

<http://users.auth.gr/natreas>

Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5

Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6

Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marjden (πιο μαθηματικό)

Μέρος I

Ατρέας

Μιγαδικοί Αριθμοί

$$\text{Έστω } \mathbb{C} = \left\{ \begin{array}{c} \text{γεωμετρική παράσταση μιγαδικού} \\ z = \overbrace{(x, y)}; x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $z_2 = (x_2, y_2)$, τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο $\lambda \in \mathbb{R}$ με μιγαδικό z

Αν $z = (x, y)$, τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του \mathbb{C} είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{1-1} A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

- $(x, 0), (y, 0) \in A \implies (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in A$
- $(x, 0)(y, 0) = (xy, 0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$1 = (1, 0)$$

$$x = (x, 0)$$

Ορίζω:

$$i = (0, 1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Έτσι:

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$\stackrel{x=(x,0)}{=} x \cdot 1 + y \cdot i$$

$$\stackrel{i=(0,1)}{\implies} \boxed{z = x + iy}$$

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z = (x, y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{πολικές}}{\underset{\text{του } (x,y)}{=}} \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \\ &= \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} z &= |z| \underbrace{(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= |z| \cdot e^{i\theta} \end{aligned}$$

όπου στο εξής:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

τύπος του Euler

Τελικά:

$$z = |z| e^{i\theta} \quad (\text{πολική μορφή μιγαδικών})$$

Σημείωση: $\cos \theta + i \sin \theta$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{σειρές}}{\underset{\text{McLaurin}}{=}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \\ &\stackrel{i^2=-1}{=} \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \right) \\ &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta} \end{aligned}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα $\text{Arg } z$ (μη μηδενικού) μιγαδικού z να είναι η γωνία θ που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του \mathbb{C} με την ημιευθεία OA , όπου A το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του $z = x + iy$.

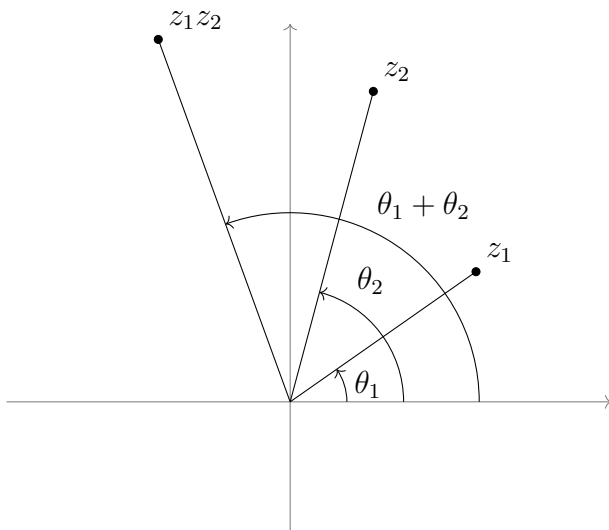
Έτσι:

$$z = |z| e^{i \text{Arg } z} \quad \text{πολική μορφή του } z$$

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i \text{Arg } z_1} |z_2| e^{i \text{Arg } z_2}$$

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2)}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} \\ &= \left| \frac{z_1}{z_2} \right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$



Ιδιότητα: $z\bar{z} = |z|^2$

Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

π.χ.

$$f(z) = z^2 \implies f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{Re}(f)} + i \underbrace{(2xy)}_{\text{Im}(f)}$$

$$\stackrel{\text{γεωμετρική}}{\equiv} \stackrel{\text{μορφή}}{(x^2 - y^2, 2xy)}$$

Τελικά: $\boxed{f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)} \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

π.χ.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{|z|\bar{z}} \stackrel{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z} \\ &\stackrel{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &\stackrel{\text{veωμ}}{=} \frac{(x, y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \stackrel{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}} \end{aligned}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

