

# Θεωρία Σημάτων και Γραμμικών Συστημάτων

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Για τον κώδικα σε  $\text{\LaTeX}$ , ενημερώσεις και προτάσεις:

<https://github.com/kongr45gpen/ece-notes>

2016

Τελευταία ενημέρωση: 20 Ιανουαρίου 2017

## Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>3</b>
1.1	Σύστημα . . . . .	4
1.2	Περιοδικά σήματα . . . . .	4
1.3	Συμμετρίες . . . . .	4
1.4	Χαρακτηριστικά σήματα . . . . .	5
1.5	Χρήσιμες Συναρτήσεις . . . . .	8
1.5.1	Βηματική Συνάρτηση (Unit Step Function) . . . . .	8
1.5.2	Ράμπα . . . . .	8
1.5.3	Ορθογωνικός παλμός (Rectangular Pulse function) . . . . .	9
1.5.4	Τριγωνικός Παλμός (Triangular Pulse function) . . . . .	9
1.6	Χαρακτηριστικά Μεγέθη . . . . .	10
1.7	Συνέλιξη . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Συναρτησιακοί χώροι</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Ανάλυση Fourier</b>	<b>21</b>
3.0.1	Περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο $T$ . . . . .	21
3.1	Μετασχηματισμός Fourier . . . . .	23
3.1.1	Ιδιότητες . . . . .	24
3.1.2	Θεώρημα Parseval . . . . .	26
3.1.3	Μετασχηματισμός Fourier γενικευμένων συναρτήσεων . . . . .	27
3.1.4	Kramers - Kronig Relations . . . . .	28
3.2	Χρονοπερατό vs Ζωνοπερατό Σήμα . . . . .	31
3.3	Γκαουσιανός παλμός . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Μετασχηματισμός Laplace</b>	<b>34</b>
4.1	Ιδιότητες . . . . .	35
4.2	Laplace "περιοδικών συναρτήσεων" . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Θεώρημα Δειγματοληψίας</b>	<b>42</b>
5.0.1	Συνάρτηση ορθογωνικού παραθύρου μήκους $T$ στον κόσμο $t$ . . . . .	42
5.0.2	Δειγματοληψία . . . . .	43
5.1	Υποδειγματοληψία (undersampling) . . . . .	46
5.2	Gibbs' Phenomenon . . . . .	47
5.2.1	. . . . .	50
5.2.2	Kramers - Kronig . . . . .	51

<b>6</b>	<b>Συστήματα</b>	<b>51</b>
6.1	Ανακεφαλαίωση . . . . .	51
6.2	Περιγραφή συστήματος με διαφορική εξίσωση . . . . .	52
6.3	Decibels (dB) . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Ασκήσεις</b>	<b>55</b>

# Εισαγωγή

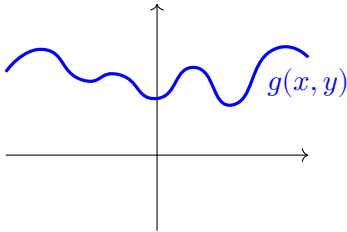
Σήμα - σύστημα

$$\boxed{\begin{array}{c} \underset{\text{εξαρτημένη}}{g} = f(\underset{\text{ανεξάρτητη}}{t}) \end{array}}$$

$$g = f(\vec{r}, t) \quad \vec{E}(\vec{r}, t)$$

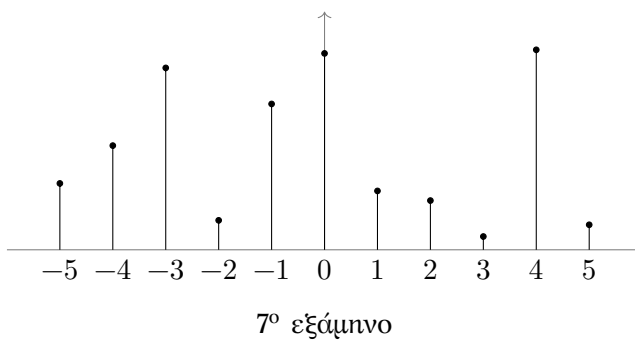
## Αναλογικό

Αν  $t$  συνεχής  $\in \mathbb{R}$   
και  $y$  συνεχής  $\in \mathbb{R}$



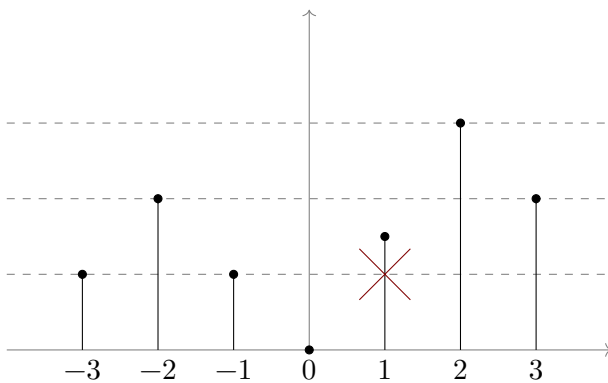
## Διακριτού χρόνου / Διακριτό (discrete)

$t$  διακριτό  $\rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$   
 $g$  συνεχής  $\in \mathbb{R}$



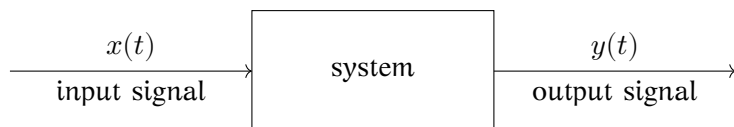
## Κβαντισμένο

$n \in \mathbb{Z}$   
 $g$  διακριτή



**Στοχαστικό** Περιέχει και τις τρεις κατηγορίες

## Σύστημα



## Περιοδικά σήματα

Αν  $\exists T \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = x(t + T)$  τότε  $x(t)$  **περιοδικό σήμα** με περίοδο  $T$ .  
Ή θα είναι 0, ή θα συνεχιστεί για πάντα.

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t) dt \quad \forall t$$

Η σύνθεση μιας συνάρτησης με μια περιοδική συνάρτηση είναι περιοδική;

**Απόδ.** Έστω  $g$  μία περιοδική συνάρτηση:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(g(x + T)) = \\ &= (f \circ g)(x + T) \end{aligned}$$

## Συμμετρίες

- Αν  $x(t) = x(-t) \quad \forall t$  τότε η  $x(t)$  λέγεται **άρτια συνάρτηση** (even function).
- Αν  $x(t) = -x(-t) \quad \forall t$  τότε η  $x(t)$  λέγεται **περιττή συνάρτηση** (odd function).

Υποστηρίζω ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής:  
 $\forall x(t) \quad \exists x_0(t), x_e(t) : x(t) = x_e(t) + x_0(t)$

**Απόδ.**

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

$$\begin{aligned} x_e y_e &= z_e \\ \text{άρτια} \end{aligned}$$

$$x_o y_o = z_e$$

$$x_e y_o = z_o$$

$$\int_{-A}^A x_o(t) dt = 0$$

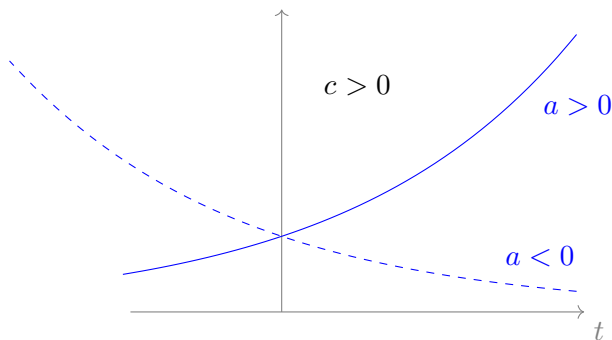
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) dt = ? \text{ (εξαρτάται)}$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A x_o(t) dt = 0 \quad (\text{principal Cauchy value})$$

## Χαρακτηριστικά σήματα

### 1) Εκθετικό σήμα

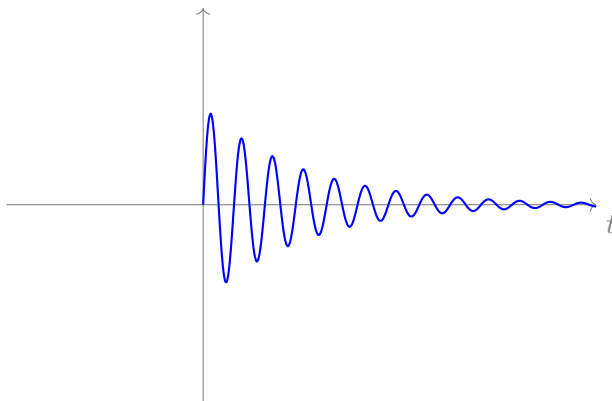
$$x(t) = ce^{at} \quad a \in \mathbb{R} \quad c > 0$$



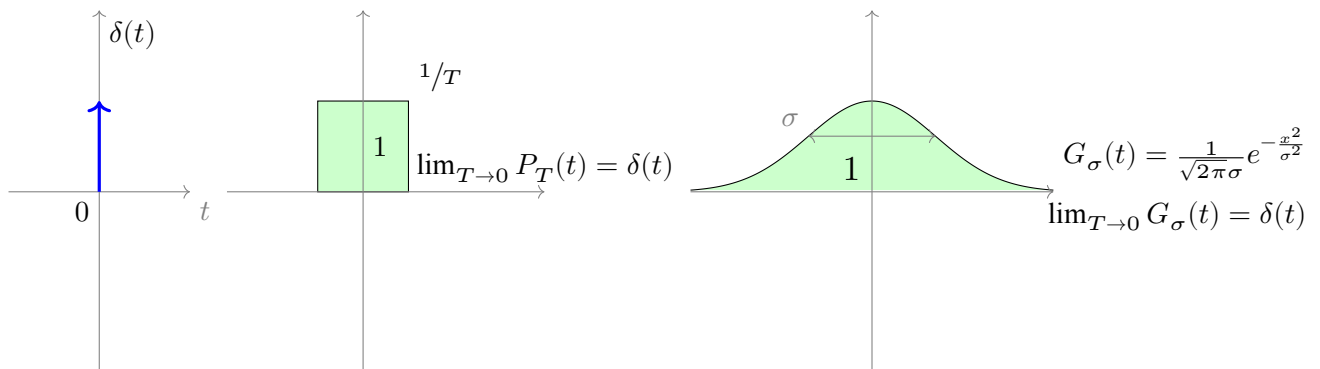
$$x(t) = ce^{(\sigma t + j\omega)t} = ce^{\sigma t} e^{j\omega t} = ce^{\sigma t} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

### 2) (Συν)ημιτονοειδή σήματα

$$x(t) = A \cos(\omega t \pm \phi) = a \operatorname{Re} \{ e^{j(\omega t + \phi)} \} = A \frac{e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}}{2}$$



### 3) Δέλτα Dirac $\delta(t)$



Ορ.

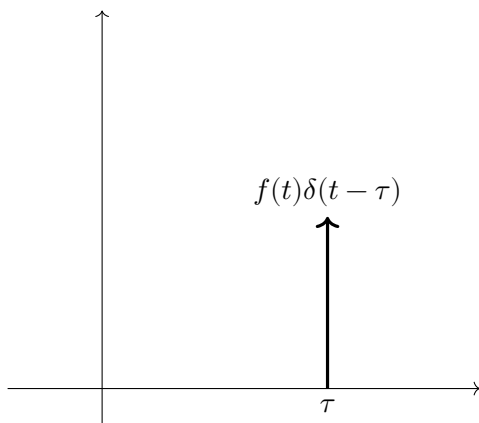
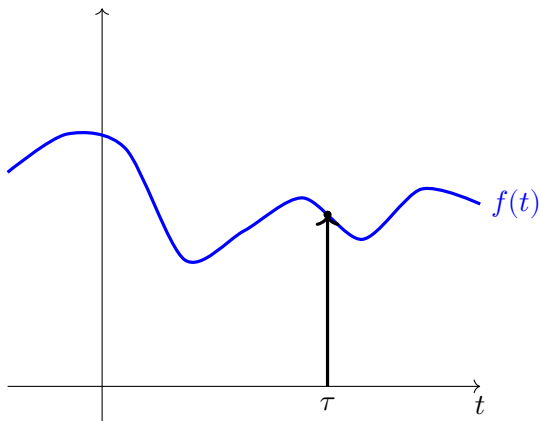
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad \forall f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$



**Ιδιότητες της  $\delta(t)$**

### 1. Κλιμάκωση

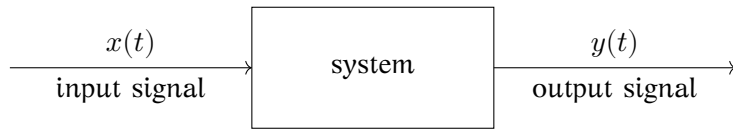
$$a \in \mathbb{R} : \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

**Απόδ.**

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \boxed{\delta(at)} dt}_{\substack{at = \xi \\ dt = \frac{d\xi}{a}}} = \int_{-\infty^{(a)}}^{\infty^{(a)}} \phi\left(\frac{\xi}{a}\right) \delta(\xi) \frac{d\xi}{a} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi\left(\frac{\xi}{a}\right)}{|a|} \delta(\xi) d\xi = \frac{\phi(0)}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \boxed{\frac{\delta(t)}{|a|}} dt$$

$$2. f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$3. f(t)\delta(t - \xi) = f(\xi)\delta(t - \xi)$$



$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$\forall x_1(t) \ x_n(t)$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}\{x_2(t)\}$$

Για const  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

ανν

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

τότε

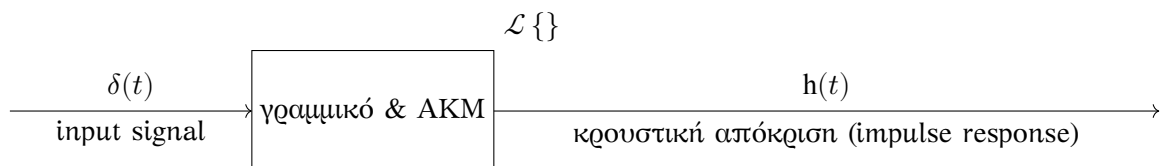
$\mathcal{L}$  : γραμμικό σύστημα

- $g(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}$

$$x'(t) = x(t - \tau)$$

$$\text{ανν } y'(t) = \mathcal{L}\{x'(t)\} = \mathcal{L}\{x(t - \tau)^2\} = y(t - \tau)$$

τότε το σύστημα  $\mathcal{L}$  είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.



Υποστηρίζω ότι ένα γραμμικό & AKM σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική απόκριση  $h(t)$ .

**Απόδ.** Από παραπάνω, γνωρίζουμε ότι  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau\right\}$$

$$\stackrel{\text{linearity}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{x(\tau)\delta(t - \tau)\} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} d\tau$$

$$\stackrel{\text{AKM}}{\stackrel{\text{TSI}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

Time shift invariant

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{h(t - \tau)}_{\text{linear time-shift invariant}} d\tau$$

- $\delta(t) = \delta(-t)$  άρτια συνάρτηση
- $\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$ , για την οποία αποδεικνύεται ότι:

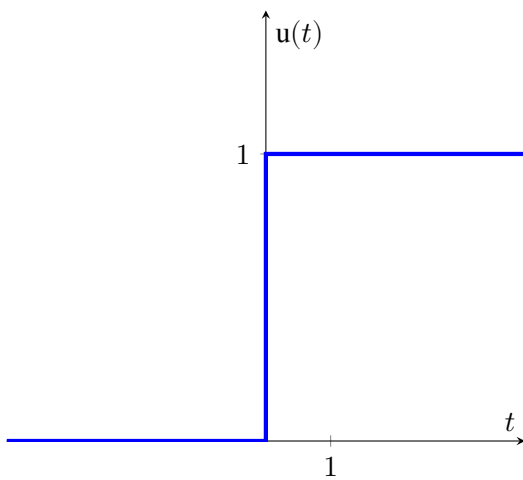
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \phi(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(t) \Big|_{t=0}$$

## Χρήσιμες Συναρτήσεις

### Βηματική Συνάρτηση (Unit Step Function)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \phi(t) dt = \mathcal{N}_u \{ \phi(t) \} = \underbrace{\int_0^{\infty} \phi(t) dt}_{\text{number}}$$

