Την Τρίτη μάθημα 8:30 χωρίς διάλειμμα

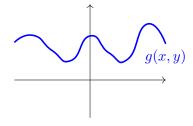
Σήμα - σύστημα

$$g = f(t)$$
 εξαρτημένη ανεξάρτητη

$$g = f(\vec{r}, t)$$
  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 

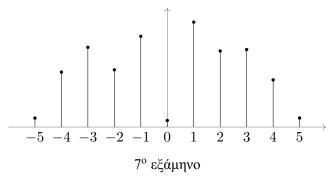
### Αναλογικό

Αν t συνεχής  $\in \mathbb{R}$  και y συνεχής  $\in \mathbb{R}$ 



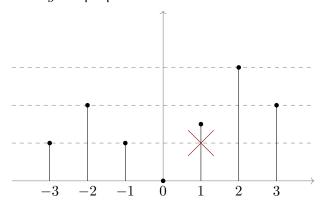
# Διακριτού χρόνου / Διακριτό (discrete)

tδιακριτό  $\to \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{Z}$  g συνεχής  $\in \mathbb{R}$ 



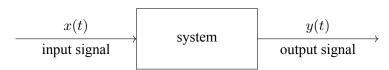
# Κβαντισμένο

 $n \in \mathbb{Z}$ g διακριτή



Στοχαστικό Περιέχει και τις τρεις κατηγορίες

# 0.1 Σύστημα



### 0.2 Περιοδικά σήματα

Aν  $\exists T \in \mathbb{R}: \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = x(t+T)$  τότε x(t) περιοδικό σήμα με περίοδο T. Η θα είναι 0, ή θα συνεχιστεί για πάντα.

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \, \mathrm{d}t = \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} x(t) \, \mathrm{d}t \, \forall t$$

Η σύνθεση μιας συνάρτησης με μια περιοδική συνάρτηση είναι περιοδική;

**Απόδ.** Έστω *g* μία περιοδική συνάρτηση:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(x+T)) =$$
$$= (f \circ g)(x+T)$$

#### 0.3 Συμμετρίες

- Av  $x(t) = x(-t) \ \forall t$  τότε η x(t) λέγεται άρτια συνάρτηση (even function).
- Αν  $x(t) = -x(t) \, \forall t$  τότε η x(t) λέγεται περιττή συνάρτηση (odd function).

$$\forall x(t) \quad \exists x_0(t), x_e(t) : x(t) = x_e(t) + x_0(t)$$

Απόδ.

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$
  
 $x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$ 

$$x \underbrace{e}_{\text{άρτια}} y_e = z_e$$

$$x_o y_o = z_e$$

$$x_e y_0 = z_0$$

$$\int_{-A}^A x_0(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

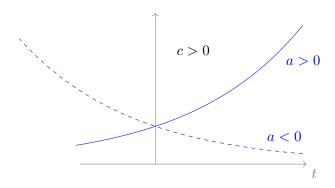
$$\int_{-\infty}^\infty x_0(t) \, \mathrm{d}t = ? \left( \epsilon \xi \alpha \rho \tau \alpha \tau \alpha \right)$$

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^A x_0(t) \, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{(principal Cauchy value)}$$

#### Χαρακτηριστικά σήματα

#### 1) Εκθετικό σήμα

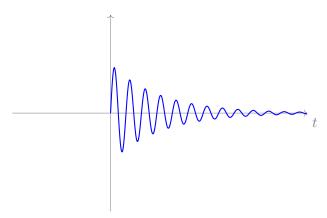
$$x(t) = ce^{at} \quad a \in \mathbb{R} \quad c > 0$$



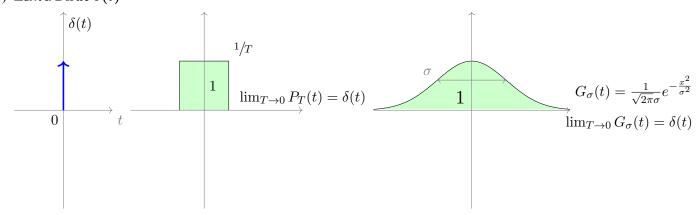
$$x(t) = ce^{(\sigma t + j\omega)t} = ce^{\sigma t}e^{j\omega t} = ce^{\sigma t}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right]$$

### 2) (Συν)ημιτονοειδή σήματα

$$x(t) = A\cos(\omega t \pm \phi) = a\operatorname{Re}\left\{e^{j(\omega t + \phi)}\right\} = A\frac{e^{j(\omega t \pm \phi)} + e^{-j(\omega t \pm \phi)}}{2}$$



### 3) Δέλτα Dirac $\delta(t)$



Ορ.

