`http://users.auth.gr/natreas`
Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5
Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6
Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marsden (πιο μαθηματικό)

Μέρος I
Ατρέας

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Έστω $\mathbb{C} = \left\{ z = \overbrace{(x,y)}^{\text{γεωμετρική παράσταση μιγαδικού}};\ x,y \in \mathbb{R} \right\}$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $x_2 = (x_2, y_2)$, τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο $\lambda \in \mathbb{R}$ με μιγαδικό z

Αν $z = (x, y)$, τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

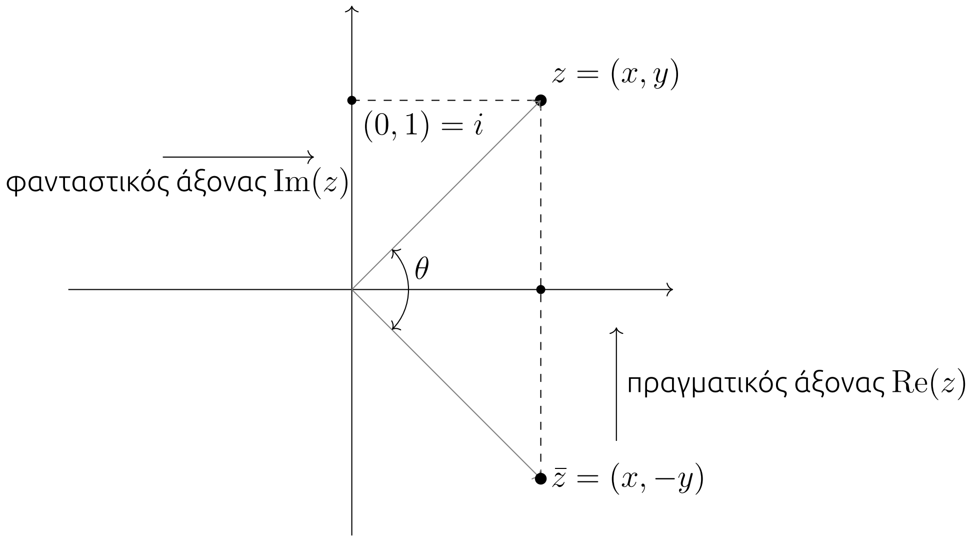
Αν $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$, τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{C}$ είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x\in\mathbb{R} \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} A=\big\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\big\}$$

- $(x,0),(y,0)\in A \implies (x,0)+(y,0)=(x+y,0)\in A$
- $(x,0)(y,0)=(xy,0)\in A$

Στο εξής γράφω:

$$1=(1,0)$$
$$x=(x,0)$$

Ορίζω:

$$i=(0,1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2=(0,1)(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1$$
$$\boxed{i^2=-1}$$

Έτσι:

$$z=(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$$
$$\underset{i=(0,1)}{\overset{x=(x,0)}{=}} x\cdot 1+yi$$
$$\implies \boxed{z=x+iy}$$

$$\underbrace{z=x+iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z=(x,y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\overset{\text{πολικές}}{\underset{\text{του }(x,y)}{=}} \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta =$$
$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1}$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$z = |z|\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}$$
$$= |z| \cdot e^{i\theta}$$

όπου στο εξής:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$\boxed{\text{τύπος του Euler}}$

Τελικά:

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}} \text{ (πολική μορφή μιγαδικών)}$$

Σημείωση: $\cos\theta + i\sin\theta$

$$\overset{\text{σειρές}}{\underset{\text{McLaurin}}{=}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$
$$\overset{i^2=-1}{=} \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right)$$
$$= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta}$$

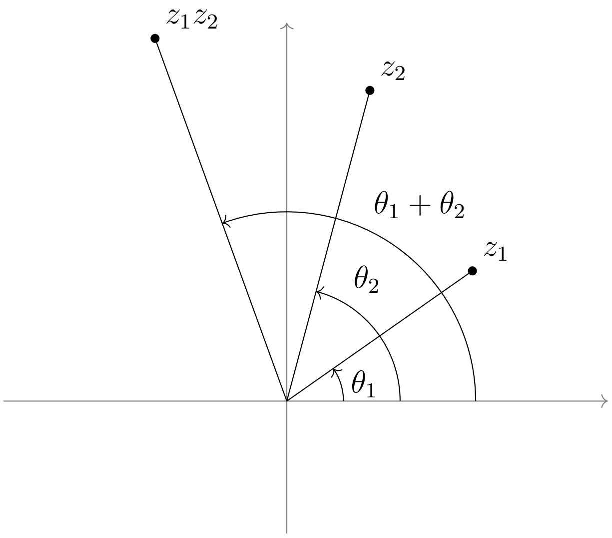
- Ορίζω πρωτεύον όρισμα $\mathrm{Arg} z$ (μη μηδενικού) μιγαδικού z να είναι η γωνία θ που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του $\mathbb{C}$ με την ημιευθεία OA, όπου A το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του $z = x + iy$.

Έτσι:

$z = |z|e^{i\mathrm{Arg}\, z}$ πολική μορφή του z

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\mathrm{Arg}\, z_1}|z_2|e^{i\mathrm{Arg}\, z_2}$$
$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2)}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$$
$$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$



Ιδιότητα: $z\bar{z} = |z|^2$

Κεφάλαιο 2 Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

π.χ.

$$f(z) = z^2 \implies f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\mathrm{Re}(f)} + i\underbrace{(2xy)}_{\mathrm{Im}(f)}$$

$$\underset{\text{μορφή}}{\overset{\text{γεωμετρική}}{=}} (x^2 - y^2,\ 2xy)$$

Τελικά: $\boxed{f(x,y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)}$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

π.χ.

$$f(z) = \frac{1}{|z|\bar{z}} \overset{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z}$$

$$\overset{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\overset{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \overset{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

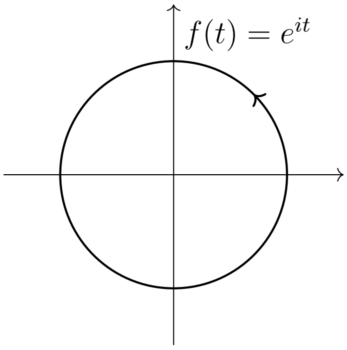
$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιγ. μεταβλ.}} \xleftrightarrow{\text{1-1}} \begin{array}{l}\text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big)\end{array}$$

όπου u, v πραγματ. συναρτ. 2 μεταβλητών

Υπάρχουν $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής
π.χ

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{it},\ t \in (0, \pi] \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

$t \to (\cos t, \sin t)$ καμπύλη $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$



Η γραφ. παράσταση της $f(t) = e^{it},\ t \in (-\pi, \pi)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0, 0)$ με αντιωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1, t) = (1, 0) + t(0, 1)$$

Το πεδίο ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδ. μεταβλητών υπολογίζεται ως συνήθως (με τις πραγματικές συναρτήσεις) ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ Διαφοροποιήσεις

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Πρέπει ο παρον. να είναι διάφορος του μηδενός: Έτσι $z \neq 0$ Άρα Π.Ο $= \mathbb{C} - \big\{(0, 0)\big\}$

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 2}$$

Σημείωση Η g είναι **ρητή** συνάρτηση (δηλ. πηλίκο δύο (μιγαδικών) πολυωνύμων).
Κάθε συνάρτηση της μορφής $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ καλείται (μιγαδικό) πολυώνυμο.
Πρέπει παρον. $\neq 0$ δηλ:

$z^2 + 2 = 0$ (**ΠΡΟΣΟΧΗ!!** Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού N έχει ΑΚΡΙΒΩΣ N ρίζες στο $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} & z^2 + 2 = 0 \xRightarrow{i^2 = -1} z^2 - 2i^2 = 0 \\ & \Longrightarrow \left(z - \sqrt{2}i\right)\left(z + \sqrt{2}i\right) = 0 \\ & \Longrightarrow \boxed{z = \pm\sqrt{2}i} \end{aligned}$$

Τελικά Π.Ο = $\mathbb{C} - \left\{\pm\sqrt{2}i\right\}$

$\boxed{h(z) = \operatorname{Arg} z,\ \text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}}$

Για $z = 0$ ΔΕΝ ορίζεται όρισμα, επειδή $0 = |0| \cdot e^{i\theta}\ \forall \theta$

Σημείωση $az^2 + bz + c = 0$
$a, b, c \in \mathbb{C}$

Λύνεται με διακρίνουσα κατά τα γνωστά.

Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα Horner για πολυώνυμα (με πραγματικούς συντελεστές) βαθμού $N \geq 3$.

$$
\begin{aligned}
a(z) &= e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \\
&= e^x(\cos y + i \sin y) \\
&= (e^x \cos y,\ e^x \sin y)\,, \quad x, y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

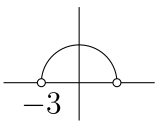
Ως διανυσματικό πεδίο προφανώς Π.Ο = $\mathbb{R}^2$

Έτσι Π.Ο = $\mathbb{C}$.

$l(z) = \operatorname{Log}$ (αντίστροφη της e^z)

$$\underbrace{\operatorname{Log}}_{\text{μιγαδικός λογάριθμος}} \overset{\text{ορισμός}}{:=} \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

Π.Ο $= \mathbb{C} - \{0\}$



$$
\begin{aligned}
\operatorname{Log}(3) &= \ln|-3| = i \operatorname{Arg}(-3) \\
&= \ln 3 + i\pi
\end{aligned}
$$

$$\lambda(z) = \sin z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$
\left(
\begin{array}{ll}
e^{i\theta} & = \cos\theta + i \sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi] \\
e^{-i\theta} & = \cos\theta - i \sin\theta \\
\hline
\sin\theta & = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}
\end{array}
\right)
$$

Π.Ο = $\mathbb{C}$

$$m(z) = \cos z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Π.Ο $= \mathbb{C}$

Όλες οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες ισχύουν στο $\mathbb{C}$ όπως στο $\mathbb{R}$.

$$h(z) = \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{2k\pi + \operatorname{Arg} z}{n}} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

(Η $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται ως το **σύνολο** όλων των λύσεων της εξίσωσης $z^n = a, \quad a \in \mathbb{C}$)

Π.Ο $= \mathbb{C} - \{0\}$

2.1 Όριο/Συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής

Ορισμός

Έστω $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ μιγ. συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι σ.συσσ. του A και έστω $a = a_0 + ib_0$. Τότε

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a_0 \\ \quad\textbf{ΚΑΙ} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b_0 \end{cases}$$

Επίσης, αν $z_0 \in A$, τότε
f συνεχής στο σημείο z_0

$$\Updownarrow$$

οι συναρτήσεις $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ΣΥΝΕΧΕΙΣ στο σημείο $(x_0, y_0$ (ως πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

Έτσι:

$$\left.\begin{array}{l} \text{οι πολυωνυμικές} \\ \text{η εκθετική} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\sin z, \cos z) \\ \text{οι υπερβολικές } (\operatorname{ch}, \operatorname{sh}) \end{array}\right\} \text{συνεχείς στο } \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{οι ρητές} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\tan z, \cot z) \end{array}\right\} \text{συνεχείς στο } \textbf{πεδίο ορισμού τους}$$

Ορίζω το ∞ του μιγαδικού επιπέδου να είναι το σύνολο σημείων που απέχουν "άπειρη" απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται ως:

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, όπου:

$$\infty + z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
$$\infty \cdot z = \infty \quad \forall z \neq 0$$
$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \neq \infty$$

Όλες οι πράξεις του ορίου που ξέρετε ισχύουν και στους μιγαδικούς (αρκεί να μην εμφανίζονται οι γνωστές απροσδιόριστες μορφές):

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Ο κανόνας De l' Hospital ισχύει στους μιγαδικούς.

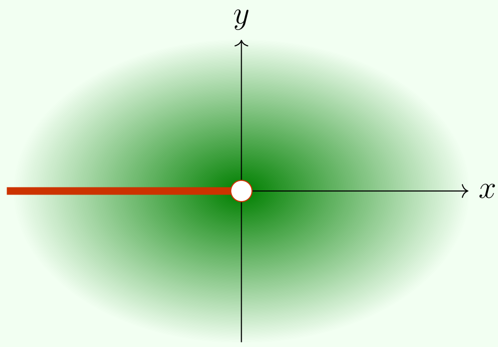
Σημείωση:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \mathbb{C} \iff \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = a \in \mathbb{C}$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \iff \lim_{z\to z_0} \left|f(z)\right| = 0$$

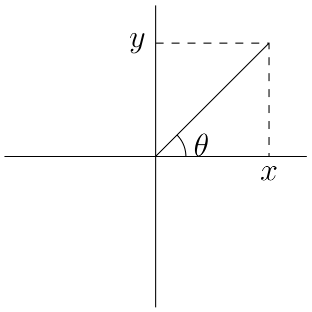
Θ.