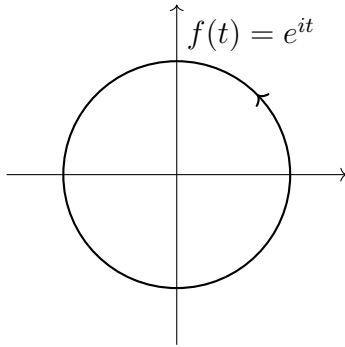
$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιν. μεταβλ.}} \xleftrightarrow{1-1} \begin{matrix} \text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \end{matrix}$$

όπου u, v πραγμ. συναρτ. 2 μεταβλητών

Υπάρχουν $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής
π.χ

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{it}, t \in (0, \pi] \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

$$t \rightarrow (\cos t, \sin t) \quad \text{καμπύλη } x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$



Η γραφ. παράσταση της $f(t) = e^{it}$, $t \in (-\pi, \pi)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0, 0)$ με αντιωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1, t) = (1, 0) + t(0, 1)$$

Το πεδίο ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδ. μεταβλητών υπολογίζεται ως συνήθως (με τις πραγματικές συναρτήσεις) ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ Διαφοροποιήσεις

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Πρέπει ο παρον. να είναι διάφορος του μηδενός: Έτσι $z \neq 0$ Άρα Π.Ο = $\mathbb{C} - \{(0, 0)\}$

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 2}$$

Σημείωση Η g είναι **ρητή** συνάρτηση (δηλ. πηλίκο δύο (μιγαδικών) πολυωνύμων).

Κάθε συνάρτηση της μορφής $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ καλείται (μιγαδικό) πολυώνυμο.

Πρέπει παρον. $\neq 0$ δηλ:

$$z^2 + 2 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \textbf{ΠΡΟΣΟΧΗ!!} \text{ Κάθε μιγαδικό} \\ \text{πολυώνυμο βαθμού } N \text{ έχει} \\ \text{ΑΚΡΙΒΩΣ } N \text{ ρίζες στο } \mathbb{C} \end{array} \right)$$

$$z^2 + 2 = 0 \xrightarrow{i^2 = -1} z^2 - 2i^2 = 0$$

$$\implies (z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i) = 0$$

$$\implies \boxed{z = \pm \sqrt{2}i}$$

Τελικά Π.Ο = $\mathbb{C} - \{\pm \sqrt{2}i\}$

$$h(z) = \operatorname{Arg} z, \text{ Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}$$

Για $z = 0$ ΔΕΝ ορίζεται όρισμα, επειδή $0 = |0| \cdot e^{i\theta} \forall \theta$

Σημείωση $az^2 + bz + c = 0$

$a, b, c \in \mathbb{C}$

Λύνεται με διακρίνουσα κατά τα γνωστά.

Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα Horner για πολυώνυμα (με πραγματικούς συντελεστές) βαθμού $N \geq 3$.

$$\begin{aligned} a(z) &= e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= (e^x \cos y, e^x \sin y), \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ως διανυσματικό πεδίο προφανώς $\text{Π.Ο} = \mathbb{R}^2$

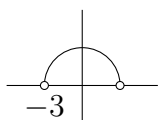
Έτσι $\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$.

$l(z) = \operatorname{Log}$ (αντίστροφη της e^z)

$$\underbrace{\operatorname{Log}}_{\text{ορισμός}} := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

μιγαδικός λογάριθμος

$$\text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(3) &= \ln |-3| = i \operatorname{Arg}(-3) \\ &= \ln 3 + i\pi \end{aligned}$$

$$\lambda(z) = \sin z \stackrel{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\left(\begin{array}{lcl} e^{i\theta} & = & \cos \theta + i \sin \theta \quad \theta \in (-\pi, \pi] \\ e^{-i\theta} & = & \cos \theta - i \sin \theta \\ \hline \sin \theta & = & \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right)$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$

$$m(z) = \cos z \stackrel{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$

Όλες οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες ισχύουν στο \mathbb{C} όπως στο \mathbb{R} .