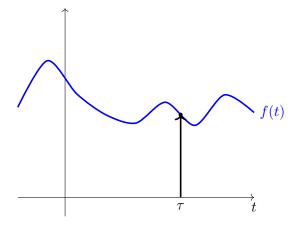
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0) \forall f(t)$$

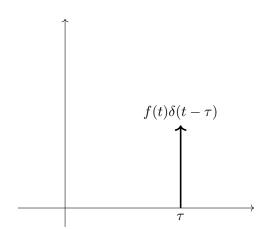
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$





### Ιδιότητες της $\delta(t)$

### 1. Κλιμάκωση

$$a \in \mathbb{R} : \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

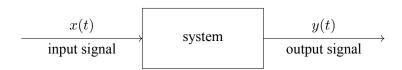
Απόδ.

And.
$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \boxed{\delta(at)} \, \mathrm{d}t}_{at} = \int_{-\infty_{(a)}}^{\infty_{(a)}} \phi\left(\frac{\xi}{a}\right) \delta(\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{a} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi\left(\frac{\xi}{a}\right)}{|a|} \delta(\xi) \, \mathrm{d}\xi = \frac{\phi(0)}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \boxed{\frac{\delta(t)}{|a|}} \, \mathrm{d}t$$

$$\underbrace{at = \xi}_{dt = \frac{d\xi}{a}}$$

2. 
$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

3. 
$$f(t)\delta(t-\xi) = f(g)\delta(t-\xi)$$



$$y(t) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$$

$$\forall x_1(t) \ x_n(t)$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}\left\{x_2(t)\right\}$$

Για const  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ 

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$
  
$$y(t) = \mathcal{L} \{x(t)\}$$

ανν

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

τότε

 $\mathscr{L}$ : γραμμικό σύστημα

• 
$$g(t) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$$
  
 $x'(t) = x(t-\tau)$   
 $\text{and } y'(t) = \mathcal{L}\left\{x'(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{x(t-\tau)^2\right\} = y(t-\tau)$ 

τότε το σύστημα  $\mathscr{L}$  είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.



Υποστηρίζω ότι ένα γραμμικό & ΑΚΜ σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική απόκριση h(t).

Απόδ. Από παραπάνω, γνωρίζουμε ότι  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-\tau) \, \mathrm{d}t$ 

$$\begin{split} y(t) &= \mathcal{L} \left\{ y(t) \right\} = \mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau \right\} \\ &\stackrel{\text{linearity}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} \left\{ x(\tau) \delta(t-\tau) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L} \left\{ \delta(t-\tau) \right\} \, \mathrm{d}\tau \\ &\stackrel{\text{AKM}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{h(t-\tau)}_{\text{linear time-shift invariant}} \end{split}$$

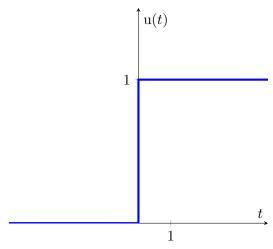
- 
$$\delta(t) = \delta(-t)$$
 άρτια συνάρτηση

- 
$$\delta^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \delta(t)$$
, για την οποία αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\phi(t) dt = (-1)^n \left. \phi^{(n)}(t) \right|_{t=0}$$