Έστω $\operatorname{Arg} z : \mathbb{C} - \{0\} \to (-\pi, \pi]$
Τότε η $\operatorname{Arg} z$ **είναι συνεχής** στο σύνολο:

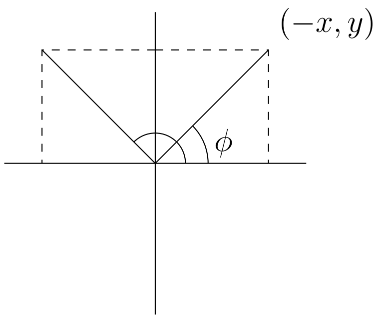
$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ ΚΑΙ } y = 0\}$$



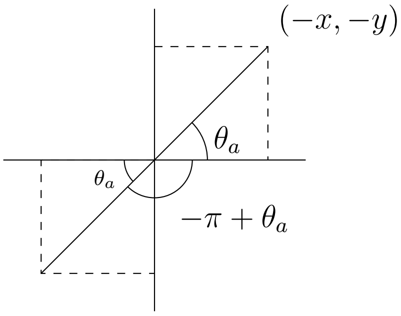
Έστω $z = x + iy$
(α) $x > 0,\ y > 0$



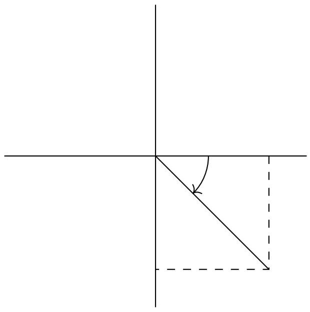
(β) $x < 0,\ y > 0$



(γ) $x < 0,\ y < 0$



(δ) $x > 0,\ y < 0$



$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x, y > 0 \\ \pi - \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y > 0 \\ -\pi + \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y < 0 \\ -\arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x > 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Για $\begin{array}{l} x = 0, \quad \text{τότε } \operatorname{Arg} := \frac{\pi}{2} \text{ ή } -\frac{\pi}{2} \\ y = 0, \quad \text{τότε } \operatorname{Arg} := 0 \text{ ή } \pi \end{array}$

Έστω $z_0 = x_0 < 0$

- Έστω $z = x_0 + it \quad (t > 0)$

  Για $t \to 0^+,\ z \to z_0 = x_0$, αλλά:

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Arg} z \overset{z = x_0 + it}{=} \lim_{t \to 0^+} \operatorname{Arg}(x_0 + it) \overset{\text{2ο τετ.}}{=} \lim_{t \to 0^+} \left(\pi - \arctan\left|\frac{t}{x_0}\right|\right) = \pi - \arctan 0 = \pi$$

- Για $z = x_0 + it \quad (t < 0)$, τότε:

$$t \to 0^-, \quad z \to z_0, \text{ και}$$

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Arg} z = \lim_{t \to 0^-} \operatorname{Arg}(x_0 + it) \overset{\text{3ο τετ.}}{=} -\pi + \arctan 0 = -\pi$$

Άρα το όριο στο $z_0 = x_0$ ΔΕΝ υπάρχει, και έτσι η $\operatorname{Arg} z$ ασυνεχής στα $z = x_0$ με $x_0 \leq 0$.

Αν $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$ πού είναι ασυνεχής;

2.2 Μιγαδική παράγωγος

Την εβδομάδα της 28ης θα γίνουν κανονικά τα μαθήματα του Ατρέα.

Ορισμός

Έστω $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο σημείο z_0, αν υπάρχει το ΟΡΙΟ:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a \in \mathbb{C}$$

(ή ισοδύναμα $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = a \in \mathbb{C}$)
Στο εξής το όριο αυτό συμβολίζουμε με $f'(z_0)$ ή $\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z}$

Ορισμός

Αν $f : A \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$, θα λέμε στο εξής ότι η f είναι ΟΛΟΜΟΡΦΗ (ή ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - holomorphic/analytic) **στο σημείο $\mathbf{z_0}$**, εάν η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **ΣΕ ΚΑΘΕ ΣΗΜΕΙΟ** του ανοικτού δίσκου 

$$D_\epsilon(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon \right\}$$

για κάποιο $\epsilon > 0$

Αν f ολόμορφη σε ΚΑΘΕ σημείο του A λέμε ότι η f ολόμορφη στο A.

Ορισμός

Αν A μη ανοικτό, λέμε ότι η f ολόμορφη στο A, αν υπάρχει $B \supset A$, B ανοικτό ώστε η f στο B.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες της παραγώγου που γνωρίζετε ισχύουν και για τη μιγαδική παράγωγο

π.χ. Έστω f, g **μιγαδικά** παραγωγίσιμες σε σημείο z_0. Τότε:

- f παραγ. στο $z_0 \implies f$ συνεχής στο z_0
- $\left(af \pm by\right)'(z_0) = af'(z_0) + bg'(z_0)\ \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $\left(fg\right)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \qquad \big(g(z_0) \neq 0\big)$
- Ο κανόνας αλυσίδας ισχύει στις μιγαδικές συναρτήσεις:

$$\left(h \circ g\right)'(z_0) = h'\left(g(z_0)\right) g'(z_0)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σύνθεση καλά ορισμένη

Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης Έστω f ολόμορφη σε σημείο z_0 με $f'(z_0) \neq 0$.
Αν $w_0 = f(z_0)$, τότε υπάρχουν $\epsilon, \epsilon' > 0$ ώστε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : \mathrm{D}_\epsilon(w_0) \to \mathrm{D}_{\epsilon'}(z_0)$ καλά ορισμένη, ολόμορφη στο w_0 και

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Θ.: Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = f(x+iy) = u(x+y) + iv(x, y)$.
Θεωρώ $z = x + iy,\ z_0 = x_0 + iy_0$ και A ανοικτό.
Τότε:
f μιγαδικά παραγωγίσιμη στο z_0

$$\Updownarrow$$

(α) Η $\mathbf{F}(x, y) = \big(u(x, y),\ v(x, y)\big)$ είναι **διαφορίσιμο** διανυσμ. πεδίο στο σημείο (x_0, y_0)

$$\boxed{\text{ΚΑΙ}}$$

(β)

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \xleftarrow{\text{εξισώσεις C-R}}$$

Πόρισμα (ΠΡΑΚΤΙΚΟΤΑΤΟ) Αν $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ είναι έτσι ώστε:

(α) u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0) και "κοντά" στο (x_0, y_0)

(β) $\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \xleftarrow{\text{C-R}}$

Τότε ($\Longrightarrow$) η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$

Παρ.

$$\begin{aligned} z^2 &= (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy), \text{ άρα} \end{aligned}$$

$$f = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right.$$

Παρατηρήσεις

(α) Έστω f μιγαδικά παραγ. συνάρτηση σε σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

- Έστω $z = x + iy_0 \quad (x \in \mathbb{R})$ είναι τυχαίο σημείο της "οριζόντιας" ευθείας που διέρχεται από το z_0
- Για $x \to x_0$, τότε $z = x + iy_0 \to x_0 + iy_0 = z_0$ (δηλ. $z \to z_0$ όταν $x \to x_0$ πάνω στην οριζόντια ευθεία)

Τότε για $z = x + iy_0$ έχω:

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0)+iv(x,y_0)-\big(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\big)}{x+iy_0-(x_0+iy_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0} + i\lim_{x\to x_0}\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0} \\
&= u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0) \\
&\implies \boxed{f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)} := \tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}
\end{aligned}
$$

Με όμοιο τρόπο, αν εργαστούμε κατά μήκος της "κάθετης" ευθείας που διέρχεται από το z_0, έχουμε:

$$
\boxed{f'(z_0)=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)} := -i\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}
$$

(β) Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} \\
\implies & \boxed{\mathrm{d}f(z_0)=f'(z_0)\,\mathrm{d}z}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{d}z :=$ στοιχειώδης όγκος στο επίπεδο xy

$\mathrm{d}f(z_0) :=$ στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο uv στο οποίο μετασχηματίζεται το $\mathrm{d}z$ μέσω της απεικόνισης f

$$
\mathrm{d}f(z_0)=\left|f'(z_0)\right| e^{i\operatorname{Arg} f'(z_0)}\,\mathrm{d}z \quad \big(f'(z_0)\neq 0\big)
$$

Για τις παραγώγους στοιχειωδών συναρτήσεων ισχύουν τα συνήθη από την πραγματική ανάλυση.

π.χ Αν $f(z)=e^z$, τότε $(e^z)'=e^z\ \forall z\in\mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
f(z) = e^z = e^{x+iy} &= e^x e^{iy} = e^x(\cos y+\sin y) \\
&= \underbrace{e^x\cos y}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{(e^x\sin y)}_{v(x,y)}
\end{aligned}
$$

Ορίζω $\begin{cases} u(x,y)=\mathrm{Re}(e^z)=e^x\cos y \\ v(x,y)=\mathrm{Im}(e^z)=e^x\sin y \end{cases}$

- u, v καλά ορισμένες $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, και επιπλέον u,v είναι **ΣΥΝΕΧΕΙΣ** $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$
- $\begin{matrix} u_x=e^x\cos y & u_y=-e^x\sin y \\ v_x=e^x\sin y & v_y=e^x\cos y \end{matrix}$, έτσι παρατηρώ ότι $\begin{cases} \quad u_x=v_y \\ \text{ΚΑΙ} \quad u_y=-v_x \end{cases} \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\xRightarrow{\text{πόρισμα}}$ $f(z)=e^z$ μιγαδικά παραγωγίσιμη $\forall z\in\mathbb{C}$

- Γνωρίζω ότι αν η $f=u+iv$ είναι μιγ. παραγ., τότε $f'(z)=u_x+iv_x$.

  Έτσι στην προκειμένη περίπτωση:

$$
f'(z)=(e^z)'=u_x+iv_x=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^xe^{iy}=e^z
$$

π.χ $\text{Log}z = \frac{1}{z}\ \forall z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x+iy : x \leq 0$ και $y = 0\}$ $\Big($υπό την προϋπόθεση ότι $\text{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]\Big)$

διότι $\text{Log}z = w \overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} z = e^w$, άρα $\forall z \in \mathbb{C}^*$, από το θεώρ. παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης έχουμε: $(\text{Log}z)' = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$

Με την ίδια λογική (και με χρήση των ιδιοτήτων παραγώγου) αποδεικνύεται ότι

- $(z^n)' = nz^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(z^{-n})' = -nz^{-n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$
- $(z^a)' = az^{a-1} \quad \forall a \in \mathbb{Q}$ ή a άρρητος ή a έχει μη μηδενικό φανταστικό μέρος $\quad \forall z \in \mathbb{C}^*(\mathbb{C}^*$ όπως στο λογά
- $(\sin z)' = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cos z)' = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\sinh z)' = \cosh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cosh z)' = \sinh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(a^z)' = a^z \text{Log}a \quad \forall z \int \mathbb{C}$

κλπ.

2.3 Ασκήσεις

ΝΔΟ η $f(z) = \bar{z}$ ΔΕΝ είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **σε κανένα** σημείο του $\mathbb{C}$.

- $\bar{z} = \overline{x+iy} = x - iy$, ορίζω $\left|\begin{array}{l} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{array}\right.$
- Προφανώς u και v καλά ορισμένες και συνεχείς $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, αλλά:

  $$u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$, άρα αφού η μία από τις δύο εξισ. C-R δεν ισχύει $\underline{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$, η $f(z) = \bar{z}$ **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγ. $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$\left|\begin{array}{l} u = e^x \cos y_0 \\ v = e^x \sin y_0 \end{array}\right.$$

Άσκ. 2 Η συνάρτηση $f(z) = |z|$ **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε **ΚΑΝΕΝΑ** σημείο του $\mathbb{C}$.

Οι εξισώσεις C-R σε πολικές συντ/νες είναι οι εξής:

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\theta & \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi] \\ u_\theta = -\rho v_\rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) \\ &= f\left(|z| e^{i \operatorname{Arg} z}\right) = f\left(\rho e^{i\theta}\right) = u(\rho, \theta) + i v(\rho, \theta) \end{aligned}$$

$f(z) = |z| = \rho$, άρα $\begin{cases} u(\rho,\theta) = \rho \\ v(\rho,\theta) = 0 \end{cases}$

Οι u, v καλά ορισμένες και συνεχείς $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$ αλλά

$$u_\rho = 1 \neq \frac{1}{\rho} \cdot 0 = \frac{1}{\rho} v_\theta \quad \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$$

και αφού μία από τις εξισώσεις C-R δεν ισχύει $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$ αναγκαστικά η $f(z) = |z|$ δεν είναι μιγαδικά παραγ. σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

π.χ

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad z \neq 0 \\ &\overset{|z|^2 = z\bar{z}}{=} \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη.

Άσκ. 3 Υπολογίστε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{e^{z^2} - 1}{z^2}$

(β) $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1}$

(γ) $\lim\limits_{z \to \infty} e^z$

Στα όρια ισχύει ο De L' Hospital

(α)

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2} \underbrace{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L'Hospital}}{=}}}_{\text{διότι } e^{z^2} - 1 \text{ και } z^2 \text{ μιγ. παραγ.}} \lim_{z \to 0} \frac{2z e^{z^2} - 0}{2z} = \lim_{z \to 0} e^{z^2} = e^0 = 1$$

(β) Θα προσπαθήσω να αποδείξω ότι το όριο δεν υπάρχει, κάτι που φαντάζομαι επειδή μέσα στο όριο υπάρχει ο $\bar{z}$.

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του οριζόντιου άξονα" που διέρχεται από το $z_0 = 1$.
  Δηλ. θεωρώ σημεία z της μορφής

  $$z = x + i0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

  Προφανώς για $x \to 1$, έχω: $z \to z_0 = 1$.
  Τότε $\forall z = x$ έχω:

  $$\lim_{z\to 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1} \underset{\text{του οριζ. άξονα}}{\overset{\text{κατα μήκος}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-1} = 1$$

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του κάθετου άξονα" που διέρχεται από το $z_0 = 1$, δηλαδή σημεία:

  $$z = 1 + ix \quad (x \in \mathbb{R})$$

  Προφανώς για $x \to 0$, έχω $z \to z_0 = 1$, και

  $$\lim_{z\to 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1} \underset{\text{του κατακόρυφου άξονα}}{\overset{\text{κατα μήκος}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(1+ix)^2 - 1}{(1-ix)^2 - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + 2ix - x^2 - \cancel{1}}{\cancel{1} - 2ix - x^2 - \cancel{1}}$$
  $$= \lim_{x\to 0} \frac{2ix - x^2}{-2ix - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2i - x}{-2i - x} = \frac{2i}{-2i} = -1$$

Εφόσον $1 \neq -1$ το όριο ΔΕΝ υπάρχει.

(γ) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = ?$

- Έστω $z = x \quad (x < 0)$, για $x \to -\infty$, τότε $z \to \infty$ και $\lim\limits_{z\to\infty} e^z = \lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$
- Έστω $z = x \quad (x > 0)$, για $x \to +\infty$, τότε $z \to \infty$, αλλά: $\lim\limits_{z\to\infty} e^z = \lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$, συνεπώς το $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ ΔΕΝ υπάρχει.

Άσκ. 4 Αν $f(z) = u + iv$ είναι ακεραία (ολόμορφη στο $\mathbb{C}$) και αν

$$au + bv = c$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ σταθερές όχι όλες ίσες με μηδέν, ΝΔΟ $f(z) = A,\ A \in \mathbb{C}$ σταθερά.