$$h(z) = \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{2k\pi + \text{Arg } z}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

(Η $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται ως το **σύνολο** όλων των λύσεων της εξίσωσης $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$)

$$\Pi.O = \mathbb{C} - \{0\}$$

Όριο/Συνέχεια

μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής

Ορισμός

Έστω $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ μιγ. συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι σ.συσσ. του A και έστω $a = a_0 + ib_0$. Τότε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a_0 \\ \textbf{ΚΑΙ} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b_0 \end{array} \right.$$

Επίσης, αν $z_0 \in A$, τότε

f συνεχής στο σημείο z_0

$$\Updownarrow$$

οι συναρτήσεις $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ΣΥΝΕΧΕΙΣ στο σημείο (x_0, y_0) (ως πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

Έτσι:

$$\left. \begin{array}{l} \text{οι πολυωνυμικές} \\ \text{η εκθετική} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\sin z, \cos z) \\ \text{οι υπερβολικές } (\text{ch}, \text{sh}) \end{array} \right\} \text{συνεχείς στο } \mathbb{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{οι ρητές} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\tan z, \cot z) \end{array} \right\} \text{συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους}$$

Ορίζω το ∞ του μιγαδικού επιπέδου να είναι το σύνολο σημείων που απέχουν "άπειρη" απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται ως:

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{ όπου:}$$

$$\infty + z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\infty \cdot z = \infty \quad \forall z \neq 0$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \neq \infty$$

Όλες οι πράξεις του ορίου που ξέρετε ισχύουν και στους μιγαδικούς (αρκεί να μην εμφανίζονται οι γνωστές απροσδιόριστες μορφές):

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Ο κανόνας De l' Hospital ισχύει στους μιγαδικούς.

Σημείωση:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \in \mathbb{C} \iff \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = a \in \mathbb{C}$$

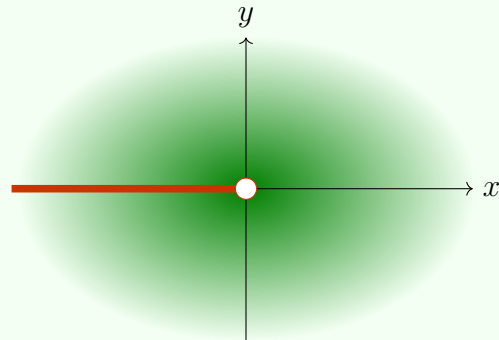
$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$$

Θ.

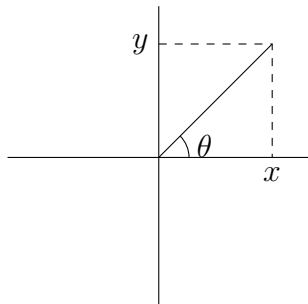
Έστω $\text{Arg } z : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$
Τότε η $\text{Arg } z$ **είναι συνεχής** στο σύνολο:

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ ΚΑΙ } y = 0\}$$

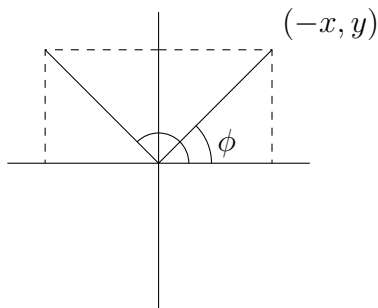


Έστω $z = x + iy$

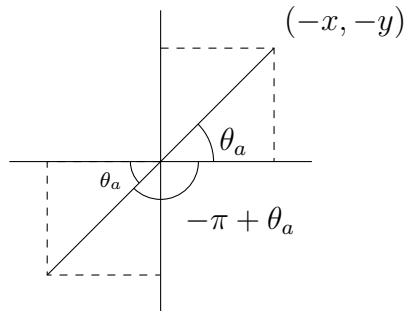
(α) $x > 0, y > 0$



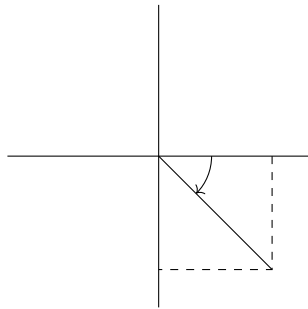
(β) $x < 0, y > 0$



(γ) $x < 0, y < 0$



(δ) $x > 0, y < 0$



$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x, y > 0 \\ \pi - \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x < 0, y > 0 \\ -\pi + \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x < 0, y < 0 \\ -\arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

Για $x = 0$, τότε $\operatorname{Arg} := \frac{\pi}{2}$ ή $-\frac{\pi}{2}$
 Για $y = 0$, τότε $\operatorname{Arg} := 0$ ή π

Έστω $z_0 = x_0 < 0$

• Έστω $z = x_0 + it$ ($t > 0$)

Για $t \rightarrow 0^+$, $z \rightarrow z_0 = x_0$, αλλά:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Arg} z \stackrel{z=x_0+it}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \operatorname{Arg} (x_0 + it) \stackrel{\text{3ο τετ.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\pi - \arctan \left| \frac{t}{x_0} \right| \right) = \pi - \arctan 0 = \pi$$

• Για $z = x_0 + it$ ($t < 0$), τότε:

$t \rightarrow 0^-$, $z \rightarrow z_0$, και

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Arg} z = \lim_{t \rightarrow 0^-} \operatorname{Arg} (x_0 + it) \stackrel{\text{3ο τετ.}}{=} -\pi + \arctan 0 = -\pi$$

Άρα το όριο στο $z_0 = x_0$ ΔΕΝ υπάρχει, και έτσι η $\operatorname{Arg} z$ ασυνεχής στα $z = x_0$ με $x_0 \leq 0$.

Αν $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$ πού είναι ασυνεχής;

Μιγαδική παράγωγος

Την εβδομάδα της 28^{ης} θα γίνουν κανονικά τα μαθήματα του Ατρέα.

Ορισμός

Έστω $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο σημείο z_0 , αν υπάρχει το ΟΡΙΟ:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a \in \mathbb{C}$$

(ή ισοδύναμα $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = a \in \mathbb{C}$)

Στο εξής το όριο αυτό συμβολίζουμε με $f'(z_0)$ ή $\frac{df(z_0)}{dz}$

Ορισμός

Αν $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$, θα λέμε στο εξής ότι η f είναι ΟΛΟΜΟΡΦΗ (ή ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - holomorphic/analytic) **στο σημείο z_0** , εάν η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **ΣΕ ΚΑΘΕ**

ΣΗΜΕΙΟ του ανοικτού δίσκου



$$D_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

για κάποιο $\epsilon > 0$

Αν f ολόμορφη σε ΚΑΘΕ σημείο του A λέμε ότι η f ολόμορφη στο A .

Ορισμός

Αν A μη ανοικτό, λέμε ότι η f ολόμορφη στο A , αν υπάρχει $B \supset A$, B ανοικτό ώστε η f στο B .

Όλες οι γνωστές ιδιότητες της παραγώγου που γνωρίζετε ισχύουν και για τη μιγαδική παράγωγο

π.χ. Έστω f, g **μιγαδικά** παραγωγίσιμες σε σημείο z_0 . Τότε:

- f παραγ. στο $z_0 \implies f$ συνεχής στο z_0
- $(af \pm bg)'(z_0) = af'(z_0) \pm bg'(z_0) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \quad (g(z_0) \neq 0)$
- Ο κανόνας αλυσίδας ισχύει στις μιγαδικές συναρτήσεις:

$$(h \circ g)'(z_0) = h'(g(z_0)) g'(z_0)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σύνθεση καλά ορισμένη

Παραγωγή αντίστροφης συνάρτησης Έστω f ολόμορφη σε σημείο z_0 με $f'(z_0) \neq 0$.