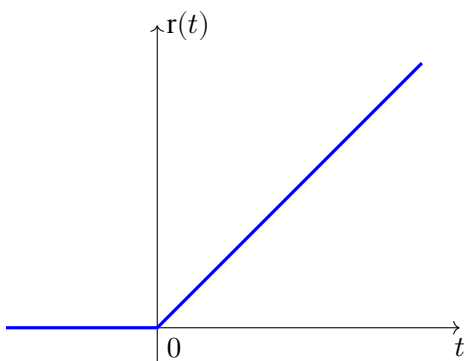


$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \xi) d\xi$$

### Ράμπα

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = tu(t)$$

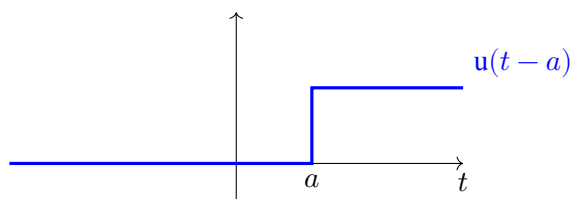
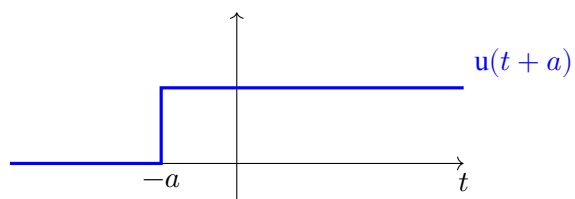
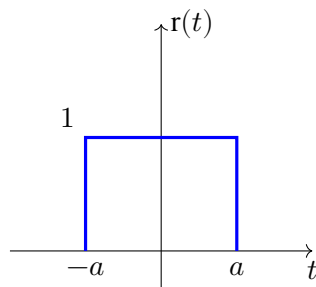




$$u(t) = \frac{d}{dt}r(t)$$

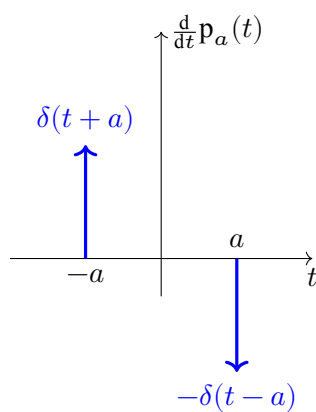
### Ορθογωνικός παλμός (Rectangular Pulse function)

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$



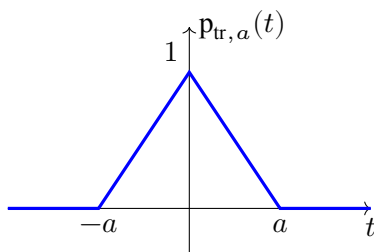
$$p_a(t) = u(t+a) - u(t-a)$$

$$\frac{d}{dt}p_a(t) = \delta(t+a) - \delta(t-a)$$

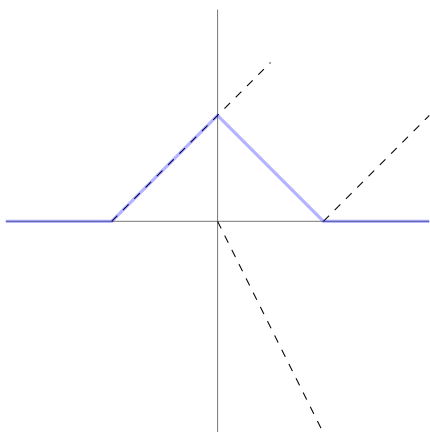


### Τριγωνικός Παλμός (Triangular Pulse function)

$$p_{tr,a} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$



$$p_{tr,a}(t) = \frac{1}{a} [r(t+a) + r(t-a) - 2r(t)]$$



## Χαρακτηριστικά Μεγέθη

### 1) Μέση τιμή (Mean Value)

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

Αν περιοδική τότε

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \end{aligned}$$

### 2) Ενεργός τιμή (Root Mean Square Value)

$$\overline{\overline{x(t)}} = \left[ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \right]^{1/2}$$

Αν ημτονοειδές σήμα  $\bar{\bar{x}}(t) = \frac{x_{\max}}{\sqrt{2}}$

### 3) Ενέργεια - Ισχύς

- Στιγμαία ισχύς (Instant power)

$$p(t) = x^2(t)$$

- Μέση ισχύς (Mean power)

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \left( \overline{\overline{x(t)}} \right)^2$$

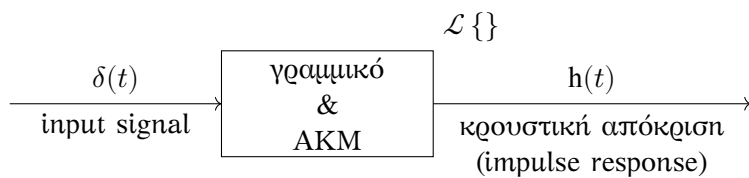
- Ενέργεια (Energy)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = (t_2 - t_1) \left( \overline{x(t)} \right)^2$$

$$\text{Σήματα} \begin{cases} \text{Σήμα ενέργειας αν } \lim_{T \rightarrow \infty} W < \infty \\ \text{Σήμα ισχύος αν } \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{p(t)} > 0 \\ \text{Υπάρχουν και σήματα που δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος.} \end{cases}$$

## Συνέλιξη

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



$$h(t) = \mathcal{L} \{ \delta(t) \}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \underbrace{x(t)}_{\text{είσοδος}} \overset{\substack{\text{συνέλιξη} \\ \uparrow}}{*} \underbrace{h(t)}_{\text{κρουστική απόκριση}}$$

## Συνέλιξη - Convolution

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

- $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$  **Αντιμεταθετική**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda) y(\lambda) [-d\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda = y(t) * x(t)$$

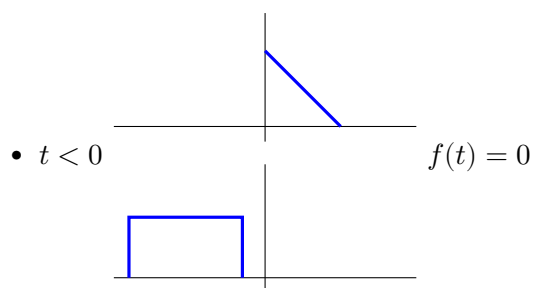
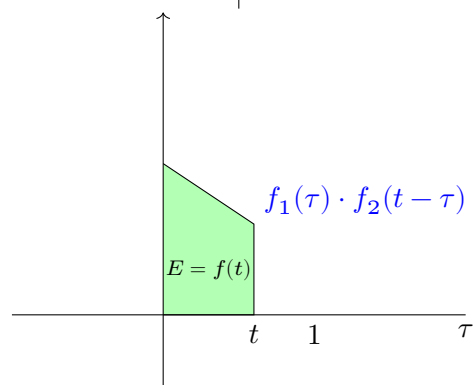
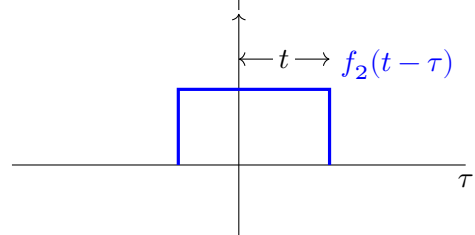
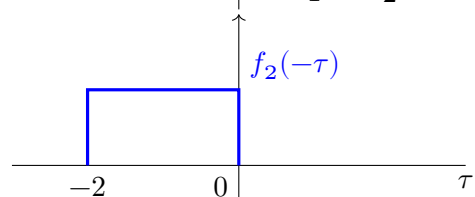
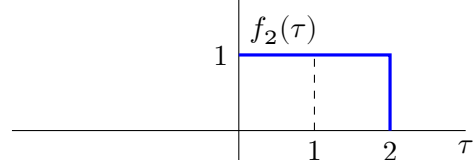
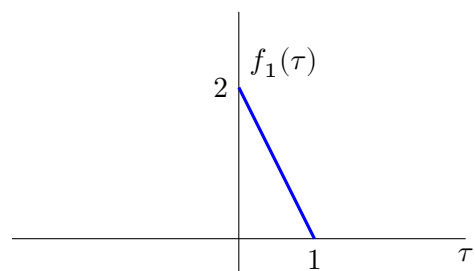
- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$  **Προσεταιριστική**

**Παρ.**

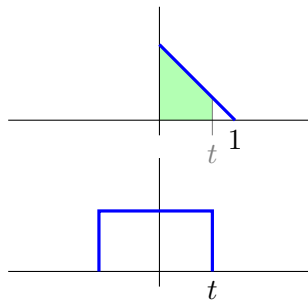
$$f_1(t) = 2(1 - t) [u(t) - u(t - 1)]$$

$$f_2(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

# Γραφική μέθοδος υπολογισμού συνέλιξης

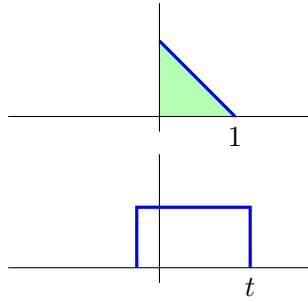


- $0 < t < 1$



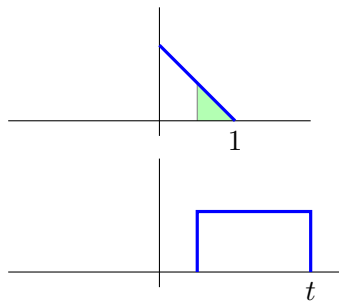
$$f(t) = \frac{1}{2}(2 + 2 - 2t)t = (2 - t)t$$

- $1 < t < 2$



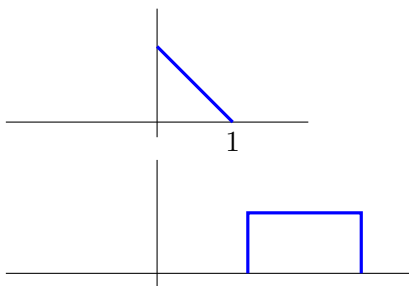
$$f(t) = 1$$

- $2 < t < 3$

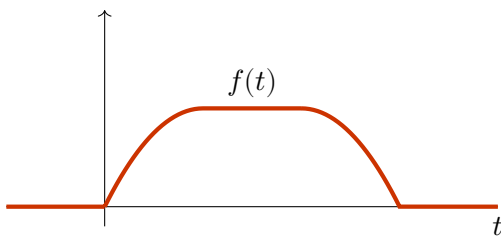


$$f(t) = \frac{(t-1) \cdot 2 \cdot (1 - (t-2))}{2} = (t-1)(3-t)$$

- $t > 3$



$$f(t) = 0$$



### Αναλυτική μέθοδος

Παρατηρώ ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau) u(\tau - \xi) u(\phi - \tau) d\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t, \tau) d\tau u(\phi - \xi)$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2(1-\tau)}_{x(\tau)} [u(\tau) - u(\tau+1)] [u(t-\tau) - u(t-\tau-2)] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) [u(\tau)u(t-\tau) - u(\tau-1)u(t-\tau) - u(\tau)u(t-\tau-2) + u(\tau-1)u(t-\tau-2)] d\tau \\
&= \int_0^t x(\tau) d\tau u(t) - \int_1^x x(\tau) d\tau u(t-1) - \int_0^{t-2} x(\tau) d\tau u(t-2) + \int_1^{t-2} x(\tau) d\tau u(t-3) \\
&= (2t - t^2)u(t) - [2t - t^2 - 1] u(t-1) - [2(t-2) - (t-2)^2] u(t-2) + [2(t-2) - (t-2)^2 - 1] u(t-3)
\end{aligned}$$

**Ex**

$$f_1(t) = e^t u(-t)$$

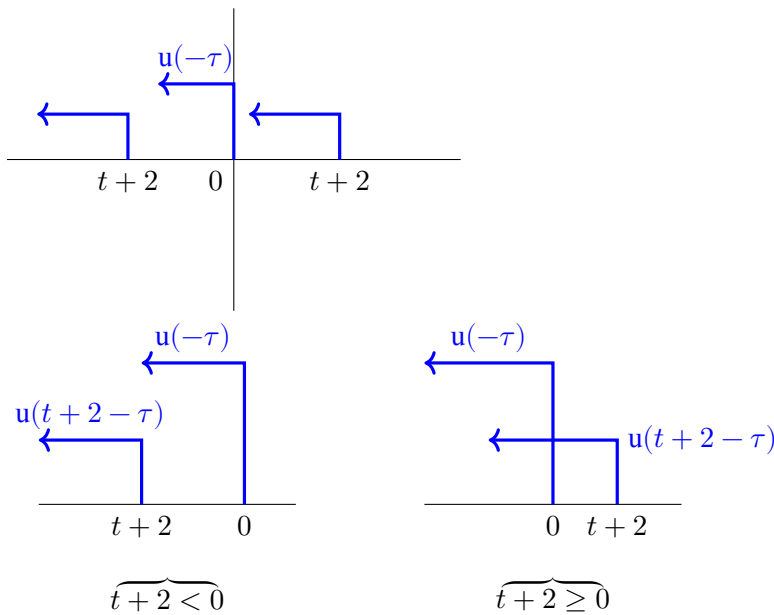
$$f_2(t) = u(-t+2)$$

$$f = f_1 * f_2$$

$$\begin{aligned}
f &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(-(t-\tau)+2) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(\tau-t+2) d\tau \\
&= \int_{t-2}^0 e^{\tau} d\tau u(t-2) \\
&= e^{\tau} \Big|_{t-2}^0 u(2-t) \\
&= [1 - e^{t-2}] u(2-t)
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau) u(\tau - \xi) u(\phi - \tau) d\tau = \int_{\xi}^{\phi} f(t, \tau) d\tau u(\phi - \xi)$$

**Ex.**



$$\begin{aligned}
x(t) &= e^t u(-t) \\
y(t) &= u(t+2) \\
z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u[(t-\tau)+2] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(t+2-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} [1-u(t)] u(t+2-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(t+2-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t+2-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t+2} e^{\tau} d\tau u(t+2) - \int_0^{t+2} e^{\tau} d\tau u(t+2) \\
&= e^{t+2} - [e^{t+2} - 1] u(t+2)
\end{aligned}$$

Ex.

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^t u(-t) \\
y(t) &= u(t+2) - u(t+1) \\
z(t) &= x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) [u(t-\tau+2) - u(t-\tau+1)] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) u(t-\tau+1) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} [1-u(\tau)] u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} [1-u(\tau)] u(t-\tau+1) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t-\tau+2) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(t-\tau+1) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t-\tau+1) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{t+1} e^{\tau} d\tau - \int_0^{t+2} e^{\tau} d\tau u(t+2) + \int_0^{t+1} e^{\tau} d\tau u(t+1) \\
&= \int_{t+1}^{t+2} e^{\tau} d\tau - [e^{t+2} - 1] u(t+2) + [e^{t+1} - 1] u(t+1)
\end{aligned}$$

$\exists h(t)$  ανν LTI

$$\begin{aligned}
y(t) &= x(t) * h(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Έστω ότι η  $x(t) = e^{j\omega t}$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= x(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{h(t) \xrightarrow{FT} H(\omega)}
\end{aligned}$$

$$x(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t}$$

$$y(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} H(\omega_1) + A_2 e^{j\omega_2 t} H(\omega_2)$$



## Συναρτησιακοί χώροι

Διανυσματικός χώρος  $S$

$$\bar{x}, \bar{y} \in S$$

### Εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in \mathbb{C}$$

$$1) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^*$$

$$2) c \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle c\bar{x}, \bar{y} \rangle$$

$$3) \langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$$

$$4) \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0 \text{ με } \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \text{ ανν } \bar{x} = \bar{0}$$

### Νόρμα

$$\bar{x} \in S$$

$$\|\bar{x}\| \geq 0$$

$$1) \|\bar{x}\| = 0 \text{ ανν } \bar{x} = \bar{0}$$

$$2) \|a\bar{x}\| = |a| \|\bar{x}\| \quad x \in \mathbb{C}$$

$$3) \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

**Μέτρο:** Απόσταση μεταξύ  $\bar{x}, \bar{y} \in S$

$$1) d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \quad d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \text{ ανν } \bar{x} = \bar{y}$$

$$2) d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$$

$$3) d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{y}, \bar{z}) \quad \bar{z} \in S$$

### Συναρτησιακός χώρος

$$x(t), y(t) \in S = \{x(t)/y(t) : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}\}$$

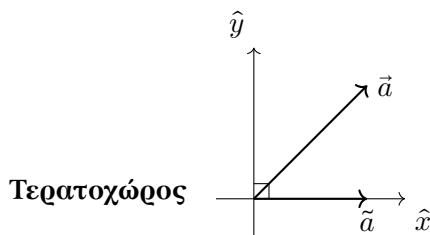
$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt$$

$$\|x(t)\| = \left[ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \right]^{1/2}$$

$$d(x(t), y(t)) = \left[ \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - y(t)]^2 dt \right]^{1/2}$$

$$\text{Αν } \langle \phi_1(t), \phi_2(t) \rangle = 0 \quad \phi_1(t) \perp \phi_2(t)$$

$$\langle \phi_1(t), \phi_1(t) \rangle = 1 \quad \phi_1(t) \text{ κανονική}$$



**Τετρατοχώρος**

$\hat{x}, \hat{y}$  όχι εξαρτημένα (συνευθειακά)

Ποια είναι η καλύτερη προσέγγιση για το  $\vec{a}$  εφ' όσον δεν υπάρχει το  $\vec{y}$ ;

$\tilde{a}$  best γιατί  $d(\vec{a}, \tilde{a}) = \min$ .