- Έστω $\underline{c = 0}$, εξ' υποθέσεως $a^2 + b^2 \neq 0$
- Έστω $c \neq 0$, πάλι πρέπει $a^2 + b^2 \neq 0$ (διότι αλλιώς $0 = c$, άτοπο)
- Τελικά $a^2 + b^2 \neq 0$ σε κάθε περίπτωση.

$$\begin{cases} au_x + bv_x = 0 \\ au_y + bv_y = 0 \end{cases} \implies \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\xRightarrow[u_y = -v_x \text{ αφού } f \text{ ακεραία}]{u_x = v_y} \begin{bmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_y \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2$$

και επειδή $a^+b^2 \neq 0$, πρέπει $u_x^2 + u_y^2 = 0$ για να έχει λύση το σύστημα $\implies$ $u_x = 0$ και $u_y = 0 \overset{\text{C-R}}{\implies}$ $u_x = u_y = v_x = v_y = 0\, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \implies f(z) = A \in \mathbb{C}$ σταθερά.

Άσκ. Βρείτε τα σημεία ολομορφίας των συναρτήσεων:

(α) $f(z) = \mathrm{Log}(z-i)$

(β) $g(z) = \tan z$

(α) Έστω ότι $\mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$. Τότε είναι γνωστό ότι η $\mathrm{Log}z$ είναι μιγαδικά παραγ. στο $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x+iy \quad x \leq 0$ και $y = 0\}$.

Έτσι η $\mathrm{Log}(z-i)$ είναι μιγ. παραγ. στο σύνολο

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C} - \big\{x+iy : \mathrm{Re}(z-i) \leq 0 \text{ και } \mathrm{Im}(z-i) = 1\big\} \\
&\overset{z=x+iy}{=} \mathbb{C} - \{x+iy : x \leq 0 \text{ και } y-1=0\} \\
&= \mathbb{C} - \{x+iy : x \leq 0 \text{ και } y = 1\}
\end{aligned}$$

(β) $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ εκτός των σημείων που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

- $\cos z = 0 \iff \cos(x+iy) = 0 \iff \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = 0 \overset{\text{ορ. sin \& cos}}{\iff} \cos x \cdot \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} - \sin x \cdot \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = 0 \iff \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y = 0 \iff$ $\left|\begin{array}{c}\cos x \cdot \cosh y = 0 \\ \text{και} \\ \sin x \cdot \sinh y = 0\end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{c}\cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sin x = 0 \\ \text{(Αδύνατο)}\end{array}\right.$ ή $\left|\begin{array}{c}\cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sinh y = 0\end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l}x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = 0\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

  Τελικά $\cos z \iff \boxed{z = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \int \mathbb{Z}}$ και έτσι g είναι ολόμορφη στο

  $$\mathbb{C} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Άσκ. Έστω $f(x+iy) = (x^2+2y) + i(x^2+y^2)$

(i) Να γραφεί η f συναρτήσει του $z = x+iy$

(ii) Να βρείτε όλα τα σημεία, όπου η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη

(iii) Να βρείτε όλα τα σημεία στα οποία η f είναι ολόμορφη

(i) $x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
$\big(z = x+iy\big)$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left(\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2\right) \\
&= \frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} - i\left(z-\bar{z}\right) + i\left(\frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} - \frac{z^2-2z\bar{z}+z^2}{4}\right) \\
&= \frac{z^2+2|z|^2+\bar{z}^2}{4} - i\left(z-\bar{z}-|z|^2\right)
\end{aligned}$$

(ii) Προφανώς $\left|\begin{array}{l}\mathrm{Re}(f) := u(x,y) = x^2+2y \\ \mathrm{Im}(f) := v(x,y) = x^2+y^2\end{array}\right.$

- Οι u και v είναι συνεχείς (ως πολυωνυμικές) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\begin{cases} u_x = v_y \\ \text{ΚΑΙ} \\ u_y = -v_x \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = 2y \\ \text{ΚΑΙ} \\ 2 = -2x \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ \text{ΚΑΙ} \\ x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ \text{ΚΑΙ} \\ y = -1 \end{cases}$

Άρα η f είναι μιγαδ. παραγ. **μόνον** στο $\boxed{z = -1 - i}$, και μάλιστα εφ' όσον $f(z) = f'(x+iy) = u_x + iv_x$:

$$f'(-1-i) = 2(-1) + i2(-1) = \underline{-2 - i2}$$

(iii) ΔΕΝ υπάρχουν σημεία όπου η f είναι ολόμορφη.

Κεφάλαιο 3 Μιγαδική ολοκλήρωση

Εισαγωγή

Ορισμός

Καλούμε **καμπύλη** στο μιγαδικό επίπεδο κάθε <u>συνεχή</u> συνάρτηση

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} : \gamma(t) = x(t) = iy(t)$$

όπου $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.

Έτσι: $\gamma(t)$ καλείται

ΑΠΛΗ αν είναι 1-1 (δεν αυτοτέμνεται)
ΚΛΕΙΣΤΗ αν έχει ίδια αρχή και πέρας
ΛΕΙΑ αν είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με συνεχή παράγωγο

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

και μη μηδενική παράγωγο $\forall t$

- Κάθε τέτοια καμπύλη έχει ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ (φορά διαγραφής) προς την κατεύθυνση αύξησης του t

π.χ. $\gamma(t) = e^{it},\ t \in (-\pi, \pi]$
$\gamma(t) = e^{-it},\ t \in (-\pi, \pi]$

- Αν γ κλειστή λέω ότι είναι <u>θετικά</u> προσανατολισμένη αν η φορά διαγραφής είναι η αντιωρολογιακή
- $-\gamma$: ίδιο ίχνος με τη γ, αλλά αντίθετη φορά διαγραφής
- $\gamma_1 + \gamma_2$:

Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ ΣΥΝΕΧΗΣ μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής και $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ λεία καμπύλη. Καλώ επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f ΠΑΝΩ στη γ να είναι ο ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\underbrace{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}\gamma(t)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\gamma(t) &= \mathrm{d}\big(x(t) + iy(t)\big) = \\ &= \mathrm{d}x(t) + i\,\mathrm{d}y(t) = \big(x'(t) + iy'(t)\big)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\gamma(t) = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Οι κλασικές ιδιότητες των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων έργου ισχύουν στους μιγαδικούς. Ενδεικτικά:

- $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\displaystyle\int_\gamma (af + by)(z)\,\mathrm{d}z = a\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z \; \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_\gamma \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}z \leq M \cdot$ (μήκος της γ) όπου M μέγιστο της $|f|$ επί της γ
- $\displaystyle\int_\gamma |\,\mathrm{d}z| = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t :=$ μήκος της καμπ. γ

Πρόταση: Έστω $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ συνεχής επί καμπύλης λείας $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

Τότε:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \underbrace{\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y\right)}_{\substack{\text{επικαμπύλιο ολοκλ.}\\ \text{διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2}} + i\underbrace{\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x\right)}_{\substack{\text{επικαμπύλιο ολοκλ.}\\ \text{διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2}}$$

Απόδ.

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (u+iv)\,\mathrm{d}(x+iy)\\
&= \int_a^b \Big[u\left(x(t),y(t)\right) + iv\left(x(t),y(t)\right)\Big]\left(x'(t)+iy'(t)\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \Big(u\left(x(t),y(t)\right)x'(t) - v\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\Big)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \Big(u\left(x(t),y(t)\right)y'(t) + v\left(x(t),y(t)\right)x'(t)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&\overset{\text{ορ.}}{=} \left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y\right) + i\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

Ορίζω $\bar{f}(z) = u(x,y) - iv(x,y)$
Τότε

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y \overset{\text{Λογ. II}}{:=} \text{έργο του πεδίου } \bar{f} \text{ επί της καμπύλης } \gamma$$

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x \overset{\text{Λογ. II}}{:=} \underline{\text{ροή}} \text{ του } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma$$

3.1 Αντιπαράγωγος και ανεξαρτησία δρόμου

Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ είναι μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση (μιγαδικής μεταβλητής) σε τόπο GCC (τόπος := ανοικτό και συνεκτικό σύνολο). Αν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $F = F(z)$, έτσι ώστε:

$$F'(z) = f(z)\ \forall z \in \mathbf{G},\ \text{τότε η } F \text{ καλείται αντιπαράγωγος της } f.$$

Θ. Έστω $f = f(z)$ είναι συνεχής μιγαδική συνάρτηση σε τόπο $\mathbf{G}$. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- Η f είναι ΜΟΝΑΔΙΚΗ αντιπαράγωγο F (με προσέγγιση σταθεράς)
- $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$ για ΚΑΘΕ κλειστή λεία καμπύλη εντός του G
- $\oint \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου (δηλαδή εξαρτάται μόνον από το αρχικό και τελικό σημείο τ

Οι συνήθεις αντιπαράγωγοι εξακολουθούν να ισχύουν, π.χ.:

$$\int z^n \,\mathrm{d}z = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c, \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$$
$$\int \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z = \mathrm{Log} z + c, \forall z \in \mathbb{C}^*$$
$$\int z^{-n} \,\mathrm{d}z = \frac{z^{-n+1}}{-n+1} + c, \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}, c \in \mathbb{C} \text{ στάθερα}$$
$$\int \sin z \,\mathrm{d}z = -\cos z + c$$
$$\int \cos z \,\mathrm{d}z = \sin z + c$$

κλπ.

3.2 Θεώρημα Caychy

Έστω $f = f(z)$ είναι **ολόμορφη** συνάρτηση **πάνω** και στο **εσωτερικό απλής**, κλειστής και λείας καμπύλης γ.

Τότε:

$$\oint_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = 0$$

Απόδ. Έστω $f = u + iv$, όπου $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πάνω και στο εσωτερικό της γ. Τότε:

$$\oint_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \left(\oint_\gamma u \,\mathrm{d}x - v \,\mathrm{d}y \right) + i \left(\oint u \,\mathrm{d}y + v \,\mathrm{d}x \right)$$
$$\overset{\text{Θεώρ.}}{\underset{\text{Green}}{=}} \iint_R (-v_x - u_y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + i \iint_R (u_x - v_y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

και επειδή η f ολόμορφη ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann $\forall (x, y)$ στο εσωτερικό της γ, δηλαδή το R, άρα:

$$\oint_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z \overset{u_x = v_y}{\underset{u_y = v_x}{=}} \iint_R 0 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + i \iint_\gamma 0 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0$$

$$\int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \underbrace{a}_{\text{έργο του πεδίου } f \text{ κατά μήκος } \gamma} + i \overbrace{b}^{\text{ροή του πεδίου } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν υπάρχει έστω και ένα σημείο όπου η f δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο εσωτερικό της γ, τότε το **θεώρ. Cauchy δεν ισχύει εν γένει**.

π.χ $\displaystyle \oint_{|z|=1 \text{ με θετική φορά}} \frac{\mathrm{d}z}{z}$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \underset{t\in[0,2\pi)}{\overset{\gamma(t)=e^{it}}{=}}$$

$$\overset{\text{ορ.}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\left(e^{it}\right)}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})^2}{e^{it}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} = 2\pi i$$

Θ.: Παραμόρφωση δρόμων

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη σε τόπο G με σύνολο $\partial G = \gamma_1 \cup \gamma_2$ όπου γ_1, γ_2 απλές λειστές καμπύλες, λείες, με κοινό προσανατολισμό π.χ. όπως στο σχήμα Τότε $\oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$

Απόδ. Φέρνω δύο ευθ. τμήματα L_1 και L_2 που διαμερίζουν το G σε δύο χωρία έστω G_1, G_2. Τότε το θ. Cauchy ισχύει και στο G_1 και στο G_2.

- $\displaystyle\int_{\gamma_1^+ + L_1 + \gamma_2^+ + L_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (θ. Cauchy για το χωρίο G_1)
- $\displaystyle\int_{\gamma_2^- - L_1 - \gamma_2^- - L_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (θ. Cauchy για το χωρίο G_2)

$$\implies \left| \begin{array}{l} \left(\int_{\gamma_1^+} + \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^+} + \int_{L_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \\ \left(\int_{\gamma_1^-} - \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^-} - \int_{L_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \end{array} \right. \implies \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Πόρισμα (Γενικευμένο θεώρ. Cauchy) Έστω $f = f(z)$ ολόμορφη σε τόπο G με σύνορο $\partial G = \Gamma \cup (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_2)$, όπου:

- $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ απλές, κλειστές, λείες και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΕΣ καμπύλες
- Οι $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ βρίσκονται εντός της Γ και
- Κάθε καμπύλη $\gamma_j \quad j = 1, \ldots, n$ βρίσκεται εκτός των υπόλοιπων $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n$

  Τότε: $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$

Θ.: Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμημ. λείας και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ καμπύλης γ.
Τότε ΓΙΑ ΚΑΘΕ σημείο z_0 ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ ισχύει:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z}$$

Απόδειξη Έστω $|z-z_0| = r$ κύκλος ακτίνας r κατάλληλης ώστε ο δίσκος $|z-z_0| \leq r$ να βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό της γ.

Τότε από το θεώρημα παραμόρφ. δρόμων, εφ' όσον $\frac{f(z)}{z-z_0}$ ολόμορφη στο γραμμοσκιασμένο χωρίο, έχουμε:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \underbrace{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z}_{I_2} + \underbrace{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z}_{I_1}$$

Για το I_2 έχω:

$$\begin{aligned} I_2 = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z &\underset{\theta\in[0,2\pi]}{\overset{z=z_0+re^{i\theta}}{=}} f(z_0)\int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} rie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi i f(z_0) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{lll} l = l' & \iff & |l-l'| < \epsilon\ \forall\epsilon > 0 \\ \quad " & \implies " & \text{προφ. ισχύει} \\ \quad " & \impliedby " & \text{Έστω } l \neq l' \implies |l-l'| \geq \epsilon_0 > 0 \text{ άτοπο} \implies l = l' \end{array}\right)$$

Έτσι:

$$\boxed{\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) = I_1}$$

$$|I_1| \leq \oint_{|z-z_0|=r} \frac{\big|f(z)-f(z_0)\big|}{|z-z_0|}\,\mathrm{d}z \leq M \cdot \oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{|z-z_0|}\,\mathrm{d}z,$$

όπου $M = \max\Big\{\big|f(z)-f(z_0)\big|\ \forall z : |z-z_0| = 1\Big\}$

$$\begin{aligned} &= M\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{r}|\,\mathrm{d}z| \\ &= \frac{M}{r}\underbrace{\oint_{|z-z_0|=r} |\,\mathrm{d}z|}_{\text{μήκος καμπύλης}} = \frac{2\pi M r}{r} = \underline{2\pi M} \end{aligned}$$

Αλλά f ολόμορφη στο z_0, άρα f συνεχής στο z_0.