#### 0.3.1 Βηματική Συνάρτηση (Unit Step Function)

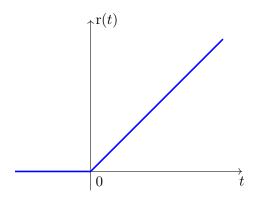
$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(t)\phi(t) \, \mathrm{d}t = \mathcal{N}_{\mathbf{u}} \left\{ \phi(t) \right\} = \int_{0}^{\infty} \underbrace{\phi(t)}_{\text{number}} \, \mathrm{d}t$$



$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t - \xi) \, \mathrm{d}\xi$$

#### 0.3.2 Ράμπα

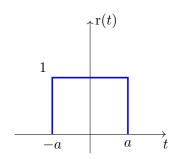
$$\mathbf{r}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}(\tau) \, \mathrm{d}\tau = \begin{cases} t & t \ge 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = t \mathbf{u}(t)$$

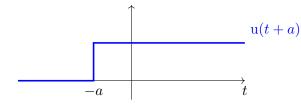


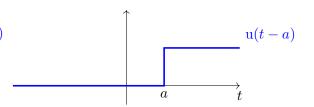
$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t)$$

#### 0.3.3 Ορθογωνικός παλμός (Rectangular Pulse function)

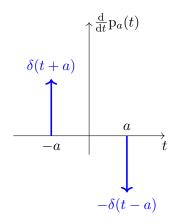
$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$





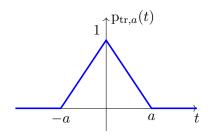


$$p_a(t) = u(t+a) - u(t-a)$$
$$\frac{d}{dt}p_a(t) = \delta(t+a) - \delta(t-a)$$

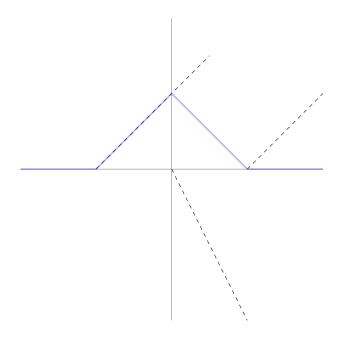


### 0.3.4 Τριγωνικός Παλμός (Triangular Pulse function)

$$\mathbf{p}_{\mathrm{tr},a} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$



$$p_{\mathrm{tr},a}(t) = \frac{1}{a} \left[ \mathbf{r}(t+a) + \mathbf{r}(t-a) - 2\mathbf{r}(t) \right]$$



### 0.4 Χαρακτηριστικά Μεγέθη

1) Μέση τιμή (Mean Value)

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

Αν περιοδική τότε

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{T} = \int_0^T x(t) dt$$
$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

2) Ενεργός τιμή (Root Mean Square Value)

$$\overline{\overline{x(t)}} = \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt\right]^{1/2}$$

Αν ημιτονοειδές σήμα  $\bar{\bar{x}}(t) = \frac{x_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ 

- 3) Ενέργεια Ισχύς
  - Στιγμιαία ισχύς (Instant power)

$$p(t) = x^2(t)$$

• Μέση ισχύς (Mean power)

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \left(\overline{\overline{x(t)}}\right)^2$$

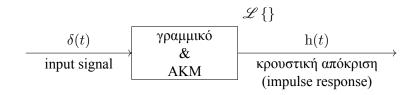
• Ενέργεια (Energy)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = (t_2 - t_1) \left( \overline{\overline{x(t)}} \right)^2$$

 $\label{eq:continuous} \mathbf{\Sigma}$ ήματα  $\begin{cases} \mathbf{\Sigma}$ ήμα ενέργειας αν  $\lim_{T \to \infty} W < \infty \\ \\ \mathbf{\Sigma}$ ήμα ισχύος αν  $\lim_{T \to \infty} \overline{p(t)} > 0 \\ \\ \mathbf{Y}$ πάρχουν και σήματα που δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος.

