Θεωρία Σημάτων και Γραμμικών Συστημάτων

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Για τον κώδικα σε LaTeX, ενημερώσεις και προτάσεις:
https://github.com/kongr45gpen/ece-notes

2016

Τελευταία ενημέρωση: 17 Ιανουαρίου 2017

Περιεχόμενα

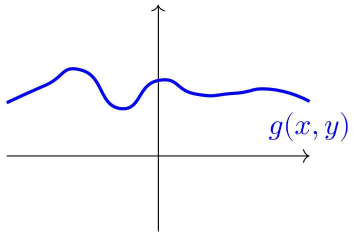
Εισαγωγή

Σήμα - σύστημα

$$\boxed{\underbrace{g}_{\text{εξαρτημένη}} = f(\underbrace{t}_{\text{ανεξάρτητη}})} \qquad g = f(\vec{r}, t) \qquad \vec{E}(\vec{r}, t)$$

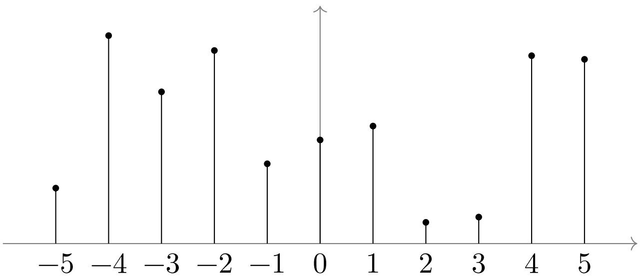
Αναλογικό

Αν t συνεχής $\in \mathbb{R}$
και y συνεχής $\in \mathbb{R}$



Διακριτού χρόνου / Διακριτό (discrete)

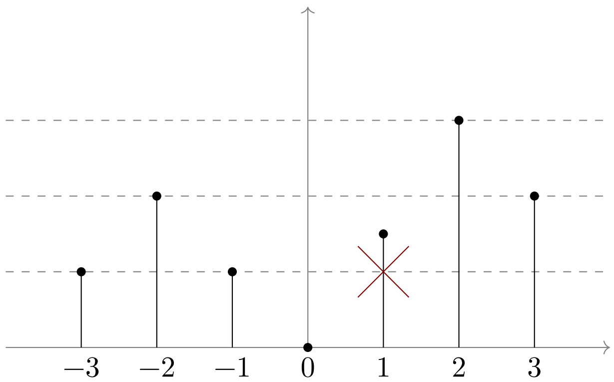
t διακριτό $\to \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$
g συνεχής $\in \mathbb{R}$



$7^{ο}$ εξάμηνο

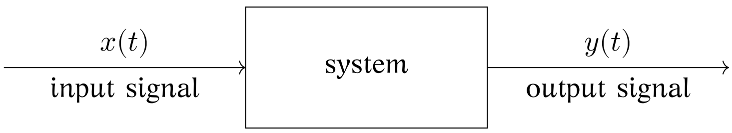
Κβαντισμένο

$n \in \mathbb{Z}$
g διακριτή



Στοχαστικό Περιέχει και τις τρεις κατηγορίες

Σύστημα



Περιοδικά σήματα

Αν $\exists T \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = x(t+T)$ τότε $x(t)$ **περιοδικό σήμα** με περίοδο T.
Ή θα είναι 0, ή θα συνεχιστεί για πάντα.

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t)\,\mathrm{d}t \;\; \forall t$$

Η σύνθεση μιας συνάρτησης με μια περιοδική συνάρτηση είναι περιοδική;

Απόδ. Έστω g μία περιοδική συνάρτηση:

$$\begin{aligned}\Big(f \circ g\Big)(x) &= f\left(g(x)\right) = f\left(g(x+T)\right) = \\ &= \Big(f \circ g\Big)(x+T)\end{aligned}$$

Συμμετρίες

- Αν $x(t) = x(-t)$ $\forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **άρτια συνάρτηση** (even function).
- Αν $x(t) = -x(t)$ $\forall t$ τότε η $x(t)$ λέγεται **περιττή συνάρτηση** (odd function).

Υποστηρίζω ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής:
$\forall x(t) \quad \exists\, x_0(t), x_e(t) : x(t) = x_e(t) + x_0(t)$

Απόδ.

$$\begin{aligned}x_e(t) &= \frac{x(t)+x(-t)}{2} \\ x_o(t) &= \frac{x(t)-x(-t)}{2}.\end{aligned}$$

$$\underbrace{x_e}_{\text{άρτια}} y_e = z_e$$

$$x_o y_o = z_e$$

$$x_e y_0 = z_0$$

$$\int_{-A}^{A} x_0(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

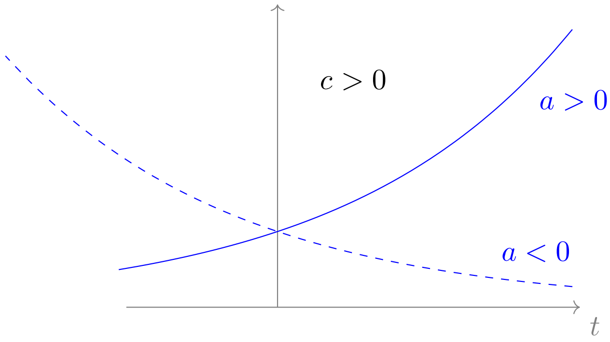
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_0(t)\,\mathrm{d}t = ?\ \text{(εξαρτάται)}$$

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} x_0(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{(principal Cauchy value)}$$

Χαρακτηριστικά σήματα

1) **Εκθετικό σήμα**

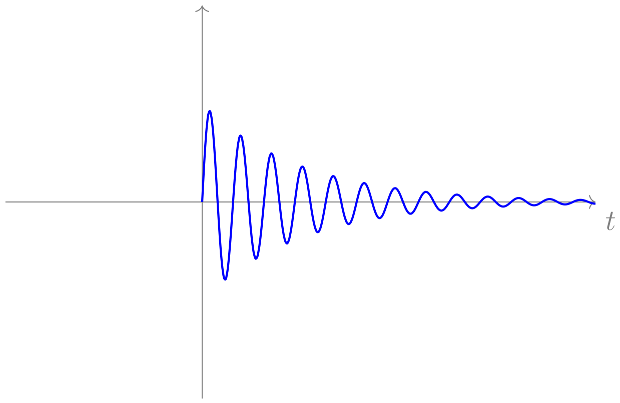
$$x(t) = ce^{at} \quad a \in \mathbb{R} \quad c > 0$$



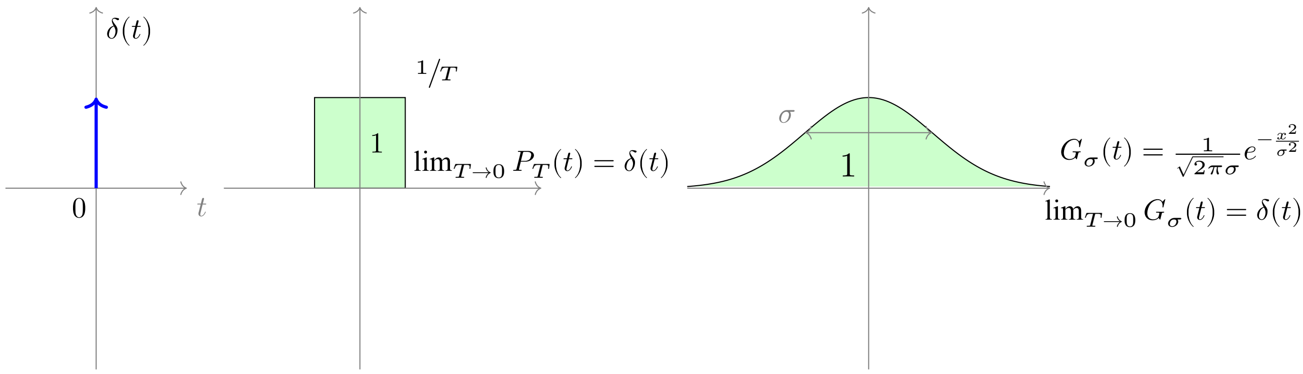
$$x(t) = ce^{(\sigma t + j\omega)t} = ce^{\sigma t}e^{j\omega t} = ce^{\sigma t}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right]$$

2) **(Συν)ημιτονοειδή σήματα**

$$x(t) = A\cos(\omega t \pm \phi) = a\mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega t + \phi)}\right\} = A\frac{e^{j(\omega t \pm \phi)} + e^{-j(\omega t \pm \phi)}}{2}$$



3) **Δέλτα Dirac** $\delta(t)$



Ορ.

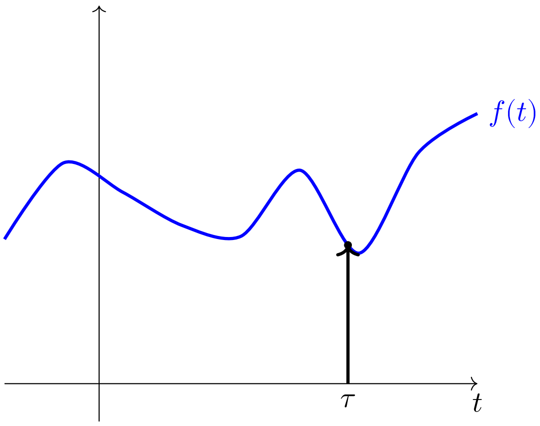
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0) \;\; \forall f(t)$$

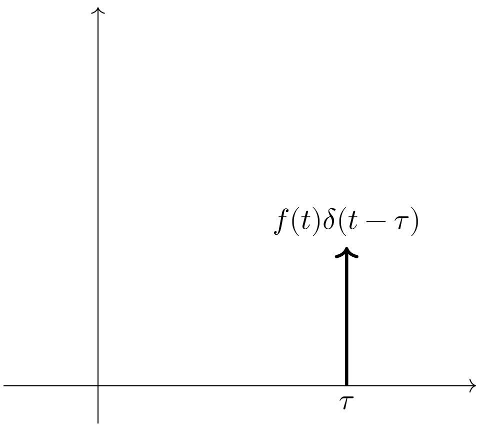
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = f(\tau)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)$$





Ιδιότητες της $\delta(t)$

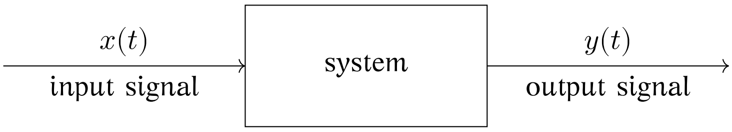
1. **Κλιμάκωση**

$$a \in \mathbb{R} : \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

Απόδ.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\boxed{\delta(at)}\,\mathrm{d}t}_{\substack{at=\xi \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\xi}{a}}} = \int_{-\infty_{(a)}}^{\infty_{(a)}} \phi\left(\frac{\xi}{a}\right)\delta(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{a} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi\left(\frac{\xi}{a}\right)}{|a|}\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{\phi(0)}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\boxed{\frac{\delta(t)}{|a|}}\,\mathrm{d}t$$

2. $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$
3. $f(t)\delta(t-\xi) = f(g)\delta(t-\xi)$



$y(t) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$
$\forall x_1(t)\ x_n(t)$
$y_1(t) = \mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\}$
$y_2(t) = \mathcal{L}\left\{x_2(t)\right\}$

Για const $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \\ y(t) &= \mathcal{L}\left\{x(t)\right\} \end{aligned}$$

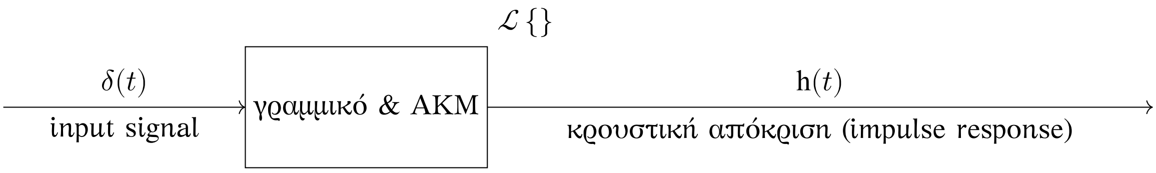
ανν

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

τότε

$$\mathcal{L}: \text{ γραμμικό σύστημα}$$

- $g(t) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$
  $x'(t) = x(t-\tau)$
  ανν $y'(t) = \mathcal{L}\left\{x'(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{x(t-\tau)^2\right\} = y(t-\tau)$
  τότε το σύστημα $\mathcal{L}$ είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.



Υποστηρίζω ότι ένα γραμμικό & ΑΚΜ σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική απόκριση $h(t)$.

Απόδ. Από παραπάνω, γνωρίζουμε ότι $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \\ &\overset{\text{linearity}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\left\{x(t)\delta(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{L}\left\{\delta(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\ &\underset{\underbrace{\text{TSI}}_{\text{Time shift invariant}}}{\overset{\text{AKM}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\underbrace{h(t-\tau)}_{\text{linear time-shift invariant}}\,\mathrm{d}\tau$$

- $\delta(t) = \delta(-t)$ άρτια συνάρτηση
- $\delta^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t)$, για την οποία αποδεικνύεται ότι:

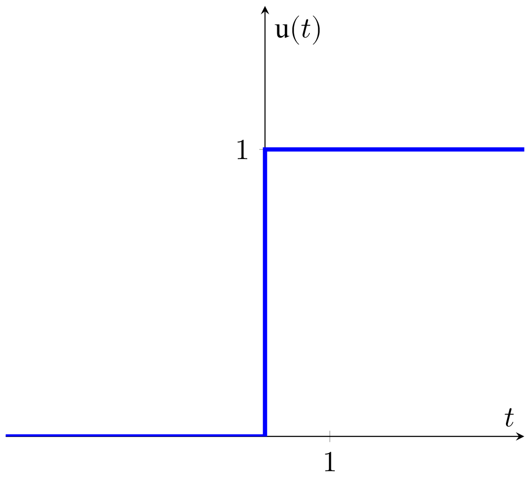
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\ \phi^{(n)}(t)\Big|_{t=0}$$

Χρήσιμες Συναρτήσεις

Βηματική Συνάρτηση (Unit Step Function)

$$\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{N}_{\mathrm{u}}\left\{\phi(t)\right\} = \int_{0}^{\infty} \underbrace{\phi(t)}_{\text{number}}\,\mathrm{d}t$$

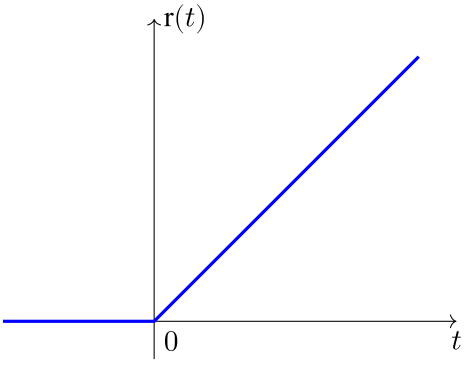


$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{u}(t)$$

$$\mathrm{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Ράμπα

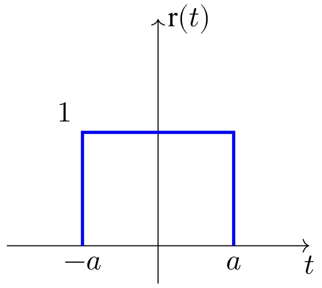
$$\mathrm{r}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = t\mathrm{u}(t)$$

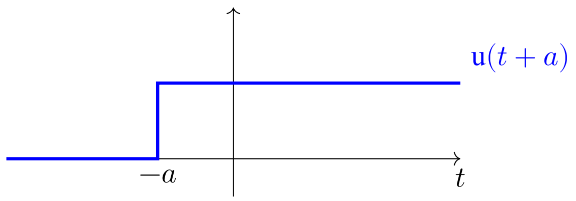


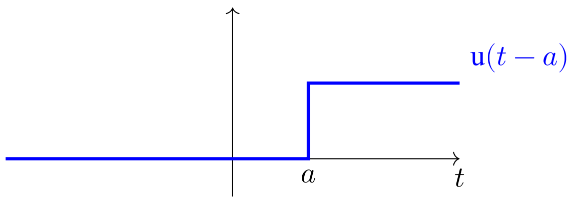
$$u(t) = \frac{d}{dt} r(t)$$

Ορθογωνικός παλμός (Rectangular Pulse function)

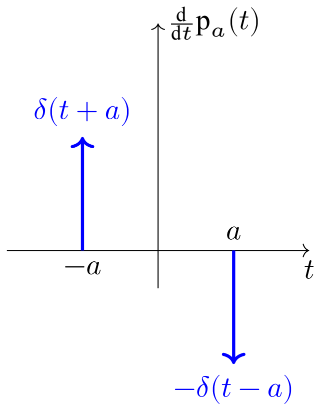
$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$





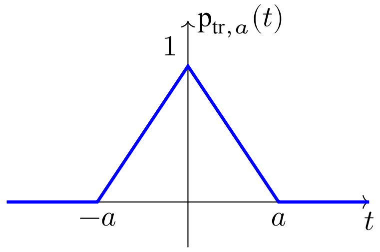


$$\begin{aligned} p_a(t) =& u(t+a) - u(t-a) \\ \frac{d}{dt} p_a(t) =& \delta(t+a) - \delta(t-a) \end{aligned}$$

