`http://users.auth.gr/natreas`
Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5
Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6
Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marjden (πιο μαθηματικό)

# Μέρος I
# Ατρέας

## Μιγαδικοί Αριθμοί

**Έστω** $\mathbb{C} = \left\{ z = \overbrace{(x,y)}^{\text{γεωμετρική παράσταση μιγαδικού}};\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $x_2 = (x_2, y_2)$, τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο $\lambda \in \mathbb{R}$ με μιγαδικό $z$

Αν $z = (x, y)$, τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) $\boxed{\text{Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών}}$

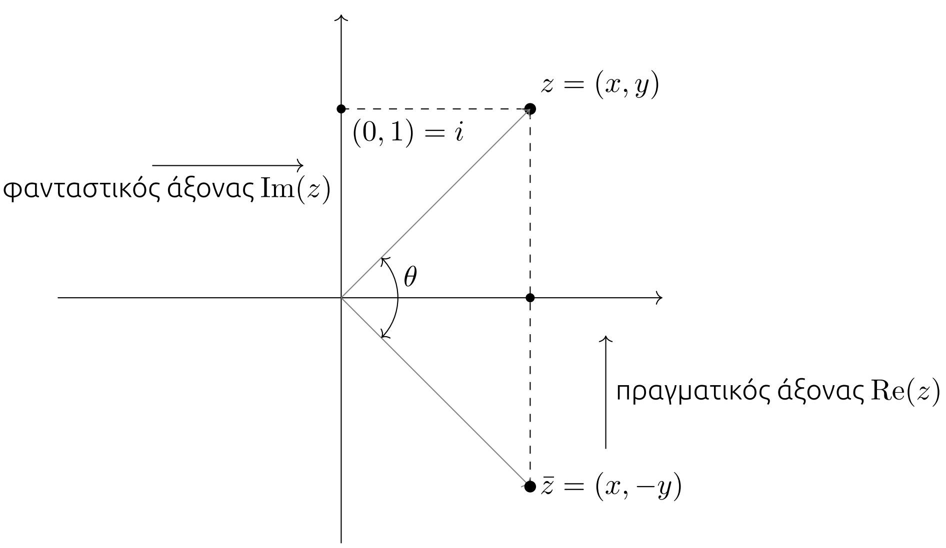
Αν $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$, τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{C}$ είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \overset{\text{1-1}}{\longleftrightarrow} A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$

- $(x,0),(y,0) \in A \implies (x,0)+(y,0) = (x+y,0) \in A$
- $(x,0)(y,0) = (xy,0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$1 = (1,0)$$
$$x = (x,0)$$

**Ορίζω**:

$$i = (0,1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$$
$$\boxed{i^2 = -1}$$

**Έτσι**:

$$z = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$
$$\underset{i=(0,1)}{\overset{x=(x,0)}{=}} x \cdot 1 + yi$$
$$\implies \boxed{z = x + iy}$$

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z = (x,y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\underset{\text{του } (x,y)}{\overset{\text{πολικές}}{=}} \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta =$$
$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (1)$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$z = |z|\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}$$
$$= |z| \cdot e^{i\theta}$$

όπου στο εξής:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$
$$\boxed{\text{τύπος του Euler}}$$

Τελικά:

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}} \text{(πολική μορφή μιγαδικών)}$$

**Σημείωση:** $\cos\theta + i\sin\theta$

$$\overset{\text{σειρές}}{\underset{\text{McLaurin}}{=}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$\overset{i^2=-1}{=} \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right)$$

$$= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα $\mathrm{Arg}z$ (μη μηδενικού) μιγαδικού $z$ να είναι η γωνία $\theta$ που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του $\mathbb{C}$ με την ημιευθεία $OA$, όπου $A$ το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του $z = x + iy$.