#### 0.5 Συνέλιξη

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau)d\tau$$



$$h(t) = \mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{x(t)}_{\mathrm{είσοδος}} \underbrace{*}_{\mathrm{curbolithen}} \underbrace{h(t)}_{\mathrm{απόκριση}}$$

#### Συνέλιξη - Convolution

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau$$

• 
$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$
 Αντιμεταθετική

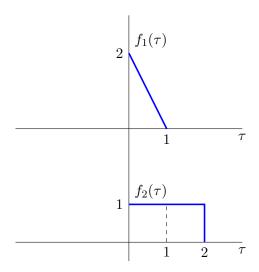
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)y(\lambda)[-d\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda)x(t-\lambda) d\lambda = y(t) * x(t)$$

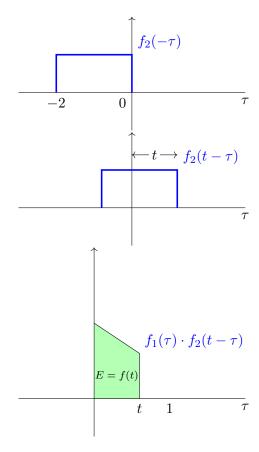
• 
$$x_1(t)*[x_2(t)*x_3(t)]=[x_1(t)*x_2(t)]*x_3(t)$$
 Пробетаірібтік $\mathbf{\hat{q}}$ 

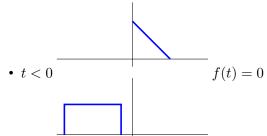
#### Παρ.

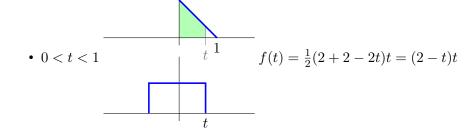
$$f_1(t) = 2(1-t) [u(t) - u(t-1)]$$
  
 $f_2(t) = u(t) - u(t-\tau)$ 

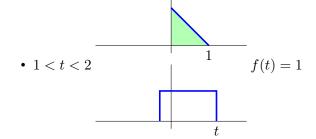
#### Γραφική μέθοδος υπολογισμού συνέλιξης

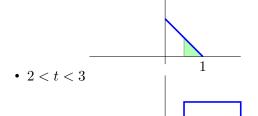




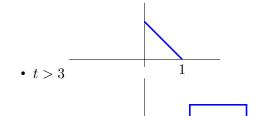


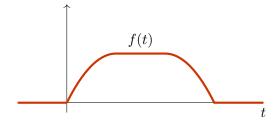






$$f(t) = \frac{(t-1)\cdot 2\cdot (1-(t-2))}{2} = (t-1)(3-t)$$





Αναλυτική μέθοδος Παρατηρώ ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau) \mathbf{u}(t-\xi) \mathbf{u}(\phi-\tau) \,d\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t,\tau) \,d\tau \mathbf{u}(\phi-\xi)$$

$$\begin{split} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2(1-\tau)}_{x(\tau)} \left[ \mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}(\tau+1) \right] \left[ \mathbf{u}(t-\tau) - \mathbf{u}(t-\tau-2) \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \mathbf{u}(\tau) \mathbf{u}(t-\tau) - \mathbf{u}(\tau-1) \mathbf{u}(t-\tau) - \mathbf{u}(\tau) \mathbf{u}(t-\tau-2) + \mathbf{u}(\tau-1) \mathbf{u}(t-\tau-2) \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{0}^{t} x(\tau) \, \mathrm{d}\tau \mathbf{u}(t) - \int_{1}^{x} x(\tau) \, \mathrm{d}\tau \mathbf{u}(t-1) - \int_{0}^{t-2} x(\tau) \, \mathrm{d}\tau \mathbf{u}(t-2) + \int_{1}^{t-2} x(\tau) \, \mathrm{d}\tau \mathbf{u}(t-3) \\ &= (2t-t^2) \mathbf{u}(t) - \left[ 2t-t^2-1 \right] \mathbf{u}(t-1) - \left[ 2(t-2)-(t-2)^2 \right] \mathbf{u}(t-2) + \left[ 2(t-2)-(t-2)^2-1 \right] \mathbf{u}(t-3) \end{split}$$

f(t) = 0

Ex

$$f_1(t) = e^t u(-t)$$
  
 $f_2(t) = u(t+2) - u(t+1)$   
 $f = f_1 * f_2$ 

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(-\tau) \mathbf{u} \left(-(t-\tau)+2\right) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(-\tau) \mathbf{u}(\tau-t+2) d\tau$$