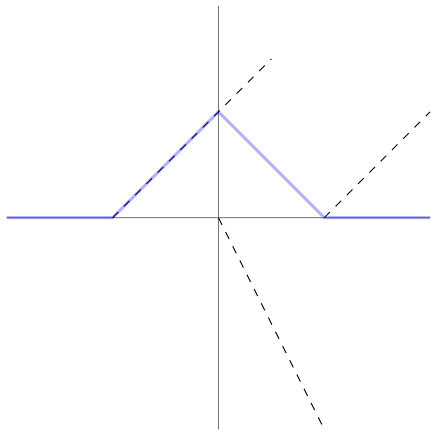


Τριγωνικός Παλμός (Triangular Pulse function)

$$p_{tr,a} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$



$$p_{\mathrm{tr},a}(t) = \frac{1}{a}\left[\mathrm{r}(t+a) + \mathrm{r}(t-a) - 2\mathrm{r}(t)\right]$$



Χαρακτηριστικά Μεγέθη

1) **Μέση τιμή (Mean Value)**

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\mathrm{d}t$$

Αν περιοδική τότε

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

2) **Ενεργός τιμή (Root Mean Square Value)**

$$\overline{\overline{x(t)}} = \left[\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t\right]^{1/2}$$

Αν ημιτονοειδές σήμα $\bar{\bar{x}}(t) = \frac{x_{\max}}{\sqrt{2}}$

3) **Ενέργεια - Ισχύς**

- Στιγμιαία ισχύς (Instant power)

$$p(t) = x^2(t)$$

- Μέση ισχύς (Mean power)

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \left(\overline{\overline{x(t)}}\right)^2$$

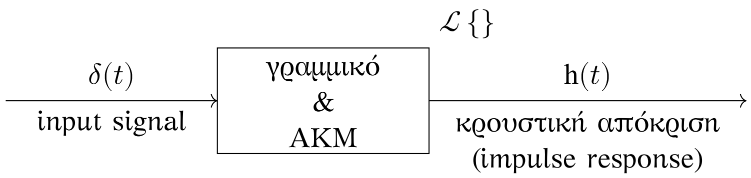
- Ενέργεια (Energy)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t = (t_2 - t_1)\left(\overline{\overline{x(t)}}\right)^2$$

$$\textbf{Σήματα} \begin{cases} \textbf{Σήμα ενέργειας} \text{ αν } \lim\limits_{T\to\infty} W < \infty \\ \\ \textbf{Σήμα ισχύος} \text{ αν } \lim\limits_{T\to\infty} \overline{p(t)} > 0 \\ \text{Υπάρχουν και σήματα που δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος.} \end{cases}$$

Συνέλιξη

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau$$



$$h(t) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{x(t)}_{\text{είσοδος}} \overset{\overset{\text{συνέλιξη}}{\uparrow}}{*} \underbrace{h(t)}_{\text{κρουστική απόκριση}}$$

Συνέλιξη - Convolution

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$ **Αντιμεταθετική**

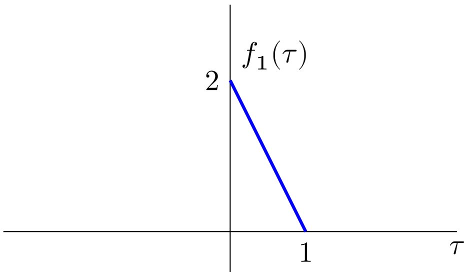
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)y(\lambda)[-\,\mathrm{d}\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda)x(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = y(t) * x(t)$$

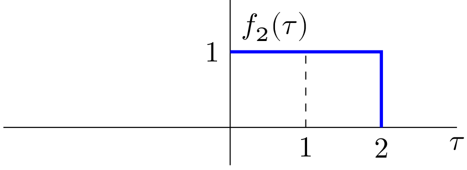
- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$ **Προσεταιριστική**

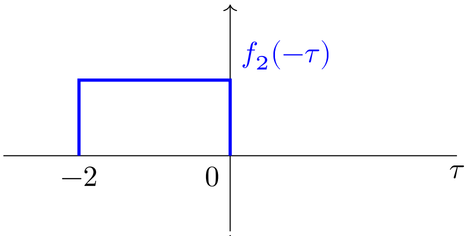
Παρ.

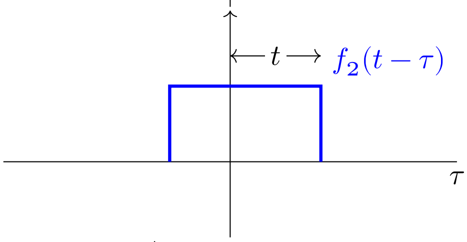
$$f_1(t) = 2(1-t)\,[\mathrm{u}(t) - u(t-1)]$$
$$f_2(t) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-\tau)$$

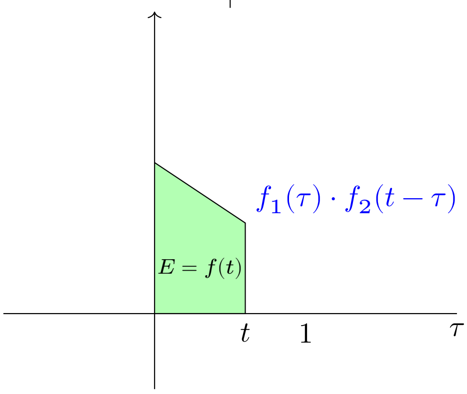
Γραφική μέθοδος υπολογισμού συνέλιξης

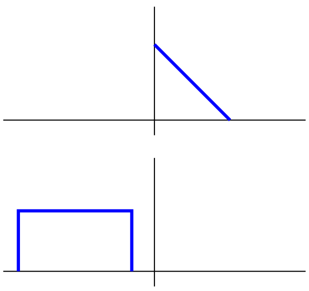




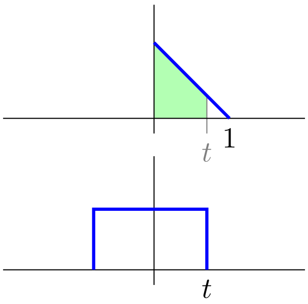






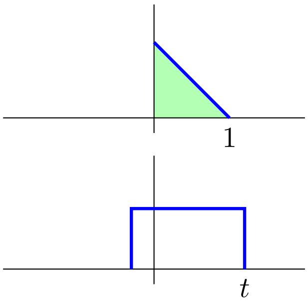
- $t < 0$  $f(t) = 0$

- $0 < t < 1$



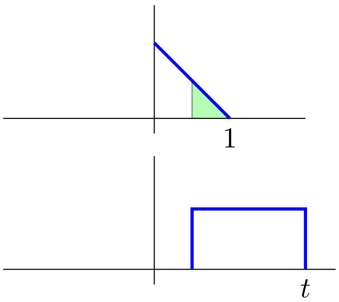
$f(t) = \frac{1}{2}(2 + 2 - 2t)t = (2 - t)t$

- $1 < t < 2$



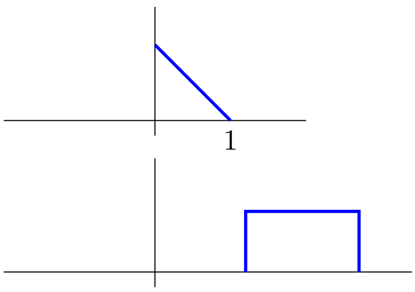
$f(t) = 1$

- $2 < t < 3$

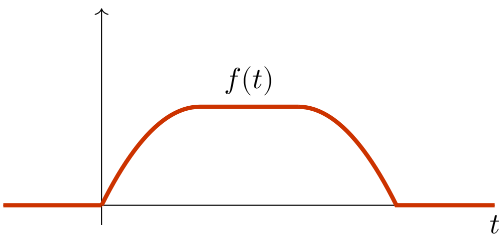


$f(t) = \frac{(t-1)\cdot 2\cdot (1-(t-2))}{2} = (t - 1)(3 - t)$

- $t > 3$



$f(t) = 0$



Αναλυτική μέθοδος Παρατηρώ ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau)\mathrm{u}(t-\xi)\mathrm{u}(\phi-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{u}(\phi-\xi)$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2(1-\tau)}_{x(\tau)} [\mathrm{u}(\tau) - \mathrm{u}(\tau+1)] \, [\mathrm{u}(t-\tau) - \mathrm{u}(t-\tau-2)] \, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \, [\mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau) - \mathrm{u}(\tau-1)\mathrm{u}(t-\tau) - \mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau-2) + \mathrm{u}(\tau-1)\mathrm{u}(t-\tau-2)] \, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t x(\tau) \, \mathrm{d}\tau \mathrm{u}(t) - \int_1^x x(\tau) \, \mathrm{d}\tau \mathrm{u}(t-1) - \int_0^{t-2} x(\tau) \, \mathrm{d}\tau \mathrm{u}(t-2) + \int_1^{t-2} x(\tau) \, \mathrm{d}\tau \mathrm{u}(t-3) \\
&= (2t-t^2)\mathrm{u}(t) - [2t-t^2-1]\mathrm{u}(t-1) - [2(t-2)-(t-2)^2]\mathrm{u}(t-2) + [2(t-2)-(t-2)^2-1]\mathrm{u}(t-3)
\end{aligned}
$$

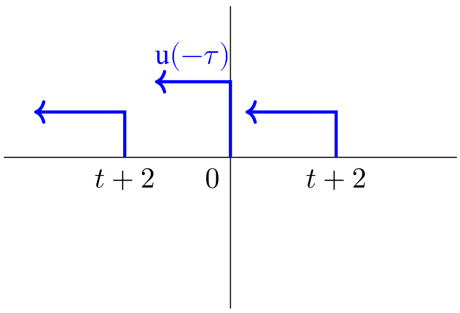
Ex

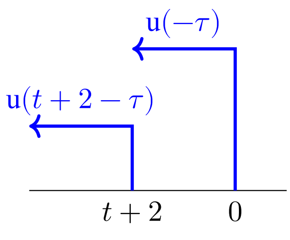
$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= e^t \mathrm{u}(-t) \\
f_2(t) &= \mathrm{u}(t+2) - u(t+1) \\
f &= f_1 * f_2
\end{aligned}
$$

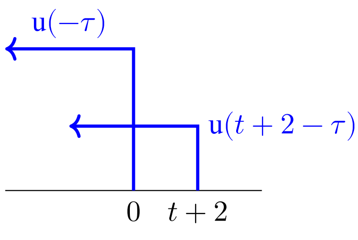
$$
\begin{aligned}
f &= \int_{-\infty}^{\infty} e^\tau \mathrm{u}(-\tau) \mathrm{u}\left(-(t-\tau)+2\right) \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^\tau \mathrm{u}(-\tau) \mathrm{u}(\tau - t + 2) \, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t-2}^{0} e^\tau \, \mathrm{d}\tau \mathrm{u}(t-2) \\
&= e^\tau \big|_{t-2}^{0} \, \mathrm{u}(2-t) \\
&= \left[1 - e^{t-2}\right] \mathrm{u}(2-t)
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau) \mathrm{u}(\tau - \xi) \mathrm{u}(\phi - \tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t,\tau) \, \mathrm{d}\tau \mathrm{u}(\phi - \xi)
$$

Ex.







$\overbrace{t+2<0}$ $\overbrace{t+2 \geq 0}$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{t}\mathrm{u}(-t)\\
y(t) &= \mathrm{u}(t+2)\\
z(t) = x(t)*y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}\left[(t-\tau)+2\right]\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\left[1-\mathrm{u}(t)\right]\mathrm{u}(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(\tau)u(t+2-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\cancelto{1}{\mathrm{u}\left(t+2-(-\infty)\right)} - \int_{0}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t+2)\\
&= e^{t+2} - \left[e^{t+2}-1\right]\mathrm{u}(t+2)
\end{aligned}
$$

Ex.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{t}\mathrm{u}(-t)\\
y(t) &= \mathrm{u}(t+2)-\mathrm{u}(t+1)\\
z(t) = x(t)*y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\left[\mathrm{u}(t-\tau+2)-\mathrm{u}(t-\tau+1)\right]\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(-\tau)\mathrm{u}(t-\tau+1)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\left[1-\mathrm{u}(\tau)\right]\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\left[1-\mathrm{u}(\tau)\right]\mathrm{u}(t-\tau+1)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau+2)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(t-\tau+1)\,\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mathrm{u}(\tau)\mathrm{u}(t-\tau+1)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau - \int_{0}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t+2) + \int_{0}^{t+1} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{u}(t+1)\\
&= \int_{t+1}^{t+2} e^{\tau}\,\mathrm{d}\tau - \left[e^{t+2}-1\right]\mathrm{u}(t+2) + \left[e^{t+1}-1\right]\mathrm{u}(t+1)
\end{aligned}
$$

$\exists h(t)$ ανν LTI

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t)*h(t)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

Έστω ότι η $x(t) = e^{j\omega t}$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\\
&= x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau}_{h(t)\xrightarrow{FT}H(\omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A_1e^{j\omega_1 t} + A_2e^{j\omega_2 t}\\
y(t) &= A_1e^{j\omega_1 t}H(\omega_1) + A_2e^{j\omega_2 t}H(\omega_2)
\end{aligned}
$$

Συναρτηστιακοί χώροι

Διανυσματικός χώρος S

$\bar{x}, \quad \bar{y} \quad S$

Εσωτερικό γινόμενο

$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \ \in \mathbb{C}$

1) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^*$

2) $c \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle c\bar{x}, \bar{y} \rangle$

3) $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$

4) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \ \geq 0$ με $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$ ανν $\bar{x} = \bar{0}$

Νόρμα

$\bar{x} \in S$

$||\bar{x}|| \geq 0$

1) $||\bar{x}|| = 0$ ανν $\bar{x} = \bar{0}$

2) $||a\bar{x}|| = |a| ||\bar{x}|| \quad x \in \mathbb{C}$

3) $||\bar{x} + \bar{y}|| \leq ||\bar{x}|| + ||\bar{y}||$

Μέτρο: Απόσταση μεταξύ $\bar{x}, \bar{y} \in S$

1) $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \qquad d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ ανν $\bar{x} = \bar{y}$

2) $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$

3) $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{y}, \bar{z}) \quad \bar{z} \in S$

Συναρτησιακός χώρος

$x(t), y(t) \in S = \{x(t) / x(t) : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}\}$

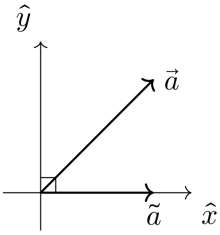
$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y(t) \, \mathrm{d}t$$

$$||x(t)|| = \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \, \mathrm{d}t \right]^{1/2}$$

$$d\left(x(t), y(t)\right) = \left[\int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - y(t)\right]^2 \mathrm{d}t \right]^{1/2}$$

Αν $\langle \phi_1(t), \phi_2(t) \rangle = 0 \quad \phi_1(t) \perp \phi_2(t)$
$\langle \phi_1(t), \phi_1(t) \rangle = 1 \quad \phi_1(t)$ κανονική

Τερατοχώρος

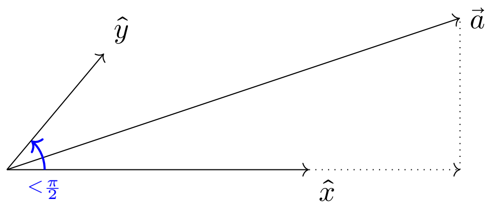


$\hat{x}, \hat{y}$ όχι εξαρτημένα (συνευθειακά)
Ποια είναι η καλύτερη προσέγγιση για το $\vec{a}$ εφ' όσον δεν υπάρχει το $\vec{y}$;
$\tilde{a}$ best γιατί $\mathrm{d}(\vec{a}, \tilde{a})$ min.
Άρα:

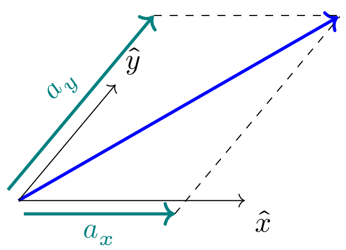
$$\tilde{a} = k\hat{x}$$
$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$
$$\vec{a} - \tilde{a} = (a_x - k)\hat{x} - a_y\hat{y}$$
$$d(\vec{a}, \tilde{a}) = \sqrt{(a_x - k)^2 + a_y^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(d(\vec{a}, \tilde{a})\right) = \frac{a_x - k}{\cdots} = 0 \implies k = a_x = \vec{a} \cdot \hat{x}$$
$$\boxed{\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x}$$

Η βέλτιστη έκφραση του $\vec{a}$ στο δισδιάστατο χώρο είναι το ίδιο το $\vec{a}$.