Αν $w_0 = f(z_0)$, τότε υπάρχουν $\epsilon, \epsilon' > 0$ ώστε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : D_\epsilon(w_0) \rightarrow D_{\epsilon'}(z_0)$ καλά ορισμένη, ολόμορφη στο w_0 και

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Θ.: Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Θεωρώ $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ και A ανοικτό.

Τότε:

f μιγαδικά παραγωγίσιμη στο z_0



(α) Η $\mathbf{F}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ είναι **διαφορίσιμο** διανυσμ. πεδίο στο σημείο (x_0, y_0)

ΚΑΙ

(β)

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{εξισώσεις C-R}}$$

Πόρισμα (ΠΡΑΚΤΙΚΟΤΑΤΟ) Αν $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι έτσι ώστε:

(α) u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0) και "κοντά" στο (x_0, y_0)

$$(β) \quad \begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{C-R}}$$

Τότε (\implies) η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$

Παρ.

$$\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy), \text{ άρα} \end{aligned}$$

$$f = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right.$$

Παρατηρήσεις

(α) Έστω f μιγαδικά παραγ. συνάρτηση σε σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

- Έστω $z = x + iy_0$ ($x \in \mathbb{R}$) είναι τυχαίο σημείο της "οριζόντιας" ευθείας που διέρχεται από το z_0
- Για $x \rightarrow x_0$, τότε $z = x + iy_0 \rightarrow x_0 + iy_0 = z_0$ (δηλ. $z \rightarrow z_0$ όταν $x \rightarrow x_0$ πάνω στην οριζόντια ευθεία)

Τότε για $z = x + iy_0$ έχω:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ &\implies \boxed{f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)} := \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, αν εργαστούμε κατά μήκος της "κάθετης" ευθείας που διέρχεται από το z_0 , έχουμε:

$$\boxed{f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)} := -i \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

(β) Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{df(z_0)}{dz} \\ \implies \boxed{df(z_0) = f'(z_0) dz} \end{aligned}$$

$dz :=$ στοιχειώδης όγκος
στο επίπεδο xy

$df(z_0) :=$ στοιχειώδης χωρίο στο επίπεδο uv
στο οποίο μετασχηματίζεται το dz
μέσω της απεικόνισης f

$$df(z_0) = |f'(z_0)| e^{i \operatorname{Arg} f'(z_0)} dz \quad (f'(z_0) \neq 0)$$

Μέρος II

Κεχαγιάς

Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

Μιγαδικοί αριθμοί

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$x, y \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1$$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$

$$= x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_1y_2 + i^2x_2y_1$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

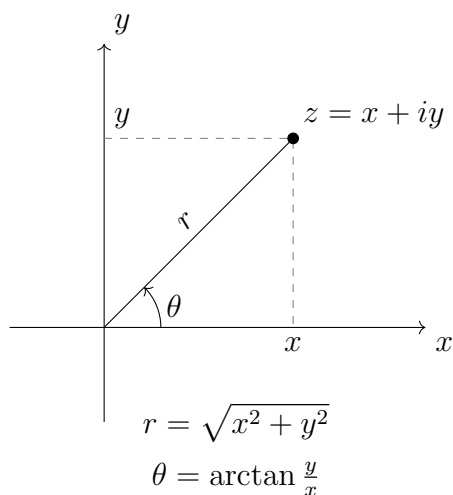
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\operatorname{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow \text{μέτρο του } z$$

γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ. $z = x \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$)

