n(t) - \sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n\phi(t)\right]^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_\Delta \left(\sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n\phi_n(t)\right)^2 \mathrm{d}t - 2\int_\Delta \left[f(t)\sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n\phi_n(t)\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_\Delta \sum_{n=0}^{M}\big[\hat{a}_n\phi_n(t)\big]^2\,\mathrm{d}t + 2\int_\Delta\left[\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=n+1}^{M}\hat{a}_n\cdot\hat{a}_m\phi_n(t)\phi_m(t)\right]\mathrm{d}t - 2\int_\Delta\sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n f(t)\phi_n(t)\,\mathrm{d} \\
&= \int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n^2\int_\Delta\phi_n^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\sum_{n=0}^{M}\sum_{n=m+1}^{M}\hat{a}_n\hat{a}_m\int_\Delta\phi_n(t)\phi_m(t)\,\mathrm{d}t - 2\sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n\int_\Delta f(t)\phi_n(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}(I^2)}{\mathrm{d}\underbrace{\hat{a}_i}_{\text{από 0 έως } n}} = 2\hat{a}_i\int_\Delta\phi_i^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\sum_{m\neq i}\hat{a}_m\int_\Delta\phi_i(t)\phi_m(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_\Delta f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Σύστημα εξισώσεων Αν $\phi_i^{(t)}$ μοναδιαία, τότε: $\int_\Delta \phi_i^2(t)\,\mathrm{d}t = 1$

Αν $\phi_i(t)$ είναι ορθογώνια, τότε: $\int_\Delta \phi_i(t)\phi_j(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad i\neq j$

Αν $\big\{\phi_i(t)\big\}$ είναι ορθοκανονική βάση, τότε:

$$2\vec{a_i} - 2\int_\Delta f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies \vec{a_i} = \overbrace{\int_\Delta \underbrace{f(t)}_{\text{προβολή του διανύσματος στο μοναδιαίο}}\phi_i(t)\,\mathrm{d}t}^{\text{όπως το } k=\vec{a}\cdot\vec{x}} = a_i$$

Με άλλη γραφή:

$$2\vec{a_i}\langle \phi_i, \phi_i \rangle + 2\sum_{m+i} \vec{a_m}\langle \phi_i, \phi_m \rangle - 2\langle f, \phi_i \rangle = 0$$

Είναι:

$$\langle f, \phi_i \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n, \phi_i \right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \langle \phi_n m \phi_i \rangle = a_i \quad \text{όπως στα διανύσματα}$$

Ηθικό δίδαγμα: Αν η βάση του χώρου είναι ορθοκανονική και μας ζητηθεί να υπολογίσουμε μία προσέγγιση της συνάρτησης σε έναν υποχώρο, μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε την προβολή της συνάρτησης πάνω στη βάση.

Ex. $f(t) = e^{-3t}\mathrm{u}(t) \qquad \phi_1(t) = e^{-t}\mathrm{u}(t) \quad \& \quad \phi_2(t) = e^{-2t}\mathrm{u}(t)$

$$\overbrace{\hat{f}(t)}^{\text{βέλτιστη}} = a_1 e^{-t}\mathrm{u}(t) + a_2 e^{-2t}\mathrm{u}(t)$$

$$\int [a_1\phi_1 + a_2\phi_2 - f]\,\phi_1\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_0^\infty \left[a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t}\right] e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 \implies$$

$$a_1\int_0^\infty e^{-2t}\,\mathrm{d}t + a_2\int_0^\infty e^{-3t}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty e^{-4t}\,\mathrm{d}t = 0 \implies \boxed{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} - \frac{1}{4} = 0}$$

$$\int \left[a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t}\right] e^{-2t}\,\mathrm{d}t = 0 \implies \boxed{\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4} - \frac{1}{5} = 0}$$

$$a_1 = -3/10,\ a_2 = 6/5$$

$$\underbrace{\boxed{E \triangleq \int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \quad \text{Parseval's Theorem}}}_{\text{γενικότερη μορφή}}$$

Κεφάλαιο 2 Ανάλυση Fourier

2.0.1 Περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο T

$$x_k = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(k\omega t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ θεμελιώδης κυκλική συχνότητα}$$

$$\langle x_k(t), x_n(t)\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t)x_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} n \neq k \to 0 \\ n = k \to 1 \end{cases}$$

$$y_k = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(k\omega t)\ \langle y_k, y_n\rangle = \begin{cases} n \neq k \to 0 \\ n = k \to 1 \end{cases}$$

Υποστηρίζω ότι κάθε περιοδική $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$

Οραματίζομαι ότι αν η παραπάνω $f(t)$ είναι σήμα εισόδου σε ένα σύστημα, τα ημίτονα και συνημίτονα ως ιδιοσυναρτήσεις θα παραμείνουν αμετάβλητα, και θα τροποποιηθούν μόνο τα a_n, b_n.

$$z_k(t) = e^{jk\omega t}$$

$$\langle z_k, z_n\rangle = \begin{cases} k \neq n \to 0 \\ k = n \to T \end{cases}$$

$$z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}e^{jk\omega t}$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}} \text{ εκθετική σειρά}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right]} \text{ τριγωνομετρική σειρά A}$$

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega t + \phi_n)} \text{ τριγωνομετρική σειρά B}$$

Οι συντελεστές μπορούν να βρεθούν από τις προβολές της συνάρτησης πάνω στα ημίτονα και τα συνημίτονα:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Συνθήκες Dirichlet

1) $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$

2) Πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών εντός T

3) Πεπερασμένος αριθμός τοπικών ακροτάτων εντός T

$f(t)$ περιοδική T

Μορφή	Σειρά	Συντελεστές	Αλλαγές
Εκθετική	$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega n t}$	$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$	$F_0 = {}^{a_0}/_2$ $F_n = {}^1/_2(a_n - jb_n)$
Τριγωνομετρική Α	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$	$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$	$a_n = (F_n + F_{-n})$ $b_n = j(F_n - F_{-n})$ $a_0 = 2F_0$
Τριγωνομετρική Β	$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n)$		$A_0 = {}^{a_0}/_2$ $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\lvert F$ $\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$
$$= F_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

Άσκηση για το σπίτι Να βρεθούν η εκθετική και η τριγωνομετρική σειρά του σήματος:

2.1 Μετασχηματισμός Fourier

Φορέας συνάρτησης είναι το διάστημα του πεδίου ορισμού της στο οποίο η συνάρτηση δεν είναι 0 (από $\min x$ για το οποίο δεν είναι 0 ως το αντίστοιχο $\max x$).

$$\tilde{f}(t) = \sum k = -\infty^{\infty} f(t - kT)$$
$$\downarrow T\text{-περιοδική} \rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$
$$f(t) = \begin{cases} \tilde{f}(t) & -{}^T/_2 \leq t \leq {}^T/_2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Fourier

$$F(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

Προσοχή

Όταν παίρνουμε τύπους από τυπολόγια, ελέγχουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, για διαφορές στη σύμβαση!