Μη κάθετα διανύσματα



$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$



$\hat{x}\ 6\perp\ \hat{y}$

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$
$$\vec{a} - \tilde{a} = (a_x - k)\hat{x} + a_y\hat{y}$$
$$\mathrm{d}(\vec{a}, \tilde{a}) = ||\vec{a} - \tilde{a}|| = \sqrt{(\vec{a} - \tilde{a})(\vec{a} - \tilde{a})} = \left(\left[(a_x - k)\hat{x} + a_y\hat{y}\right] \cdot \left[(a_x - k)\hat{x} + a_y\hat{y}\right]\right)^{1/2}$$
$$\left[(a_x - k)^2 + a_y^2 + 2(a_x - k)a_y\hat{x} \cdot \hat{y}\right]^{1/2}$$
$$\vec{a}_{\text{best}} = (\vec{a} \cdot \hat{x})\hat{x} \neq a_x$$
$$\boxed{\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x + a_y\cos\phi \neq a_x} \quad \leftarrow \text{Η βέλτιστη περιγραφή του } \vec{a} \text{ στον διδιάστατο στον άλλο χώρο}$$

Συναρτησιακός κόσμος $\quad \phi_n(t)$ παράγουν χώρο με το μηχανισμό:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(t) \quad t \in \Delta$$

$\phi_n(t)$ ανεξάρτητες μεταξύ τους (βάση απειροδιάστατου χώρου)

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=0}^{M} \underbrace{\hat{a}_n}_{\neq a_n\text{, επειδή η βάση δεν είναι ορθοκανονική}} \phi_n(t) \text{ βέλτιστη, ώστε η απόσταση με την } f \text{ να είναι ελάχιστη}$$

$$\begin{aligned}
\overbrace{I^2}^{\text{σφάλμα}} &= \int_\Delta \left[f(t) - \hat{f}(t)\right]^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_\Delta \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\phi_n(t) - \sum_{n=0}^{M} \hat{a}_n \phi(t)\right]^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_\Delta \left(\sum_{n=0}^{M} \hat{a}_n\phi_n(t)\right)^2 \mathrm{d}t - 2\int_\Delta \left[f(t)\sum_{n=0}^{M} \hat{a}_n\phi_n(t)\right] \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
I^2 = &\int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_\Delta \sum_{n=0}^{M} \left[\hat{a}_n\phi_n(t)\right]^2 \mathrm{d}t \\
&+ 2\int_\Delta \left[\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=n+1}^{M} \hat{a}_n \cdot \hat{a}_m \phi_n(t)\phi_m(t)\right] \mathrm{d}t \\
&- 2\int_\Delta \sum_{n=0}^{M} \hat{a}_n f(t)\phi_n(t)\,\mathrm{d}t \\
= &\int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n^2 \int_\Delta \phi_n^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\sum_{n=0}^{M}\sum_{n=m+1}^{M} \hat{a}_n\hat{a}_m \int_\Delta \phi_n(t)\phi_m(t)\,\mathrm{d}t - 2\sum_{n=0}^{M}\hat{a}_n \int_\Delta f(t)\phi_n(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}(I^2)}{\mathrm{d}\underbrace{\hat{a}_i}_{\text{από 0 έως } n}} = 2\hat{a}_i \int_\Delta \phi_i^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\sum_{m\neq i} \hat{a}_m \int_\Delta \phi_i(t)\phi_m(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_\Delta f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Σύστημα εξισώσεων Αν $\phi_i^{(t)}$ μοναδιαία, τότε: $\int_\Delta \phi_i^2(t)\,\mathrm{d}t = 1$

Αν $\phi_i(t)$ είναι ορθογώνια, τότε: $\int_\Delta \phi_i(t)\phi_j(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad i \neq j$

Αν $\{\phi_i(t)\}$ είναι ορθοκανονική βάση, τότε:

$$2\vec{a}_i - 2\int_\Delta f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies \vec{a}_i = \overbrace{\int_\Delta \underbrace{f(t)}_{\text{προβολή του διανύσματος στο μοναδιαίο}} \phi_i(t)\,\mathrm{d}t}^{\text{όπως το } k=\vec{a}\cdot\vec{x}} = a_i$$

Με άλλη γραφή:

$$2\vec{a_i}\left\langle \phi_i, \phi_i \right\rangle + 2\sum_{m+i} \vec{a_m}\left\langle \phi_i, \phi_m \right\rangle - 2\left\langle f, \phi_i \right\rangle = 0$$

Είναι:

$$\left\langle f, \phi_i \right\rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\phi_n, \phi_i \right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left\langle \phi_n m \phi_i \right\rangle = a_i \quad \text{όπως στα διανύσματα}$$

Ηθικό δίδαγμα: Αν η βάση του χώρου είναι ορθοκανονική και μας ζητηθεί να υπολογίσουμε μία προσέγγιση της συνάρτησης σε έναν υποχώρο, μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε την προβολή της συνάρτησης πάνω στη βάση.

Ex. $f(t) = e^{-3t}\mathrm{u}(t) \qquad \phi_1(t) = e^{-t}\mathrm{u}(t) \quad \& \quad \phi_2(t) = e^{-2t}\mathrm{u}(t)$

$$\overbrace{\hat{f}(t)}^{\text{βέλτιστη}} = a_1 e^{-t}\mathrm{u}(t) + a_2 e^{-2t}\mathrm{u}(t)$$

$$\int \left[a_1\phi_1 + a_2\phi_2 - f\right]\phi_1 \,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_0^\infty \left[a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t}\right] e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 \implies$$

$$a_1\int_0^\infty e^{-2t}\,\mathrm{d}t + a_2\int_0^\infty e^{-3t}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty e^{-4t}\,\mathrm{d}t = 0 \implies \boxed{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} - \frac{1}{4} = 0}$$

$$\int \left[a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t}\right] e^{-2t}\,\mathrm{d}t = 0 \implies \boxed{\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4} - \frac{1}{5} = 0}$$

$$a_1 = -{}^{3}/_{10}, \;\; a_2 = {}^{6}/_{5}$$

$$\boxed{E \triangleq \int_\Delta f^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \qquad \text{Parseval's Theorem}}$$

γενικότερη μορφή

Ανάλυση Fourier

Περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο T

$$x_k = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(k\omega t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ θεμελιώδης κυκλική συχνότητα}$$

$$\langle x_k(t), x_n(t)\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t)x_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-T/2}^{T/2}\cos(k\omega t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} n \neq k \to 0 \\ n = k \to 1 \end{cases}$$

$$y_k = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(k\omega t)\ \langle y_k, y_n\rangle = \begin{cases} n \neq k \to 0 \\ n = k \to 1 \end{cases}$$

Υποστηρίζω ότι κάθε περιοδική $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

Οραματίζομαι ότι αν η παραπάνω $f(t)$ είναι σήμα εισόδου σε ένα σύστημα, τα ημίτονα και συνημίτονα ως ιδιοσυναρτήσεις θα παραμείνουν αμετάβλητα, και θα τροποποιηθούν μόνο τα a_n, b_n.

$$z_k(t) = e^{jk\omega t}$$

$$\langle z_k, z_n\rangle = \begin{cases} k \neq n \to 0 \\ k = n \to T \end{cases}$$

$$z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}e^{jk\omega t}$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}} \text{ εκθετική σειρά}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right]} \text{ τριγωνομετρική σειρά A}$$

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega t + \phi_n)} \text{ τριγωνομετρική σειρά B}$$

Οι συντελεστές μπορούν να βρεθούν από τις προβολές της συνάρτησης πάνω στα ημίτονα και τα συνημίτονα:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Συνθήκες Dirichlet

1) $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$

2) Πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών εντός T

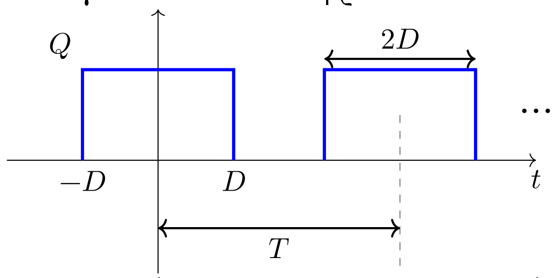
3) Πεπερασμένος αριθμός τοπικών ακροτάτων εντός T

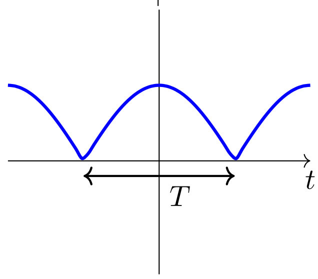
$f(t)$ περιοδική T

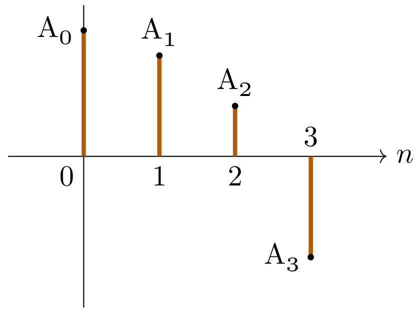
Μορφή	**Σειρά**	**Συντελεστές**	**Αλλαγές**
Εκθετική	$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega n t}$	$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$	$F_0 = {}^{a_0}/_2$ $F_n = {}^1/_2(a_n - jb_n)$
Τριγ. Α	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$	$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$	$a_n = (F_n + F_{-n})$ $b_n = j(F_n - F_{-n})$ $a_0 = 2F_0$
Τριγ. Β	$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n)$		$A_0 = {}^{a_0}/_2$ $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $= 2\lvert F_n\rvert$ $\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

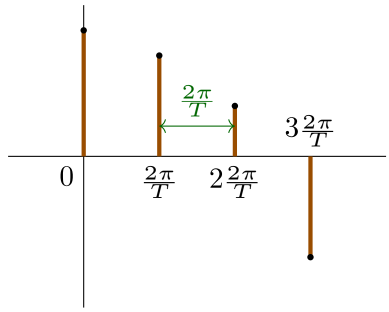
$$
\begin{aligned}
P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \\
&= F_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2
\end{aligned}
$$

Άσκηση για το σπίτι Να βρεθούν η εκθετική και η τριγωνομετρική σειρά των σημάτων:

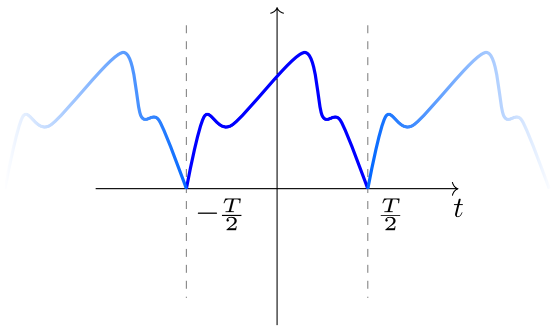








Μετασχηματισμός Fourier

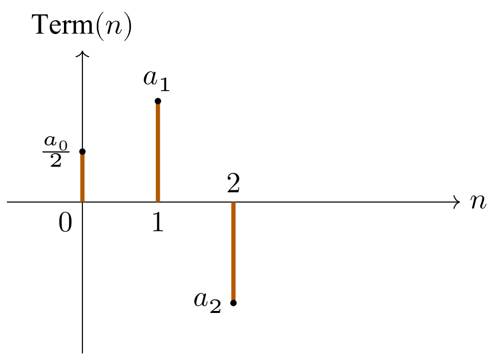


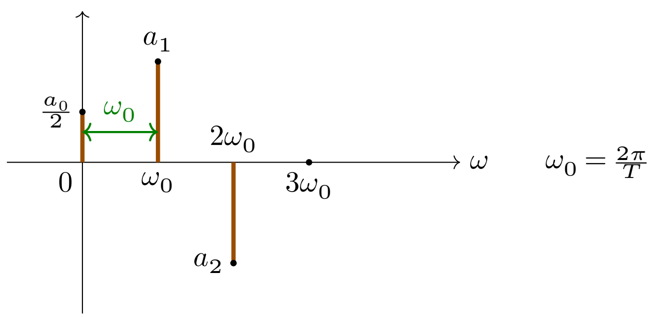
Φορέας συνάρτησης είναι το διάστημα του πεδίου ορισμού της στο οποίο η συνάρτηση δεν είναι 0 (από $\min x$ για το οποίο δεν είναι 0 ως το αντίστοιχο $\max x$).

$$\tilde{f}(t) = \sum k = -\infty^{\infty} f(t - kT)$$

$$\downarrow T\text{-περιοδική} \rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \begin{cases} \tilde{f}(t) & -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$





Μετασχηματισμός Fourier

$$F(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

Προσοχή

Όταν παίρνουμε τύπους από τυπολόγια, ελέγχουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, για διαφορές στη σύμβαση!

Αντίστοιχος ορισμός

$$F(\mathfrak{f}) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \mathfrak{f} t}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathfrak{f}) e^{j2\pi \mathfrak{f} t}\,\mathrm{d}f$$

(όπου $\mathfrak{f}$ η συχνότητα)

Η αρνητική συχνότητα δεν έχει καμία φυσική σημασία!

Ιδιότητες

- $F(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = \underbrace{F_R(\omega)}_{\mathrm{Re}\{F(\omega)\}} + j\underbrace{F_i(\omega)}_{\mathrm{Im}\{F(\omega)\}}$

  $A(\omega) = |F(\omega)|$

- $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{Re}\{F(\omega)\}} - j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{Im}\{F(\omega)\}}$

  Αν $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι άρτια
  $F(\omega)$ είναι πραγματική $\quad F(\omega) \equiv \mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\}$ και είναι άρτια

  Αν $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή
  $F(\omega)$ είναι φανταστική $\quad F(\omega) = j\,\mathrm{Im}\left\{F(\omega)\right\}$ και είναι περιττή

  Κάθε συνάρτηση είναι άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής. Έστω $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$. Τότε:

  $$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_o(t) + f_e(t)\right)\left(\cos\omega t - j\sin\omega t\right)\mathrm{d}t \\ &= \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f_o \cos\omega t\,\mathrm{d}t} + \int_{-\infty}^{\infty} f_e \cos\omega t\,\mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\,\mathrm{d}t - j\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} f_e \sin\omega t\,\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

  Αν η f είναι πραγματική:
  $\mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\}$ είναι άρτια
  $\mathrm{Im}\left\{F(\omega)\right\}$ είναι περιττή
  $A(\omega) = |F(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left\{F(\omega)\right\} + \mathrm{Im}^2\left\{F(\omega)\right\}}$ είναι άρτια
  $\Phi(\omega) = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{F(\omega)\}}{\mathrm{Re}\{F(\omega)\}}$ είναι περιττή.

  Αν η $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και άρτια:

  - $\mathrm{Im}\left\{F(\omega) = 0\right\}$
  - $\Phi(\omega) = 0$

  Αν η $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή:

  - $\mathrm{Re}\left\{F(\omega)\right\} = 0$

- Αν $f_1(t) \xrightarrow{\text{FT}} F_1(\omega)$ και $f_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} F_2(\omega)$
  $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ σταθερά:
  $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
  Γραμμικότητα του Fourier Transform

- Συμμετρική ιδιότητα (το διπλάσιο τυπολόγιο)

  Αν $f(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) \qquad F(t) \xrightarrow{\text{FT}} 2\pi f(-\omega)$

-

$$\begin{aligned} f(t) \to F(\omega) \quad &= A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} \\ f(t-\tau) \to e^{-j\omega\tau}F(\omega) \quad &= A(\omega)e^{j(\Phi(\omega)-\omega\tau)} \end{aligned}$$

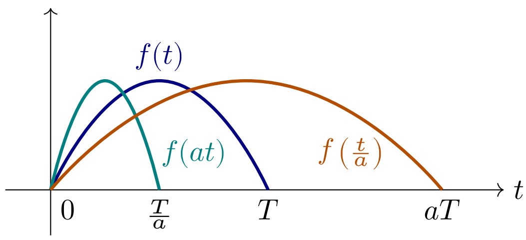
-

$$\begin{aligned} f(t) &\to F(\omega) \\ e^{j\omega_0 t}f(t) &\to F(\omega-\omega_0) \end{aligned}$$

$$\text{π.χ} \quad \cos(\omega_0 t)f(t) = \frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}f(t) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\right]$$

Κλιμάκωση στο χρόνο

$$\begin{aligned} &f(t) \to F(\omega) \\ &f(at) \to \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{γιατί; να αποδειχθεί στο σπίτι!} \end{aligned}$$



Τι συμβαίνει με τη συνέλιξη

$$\begin{aligned} &g(t) = x(t) * h(t) \\ &x(t) \to X(\omega) \\ &h(t) \to H(\omega) \\ &y(t) \to Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\cdot h(t) \\ y(t) \to Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}X(\omega)*H(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\xi)H(\omega-\xi)\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &\to F(\omega) \\ y(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} &\to j\omega F(\omega) \\ \frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} &\to (j\omega)^n F(\omega) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) e^{j\omega t} \, \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{j\omega t}] \, \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} \, \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &\to F(\omega) \\
t f(t) &\xrightarrow{\text{F.T}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\omega) \\
t^n f(t) &\xrightarrow{\text{F.T}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} F(\omega)
\end{aligned}
$$

Φανταστείτε ότι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\qquad f(t) \xrightarrow{F} (\omega)$

$$
f^*(t) \to F^*(-\omega)
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \, \mathrm{d}\omega \\
f^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} \, \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(-\omega) e^{j\omega t} \, \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Θεώρημα Parseval

Θεώρημα Parseval

$$
W = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) \, \mathrm{d}\omega
$$

όπου $F(\omega) = A(\omega) e^{j\Phi(\omega)}$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= f(t) f^*(t) = |f(t)|^2 \\
Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F^*(\omega) \\
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) F^*\left(-(\omega - \xi)\right) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Ορισμός

Πυκνότητα φασματικής ενέργειας: $\dfrac{A(\omega)}{2\pi}$

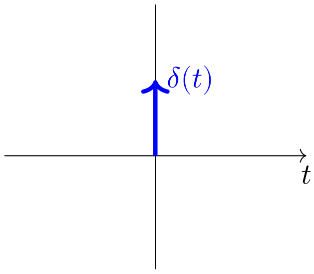
Μετασχηματισμός Fourier γενικευμένων συναρτήσεων

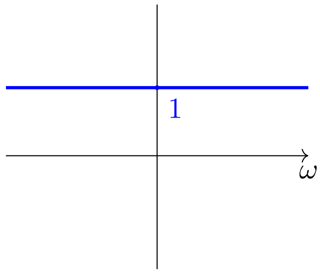
α) $\delta(t) \to 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = e^{-j\omega t}\big|_{t=0} = e^{0} = 1$$