Άρα:

$$\tilde{a} = k\hat{x}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$

$$\vec{a} - \tilde{a} = (a_x - k)\hat{x} - a_y\hat{y}$$

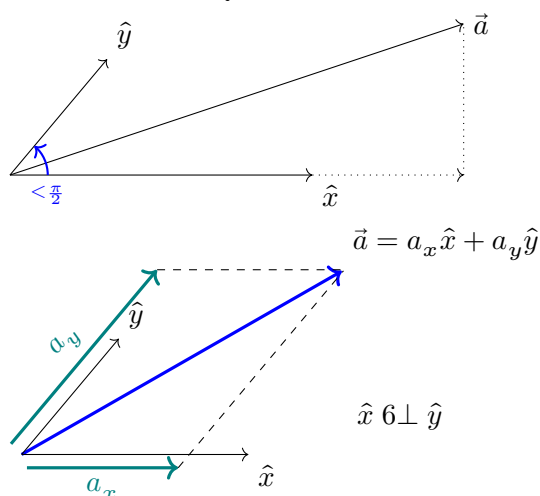
$$d(\vec{a}, \tilde{a}) = \sqrt{(a_x - k)^2 + a_y^2}$$

$$\frac{d}{dk} (d(\vec{a}, \tilde{a})) = \frac{a_x - k}{\dots} = 0 \implies k = a_x = \vec{a} \cdot \hat{x}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x}$$

Η βέλτιστη έκφραση του  $\vec{a}$  στο διδιάστατο χώρο είναι το ίδιο το  $\vec{a}$ .

**Μη κάθετα διανύσματα**



$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$

$$\vec{a} - \tilde{a} = (a_x - k)\hat{x} + a_y\hat{y}$$

$$d(\vec{a}, \tilde{a}) = \|\vec{a} - \tilde{a}\| = \sqrt{(\vec{a} - \tilde{a}) \cdot (\vec{a} - \tilde{a})} = \left( [(a_x - k)\hat{x} + a_y\hat{y}] \cdot [(a_x - k)\hat{x} + a_y\hat{y}] \right)^{1/2}$$

$$[(a_x - k)^2 + a_y^2 + 2(a_x - k)a_y\hat{x} \cdot \hat{y}]^{1/2}$$

$$\vec{a}_{\text{best}} = (\vec{a} \cdot \hat{x})\hat{x} \neq a_x$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x + a_y \cos \phi \neq a_x}$$

← Η βέλτιστη περιγραφή του  $\vec{a}$  στον διδιάστατο στον άλλο χώρο

**Συναρτησιακός κόσμος**  $\phi_n(t)$  παράγουν χώρο με το μηχανισμό:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(t) \quad t \in \Delta$$

$\phi_n(t)$  ανεξάρτητες μεταξύ τους (βάση απειροδιάστατου χώρου)

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=0}^M \hat{a}_n \phi_n(t) \text{ βέλτιστη, ώστε η απόσταση με την } f \text{ να είναι ελάχιστη}$$

$\neq a_n$ , επειδή η βάση δεν είναι ορθοκανονική

σφάλμα

$$\begin{aligned} \widetilde{I^2} &= \int_{\Delta} [f(t) - \hat{f}(t)]^2 dt \\ &= \int_{\Delta} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(t) - \sum_{n=0}^M \hat{a}_n \phi_n(t) \right]^2 dt \\ &= \int_{\Delta} f^2(t) dt + \int_{\Delta} \left( \sum_{n=0}^M \hat{a}_n \phi_n(t) \right)^2 dt - 2 \int_{\Delta} \left[ f(t) \sum_{n=0}^M \hat{a}_n \phi_n(t) \right] dt \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\Delta} f^2(t) dt + \int_{\Delta} \sum_{n=0}^M [\hat{a}_n \phi_n(t)]^2 dt \\ &\quad + 2 \int_{\Delta} \left[ \sum_{n=0}^M \sum_{m=n+1}^M \hat{a}_n \cdot \hat{a}_m \phi_n(t) \phi_m(t) \right] dt \\ &\quad - 2 \int_{\Delta} \sum_{n=0}^M \hat{a}_n f(t) \phi_n(t) dt \\ &= \int_{\Delta} f^2(t) dt + \sum_{n=0}^M \hat{a}_n^2 \int_{\Delta} \phi_n^2(t) dt + 2 \sum_{n=0}^M \sum_{m=n+1}^M \hat{a}_n \hat{a}_m \int_{\Delta} \phi_n(t) \phi_m(t) dt - 2 \sum_{n=0}^M \hat{a}_n \int_{\Delta} f(t) \phi_n(t) dt \end{aligned}$$

$$\frac{d(I^2)}{d\hat{a}_i} = 2\hat{a}_i \int_{\Delta} \phi_i^2(t) dt + 2 \sum_{m \neq i} \hat{a}_m \int_{\Delta} \phi_i(t) \phi_m(t) dt - 2 \int_{\Delta} f(t) \phi_i(t) dt = 0$$

από 0 έως  $n$

**Σύστημα εξισώσεων** Αν  $\phi_i^{(t)}$  μοναδιαία, τότε:  $\int_{\Delta} \phi_i^2(t) dt = 1$

Αν  $\phi_i(t)$  είναι ορθογώνια, τότε:  $\int_{\Delta} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = 0, \quad i \neq j$

Αν  $\{\phi_i(t)\}$  είναι ορθοκανονική βάση, τότε:

$$2\vec{a}_i - 2 \int_{\Delta} f(t) \phi_i(t) dt = 0 \implies \vec{a}_i = \overbrace{\int_{\Delta} \underbrace{f(t)}_{\text{προβολή του διανύσματος στο μοναδιαίο}} \phi_i(t) dt}_{\text{όπως το } k=\vec{a} \cdot \vec{x}} = a_i$$

Με άλλη γραφή:

$$2\vec{a}_i \langle \phi_i, \phi_i \rangle + 2 \sum_{m \neq i} \vec{a}_m \langle \phi_i, \phi_m \rangle - 2 \langle f, \phi_i \rangle = 0$$

Είναι:

$$\langle f, \phi_i \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n, \phi_i \right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \langle \phi_n, \phi_i \rangle = a_i \quad \text{όπως στα διανύσματα}$$

Ηθικό δίδαγμα: Αν η βάση του χώρου είναι ορθοκανονική και μας ζητηθεί να υπολογίσουμε μία προσέγγιση της συνάρτησης σε έναν υποχώρο, μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε την προβολή της συνάρτησης πάνω στη βάση.

**Ex.**  $f(t) = e^{-3t}u(t) \quad \phi_1(t) = e^{-t}u(t) \quad \& \quad \phi_2(t) = e^{-2t}u(t)$

βέλτιστη

$$\widehat{\hat{f}}(t) = a_1 e^{-t}u(t) + a_2 e^{-2t}u(t)$$

$$\int [a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 - f] \phi_1 dt = 0$$

$$\int_0^\infty [a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t}] e^{-t} dt = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 \int_0^\infty e^{-2t} dt + a_2 \int_0^\infty e^{-3t} dt - \int_0^\infty e^{-4t} dt = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} - \frac{1}{4} = 0}$$

$$\int [a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} - e^{-3t}] e^{-2t} dt = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4} - \frac{1}{5} = 0}$$

$$a_1 = -3/10, \quad a_2 = 6/5$$

$E \triangleq \int_{\Delta} f^2(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ <p style="text-align: center; margin-top: 5px;">γενικότερη μορφή</p>	<b>Parseval's Theorem</b>
---	-------------------------------

## Ανάλυση Fourier

Περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο  $T$

$$x_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(k\omega t) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ θεμελιώδης κυκλική συχνότητα}$$

$$\langle x_k(t), x_n(t) \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t) x_n(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega t) \cos(n\omega t) dt = \begin{cases} n \neq k \rightarrow 0 \\ n = k \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$y_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(k\omega t) \quad \langle y_k, y_n \rangle = \begin{cases} n \neq k \rightarrow 0 \\ n = k \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$\text{Υποστηρίζω ότι κάθε περιοδική } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Οραματίζομαι ότι αν η παραπάνω  $f(t)$  είναι σήμα εισόδου σε ένα σύστημα, τα ημίτονα και συνημίτονα ως ιδιοσυναρτήσεις θα παραμείνουν αμετάβλητα, και θα τροποποιηθούν μόνο τα  $a_n, b_n$ .

$$z_k(t) = e^{jk\omega t}$$

$$\langle z_k, z_n \rangle = \begin{cases} k \neq n \rightarrow 0 \\ k = n \rightarrow T \end{cases}$$

$$z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jk\omega t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t} \quad \text{εκθετική σειρά}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad \text{τριγωνομετρική σειρά A}$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n) \quad \text{τριγωνομετρική σειρά B}$$

Οι συντελεστές μπορούν να βρεθούν από τις προβολές της συνάρτησης πάνω στα ημίτονα και τα συνημίτονα:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

### Συνθήκες Dirichlet

- 1)  $\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty$
- 2) Πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών εντός  $T$
- 3) Πεπερασμένος αριθμός τοπικών ακροτάτων εντός  $T$

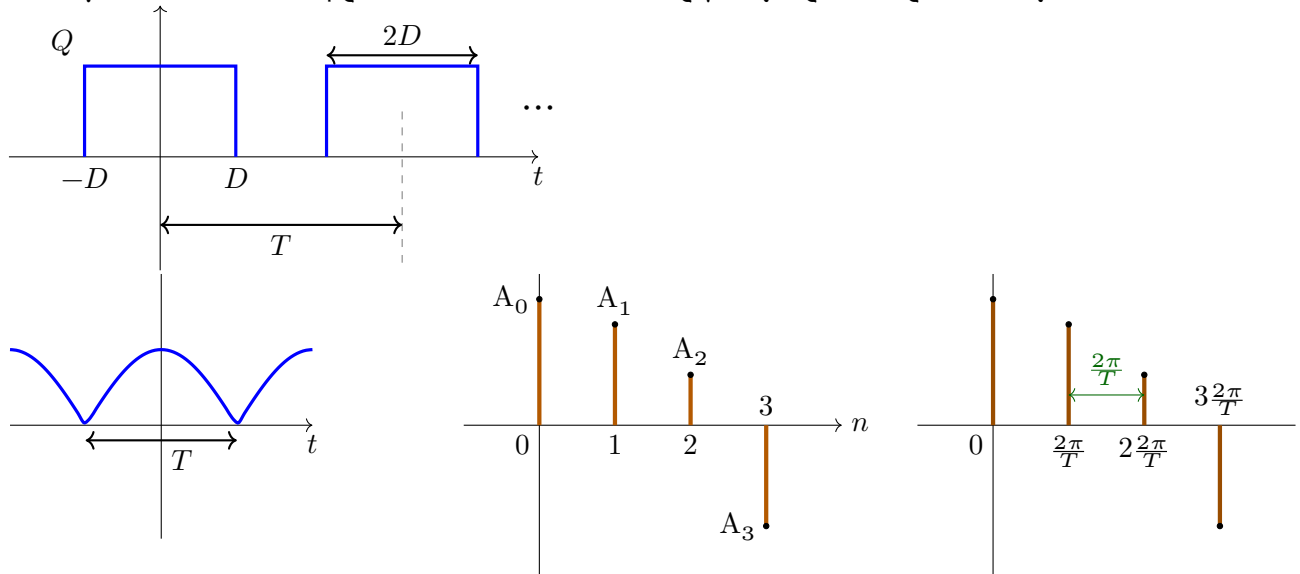
$f(t)$  περιοδική  $T$

Μορφή	Σειρά	Συντελεστές	Αλλαγές
Εκθετική	$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}$	$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt$	$F_0 = a_0/2$ $F_n = 1/2(a_n - jb_n)$
Τριγ. Α	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$	$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$ $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$ $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$	$a_n = (F_n + F_{-n})$ $b_n = j(F_n - F_{-n})$ $a_0 = 2F_0$
Τριγ. Β	$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n)$		$A_0 = a_0/2$ $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $= 2 F_n $ $\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

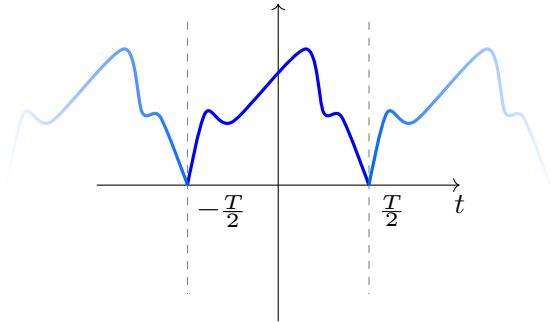
$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

$$= F_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

**Άσκηση για το σπίτι** Να βρεθούν η εκθετική και η τριγωνομετρική σειρά των σημάτων:



## Μετασχηματισμός Fourier

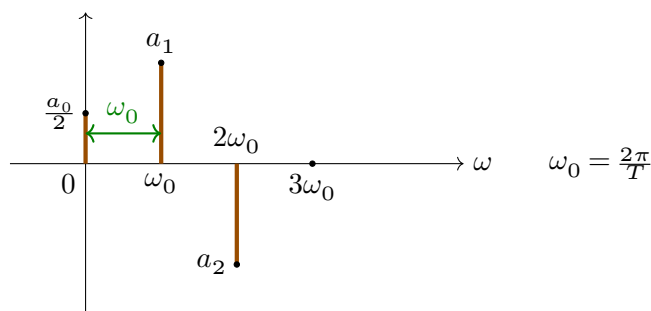
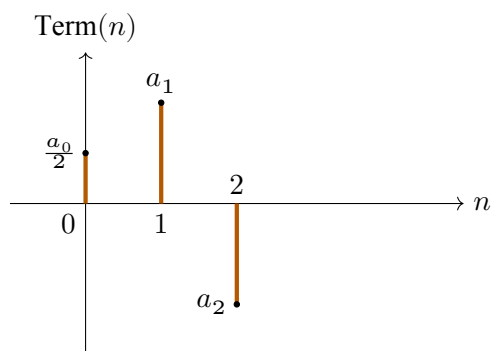


**Φορέας** συνάρτησης είναι το διάστημα του πεδίου ορισμού της στο οποίο η συνάρτηση δεν είναι 0 (από  $\min x$  για το οποίο δεν είναι 0 ως το αντίστοιχο  $\max x$ ).

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT)$$

$$\downarrow T\text{-περιοδική} \rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \begin{cases} \tilde{f}(t) & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



## Μετασχηματισμός Fourier

$$F(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

## Προσοχή

Όταν παίρνουμε τύπους από τυπολόγια, ελέγχουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, για διαφορές στη σύμβαση!

### Αντίστοιχος ορισμός

$$F(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} dt$$
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi f t} df$$

(όπου  $f$  η συχνότητα)

Η αρνητική συχνότητα δεν έχει καμία φυσική σημασία!

### Ιδιότητες

- $F(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = \underbrace{F_R(\omega)}_{\text{Re}\{F(\omega)\}} + j \underbrace{F_i(\omega)}_{\text{Im}\{F(\omega)\}}$

$$A(\omega) = |F(\omega)|$$

- $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt}_{\text{Re}\{F(\omega)\}} \underbrace{- j}_{\boxed{-}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt}_{\text{Im}\{F(\omega)\}}$

Αν  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι άρτια

$F(\omega)$  είναι πραγματική  $F(\omega) \equiv \text{Re}\{F(\omega)\}$  και είναι άρτια

Αν  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι περιττή

$F(\omega)$  είναι φανταστική  $F(\omega) = j \text{Im}\{F(\omega)\}$  και είναι περιττή

Κάθε συνάρτηση είναι άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής. Έστω  $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$ . Τότε:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_o(t) + f_e(t)) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{f_o \cos \omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f_e \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{f_e \sin \omega t} dt$$

Αν η  $f$  είναι πραγματική:

$\text{Re}\{F(\omega)\}$  είναι άρτια

$\text{Im}\{F(\omega)\}$  είναι περιττή

$A(\omega) = |F(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2\{F(\omega)\} + \text{Im}^2\{F(\omega)\}}$  είναι άρτια

$\Phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}\{F(\omega)\}}{\text{Re}\{F(\omega)\}}$  είναι περιττή.