Αντίστοιχος ορισμός

$$F(\mathfrak{f}) \stackrel{\triangle}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mathfrak{f}t}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathfrak{f}) e^{j2\pi\mathfrak{f}t}\,\mathrm{d}$$

(όπου $\mathfrak{f}$ η συχνότητα)

Η αρνητική συχνότητα δεν έχει καμία φυσική σημασία!

2.1.1 Ιδιότητες

- $$F(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = \underbrace{F_R(\omega)}_{\mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\}} + j\underbrace{F_i(\omega)}_{\mathrm{Im}\left\{F(\omega)\right\}}$$
  $$A(\omega) = \left|F(\omega)\right|$$

- $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\big)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\}} \underbrace{-}_{-} j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{Im}\left\{F(\omega)\right\}}$$

  Αν $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι άρτια
  $F(\omega)$ είναι πραγματική $\quad F(\omega) \equiv \mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\}$ και είναι άρτια
  Αν $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή
  $F(\omega)$ είναι φανταστική $\quad F(\omega) = j\mathrm{Im}\left\{F(\omega)\right\}$ και είναι περιττή
  Κάθε συνάρτηση είναι άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής. Έστω $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$. Τότε:

  $$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(f_o(t) + f_e(t)\big)\left(\cos\omega t - j\sin\omega t\right)\mathrm{d}t \\ &= \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f_o \cos\omega t\,\mathrm{d}t} + \int_{-\infty}^{\infty} f_e\cos\omega t\,\mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\,\mathrm{d}t - j\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f_e \sin\omega t\,\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

  Αν η f είναι πραγματική:
  $\mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\}$ είναι άρτια
  $\mathrm{Im}\left\{F(\omega)\right\}$ είναι περιττή
  $A(\omega) = \left|F(\omega)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left\{F(\omega)\right\} + \mathrm{Im}^2\left\{F(\omega)\right\}}$ είναι άρτια
  $\Phi(\omega) = \arctan\frac{\mathrm{Im}\left\{F(\omega)\right\}}{\mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\}}$ είναι περιττή.
  Αν η $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και άρτια:

  - $\mathrm{Im}\left\{F(\omega) = 0\right\}$
  - $\Phi(\omega) = 0$

  Αν η $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή:

  - $\mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\} = 0$

- Αν $f_1(t) \xrightarrow{\mathrm{FT}} F_1(\omega)$ και $f_2(t) \xrightarrow{\mathrm{FT}} F_2(\omega)$
  $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ σταθερά:
  $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{\mathrm{FT}} F(\omega) = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
  Γραμμικότητα του Fourier Transform

- Συμμετρική ιδιότητα (το διπλάσιο τυπολόγιο)

  Αν $f(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) \qquad F(t) \xrightarrow{\text{FT}} 2\pi f(-\omega)$

- $$\begin{aligned} f(t) \to F(\omega) \quad &= A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} \\ f(t-\tau) \to e^{-j\omega\tau}F(\omega) \quad &= A(\omega)e^{j\left(\Phi(\omega)-\omega\tau\right)} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(t) &\to F(\omega) \\ e^{j\omega_0 t}f(t) &\to F(\omega-\omega_0) \end{aligned}$$

  $$\text{π.χ} \quad \cos(\omega_0 t)f(t) = \frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}f(t) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{2}\big[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\big]$$

Κλιμάκωση στο χρόνο

$$\begin{aligned} f(t) &\to F(\omega) \\ f(at) &\to \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{γιατί; να αποδειχθεί στο σπίτι!} \end{aligned}$$

Τι συμβαίνει με τη συνέλιξη

$$\begin{aligned} &g(t) = x(t) * h(t) \\ &x(t) \to X(\omega) \\ &h(t) \to H(\omega) \\ &y(t) \to Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\cdot h(t) \\ y(t) &\to Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega)*H(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\xi)H(\omega-\xi)\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &\to F(\omega) \\ y(t) = \tfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} &\to j\omega F(\omega) \\ \tfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} &\to (j\omega)^n F(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{j\omega t}]dif\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}j\omega F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &\rightarrow F(\omega) \\
tf(t) &\xrightarrow{\text{F.T}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\omega) \\
t^n f(t) &\xrightarrow{\text{F.T}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} F(\omega)
\end{aligned}
$$

Φανταστείτε ότι $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $\qquad f(t) \xrightarrow{F} (\omega)$

$$
f^*(t) \rightarrow F^*(-\omega)
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \,\mathrm{d}\omega \\
f^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} \,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(-\omega) e^{j\omega t} \,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

2.1.2 Θεώρημα Parseval

Θεώρημα Parseval

$$
W = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) \,\mathrm{d}\omega
$$

όπου $F(\omega) = A(\omega) e^{j\Phi(\omega)}$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= f(t) f^*(t) = \left|f(t)\right|^2 \\
Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F^*(\omega) \\
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) F^* \left(-(\omega - \xi)\right) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|A(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Ορισμός

Πυκνότητα φασματικής ενέργειας: $\dfrac{A(\omega)}{2\pi}$

2.1.3 Μετασχηματισμός Fourier γενικευμένων συναρτήσεων

α) $\delta(t) \rightarrow 1$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} \,\mathrm{d}t = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = e^0 = 1
$$

$$
\delta(t \mp t_0) \rightarrow e^{\pm j\omega t_0}
$$

$f(t) = 1 \to 2\pi\delta(\omega)$, άρα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) \implies \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t\,\mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) \implies \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$