Εξ' ορισμού λοιπόν: $\forall\epsilon > 0\,\exists r_1 > r > 0 :\ \forall z : 0 < |z-z_0| < r < r_1 \implies \big|f(z)-f(z_0)\big| < \epsilon$

Έτσι $\forall\epsilon > 0$ μπορώ να βρω ακτίνα r : $\big|f(z)-f(z_0)\big|$ $\forall z : |z-z_0| = r$, δηλ. $M \leq \epsilon$ και τελικά $|I_1| \leq 2\pi M \leq 2\pi\epsilon\ \forall\epsilon > 0 \implies I_1 = 0$

Θ.: Ολοκληρ. τύπος Cauchy για παραγώγους

Έστω f είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ.
Αν z_0 σημείο στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ, τότε η f ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΚΑΘΕ ΤΑΞΗΣ στο σημείο z_0 και μάλιστα:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

Ο Ατρέας θα δίνει τύπους σε τυπολόγιο: `http://users.auth.gr/natreas/Efarmosmena/ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ.pdf`

3.3 Εφαρμογές

(1) **Θεώρ. μέσης τιμής Gauss**

Αν f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό θετικά προσανατολισμένου κύκλου $|z-z_0|=R$, τότε:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+Re^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

Απόδειξη Εφαρμόζω τον ολοκλ. τύπο του Cauchy με τα δεδομένα μου και έχω:

$$\begin{aligned}
f(z_0)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\\
&\underset{\text{ορισμός}}{\overset{z=z_0+Re^{i\theta}}{=}}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+Re^{i\theta}\right)}{Re^{i\theta}}\,\mathrm{d}\left(z_0+Re^{i\theta}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+Re^{i\theta}\right)}{\cancel{Re^{i\theta}}}\,i\cancel{Re^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\text{ζητούμενο}
\end{aligned}$$

(2) **Ανισότητα Cauchy** Έστω f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό θετικά προσανατολισμένου κύκλου $|z-z_0|=R$ και $M_R=\max\left\{\left|f(z)\right|,\ \forall z:|z-z_0|=R\right\}$

Τότε:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\frac{n!M_R}{R^n},\ n=1,2,3,\dots$$

Απόδ. Εφαρμόζουμε τον ολοκλ. τύπο Cauchy για παραγώγους προσαρμοσμένο στα δεδομένα:

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(z_0)\right|&=\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right|\\
&\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{\left|f(z)\right|}{\left|z-z_0\right|^{n+1}}|\,\mathrm{d}z|\\
&\le\frac{n!}{2\pi}M_R\oint_{|z-z_0|=R}\frac{1}{|z-z_0|^{n+1}}|\,\mathrm{d}z|\\
&=\frac{n!}{2\pi}M_R\oint_{|z-z_0|=R}\frac{1}{R^{n+1}}|\,\mathrm{d}z|\\
&=\frac{n!}{2\pi}M_R\frac{1}{R^{n+1}}\underbrace{\oint_{|z-z_0|=R}|\,\mathrm{d}z|}_{\text{μήκος κύκλου }z-z_0=R}\\
&=\frac{n!}{2\pi}M_R\frac{1}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R=\frac{n!M_R}{R^n}
\end{aligned}$$

(3) **Θεώρ. Liouville**

Κάθε **ακεραία** συνάρτηση (δηλ. ολόμορφη στο $\mathbb{C}$) και φραγμένη $\boxed{\text{στο } \mathbb{C}}$ είναι η σταθερή συνάρτηση.

Απόδ. Έστω $z \in \mathbb{C}$ τυχαίο. Χρησιμοποιώ ανισότητα Cauchy για $n = 1$:

$$\left|f'(z)\right| \leq \frac{1!\, M_R}{R}, \quad M_R = \max\left\{\left|f(z)\right| : |z - z_0| = R\right\}$$

Αφού f εξ' υποθέσεως είναι φραγμένη, άρα $\exists \underline{M > 0} : \left|f(z)\right| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Δηλ. $\left|f'(z)\right| \leq \dfrac{M_R}{R} \leq \dfrac{M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{0}$

Τότε $\left|f'(z)\right| = 0 \iff f'(z) = 0 \forall z \in \iff f(z) = c \in \mathbb{C}$

(4) **Αρχή μεγίστου/ελαχίστου**

Έστω f ολόμορφη σε ανοικτό και συνεκτικό σύνολο G και μη σταθερή στο G. Τότε η $|f|$ **ΔΕΝ έχει μέγιστη τιμή** στο G.

Αν μάλιστα $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$, τότε η $|f|$ **ΔΕΝ έχει ελάχιστη τιμή στο $\mathbf{G}$**.

Ειδικά αν G είναι και **ΦΡΑΓΜΕΝΟ** και η f είναι συνεχής στο σύνορο του G (το οποίο είναι απλή, λεία καμπύλη), τότε η $|f|$ **παίρνει ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΠΑΝΩ στο σύνορο του $\mathbf{G}$**. Ομοίως αν $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$, τότε η $|f|$ παίρνει ελάχιστη τιμή ΠΑΝΩ στο σύνορο του G.

Άσκ. Υπολογίστε το $\int_\gamma (i\bar{z} - z)\,\mathrm{d}z$
όπου γ είναι η παραβολή $y = 2t^2 + 1$ με αρχή το σημείο $(1, 3)$ και πέρας το σημείο $2, 9$.

Γενικά, μπορώ να κινηθώ μέσω ορισμού, αντιπαραγώγου ή θεωρημάτων. Η $\bar{z}$ δεν έχει παράγωγο, άρα δεν έχει αντιπαράγωγο (διαφορετικά από προηγούμενη εφαρμογή θα είχε άπειρες παραγώγους).

Έχουμε:

$$\int_\gamma (i\bar{z} - z)\,\mathrm{d}z = i\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z - \int_\gamma z\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2$$

- όσον αφορά το I_2, εφ' όσον η $f(z) = z$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ ως πολυώνυμο, έχει μοναδική αντιπαράγωγο (με προσέγγιση σταθεράς), άρα:

$$\int_\gamma z\,\mathrm{d}z = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{z_0=1+3i}^{z_1=2+9i}$$

(αντιπαράγωγος $\xRightarrow{\text{θεωρία}}$ ανεξαρτησία δρόμου)

$$\begin{aligned} &= \frac{(2+9i)^2}{2} - \frac{(1+3i)^2}{2} \\ &= \frac{69}{2} - 15i \\ &= B \end{aligned}$$

- Για το I_1:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= i\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z \underset{\text{διότι η } \bar{z} \text{ ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο}}{\overset{\text{ορισμός}}{=}} \\
&\underset{t+i(2t^2+1)=\gamma(t)}{\overset{(t,2t^2+1)}{=}} \int_1^2 \overline{\gamma(t)}\,\mathrm{d}\big(\gamma(t)\big) \\
&= \int_1^2 \Big[t - i\left(2t^2+1\right)\Big] \underbrace{[1+4ti]\,\mathrm{d}t}_{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t := \mathrm{d}\gamma(t)} \\
&= i\int_1^2 \Big[t + 4t\left(2t^2+1\right)\Big] + i\left[1+2t^2+4t^2\right]\mathrm{d}t \\
&= i\int_1^2 \left(5t+8t^3\right) + i\left(6t^2+1\right)\mathrm{d}t \\
&= i\left[\frac{5t^2}{2} + 2t^4\right]_1^2 - \left(2t^3+t\right)_1^2 \\
&= A + B
\end{aligned}
$$

Τελικά

Από εδώ και στο εξής, μέχρι νεωτέρας, όλοι μαζί, Τρίτη και Πέμπτη.

Άσκ. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

(α) $\displaystyle\oint_{\left|z-\frac{1}{z}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{2z+1}\,\mathrm{d}z$

(β) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^3+2}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z$

(γ) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\rho^z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

Όλες οι καμπύλες θεωρούνται προσανατολισμένες με τη θετική φορά.

(α) Θα χρησιμοποιήσω ολοκλ. τύπο Cauchy.

Έστω $f(z) = z\cos z$, ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ άρα και πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου

$$\left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

Προφανώς:

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{2z+1}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{z-\left(-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

όπου $z_0 = -\frac{1}{2} \in$ <u>εσωτερικό</u> του κύκλου $\left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$, ο οποίος είναι <u>θετικά προσανατολισμένος</u>.

Τότε ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες ώστε να έχω

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{z-\left(-\frac{1}{z}\right)}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left|z\cos z\right|_{z_0=-\frac{1}{2}} \implies \oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{z+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Τελικά: $\boxed{\oint_\gamma \frac{z\cos z}{2z+1}\,\mathrm{d}z = \frac{-\pi i}{2}\cos\left(-\frac{1}{2}\right)}$

(β) Θα χρησιμοποιήσω τύπο Cauchy για παραγώγους με $\mathbf{n}=\mathbf{2}$.

Έστω $g(z)=z^3+2$, προφανώς ακεραία (ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$), άρα ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου μας.

Επίσης, $z_0=2\ \in$ εσωτερικό του θετικά προσανατολισμένου κύκλου μας, άρα από τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε:

$$g''(2) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{g(z)}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z \qquad \big(g(z)=z^3+2\big)$$

$$\implies \oint_{|z|=3}\frac{z^3+2}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z = \pi i\cdot g''(2)$$

$$\begin{aligned} g'(z) &= 3z^2 \\ g''(z) &= 6z \\ g''(2) &= 12 \end{aligned}$$

Τελικά $\oint_{|z|=3}\frac{z^3+2}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z = 12\pi i$

(γ) Χρησιμοποιώ κατ' αρχήν γενικευμένο θεώρημα Cauchy, και έχω:

$$\begin{aligned} I_{\text{ζητούμενο}} &= \oint_{\gamma_1}\frac{e^z\,\mathrm{d}z}{(z-1)(z+1)} + \oint_{\gamma_2}\frac{e^z\,\mathrm{d}z}{(z-1)(z+1)} \\ &= \oint_{\gamma_1}\frac{e^z/(z+1)}{z-1}\,\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_2}\frac{e^z/(z-1)}{z+1}\,\mathrm{d}z \\ &\overset{\text{τύπος}}{\underset{\text{Cauchy}}{=}} 2\pi i\frac{e^z}{z+1}\bigg|_{z=1} + 2\pi i\frac{e^z}{z-1}\bigg|_{z=-1} \\ &= \pi i e - \pi i e^{-1} \end{aligned}$$

(διότι οι αριθμητές $\left| \begin{array}{l} a(z)=\frac{e^z}{z+1} \\ b(z)=\frac{e^z}{z-1} \end{array}\right.$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις πάνω και στο εσωτερικό των καμπύλων γ_1 και γ_2 αντιστοίχως και $z_0=1\in$ εσωτερικό της γ_1 ενώ $z_1=-1\in$ εσωτερικό γ_2)

Θέμα: Υπολογίστε το $\oint_{|z|=R}\frac{1}{(z-i)^2}\,\mathrm{d}z$ για όλες τις τιμές του R, όπου $R>0$ και $R\neq 1$

(α) $\underline{R < 1}$

Τότε $I = 0$ από θεώρ Cauchy αφού ανωμαλία $z_0 = i$ εκτός κύκλου $|z| = R$

(β) $\underline{R > 1}$

Τότε $z_0 = i \in$ εσωτερικό κύκλου $|z| = R$ οπότε χρησιμοποιώ τύπο Cauchy για παραγώγους και βρίσκω

$$I = 0$$

.

Άσκ. Έστω f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό κύκλου $|z| = R$, με $f(z) \neq 0\,\forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου και $f(z) = c$ για κάθε z πάνω στον κύκλο $|z| = R$.

ΝΔΟ $\left|f(z)\right| = A \geq 0\,\forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου.

Θα χρησιμοποιήσω αρχή μεγίστου/ελαχίστου, η οποία λέει ότι η $\left|f(z)\right|$ παίρνει τόσο τη μέγιστη, όσο και την ελάχιστη τιμή της ΠΑΝΩ στον κύκλο $|z| = R$.

Εφ' όσον όμως $f(z) = c\,\forall z : |z| = R$ τότε $\left|f(z)\right| = |c| =$ σταθερό $\forall z$ πάνω στον κύκλο, όπου όμως η $|f|$ παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Άρα η $\max|f| = \min|f|\ \forall z : |z| = R$, συνεπώς $|f| =$ σταθερά $\forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου.

Άσκ. Έστω f ακεραία και $\left|f(z)\right| \leq A|z| \forall z \in \mathbb{C}$. ΝΔΟ $f(z) = cz$, όπου $c \in \mathbb{C}$ σταθερά.

Θα χρησιμοποιήσω ανισότητα Cauchy για $n = 2$, προσπαθώντας να δείξω ότι:

$$\left|f''(z)\right| = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

τότε $f'(z) = c \implies f(z) = cz + d \quad c, d \in \mathbb{C}$. Από υπόθεση, για $z = 0$ έχω $\left|f(0)\right| \leq A \cdot 0 \implies f(0) = 0$ άρα $d = 0$.

Ανισότητα Cauchy

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n! \cdot M_R}{R^n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

όπου $M_R = \max\left\{\left|f(z)\right| : |z - z_0| = R\right\}$

Έτσι για $n = 2$ έχω για $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f''(z_0) \leq \frac{2! \cdot M_R}{R^2} = \frac{2MR}{R^2}$$

Για $|z - z_0| = R$ δηλ. για $z = z_0 + Re^{i\theta}$ έχω $\left|f(z)\right| \overset{\text{εξ' υποθέσεως}}{\leq} A|z| = A\left|z_0 + Re^{i\theta}\right| \leq A|z_0| + AR$

Τότε:

$$\left|f''(z_0)\right| \leq \frac{2\left(|z_0 + R|\right)}{R^2} \xrightarrow[R\to\infty]{0}$$

άρα $\left|f''(z_0)\right| = 0\,\forall z_0 \in \mathbb{C}$, άρα $f''(z_0) = 0\,\forall z_0 \in \mathbb{C}$.