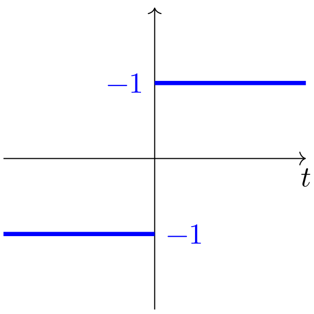
$\delta(t \mp t_0) \to e^{\pm j\omega t_0}$

$f(t) = 1 \to 2\pi\delta(\omega)$, άρα $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) \implies \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t\,\mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) \implies \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$





$\mathrm{sgn}(t) = \dfrac{|t|}{t}$

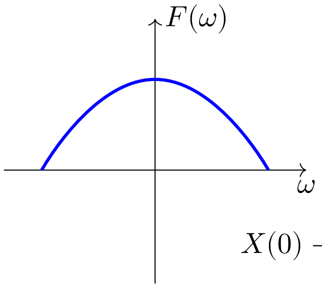


$$\mathrm{sgn}(t) = \lim_{u\to 0}\left[e^{-a|t|}\mathrm{sgn}(t)\right]$$

$$\begin{aligned}
\text{FT sgn}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\mathrm{sgn}t e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{0} e^{at-j\omega t}\,\mathrm{d}t + \lim_{a\to 0}\int_{0}^{\infty} e^{-at-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to 0}\left[-\frac{e^{(at-j\omega t)}}{a-j\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-at-j\omega t}}{-(a+j\omega)}\Bigg|_{0}^{\infty}\right] \\
&= \lim_{a\to 0}\left[\frac{-1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega}\right] \\
&= \frac{2}{j\omega} \in \mathbb{I}
\end{aligned}$$

$$u(t) \xrightarrow{\text{F.T.}}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



$X(0) \to$ εκφράζει το D.C

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}(t) &\xrightarrow{\text{F.T.}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
f(t) &\xrightarrow{\text{F.T.}} F(\omega) \\
g(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{u}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t) * \mathrm{u}(t) \\
G(\omega) &= F(\omega) \cdot \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(t) &\to 1 \quad \text{άρτια} \\
\delta^{(1)}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t) \to j\omega \\
\delta^{(n)}(t) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t) \to (j\omega)^n
\end{aligned}$$

$$t^n \to 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$$

Παρ.

$$\begin{aligned}
f(t) &= |t| = t\mathrm{u}(t) - t\mathrm{u}(-t) \\
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi j\delta(\omega) * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] - 2\pi j\delta(\omega) * \left[\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right]\right]
\end{aligned}$$

Calculate at home! The answer is $-\frac{2}{\omega^2}$

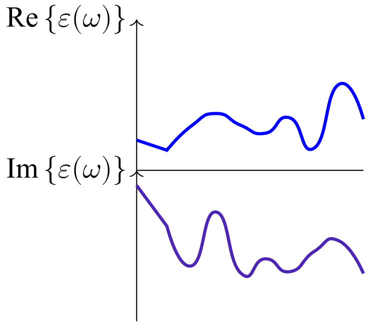
$$\begin{aligned}
t &\to 2\pi j^1 \delta^{(1)}(\omega) \\
\mathrm{u}(t) &\to \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
\mathrm{u}(-t) &\to \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}
\end{aligned}$$

Kramers - Kronig Relations

Από ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$\underbrace{\vec{D}}_{\text{πυκνότητα ροής}} = \overbrace{\widehat{\epsilon}}^{\text{διηλεκτρική σταθερά}} \underbrace{\vec{E}}_{\text{ένταση πεδίου}}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} =& \vec{E}(\vec{r}, t) \\ & \vec{E}(\vec{r}, \omega) \\ \vec{D}(\omega) =& \epsilon(\omega)\vec{E}(\omega) \\ \vec{D}(t) =& \epsilon(t) + \vec{E}(t)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}&h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \\ &h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\end{aligned}$$

Αν $H(\omega) = \mathscr{F}T\{h(t)\} = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$

$$\boxed{H_I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_R(\omega)}{\omega - \omega'}\, \mathrm{d}\omega'}$$

$$\boxed{H_R(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_I(\omega)}{\omega - \omega'}\, \mathrm{d}\omega'}$$

Η απόδειξη των σχέσεων θα πέσει στις εξετάσεις.

Άσκ.

$$\begin{aligned}f(t) &= 2\cos\omega_1 t \cos\omega_2 t = \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t \\ F(\omega) &= \mathscr{F}\{\cos(\omega_1 - \omega_2)t\} + \mathscr{F}\{\cos(\omega_1 + \omega_2)t\} \\ &= \pi\left[\delta\left(\omega - (\omega_1 - \omega_2)\right) + \delta\left(\omega + (\omega_1 - \omega_2)\right)\right] + \pi\left[\delta\left(\omega - (\omega_1 + \omega_2)\right) + \delta\left(\omega + (\omega_1 + \omega_2)\right)\right]\end{aligned}$$

$$\left(\cos\omega_0 t \xrightarrow{\text{FT}} \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]\right)$$

Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned}F(\omega) &= 2\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{\cos\omega_1 t\} * \mathscr{F}\{\cos\omega_2 t\} \\ &= \pi\left[\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)\right] * \left[\delta(\omega - \omega_2) + \delta(\omega + \omega_2)\right] \\ &= \pi\left[\delta(\omega - \omega_2 - \omega_1) + \delta(\omega - \omega_2 + \omega_1) + \delta(\omega + \omega_2 + \omega_1) + \delta(\omega + \omega_2 - \omega_1)\right]\end{aligned}$$

Άσκηση

$$
\begin{aligned}
f(t) &= g(t)\cos^2\omega_0 t \qquad g(t) \xrightarrow{\text{FT}} G(\omega) \\
&= g(t)\frac{1+\cos 2\omega_0 t}{2} = \frac{g(t)}{2} + \frac{1}{2}g(t)\cos 2\omega_0 t \\
\implies F(\omega) &= \frac{1}{2}G(\omega) + \frac{1}{2}G(\omega) * \mathcal{F}\left\{\cos 2\omega_0 t\right\} \\
&= \frac{1}{2}G(\omega) + \frac{1}{2}G(\omega) * \left[\pi\left(\delta(\omega-2\omega_0)+\delta(\omega+2\omega_0)\right)\right]\frac{1}{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}G(\omega) + \frac{1}{4}\left[G(\omega-2\omega_0)+G(\omega+2\omega_0)\right]
\end{aligned}
$$

Αν δεν θυμάμαι τον τύπο:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= g(t)\cos^2\omega_0 t = g(t)\cos\omega_0 t\cos\omega_0 t \\
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}G(\omega) * \left[\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\cos\omega_0 t\right\} * \mathcal{F}\left\{\cos\omega_0 t\right\}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi^2}G(\omega) * \left[\pi\left[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2)\right]\right] * \pi\left[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2)\right] \\
&= \frac{1}{4}G(\omega) * \left[\delta(\omega-2\omega_0)+\delta(\omega)+\delta(\omega)+\delta(\omega+2\omega_0)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[G(\omega-2\omega_1)+2G(\omega)+G(\omega+2\omega_0)\right]
\end{aligned}
$$

Άσκηση

$$
f(t) = g(at+b) \qquad g(t) \xrightarrow{\text{FT}} G(\omega)
$$

$$
h(t) = g(at) \qquad F(\omega) = \mathcal{F}\left\{g(at)+b\right\} = \mathcal{F}\left\{h\left(t+\frac{b}{a}\right)\right\} = H(\omega)e^{j\omega\frac{b}{a}}
$$

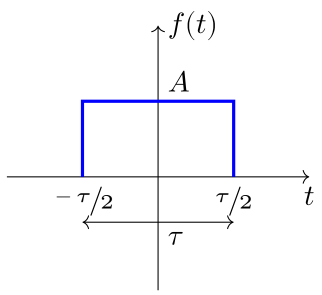
$$
H(\omega) = \frac{1}{|a|}G\left(\frac{\omega}{a}\right)
$$

$$
\boxed{F(\omega) = \frac{1}{|a|}e^{j\omega\frac{b}{a}}G\left(\frac{\omega}{a}\right)}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos t &\xrightarrow{\text{FT}} \pi\left[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right] \\
\sin\omega_0 t &= \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\
\sin t &\xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{|\omega_0|}e^{-j\omega\frac{\pi}{2\omega_0}}\pi\left[\delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}-1\right)+\delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}+1\right)\right]
\end{aligned}
$$

$\delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}-1\right)=\delta\left(\frac{1}{\omega_0}(\omega-\omega_0)\right)$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-j\frac{\omega}{\omega_0}}\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] \\
&= -j\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]
\end{aligned}
$$



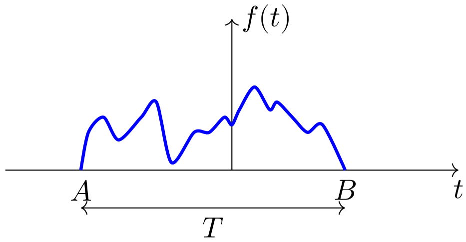
$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = A\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= A\frac{1}{-j\omega}\; e^{-j\omega t}\Big|_{\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{-j\omega}\left[e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}\right] \\
&= A\tau\frac{\sin\left(\omega\frac{t}{2}\right)}{\frac{\omega t}{2}} \\
&= A\tau\frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\frac{\omega t}{2}} = A\tau\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega t}{2\pi}\right)
\end{aligned}
$$

sinc

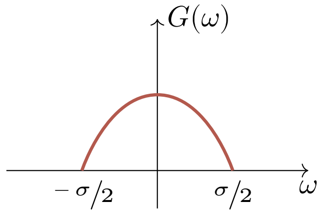
$$
\text{Μαθηματικοί:}\quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}
$$

$$
\text{Μηχανικοί:}\quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}
$$

Χρονοπερατό vs Ζωνοπερατό Σήμα

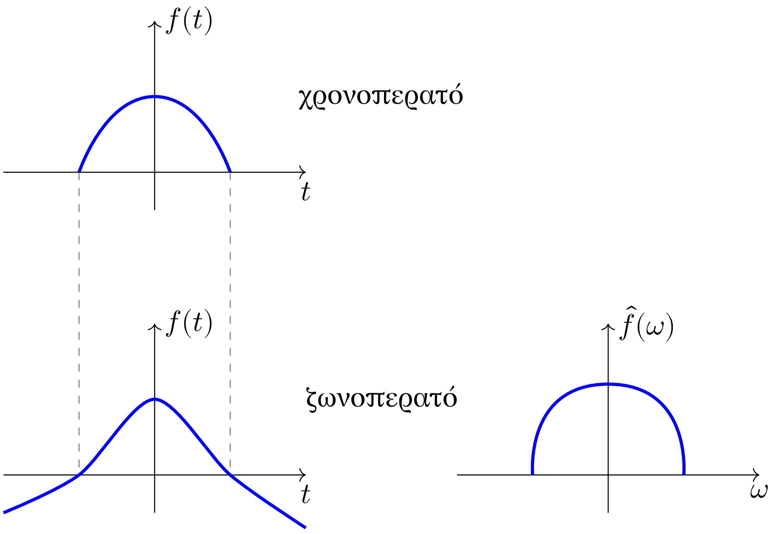


T-timelimited

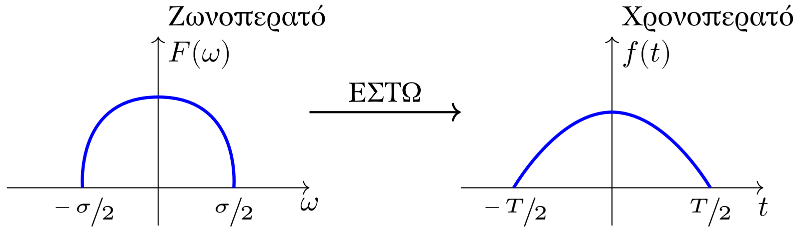


σ-bandlimited

- Ένα ζωνοπερατό σήμα **δεν** μπορεί να είναι χρονοπερατό
- Ένα χρονοπερατό σήμα **δεν** μπορεί να είναι ζωνοπερατό
- Ένα σήμα μπορεί να μην είναι ούτε χρονοπερατό, ούτε ζωνοπερατό.



Απόδ.

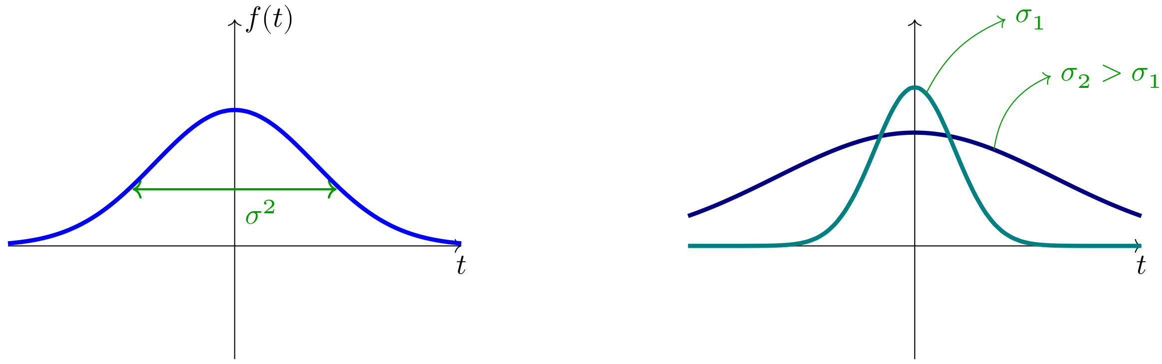


$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} F(\omega) e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} (j\omega)^n F(\omega) e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Ορίζεται η σειρά Taylor επομένως σε οποιοδήποτε σημείο, όμως τότε, επειδή σε κάποια σημεία οι παράγωγοι είναι 0, θα έπρεπε η F να είναι μηδενική, άτοπο.

Γκαουσιανός παλμός

$$
f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{t^2/(2\sigma^2)} \quad \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) = e^{\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} = e^{-\frac{1}{2\frac{1}{\sigma^2}}\omega^2}
$$



$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

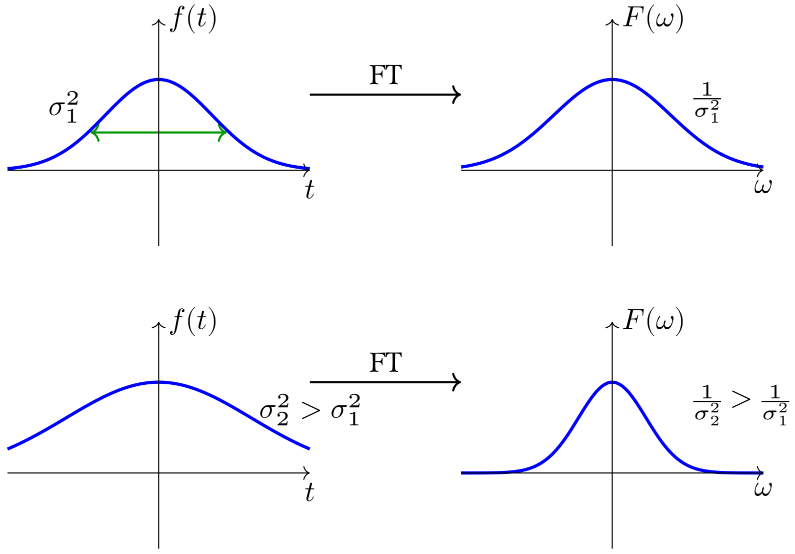
σ^2 διασπορά

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left[t^2 + 2\sigma^2 j\omega t + (j\omega\sigma^2)^2\right]} \cdot e^{\frac{1}{2\sigma^2}(j\omega\sigma^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\omega^2\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} \overbrace{(t + j\omega\sigma^2)}^{t + j\omega\sigma^2 - \tau}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} \boxed{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2}{\sigma^2}\tau^2}\,\mathrm{d}\tau} = e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}
\end{aligned}
$$

Ηθικά διδάγματα:

- Ο μετασχηματισμός της Gaussian είναι Gaussian

- Ό,τι στενεύει στον χρόνο απλώνει στο φάσμα, και αντίθετα



$$\int_{-\infty}^{\infty} t d^2(t)\,\mathrm{d}t$$

διασπορά στον χρόνο $\quad d^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t)\,\mathrm{d}t$

διασπορά στο φάσμα $\quad D^2 = \dfrac{1}{2\pi}\int \omega^2\,||\,\mathrm{d}\omega$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} t x(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t \overset{\text{Parseval theorem}}{=} d^2 D^2 \implies \boxed{dD \geq 1/2}$$

Γιατί $1/2$; (Υπόδειξη: $\int_{-\infty}^{\infty} tx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} t\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = [\quad] - \cancelto{1}{\frac{1}{2}\int x^2\,\mathrm{d}t}$)
Θα τα ξαναπούμε Τρίτη 22 Νοεμβρίου (χάνουμε 3 μαθήματα).