2.1.4

$$\mathrm{sgn}(t) = \frac{|t|}{t}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}(t) &= \lim_{u\to 0}\left[e^{-a|t|}\mathrm{sgn}(t)\right] \\
\mathrm{FT}\ \mathrm{sgn}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\mathrm{sgn} t e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{0} e^{at-j\omega t}\,\mathrm{d}t + \lim_{a\to 0}\int_{0}^{\infty} e^{-at-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to 0}\left[-\frac{e^{(at-j\omega t)}}{a-j\omega}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-at-j\omega t}}{-(a+j\omega)}\bigg|_{0}^{\infty}\right] \\
&= \lim_{a\to 0}\left[\frac{-1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega}\right] \\
&= \frac{2}{j\omega} \in \mathbb{I}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \\
&u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}
\end{aligned}$$

2.1.5

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}(t) &\xrightarrow{\text{F.T.}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
f(t) &\xrightarrow{\text{F.T.}} F(\omega) \\
g(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{u}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t) * \mathrm{u}(t) \\
G(\omega) &= F(\omega)\cdot\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]
\end{aligned}$$

2.1.6

$$\begin{aligned}
\delta(t) &\to 1 \quad \text{άρτια} \\
\delta^{(1)}(t) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t) \to j\omega \\
\delta^{(n)}(t) &= \tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t) \to (j\omega)^n
\end{aligned}$$

$$t^n \to 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$$

2.1.7

Παρ.

$$\begin{aligned}
f(t) &= |t| = t\mathrm{u}(t) - t\mathrm{u}(-t) \\
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi j\delta(\omega) * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] - 2\pi j\delta(\omega) * \left[\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right]\right]
\end{aligned}$$

Calculate at home! The answer is $-\frac{2}{\omega^2}$

$$\begin{aligned}
t &\to 2\pi j^1\delta^{(1)}(\omega) \\
\mathrm{u}(t) &\to \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
\mathrm{u}(-t) &\to \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}
\end{aligned}$$

2.1.8 Kramer's Kronig Relations

Από ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$\underbrace{\vec{D}}_{\text{πυκνότητα ροής}} = \overbrace{\epsilon}^{\text{διηλεκτρική σταθερά}} \underbrace{\vec{E}}_{\text{ένταση πεδίου}}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E} =& \vec{E}(\vec{r}, t) \\
& \vec{E}(\vec{r}, \omega) \\
\vec{D}(\omega) =& \epsilon(\omega)\vec{E}(\omega) \\
\vec{D}(t) =& \epsilon(t) + \vec{E}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \\
& h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Αν $H(\omega) = \mathscr{F}T\left\{h(t)\right\} = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$

$$\boxed{H_I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_R(\omega)}{\omega - \omega'}\,\mathrm{d}\omega'}$$

$$\boxed{H_R(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_I(\omega)}{\omega - \omega'}\,\mathrm{d}\omega'}$$

Η απόδειξη των σχέσεων θα πέσει στις εξετάσεις.

Άσκ.

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t = \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t \\
F(\omega) &= \mathscr{F}\left\{\cos(\omega_1 - \omega_2)t\right\} + \mathscr{F}\left\{\cos(\omega_1 + \omega_2)t\right\} \\
&= \pi\left[\delta\left(\omega - (\omega_1 - \omega_2)\right) + \delta\left(\omega + (\omega_1 - \omega_2)\right)\right] + \pi\left[\delta\left(\omega - (\omega_1 + \omega_2)\right) + \delta\left(\omega + (\omega_1 + \omega_2)\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\left(\cos\omega_0 t \xrightarrow{\mathrm{FT}} \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]\right)$$

Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= 2\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left\{\cos\omega_1 t\right\} * \mathscr{F}\left\{\cos\omega_2 t\right\} \\
&= \pi\left[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)\right] * \left[\delta(\omega-\omega_2)+\delta(\omega+\omega_2)\right] \\
&= \pi\left[\delta(\omega-\omega_2-\omega_1)+\delta(\omega-\omega_2+\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2+\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2-\omega_1)\right]
\end{aligned}$$

Άσκηση

$$\begin{aligned}
f(t) &= g(t)\cos^2\omega_0 t \qquad g(t)\xrightarrow{\text{FT}}G(\omega) \\
&= g(t)\frac{1+\cos 2\omega_0 t}{2} = \frac{g(t)}{2}+\frac{1}{2}g(t)\cos 2\omega_0 t \\
\implies F(\omega) &= \frac{1}{2}G(\omega)+\frac{1}{2}G(\omega) * \mathscr{F}\left\{\cos 2\omega_0 t\right\} \\
&= \frac{1}{2}G(\omega)+\frac{1}{2}G(\omega) * \Big[\pi\left(\delta(\omega-2\omega_0)+\delta(\omega+2\omega_0)\right)\Big]\frac{1}{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}G(\omega)+\frac{1}{4}\left[G(\omega-2\omega_0)+G(\omega+2\omega_0)\right]
\end{aligned}$$

Αν δεν θυμάμαι τον τύπο:

$$\begin{aligned}
f(t) &= g(t)\cos^2\omega_0 t = g(t)\cos\omega_0 t\cos\omega_0 t \\
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}G(\omega) * \left[\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left\{\cos\omega_0 t\right\} * \mathscr{F}\left\{\cos\omega_0 t\right\}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi^2}G(\omega) * \Big[\pi\left[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2)\right]\Big] * \pi\left[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2)\right] \\
&= \frac{1}{4}G(\omega) * \left[\delta(\omega-2\omega_0)+\delta(\omega)+\delta(\omega)+\delta(\omega+2\omega_0)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[G(\omega-2\omega_1)+2G(\omega)+G(\omega+2\omega_0)\right]
\end{aligned}$$