Κεφάλαιο 4 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα και εφαρμογές

Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ μιγαδική συνάρτηση. Ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$ καλείται **ΑΝΩΜΑΛΟ σημείο** της f, εάν είτε η f ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ στο z_0, είτε ορίζεται στο z_0 αλλά δεν έχει "καλή συμπεριφορά" στο z_0, π.χ. δεν είναι ολόμορφη στο z_0

- Αν z_0 είναι ανώμαλο σημείο της f, τότε το z_0 καλείται **ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ ανώμαλο σημείο** της f, εάν η f είναι ολόμορφη στον Ανοικτό δακτύλιο

  $$0 < |z - z_0| < R$$

  για κάποιο $R > 0$, διαφορετικά το z_0 καλείται ΜΗ απομονωμένο ανώμαλο σημείο.

π.χ.

- $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ $\quad (z_0 = 1, z_0 = -1)$ απομονωμένα ανώμαλα σημεία της f
- $g(z) = \mathrm{Log} z$ ($z_0 = 0$ μη απομονωμένη ανωμαλία. Επίσης τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα των πραγματικών είναι μη απομονωμένα ανώμαλα σημεία του λογάριθμου)
- $h(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$ ($z_0 = 0$ το μοναδικό μεμονωμένο σημείο)

Έστω z_0 είναι **ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ** ανώμαλο σημείο μιας συνάρτησης f. Τότε υπάρχει κάποιος δακτύλιος

$$0 < |z - z_0| < R$$

όπου η f είναι ολόμορφη και η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^k, \quad \forall 0 < |z - z_0| < R$$

Δηλ.

$$f(z) = \cdots + \frac{a{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^k + \ldots$$

Θα λέμε ότι:

- Το z_0 είναι **ΑΠΑΛΕΙΨΙΜΗ ανωμαλία**, εάν:

  $$a_n = 0 \quad \forall n < 0$$

  όπου $a_n \in \mathbb{C}$ οι συντελεστές του αναπτύγματος Laurent της f "γύρω" από το z_0.

π.χ. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ $\quad z_0 = 0$ (ανώμαλο σημείο)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$
$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$
$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots \quad \text{δεν είναι απαλείψιμη ανωμαλία στο } 0$$

- Το z_0 καλείται **ΠΟΛΟΣ** της f τάξης $k \in \mathbb{N}$, εάν

  $$\boxed{a_n = 0 \quad \forall n < -k}$$

  Τότε το ανάπτυγμα Laurent της f γίνεται:

  $$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

  Έτσι έχουμε:

  $$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \underbrace{\Big(a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \dots + a_0(z-z_0)^k + \dots\Big)}_{=g(z)}$$

  $$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} \quad \forall 0 < |z-z_0| < R$$

  όπου $g = g(z)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο z_0 με $g(z_0) \neq 0$.

  Τελικά: (εναλλακτικός ορισμός)

  z_0 πόλος της f τάξης $k \in \mathbb{N}$

  $\Updownarrow$

  $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ με g κάποια ολόμορφη συνάρτηση στο z_0 για την οποία $\boxed{g(z_0) \neq 0}$

- Το z_0 καλείται **ΟΥΣΙΩΔΗΣ ΑΝΩΜΑΛΙΑ** της f, εάν υπάρχει ΑΠΕΙΡΟ ΠΛΗΘΟΣ <u>ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ</u> όρων a_n στο ανάπτυγμα Laurent της f ΜΕ ΔΕΙΚΤΕΣ n να είναι <u>ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ</u>.

π.χ. Τι είδους ανωμαλία είναι το σημείο z_0 για τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-1} &= \frac{1}{(z-1)(z+1)} \underset{\text{κλάσματα}}{\overset{\text{απλά}}{=}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)+2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^k, \quad \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \qquad \left(\frac{1}{1-z} = \sum z^n \quad |z| < 1\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z-1) - \frac{1}{16}(z-1)^2 + \dots \quad 0 < \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$$

Το $z_0 = 1$ είναι πόλος 1[ης] τάξης εξ' ορισμού.

ΠΡΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ για ταξινόμηση ΑΠΟΜΕΝΩΜΕΝΩΝ ανώμαλων σημείων:
Έστω z_0 είναι απομονωμένο ανώμαλο σημείο της f. Τότε:

- z_0 είναι απαλείψιμη ανωμαλία $\iff$ υπάρχει το $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}$ (όχι το ∞)
- z_0 πόλος τάξης k $\iff$ Ο $k \in \mathbb{N}$ ο μοναδικός φυσικός ώστε

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = \lambda \in \mathbb{C} - \underbrace{\{0\}}_{\text{ΠΡΟΣΟΧΗ εδώ! Το όριο θέλω μη μηδενικό (επειδή μηδενίζεται για όλα τα επόμενα } n>k\text{)}}$$

- z_0 ουσιώδης ανωμαλία της f $\iff$ Το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ <u>ΔΕΝ</u> υπάρχει

Τελικά:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \begin{cases} = \lambda \in \mathbb{C} & \Longrightarrow\ z_0 \text{ απαλείψιμη ανωμαλία} \\ \infty & \Longrightarrow\ z_0 \text{ πόλος} \\ \text{ΔΕΝ υπάρχει} & \Longrightarrow\ z_0 \text{ ουσιώδης ανωμαλία} \end{cases}$$

Μέρος II

Κεχαγιάς

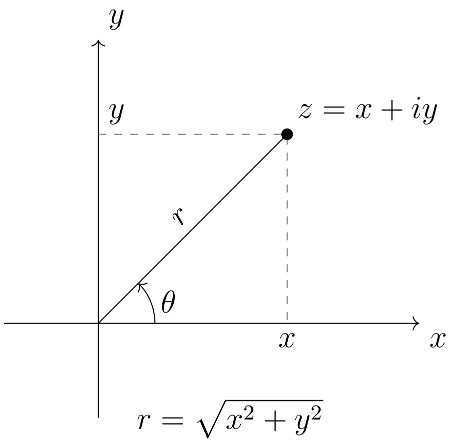
Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί αριθμοί

$$
\begin{aligned}
z =& x + iy \in \mathbb{C} \\
& x, y \in \mathbb{R} \qquad i^2 = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 + iy_1 \\
z_2 &= x_2 + iy_2 \\
z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\
&= x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy^2)(x_2 - iy_2)} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2} \\
z &= x + iy \\
\bar{z} &= x - iy \\
\mathrm{Re}(z) &= x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{Im}(z) &= y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \tfrac{y}{x}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow$ μέτρο του z

γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ. $z = x \in \mathbb{R},\ |z| = \sqrt{x^2} = |x|$)

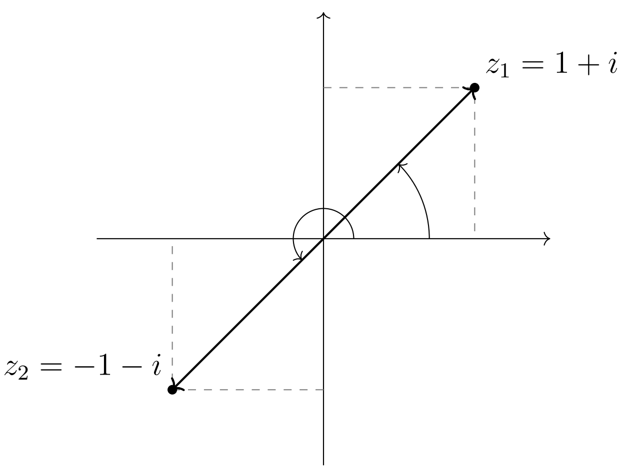
$$\begin{aligned} z = x + iy &= r \cdot \cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \quad \text{(Euler)} \end{aligned}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ διότι

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r\cos\theta + ir\sin\theta \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
&z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}\\
&r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\\
&\theta_1 = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z_2 = -1 - i = \sqrt{2} e^{i5\pi/4} = \sqrt{2} e^{i\cdot\left(-3\pi/4 = \sqrt{2} e^{i13\pi/4}\right)}\\
&r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\\
&\theta_2 = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Γενικά: $-1 - i = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

1.1 Συναρτήσεις

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

$$
\begin{aligned}
&z = x + iy\\
&\operatorname{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}\\
&\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \qquad \theta_0 = \arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)\\
&\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \ \operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi)
\end{aligned}
$$

Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση $\arg(z) = \left\{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$
\begin{aligned}
z = x + iy &= \operatorname{mod}(z) \cdot e^{i\operatorname{Arg}(z)}\\
&= \operatorname{mod}(z) \cdot e^{i\left(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \operatorname{mod}(z_1) e^{i\operatorname{Arg}(z_1)}\\
z_2 &= \operatorname{mod}(z_2) e^{i\operatorname{Arg}(z_2)}\\
z_1 z_2 &= \operatorname{mod}(z_1)\operatorname{mod}(z_2) e^{i\cdot\left(\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)\right)}\\
\operatorname{Arg}(z_1 z_2) &\neq \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \text{ επειδή}\\
\operatorname{Arg}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}} e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) &= \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi
\end{aligned}
$$

Γενικά, αν $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, τότε:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Όμως:

$$
\begin{aligned}
\arg(z^z) &= \arg(z) + \arg(z)\\
&\neq 2\arg(z)
\end{aligned}
$$

διότι:

$$
\begin{aligned}
&A = \{a_1, a_2, \dots\} \\
&B = \{b_1, b_2, \dots\} \\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \\
&A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\} \\
&2A = \{2a : a \in A\} \\
&A = \{1, 2, 3\} \\
&B = \{4, 5\} \\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \{1+4, 1+5, 2+4, 2+5, 3+4, 3+5\} = \{5, 6, 7, 8\} \\
&A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\} \\
&2A = \{2, 4, 6\}
\end{aligned}
$$

1.2 n-οστές ρίζες

$$z = a^{1/n} \iff z^n = a$$

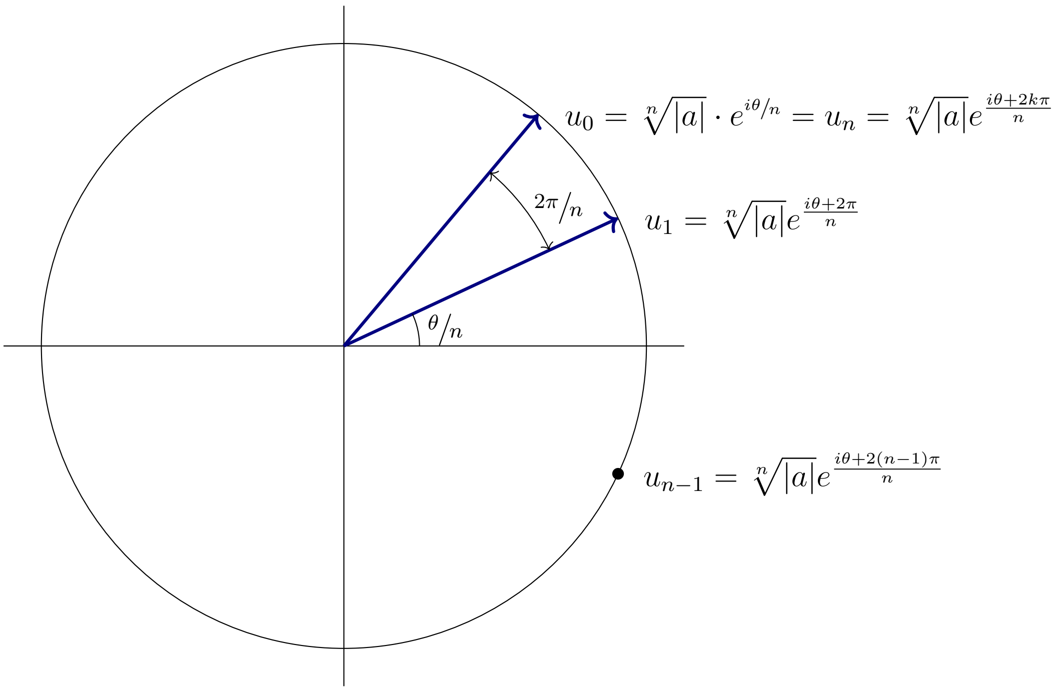
Δηλ. ποιο z ικανοποιεί αυτή

$$
\begin{aligned}
&a = |a|e^{i\theta} \\
&z = re^{i\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(re^{i\phi}\right)^n = |a|e^{i\theta} \\
\implies &r^n \cdot e^{in\phi} = |a|e^{i\theta} \\
\implies &r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi) = |a| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\
\implies &\begin{cases} r^n = |a| \implies r = \sqrt[n]{|a|} \\ \left.\begin{array}{l} \cos(n\phi) = \cos\theta \\ \sin(n\phi) = \sin\theta \implies \end{array}\right| \implies n\phi = \theta + 2k\pi \ \in \mathbb{Z} \implies \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \\
\implies &z = a^{1/n} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\theta\,+\,2k\pi)/n} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

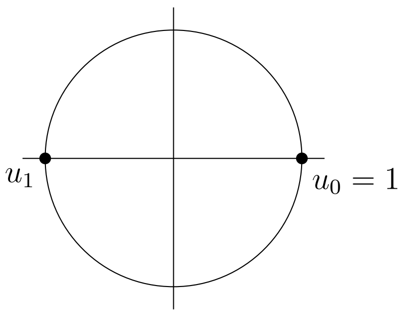
(Όμως αρκεί να πάρω $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$)

$$a^{1/n} = \Big\{ \quad \sqrt[n]{|a|}e^{i\theta/n}, \ \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\theta + 2\pi}{n}}, \dots$$