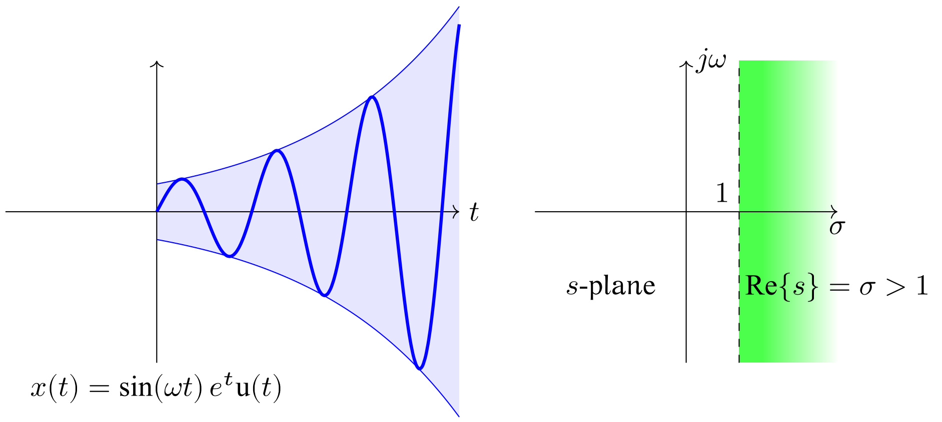
Μετασχηματισμός Laplace

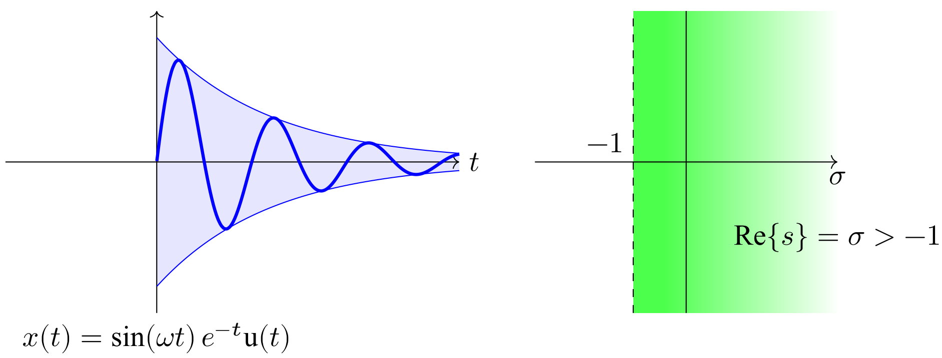
$$
\begin{aligned}
\nexists\, X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
y(t) &= x(t)e^{-\sigma t} \\
\exists\, Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \quad (s = \sigma + j\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t} \quad \text{M. Laplace}
$$

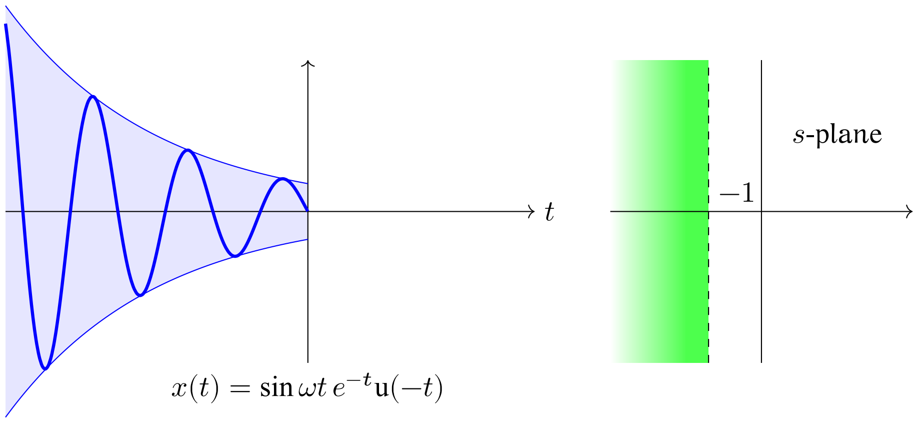
Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace $x(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma - j\underset{(-\infty)}{\omega}}^{\sigma + j\overset{(\infty)}{\omega}} X(s)e^{st}\,\mathrm{d}s$

- Έστω ότι $x(t)$ είναι αιτιατή ($x(t) = 0 \quad t < 0$).
  Ας φανταστούμε ότι η $x(t)$ δεν έχει μετασχηματισμό Fourier.



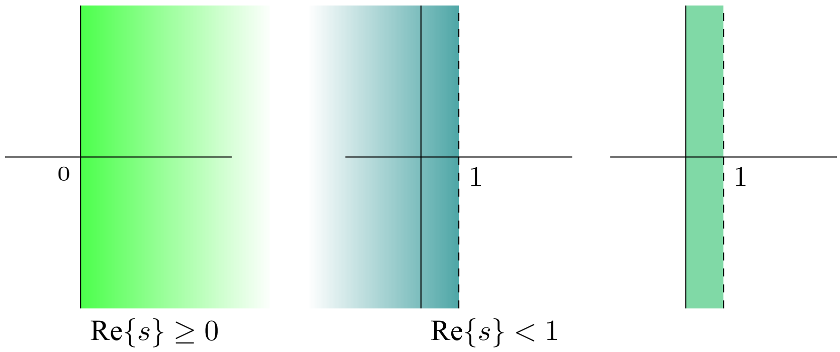


- Έστω ότι $x(t)$ αντιαιτιατή ($x(t) = 0 \quad t > 0$)



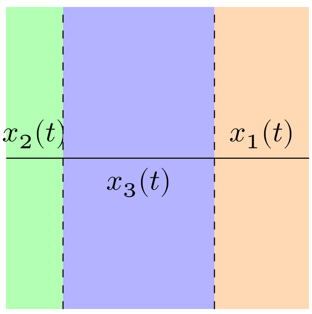
$x(t) = \sin \omega t \, e^{-t} \mathrm{u}(-t)$

- $\sin \omega t \, \mathrm{u}(t) + \sin \omega t \, e^{t} \mathrm{u}(-t)$



- Η $\sin \omega \mathrm{u}(t) + \sin \omega t e^{-t} \mathrm{u}(-t)$ δεν έχει περιοχή σύγκλισης.

$$X(s) = \frac{35}{(x-8)(x+2)}$$



Οι πόλοι (ρίζες του παρονομαστή) καθορίζουν τις περιοχές σύγκλισης.

Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε είναι αιτιατές, άρα γενικά ο μετασχηματισμός Laplace καταρρέει στην:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t$$

Το 0^- μάς επιτρέπει να ασχοληθούμε με συναρτήσεις που απειρίζονται στο 0, π.χ. $\frac{1}{x}$ or $\delta(t)$.

Ιδιότητες

$$\begin{array}{ll} x(t) \to X(s) & \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_1 \\ y(t) \to Y(s) & \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_2 \end{array}$$

1) $ax(t)+by(t) \rightarrow aX(s)+bY(s)$ τουλάχιστον $\mathrm{Re}\{s\} > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$

2) Μετατόπιση σε χρόνο

$$x(t)\mathrm{u}(t) \rightarrow X(s) \quad \sigma > \sigma_1$$
$$y(t) = x(t-t_0)\mathrm{u}(t-t_0) \rightarrow X(s)e^{-t_0 s} \quad t_0 > 0 \quad \sigma > \sigma_2$$

Απόδ.

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} x(\underbrace{t-t_0}_{\tau})\mathrm{u}(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t = x(\tau)\mathrm{u}(\tau)e^{-s(t+t_0)}\,\mathrm{d}\tau = X(s)e^{-st_0}$$

3) Κλιμάκωση

$$x(t) \rightarrow X(s)$$
$$x(at) \rightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$$

4) Παραγώγιση

$$x(t) \rightarrow X(s)$$
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow sX(s) - x\left(0^-\right)$$

5) Ολοκλήρωση

$$x(t) \rightarrow X(s)$$
$$\int_0^t x(t)\,\mathrm{d}t \rightarrow \frac{1}{s}X(s)$$

6) Διαμόρφωση

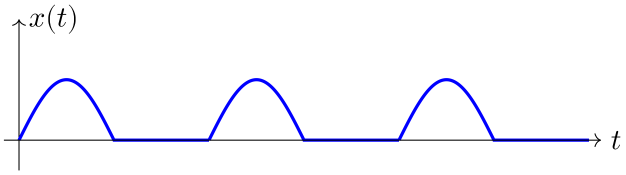
$$x(t) \rightarrow X(s) \quad \sigma > \sigma_1$$
$$e^{-at}x(t) \rightarrow X(s+a) \quad a \in \mathbb{C} \quad \sigma > \sigma_1 - \mathrm{Re}\{a\}$$

7) Συνέλιξη

$$x(t) \rightarrow X(s)$$
$$y(t) \rightarrow Y(s)$$
$$x(t) * y(t) = X(s)Y(s)$$

Laplace "περιοδικών συναρτήσεων"

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \le x \le T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_T(t) + x_T(t-T) + x_T(t-2T) + ... \\
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_T(t-nT) \\
\mathcal{L}\left\{x(t)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\left\{x_T(t-uT)\right\} \\
x_T(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} X^T(s) \\
x_T(t-nT) &\xrightarrow{\mathcal{L}} X^T(s)e^{-nTs} \\
\mathcal{L}\left\{x(t)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} X^T(s)e^{-nTs} = X^T(s)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}X^T(s) \quad \sigma > \max(0, \sigma_1)
\end{aligned}
$$

$X(s) \xrightarrow{?} X(\omega)$

$$X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega}$$

Ex. 1 $x(t) = e^{-at}\mathrm{u}t()$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(a+s)t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)}\right|_0^{\infty} \\
&= \frac{\cancelto{0}{e^{-(a+s)\infty}} - \cancelto{1}{e^{-(a+s)0}}}{-(a+s)} = \boxed{\frac{1}{s+a} \quad \mathrm{Re}\left\{s\right\} > \mathrm{Re}\left\{a\right\}}
\end{aligned}
$$

Ex. 2 $x(t) = \delta(t)$

$$X(t) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = e^{-s0} = 1 \quad s \in \mathbb{C}$$

Ex. 3 $x(t) = \mathrm{u}(t) \qquad X(s) = \frac{1}{s} \quad \mathrm{Re}\left\{s\right\} > 0$

Για να βρω πεδίο σύγκλισης: $X(s) = \displaystyle\int_{0^+}^{\infty} 1e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{0^-}^{\infty} = \frac{e^{-s\infty} - \cancelto{1}{e^{-s0}}}{-s} = \frac{1}{s}$

Ex. 4 $x(t) = \cos\omega_0 t\,\mathrm{u}(t)$

$$x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\mathrm{u}(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\mathrm{u}(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\mathrm{u}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\mathrm{T}} \frac{1}{2}\underset{\sigma>0}{\frac{1}{s-j\omega_0}} + \frac{1}{2}\underset{\sigma>0}{\frac{1}{s+j\omega_0}} = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2+\omega_0^2} =$$

$$\frac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad \mathrm{Re}\left\{s\right\} > 0$$

Ex. 5 $x(t) = \sin\omega_0 t\,\mathrm{u}(t)$

$$\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 t}\mathrm{u}(t) - e^{-j\omega_0 t}\mathrm{u}(t)\right] \xrightarrow{\mathcal{L}\mathrm{T}} \frac{1}{2j}\underset{\mathrm{Re}\{s\}>0}{\left[\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0}\right]} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}\left\{s\right\} > 0$$

Ποιός είναι ο μετασχηματισμός Fourier της παραπάνω;

Το πιθανό λάθος αποτέλεσμα είναι το $\left(\xrightarrow[s=j\omega]{FT} \dfrac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$

$x(t) = \sin\omega_0 t\,\mathrm{u}(t)$

$$
\begin{aligned}
\sin\omega_0 t &\xrightarrow{\text{FT}} j\pi\left[-\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] \\
\mathrm{u}(t) &\xrightarrow{\text{FT}} \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &\to \left[j\pi\left(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right)\right] * \left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[j\pi^2\left(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right)+j\pi\left(\frac{1}{j(\omega+\omega_0)}-\frac{1}{j(\omega+\omega_0)}\right)\right] \\
&= \frac{j\pi}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]+\left[\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\right]
\end{aligned}
$$

Θεωρήματα Αρχικής & Τελικής Τιμής

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} x(t) &= \lim_{s\to\infty}\left(sX(s)\right) \\
\lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{s\to 0}\left(sX(s)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-t)^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}T} \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n} \\
&f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}T} F(s)
\end{aligned}
$$

Για να βρίσκουμε αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace χωρίς μιγαδική ολοκλήρωση χρειαζόμαστε ένα ισχυρό τυπολόγιο.

Τυπολόγιο

$X(s)$	$x(t)$
$\frac{1}{s}$	$\mathrm{u}(t)$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}\mathrm{u}(t)$
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\mathrm{u}(t)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{u}(t)$
$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\sin(\beta t)\mathrm{u}(t)$
$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos(\beta t)\mathrm{u}(t)$
$\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}$	$e^{-at}\sin(\beta t)\mathrm{u}(t)$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}$	$e^{-at}\cos(\beta t)\mathrm{u}(t)$

$$
\begin{aligned}
&X(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{N(s)}{D(s)}\overset{\text{π.χ}}{=}\frac{N(s)}{(s+a)D_1(s)}=\frac{A}{s+a}+\frac{N_1(s)}{D_1(s)} \\
&x(t)=Ae^{-at}\mathrm{u}(t)-\mathcal{L}T\left\{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{N(s)}{(s+a)^{\kappa} D_1(s)} \\
&= \frac{A_1}{(s+a)} + \frac{A_2}{(s+a)^2} + \cdots + \frac{A_{\kappa}}{(s+a)^{\kappa}} + \frac{N_1(s)}{D_1(s)}
\end{aligned}
$$

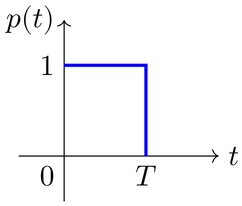
$$
\boxed{\frac{A_i}{(s+a)^i} \xrightarrow{I\mathcal{L}T} A_i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} e^{-at} \mathrm{u}(t)}
$$

$$
X(s) = \frac{N(s)}{\left[(s+a)^2 + \omega_0^2\right] D_1(s)} = \frac{As + B}{(s+a)^2 + \omega_0^2 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)}}
$$

$s_1 = -a - j\omega_0$ ένας πόλος

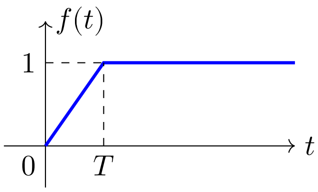
$s_2 = -a + j\omega_0$

Ex. 1



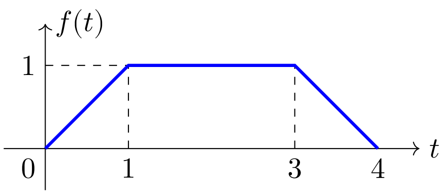
$$
\begin{aligned}
p(t) &= \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-T) \\
\mathcal{L}\left\{p(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\mathrm{u}(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{\mathrm{u}(t-T)\right\} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}
\end{aligned}
$$

Ex. 2



$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{t}{T} \mathrm{u}(t) - \frac{t-T}{T} \mathrm{u}(t-T) \\
F(s) &= \frac{1}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{T} \frac{1}{s^2} e^{-sT} \\
&= \frac{1}{Ts^2} \left[1 - e^{-sT}\right], \quad s > 0
\end{aligned}
$$

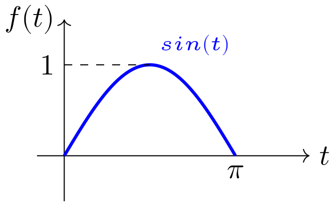
Ex. 3



$$f(t) = t\mathrm{u}(t) - (t-1)\mathrm{u}(t-1) - (t-3)\mathrm{u}(t-3) + (t-4)\mathrm{u}(t-4)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}\left[1 - e^{-s} - e^{-3s} + e^{-4s}\right]$$

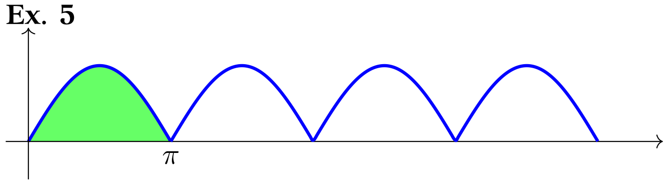
Ex. 4



$$f(t) = \sin(t)\mathrm{u}(t) + \sin(t-\pi)\mathrm{u}(t-\pi)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

Ex. 5



$$f(t) = |\sin t|\mathrm{u}(t)$$

$$F(s) = \frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}$$

Ex. 6

$$F(s) = \underbrace{\frac{s^2-6}{s^3+4s^2+3s}}_{\text{αιτιατής συνάρτησης}} = \frac{s^2-6}{s(s^2+4s+3)} = \frac{s^2-6}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{\mathit{\Gamma}}{s+3}$$

$$= \frac{-2}{s} + \frac{5/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3}$$

$$f(t) = \left[-2 + \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right]\mathrm{u}(t)$$

Ex. 7

$$F(s) = \frac{5s^3-6s-3}{s^3(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\mathit{\Gamma}}{s^3} + \frac{\mathit{\Delta}}{(s+1)} + \frac{E}{(s+1)^2}$$

$$F(s) = \frac{-3}{s} - \frac{3}{s^3} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

$$f(t) = \left[-3 - \frac{3}{2}t^2 - 3e^{-t} + 2te^{-t}\right]\mathrm{u}(t)$$

Ex. 8

$$F(s) = \frac{16}{s(s^2+4)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B_1 s + C_1}{s^2+4} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2+4)^2}$$

$$16 = A(s^2+4)^2 + (B_1 s + C_1)s(s^2+4) + (B_2 s + C_2)s$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} - \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$f(t) = [1 - \cos 2t - t\sin 2t]\,\mathrm{u}(t)$$

Ex. 9

$$f''' + 6f'' + 11f' + 6f = 1 \qquad t \geq 0 \qquad \underbrace{f = f' = f''}_{@0^-} = 0$$

$$\mathcal{LT}\{\quad\}$$

$$s^3F - \cancel{s^2 f_0 - sf'_0 - f''_0} + 6\left[s^2F - \cancel{sf_0 - f_0}\right] + 11\left[sF - \cancel{f_0}\right] + 6F = \frac{1}{s}$$

$$F(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = \frac{1}{s} \implies F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$F(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{-1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/6}{s+3}$$