Άσκηση

$$f(t) = g(at+b) \qquad g(t)\xrightarrow{\text{FT}}G(\omega)$$

$$h(t) = g(at) \qquad F(\omega) = \mathscr{F}\left\{g(at)+b\right\} = \mathscr{F}\left\{h\left(t+\frac{b}{a}\right)\right\} = H(\omega)e^{j\omega\frac{b}{a}}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{|a|}G\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{|a|}e^{j\omega\frac{b}{a}}G\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

$$\begin{aligned}
\cos t &\xrightarrow{\text{FT}} \pi\left[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right] \\
\sin\omega_0 t &= \cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right) \\
\sin t &\xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{|\omega_0|}e^{-j\omega\frac{\pi}{2\omega_0}}\pi\left[\delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}-1\right)+\delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}+1\right)\right] \\
&\overset{\delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}-1\right)=\delta\left(\frac{1}{\omega_0}(\omega-\omega_0)\right)}{=} e^{-j\frac{\omega}{\omega_0}}\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] \\
&= -j\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = A\int_{-\tau/2}^{\tau/den} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= A\frac{1}{-j\omega}\,e^{-j\omega t}\Big|_{\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{-j\omega}\left[e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}\right] \\
&= A\tau\frac{\sin\left(\omega\frac{t}{2}\right)}{\frac{\omega t}{2}} \\
&= A\tau\frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\frac{\omega t}{2}} = A\tau\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega t}{2\pi}\right)
\end{aligned}
$$

sinc

$$
\begin{aligned}
\text{Μαθηματικοί:}\quad \mathrm{sinc}(x) &= \frac{\sin x}{x} \\
\text{Μηχανικοί:}\quad \mathrm{sinc}(x) &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}
\end{aligned}
$$

2.2 Χρονοπερατό vs Ζωνοπερατό Σήμα

- Ένα ζωνοπερατό σήμα **δεν** μπορεί να είναι χρονοπερατό
- Ένα χρονοπερατό σήμα **δεν** μπορεί να είναι ζωνοπερατό
- Ένα σήμα μπορεί να μην είναι ούτε χρονοπερατό, ούτε ζωνοπερατό.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} (j\omega)^n F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Ορίζεται η σειρά Taylor επομένως σε οποιοδήποτε σημείο, όμως τότε, επειδή σε κάποια σημεία οι παράγωγοι είναι 0, θα έπρεπε η F να είναι μηδενική, άτοπο.

2.3 Γκαουσιανός παλμός

$$
f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{t^2/(2\sigma^2)} \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) = e^{\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} = e^{-\frac{1}{2\frac{1}{\sigma^2}}\omega^2}
$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
σ^2 διασπορά

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left[t^2 + 2\sigma^2 j\omega t + (j\omega\sigma^2)^2\right]} \cdot e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left(j\omega\sigma^2\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\omega^2\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} \overbrace{\left(t + j\omega\sigma^2\right)}^{t + j\omega\sigma^2 - \tau}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} \boxed{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2}{\sigma^2}\tau^2}\,\mathrm{d}\tau} = e^{-\dfrac{1}{2}\omega^2\sigma^2}
\end{aligned}
$$

Ηθικά διδάγματα:

- Ο μετασχηματισμός της Gaussian είναι Gaussian
- Ό,τι στενεύει στον χρόνο απλώνει στο φάσμα, και αντίθετα

$$\int_{-\infty}^{\infty} t d^2(t)\,\mathrm{d}t$$

διασπορά στον χρόνο $\quad d^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t)\,\mathrm{d}t$

διασπορά στο φάσμα $\quad D^2 = \frac{1}{2\pi} \int \omega^2\, ||\,\mathrm{d}\omega$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) \tfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \tfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \overset{\text{Parseval theorem}}{=} d^2 D^2 \implies \boxed{dD \geq 1/2}$$

Γιατί $1/2$; (Υπόδειξη: $\int_{-\infty}^{\infty} t x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = [\quad] - \cancelto{1}{\frac{1}{2}\int x^2\,\mathrm{d}t}$)
Θα τα ξαναπούμε Τρίτη 22 Νοεμβρίου (χάνουμε 3 μαθήματα).

Κεφάλαιο 3 Μετασχηματισμός Laplace

$$
\begin{aligned}
\nexists\, X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
y(t) &= x(t) e^{-\sigma t} \\
\exists\, Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \quad (s = \sigma + j\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t} \quad \text{M. Laplace}
\end{aligned}
$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace $x(t) = \dfrac{1}{2\pi j} \displaystyle\int_{\substack{\sigma - j\omega \\ (-\infty)}}^{\substack{(\infty) \\ \sigma + j\omega}} X(s) e^{st}\,\mathrm{d}s$

- Έστω ότι $x(t)$ είναι αιτιατή ($x(t) = 0 \quad t < 0$).
  Ας φανταστούμε ότι η $x(t)$ δεν έχει μετασχηματισμό Fourier.
- Έστω ότι $x(t)$ αντιαιτιατή ($x(t) = 0 \quad t > 0$)
-
- Η $\sin \omega \mathrm{u}(t) + \sin \omega t e^{-t} \mathrm{u}(-t)$ δεν έχει περιοχή σύγκλισης.

$$
X(s) = \frac{35}{(x-8)(x+2)}
$$

Οι πόλοι (ρίζες του παρονομαστή) καθορίζουν τις περιοχές σύγκλισης.

Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε είναι αιτιατές, άρα γενικά ο μετασχηματισμός Laplace καταρρέει στην:

$$
X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t
$$

Το 0^- μάς επιτρέπει να ασχοληθούμε με συναρτήσεις που απειρίζονται στο 0, π.χ. $\frac{1}{x}$ or $\delta(t)$.

3.1 Ιδιότητες

$$
\begin{aligned}
x(t) &\to X(s) \quad \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_1 \\
y(t) &\to Y(s) \quad \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_2
\end{aligned}
$$

1) $ax(t) + by(t) \to aX(s) + bY(s)$ τουλάχιστον $\mathrm{Re}\{s\} > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$

2) Μετατόπιση σε χρόνο

$$
\begin{aligned}
x(t)\mathrm{u}(t) &\to X(s) \quad \sigma > \sigma_1 \\
y(t) = x(t - t_0)\mathrm{u}(t - t_0) &\to X(s) e^{-t_0 s} \quad t_0 > 0 \quad \sigma > \sigma_2
\end{aligned}
$$

Απόδ.