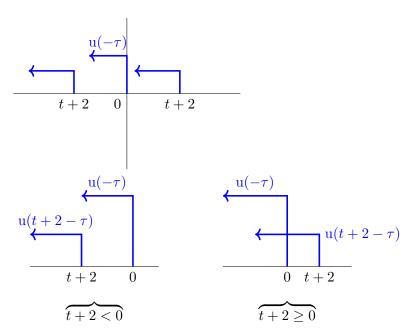
$$= \int_{t-2}^{0} e^{\tau} d\tau \mathbf{u}(t-2)$$

$$= e^{\tau} \Big|_{t-2}^{0} \mathbf{u}(2-t)$$

$$= \left[1 - e^{t-2}\right] \mathbf{u}(2-t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau) \mathbf{u}(\tau - \xi) \mathbf{u}(\phi - \tau) d\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t,\tau) d\tau \mathbf{u}(\phi - \xi)$$

Ex.



$$\begin{split} x(t) &= e^{t} \mathbf{u}(-t) \\ y(t) &= \mathbf{u}(t+2) \\ z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(-\tau) \mathbf{u} \left[ (t-\tau) + 2 \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(-\tau) \mathbf{u}(t+2-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \left[ 1 - \mathbf{u}(t) \right] \mathbf{u}(t+2-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(t+2-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(\tau) u(t+2-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t+2} e^{\tau} d\tau \mathbf{u} \left( t + 2 - \tau \right) d\tau - \int_{0}^{t+2} e^{\tau} d\tau \mathbf{u}(t+2) \\ &= e^{t+2} - \left[ e^{t+2} - 1 \right] \mathbf{u}(t+2) \end{split}$$

Ex.

$$\begin{split} x(t) &= e^{t} \mathbf{u}(-t) \\ y(t) &= \mathbf{u}(t+2) - \mathbf{u}(t+1) \\ z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(-\tau) \left[ \mathbf{u}(t-\tau+2) - \mathbf{u}(t-\tau+1) \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(-\tau) \mathbf{u}(t-\tau+2) \, \mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(-\tau) \mathbf{u}(t-\tau+1) \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \left[ 1 - \mathbf{u}(\tau) \right] \mathbf{u}(t-\tau+2) \, \mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \left[ 1 - \mathbf{u}(\tau) \right] \mathbf{u}(t-\tau+1) \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(t-\tau+2) \, \mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(\tau) \mathbf{u}(t-\tau+2) \, \mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(t-\tau+1) \, \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(\tau) \mathbf{u}(\tau+1) \, \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(\tau) \mathbf{u}(\tau+1) \, \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(\tau) \mathbf{u}(\tau+1) \, \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mathbf{u}(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{$$

 $\exists h(t)$  ann LTI

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau$$

Έστω ότι η  $x(t) = e^{j\omega t}$ 

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$
$$= x(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau}_{h(t) \xrightarrow{FT} H(\omega)}$$

$$x(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t}$$
  

$$y(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} H(\omega_1) + A_2 e^{j\omega_2 t} H(\omega_2)$$

# Κεφάλαιο 1 Συναρτηστιακοί χώροι

Διανυσματικός χώρος S

$$\bar{x}, \quad \bar{y} \quad S$$

#### Εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in \mathbb{C}$$

1) 
$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^*$$

2) 
$$c\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle c\bar{x}, \bar{y} \rangle$$

3) 
$$\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$$

4) 
$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$$
 me  $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$  and  $\bar{x} = \bar{0}$ 

### Νόρμα

$$\bar{x} \in S$$

$$||\bar{x}|| \ge 0$$

1) 
$$||\bar{x}|| = 0$$
 and  $\bar{x} = \bar{0}$ 

2) 
$$||a\bar{x}|| = |a|||\bar{x}|| \quad x \in \mathbb{C}$$

3) 
$$||\bar{x} + \bar{y}|| \le ||\bar{x}|| + ||\bar{y}||$$

#### **Μέτρο:** Απόσταση μεταξύ $\bar{x}, \bar{y} \in S$

1) 
$$d(\bar{x}, \bar{y}) \ge 0$$
  $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  and  $\bar{x} = \bar{y}$ 