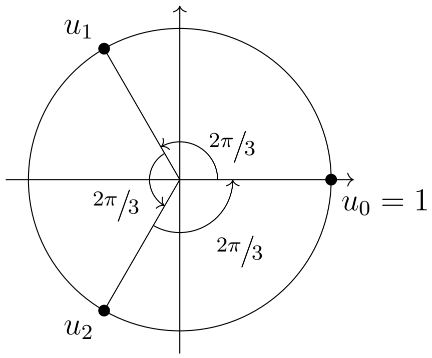
Παρ. $a^{1/2} = 1^{1/2}$

$$a = 1 = 1 \cdot e^{i0} \quad |a| = 1, \theta = 0$$
$$u_0 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2\cdot 0\cdot \pi}{2}\right)} = e^{i0} = 1$$
$$u_1 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2\cdot \pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1$$



Παρ. $a^{1/3} = 1^{1/3} = z$

$$a = 1 = e^{i0}, |a| = 1, \theta = 0$$
$$u_0 = 1$$
$$u_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$
$$u_2 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$



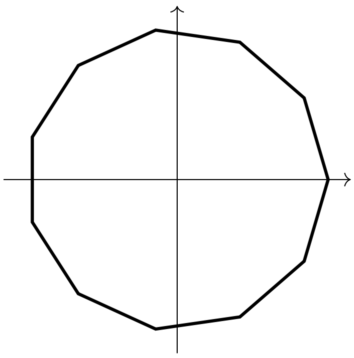
Διαφορετικά

$$
\begin{aligned}
&1^{1/3} = z \iff 1 = z^3 \\
&\iff z^3 - 1 = 0 \\
&\iff (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \\
&\iff (z-1)\left(z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Παρ. $1^{1/11} = z \iff 1 = z^{11}$

$$
\begin{aligned}
&\iff z^{11} - 1 = 0 \\
&\iff (z-1)(z^{11} + z^{10} + \cdots + z^1 + 1) = 0
\end{aligned}
$$

$\{u_09, u_1, \dots, u_{10}\}$



Κεφάλαιο 2 Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$e^z,\ \log(z)$

$$e^z \overset{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Ήξερα $\begin{array}{l} e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ e^{iy} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \end{array}$.
Τώρα η νέα συνάρτηση $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

Παρ.

$$\begin{aligned}
e^{1+i} &= ee^{i} = e \cdot (\cos 1 + i \sin 1) \\
&= e \cdot \cos 1 + i \cdot e \cdot \sin 1 \\
\operatorname{Re}\left(e^{1+i}\right) &= e \cos 1 \\
\operatorname{Im}\left(e^{1+i}\right) &= e \sin 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(e) &= 1 \\
\log(-1) &= \log\left(e^{i(\pi+2k\pi)}\right) = i(\pi + 2k\pi)
\end{aligned}$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$\begin{aligned}
z &= |z|e^{i\theta} \\
\log(z) &= \ln\left(|z|\right) + i\theta
\end{aligned}$$

Ορίζω

Πλειότιμη $\log(z) = \ln\left(|z|\right) + i\arg(z)$

Μονότιμη $\operatorname{Log}(z) = \ln\left(|z|\right) + i\operatorname{Arg}(z)$ είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$\begin{aligned}
\log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i\left(\pi/4 + 2k\pi\right)}\right) \\
&= \log\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)
\end{aligned}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}$$

2.1

Από σήμερα: $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Πριν 7 ημέρες: $\cancel{e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}\cos y + i \sin y}$

Σήμερα: $\exp(z) \overset{\text{ορ}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Θ. Η $\exp(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z \in \mathbb{C}$ και ικανοποιεί:

(1) $\forall z : \left(\exp(z)\right)' = \exp(z)$

(2) $\forall z_1, z_2 : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

(3) $\forall \theta \in \mathbb{R} : \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

Απόδ.

(1)

$$\big(\exp(z)\big)' = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)'$$
$$= 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \exp(z)$$

(2) $g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)$

$$\tfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} = \exp(z)\exp(\zeta - z) + \exp(z)\exp(\zeta - z)(-1) = 0$$
$$\implies g(z) = c \implies c = g(0) = \exp(\zeta)$$
$$\implies \exp(\zeta) = g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)$$

Θέτω: $z = z_1,\ \zeta = z_1 + z_2$

Οπότε:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

(3)

$$\exp(i\theta) = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$
$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right)$$
$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

$\exp(z) \quad e^z$

$$\exp(1+i) = 1 + (1+i) + \frac{(1+i)^2}{2!} + \dots$$
$$e^{1+i} = 1 + (i+1) + \dots$$

ή ο αρ. $e = 2.718$ υψωμένος στη μιγαδική δύναμη $1+i$

Θ. Η $\exp(z)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$

Απόδ.

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)\exp(2\pi i) = \exp(z)$$

Η εικόνα του συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}$ υπό την συνάρτηση $f(z)$ Δηλ.

$$f(A) = \big\{w = f(z),\ z \in A\big\}$$

Παρ. Να δειχθεί ότι $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Διότι: έστω $w = re^{i\phi} \in \mathbb{C} - \{0\}$.

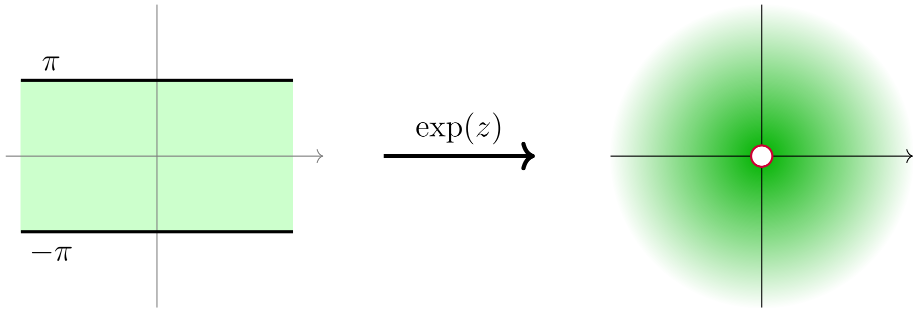
Θα βρω $z = \rho e^{i\theta} = x + iy$ τ.ώ: $\exp(z) = w$.

$$
\begin{aligned}
&\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy)\\
&w = re^{i\phi}\\
&\exp(x) = \big|\exp(z)\big| = |w| = r \implies \boxed{x = \ln(r)}\\
&\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}(w)\\
&\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}\big(\exp(x)\exp(iy)\big) = y\\
&\operatorname{Arg}(w) = \operatorname{Arg}(re^{i\phi}) = \phi\\
&\operatorname{Arg}\big(\exp(z)\big) = \operatorname{Arg}(w) \implies \boxed{y = \phi}
\end{aligned}
$$

Τελικά $z = x + iy = \ln(r) + i\phi$ ικανοποιεί $\exp(z) = re^{i\phi} = w$. Άρα $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Στην πραγματικότητα, δεν χρειάζομαι όλο το $\mathbb{C}$ διότι:

$$\exp(U) = \mathbb{C} - \{0\}\,, \quad \text{όπου } U = \big\{x + iy : x \in \mathbb{R},\ y \in (-\pi, \pi]\big\}$$



2.2 Λογαριθμική Συν.

$$w = \overbrace{\log(z)}^{\text{πλειότιμη}} \iff z = \exp(w)$$

$$
\begin{aligned}
w &= \log(1+i)\\
1 + i &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\\
\log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\right)\\
&= \ln(\sqrt{2}) + \log\left(e^{i\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]}\right)\\
&= \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k \int \mathbb{Z}\\
&= \left\{\ldots, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{7\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{17\pi}{4}, \ldots\right\}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\log(z) = \ln(r) + i\arg(z)}$ ← πλειότιμη

$\boxed{\operatorname{Log}(z) = \ln(r) + i\operatorname{Arg}(z)}$ ← μονότιμη
ασυνεχής για $x \in (-\infty, 0]$

2.3 Μιγαδικές δυνάμεις

$$z^c = e^{\log(z^c)} = e^{c\log z} = e^{c\left(\ln\left(|z|\right)+i\arg(z)\right)}$$

ή

$$z^c = e^{\mathrm{Log}(z^c)} = e^{c\left(\ln\left(|z|\right)+i\mathrm{Arg}(z)\right)}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{(1+i)^{2-i}}_{\substack{z=1+i\\ c=2-i}} &= e^{(2-i)\log(1+i)} = e^{(2-i)\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} \\
&= e^{\left(2\ln\left(\sqrt{2}\right)+\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)+i\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}+4k\pi\right)} \\
&= e^{2\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot e^{i\left(-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}+4k\pi\right)} \\
&= 2e^{\pi/4+2k\pi}\cdot\left[\cos\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}+\cancel{4k\pi}\right)+i\sin\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}+\cancel{4k\pi}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+i} = (1+i)^{1/2} &= e^{1/2\cdot\log(1+i)} \\
&= e^{1/2\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} \\
&= e^{1/2\ln\left(\sqrt{2}\right)}\cdot e^{\frac{1}{2}\left(\pi/4+2k\pi\right)} \\
&= \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)} \\
&= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right) \\
&= \begin{cases}\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right)\end{cases}
\end{aligned}$$

$$(-1)^i = e^{\log\left((-1)^i\right)} = e^{i\log(-1)} = e^{i\left(i(2k+1)\pi\right)} = e^{-(2k+1)\pi}$$

$$\begin{aligned}
(1+i)^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}\log(1+i)} = e^{\sqrt{2}\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} \\
&= \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\cdot e^{i\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi} \\
&= \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right)$$

$$\implies \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi+2m\pi \implies 2k\sqrt{2}\pi = 2m\pi \implies \sqrt{2} = {}^{m}/_{k}$$

$$(1+i)^{p/q} = \ldots$$
$$m = \lambda q$$

Παρ. Να βρεθούν οι τιμές του n τ.ώ:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} i^k \in \mathbb{I}$$

n	
0	1
1	$1+i$
2	$1+i+i^2=1$
3	$1+i+i^2+i^3=0$
4	1
5	$1+i$
6	i
$\vdots$	$\vdots$

Αρα $\forall_{n,m} : c_n = c_{n+4m}$
Οι φανταστικές τιμές του c_n προκύπτουν για

$$\begin{aligned} n =& 2, 3, \\ & 6, 7, \\ & 10, 11, \end{aligned}$$

Απ. $n \in \left\{ m + 4l : m \in \{2, 3\}, l \in \mathbb{N}_0 \right\}$

Παρ. Να λυθεί η $(1+z)^{2n} = -(1-z)^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$

Λύση Φαίνεται άμεσα ότι $z \neq 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} &= -1 \implies \\ \frac{1+z}{1-z} &= (-1)^{1/2n} = \left(e^{i(2k+1)\pi}\right)^{1/2n} \\ z &= \frac{e^{i(2k+1)\pi/2n} - 1}{e^{i(2k+1)\pi/2n} + 1} \\ &= \frac{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) - 1}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + 1} \\ &\underset{\begin{cases} \cos\phi - 1 = -2\sin^2\frac{\phi}{2} \\ \cos\phi + 1 = 2\cos^2\frac{\phi}{2} \end{cases}}{=} -\frac{2\sin^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i2\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i2\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\left[-\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\right]}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\left[\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\right]} \\ z_k &= i\tan\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1 \end{aligned}$$

2.4

2.4.1 Η γραμμική απεικόνιση

Τύπος: $f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}$

Προφανώς η $w = f(z) = az + b$ είναι 1-1 συνάρτηση και εύκολα βρίσκουμε την αντίστροφή της λύνοντας την $w = az + b$ ως προς z.

Έτσι: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = az + b$ και μπορώ να την επεκτείνω στο $\bar{\mathbb{C}}$ με 1-1 τρόπο θέτοντας

$$f(\infty) = \infty$$

Γεωμετρική ερμηνεία

- Προφανώς, από τη δομή της, η γραμμική απεικόνιση απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και κύκλους σε κύκλους.

Ερώτηση Έστω $f(z) = az + b$.
Αν $Ax + By + \Gamma = 0$ ευθεία τυχαία, βρείτε πού αυτή απεικονίζεται μέσω της $f(z)$.

$$\begin{aligned} w &= u + iv = az + b \\ &= u(x,y) + iv(x,y) = a(x + iy) + b \end{aligned}$$

- $w = az + b \iff z = \frac{w-b}{a} \iff x + iy = \frac{u+iv-(b_0+ib_1)}{a_0+ia_1} = \frac{\big[(u-b_0)+i(v-b_1)\big]\big[a_0-a_1 i\big]}{|a|^2} = \frac{(u-b_0)a_0+a_1(v+b_1)}{|a|^2} + i\frac{-a_1(u-b_0)+a_0(v-b_1)}{|a|^2}$

Άρα:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_0u + a_1v - (a_0b_0 + a_1b_1)}{|a|^2} \\ y &= \frac{-a_1u + a_0v - (a_1b_0 + a_0b_1)}{|a|^2} \end{aligned}$$

(μπορεί να είναι λάθος)

$$\begin{aligned} & Ax + By + \Gamma = 0 \\ \iff & A\Big(a_0u + a_1v - (a_0b_0) - (a_0b_0 + a_1b_1\Big) + B\Big(-a_1u + a_0v - (a_1b_0 + a_0b_1)\Big) + \Gamma|a|^2 = 0 \end{aligned}$$

2.4.2 Αντιστροφή $f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$

Προφανώς: $\mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} : f(z) = \frac{1}{z}$
και μορεί να επεκταθεί στο $\bar{\mathbb{C}}$ θέτοντας $f(0) = \infty$ και $f(\infty) = 0$.

Εννοείται ότι είναι 1-1 με $w = \frac{1}{z} \iff \frac{1}{w}$ δηλ. για $\begin{cases} w = u + iv \\ z = x + iy \end{cases}$ έχουμε:

$$x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \iff \left| \begin{array}{l} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2+v^2} \end{array} \right. \tag{2}$$

Έτσι φαίνεται ότι η συνάρτηση αυτή απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.