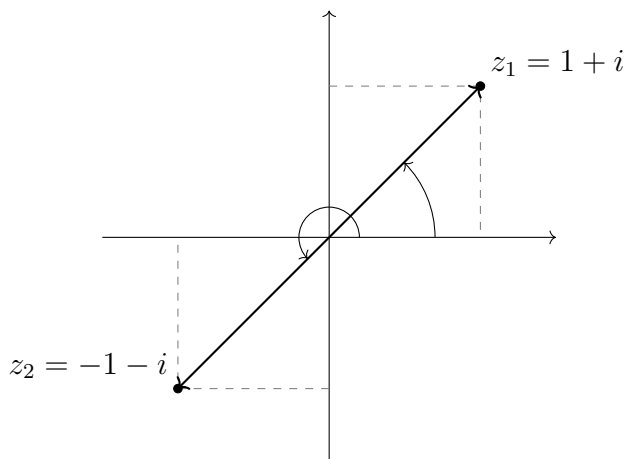
$$\begin{aligned} z = x + iy &= r \cdot \cos \theta + ir \sin \theta \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \quad (\text{Euler}) \end{aligned}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ διότι}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \cos \theta + ir \sin \theta \end{aligned}$$



$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}e^{i(-3\pi/4)} = \sqrt{2}e^{i13\pi/4}$$

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Γενικά: } -1 - i = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Συναρτήσεις

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z = x + iy$$

$$\text{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^\circ \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \quad \theta_0 = \arctan \left(\left| \frac{y}{x} \right| \right)$$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$$

$$\text{Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση } \arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \text{mod}(z) \cdot e^{i\text{Arg}(z)} \\ &= \text{mod}(z) \cdot e^{i(\text{Arg}(z) + 2k\pi)} \end{aligned}$$

$$z_1 = \text{mod}(z_1)e^{i\text{Arg}(z_1)}$$

$$z_2 = \text{mod}(z_2)e^{i\text{Arg}(z_2)}$$

$$z_1 z_2 = \text{mod}(z_1)\text{mod}(z_2)e^{i(\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2))}$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \text{ επειδή}$$

$$\text{Arg}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) = \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi$$

Γενικά, αν $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, τότε:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Όμως:

$$\begin{aligned} \arg(z^z) &= \arg(z) + \arg(z) \\ &\neq 2\arg(z) \end{aligned}$$

διότι:

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

$$A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\}$$

$$2A = \{2a : a \in A\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \{1 + 4, 1 + 5, 2 + 4, 2 + 5, 3 + 4, 3 + 5\} = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$2A = \{2, 4, 6\}$$