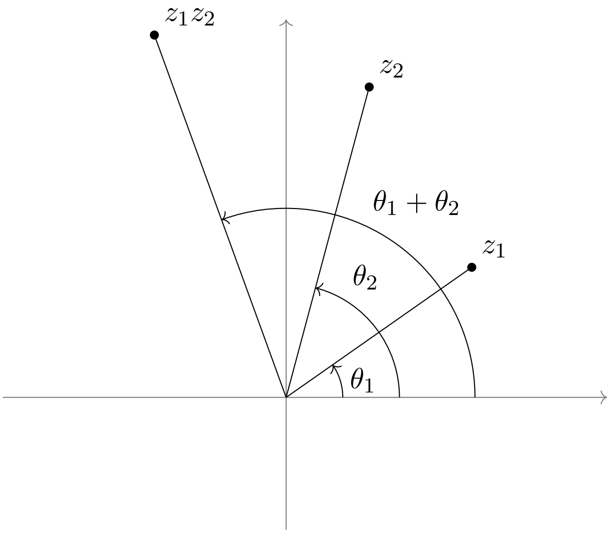
**Έτσι:**

$z = |z|e^{i\mathrm{Arg}z}$ πολική μορφή του $z$

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\mathrm{Arg}z_1}|z_2|e^{i\mathrm{Arg}z_2}$$

$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2)}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$




**Ιδιότητα:** $z\bar{z} = |z|^2$

## Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

**π.χ.**

$$f(z) = z^2 \implies f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\mathrm{Re}(f)} + i\underbrace{(2xy)}_{\mathrm{Im}(f)}$$

$$\overset{\text{γεωμετρική}}{\underset{\text{μορφή}}{=}} (x^2 - y^2,\ 2xy)$$

**Τελικά:** $\boxed{f(x,y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)}$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

**π.χ.**

$$f(z) = \frac{1}{|z|\bar{z}} \overset{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z}$$

$$\overset{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\overset{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \overset{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιγ. μεταβλ.}} \xleftrightarrow{\text{1-1}} \begin{array}{l} \text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big) \end{array}$$

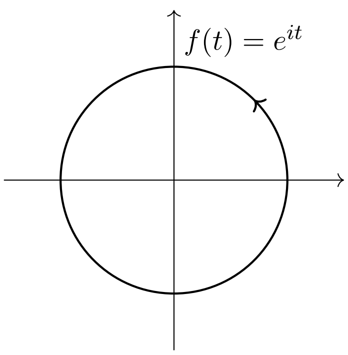
όπου $u, v$ πραγματ. συναρτ. 2 μεταβλητών

**Υπάρχουν** $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής

π.χ

$$f(t) = e^{it},\ t \in (0, \pi]$$
$$= \cos t + i \sin t$$

$t \to (\cos t, \sin t)$ καμπύλη $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$




Η γραφ. παράσταση της $f(t) = e^{it},\ t \in (-\pi, \pi)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0,0)$ με αντιωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1, t) = (1,0) + t(0,1)$$

# Μέρος II
# Κεχαγιάς

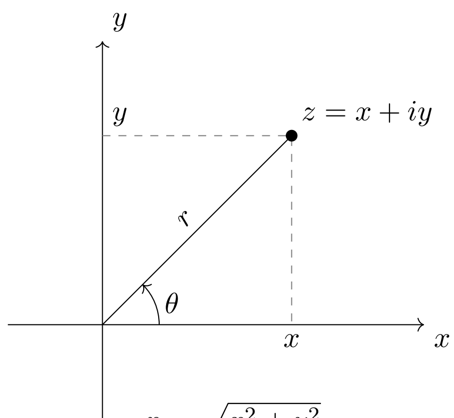
Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

## Μιγαδικοί αριθμοί

$$\begin{aligned} z =& x + iy \in \mathbb{C} \\ & x, y \in \mathbb{R} \qquad i^2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy^2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2} \\ z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \\ \mathrm{Re}(z) &= x \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Im}(z) &= y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$




$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \tfrac{y}{x}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow$ μέτρο του $z$

γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ. $z = x \in \mathbb{R},\ |z| = \sqrt{x^2} = |x|$)