Αν η  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και άρτια:

- $\text{Im}\{F(\omega) = 0\}$

- $\Phi(\omega) = 0$

Αν η  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι περιττή:

- $\text{Re}\{F(\omega) = 0\}$

- Αν  $f_1(t) \xrightarrow{\text{FT}} F_1(\omega)$  και  $f_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} F_2(\omega)$   
 $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$  σταθερά:

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

Γραμμικότητα του Fourier Transform



- Συμμετρική ιδιότητα (το διπλάσιο τυπολόγιο)

$$\text{Av } f(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) \quad F(t) \xrightarrow{\text{FT}} 2\pi f(-\omega)$$

•

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow F(\omega) &= A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} \\ f(t - \tau) &\rightarrow e^{-j\omega\tau}F(\omega) &= A(\omega)e^{j(\Phi(\omega) - \omega\tau)} \end{aligned}$$

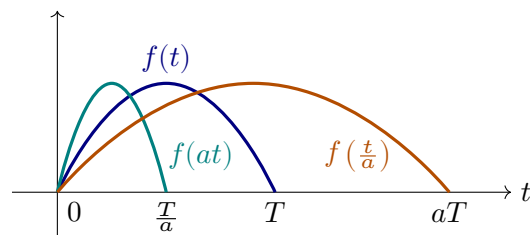
•

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow F(\omega) \\ e^{j\omega_0 t} f(t) &\rightarrow F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

$$\text{π.χ } \cos(\omega_0 t) f(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} f(t) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

### Κλιμάκωση στο χρόνο

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow F(\omega) \\ f(at) &\rightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{γιατί; να αποδειχθεί στο σπίτι!} \end{aligned}$$



### Τι συμβαίνει με τη συνέλιξη

$$\begin{aligned} g(t) &= x(t) * h(t) \\ x(t) &\rightarrow X(\omega) \\ h(t) &\rightarrow H(\omega) \\ y(t) &\rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \cdot h(t) \\ y(t) &\rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * H(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi) H(\omega - \xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow F(\omega) \\ y(t) = \frac{df(t)}{dt} &\rightarrow j\omega F(\omega) \\ \frac{d^n f(t)}{dt^n} &\rightarrow (j\omega)^n F(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{d}{dt} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} d\omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &\rightarrow F(\omega) \\
 t f(t) &\xrightarrow{\text{F.T}} \frac{d}{d\omega} F(\omega) \\
 t^n f(t) &\xrightarrow{\text{F.T}} \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)
 \end{aligned}$$

Φανταστείτε ότι  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $f(t) \xrightarrow{F} (\omega)$

$$f^*(t) \rightarrow F^*(-\omega)$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 f^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(-\omega) e^{j\omega t} d\omega
 \end{aligned}$$

### Θεώρημα Parseval

#### Θεώρημα Parseval

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega$$

όπου  $F(\omega) = A(\omega) e^{j\Phi(\omega)}$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= f(t) f^*(t) = |f(t)|^2 \\
 Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F^*(\omega) \\
 Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) F^*(-(\omega - \xi)) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

#### Ορισμός

Πυκνότητα φασματικής ενέργειας:  $\frac{A(\omega)}{2\pi}$

## Μετασχηματισμός Fourier γενικευμένων συναρτήσεων

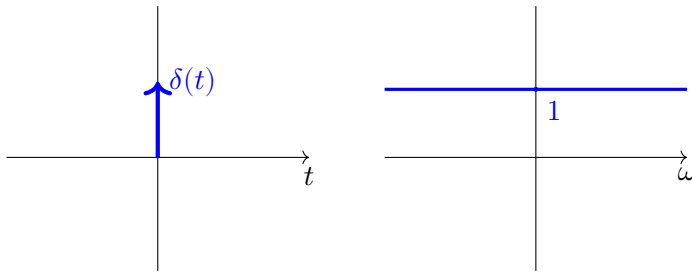
α)  $\delta(t) \rightarrow 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = e^0 = 1$$

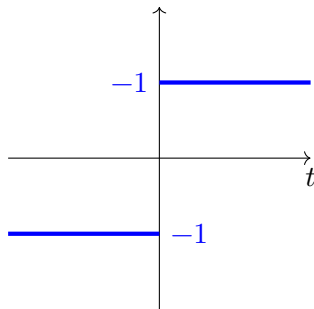
$$\delta(t \mp t_0) \rightarrow e^{\pm j\omega t_0}$$

$$f(t) = 1 \rightarrow 2\pi\delta(\omega), \text{ άρα } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t dt =$$

$$2\pi\delta(\omega) \Rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t dt = 2\pi\delta(\omega) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t dt = 0 \end{cases}$$



β)  $\text{sgn}(t) = \frac{|t|}{t}$



$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-a|t|} \text{sgn}(t)]$$

$$\text{FT sgn}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 e^{at-j\omega t} dt + \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-at-j\omega t} dt$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ -\frac{e^{(at-j\omega t)}}{a-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-at-j\omega t}}{-(a+j\omega)} \Big|_0^{\infty} \right]$$

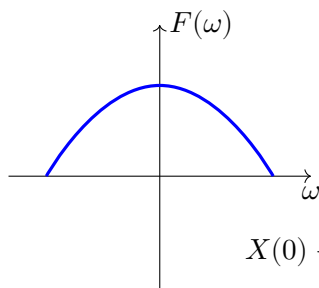
$$= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{-1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \right]$$

$$= \frac{2}{j\omega} \in \mathbb{I}$$

γ)  $u(t)$

$$u(t) \xrightarrow{\text{F.T.}}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



$X(0) \rightarrow$  εκφράζει το D.C

$$u(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$f(t) \xrightarrow{\text{F.T.}} F(\omega)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau) d\tau = f(t) * u(t)$$

$$G(\omega) = F(\omega) \cdot \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$$

$$\delta(t) \rightarrow 1 \quad \text{άρτια}$$

$$\delta^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) \rightarrow j\omega$$

$$\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\delta(t) \rightarrow (j\omega)^n$$

$$t^n \rightarrow 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$$

**Παρ.**

$$f(t) = |t| = tu(t) - tu(-t)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi j\delta(\omega) * \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] - 2\pi j\delta(\omega) * \left[ \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \right] \right]$$

Calculate at home! The answer is  $-\frac{2}{\omega^2}$

$$t \rightarrow 2\pi j^1 \delta^{(1)}(\omega)$$

$$u(t) \rightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$u(-t) \rightarrow \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$$

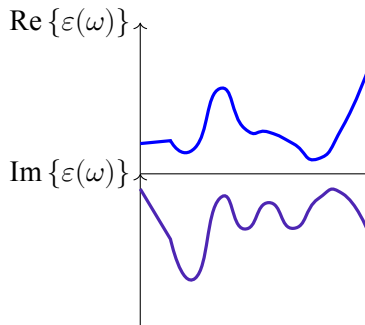
**Kramers - Kronig Relations**

Από ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$\begin{array}{ccc} \vec{D} & = & \vec{\epsilon} \vec{E} \\ \text{πυκνότητα ροής} & & \text{ένταση πεδίου} \end{array}$$

διηλεκτρική σταθερά

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{E} &= \vec{E}(\vec{r}, \omega) \\ \vec{D}(\omega) &= \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \\ \vec{D}(t) &= \epsilon(t) + \vec{E}(t)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}h(t) &= 0 \quad \forall t < 0 \\ h(t) &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\text{Av } H(\omega) = \mathcal{FT} \{h(t)\} = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_R(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'$$

$$H_R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_I(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'$$

**Άσκ.**

$$\begin{aligned}f(t) &= 2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t \\ F(\omega) &= \mathcal{F} \{ \cos(\omega_1 - \omega_2)t \} + \mathcal{F} \{ \cos(\omega_1 + \omega_2)t \} \\ &= \pi [\delta(\omega - (\omega_1 - \omega_2)) + \delta(\omega + (\omega_1 - \omega_2))] + \pi [\delta(\omega - (\omega_1 + \omega_2)) + \delta(\omega + (\omega_1 + \omega_2))] \\ &\left( \cos \omega_0 t \xrightarrow{\text{FT}} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \right)\end{aligned}$$

Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned}F(\omega) &= 2 \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \{ \cos \omega_1 t \} * \mathcal{F} \{ \cos \omega_2 t \} \\ &= \pi [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] * [\delta(\omega - \omega_2) + \delta(\omega + \omega_2)] \\ &= \pi [\delta(\omega - \omega_2 - \omega_1) + \delta(\omega - \omega_2 + \omega_1) + \delta(\omega + \omega_2 + \omega_1) + \delta(\omega + \omega_2 - \omega_1)]\end{aligned}$$

**Άσκηση**

$$\begin{aligned}f(t) &= g(t) \cos^2 \omega_0 t \quad g(t) \xrightarrow{\text{FT}} G(\omega) \\ &= g(t) \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} = \frac{g(t)}{2} + \frac{1}{2} g(t) \cos 2\omega_0 t \\ \Rightarrow F(\omega) &= \frac{1}{2} G(\omega) + \frac{1}{2} G(\omega) * \mathcal{F} \{ \cos 2\omega_0 t \} \\ &= \frac{1}{2} G(\omega) + \frac{1}{2} G(\omega) * [\pi (\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0))] \frac{1}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} G(\omega) + \frac{1}{4} [G(\omega - 2\omega_0) + G(\omega + 2\omega_0)]\end{aligned}$$

Αν δεν θυμάμαι τον τύπο:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= g(t) \cos^2 \omega_0 t = g(t) \cos \omega_0 t \cos \omega_0 t \\
 F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} G(\omega) * \left[ \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \{ \cos \omega_0 t \} * \mathcal{F} \{ \cos \omega_0 t \} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} G(\omega) * [\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]] * \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\
 &= \frac{1}{4} G(\omega) * [\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega) + \delta(\omega) + \delta(\omega + 2\omega_0)] \\
 &= \frac{1}{4} [G(\omega - 2\omega_0) + 2G(\omega) + G(\omega + 2\omega_0)]
 \end{aligned}$$

### Άσκηση

$$\begin{aligned}
 f(t) &= g(at + b) & g(t) &\xrightarrow{\text{FT}} G(\omega) \\
 h(t) &= g(at) & F(\omega) &= \mathcal{F} \{ g(at) + b \} = \mathcal{F} \left\{ h \left( t + \frac{b}{a} \right) \right\} = H(\omega) e^{j\omega \frac{b}{a}}
 \end{aligned}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{|a|} G \left( \frac{\omega}{a} \right)$$

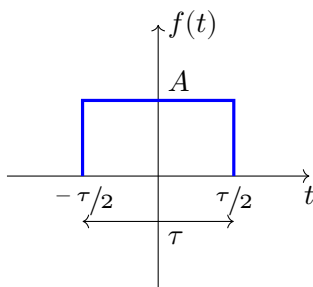
$$F(\omega) = \frac{1}{|a|} e^{j\omega \frac{b}{a}} G \left( \frac{\omega}{a} \right)$$

$$\cos t \xrightarrow{\text{FT}} \pi [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

$$\sin \omega_0 t = \cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin t \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{|\omega_0|} e^{-j\omega \frac{\pi}{2\omega_0}} \pi \left[ \delta \left( \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) + \delta \left( \frac{\omega}{\omega_0} + 1 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 \delta \left( \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) &= \delta \left( \frac{1}{\omega_0} (\omega - \omega_0) \right) \\
 &= e^{-j\omega \frac{\pi}{2\omega_0}} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\
 &= -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]
 \end{aligned}$$



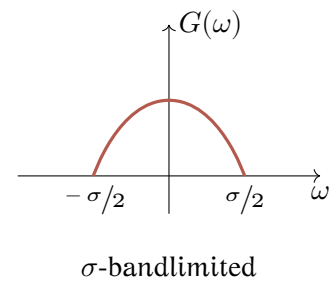
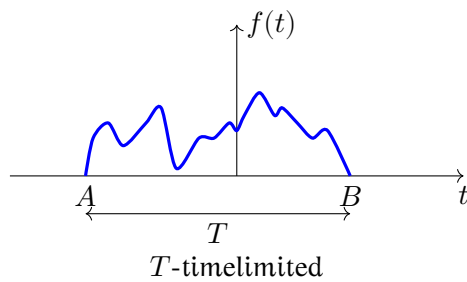
$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt \\
 &= A \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{-j\omega} [e^{-j\omega \tau/2} - e^{j\omega \tau/2}] \\
 &= A\tau \frac{\sin(\omega \frac{\tau}{2})}{\frac{\omega \tau}{2}} \\
 &= A\tau \frac{\sin(\frac{\omega \tau}{2})}{\frac{\omega \tau}{2}} = A\tau \text{sinc} \left( \frac{\omega \tau}{2\pi} \right)
 \end{aligned}$$

## sinc

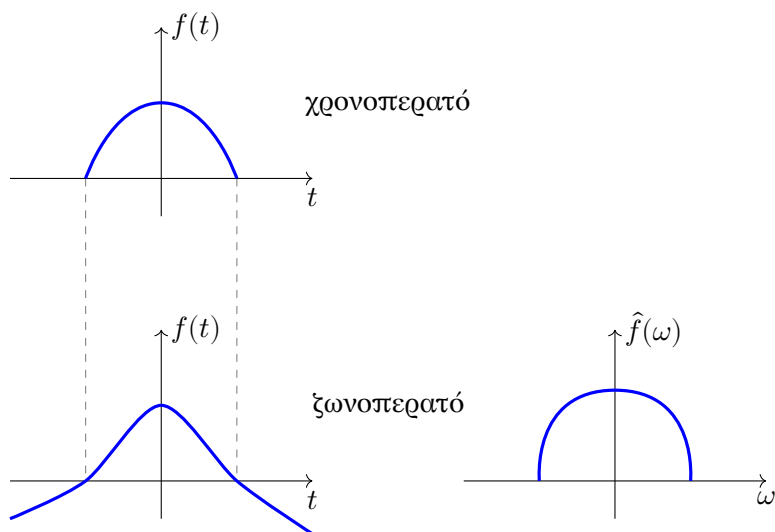
Μαθηματικοί:  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$

Μηχανικοί:  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

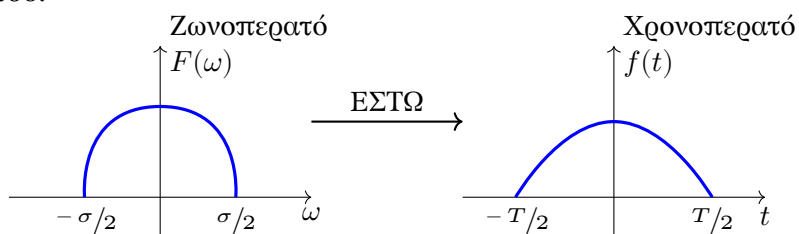
## Χρονοπερατό vs Ζωνοπερατό Σήμα



- Ένα ζωνοπερατό σήμα **δεν** μπορεί να είναι χρονοπερατό
- Ένα χρονοπερατό σήμα **δεν** μπορεί να είναι ζωνοπερατό
- Ένα σήμα μπορεί να μην είναι ούτε χρονοπερατό, ούτε ζωνοπερατό.



Απόδ.



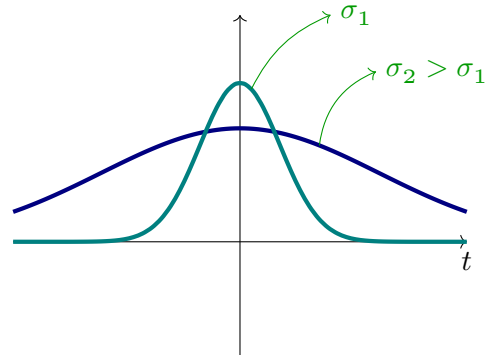
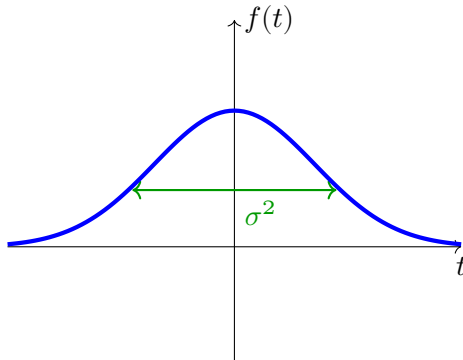
$$f(t) = \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} (j\omega)^n F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ορίζεται η σειρά Taylor επομένως σε οποιοδήποτε σημείο, όμως τότε, επειδή σε κάποια σημεία οι παράγωγοι είναι 0, θα έπρεπε η  $F$  να είναι μηδενική, άτοπο.

## Γκαουσιανός παλμός

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{t^2/(2\sigma^2)} \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega) = e^{\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} = e^{-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\sigma^2}}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

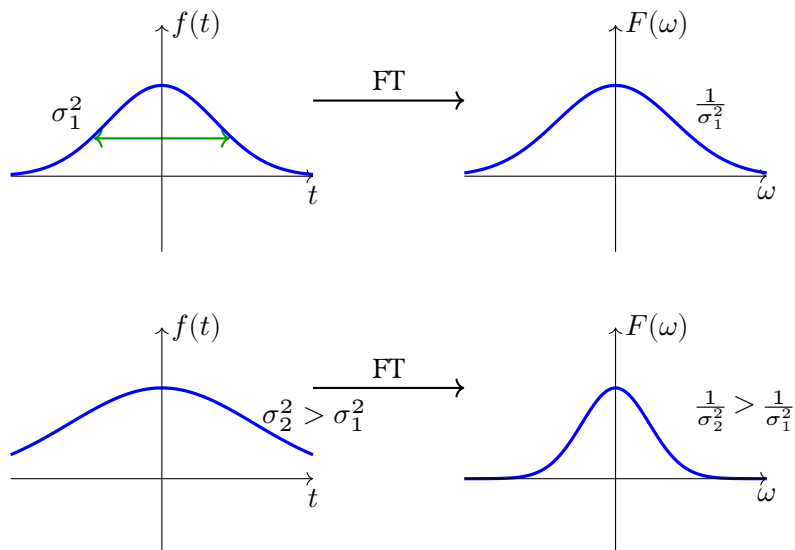
$\sigma^2$  διασπορά

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2} [t^2 + 2\sigma^2 j\omega t + (j\omega\sigma^2)^2]} \cdot e^{\frac{1}{2\sigma^2} (j\omega\sigma^2)^2} dt \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \omega^2 \sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \overbrace{(t + j\omega\sigma^2)^2}^{t + j\omega\sigma^2 - \tau}} dt \\ &= e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} \boxed{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau} = e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} \end{aligned}$$

Ηθικά διδάγματα:

- Ο μετασχηματισμός της Gaussian είναι Gaussian
- Ό,τι στενεύει στον χρόνο απλώνει στο φάσμα, και αντίθετα





$$\int_{-\infty}^{\infty} t d^2(t) dt$$

διασπορά στον χρόνο  $d^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t) dt$

διασπορά στο φάσμα  $D^2 = \frac{1}{2\pi} \int \omega^2 || d\omega$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} tx(t) \frac{dx(t)}{dt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x^2(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt \stackrel{\text{Parseval theorem}}{=} d^2 D^2 \Rightarrow \boxed{dD \geq 1/2}$$

Γιατί  $1/2$ ; (Υπόδειξη:  $\int_{-\infty}^{\infty} tx \frac{dx}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} dt = [ ] - \frac{1}{2} \int x^2 dt \rightarrow 1$ )  
Θα τα ξαναπούμε Τρίτη 22 Νοεμβρίου (χάνουμε 3 μαθήματα).