η-οστές ρίζες

$$z = a^{1/n} \iff z^n = a$$

Δηλ. ποιο z ικανοποιεί αυτή

$$a = |a|e^{i\theta}$$

$$z = re^{i\phi}$$

$$(re^{i\phi})^n = |a|e^{i\theta}$$

$$\implies r^n \cdot e^{in\phi} = |a|e^{i\theta}$$

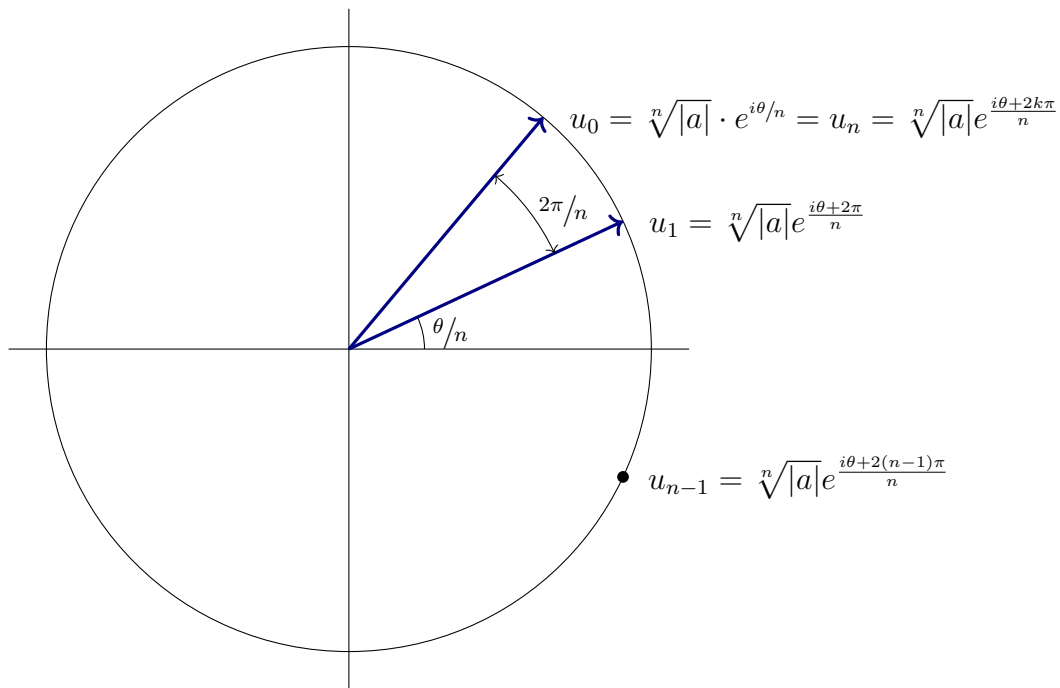
$$\implies r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi) = |a| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} r^n = |a| \implies r = \sqrt[n]{|a|} \\ \cos(n\phi) = \cos \theta \\ \sin(n\phi) = \sin \theta \implies \end{array} \right. \implies n\phi = \theta + 2k\pi \in \mathbb{Z} \implies \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$\implies z = a^{1/n} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Όμως αρκεί να πάρω $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$)

$$a^{1/n} = \left\{ \sqrt[n]{|a|}e^{i\theta/n}, \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\theta+2\pi}{n}}, \dots \right.$$

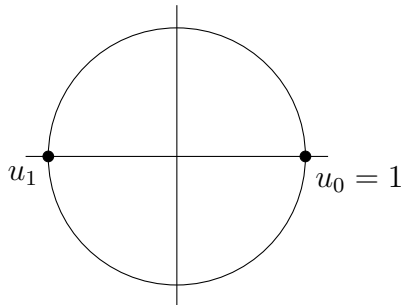


Παρ. $a^{1/2} = 1^{1/2}$

$$a = 1 = 1 \cdot e^{i0} \quad |a| = 1, \theta = 0$$

$$u_0 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2 \cdot 0 \cdot \pi}{2}\right)} = e^{i0} = 1$$

$$u_1 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2 \cdot \pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1$$



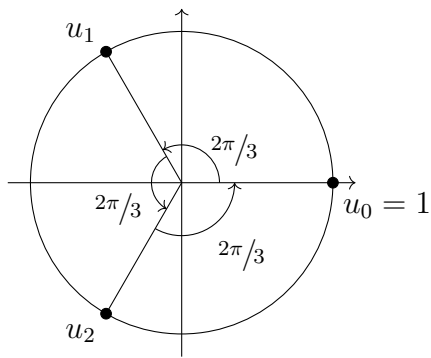
Παρ. $a^{1/3} = 1^{1/3} = z$

$$a = 1 = e^{i0}, |a| = 1, \theta = 0$$

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$u_2 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$



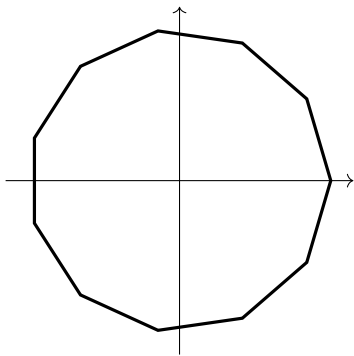
Διαφορετικά

$$\begin{aligned}
 1^{1/3} = z &\iff 1 = z^3 \\
 &\iff z^3 - 1 = 0 \\
 &\iff (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \\
 &\iff (z - 1) \left(z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Παρ. $1^{1/11} = z \iff 1 = z^{11}$

$$\begin{aligned}
 &\iff z^{11} - 1 = 0 \\
 &\iff (z - 1)(z^{10} + z^9 + \dots + z^2 + z + 1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{10}\}$$



Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$$e^z, \log(z)$$

$$e^z \stackrel{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ήξερα } e^x &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 e^{iy} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} .
 \end{aligned}$$

Τώρα η νέα συνάρτηση $e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

Παρ.

$$\begin{aligned}e^{1+i} &= ee^i = e \cdot (\cos 1 + i \sin 1) \\&= e \cdot \cos 1 + i \cdot e \cdot \sin 1\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(e^{1+i}) = e \cos 1$$

$$\operatorname{Im}(e^{1+i}) = e \sin 1$$

$$\log(e) = 1$$

$$\log(-1) = \log(e^{i(\pi+2k\pi)}) = i(\pi + 2k\pi)$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\theta$$

Ορίζω

Πλειότιμη $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$

Μονότιμη $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z)$ είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$\begin{aligned}\log(1+i) &= \log(\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2k\pi)}) \\&= \log(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right\}$$

Από σήμερα: $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Πριν 7 ημέρες: $e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i \sin y$

Σήμερα: $\exp(z) \stackrel{\text{op}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Θ. Η $\exp(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z \in \mathbb{C}$ και ικανοποιεί:

(1) $\forall z : (\exp(z))' = \exp(z)$

(2) $\forall z_1, z_2 : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$

(3) $\forall \theta \in \mathbb{R} : \exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$

Απόδ.

(1)

$$\begin{aligned}(\exp(z))' &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)' \\&= 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \exp(z)\end{aligned}$$

(2) $g(z) = \exp(z) \exp(\zeta - z)$

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dz} &= \exp(z) \exp(\zeta - z) + \exp(z) \exp(\zeta - z)(-1) = 0 \\&\implies g(z) = c \implies c = g(0) = \exp(\zeta) \\&\implies \exp(\zeta) = g(z) = \exp(z) \exp(\zeta - z)\end{aligned}$$

Θέτω: $z = z_1, \zeta = z_1 + z_2$

Οπότε:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

(3)

$$\begin{aligned}\exp(i\theta) &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) \\&= \cos \theta + i \sin \theta\end{aligned}$$

$$\exp(z) = e^z$$

$$\exp(1+i) = 1 + (1+i) + \frac{(1+i)^2}{2!} + \dots$$

$$e^{1+i} = 1 + (i+1) + \dots$$

ή ο αρ. $e = 2.718$ υψωμένος στη μιγαδική δύναμη $1+i$

Θ. Η $\exp(z)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$

Απόδ.

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \exp(2\pi i) = \exp(z)$$

Η εικόνα του συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}$ υπό την συνάρτηση $f(z)$ Δηλ.

$$f(A) = \{w = f(z), z \in A\}$$

Παρ. Να δειχθεί ότι $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Διότι: έστω $w = re^{i\phi} \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Θα βρω $z = \rho e^{i\theta} = x + iy$ τ.ώ: $\exp(z) = w$.

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy)$$

$$w = re^{i\phi}$$

$$\exp(x) = |\exp(z)| = |w| = r \implies \boxed{x = \ln(r)}$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(w)$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(\exp(x) \exp(iy)) = y$$

$$\text{Arg}(w) = \text{Arg}(re^{i\phi}) = \phi$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(w) \implies \boxed{y = \phi}$$

Τελικά $z = x + iy = \ln(r) + i\phi$ ικανοποιεί $\exp(z) = re^{i\phi} = w$. Άρα $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Στην πραγματικότητα, δεν χρειαζομαι όλο το \mathbb{C} διότι:

$$\exp(U) = \mathbb{C} - \{0\}, \quad \text{όπου } U = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi]\}$$