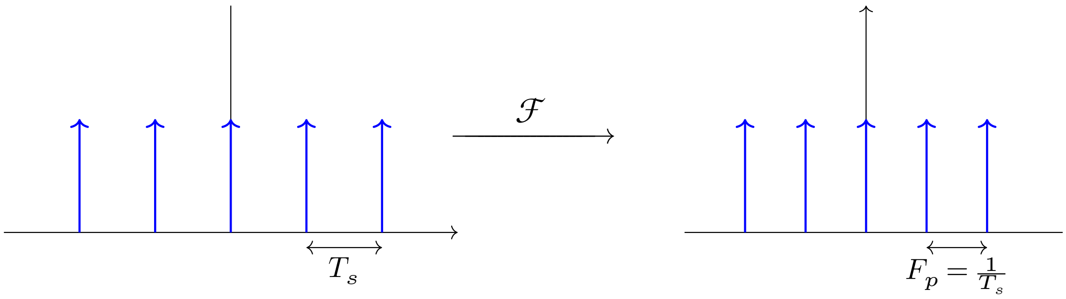
$$f(t) = \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}\right]\mathrm{u}(t)$$

Η μόνιμη κατάσταση που συντηρείται από το 1 στην διαφορική εξίσωση είναι το $\frac{1}{6}$

Θεώρημα Δειγματοληψίας

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$
$$x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f) * X_2(f)$$
$$X_1(f)X_2(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x_1(t) * x_2(t)$$
$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{t}$$

Συνάρτηση δειγματοληψίας: $S_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF_p) \qquad F_p = \frac{1}{T_s}$

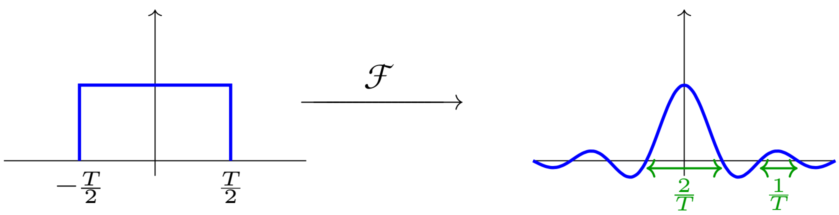


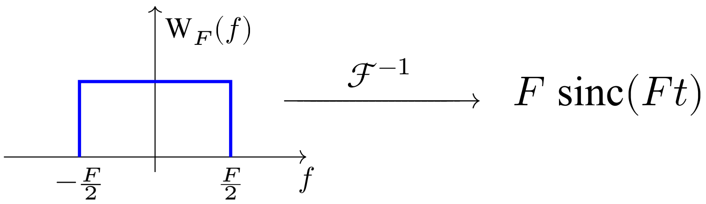
$$S_{F_s}(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} T_p S_{T_p}(t) \qquad T_p = \frac{1}{F_s}$$
$$S_{\Xi_s}(\xi)$$

Αν κάπου δειγματοληπτώ, στον άλλο χώρο είναι περιοδικότητα

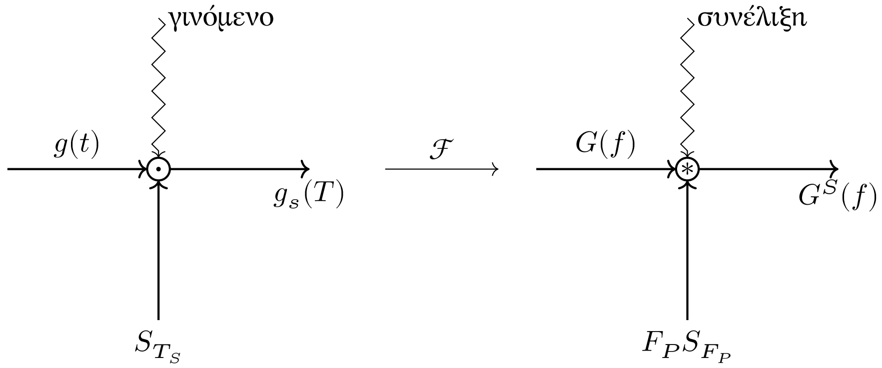
Συνάρτηση ορθογωνικού παραθύρου μήκους T στον κόσμο t

$$W_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$





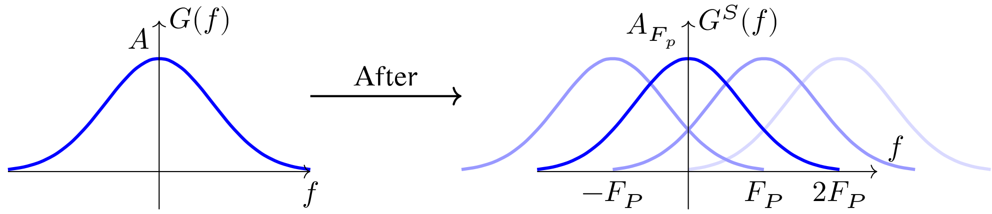
Δειγματοληψία

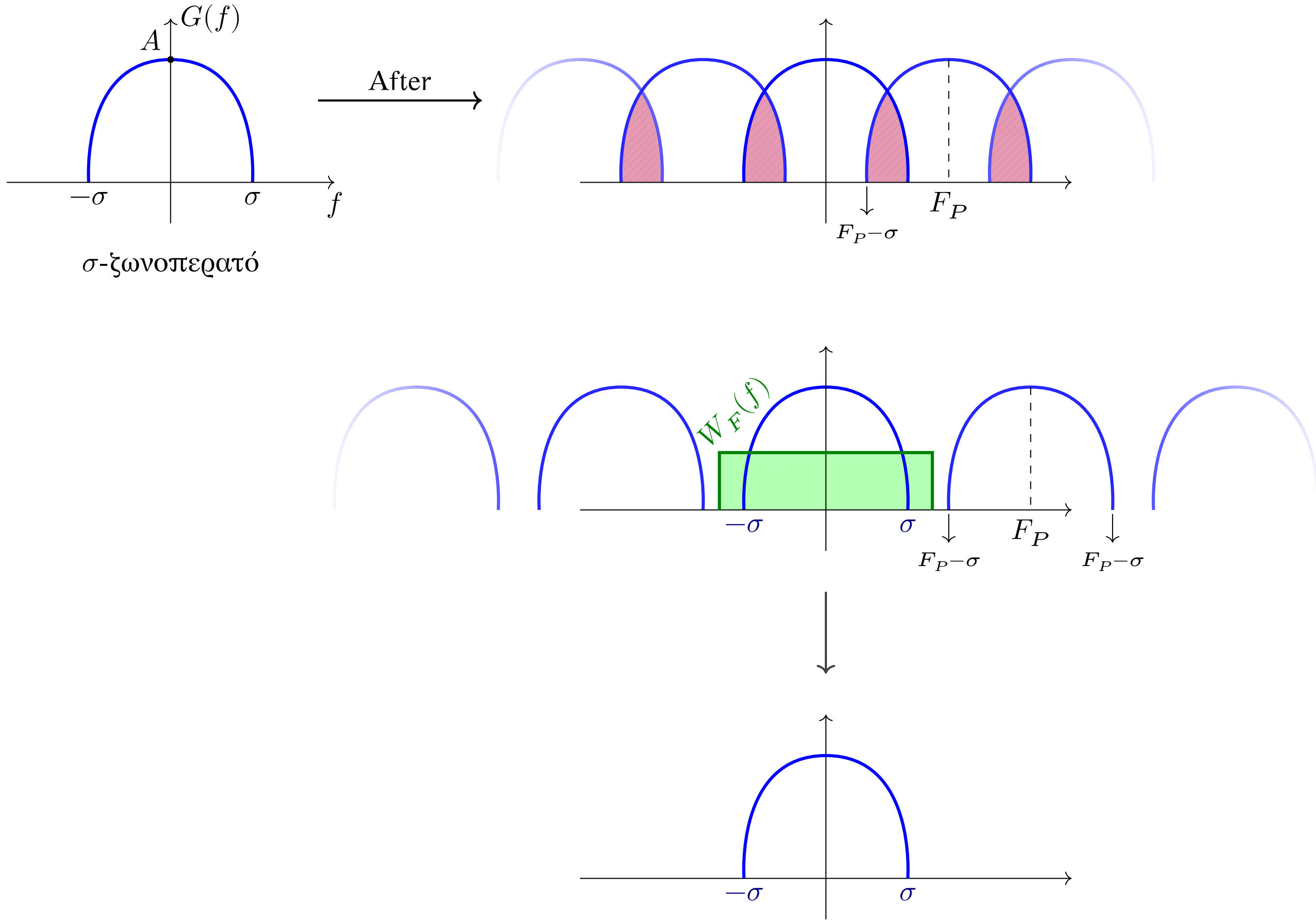


Δειγματοληψία

$$
\begin{aligned}
G^S(f) &= G(f) * F_p S_{F_p}(f) \\
&= F_p G(f) * \left(\sum_n \delta(f - nF_p) \right) \\
&= F_p \sum_n G(f - nF_P)
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε τις επικαλύψεις μεταξύ των διαδοχικών φασμάτων (aliasing). Για να περιοριστεί αυτό μπορούμε να αυξήσουμε το F_p ($\Longrightarrow$ να αυξήσουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας)

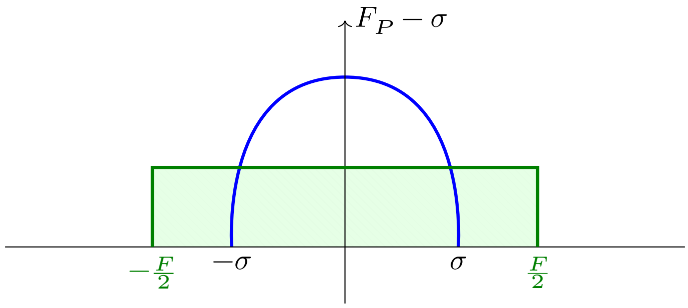




Για να μην έχουμε aliasing πρέπει:

$$F_p - \sigma > \sigma \implies F_p > 2\sigma$$

Nyquist's Criterion: $\boxed{\underbrace{F_p}_{\text{συχνότητα δειγματοληψίας}} > 2\overbrace{\sigma}^{\text{max frequency}}}$



$W_F(f) : \sigma < F/2 < F_p - \sigma$

$\underbrace{F_p = W_F(f) \cdot G^S(f)}_{\downarrow FT} F_p g(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{W_F(f)\right\} * \mathcal{F}^{-1}\left\{G^S(f)\right\}$

$$F_p g(t) = F\,\mathrm{sinc}(Ft) * \left(\underbrace{g(t)\cdot S_{T_s}(t)}_{g_s(t)} \right)$$

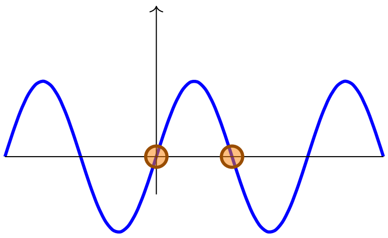
$$\begin{aligned}
&= F\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\sum_n \delta(t'-nT_s)\,\mathrm{sinc}\left(F(t-t')\right)\mathrm{d}t' \\
&= F\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t'-nT_s)\,\mathrm{sinc}\left(F(t-t')\right)\mathrm{d}t' \\
&= \frac{F}{F_p}\sum_n g(nT_s)\,\mathrm{sinc}\left(F\cdot(t-nT_s)\right)
\end{aligned}$$

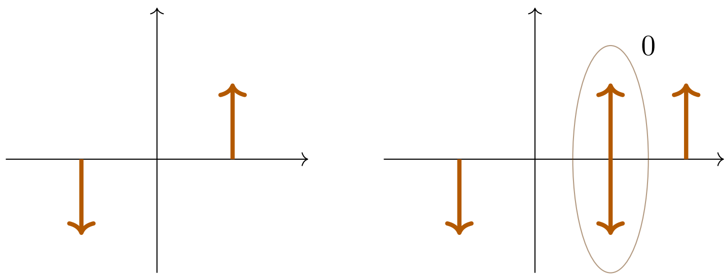
$$g(kT_s) = \frac{F}{F_P}\sum_n g(nT_s)\,\mathrm{sinc}\left(F(kT_s-nT_s)\right)$$

$$F=F_p \qquad g(kT_s) = \sum_n g(nT_s)\,\mathrm{sinc}(k-n)$$

Γενικά, αν $F=F_p$:

$$g(t) = \sum_n g(nT_s)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{T_s}(t-nT_s)\right)$$



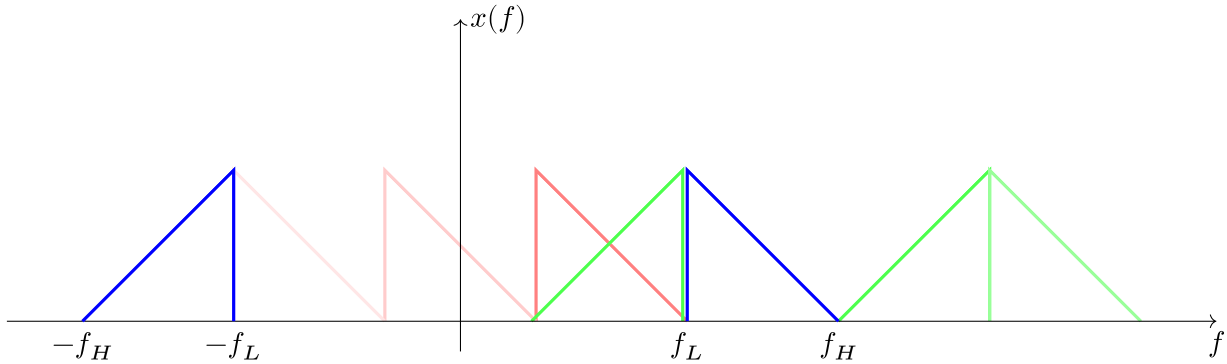


Άσκηση για το σπίτι

$$\phi_n^{F,T_s}(t) = \mathrm{sinc}\left(F(t-nF_p)\right)$$

Να βρεθεί το $\langle \phi_n(t), \phi_k(t) \rangle$.

Υποδειγματοληψία (undersampling)



Για να μην πέφτουν τα "πλακάκια" το ένα πάνω στο άλλο:

$$\left.\begin{array}{l}\kappa f_s - f_L < f_L \\ (\kappa+1) f_s - f_H > f_H\end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} f_s < \frac{2 f_L}{\kappa} \\ f_s > \frac{2 f_H}{\kappa+1}\end{array}$$

$$\frac{2 f_H}{\kappa+1} < f_s < \frac{2 f_L}{\kappa}$$

Ψάχνω το μέγιστο κ, έτσι ώστε να βρω το ελάχιστο f_s

$$\frac{2 f_H}{\kappa+1} < \frac{2 f_L}{\kappa}$$

$$k \leq \frac{f_L}{f_H - f_L}$$

$$\underset{\text{min}}{f_s} \leftarrow \kappa_{\text{best}} = \left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor$$

Θα ψάξω το ελάχιστο f_s:

$$\frac{2 f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor + 1} < f_s < \frac{2 f_L}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor}$$

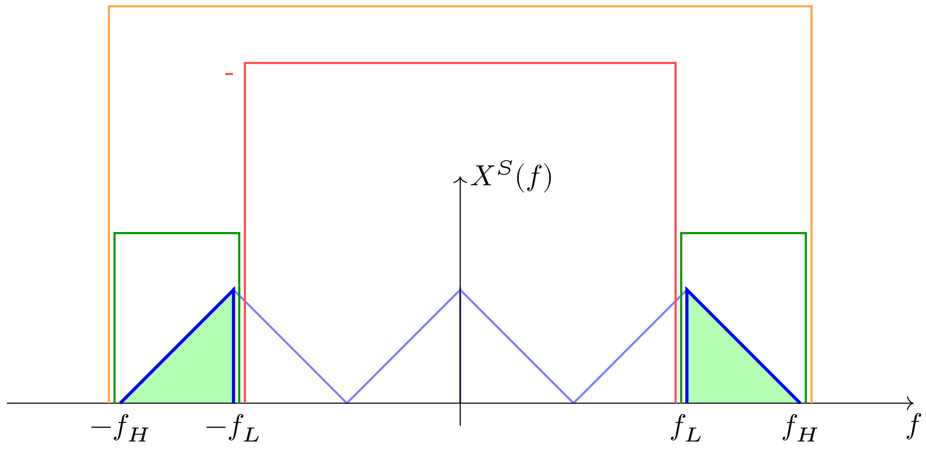
$$\frac{2 f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} + 1 \right\rfloor} < f_s < \frac{2 f_L}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} + 1 \right\rfloor}$$

$$\frac{2 f_H}{\left\lfloor \frac{f_H}{f_H - f_L} \right\rfloor} < f_s$$

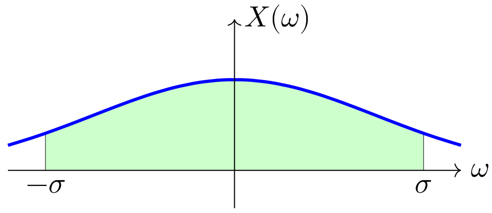
$$\frac{2 f_H}{\left\lfloor \frac{f_H}{f_H - f_L} \right\rfloor} = \frac{2 f_H}{\frac{f_H}{f_H - f_L} \underset{0<\epsilon<1}{-\epsilon}} = \frac{2 f_H}{\frac{f_H - \epsilon f_H + \epsilon f_L}{f_H - f_L}} = \frac{2 f_H (f_H - f_L)}{f_H (1-\epsilon) + \epsilon f_L} = \frac{2 (f_H - f_L)}{(1-\epsilon) + \epsilon \frac{f_L}{f_H}}$$

$$= \frac{2 (f_H - f_L)}{1 - \epsilon \left(1 - \frac{f_L}{f_H}\right)} > 2 (f_H - f_L) \quad \text{αλλά όχι πολύ κοντά εκεί!}$$

$$2 (f_H - f_L) < \boxed{\frac{2 f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor + 1} < f_s}$$