## Μετασχηματισμός Laplace

$$\nexists X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$y(t) = x(t)e^{-\sigma t}$$

$$\exists Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \quad (s = \sigma + j\omega)$$

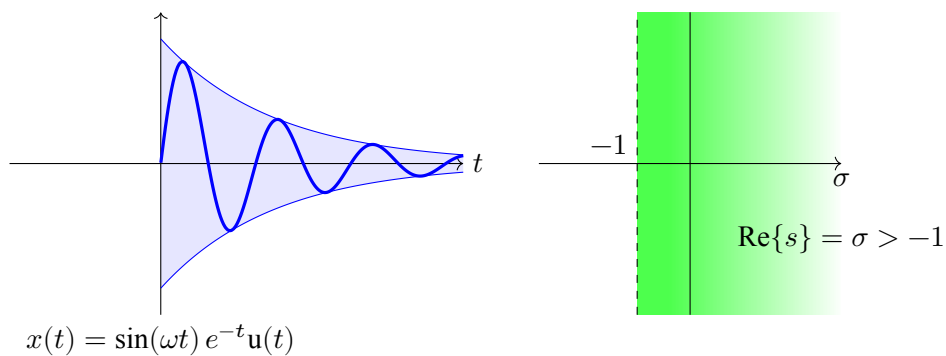
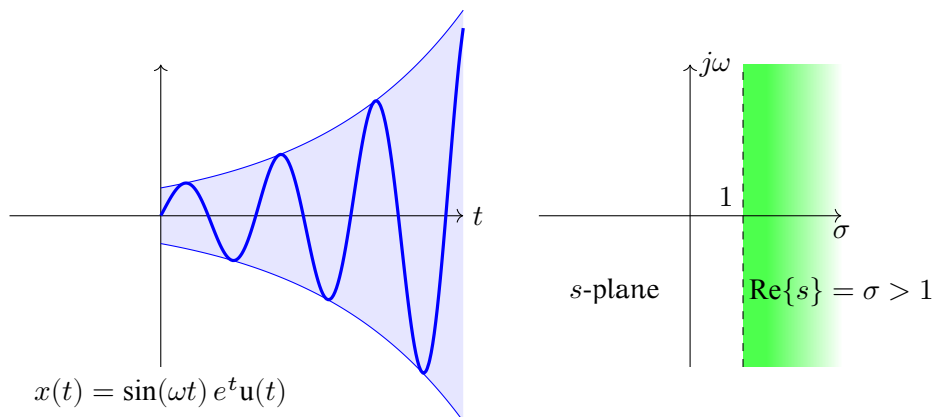
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt$$

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt} \quad \text{M. Laplace}$$

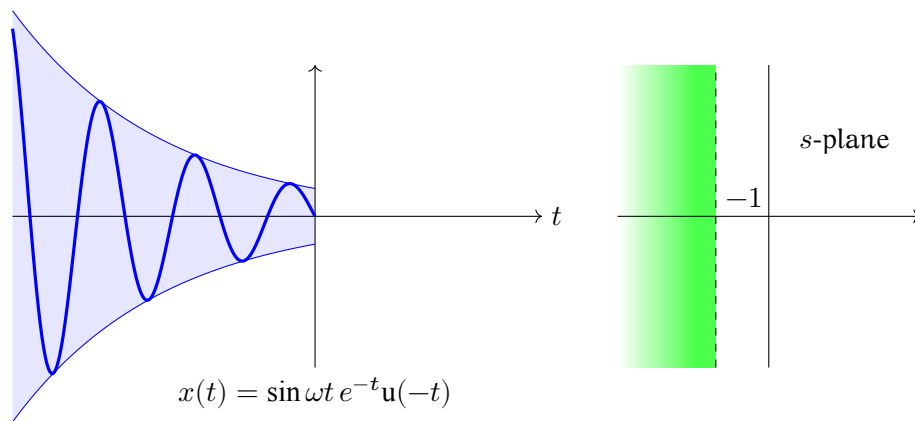
**Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace**  $x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s)e^{st} ds$

- Έστω ότι  $x(t)$  είναι αιτιατή ( $x(t) = 0 \quad t < 0$ ).

Ας φανταστούμε ότι η  $x(t)$  δεν έχει μετασχηματισμό Fourier.

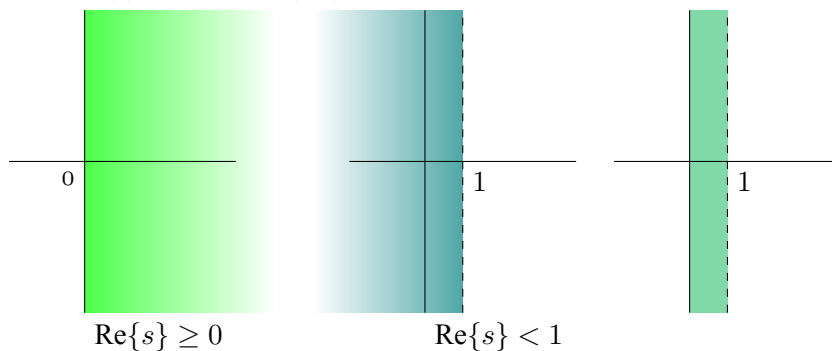


- Έστω ότι  $x(t)$  αντιατιατή ( $x(t) = 0 \quad t > 0$ )



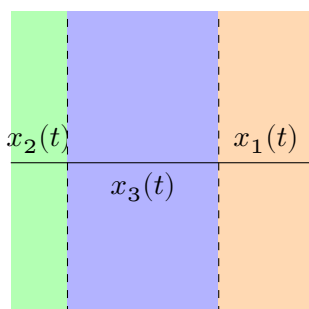
•

$$\sin \omega t u(t) + \sin \omega t e^t u(-t)$$



- Η  $\sin \omega u(t) + \sin \omega t e^{-t} u(-t)$  δεν έχει περιοχή σύγκλισης.

$$X(s) = \frac{35}{(x-8)(x+2)}$$



Οι πόλοι (ρίζες του παρονομαστή) καθορίζουν τις περιοχές σύγκλισης.

Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε είναι αιτιατές, άρα γενικά ο μετασχηματισμός Laplace καταγράφει στην:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Το  $0^-$  μάς επιτρέπει να ασχοληθούμε με συναρτήσεις που απειρίζονται στο 0, π.χ.  $\frac{1}{x}$  or  $\delta(t)$ .

## Ιδιότητες

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) & \text{Re}\{s\} > \sigma_1 \\ y(t) &\rightarrow Y(s) & \text{Re}\{s\} > \sigma_2 \end{aligned}$$

$$1) \quad ax(t) + by(t) \rightarrow aX(s) + bY(s) \quad \text{τουλάχιστον } \operatorname{Re}\{s\} > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$$

2) Μετατόπιση σε χρόνο

$$\begin{aligned} x(t)u(t) &\rightarrow X(s) \quad \sigma > \sigma_1 \\ y(t) = x(t - t_0)u(t - t_0) &\rightarrow X(s)e^{-t_0 s} \quad t_0 > 0 \quad \sigma > \sigma_2 \end{aligned}$$

**Απόδ.**

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \underbrace{x(t - t_0)}_{\tau} u(t - t_0) e^{-st} dt = x(\tau)u(\tau)e^{-s(t+t_0)} d\tau = X(s)e^{-st_0}$$

3) Κλιμάκωση

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) \\ x(at) &\rightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \end{aligned}$$

4) Παραγωγή

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) \\ \frac{dx(t)}{dt} &\rightarrow sX(s) - x(0^-) \end{aligned}$$

5) Ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) \\ \int_0^t x(t) dt &\rightarrow \frac{1}{s}X(s) \end{aligned}$$

6) Διαμόρφωση

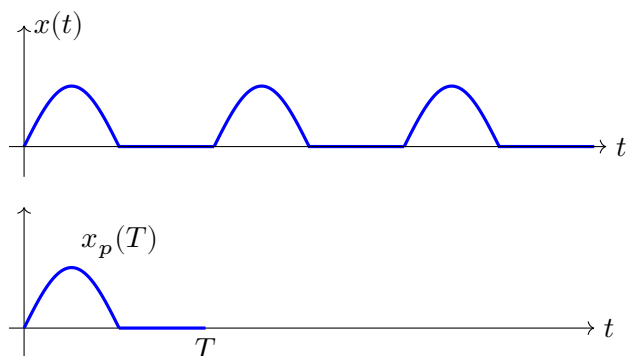
$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) \quad \sigma > \sigma_1 \\ e^{-at}x(t) &\rightarrow X(s+a) \quad a \in \mathbb{C} \quad \sigma > \sigma_1 - \operatorname{Re}\{a\} \end{aligned}$$

7) Συνέλιξη

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow X(s) \\ y(t) &\rightarrow Y(s) \\ x(t) * y(t) &= X(s)Y(s) \end{aligned}$$

**Laplace "περιοδικών συναρτήσεων"**

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



$$x(t) = x_T(t) + x_T(t-T) + x_T(t-2T) + \dots$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_T(t-nT)$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{x_T(t-nT)\}$$

$$x_T(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X^T(s)$$

$$x_T(t-nT) \xrightarrow{\mathcal{L}} X^T(s)e^{-nTs}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} X^T(s)e^{-nTs} = X^T(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = \frac{1}{1-e^{-Ts}} X^T(s) \quad \sigma > \max(0, \sigma_1)$$

$$X(s) \xrightarrow{?} X(\omega)$$

$$X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$

**Ex. 1**  $x(t) = e^{-at}u(t)$

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \left. \frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{\cancel{e^{-(a+s)\infty}^0} - \cancel{e^{-(a+s)0}^1}}{-(a+s)} = \boxed{\frac{1}{s+a} \quad \operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{a\}} \end{aligned}$$

**Ex. 2**  $x(t) = \delta(t)$

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s0} = 1 \quad s \in \mathbb{C}$$

**Ex. 3**  $x(t) = u(t) \quad X(s) = \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$

Για να βρω πεδίο σύγκλισης:  $X(s) = \int_{0^+}^{\infty} 1e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{0^+}^{\infty} = \frac{e^{-s\infty} - \cancel{e^{-s0}^1}}{-s} = \frac{1}{s}$

**Ex. 4**  $x(t) = \cos \omega_0 t u(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} u(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2} \frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega_0^2} = \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0 \end{aligned}$$

**Ex. 5**  $x(t) = \sin \omega_0 t u(t)$

$$\frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} u(t) - e^{-j\omega_0 t} u(t)] \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0} \right] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Ποιός είναι ο μετασχηματισμός Fourier της παραπάνω;

Το πιθανό λάθος αποτέλεσμα είναι το  $\left( \frac{FT}{s=j\omega} \rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$

$$x(t) = \sin \omega_0 t u(t)$$

$$\sin \omega_0 t \xrightarrow{\text{FT}} j\pi [-\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$u(t) \xrightarrow{\text{FT}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow [j\pi (\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))] * \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ j\pi^2 (\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)) + j\pi \left( \frac{1}{j(\omega + \omega_0)} - \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} \right) \right] \\ &= \frac{j\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + \left[ \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \end{aligned}$$

### Θεωρήματα Αρχικής & Τελικής Τιμής

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (sX(s))$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (sX(s))$$

$$(-t)^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{LT}} \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{LT}} F(s)$$

Για να βρίσκουμε αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace χωρίς μιγαδική ολοκλήρωση χρειαζόμαστε ένα ισχυρό τυπολόγιο.

### Τυπολόγιο

$X(s)$	$x(t)$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}u(t)$
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$
$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\sin(\beta t)u(t)$
$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos(\beta t)u(t)$
$\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}$	$e^{-at} \sin(\beta t)u(t)$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}$	$e^{-at} \cos(\beta t)u(t)$

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \stackrel{\pi_X}{=} \frac{N(s)}{(s+a)D_1(s)} = \frac{A}{s+a} + \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

$$x(t) = Ae^{-at}u(t) - \mathcal{LT} \left\{ \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{N(s)}{(s+a)^\kappa D_1(s)} \\
 &= \frac{A_1}{(s+a)} + \frac{A_2}{(s+a)^2} + \dots + \frac{A_\kappa}{(s+a)^\kappa} + \frac{N_1(s)}{D_1(s)}
 \end{aligned}$$

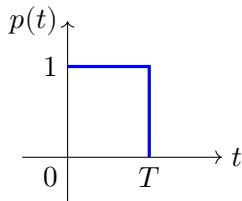
$$\boxed{\frac{A_i}{(s+a)^i} \xrightarrow{I\mathcal{L}T} A_i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} e^{-at} u(t)}$$

$$X(s) = \frac{N(s)}{[(s+a)^2 + \omega_0^2] D_1(s)} = \frac{As+B}{(s+a)^2 + \omega_0^2 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)}}$$

$$s_1 = -a - j\omega_0 \quad \text{ένας πόλος}$$

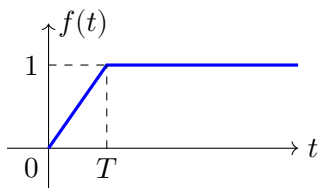
$$s_2 = -a + j\omega_0$$

**Ex. 1**



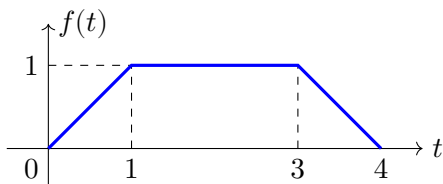
$$\begin{aligned}
 p(t) &= u(t) - u(t-T) \\
 \mathcal{L}\{p(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-T)\} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}
 \end{aligned}$$

**Ex. 2**



$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{t}{T} u(t) - \frac{t-T}{T} u(t-T) \\
 F(s) &= \frac{1}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{T} \frac{1}{s^2} e^{-sT} \\
 &= \frac{1}{Ts^2} [1 - e^{-sT}], \quad s > 0
 \end{aligned}$$

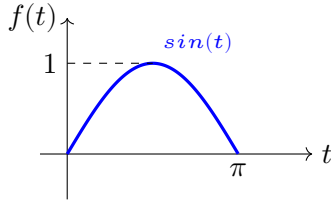
**Ex. 3**



$$f(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - (t-3)u(t-3) + (t-4)u(t-4)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} [1 - e^{-s} - e^{-3s} + e^{-4s}]$$

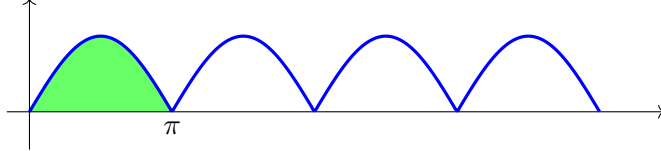
**Ex. 4**



$$f(t) = \sin(t)u(t) + \sin(t-\pi)u(t-\pi)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

**Ex. 5**



$$f(t) = |\sin t|u(t)$$

$$F(s) = \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 - e^{-\pi s}}$$

**Ex. 6**

$$F(s) = \frac{s^2 - 6}{s^3 + 4s^2 + 3s} = \frac{s^2 - 6}{s(s^2 + 4s + 3)} = \frac{s^2 - 6}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{\Gamma}{s+3}$$

απεισιγμένη συνάρτηση

$$= \frac{-2}{s} + \frac{5/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3}$$

$$f(t) = \left[ -2 + \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \right] u(t)$$

**Ex. 7**

$$F(s) = \frac{5s^3 - 6s - 3}{s^3(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma}{s^3} + \frac{\Delta}{(s+1)} + \frac{E}{(s+1)^2}$$

$$F(s) = \frac{-3}{s} - \frac{3}{s^3} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

$$f(t) = \left[ -3 - \frac{3}{2}t^2 - 3e^{-t} + 2te^{-t} \right] u(t)$$

**Ex. 8**

$$F(s) = \frac{16}{s(s^2+4)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B_1s+C_1}{s^2+4} + \frac{B_2s+C_2}{(s^2+4)^2}$$

$$16 = A(s^2+4)^2 + (B_1s+C_1)s(s^2+4) + (B_2s+C_2)s$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} - \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$f(t) = [1 - \cos 2t - t \sin 2t] u(t)$$



**Ex. 9**

$$f''' + 6f'' + 11f' + 6f = 1 \quad t \geq 0 \quad \underbrace{f = f' = f''}_{@0} = 0$$

$$\mathcal{LT} \{ \quad \}$$

$$s^3 F - \cancel{s^2 f_0} - \cancel{s f'_0} - \cancel{f''_0} + 6 [s^2 F - \cancel{s f_0} - \cancel{f_0}] + 11 [s F - \cancel{f_0}] + 6 F = \frac{1}{s}$$

$$F(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = \frac{1}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$F(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{-1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/6}{s+3}$$

$$f(t) = \left[ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t} \right] u(t)$$