Πράγματι, αν $Ax + By + \Gamma = 0$ τυχαία ευθεία στο επίπεδο του z, τότε από (2):

$$\begin{aligned} & A\frac{u}{u^2+v^2} - B\frac{v}{u^2+v^2} + \Gamma = 0 \\ \iff & \boxed{Au - Bv + \Gamma\left(u^2+v^2\right) = 0} \end{aligned}$$

- $\underline{\Gamma = 0}$ τότε $Au - By = 0$ άρα ευθεία απεικον. σε ευθεία, ενώ:
- $\underline{\Gamma \neq 0}$ τότε $u^2 + v^2 + \frac{A}{\Gamma}u - \frac{B}{\Gamma}v = 0$ **δηλ.** κύκλος

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

Η $f(z) = \frac{1}{z}$ απεικονίζει το εσωτερικό μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ με κέντρο το $z = 0$, στο εξωτερικό του (με 1-1 τρόπο, και αντιστρόφως).

Πράγματι:

$$\begin{aligned} z : |z| < 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } \left|f(z)\right| = \frac{1}{|z|} > 1 \implies \left|f(z)\right| > 1 \\ z : |z| > 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } \left|f(z)\right| = \frac{1}{|z|} < 1 \implies \left|f(z)\right| < 1 \\ z : |z| = 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z} \end{aligned}$$

2.4.3 Μετασχ. Möbius

Καλούμε ρητογραμμικό μετασχηματισμό (Möbius) κάθε συνάρτηση

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (\text{με } ad - bc \neq 0)$$

Προφανώς: $f : \mathbb{C} - \left\{-{}^{d}\!/\!{}_{c}\right\} \to \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, αν $c \neq 0$
ή $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αν $c = 0$

Η f είναι 1-1 (εύκολο).

- Αποδεικνύεται ότι ο μετασχ. Möbius είναι σύνθεση διαστολής, περιστροφής, μετάθεσης και αντιστροφής, άρα απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.
- Ο μετασχ. Möbius (στην περίπτωση ευθείας ή κύκλου) απεικονίζει συμπληρωματικούς τόπους σε συμπληρωματικούς τόπους.
- Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ μετασχ. Möbius που απεικονίζει ΤΡΙΑ σημεία z_1, z_2, z_3 σε ΤΡΙΑ ΑΛΛΑ σημεία $w_1 = f(z_1),\ w_2 = f(z_2),\ w_3 = f(z_3)$, και έχει τη μορφή:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

2.4.4 Τριγωνομετρικές και αντίστροφές τους

π.χ.

- Η συνάρτηση

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

είναι 2π-περιοδική, άρα μη αντιστρέψιμη στο $\mathbb{C}$

Έστω $E_k = \left\{x + iy : \kappa\pi - \frac{\pi}{2} < x < \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, y \in \mathbb{R}\right\}, k \in \mathbb{Z}$ είναι "κατακόρυφες λωρίδες".
Για $\underline{k = 0}$, έχω:

Τότε η $\sin z$ γίνεται 1-1 με πεδίο τιμών το σύνολο

$$A = \mathbb{C} - \left\{u + iv : |u| \geq 1 \text{ και } v = 0\right\}$$

Έτσι η $\sin : E_k \to A$ είναι 1-1 (για κάθε συγκεκριμένο $k \in \mathbb{Z}$), άρα αντιστρέψιμη.

  - Από $w = \sin z$ παίρνω:

$$\left| \begin{array}{l} u(x,y) = \sin x \cosh y \\ v(x,y) = \cos x \sinh y \end{array} \right.$$

  - Για $x = \frac{\pi}{2},\ y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικονίζεται}]{\sin z} (\cosh y, 0)$
    Αλλά $\cosh y$ δεν είναι 1-1 $\forall y$, επομένως η $\sin z$ ΔΕΝ μπορεί να είναι 1-1 πάνω στην $x = \frac{\pi}{2}$, η οποία εξαιρείται από το πεδίο ορισμού. Έτσι, από το πεδίο τιμών, εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \geq 1,\ v = 0\}$$

  - Για $x = -\frac{\pi}{2}$, ομοίως εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \leq 1,\ v = 0\}$$

  - Για $\underline{x = 0}$, $y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικον.}]{\sin z} (0, \sinh y)$ και επειδή $\sinh y$ 1-1 γν. αύξ. με πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$ $\forall y$ η $x = 0$ απειον. στην $u = 0$.
  - Έστω $x = a \quad (a \neq \pm\frac{\pi}{2}),\ a \neq 0$.
    Τότε: $\left| \begin{array}{l} u = \sin a \cosh y \\ v = \cos a \sinh y \end{array} \right. \implies \boxed{\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1}$. Αν $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\left| \begin{array}{l} u > 0 \\ v \in \mathbb{R} \end{array} \right.$, και αντίστοιχα για $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
    Έτσι ορίζουμε:

$$= \operatorname{arcsin} : E' \to E_k :$$

$$\operatorname{arcsin} z = w \iff z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2}$$

$$\iff e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \iff e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{4 - 4z^2}}{2}$$

$$\implies iw = \log\left(z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}}\right)$$

$$\implies \boxed{\operatorname{arcsin} z = \log\left(z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}}\right)}$$

- **Τρίτη 22/11** Ατρέας, 2 τμήματα
- **Πέμπτη 24/11** Κεχαγιάς, 2 τμήματα
- **Παρασκευή 25/11** Κεχαγιάς, 2 τμήματα

Κεφάλαιο 3 Ακολουθίες & Σειρές (Μιγαδικών αριθμών/συναρτήσεων)

Ορισμός

Ακολουθία $\big(u_n(z)\big)_{n=1}^{\infty}$

Ορισμός

Λέμε ότι η $u_n(z)$ τείνει σε $u(z)$.
Γράφουμε $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z)$

$$\forall z, \forall \epsilon > 0\, \exists N_{\epsilon,z} : n \geq N\epsilon, z \implies \big|u_n(z) - u(z)\big| < \epsilon$$

Παρ. $u_n(z) = 1 + \frac{z}{n}$

$\lim_{n\to\infty} = 1$ διότι

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \epsilon > 0 : n \geq \frac{|z|}{\epsilon} + 1 \implies \left|\underbrace{1 + \frac{z}{n} - 1}\right| < \epsilon$$

$$\iff \left|\frac{z}{n}\right| < \epsilon$$

$$\iff n > \frac{|z|}{\epsilon}$$

Ορισμός

Έστω ακολουθία $\big(u_n(z)\big)_{n=1}^{\infty}$

Ορίζω νέα ακολουθία $\big(S_1(z)\big)_{n=1}^{\infty}$ ως εξής:
$$\begin{aligned} S_1(z) &= u_1(z) \\ S_2(z) &= u_1(z) + u_2(z) \\ &\cdots \\ S_n(z) &= u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) \end{aligned}$$

Εάν $\exists \lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ γράφω $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = S(z)$ και το ονομάζω **σειρά**.

Παρ. για $n \in \mathbb{N}$ ορίζω $u_n(z) = z^n \cdot (1-z)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n(1-z) & \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(z^n - z^{n+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(z - z^2 + z^2 - z^3 + z^3 - z^4 + \cdots - z^{N+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(z - z^{N+1}\right) = z - \lim_{N\to\infty} z^{N=1} \\
&\overset{\text{Θέτω } z=re^{i\theta}}{=} z - \lim_{N\to\infty} r^N e^{iN\theta} \\
&= z \text{ όταν } |z| < 1
\end{aligned}$$

Τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (1-z) = \begin{cases} z & \text{όταν } |z| < 1 \\ \text{δεν ορίζεται} & \text{όταν } |z| \geq 1 \end{cases}$$

(Για $z = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} = 0^n(1-z) = 0 = z$)
Ισχύει $|z| < 1 \implies \lim_{N\to\infty} z^N = 0$, διότι

$$\begin{aligned}
\forall z \text{ με } |z| < 1, \epsilon > 0 \quad n \geq \frac{\ln e}{\ln |z|} + 1 &\implies |z^n| < \epsilon \\
&\iff |z|^n < \epsilon \\
&\iff n \cdot \ln |z| < \ln e \\
&\iff n < \frac{\ln e}{\ln |z|}
\end{aligned}$$

Ορισμός

Λέω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ **συγκλίνει απολύτως** ανν $\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n(z)\right|$ συγκλίνει.

Ορισμός

Λέμε ότι η $\left(u_n(z)\right)_{n=1}^{\infty}$ **συγκλίνει ομοιόμορφα** στην $u(z)$ ανν

$$\forall z, \forall \epsilon > 0 \exists \underbrace{N_\epsilon}_{\text{Το } N_e \text{ δεν εξαρτάται από το } z} : \quad n \geq N_\epsilon \implies \left|u_n(z) - u(z)\right| < \epsilon$$

Παρόμοια πράγματα λέμε και για την $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)}$

Παρ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (1-z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε z με $|z| \leq \frac{1}{z}$
Διότι

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} z^n(1-z) = z - \lim_{N\to\infty} z^{N+1}$$

$\to$ Αρκεί να δείξω ότι $z^{N+1} \to 0$ ομοιόμορφα.

$$\forall z, |z| \leq \frac{1}{2}, \forall \epsilon > 0, \forall n \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} + 1 \implies \left|z^{N+1}\right| < \epsilon$$

Ισχυρίζομαι ότι

$$\forall z, |z| \leq \frac{1}{z}, \forall \epsilon > 0, \forall n \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln \frac{1}{2}} + 1 \implies \left|z^{N+1}\right| < \epsilon$$

διότι $|z| \leq \frac{1}{2} \implies \frac{\ln \epsilon}{\ln \frac{1}{2}} \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|}$

Θ. Έστω $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z)$ ομοιόμορφα στο χωρίο Δ.

Τότε $\int_c u(z)\,\mathrm{d}z = \int_c \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c u_n(z)\,\mathrm{d}z$

Θ. Θέτω $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία αναλυτικών (ολόμορφων) συναρτήσεων και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο χωρίο D. Τότε

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum u_n(z)\right) = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$$

Θ. Αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n(z)\right|$, τότε συγκλίνει και η ${}_{n=1}^{\infty} u_n(z)$

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Θ. Αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} \left|v_n(z)\right|$ και $\forall n, z \ : \ \left|u_n(z)\right| \ \leq \ \left|v_n(z)\right|$, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n(z)\right|$

Θ.: Κριτήριο του λόγου

Έστω $L(z) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|$. Τότε

$L(z) < 1$ η $\sum_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει

$L(z) > 1$ η $\sum_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει

$L(z) = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε

Θ.: Κριτήριο της ρίζας

Εστω $L(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|}$.. Τότε

$$\begin{aligned} &L(z) < 1 \quad \text{η} \sum_{n=1}^{\infty} \text{συγκλίνει} \\ &L(z) > 1 \quad \text{η} \sum_{n=1}^{\infty} \text{δεν συγκλίνει} \\ &L(z) = 1 \quad \text{δεν μπορούμε να αποφανθούμε} \end{aligned}$$

Παρ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\cdot(n+1)}$ συγκλίνει όταν $|z| \leq 1$, δεν συγκλίνει όταν $|z| > 1$

$$\text{Θέτω } L(z) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)(n+2)}{z^n/n(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} |z| \frac{n}{n+2} = |z|$$

Όταν $|z| = 1$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Αφού συγκλίνει απολύτως, συγκλίνει (για κάθε $z : |z| = 1$)

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ συγκλίνει όταν $|z| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} z^n &= z + z^2 + z^3 + \cdots + z^N \\ &= z \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}) \\ &= z \cdot \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{z}{1-z} \left(1 - z^N \right) \\ &= \frac{z}{1-z} \text{ για } N \to \infty \text{ όταν } |z| < 1 \end{aligned}$$

Για $|z| > 1$ δεν συγκλίνει.
Για $|z| = 1$ δεν συγκλίνει (τουλάιστον για κάποιες τιμές).
Εναλλακτικά, με κριτήριο ρίζας: $L(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z^n|} = |z|$
και κριτήριο λόγου: $L(z) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| = |z|$

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(z+2)^{n+1}}{(n+1)^3 4^n}}{\frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z+2|}{4} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^3 = \frac{|z+2|}{4} \to \begin{cases} |z+2| < 4 & \text{συγκλίνει} \\ |z+2| = 4 & * \\ |z+2| > 4 & \text{δεν συγκλίνει} \end{cases}$$

Αν $|z+2| = 4$, ελέγχουμε αν συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|z|^{n+1}}{n!|z|^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|z| = \begin{cases} \infty & |z| \neq 0 \\ 0 & |z| = 0 \end{cases}$$

- $\sum \frac{z^n}{n(n+1)}$ συγκλίνει για $|z| \leq 1$
- $\sum z^n$ συγκλίνει για $|z| \leq 1$
- $\sum \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$ συγκλίνει για $|z+2| \leq 4$
- $\sum n! z^n$ συγκλίνει για $|z| = 0$

Ορισμός

Δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

Θ.

Για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ υπάρχει $R \geq 0$, τ.ώ:

$|z - z_0| < R$ η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα
$|z - z_0| > R$ η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει

Στο $|z - z_0| = R$ η ΔΣ μπορεί να συγκλίνει σε κάποια σημεία και να μην συγκλίνει σε άλλα. Αυτό παρατηρούμε και στα 4 παραπάνω παραδείγματα.

Όταν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \to$ σειρά Taylor.

Όταν $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \to$ σειρά Laurent.

Η σειρά Laurent περιλαμβάνει την Taylor ως ειδική περίπτωση.

Αν είναι "γνήσια" σειρά Laurent ($a_n \neq 0$ για κάποια αρνητικά n), τότε το z_0 λέγεται ανώμαλο σημείο της σειράς Laurent.