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} x(\underbrace{t-t_0}_{\tau})\mathrm{u}(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t = x(\tau)\mathrm{u}(\tau)e^{-s(t+t_0)}\,\mathrm{d}\tau = X(s)e^{-st_0}$$

3) Κλιμάκωση

$$x(t) \to X(s)$$
$$x(at) \to \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$$

4) Παραγώγιση

$$x(t) \to X(s)$$
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \to sX(s) - x\left(0^-\right)$$

5) Ολοκλήρωση

$$x(t) \to X(s)$$
$$\int_0^t x(t)\,\mathrm{d}t \to \frac{1}{s}X(s)$$

6) Διαμόρφωση

$$x(t) \to X(s) \qquad \sigma > \sigma_1$$
$$e^{-at}x(t) \to X(s+a) \qquad a \in \mathbb{C} \qquad \sigma > \sigma_1 - \mathrm{Re}\{a\}$$

7) Συνέλιξη

$$x(t) \to X(s)$$
$$y(t) \to Y(s)$$

$$x(t) * y(t) = X(s)Y(s)$$

3.2 Laplace "περιοδικών συναρτήσεων"

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \le x \le T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$x(t) = x_T(t) + x_T(t-T) + x_T(t-2T) + \dots$$
$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_T(t-nT)$$
$$\mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{L}\left\{x_T(t-uT)\right\}$$
$$x_T(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} X^T(s)$$
$$x_T(t-nT) \xrightarrow{\mathscr{L}} X^T(s)e^{-nTs}$$
$$\mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} X^T(s)e^{-nTs} = X^T(s)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}X^T(s) \quad \sigma > \max(0,\sigma_1)$$

$X(s) \xrightarrow{?} X(\omega)$

$$X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega}$$

Ex. 1 $\quad x(t) = e^{-at}\mathrm{u}t()$

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(a+s)t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)}\right|_0^{\infty} = \frac{\cancelto{0}{e^{-(a+s)\infty}} - \cancelto{1}{e^{-(a+s)0}}}{-(a+s)} =$$

$$\boxed{\frac{1}{s+a} \quad \mathrm{Re}\left\{s\right\} > \mathrm{Re}\left\{a\right\}}$$

Ex. 2 $\quad x(t) = \delta(t)$

$$X(t) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = e^{-s0} = 1 \quad s \in \mathbb{C}$$

Ex. 3 $\quad x(t) = \mathrm{u}(t) \qquad X(s) = \frac{1}{s} \quad \mathrm{Re}\left\{s\right\} > 0$

Για να βρω πεδίο σύγκλισης: $X(s) = \displaystyle\int_{0^+}^{\infty} 1e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{0^-}^{\infty} = \frac{e^{-s\infty} - \cancelto{1}{e^{-s0}}}{-s} = \frac{1}{s}$

Ex. 4 $\quad x(t) = \cos\omega_0 t\,\mathrm{u}(t)$

$$x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\mathrm{u}(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\mathrm{u}(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\mathrm{u}(t) \xrightarrow{\mathscr{L}\mathrm{T}} \frac{1}{2}\underset{\sigma>0}{\frac{1}{s-j\omega_0}} + \frac{1}{2}\underset{\sigma>0}{\frac{1}{s+j\omega_0}} = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2+\omega_0^2} =$$

$$\frac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad \mathrm{Re}\left\{s\right\} > 0$$

Ex. 5 $\quad x(t) = \sin\omega_0 t\,\mathrm{u}(t)$

$$\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 t}\mathrm{u}(t) - e^{-j\omega_0 t}\mathrm{u}(t)\right] \xrightarrow{\mathscr{L}\mathrm{T}} \frac{1}{2j}\underset{\mathrm{Re}\{s\}>0}{\left[\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0}\right]} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}\left\{s\right\} > 0$$

Ποιός είναι ο μετασχηματισμός Fourier της παραπάνω;

Το πιθανό λάθος αποτέλεσμα είναι το $\left(\xrightarrow[s=j\omega]{FT} \dfrac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$

$x(t) = \sin\omega_0 t\,\mathrm{u}(t)$

$$\sin\omega_0 t \xrightarrow{\mathrm{FT}} j\pi\left[-\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\mathrm{u}(t) \xrightarrow{\mathrm{FT}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\begin{aligned} x(t) &\to \left[j\pi\left(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right)\right] * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[j\pi^2\left(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right) + j\pi\left(\frac{1}{j(\omega+\omega_0)} - \frac{1}{j(\omega+\omega_0)}\right)\right] \\ &= \frac{j\pi}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right] + \left[\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\right] \end{aligned}$$

Θεωρήματα Αρχικής & Τελικής Τιμής

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to\infty} \big(sX(s)\big)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} \big(sX(s)\big)$$

$$(-t)^n f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}T} \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}T} F(s)$$

Για να βρίσκουμε αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace χωρίς μιγαδική ολοκλήρωση χρειαζόμαστε ένα ισχυρό τυπολόγιο.

Τυπολόγιο

$X(s)$	$x(t)$
$\frac{1}{s}$	$\mathrm{u}(t)$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}\mathrm{u}(t)$
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\mathrm{u}(t)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{u}(t)$
$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\sin(\beta t)\mathrm{u}(t)$
$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos(\beta t)\mathrm{u}(t)$
$\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}$	$e^{-at}\sin(\beta t)\mathrm{u}(t)$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}$	$e^{-at}\cos(\beta t)\mathrm{u}(t)$

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \overset{\text{π.χ}}{=} \frac{N(s)}{(s+a)D_1(s)} = \frac{A}{s+a} + \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

$$x(t) = Ae^{-at}\mathrm{u}(t) - \mathscr{L}T\left\{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}\right\}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{N(s)}{(s+a)^\kappa D_1(s)} \\ &= \frac{A_1}{(s+a)} + \frac{A_2}{(s+a)^2} + \cdots + \frac{A_\kappa}{(s+a)^\kappa} + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{A_i}{(s+a)^i} \xrightarrow{I\mathscr{L}T} A_i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}e^{-at}\mathrm{u}(t)}$$

$$X(s) = \frac{N(s)}{\left[(s+a)^2+\omega_0^2\right]D_1(s)} = \frac{As+B}{(s+a)^2+\omega_0^2 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)}}$$