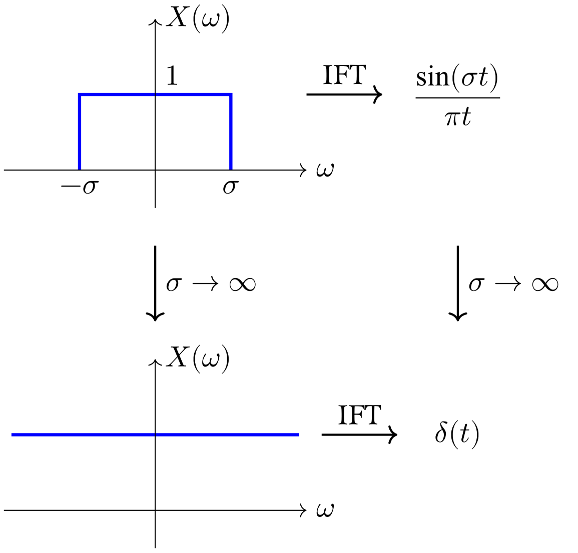
Gibbs' Phenomenon



$$
\begin{aligned}
& x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega) \\
x_\sigma(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} X(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau} e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-j\omega\tau+j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{j(t-\tau)}e^{j\omega(t-\tau)}\Big|_{-\sigma}^{\sigma} \\
&= \frac{1}{j(t-\tau)}\left[e^{j\sigma(t-\tau)} - e^{-j\sigma(t-\tau)}\right] \\
&= \frac{2}{t-\tau}\sin\left(\sigma(t-\tau)\right)
\end{aligned}
$$

δηλαδή

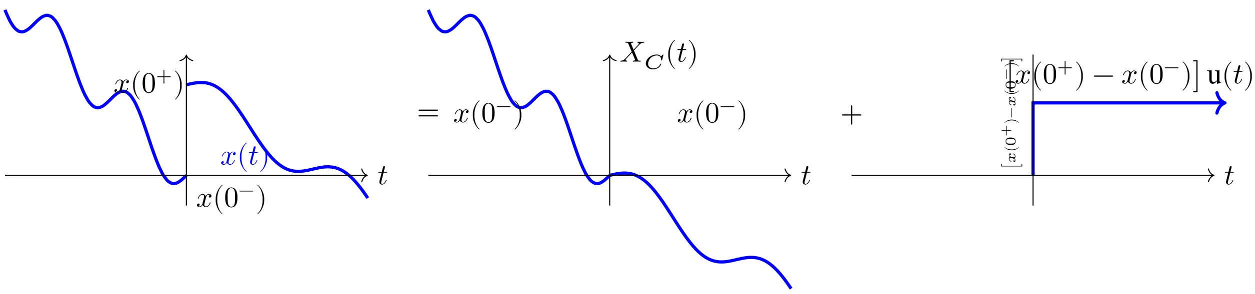
$$
X_\sigma(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{\sin\left(\sigma(t-\tau)\right)}{\pi(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau
$$



$$\lim_{\sigma\to\infty} x_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \lim_{\sigma\to\infty} \frac{\sin\left(\sigma(t-\tau)\right)}{\pi(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} x_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} x_\sigma(t) = x(t)$$



$$x(t) = x_c(t) + \left[x(0^+) - x(0^-)\right]\mathrm{u}(t)$$

$$x_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)\frac{\sin\left(\sigma(t-\tau)\right)}{\pi(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau - \frac{\left[x(0^+) - x(0^-)\right]}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\sigma(t-\tau)\right)}{(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\sigma(t-\tau)\right)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\text{Θέτουμε} \quad \begin{aligned} &\sigma(t-\tau) = x \\ &\mathrm{d}\tau = -\tfrac{1}{\sigma}\,\mathrm{d}x \\ &t-\tau = \tfrac{x}{\sigma} \end{aligned}$$

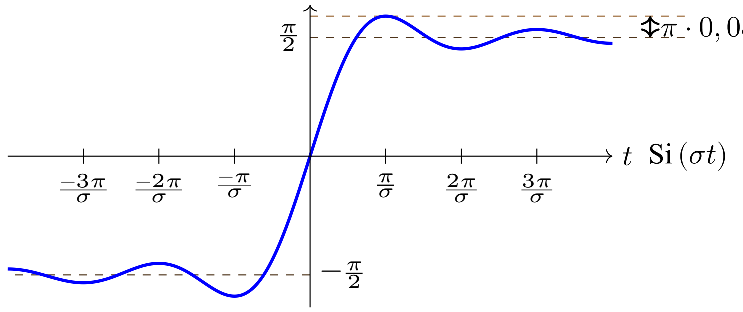
$$= \int_{\sigma t}^{\infty} \frac{\sin x}{\frac{x}{\sigma}}\left(\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sigma t} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\sigma t} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\mathrm{Si}(\sigma t)}_{\text{Sine Integral}}$$

Άρα

$$x_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(\tau)\frac{\sin\left(\sigma(t-\tau)\right)}{\pi(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau + \frac{\left[x(0^+) - x(0^-)\right]}{2} + \frac{\left[x(0^+) - x(0^-)\right]}{\pi}\cdot \mathrm{Si}\,(\sigma t)$$

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

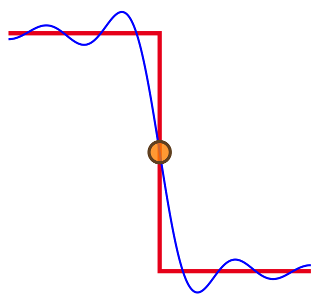


Χρησιμοποιώντας τον Leibniz Rule (παραγωγίζοντας το ολοκλήρωμα) μπορούμε να αποδείξουμε την θέση των μεγίστων της Si.

$$x_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)\frac{\sin\left[\sigma(t-\tau)\right]}{\pi(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau + \frac{x(0^+)-x(0^-)}{2} + \frac{\left[x(0^+)-x(0^-)\right]}{\pi}\text{Si}(\sigma t)$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} x_\sigma(t) = x_c(t) + \frac{x(0^+)-x(0^-)}{2} + \frac{\left[x(0^+)-x(0^-)\right]}{\pi}\lim_{\sigma\to\infty}\text{Si}(\sigma t)$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} x_\sigma(0) = x(0^-) + \frac{x(0^+)-x(0^-)}{2} = \frac{x(0^+)+x(0^-)}{2}$$



Παρατηρώ ότι τα ζιγκζακωτά παραμένουν και το ύψος του κυματισμού δεν αλλάζει. Το μόνο που μπορεί να μεταβληθεί είναι η θέση του μεγίστου, με αύξηση του σ (ώστε να έρθει πιο κοντά στο σημείο ασυνέχειας). Αυτό είναι το φαινόμενο Gibbs.

Εάν όμως το σ δεν τείνει στο ∞, το αποτέλεσμα στο 0 δεν είναι απαραίτητα το ημιάθροισμα των $x(0^+)$ και $x(0^-)$.

Ευσταθές ονομάζεται ένα σύστημα όταν πεπερασμένη (φραγμένη στο πλάτος) είσοδος δίνει πεπερασμένη έξοδο - ΠΕΠΕ (Πεπερασμένη Είσοδος - Πεπερασμένη Έξοδος) / BIBO (Bounded Input - Bounded Output) ευστάθεια

Φραγμένη συνάρτηση $f(t) \in BF$ σημαίνει ότι

$$\exists M > 0 : \forall t \quad |f(t)| < M$$

όπου BF ο κόσμος των φραγμένων συναρτήσεων.

Ένα σύστημα είναι ευσταθές όταν $\forall$ είσοδο $x(t) \in BF$ η έξοδος του συστήματος είναι επίσης φραγμένη ($y(t) \in BF$). (Αν το σύστημά μας είναι γραμμικό και ΑΚΜ (Αμετάβλητο Κατά τη Μετατόπιση)

$$\exists h(t) \text{ κρουστική απόκριση} \qquad y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Έστω

$$\exists M : \forall t, \quad |x(t)| < M \implies$$
$$|x(t-\tau)| < M$$

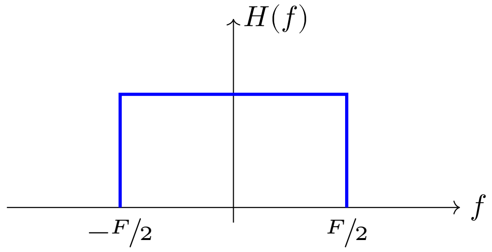
Επίσης έστω

$$\exists N : |y(t)| < N \quad \forall t$$

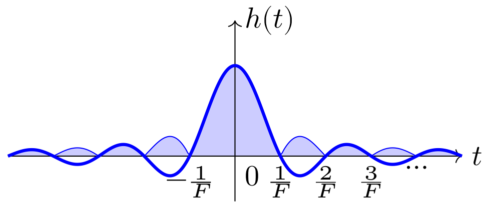
$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| < \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)x(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \frac{N}{M}$$

Εάν η κρουστική απόκριση είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, τότε το σύστημα είναι ευσταθές.

Έστω ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο:



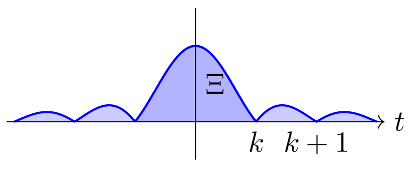
$$W_F(f) \xrightarrow{\text{IFT}} h(t) = F\,\mathrm{sinc}(Ft) = F\frac{\mathrm{sinc}(\pi F t)}{\pi F t}$$



Παρατηρώ ότι η κρουστική απόκριση του ιδανικού αυτού φίλτρου δεν είναι αιτιατή, οπότε ένα τέτοιο φίλτρο δεν είναι υλοποιήσιμο.

Άσκηση για το σπίτι: Η $h(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη;

Απάντηση



$$\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2 k \le t \le k+1 \quad |h(t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| > \frac{|\sin(t)|}{k+1}$$

$$\int_1^{\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t > \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cancelto{2}{\int |\sin(t)|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t > \Xi + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k+1}$$

Δηλαδή το σύστημα του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου δεν είναι ευσταθές.

Kramers - Kronig

Έστω $h(t)$ αιτιατή - πραγματική συνάρτηση με MF: $H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$

Ξέρω $h(t) = \underbrace{h_e(t)}_{\text{even}} + \underbrace{h_o(t)}_{\text{odd}}$

Ξέρω $h_o(t) \xrightarrow{\text{FT}} H_o(\omega) \in \mathbb{I}$ (επίσης περιττή συνάρτηση)

Ξέρω $h_e(t) \xrightarrow{\text{FT}} H_e(\omega) \in \mathbb{R}$ (επίσης άρτια συνάρτηση)

$h_o(t) = -h_e(t) \quad t < 0$
$h_0(t) = h_e(t) \quad t \geq 0$
Συνεπώς $h(t) = h_e(t) + \text{sgn}(t)h_e(t)$
$h(t) = h_o(t) + \text{sgn}(t)h_o(t)$

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$

$x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$

$\text{sgn}(t) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{2}{j\omega}$

$h(t) = h_e(t) + \text{sgn}(t)h_e(t) \overset{\text{FT}}{\Longrightarrow} H(\omega) = H_e(\omega) + \frac{1}{2\pi}\frac{2}{j\omega} * H_e(\omega) = H_e(\omega) - j\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega - \omega'}H_e(\omega')\,\mathrm{d}\omega'$

$$\boxed{H(\omega) = \underbrace{H_e(\omega)}_{H_R(\omega)} \underbrace{- j\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_e(\omega)}{\omega - \omega'}\,\mathrm{d}\omega}_{jH_I(\omega)}}$$

$$\boxed{H_I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_R(\omega')}{\omega - \omega'}\,\mathrm{d}\omega'}$$

ομοίως από πάνω υπολογίζουμε το H_R.

Συστήματα

Ανακεφαλαίωση

Γραμμικά Αναλογικά Συστήματα

1. Γραμμικότητα $\quad T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t)$ όπου $\begin{matrix} y_1(t) = T[x_1(t)] \\ y_2(t) = T[x_2(t)] \end{matrix} \quad \forall x_1(t), x_2(t),\ a, b$
2. Χρονοαμετάβλητο $\quad T[x(t-k)] = y(t-k)$ όπου $y(t) = T[x(t)] \quad \forall k, x(t)$
3. **Στιγμιαίο** ($\neq$ δυναμικό) $\quad y(t) = f(x(t))$

   Η έξοδος οποιαδήποτε χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από την είσοδο την ίδια στιγμή t.

   Η αντίσταση είναι ένα στιγμιαίο σύστημα, ενώ ο πυκνωτής και το πηνίο δεν είναι.
4. Αιτιατό $\quad$ Η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου

   $\begin{bmatrix} \text{ΞΕΡΩ} \\ \text{Γραμμικό} \\ \text{Χρον. Αμετάβλητο} \end{bmatrix} \to h(t) = 0 \quad \forall t < 0$

5. <u>Ευσταθές</u> Για κάθε φραγμένη είσοδο, η έξοδος είναι φραγμένη.
$$\begin{bmatrix} \text{ΞΕΡΩ} \\ \text{Γραμμικό} \\ \text{Χρον. Αμετάβλητο} \end{bmatrix} \to \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$
6. <u>Συγκεντρωμένο και Κατανεμημένο</u> Συγκεντρωμένο λέγεται όταν μοναδική ελεύθερη μεταβλητή είναι ο χρόνος t.

Παράδειγμα Το σύστημα $y(t) = x^2(t)$ είναι:

1. Μη γραμμικό
2. Χρονοαμετάβλητο
3. Δυναμικό
4. Αιτιατό
5. Ευσταθές
6. Συγκεντρωμένο

Περιγραφή συστήματος με διαφορική εξίσωση

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = \sum_{l=0}^{m} b_l \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} x(t) \qquad t \geq 0$$

1. Γραμμικό
2. Χρονοαμετάβλητο
3. Δυναμικό, εκτός αν $n = m = 0$
4. Αιτιατό

$$\begin{aligned} \text{Ολική λύση } &= \text{Ομογενής} + \text{Μερική Λύση} \\ \text{Ολική λύση } &= \underbrace{\text{Εξαναγκασμένη λύση}}_{\text{λύση θεωρώντας δεδομένη } x(t) \text{ και μηδενικές Α.Σ.}} + \underbrace{\text{Ελεύθερη λύση}}_{\text{Λύση θεωρώντας } x(t)=0 \text{ και δεδομένες Α.Σ.}} \end{aligned}$$

(Τα ζευγάρια ομογενής/ελεύθερη & εξαναγκασμένη/μερική δεν ταυτίζονται!)

$$\text{Ολική λύση } = \text{Λύση μόνιμης κατάστασης} + \text{μεταβατική λύση}$$

Μ. Laplace

$$\int_{i=0}^{n} a_i \left(s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y_0^{(k)} \right) = \int_{l=0}^{m} b_l \left(s^i X(s) - \sum_{k=0}^{l-1} s^{l-k-1} x_0^{(k)} \right)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\sum_{l=0}^{m} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} X(s) - \frac{\sum_{l=0}^{m} \sum_{k=0}^{l-1} b_l s^{l-k-1} x_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}}_{\text{εξαναγκασμένη}} + \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{l-1} a_i s^{i-k-1} y_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}}_{\text{ελεύθερη}}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ Y(s) &= X(s) H(s) \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας με τον παραπάνω τύπο, παρατηρούμε ότι η $y(t) = x(t) * h(t)$ μόνο όταν οι αρχικές συνθήκες είναι 0!

M. Fourier Για να λύσω το σύστημα $\forall t > 0$, θα πρέπει να μετασχηματίσω το αιτιατό κομμάτι του συστήματος μόνο:

$x_1(t) = x(t)\mathrm{u}(t)$

$y_1(t) = y(t)\mathrm{u}(t)$

Άρα:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{u}(t) + x(0)\delta(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{u}(t) + y(0)\delta(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^i y_1(t)}{\mathrm{d}t^i} = \frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i}\mathrm{u}(t) + \sum_{k=0}^{i-1} y_0(k)\delta(\tau)^{(\tau-1-k)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^i x_1(t)}{\mathrm{d}t^i} = \frac{\mathrm{d}^i x}{\mathrm{d}t^i}\mathrm{u}(t) + \sum_{k=0}^{l-1} x_0(k)\delta(\tau)^{(i-1-l)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\mathrm{d}^i y_1}{\mathrm{d}t^i} = \sum_{l=0}^{m} b_l \frac{\mathrm{d}^l x_1}{\mathrm{d}t^l}$$

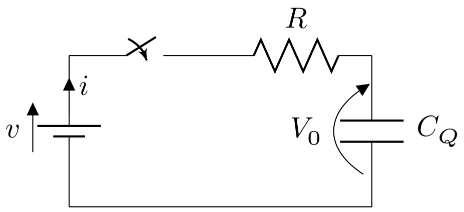
Τελικά προκύπτει ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης y_1 που μας ενδιαφέρει είναι:

$$y_1(t) = \mathrm{IFT}\left\{ \frac{\sum_{l=0}^{m} \log(j\omega)^l}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i} X_1(\omega) - \frac{\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l-1} b_l (j\omega)^{l-k-1} x_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i (j\omega)^{i-1-k} y_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i} \right\}$$

Για την έξοδο σε ένα αιτιατό σύστημα θα χρησιμοποιώ Μ/Σ Laplace.