Η μόνιμη κατάσταση που συντηρείται από το 1 στην διαφορική εξίσωση είναι το  $\frac{1}{6}$

## Θεώρημα Δειγματοληψίας

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

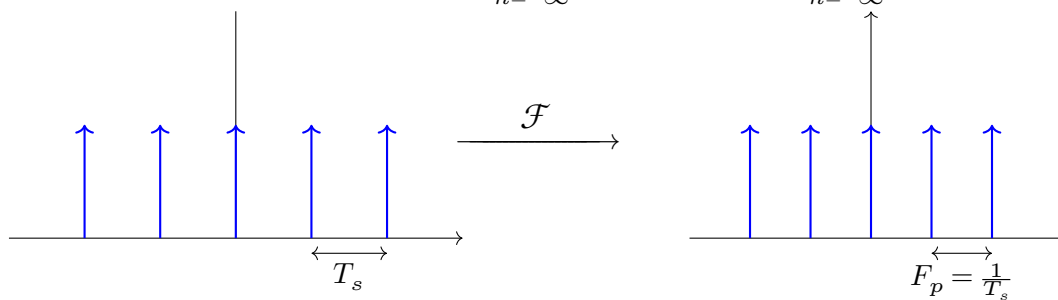
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f) * X_2(f)$$

$$X_1(f)X_2(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x_1(t) * x_2(t)$$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{t}$$

Συνάρτηση δειγματοληψίας:  $S_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF_p) \quad F_p = \frac{1}{T_s}$



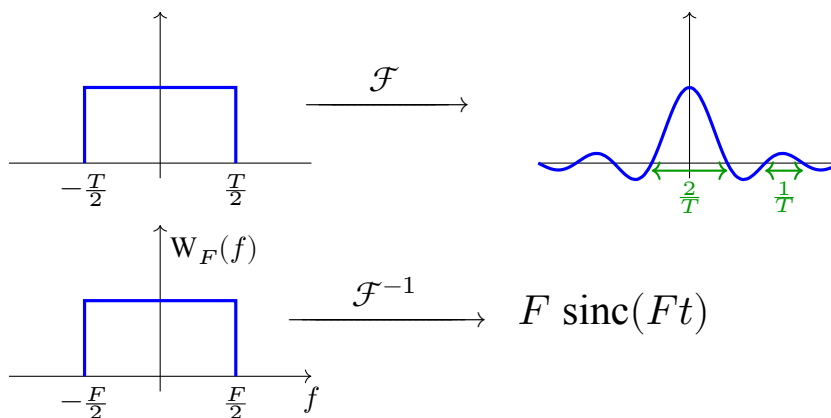
$$S_{F_s}(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} T_p S_{T_p}(t) \quad T_p = \frac{1}{F_s}$$

$$S_{\Xi_s}(\xi)$$

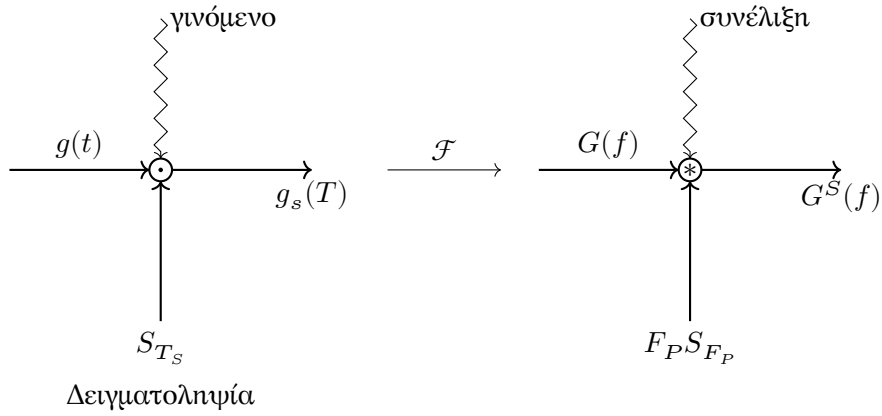
Αν κάπου δειγματοληπτώ, στον άλλο χώρο είναι περιοδικότητα

Συνάρτηση ορθογωνικού παραθύρου μήκους  $T$  στον κόσμο  $t$

$$W_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

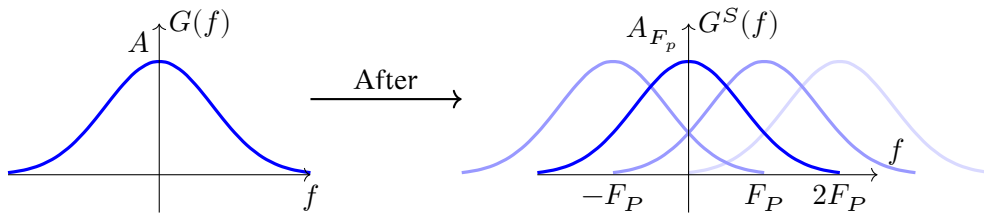


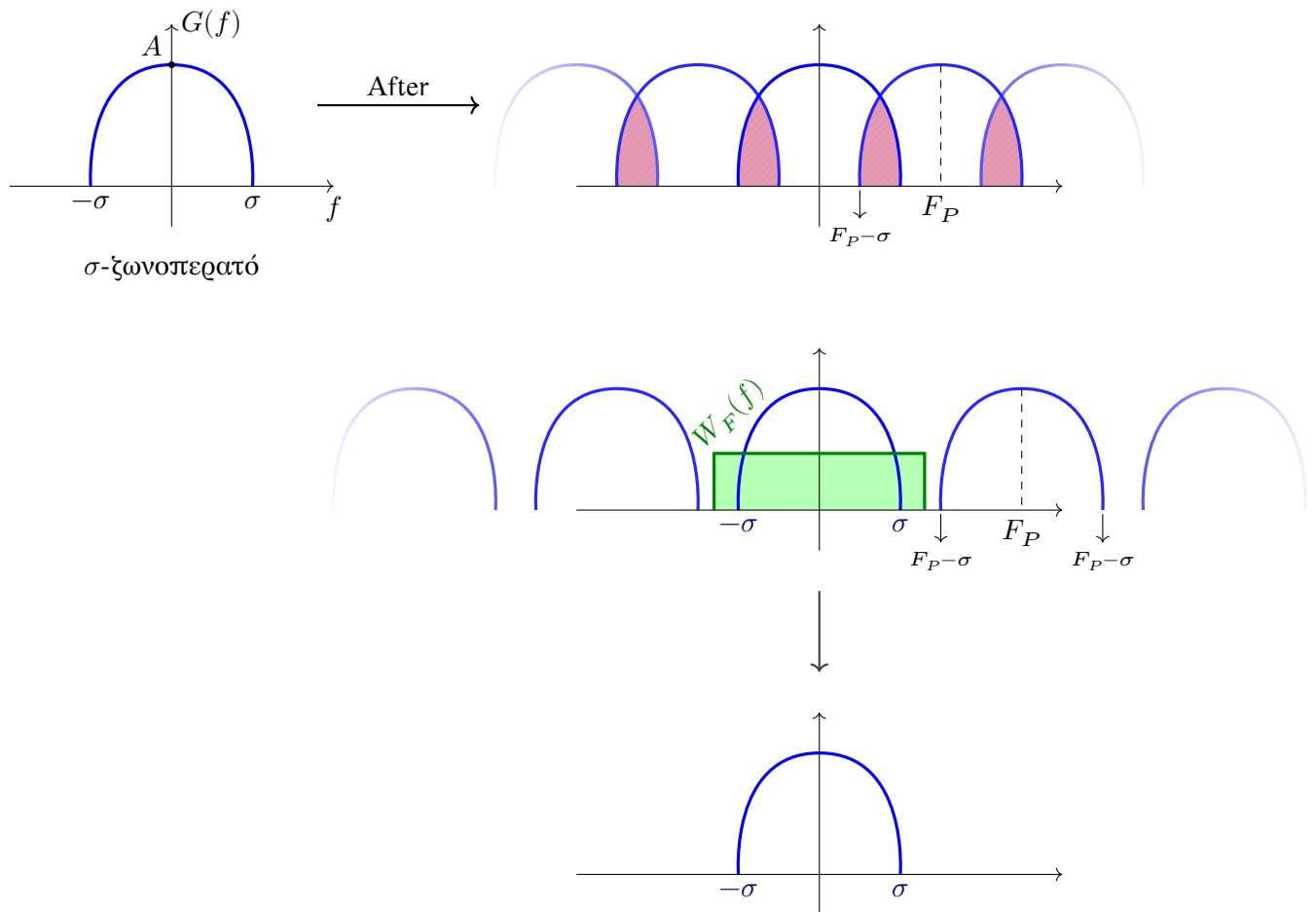
## Δειγματοληψία



$$\begin{aligned}
 G^S(f) &= G(f) * F_P S_{F_P}(f) \\
 &= F_P G(f) * \left( \sum_n \delta(f - nF_P) \right) \\
 &= F_P \sum_n G(f - nF_P)
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τις επικαλύψεις μεταξύ των διαδοχικών φασμάτων (aliasing). Για να περιοριστεί αυτό μπορούμε να αυξήσουμε το  $F_P$  ( $\Rightarrow$  να αυξήσουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας)





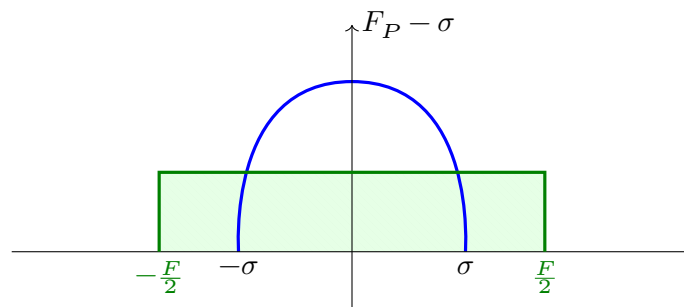
Για να μην έχουμε aliasing πρέπει:

$$F_p - \sigma > \sigma \implies F_p > 2\sigma$$

Nyquist's Criterion:

$$\underbrace{F_p}_{\text{max frequency}} > 2\tilde{\sigma}$$

συχνότητα δειγματοληψίας



$$W_F(f) : \sigma < F/2 < F_p - \sigma$$

$$\underbrace{F_p = W_F(f) \cdot G^S(f)}_{\downarrow FT} F_p g(t) = \mathcal{F}^{-1} \{W_F(f)\} * \mathcal{F}^{-1} \{G^S(f)\}$$

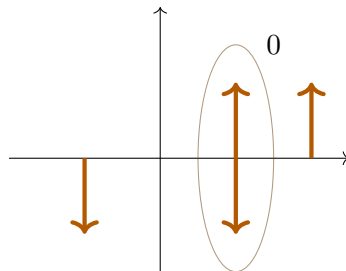
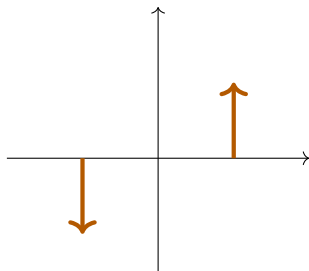
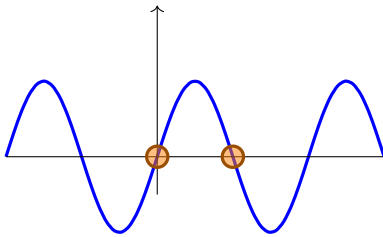
$$\begin{aligned}
F_p g(t) &= F \operatorname{sinc}(Ft) * \left( \underbrace{g(t) \cdot S_{T_s}(t)}_{g_s(t)} \right) \\
&= F \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sum_n \delta(t' - nT_s) \operatorname{sinc}(F(t - t')) dt' \\
&= F \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t' - nT_s) \operatorname{sinc}(F(t - t')) dt' \\
&= \frac{F}{F_p} \sum_n g(nT_s) \operatorname{sinc}(F \cdot (t - nT_s))
\end{aligned}$$

$$g(kT_s) = \frac{F}{F_p} \sum_n g(nT_s) \operatorname{sinc}(F(kT_s - nT_s))$$

$$F = F_p \quad g(kT_s) = \sum_n g(nT_s) \operatorname{sinc}(k - n)$$

Γενικά, αν  $F = F_p$ :

$$g(t) = \sum_n g(nT_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{T_s}(t - nT_s)\right)$$

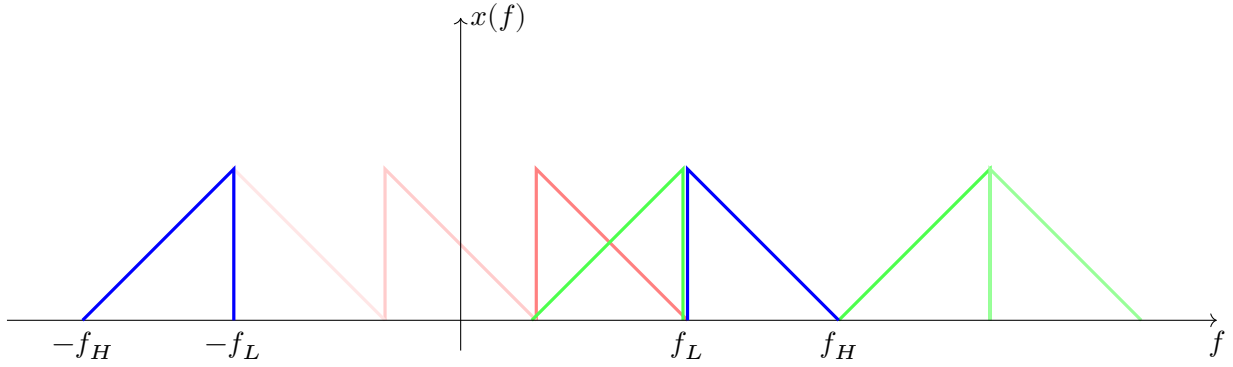


**Άσκηση για το σπίτι**

$$\phi_n^{F, T_s}(t) = \operatorname{sinc}(F(t - nF_p))$$

Να βρεθεί το  $\langle \phi_n(t), \phi_k(t) \rangle$ .

## Υποδειγματοληψία (undersampling)



Για να μην πέφτουν τα "πλακάκια" το ένα πάνω στο άλλο:

$$\left. \begin{aligned} \kappa f_s - f_L &< f_L \\ (\kappa + 1)f_s - f_H &> f_H \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f_s &< \frac{2f_L}{\kappa} \\ f_s &> \frac{2f_H}{\kappa+1} \end{aligned}$$

$$\frac{2f_H}{\kappa+1} < f_s < \frac{2f_L}{\kappa}$$

Ψάχνω το μέγιστο  $\kappa$ , έτσι ώστε να βρω το ελάχιστο  $f_s$

$$\frac{2f_H}{\kappa+1} < \frac{2f_L}{\kappa}$$

$$k \leq \frac{f_L}{f_H - f_L}$$

$$f_{s_{\min}} \leftarrow \kappa_{\text{best}} = \left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor$$

Θα ψάξω το ελάχιστο  $f_s$ :

$$\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor + 1} < f_s < \frac{2f_L}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor}$$

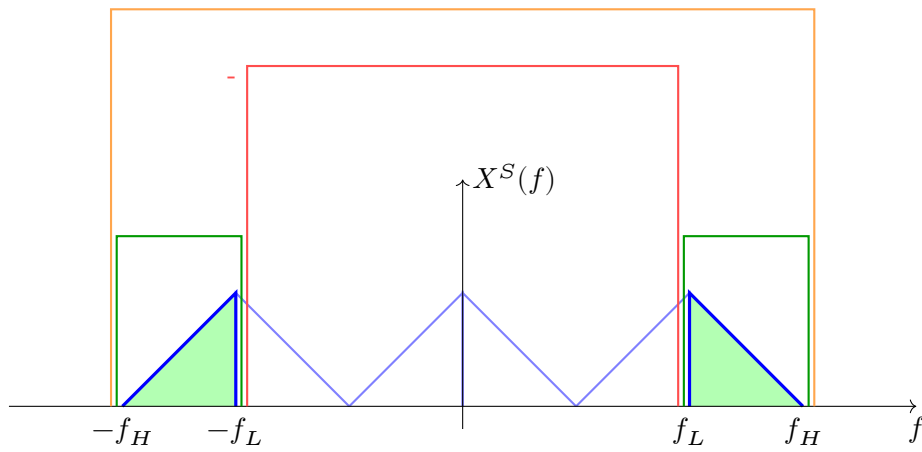
$$\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor + 1} < f_s < \frac{2f_L}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor + 1}$$

$$\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor} < f_s$$

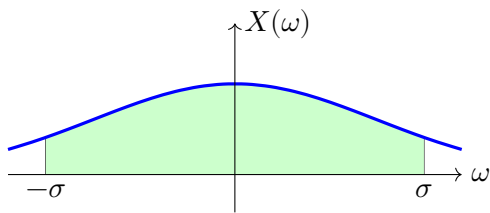
$$\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor} = \frac{2f_H}{\frac{f_H - f_L}{f_H - f_L} - \epsilon} = \frac{2f_H}{\frac{f_H - \epsilon f_H + \epsilon f_L}{f_H - f_L}} = \frac{2f_H(f_H - f_L)}{f_H(1 - \epsilon) + \epsilon f_L} = \frac{2(f_H - f_L)}{(1 - \epsilon) + \epsilon \frac{f_L}{f_H}}$$

$$= \frac{2(f_H - f_L)}{1 - \epsilon \left(1 - \frac{f_L}{f_H}\right)} > 2(f_H - f_L) \quad \text{αλλά όχι πολύ κοντά εκεί!}$$

$$2(f_H - f_L) < \boxed{\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor + 1} < f_s}$$