2) 
$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$$

3) 
$$d(\bar{x}, \bar{y}) \le d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{y}, \bar{z}) \quad \bar{z} \in S$$

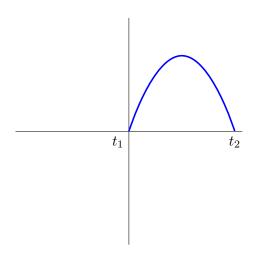
#### Συναρτησιακός χώρος

$$x(t), y(t) \in S = \{x(t)/x(t) : [t_1, t_2] \to \mathbb{R} \}$$

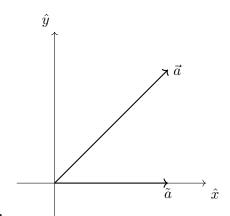
$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt$$

$$||x(t)|| = \left[ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \right]^{1/2}$$

$$d(x(t), y(t)) = \left[ \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - y(t)]^2 dt \right]^{1/2}$$



Αν 
$$\left\langle \phi_1(t),\phi_2(t) \right\rangle = 0$$
  $\phi_1(t) \perp \phi_2(t)$   $\left\langle \phi_1(t),\phi_1(t) \right\rangle = 1$   $\phi_1(t)$  κανονική



#### Τερατοχώρος

 $\hat{x},\hat{y}$  όχι εξαρτημένα (συνευθειακά)

Ποια είναι η καλύτερη προσέγγιση για το  $\vec{a}$  εφ' όσον δεν υπάρχει το  $\vec{y}$ ;  $\tilde{a}$  best γιατί  $\mathrm{d}(\vec{a},\tilde{a})$  min.

Άρα:

$$\begin{split} \tilde{a} &= k\hat{x} \\ \vec{a} &= a_x \hat{x} + a_y \hat{y} \\ \vec{a} - \tilde{a} &= (a_x - k)\hat{x} - a_y \hat{y} \\ d(\vec{a}, \tilde{a}) &= \sqrt{(a_x - k)^2 + a_y^2} \\ \frac{d}{dk} \left( d(\vec{a}, \tilde{a}) \right) &= \frac{a_x - k}{\dots} = 0 \implies k = a_x = \tilde{a} \cdot \hat{x} \\ \vec{a} \cdot \hat{x} &= a_x \end{split}$$

Η βέλτιστη έκφραση του  $\vec{a}$  στο δισδιάστατο χώρο είναι το ίδιο το  $\vec{a}$ .

#### Μη κάθετα διανύσματα

$$\begin{split} \vec{a} &= a_x \hat{x} + a_y \hat{y} \\ \vec{a} - \tilde{a} &= (a_x - k)\hat{x} + a_y \hat{y} \\ \mathrm{d}(\vec{a}, \tilde{a}) &= ||\vec{a} - \tilde{a}|| = \sqrt{(\vec{a} - \tilde{a})(\vec{a} - \tilde{a})} = \left( \left[ (a_x - k)\hat{x} + a_y \hat{y} \right] \cdot \left[ (a_x - k)\hat{x} + a_y \hat{y} \right] \right)^{1/2} \\ \left[ (a_x - k)^2 + a_y^2 + 2(a_x - k)a_y \hat{x} \cdot \hat{y} \right]^{1/2} \\ \vec{a}_{\mathrm{best}} &= (\vec{a} \cdot \hat{x})\hat{x} \neq a_x \\ \vec{a} \cdot \hat{x} &= a_x + a_y \cos \phi \neq a_x \end{split}$$

**Συναρτηστιακός κόσμος**  $\phi_n(t)$  παράγουν χώρο με το μηχανισμό:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(t) \quad t \in \Delta$$