$s_1 = -a - j\omega_0$ ένας πόλος

$s_2 = -a + j\omega_0$

Ex. 1

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-T) \\
\mathscr{L}\left\{p(t)\right\} &= \mathscr{L}\left\{\mathrm{u}(t)\right\} - \mathscr{L}\left\{\mathrm{u}(t-T)\right\} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \frac{1-e^{-sT}}{s}
\end{aligned}
$$

Ex. 2

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{t}{T}\mathrm{u}(t) - \frac{t-T}{T}\mathrm{u}(t-T) \\
F(s) &= \frac{1}{T}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{T}\frac{1}{s^2}e^{-sT} \\
&= \frac{1}{Ts^2}\left[1-e^{-sT}\right], \quad s>0
\end{aligned}
$$

Ex. 3

$$
\begin{aligned}
f(t) &= t\mathrm{u}(t) - (t-1)\mathrm{u}(t-1) - (t-3)\mathrm{u}(t-3) + (t-4)\mathrm{u}(t-4) \\
F(s) &= \frac{1}{s^2}\left[1-e^{-s}-e^{-3s}+e^{-4s}\right]
\end{aligned}
$$

Ex. 4

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sin(t)\mathrm{u}(t) + \sin(t-\pi)\mathrm{u}(t-\pi) \\
F(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}
\end{aligned}
$$

Ex. 5

$$
\begin{aligned}
f(t) &= |\sin t|\mathrm{u}(t) \\
F(s) &= \frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}
\end{aligned}
$$

Ex. 6

$$
\begin{aligned}
F(s) = \underbrace{\frac{s^2-6}{s^3+4s^2+3s}}_{\text{αιτιατής συνάρτησης}} &= \frac{s^2-6}{s(s^2+4s+3)} = \frac{s^2-6}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{\Gamma}{s+3} \\
&= \frac{-2}{s} + \frac{5/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3} \\
f(t) &= \left[-2+\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right]\mathrm{u}(t)
\end{aligned}
$$

Ex. 7

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{5s^3-6s-3}{s^3(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma}{s^3} + \frac{\Delta}{(s+1)} + \frac{E}{(s+1)^2} \\
F(s) &= \frac{-3}{s} - \frac{3}{s^3} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} \\
f(t) &= \left[-3-\frac{3}{2}t^2-3e^{-t}+2te^{-t}\right]\mathrm{u}(t)
\end{aligned}
$$

Ex. 8

$$
\begin{aligned}
F(s) = \frac{16}{s(s^2+4)^2} &= \frac{A}{s} + \frac{B_1 s + C_1}{s^2+4} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2+4)^2} \\
16 &= A(s^2+4)^2 + (B_1 s + C_1)s(s^2+4) + (B_2 s + C_2)s \\
F(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} - \frac{4s}{(s^2+4)^2} \\
f(t) &= [1 - \cos 2t - t\sin 2t]\, \mathrm{u}(t)
\end{aligned}
$$

Ex. 9

$$
f''' + 6f'' + 11f' + 6f = 1 \qquad t \geq 0 \qquad \underbrace{f = f' = f''}_{@0^-} = 0
$$

$$
\mathscr{L}\mathscr{T}\{\qquad\}
$$

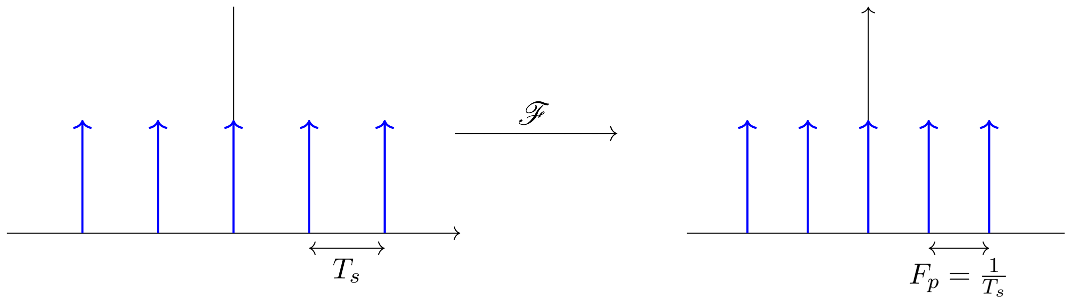
$$
\begin{aligned}
s^3F - \cancel{s^2 f_0 - s f_0' - f_0''} + 6\left[s^2F - \cancel{s f_0 - f_0}\right] + 11\left[sF - \cancel{f_0}\right] + 6F &= \frac{1}{s} \\
F(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) &= \frac{1}{s} \implies F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} \\
F(s) &= \frac{1/6}{s} + \frac{-1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/6}{s+3} \\
f(t) &= \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}\right] \mathrm{u}(t)
\end{aligned}
$$

Η μόνιμη κατάσταση που συντηρείται από το 1 στην διαφορική εξίσωση είναο το $\frac{1}{6}$

Κεφάλαιο 4 Θεώρημα Δειγματοληψίας

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}t \\
x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,\mathrm{d}t \\
x_1(t)x_2(t) &\xrightarrow{\mathscr{F}} X_1(f) * X_2(f) \\
X_1(f)X_2(f) &\xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} x_1(t) * x_2(t) \\
\mathrm{sinc}(t) &= \frac{\sin(\pi t)}{t}
\end{aligned}
$$

Συνάρτηση δειγματοληψίας: $S_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \xrightarrow{\mathscr{F}} F_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF_p) \qquad F_p = \frac{1}{T_s}$



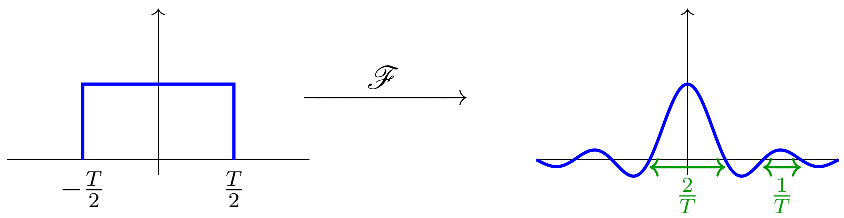
$$S_{F_s}(f) \xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} T_p S_{T_p}(t) \qquad T_p = \frac{1}{F_s}$$