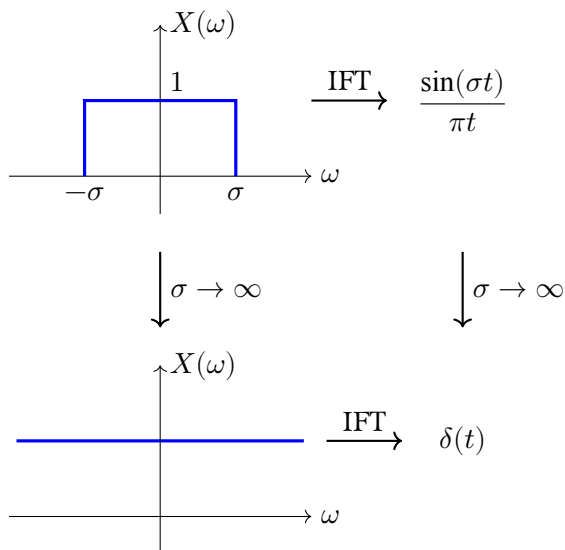
### Gibbs' Phenomenon



$$\begin{aligned}
 x(t) &\xrightarrow{FT} X(\omega) \\
 x_{\sigma}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j\omega \tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-j\omega \tau + j\omega t} d\omega d\tau = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \\
 &= \frac{1}{j(t-\tau)} e^{j\omega(t-\tau)} \Big|_{-\sigma}^{\sigma} \\
 &= \frac{1}{j(t-\tau)} \left[ e^{j\sigma(t-\tau)} - e^{-j\sigma(t-\tau)} \right] \\
 &= \frac{2}{t-\tau} \sin(\sigma(t-\tau))
 \end{aligned}$$

δηλαδή

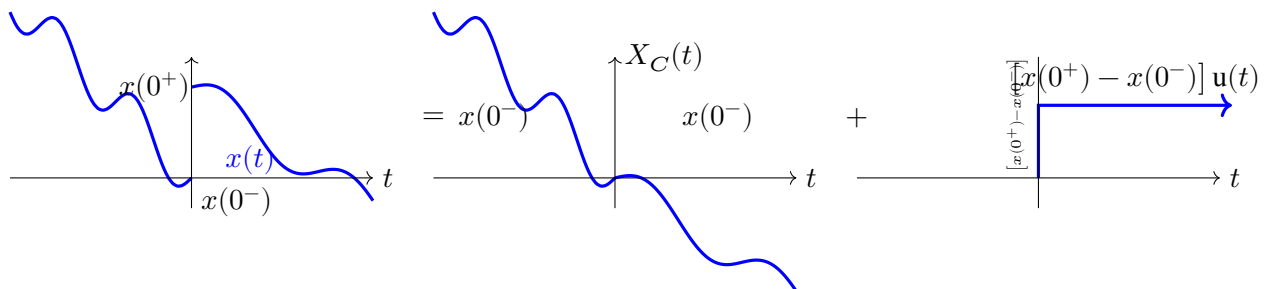
$$X_{\sigma}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{\sin(\sigma(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} d\tau$$



$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} x_{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\sin(\sigma(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} d\tau$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} x_{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} x_{\sigma}(t) = x(t)$$



$$x(t) = x_c(t) + [x(0^+) - x(0^-)] u(t)$$

$$x_{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \frac{\sin(\sigma(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} d\tau - \frac{[x(0^+) - x(0^-)]}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sigma(t-\tau))}{(t-\tau)} d\tau$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\sigma(t-\tau))}{t-\tau} d\tau$$

Θέτουμε  $\sigma(t-\tau) = x$   
 $d\tau = -\frac{1}{\sigma} dx$   
 $t-\tau = \frac{x}{\sigma}$

$$= \int_{\sigma t}^{\infty} \frac{\sin x}{\frac{x}{\sigma}} \left( \frac{\sin x}{x} dx \right) = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^{\sigma t} \frac{\sin x}{x} dx$$

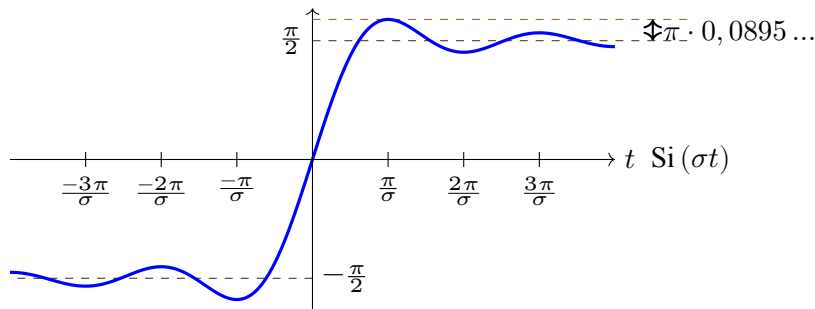
$$= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\sigma t} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\text{Si}(\sigma t)}_{\text{Sine Integral}}$$

Άρα

$$x_{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(\tau) \frac{\sin(\sigma(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} d\tau + \frac{[x(0^+) - x(0^-)]}{2} + \frac{[x(0^+) - x(0^-)]}{\pi} \cdot \text{Si}(\sigma t)$$



$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$$

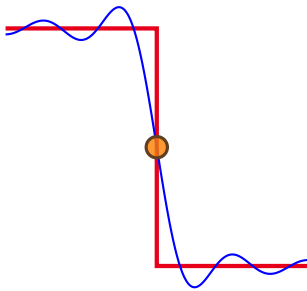


Χρησιμοποιώντας τον Leibniz Rule (παραγωγίζοντας το ολοκλήρωμα) μπορούμε να αποδείξουμε την θέση των μεγίστων της Si.

$$x_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \frac{\sin[\sigma(t-\tau)]}{\pi(t-\tau)} d\tau + \frac{x(0^+) - x(0^-)}{2} + \frac{[x(0^+) - x(0^-)]}{\pi} \text{Si}(\sigma t)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} x_\sigma(t) = x_c(t) + \frac{x(0^+) - x(0^-)}{2} + \frac{[x(0^+) - x(0^-)]}{\pi} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \text{Si}(\sigma t)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} x_\sigma(0) = x(0^-) + \frac{x(0^+) - x(0^-)}{2} = \frac{x(0^+) + x(0^-)}{2}$$



Παρατηρώ ότι τα ζιγκζακωτά παραμένουν και το ύψος του κυματισμού δεν αλλάζει. Το μόνο που μπορεί να μεταβληθεί είναι η θέση του μεγίστου, με αύξηση του  $\sigma$  (ώστε να έρθει πιο κοντά στο σημείο ασυνέχειας). Αυτό είναι το φαινόμενο Gibbs.

Εάν όμως το  $\sigma$  δεν τείνει στο  $\infty$ , το αποτέλεσμα στο 0 δεν είναι απαραίτητα το ημίαθροισμα των  $x(0^+)$  και  $x(0^-)$ .

Ευσταθές ονομάζεται ένα σύστημα όταν πεπερασμένη (φραγμένη στο πλάτος) είσοδος δίνει πεπερασμένη έξοδο - ΠΕΠΕ (Πεπερασμένη Είσοδος - Πεπερασμένη Έξοδος) / BIBO (Bounded Input - Bounded Output) ευστάθεια

Φραγμένη συνάρτηση  $f(t) \in BF$  σημαίνει ότι

$$\exists M > 0 : \forall t \quad |f(t)| < M$$

όπου  $BF$  ο κόσμος των φραγμένων συναρτήσεων.

Ένα σύστημα είναι ευσταθές όταν  $\forall$  είσοδο  $x(t) \in BF$  η έξοδος του συστήματος είναι επίσης φραγμένη ( $y(t) \in BF$ ). ( Αν το σύστημά μας είναι γραμμικό και ΑΚΜ (Αμετάβλητο Κατά τη Μετατόπιση)

$$\exists h(t) \text{ κρουστική απόκριση} \quad y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

Έστω

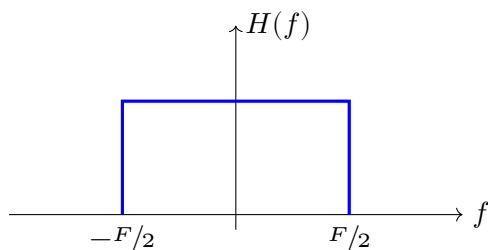
$$\exists M : \forall t, \quad |x(t)| < M \implies \\ |x(t - \tau)| < M$$

Επίσης έστω

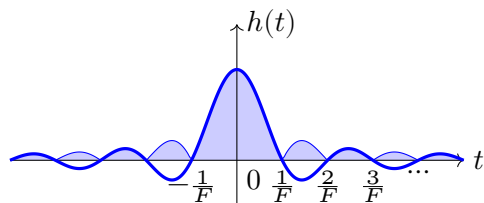
$$\exists N : |y(t)| < N \quad \forall t \\ |y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t - \tau) d\tau \right| < \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)x(t - \tau)| d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \frac{N}{M}$$

Εάν η κρουστική απόκριση είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, τότε το σύστημα είναι ευσταθές.

Έστω ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο:



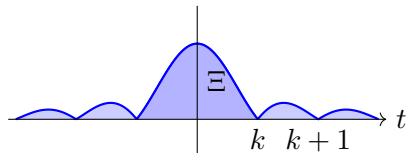
$$W_F(f) \xrightarrow{\text{IFT}} h(t) = F \operatorname{sinc}(Ft) = F \frac{\operatorname{sinc}(\pi Ft)}{\pi Ft}$$



Παρατηρώ ότι η κρουστική απόκριση του ιδανικού αυτού φίλτρου δεν είναι αιτιατή, οπότε ένα τέτοιο φίλτρο δεν είναι υλοποιήσιμο.

Άσκηση για το σπίτι: Η  $h(t)$  είναι απολύτως ολοκληρώσιμη;

**Απάντηση**



$$\int_0^{\pi} \sin(t) dt = 2k \leq t \leq k+1 \quad |h(t)| = \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| > \frac{|\sin(t)|}{k+1} \\ \int_1^{\infty} |h(t)| dt > \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int |\sin(t)| dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt > \Xi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k+1}$$

Δηλαδή το σύστημα του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου δεν είναι ευσταθές.

## Kramers - Kronig

Έστω  $h(t)$  αιτιατή - πραγματική συνάρτηση με MF:  $H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$

$$\text{Ξέρω } h(t) = \underbrace{h_e(t)}_{\text{even}} + \underbrace{h_o(t)}_{\text{odd}}$$

$$\text{Ξέρω } h_o(t) \xrightarrow{\text{FT}} H_o(\omega) \in \mathbb{I} \quad (\text{επίσης περιττή συνάρτηση})$$

$$\text{Ξέρω } h_e(t) \xrightarrow{\text{FT}} H_e(\omega) \in \mathbb{R} \quad (\text{επίσης άρτια συνάρτηση})$$

$$h_o(t) = -h_e(t) \quad t < 0$$

$$h_o(t) = h_e(t) \quad t \geq 0$$

$$\text{Συνεπώς } h(t) = h_e(t) + \text{sgn}(t)h_o(t)$$

$$h(t) = h_o(t) + \text{sgn}(t)h_o(t)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

$$\text{sgn}(t) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{2}{j\omega}$$

$$h(t) = h_e(t) + \text{sgn}(t)h_o(t) \xrightarrow{\text{FT}} H(\omega) = H_e(\omega) + \frac{1}{2\pi} \frac{2}{j\omega} * H_e(\omega) = H_e(\omega) - j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - \omega'} H_e(\omega') d\omega'$$

$$H(\omega) = \underbrace{H_e(\omega)}_{H_R(\omega)} - \underbrace{j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'}_{jH_I(\omega)}$$

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_R(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'$$

ομοίως από πάνω υπολογίζουμε το  $H_R$ .

## Συστήματα

### Ανακεφαλαίωση

#### Γραμμικά Αναλογικά Συστήματα

$$1. \text{Γραμμικότητα} \quad T[ax_1(t) + bx_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t) \quad \text{όπου} \quad \begin{matrix} y_1(t) = T[x_1(t)] \\ y_2(t) = T[x_2(t)] \end{matrix} \quad \forall x_1(t), x_2(t), a, b$$

$$2. \text{Χρονοαμετάβλητο} \quad T[x(t-k)] = y(t-k) \quad \text{όπου} \quad y(t) = T[x(t)] \quad \forall k, x(t)$$

$$3. \text{Στιγμιαίο } (\neq \text{δυναμικό}) \quad y(t) = f(x(t))$$

Η έξοδος οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t$  εξαρτάται μόνο από την είσοδο την ίδια στιγμή  $t$ .

Η αντίσταση είναι ένα στιγμιαίο σύστημα, ενώ ο πυκνωτής και το πηνίο δεν είναι.

$$4. \text{Αιτιατό} \quad \text{Η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου}$$

$$\left[ \begin{matrix} \text{ΞΕΡΩ} \\ \text{Γραμμικό} \\ \text{Χρον. Αμετάβλητο} \end{matrix} \right] \rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

5. Ευσταθές Για κάθε φραγμένη είσοδο, η έξοδος είναι φραγμένη.

$$\begin{bmatrix} \Xi \Gamma \Omega \\ \text{Γραμμικό} \\ \text{Χρον. Αμετάβλητο} \end{bmatrix} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

6. Συγκεντρωμένο και Κατανεμημένο Συγκεντρωμένο λέγεται όταν μοναδική ελεύθερη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$ .

**Παράδειγμα** Το σύστημα  $y(t) = x^2(t)$  είναι:

1. Μη γραμμικό
2. Χρονοαμετάβλητο
3. Δυναμικό
4. Αιτιατό
5. Ευσταθές
6. Συγκεντρωμένο

**Περιγραφή συστήματος με διαφορική εξίσωση**

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{l=0}^m b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t) \quad t \geq 0$$

1. Γραμμικό
2. Χρονοαμετάβλητο
3. Δυναμικό, εκτός αν  $n = m = 0$
4. Αιτιατό

Ολική λύση = Ομογενής + Μερική Λύση

Ολική λύση =  $\underbrace{\text{Εξαναγκασμένη λύση}}_{\text{λύση θεωρώντας δεδομένη } x(t) \text{ και μηδενικές Α.Σ.}} + \underbrace{\text{Ελεύθερη λύση}}_{\text{Λύση θεωρώντας } x(t)=0 \text{ και δεδομένες Α.Σ.}}$

(Τα ζευγάρια ομογενής/ελεύθερη & εξαναγκασμένη/μερική δεν ταυτίζονται!)

Ολική λύση = Λύση μόνιμης κατάστασης + μεταβατική λύση

**M. Laplace**

$$\int_{i=0}^n a_i \left( s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-k-1} y_0^{(k)} \right) = \int_{l=0}^m b_l \left( s^l X(s) - \sum_{k=0}^{l-1} s^{l-k-1} x_0^{(k)} \right)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\sum_{l=0}^m b_l s^l}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} X(s) - \frac{\sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^{l-1} b_l s^{l-k-1} x_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}}_{\text{εξαναγκασμένη}} + \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-k-1} y_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}}_{\text{ελεύθερη}}$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

Συγκρίνοντας με τον παραπάνω τύπο, παρατηρούμε ότι η  $y(t) = x(t) * h(t)$  μόνο όταν οι αρχικές συνθήκες είναι 0!

**M. Fourier** Για να λύσω το σύστημα  $\forall t > 0$ , θα πρέπει να μετασχηματίσω το αιτιατό κομμάτι του συστήματος μόνο:

$$x_1(t) = x(t)u(t)$$

$$y_1(t) = y(t)u(t)$$

Άρα:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt}u(t) + x(0)\delta(t)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy}{dt}u(t) + y(0)\delta(t)$$

$$\frac{d^i y_1(t)}{dt^i} = \frac{d^i y}{dt^i}u(t) + \sum_{k=0}^{i-1} y_0(k)\delta(\tau)^{(\tau-1-k)}$$

$$\frac{d^i x_1(t)}{dt^i} = \frac{d^i x}{dt^i}u(t) + \sum_{k=0}^{i-1} x_0(k)\delta(\tau)^{(i-1-l)}$$

$$\sum_{i=1}^N a_i \frac{d^i y_1}{dt^i} = \sum_{l=0}^m b_l \frac{d^l x_1}{dt^l}$$

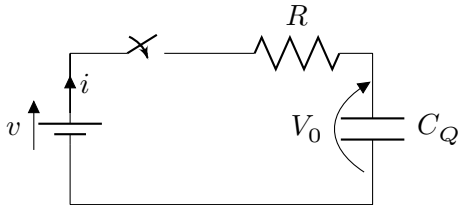
Τελικά προκύπτει ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y_1$  που μας ενδιαφέρει είναι:

$$y_1(t) = \text{IFT} \left\{ \frac{\sum_{l=0}^m \log(j\omega)^l}{\sum_{i=0}^n a_i(j\omega)^i} X_1(\omega) - \frac{\sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^{l-1} b_l(j\omega)^{l-k-1} x_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^n a_i(j\omega)^i} + \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i(j\omega)^{i-1-k} y_0^{(k)}}{\sum_{i=0}^n a_i(j\omega)^i} \right\}$$

Για την έξοδο σε ένα αιτιατό σύστημα θα χρησιμοποιώ M/Σ Laplace.