Για μελέτη στη μόνιμη κατάσταση ($t \to \infty$), όπου οι αρχικές συνθήκες δεν συνεισφέρουν, θα χρησιμοποιώ Μ/Σ Fourier, παίρνοντας τον μετασχηματισμό όλης της συνάρτησης και όχι μόνο του αιτιατού μέρους της.

Ex.1



$$v(t) = Ri(t) + \frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau + V_0\mathrm{u}(t)$$

$$V(s) = RI(s) + \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} + \frac{V_0}{s}$$

$$\xrightarrow{V_0=0} H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{RCs+1} \cdot \frac{S/R}{S + 1/RC}$$

$$= \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1/RC}{s + 1/RC}\right)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}\right)$$

$$h(t) = \mathrm{ILT}\left\{H(s)\right\} = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}\mathrm{u}(t)$$

Έξοδος $i(t) = h(t) * V(t) = \left[\frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}e^{-1/RC\cdot t}\right] * [V\mathrm{u}(t)] = \cdots = \frac{V}{R}e^{-t/RC\mathrm{u}(t)}$

Επειδή όμως οι αρχικές συνθήκες δεν είναι μηδενικές (ο πυκνωτής είναι φορτισμένος), το παραπάνω αποτέλεσμα είναι λάθος!

Η σωστή λύση είναι:

$$\begin{aligned}
v(t) &= Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau + V_0\mathrm{u}(t) \\
V(s) &= RI(s) + \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} + \frac{V_s}{s} \\
I(s)\left[R + \frac{1}{Cs}\right] &= V(s) - \frac{V_0}{s} \\
I(s) &= \frac{V(s) - {V_0}/{s}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{(V - V_0)}{s} \cdot \underbrace{\frac{1}{R + \frac{1}{Cs}}}_{H(s)} \\
i(t) &= \frac{V - V_0}{R} e^{-t/RC}\mathrm{u}(t) \\
&= \underbrace{\underbrace{\frac{V}{R}e^{-t/RC}}_{\text{εξαναγκασμένη λύση}} - \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}}_{\text{μεταβατική λύση}}
\end{aligned}$$

Decibels (dB)

Έστω

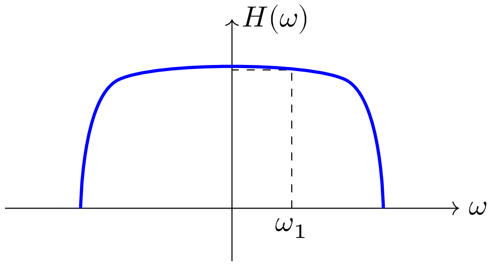
$x_A(t) = A\sin(\omega_1 t)$
$y_B(t) = B\sin(\omega_1 t)$

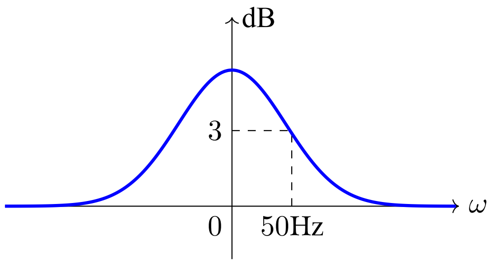
x_A πλάτος $A > 0$
x_B πλάτος $B > 0$
$\mathrm{dB} = 20\log_{10}\frac{A}{B}$

Για την ισχύ:

$c \cdot x_\mathrm{A}^2$ ισχύς A
$c \cdot x_B^2$ ισχύς B
$\mathrm{dB} = 10\log_{10}\frac{A^2}{B^2}$

Παρατηρούμε ότι τα dB πλάτους και dB ισχύος είναι το ίδιο!





$\pm$3dB σημαίνει (υπο)διπλασιασμό της ισχύος, ή πολλαπλασιασμό/διαίρεση του πλάτους με $\sqrt{2}$.

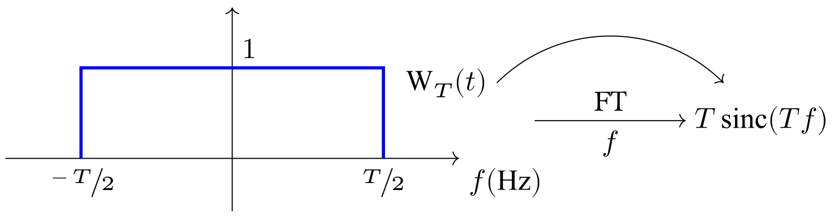
Ασκήσεις

Άσκηση $x(t) = 4000\,\mathrm{sinc}(4000t)$

(α) $X(f) = ?$

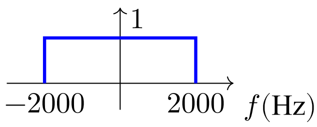
(β) Nyquist Συχνότητα για τα $x(t)$ και $x^2(t)$

(α)



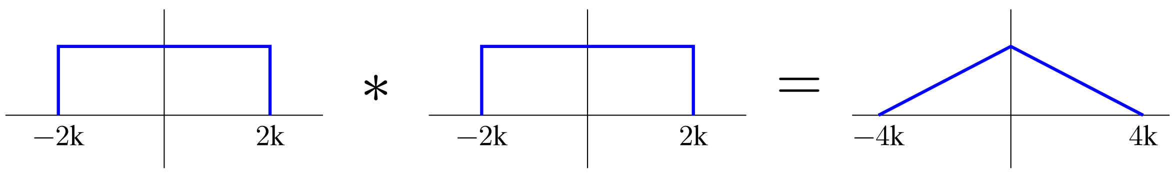
$$T\,\mathrm{sinc}(Tt) \xrightarrow{\text{FT}} \mathrm{W}_T(f)$$

$$x(t) = 4000\,\mathrm{sinc}(4000t) \xrightarrow[f]{\text{FT}} W_{4000}(f) =$$



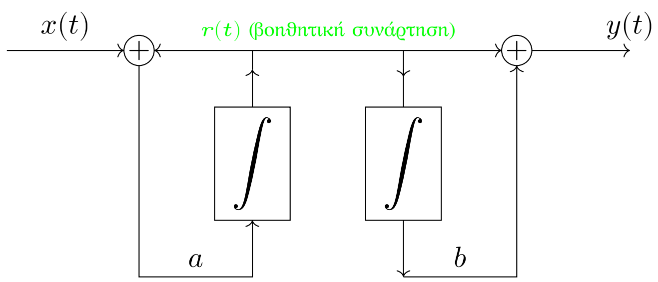
(β) Nyquist συχνότητα για το $x(t)$ είναι 2×2000 Hz $= 4000$ Hz

$$\mathrm{FT}\left\{x^2(t)\right\} = \mathrm{FT}\left\{x(t)x(t)\right\} = X(f) * X(f)$$



Για το $x^2(t)$ η Nyquist είναι $2 \cdot 4$ kHz $= 8$ kHz

Άσκηση



Σημείωση

- $\xrightarrow{a}$ δηλώνει πολλαπλασιασμό με τον αριθμό a
- $\boxed{\int}$ σημαίνει ολοκλήρωση

$$\int a(x+r)\,\mathrm{d}t = r \overset{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}{\Longrightarrow} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = ax + ar \tag{1}$$

$$r + b\int r\,\mathrm{d}t = y \implies \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + br = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
(1)-(2) \implies r(a+b) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ax \\
r &= \frac{1}{a+b}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ax\right)
\end{aligned}
$$

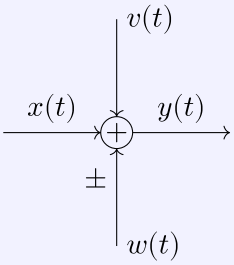
$$
\frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{a+b} + \frac{-a}{a+b}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ax\right) = ax
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + abx \implies \\
\implies s^2Y(s) - asY(s) &= asX(s) + abX(s) \\
\implies \frac{Y(s)}{X(s)} &= H(s) = \frac{a(s+b)}{s(s-a)}
\end{aligned}
$$

Αν $\operatorname{Re}\{a\} < 0$, τότε $H(\omega) = \dfrac{a(j\omega + b)}{j\omega(j\omega - a)}$

Ένα διάγραμμα όπως τα παρακάτω μπορεί να περιέχει:

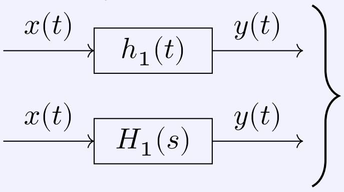
Τελεστή άθροισης $y(t) = x(t) + v(t) \pm w(t)$



Γινόμενο συνάρτησης με αριθμό $y(t) = ax(t)$

$$x(t) \xrightarrow{a} y(t)$$

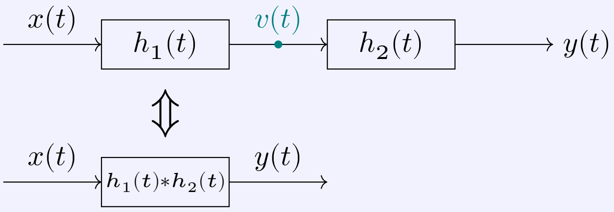
Συνέλιξη



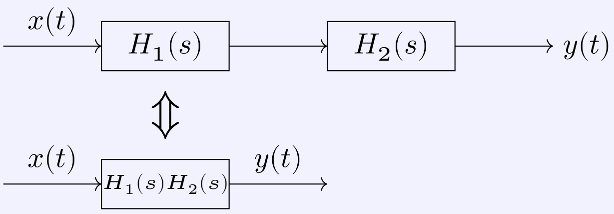
$$y(t) = h_1(t) * x(t)$$

$$Y(s) = H_1(s)X(s) \qquad {\scriptstyle H_1(s)=\mathcal{L}\{h_1(t)\}}$$

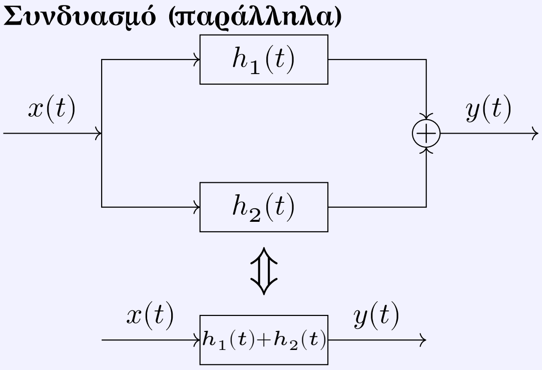
Συνδυασμός (σε σειρά) $y(t) = h_2(t) * v(t) = h_2(t) * (x(t) * h_1(t)) = [h_1(t) * h_2(t)] * x(t)$



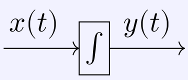
ή



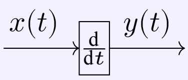
Συνδυασμό (παράλληλα)



Τελεστές

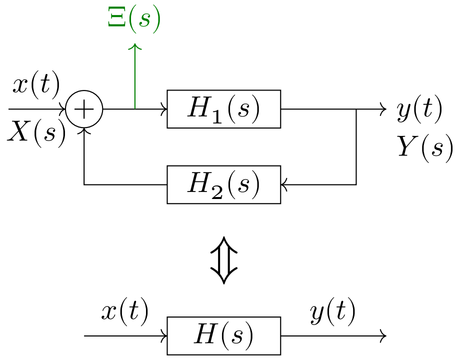


$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$



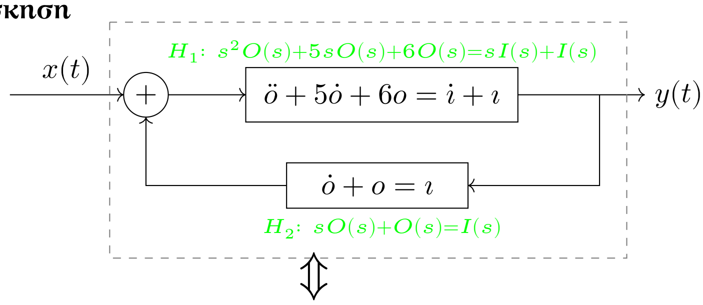
$y(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

Άσκηση Να βρεθεί το ισοδύναμο του block diagram:



$$
\begin{aligned}
Y(s) &= H_1(s) \cdot \Xi(s) \\
&= H_1(s) \cdot [X(s) + Y(s)] \implies \\
Y(s) &= H_1(s)\,[X(s) + H_2(s)Y(s)] \implies \\
Y(s)\,[1 - H_1(s)H_2(s)] &= H_1(s)X(s) \\
Y(s) &= H(s)X(s) \\
H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)}
\end{aligned}
$$

Άσκηση

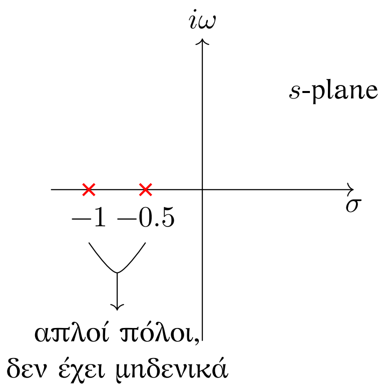


$$
\begin{aligned}
H_1(s) &= \frac{O(s)}{I(s)} = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+3)(s+2)} \\
H_2(s) &= \frac{O(s)}{I(s)} = \frac{1}{s+1}
\end{aligned}
$$

H_1, H_2 ευσταθή, αφού οι πόλοι τους βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο

$$
Y(s) = H_1(s) \cdot [X(s) - H_2(s)Y(s)] \implies \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}
$$

Άσκηση

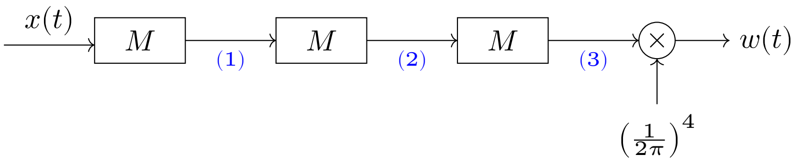


Αν η είσοδος $x(t) = \mathrm{u}(t)$, βρίσκω μετά από "πολλά χρόνια" ότι $y(t) = 1 \implies \lim_{t\to\infty} y(t) = 1$. Να βρεθεί ολόκληρη η $y(t)$.

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{k}{(s+1)\left(s+{}^1\!/\!_2\right)} \\
Y(s) &= H(s)X(s) = \frac{k}{(s+1)\left(s+{}^1\!/\!_2\right)}\frac{1}{s} \\
\text{Όμως } \lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sY(s) \\
1 &= \lim_{s\to 0}\left[\frac{k}{(s+1)\left(s+{}^1\!/\!_2\right)}\frac{1}{s}s\right] = 2k \implies \boxed{k = {}^1\!/\!_2} \\
\text{Άρα } Y(s) &= \frac{{}^1\!/\!_2}{s(s+1)\left(s+{}^1\!/\!_2\right)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{-2}{s+{}^1\!/\!_2} \\
y(t) &= \left[1 + e^{-t} - 2e^{-t/2}\right]\mathrm{u}(t)
\end{aligned}
$$

Άσκηση

όπου $X(\omega) = \mathrm{FT}\left\{x(t)\right\}$



Για να υπάρχει συνάρτηση μεταφοράς του M, πρέπει να είναι γραμμικό & αμετάβλητο:

$$
\begin{aligned}
x(t) &\to 2\pi X(-t) \\
y(t) &\to 2\pi Y(-t) \\
ax + \beta y\ (t) &\to a2\pi X(-t) + \beta 2\pi Y(-t) \text{ good} \\
x(t) &\to 2\pi X(-\omega)\big|_{\omega=t} \\
y(t) &\to 2\pi e^{-j\tau} X(-\tau)
\end{aligned}
$$

Έχω:

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= 2\pi X(-\omega)\big|_{\omega=t} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) e^{-j\tau_1(-\omega)}\,\mathrm{d}\tau_1 \Big|_{\omega=t} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) e^{j\tau_1 t}\,\mathrm{d}\tau_1 \\
y_2(t) &= 2\pi Y_1(-\omega)\big|_{\omega=t} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau_2) e^{-j\tau_2(-\omega)}\,\mathrm{d}\tau_2 \Big|_{\omega=t} \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) e^{j\tau_1\tau_2}\,\mathrm{d}\tau_1 e^{-j\tau_2(-\omega)}\,\mathrm{d}\tau_2 \Big|_{\omega=t} \\
&= (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\tau_2(\tau_1+t)}\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}\tau_1 \\
&= (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) 2\pi\delta(\tau_1 + t)\,\mathrm{d}\tau_1 = (2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1)\delta(\tau_1 + t)\,\mathrm{d}\tau_1 = (2\pi)^3 x(-t) \\
Y_2(\omega) &= (2\pi)^3 X(-\omega) \\
y_3(t) &= 2\pi Y_2(-\omega)\big|_{\omega=t} = (2\pi)^3 X(\omega)\big|_{\omega=t} \\
&= (2\pi)^4 X(t)
\end{aligned}
$$

Στις εξετάσεις θα κουβαλήσουμε ένα δικό μας μαθηματικό τυπολόγιο (π.χ. Schaum's Tables & Formulas)