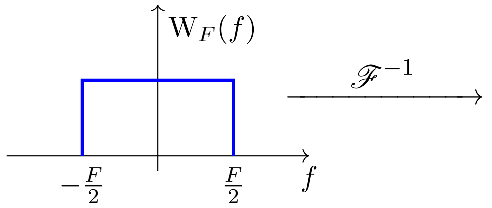
$$S_{\Xi_s}(\xi)$$

Αν κάπου δειγματοληπτώ, στον άλλο χώρο είναι περιοδικότητα

4.0.1 Συνάρτηση ορθογωνικού παραθύρου μήκους T στον κόσμο t

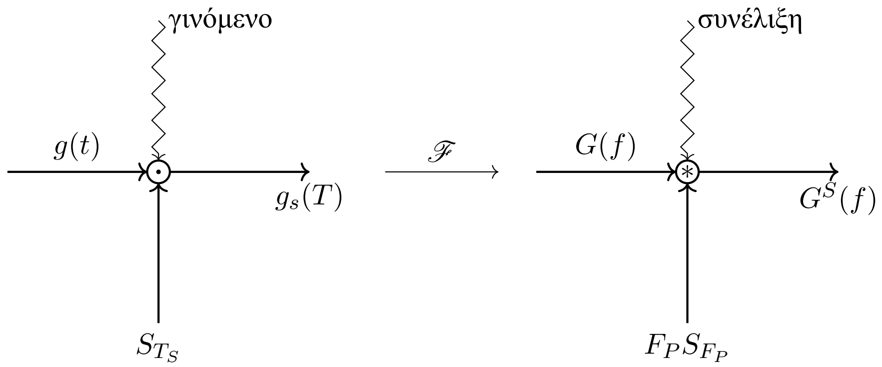
$$W_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < {}^{T}\!/_{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$





$$F\ \mathrm{sinc}(Ft)$$

4.0.2



Δειγματοληψία

$$\begin{aligned} G^S(f) &= G(f) * F_p S_{F_p}(f) \\ &= F_p G(f) * \left(\sum_n \delta(f - nF_p) \right) \\ &= F_p \sum_n G(f - nF_P) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τις επικαλύψεις μεταξύ των διαδοχικών φασμάτων (aliasing). Για να περιοριστεί αυτό μπορούμε να αυξήσουμε το F_p ($\implies$ να αυξήσουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας)

Για να μην έχουμε aliasing πρέπει:

$$F_p - \sigma > \sigma \implies F_p > 2\sigma$$

Nyquist's Criterion: $$\boxed{\underbrace{F_p}_{\text{συχνότητα δειγματοληψίας}} > 2\overbrace{\sigma}^{\text{max frequency}}}$$

$$W_F(f) : \sigma < F/2 < F_p - \sigma$$

$$\underbrace{F_p = W_F(f) \cdot G^S(f)}_{\downarrow FT} F_p g(t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{W_F(f)\right\} * \mathscr{F}^{-1}\left\{G^S(f)\right\}$$

$$F_p g(t) = F \operatorname{sinc}(Ft) * \left(\underbrace{g(t) \cdot S_{T_s}(t)}_{g_s(t)}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= F \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sum_n \delta(t' - nT_s) \operatorname{sinc}\bigl(F(t - t')\bigr) \,\mathrm{d}t' \\
&= F \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t' - nT_s) \operatorname{sinc}\bigl(F(t - t')\bigr) \,\mathrm{d}t' \\
&= \frac{F}{F_p} \sum_n g(nT_s) \operatorname{sinc}\bigl(F \cdot (t - nT_s)\bigr)
\end{aligned}$$

$$g(kT_s) = \frac{F}{F_P} \sum_n g(nT_s) \operatorname{sinc}\bigl(F(kT_s - nT_s)\bigr)$$

$$F = F_p \qquad g(kT_s) = \sum_n g(nT_s) \operatorname{sinc}(k - n)$$

Γενικά, αν $F = F_p$:

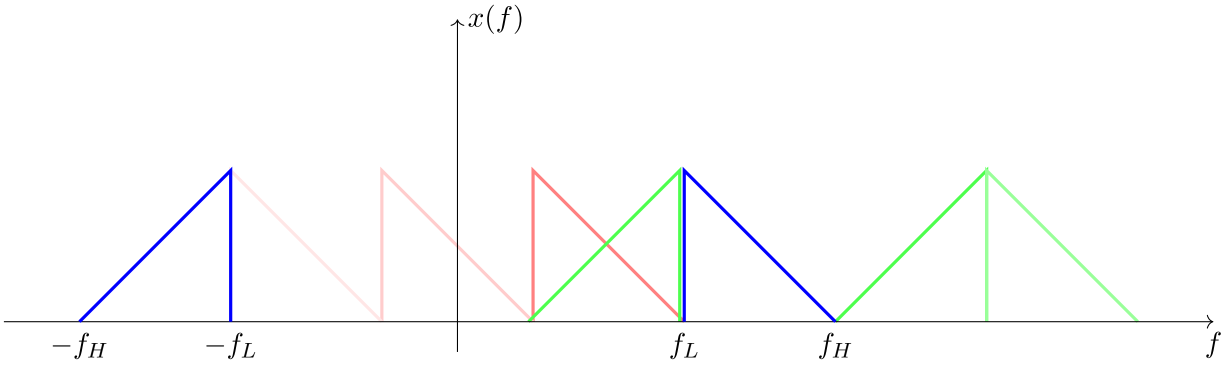
$$g(t) = \sum_n g(nT_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{T_s}(t - nT_s)\right)$$

4.0.3 Άσκηση για το σπίτι

$$\phi_n^{F,T_s}(t) = \operatorname{sinc}\bigl(F(t - nF_p)\bigr)$$

Να βρεθεί το $\bigl\langle \phi_n(t), \phi_k(t) \bigr\rangle$.