Για μελέτη στη μόνιμη κατάσταση ( $t \rightarrow \infty$ ), όπου οι αρχικές συνθήκες δεν συνεισφέρουν, θα χρησιμοποιώ M/Σ Fourier, παίρνοντας τον μετασχηματισμό όλης της συνάρτησης και όχι μόνο του αιτιατού μέρους της.

**Ex.1**



$$v(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + V_0 u(t)$$

$$V(s) = RI(s) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} + \frac{V_0}{s}$$

$$\xrightarrow{V_0=0} H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{RCs + 1} \cdot \frac{S/R}{S + 1/RC}$$

$$= \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{1/RC}{s + 1/RC} \right)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC} \right)$$

$$h(t) = \text{ILT} \{H(s)\} = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

$$\text{Έξοδος } i(t) = h(t) * V(t) = \left[ \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-1/RC \cdot t} \right] * [Vu(t)] = \dots = \frac{V}{R} e^{-t/RC} u(t)$$

Επειδή όμως οι αρχικές συνθήκες δεν είναι μηδενικές (ο πυκνωτής είναι φορτισμένος), το παραπάνω αποτέλεσμα είναι λάθος!

Η σωστή λύση είναι:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + V_0 u(t) \\
 V(s) &= RI(s) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} + \frac{V_0}{s} \\
 I(s) \left[ R + \frac{1}{Cs} \right] &= V(s) - \frac{V_0}{s} \\
 I(s) &= \frac{V(s) - V_0/s}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{(V - V_0)}{s} \cdot \underbrace{\frac{1}{R + \frac{1}{Cs}}}_{H(s)} \\
 i(t) &= \frac{V - V_0}{R} e^{-t/RC} u(t) \\
 &= \underbrace{\frac{V}{R} e^{-t/RC}}_{\text{εξαναγκασμένη λύση}} - \underbrace{\frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}_{\text{μεταβατική λύση}}
 \end{aligned}$$

## Decibels (dB)

Έστω

$$x_A(t) = A \sin(\omega_1 t)$$

$$y_B(t) = B \sin(\omega_1 t)$$

$$x_A \text{ πλάτος } A > 0$$

$$x_B \text{ πλάτος } B > 0$$

$$\text{dB} = 20 \log_{10} \frac{A}{B}$$

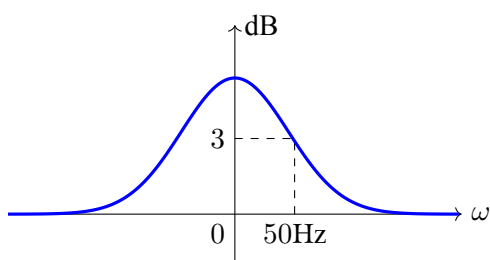
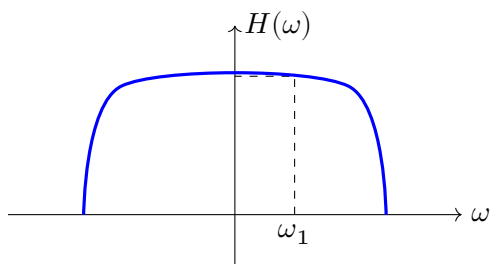
Για την ισχύ:

$$c \cdot x_A^2 \text{ ισχύς } A$$

$$c \cdot x_B^2 \text{ ισχύς } B$$

$$\text{dB} = 10 \log_{10} \frac{A^2}{B^2}$$

Παρατηρούμε ότι τα dB πλάτους και dB ισχύος είναι το ίδιο!



$\pm 3\text{dB}$  σημαίνει (υπο)διπλασιασμό της ισχύος, ή πολλαπλασιασμό/διαίρεση του πλάτους με  $\sqrt{2}$ .

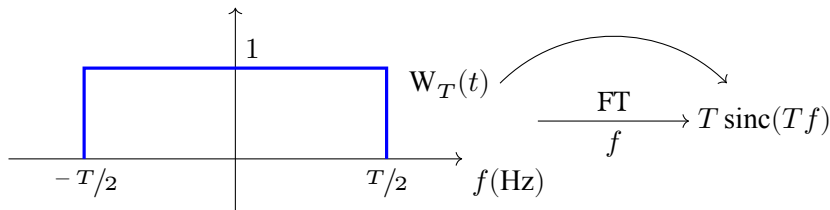
## Ασκήσεις

**Άσκηση**  $x(t) = 4000 \text{sinc}(4000t)$

(α)  $X(f) = ?$

(β) Nyquist Συχνότητα για τα  $x(t)$  και  $x^2(t)$

(α)

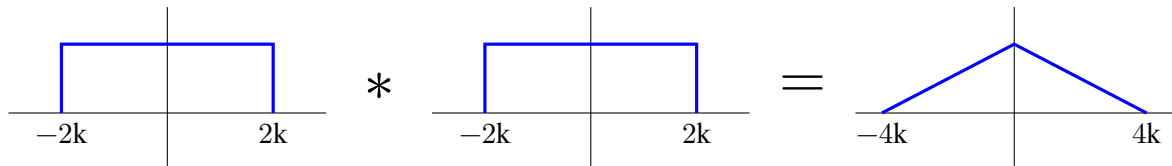


$$T \text{sinc}(Tt) \xrightarrow{\text{FT}} W_T(f)$$

$$x(t) = 4000 \text{sinc}(4000t) \xrightarrow{\text{FT}} W_{4000}(f) = \begin{array}{c} \uparrow 1 \\ \text{rectangular pulse from } -2000 \text{ to } 2000 \text{ Hz} \end{array}$$

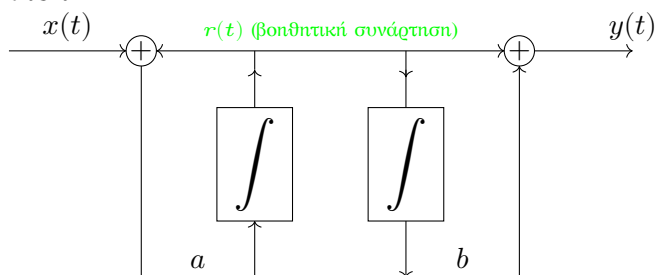
(β) Nyquist συχνότητα για το  $x(t)$  είναι  $2 \times 2000 \text{ Hz} = 4000 \text{ Hz}$

$$\text{FT} \{x^2(t)\} = \text{FT} \{x(t)x(t)\} = X(f) * X(f)$$



Για το  $x^2(t)$  η Nyquist είναι  $2 \cdot 4 \text{ kHz} = 8 \text{ kHz}$

**Άσκηση**



### Σημείωση

- $\xrightarrow{a}$  δηλώνει πολλαπλασιασμό με τον αριθμό  $a$
- $\int$  σημαίνει ολοκλήρωση

$$\int a(x+r) dt = r \xRightarrow{d/dt} \frac{dr}{dt} = ax + ar \quad (1)$$

$$r + b \int r dt = y \Rightarrow \frac{dr}{dt} + br = \frac{dy}{dt} \quad (2)$$

$$(1) - (2) \implies r(a+b) = \frac{dy}{dt} - ax$$

$$r = \frac{1}{a+b} \left( \frac{dy}{dt} - ax \right)$$

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2} - a\frac{dx}{dt}}{a+b} + \frac{-a}{a+b} \left( \frac{dy}{dt} - ax \right) = ax$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - a\frac{dy}{dt} = a\frac{dx}{dt} + abx \implies$$

$$\implies s^2Y(s) - asY(s) = asX(s) + abX(s)$$

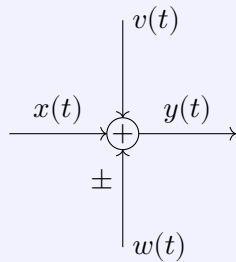
$$\implies \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{a(s+b)}{s(s-a)}$$

Av  $\text{Re}\{a\} < 0$ , τότε  $H(\omega) = \frac{a(j\omega + b)}{j\omega(j\omega - a)}$

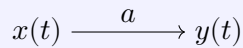


Ένα διάγραμμα όπως τα παρακάτω μπορεί να περιέχει:

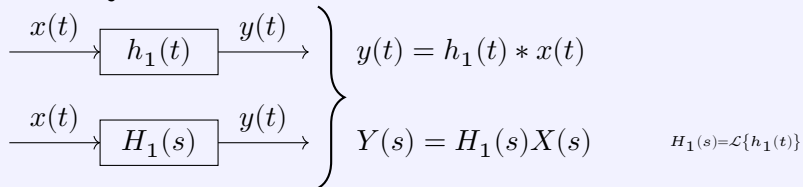
**Τελεστή άθροισης**  $y(t) = x(t) + v(t) \pm w(t)$



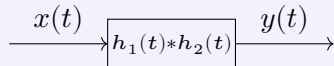
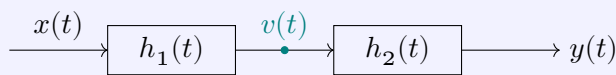
**Γινόμενο συνάρτησης με αριθμό**  $y(t) = ax(t)$



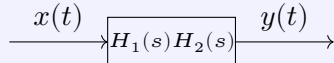
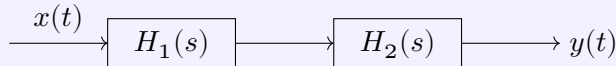
**Συνέλιξη**



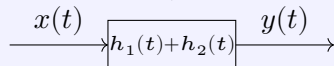
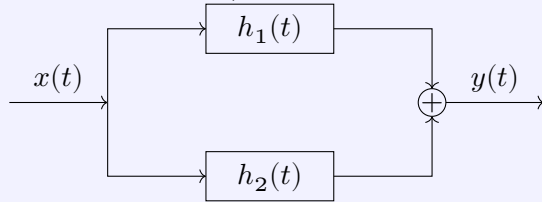
**Συνδυασμός (σε σειρά)**  $y(t) = h_2(t) * v(t) = h_2(t) * (x(t) * h_1(t)) = [h_1(t) * h_2(t)] * x(t)$



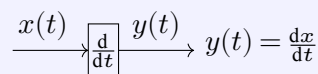
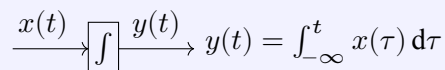
ή



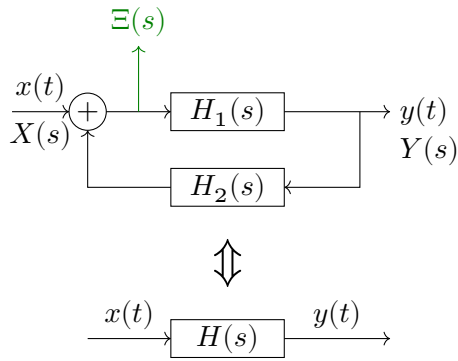
**Συνδυασμό (παράλληλα)**



**Τελεστές**

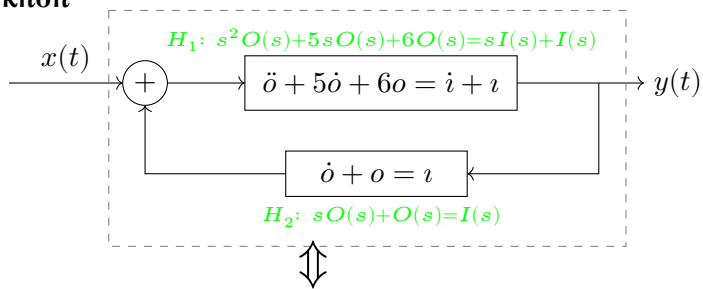


**Άσκηση** Να βρεθεί το ισοδύναμο του block diagram:



$$\begin{aligned}
 Y(s) &= H_1(s) \cdot \Xi(s) \\
 &= H_1(s) \cdot [X(s) + Y(s)] \implies \\
 Y(s) &= H_1(s) [X(s) + H_2(s)Y(s)] \implies \\
 Y(s) [1 - H_1(s)H_2(s)] &= H_1(s)X(s) \\
 Y(s) &= H(s)X(s) \\
 H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)}
 \end{aligned}$$

**Άσκηση**

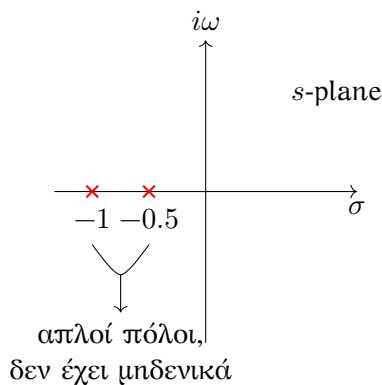


$$\begin{aligned}
 H_1(s) &= \frac{O(s)}{I(s)} = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+3)(s+2)} \\
 H_2(s) &= \frac{O(s)}{I(s)} = \frac{1}{s+1}
 \end{aligned}$$

$H_1, H_2$  ευσταθή, αφού οι πόλοι τους βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο

$$Y(s) = H_1(s) \cdot [X(s) - H_2(s)Y(s)] \implies \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

**Άσκηση**



Αν η είσοδος  $x(t) = u(t)$ , βρίσκω μετά από "πολλά χρόνια" ότι  $y(t) = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$ .  
Να βρεθεί ολόκληρη η  $y(t)$ .

$$H(s) = \frac{k}{(s+1)(s+1/2)}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{k}{(s+1)(s+1/2)} \frac{1}{s}$$

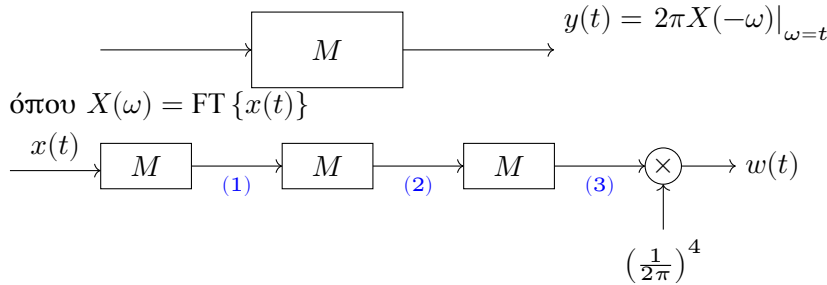
Όμως  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$

$$1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{k}{(s+1)(s+1/2)} \frac{1}{s} s \right] = 2k \Rightarrow \boxed{k = 1/2}$$

Άρα  $Y(s) = \frac{1/2}{s(s+1)(s+1/2)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{-2}{s+1/2}$

$$y(t) = [1 + e^{-t} - 2e^{-t/2}] u(t)$$

### Άσκηση



Για να υπάρχει συνάρτηση μεταφοράς του  $M$ , πρέπει να είναι γραμμικό & αμετάβλητο:

$$x(t) \rightarrow 2\pi X(-t)$$

$$y(t) \rightarrow 2\pi Y(-t)$$

$$ax + \beta y(t) \rightarrow a2\pi X(-t) + \beta 2\pi Y(-t) \text{ good}$$

$$x(t) \rightarrow 2\pi X(-\omega)|_{\omega=t}$$

$$y(t) \rightarrow 2\pi e^{-j\tau} X(-\tau)$$

Έχω:

$$y_1(t) = 2\pi X(-\omega)|_{\omega=t} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) e^{-j\tau_1(-\omega)} d\tau_1 \Big|_{\omega=t} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) e^{j\tau_1 t} d\tau_1$$

$$y_2(t) = 2\pi Y_1(-\omega)|_{\omega=t} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau_2) e^{-j\tau_2(-\omega)} d\tau_2 \Big|_{\omega=t}$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) e^{j\tau_1 \tau_2} d\tau_1 e^{-j\tau_2(-\omega)} d\tau_2 \Big|_{\omega=t}$$

$$= (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\tau_2(\tau_1+t)} d\tau_2 d\tau_1$$

$$= (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) 2\pi \delta(\tau_1+t) d\tau_1 = (2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) \delta(\tau_1+t) d\tau_1 = (2\pi)^3 x(-t)$$

$$Y_2(\omega) = (2\pi)^3 X(-\omega)$$

$$y_3(t) = 2\pi Y_2(-\omega)|_{\omega=t} = (2\pi)^3 X(\omega)|_{\omega=t}$$

$$= (2\pi)^4 X(t)$$

Στις εξετάσεις θα κουβαλήσουμε ένα δικό μας μαθηματικό τυπολόγιο (π.χ. Schaum's Tables & Formulas)