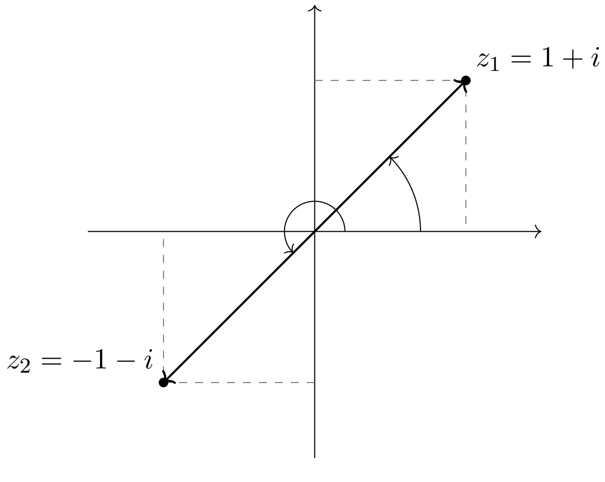
$$
\begin{aligned}
z = x + iy &= r \cdot \cos\theta + ir\sin\theta \\
&= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= r \cdot e^{i\theta} \quad \text{(Euler)}
\end{aligned}
$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ διότι

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}
$$

Επίσης:

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy \\
&= \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= r\cos\theta + ir\sin\theta
\end{aligned}
$$




$$
\begin{aligned}
&z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} \\
&r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
&\theta_1 = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}e^{i\cdot\left(-3\pi/4 = \sqrt{2}e^{i13\pi/4}\right)} \\
&r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\
&\theta_2 = \arctan\frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Γενικά: $-1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

### Συναρτήσεις

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

$$z = x + iy$$
$$\operatorname{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^\text{ο} \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \qquad \theta_0 = \arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)$$
$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \ \operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$$

Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση $\arg(z) = \{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \operatorname{mod}(z) \cdot e^{i\operatorname{Arg}(z)} \\ &= \operatorname{mod}(z) \cdot e^{i(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \operatorname{mod}(z_1) e^{i\operatorname{Arg}(z_1)} \\ z_2 &= \operatorname{mod}(z_2) e^{i\operatorname{Arg}(z_2)} \\ z_1 z_2 &= \operatorname{mod}(z_1)\operatorname{mod}(z_2) e^{i\cdot(\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2))} \\ \operatorname{Arg}(z_1 z_2) &\neq \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \text{ επειδή} \\ \operatorname{Arg}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}} e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) &= \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi \end{aligned}$$

Γενικά, αν $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, τότε:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

## Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$e^z,\ \log(z)$

$$e^z \overset{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Ήξερα $\begin{matrix} e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ e^{iy} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \end{matrix}$.

Τώρα η νέα συνάρτηση $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

**Παρ.**

$$\begin{aligned} e^{1+i} = e e^i &= e \cdot (\cos 1 + i \sin 1) \\ &= e \cdot \cos 1 + i \cdot e \cdot \sin 1 \end{aligned}$$
$$\operatorname{Re}\left(e^{1+i}\right) = e \cos 1$$
$$\operatorname{Im}\left(e^{1+i}\right) = e \sin 1$$

$$
\begin{aligned}
\log(e) &= 1 \\
\log(-1) &= \log\left(e^{i(\pi+2k\pi)}\right) = i(\pi + 2k\pi)
\end{aligned}
$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$
\begin{aligned}
z &= |z|e^{i\theta} \\
\log(z) &= \ln\left(|z|\right) + i\theta
\end{aligned}
$$

**Ορίζω**

**Πλειότιμη** $\log(z) = \ln\left(|z|\right) + i\arg(z)$

**Μονότιμη** $\mathrm{Log}(z) = \ln\left(|z|\right) + i\mathrm{Arg}(z)$ είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$
\begin{aligned}
\log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i\left(\pi/4+2k\pi\right)}\right) \\
&= \log\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)
\end{aligned}
$$

$$
\left\{\frac{1}{2}\ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}
$$