Από την ΑΛΛΗ ΕΒΔΟΜΑΔΑ
ΤΡΙ **και** ΠΕ στον ΑΤΡΕΙΑ **ΚΑΙ ΤΑ 2** τμήματα

Θ. Για κάθε ΔΣ $f(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}$ υπάρχει αριθμός $R \geq 0$ (ακτίνα σύγκλισης) **τ.ώ**

(α) Η ΔΣ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα στο $\underbrace{D_R(z_0)}_{\text{δίσκος σύγκλισης}} = \{z : |z-z_0| < R\}$

(β) Η ΔΣ αποκλίνει στο $\{z : |z-z_0| > R\}$

(γ) Σε κάθε σημείο του συνόρου του δίσκου σύγκλισης $\{z : |z-z_0| = R\}$ η ΔΣ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει

Θ. Για κάθε ΔΣ $f(z) = \sum_{n=0} a_n (z-z_0)^n, \forall z \in D_R(z_0)$ ισχύουν:

(α)

$$\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z-z_0)^{n-1}$$

(β) Για κάθε $C \subseteq D_R(z_0)$

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-z_0)^n\,\mathrm{d}z$$

Θ. Έστω $f(z)$ αναλυτική στο εσωτερικό κλειστής καμπύλης C. Έστω $z_0,\ z$ σημεία στο εσωτερικό της C. Τότε

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(z-z_0)^n}$$

$$\boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{C'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n-1}}\,\mathrm{d}z\right)(z-z_0)^n}$$

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \sin z$, γύρω από το $z_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(z) & f(0) &= 0 \\ f'(z) &= \cos(z) & f'(0) &= 1 \\ f''(z) &= -\sin(z) & f''(0) &= 0 \\ f'''(z) &= -\cos(z) & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

$$\sin(z) = 0(z-\cancel{z_0}^{0})^0 + \frac{1}{1!}(z-\cancel{z_0}^{0})^1 + \frac{0}{2!}(z-\cancel{z_0}^{0})^2 + \frac{1}{3!}(z-\cancel{z_0}^{0})^3 + \dots$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor

Α' τρόπος

$$f\left(\pi/3\right) = \sqrt{3}/2 \qquad , f''\left(\pi/3\right) = -\sqrt{3}/2$$
$$f'\left(\pi/3\right) = 1/2 \quad , f'''\left(\pi/3\right) = -1/2, \ldots$$

$$\sin(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(z - \pi/3\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(z - \pi/3\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(z - \pi/3\right)^3$$

Β' τρόπος $u = z - \pi/3 \implies z = u + \pi/3$

$$\sin(z) = \sin(u + \pi/3) = \sinh \cancelto{1/2}{\cos \frac{\pi}{3}} + \cosh \cancelto{\sqrt{3}/2}{\sin \pi/3}$$
$$= \frac{1}{2}\left(u - u^3/3! + u^5/5! - \ldots\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \ldots\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}u^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}u^3 + \ldots$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \ldots$$

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \frac{1}{1-z}$ γύρω από το $z_0 = 2$

ΛΥΣΗ

$$z - 2 = u$$
$$z - 1 = u + 1$$
$$1 - z = -(1 + u)$$
$$\forall u : |u| < 1 : \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{1+u} = -1 + u - u^2 + u^3 - \ldots$$
$$|z-2| < 1 : \frac{1}{1-z} = -1 + (z-2) - (z-2)^2 + (z-2)^3$$

(για $z = 3,\ f(z) = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$)

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3}$ γύρω από το $z_0 = 0$

$$\frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot (1 - z + z^2 - z^3 + \ldots) - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(1 - z + z^3 - z^3 + \ldots\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \ldots\right)$$
$$= -\frac{1}{3}z + \frac{8}{36}z^2 + \ldots$$

$|z| < 1 \quad \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \implies |z| < 3$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-2z-3} &= \frac{1}{(z-1)^2-4} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-1}{z}\right)^2} \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\left(1+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\left(\frac{z-1}{2}\right)-\left(\frac{z-1}{2}\right)^6+\dots\right)
\end{aligned}
$$

$$
|z-1|<2: \quad \frac{1}{z^2-2z-3} = -\frac{1}{4}-\frac{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2}{4}-\frac{\left(\frac{z-1}{z}\right)}{4}
$$

Θ. Έστω $R_2 < R_1$, $\begin{array}{l} C_1 = \{z : |z-z_0| = R_1\} \\ C_2 = \{z : |z-z_0| = R_2\} \end{array}$

$$
\begin{aligned}
A_{R_2,R_1}(z_0) &= \{z:\ R_1 < |z-z_0| < R_2\} && \text{δακτύλιος χωρίς σύνορο} \\
\bar{A}_{R_2,R_1}(z_0) &= \{z:\ R_1 \leq |z-z_0| \leq R_2\} && \text{δακτύλιος με σύνορο}
\end{aligned}
$$

Έστω $f(z)$ αναλυτική στο $\bar{A}_{R_2,R_1}(z_0)$. Τότε $\forall z \in A_{R_1,R_2}(z_0)$ ισχύει

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_0(z-z_0)^n
$$

Αυτή λέγεται σειρά Laurent (Λοράντ) της $f(z)$ γύρω από το z_0.

$$
\forall n \in \mathbb{Z}: \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z
$$

(η C εντός του $A_{R_2,R_1}(z_0)$)

ΠΑΡ. Βρείτε την σειρά Laurent της $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ γύρω από το $z_0 = 0$.

Λύση

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin z}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\cdot\sin z \\
&= \frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)
\end{aligned}
$$

$$
\forall z : 0 < |z| < \infty : \quad \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z}{5!}-\dots
$$

Το $z_0 = 0$ είναι **πόλος** πρώτης τάξης.

ΠΑΡ $\frac{\sin z}{z}$

$$
0 < |z| < \infty : \quad \frac{\sin z}{z} = 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\dots
$$

Το $z_0 = 0$ είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο.

ΠΑΡ Να βρεθεί η σειρά Laurent της $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}$ γύρω από το $z_0 = -1$

Λύση

$$\begin{aligned}\frac{e^{2z}}{(z+1)^2} &= \frac{e^{-2}}{(z+1)^2} \cdot e^{2(z+1)} \\ &= e^{-2} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \left(1 + 2(z+1) + \frac{4 \cdot (z+1)^2}{2!} + \frac{8 \cdot (z+1)^3}{3!} + \dots\right)\end{aligned}$$

$$0 < |z+1| < \infty : \quad \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} = \frac{e^{-2}}{(z+1)^2} + \frac{2e^{-2}}{z+1} + 2e^{-2} + \frac{4e^{-2}}{3} \cdot (z+1) + \dots$$

Παρατηρώ ότι $z_0 = -1$ είναι πόλος 2[ης] τάξης

$$\oint \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}\,\mathrm{d}z = \cancelto{0}{\oint_C \frac{e^{-2}}{(z+1)^2}}\,\mathrm{d}z + \cancelto{2e^{-2}2\pi i}{\oint_C \frac{2e^{-2}}{z+1}\,\mathrm{d}z} + \cancelto{0}{\oint_C \frac{4e^{-2}}{3}(z+1)\,\mathrm{d}z} + \dots$$

$$\boxed{\oint \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} = 2e^{-2}2\pi i}$$

Ορισμός

Έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.
Έστω n_1 ο ελάχιστος n τ.ώ. $a_n \neq 0$.
(αν δεν υπάρχει το ελάχιστο, θέτω $n_1 = -\infty$)

α. Αν $-n_1 = 0$, τότε το z_0 είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο (πόλος μηδενικής τάξης)

β. Αν $\infty > -n_1 > 0$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $-n_1$

γ. Αν $n_1 = -\infty$, τότε το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο (πόλος ∞ τάξης)

Η $f(z) = e^{1/z}$ έχει το $z_0 = 0$ πόλο άπειρης τάξης.

3.1 Δέκα Σειρές Laurent

1. $f(z) = (z-2)\sin(z-1)$ γύρω από το $z_0 = 1$

   Λύση

$$\begin{aligned}f(z) &= (z-1)\sin(z-1) - \sin(z-1) \\ &= (z-1)^2 - \frac{(z-1)^4}{3!} + \frac{(z-1)^6}{5!} - \dots - \left(z - 1 - \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^5}{5!} - \dots\right) \\ &= -(z-1) + (z-1)^2 + \frac{(z-1)^3}{3!} - \frac{(z-1)^4}{3!} + \dots\end{aligned}$$

   Ισχύει $\forall z \in \mathbb{C}$

2. $f(z) = \frac{1}{z^2+3z+2}, \quad z_0 = -2$

Λύση

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z}{(z+1)(z+2)} = -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} \\
g_2(z) &= \frac{1}{z+2} \\
g_1(z) &= -\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{z+2-1} = \frac{1}{1-(z+2)} = 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots \qquad 0 < |z+2| < 1 \\
f(z) &= g_2(z) + g_1(z) \\
&= \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Σε δυνάμεις της $(z+2)$ αλλά μακριά από το $z_0 = -2$ (δηλ. $|z+2| > 1$)

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{2}{z+2} + \frac{1}{1-(z+2)} \\
\frac{1}{1-(z+2)} &= -\frac{1}{z+2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{z+2}+1} \\
&= -\frac{1}{z+2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z+2}} = -\frac{1}{z+2}\left(1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \dots\right) \\
f(z) &= \frac{1}{z+2} - \frac{1}{(z+2)^2} - \frac{1}{(z+2)^3} - \dots
\end{aligned}$$

Το $z_0 = -2$ είναι πόλος 1ης τάξης.

3. Η ίδια σειρά, γύρω και κοντά στο $z_0 = -1$

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} \\
g_2(z) &= \frac{2}{z+2} = \frac{2}{1+(z+1)} = 2 \cdot \left(1 - (z+1) + (z+1)^2 - (z+1)^3 + \dots\right) \\
f(z) &= -\frac{1}{z+1} + 2 - 2 \cdot (z-1) + 2(z+1)^2 - 2(z+1)^3 + \dots
\end{aligned}$$

$$\boxed{-\frac{1}{z+1} + 2 - 2 \cdot (z-1) + 2(z+1)^2 - 2(z+1)^3 + \dots = \frac{z}{z^2+3z+2}}\ \boxed{0 < |z+1| < 1}$$

$$\boxed{\frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots = \frac{z}{z^2+3z+2}}\ \boxed{0 < |z+2| < 1}$$

Θα επιβεβαιώσω ότι οι δύο αυτές σειρές είναι ίσες μεταξύ τους και με την τιμή της συνάρτησης.

$$\begin{aligned}
f\left(-3/2\right) &= \frac{-3/2}{9/4 - 3/2 + 3/4} && = 6 \\
f_1\left(-3/2\right) &= 2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots &&= 6 \\
f_2\left(-3/2\right) &= 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots &&= 6
\end{aligned}$$

4. $f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z-1)^2}$ γύρω από το $z_0 = 0$

Λύση

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{z^2} \\
f_2(z) &= \frac{1}{(z-1)^2} \\
\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \dots \\
\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} &= \left(\frac{1}{1-z}\right)' = (1 + z + z^2 + z^3 + \dots)' = 0 + 1 + 2z + 3z^2 + \dots \\
f_2(z) &= 1 + 2z + 3z^2 + \dots \\
f(z) = f_1 f_2 &= \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 3 + 4z + 5z^2 + \dots
\end{aligned}
$$

5. $f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z-1)^2}, \quad z_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
f_2(z) &= \frac{1}{(z-1)^2} \\
f_1(z) &= \frac{1}{z^2} = \frac{1}{\big(1 + (z-1)\big)^2} \\
\frac{1}{(1+u)^2} &= 1 - 2u + 3u^2 - \dots \\
\frac{1}{z^2} &= 1 - 2(z-1) + 3(z-1) + \dots \\
f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)} + 3 - 4(z-1) + \dots
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{(1+u)^2} = \frac{1}{1 + 2u + u^2}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1 + 2u + u^3 + \dots \\
\hline
1 + 2u + u^2 & 1 - 2u + 3u^2 + \dots \\
-2u - u^2 & \\
-2u - 4u^2 - 2u^3 & \\
3u^2 + 2u^3 &
\end{array}
$$

Ομοίως, τη σειρά της $\frac{1}{z^2+3z+2}$ γύρω από το $z_0 = -1$ μπορώ να την βρω αντικαθιστώντας:

$$
\frac{1}{z^2 + 3z + 2} = \frac{1}{(z+1)^2 + (z-1)} = \frac{1}{u^2 + u}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
1 & u + u^2 \\
\hline
1 + u & \frac{1}{u} - 1 + \dots \\
-u &
\end{array}
$$

6. $f(z) = \frac{1}{z \cdot (z-1)}$ γύρω από το $z_0 = 0$

Λύση

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z}\cdot(1+z+z^2+\dots) \\ &= -\frac{1}{z}-1-z-\dots \end{aligned}$$

για $0<|z|<1$

7. $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ γύρω από το $z_0=0$ για $|z|>1$

Λύση $f(z)=f_1(z)f_2(z)$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z} \\ f_2(z) &= \frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right) \\ f(z) &= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\dots \end{aligned}$$

8. $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$, να βρεθούν όλες οι δυνατές σειρές Laurent γύρω από το $z_0=0$.

Λύση Τα ΑΣ (ανώμαλα σημεία) είναι $z_1=1$ και $z_2=-2$. Οπότε

Αυτή είναι η άσκηση που θα πέσει στις εξετάσεις αν δεν έχει κέφι ο Κεχαγιάς.

1η σειρά: $|z|<1$

2η σειρά: $1<|z|<2$

3η σειρά: $2<|z|$

$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{z-1}}_{f_1(z)}+\underbrace{\frac{1}{z+2}}_{f_2(z)}=f_1(z)+f_2(z)$$

1η σειρά $|z|<1$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -(1+z+z^2+\dots) \\ f_2(z) &= \frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\dots\right)}_{\left|\frac{z}{2}\right|<1} \end{aligned}$$

άρα για $\forall z:|z|<1$

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=-\frac{1}{2}-\frac{5z}{4}-\frac{7z^2}{8}-\dots$$

2η σειρά $1 < |z| < 2$ με $u = {}^1\!/_z$

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{\frac{1}{u} - 1} = \frac{u}{1-u} \\
&= u(1 + u + u^2) + \dots \\
&= u + u^2 + u^3 + \dots \\
f_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \\
f_2(z) &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8}
\end{aligned}$$

Τελικά:

$$f(z) = \dots - {}^1\!/_{z^2} - {}^1\!/_2 - {}^z\!/_4 + {}^{z^2}\!/_8 + \dots$$

3η σειρά $2 < |z|$

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \\
f_2(z) &= \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \dots\right) \\
f_2(z) &= \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} - \dots \\
f(z) &= f_1 + f_2 = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3}
\end{aligned}$$