 $\phi_n(t)$  ανεξάρτητες μεταξύ τους (βάση απειροδιάστατου χώρου)

$$\hat{f}(t) = \sum_{m=0}^{M} \hat{a}_{n} \phi_{n}(t)$$
 βέλτιστη, ώστε η απόσταση με την  $f$  να είναι ελάχιστη  $f$  είναι ορθοκανονική

$$\widetilde{I^{2}} = \int_{\Delta} \left[ f(t) - \widehat{f}(t) \right]^{2} dt$$

$$= \int_{\Delta} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n} \phi_{n}(t) - \sum_{n=0}^{M} \widehat{a}_{n} \phi(t) \right]^{2} dt$$

$$= \int_{\Delta} f^{2}(t) dt + \int_{\Delta} \left( \sum_{n=0}^{M} \widehat{a}_{n} \phi_{n}(t) \right)^{2} dt - 2 \int_{\Delta} \left[ f(t) \sum_{n=0}^{M} \widehat{a}_{n} \phi_{n}(t) \right] dt$$

Άρα:

$$\begin{split} I^2 &= \int_{\Delta} f^2(t) \, \mathrm{d}t + \int_{\Delta} \sum_{n=0}^{M} \left[ \hat{a}_n \phi_n(t) \right]^2 \mathrm{d}t + 2 \int_{\Delta} \left[ \sum_{n=0}^{M} \sum_{m=n+1}^{M} \hat{a}_n \cdot \hat{a}_m \phi_n(t) \phi_m(t) \right] \, \mathrm{d}t - 2 \int_{\Delta} \sum_{n=0}^{M} \hat{a}_n f(t) \phi_n(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\Delta} f^2(t) \, \mathrm{d}t + \sum_{n=0}^{M} \hat{a}_n^2 \int_{\Delta} \phi_n^2(t) \, \mathrm{d}t + 2 \sum_{n=0}^{M} \sum_{n=m+1}^{M} \hat{a}_n \hat{a}_m \int_{\Delta} \phi_n(t) \phi_m(t) \, \mathrm{d}t - 2 \sum_{n=0}^{M} \hat{a}_n \int_{\Delta} f(t) \phi_n(t) \, \mathrm{d}t \\ &= 2 \hat{a}_i \int_{\Delta} \phi_i^2(t) \, \mathrm{d}t + 2 \sum_{m \neq i} \hat{a}_m \int_{\Delta} \phi_i(t) \phi_m(t) \, \mathrm{d}t - 2 \int_{\Delta} f(t) \phi(t) \, \mathrm{d}t = 0 \end{split}$$

Έστω  $\phi_i$  μοναδιαία  $\iff \int_\Delta \phi^2(t)\,\mathrm{d}t=1$  και  $\phi_i$  ορθογώνια  $\iff \int_\Delta \phi_1\phi_2(t)=0$  Αν η  $\big\{\phi(t)\big\}$  ορθοκανονική

$$2\vec{a}_i - 2\int_{\Delta} f(t)\phi(t) dt = 0 \implies \hat{a}_i = \int_{\Delta} f(t)\phi(t) dt$$
$$2a\langle \phi, \phi \rangle + \sum_{n} \sum_{i} \hat{a}_n \langle \phi_i, \phi_n \rangle - 2\langle f, \phi \rangle = 0$$

$$f(t) = \sum_{a=0} a_n \phi_n(t)$$

$$\int_{\Delta} f(t)\phi(t) dt = a_i$$

$$\langle f, \phi_i \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_i \phi_n, \phi_i \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\langle \phi_n, \phi_i \right\rangle$$

Ηθικό δίδαγμα: Αν η βάση του χώρου είναι ορθοκανονική και μας ζητηθεί να υπολογίσουμε μία προσέγγιση της συνάρτησης σε έναν υποχώρο, μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε την προβολή της συνάρτησης πάνω στη βάση.