4.1 Υποδειγματοληψία (undersampling)



Για να μην πέφτουν τα "πλακάκια" το ένα πάνω στο άλλο:

$$\left.\begin{array}{l}\kappa f_s - f_L < f_L \\ (\kappa+1) f_s - f_H > f_H\end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} f_s < \frac{2f_L}{\kappa} \\ f_s > \frac{2f_H}{\kappa+1}\end{array}$$

$$\frac{2f_H}{\kappa+1} < f_s < \frac{2f_L}{\kappa}$$

Ψάχνω το μέγιστο κ, έτσι ώστε να βρω το ελάχιστο f_s

$$\frac{2f_H}{\kappa+1} < \frac{2f_L}{\kappa}$$

$$k \leq \frac{f_L}{f_H - f_L}$$

$$\underset{\min}{f_s} \leftarrow \kappa_{\text{best}} = \left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor$$

Θα ψάξω το ελάχιστο f_s:

$$\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H-f_L} \right\rfloor + 1} < f_s < \frac{2f_L}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H-f_L} \right\rfloor}$$

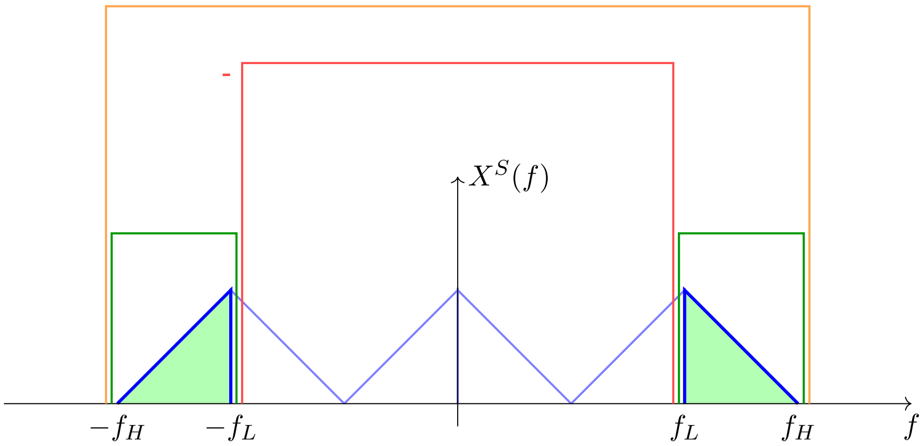
$$\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H-f_L} + 1 \right\rfloor} < f_s < \frac{2f_L}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H-f_L} + 1 \right\rfloor}$$

$$\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_H}{f_H-f_L} \right\rfloor} < f_s$$

$$\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_H}{f_H-f_L} \right\rfloor} = \frac{2f_H}{\frac{f_H}{f_H-f_L} \underset{0<\epsilon<1}{-\epsilon}} = \frac{2f_H}{\frac{f_H - \epsilon f_H + \epsilon f_L}{f_H - f_L}} = \frac{2f_H(f_H-f_L)}{f_H(1-\epsilon)+\epsilon f_L} = \frac{2(f_H-f_L)}{(1-\epsilon)+\epsilon\frac{f_L}{f_H}}$$

$$= \frac{2(f_H-f_L)}{1-\epsilon\left(1-\frac{f_L}{f_H}\right)} > 2(f_H - f_L) \quad \text{αλλά όχι πολύ κοντά εκεί!}$$

$$2(f_H-f_L) < \boxed{\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H-f_L} \right\rfloor + 1} < f_s}$$



4.2 Gibbs' Phenomenon

$$
\begin{aligned}
&x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega) \\
&x_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} X(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau} e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-j\omega\tau + j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\omega \\
&\qquad = \frac{1}{j(t-\tau)} e^{j\omega(t-\tau)}\Big|_{-\sigma}^{\sigma} \\
&\qquad = \frac{1}{j(t-\tau)}\left[e^{j\sigma(t-\tau)} - e^{-j\sigma(t-\tau)}\right] \\
&\qquad = \frac{2}{t-\tau}\sin\big(\sigma(t-\tau)\big)
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$
X_\sigma(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{\sin\big(\sigma(t-\tau)\big)}{\pi(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to\infty} x_\sigma(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\lim_{\sigma\to\infty}\frac{\sin\big(\sigma(t-\tau)\big)}{\pi(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \\
\lim_{\sigma\to\infty} x_\sigma(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\sigma\to\infty} x_\sigma(t) = x(t)
$$

$$x(t) = x_c(t) + \Big[x(0^+) - x(0^-)\Big]\,\mathrm{u}(t)$$

$$x_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \frac{\sin\big(\sigma(t-\tau)\big)}{\pi(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau - \frac{\big[x(0^+) - x(0^-)\big]}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin\big(\sigma(t-\tau)\big)}{(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\big(\sigma(t-\tau)\big)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

Θέτουμε $\begin{array}{l} \sigma(t-\tau) = x \\ \mathrm{d}\tau = -\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{d}x \\ t-\tau = \frac{x}{\sigma} \end{array}$

$$= \int_{\sigma t}^{\infty} \frac{\sin x}{\frac{x}{\sigma}} \left(\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sigma t} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\sigma t} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\mathrm{Si}(\sigma t)}_{\text{Sine Integral}}$$

Άρα

$$x_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(\tau) \frac{\sin\big(\sigma(t-\tau)\big)}{\pi(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau + \frac{\big[x(0^+) - x(0^-)\big]}{2} + \frac{\big[x(0^+) - x(0^-)\big]}{\pi} \cdot \mathrm{Si}\;(\sigma t)$$

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^{t} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Χρησιμοποιώντας τον Leibniz Rule (παραγωγίζοντας το ολοκλήρωμα) μπορούμε να αποδείξουμε την θέση των μεγίστων της Si.

$$x_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \frac{\sin\big[\sigma(t-\tau)\big]}{\pi(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau + \frac{x(0^+) - x(0^-)}{2} + \frac{\big[x(}{}$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} x_\sigma(t) = x_c(t) + \frac{x(0^+) - x(0^-)}{2} + \frac{\big[x(0^+) - x(0^-)\big]}{\pi} \lim_{\sigma\to\infty} \mathrm{Si}($$

$$\lim_{\sigma\to\infty} x_\sigma(0) = x(0^-) + \frac{x(0^+) - x(0^-)}{2} = \frac{x(0^+) + x(0^-)}{2}$$

Παρατηρώ ότι τα ζιγκζακωτά παραμένουν και το ύψος τους δεν αλλάζει. Το μόνο που μπορεί να αλλάξει είναι η θέση του μεγίστου, με αύξηση του σ. Αυτό είναι το φαινόμενο Gibbs.