**Ex.** 
$$f(t) = e^{-3t} \mathbf{u}(t)$$
  $\phi_1(t) = e^t \mathbf{u}(t) \& \phi_2(t) = e^{-2t} \mathbf{u}(t)$ 

$$\begin{split} \hat{f}(t) &= a_1 e^{-t} \mathbf{u}(t) + a_2 e^{-2t} \mathbf{u}(t) \\ \int \left[ a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 - f \right] \phi_1 \, \mathrm{d}t = 0 \\ \int_0^\infty \left[ a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t} \right] e^{-t} \, \mathrm{d}t = 0 \implies \\ a_1 \int_0^\infty e^{-2t} \, \mathrm{d}t + a_2 \int_0^\infty e^{-3t} \, \mathrm{d}t - \int_0^\infty e^{-4t} \, \mathrm{d}t = 0 \implies \boxed{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} - \frac{1}{4} = 0} \\ \int \left[ a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t} \right] e^{-2t} \, \mathrm{d}t = 0 \implies \boxed{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} - \frac{1}{5} = 0} \\ a_1 &= 3/10, \ a_2 = 6/5 \end{split}$$

**Ex.** 
$$f(t)=e^{-3t}\mathbf{u}(t)$$
  $\phi_1(t)=e^t\mathbf{u}(t)$  &  $\phi_2(t)=e^{-2t}\mathbf{u}(t)$  &  $\phi_3(t)=e^{-3t}\mathbf{u}(t)$   $f(t)=\sum_{n=0}^N a_n\phi_n(t)$   $\left\{\phi_n(t)\right\}$  ορθοκανονική

$$E \stackrel{\triangle}{=} \int_{\Delta} f^{2}(t) dt = \int \left( \sum a_{n} \phi_{n}(t) \sum a_{n} \phi_{n}(t) \right) dt +$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n} \int_{\Delta} \phi_{n}^{2}(t) dt + \sum_{m \neq n} a_{i} a_{n} \int_{?} \Delta \phi_{i}(t) \phi_{n}(t) \stackrel{0}{\longrightarrow} 0$$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n}^{2} \quad \text{Parseval } \int \text{ theorem}$$

### Κεφάλαιο 2 Ανάλυση Fourier

#### 2.0.1 Περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο Τ

$$x_k = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(k\omega t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ θεμελιώδης κυκλική συχνότητα}$$
 
$$\left\langle x_k(t), x_n(t) \right\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t) x_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega t) \cos(n\omega t) \, \mathrm{d}t = \begin{cases} n \neq k \to 0 \\ n = k \to 1 \end{cases}$$

$$y_k = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(k\omega t) \langle y_k, y_n \rangle = \begin{cases} n \neq k \to 0 \\ n = k \to 1 \end{cases}$$

Υποστηρίζω ότι κάθε περιοδική  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ 

Οραματίζομαι ότι αν η παραπάνω f(t) είναι σήμα εισόδου σε ένα σύστημα, τα ημίτονα και συνημίτονα ως ιδιοσυναρτήσεις θα παραμείνουν αμετάβλητα, και θα τροποποιηθούν μόνο τα  $a_n, b_n$ .

$$\begin{split} z_k(t) &= e^{jk\omega t} \\ \langle z_k, z_n \rangle &= \begin{cases} k \neq n \to 0 \\ k = n \to T \end{cases} \\ z_k(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jk\omega t} \end{split}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}$$
 εκθετική σειρά 
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right]$$
 τριγωνομετρική σειρά Α 
$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$
 τριγωνομετρική σειρά Β

Οι συντελεστές μπορούν να βρεθούν από τις προβολές της συνάρτησης πάνω στα ημίτονα και τα συνημίτονα:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

### Συνθήκες Dirichlet

1) 
$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$$

- 2) Πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών εντός T
- 3) Πεπερασμένος αριθμός τοπικών ακροτάτων εντός T

f(t) περιοδική T

$\theta \setminus f$				
	Μορφή	Σειρά	Συντελεστές	Αλλαγές
	Εκθετική	$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega nt}$	$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega t} dt$	$F_0 = \frac{a_0}{2} F_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$
	Τριγωνομετρική Α	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$	$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$ $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$ $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$	$a_n = (F_n + F_{-n})$ $b_n = j(F_n - F_{-n})$ $a_0 = 2F_0$
	Τριγωνομετρική Β	$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n)$		$A_0 = \frac{a_0}{2}$ $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 F $ $\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty a_n^2 + b_n^2$$
$$= F_0^2 + 2 \sum_{n=1}^\infty |F_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^\infty |F_n|^2$$