

<http://users.auth.gr/natreas>

Σημειώσεις: Εγώ Κεφ. 3-4-5

Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6

Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marsden (πιο μαθηματικό)

Μέρος I

Ατρέας

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί Αριθμοί

$$\text{Έστω } \mathbb{C} = \left\{ \begin{array}{c} \text{γεωμετρική παράσταση μιγαδικού} \\ z = \overbrace{(x, y)}; x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $z_2 = (x_2, y_2)$, τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο $\lambda \in \mathbb{R}$ με μιγαδικό z

Αν $z = (x, y)$, τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

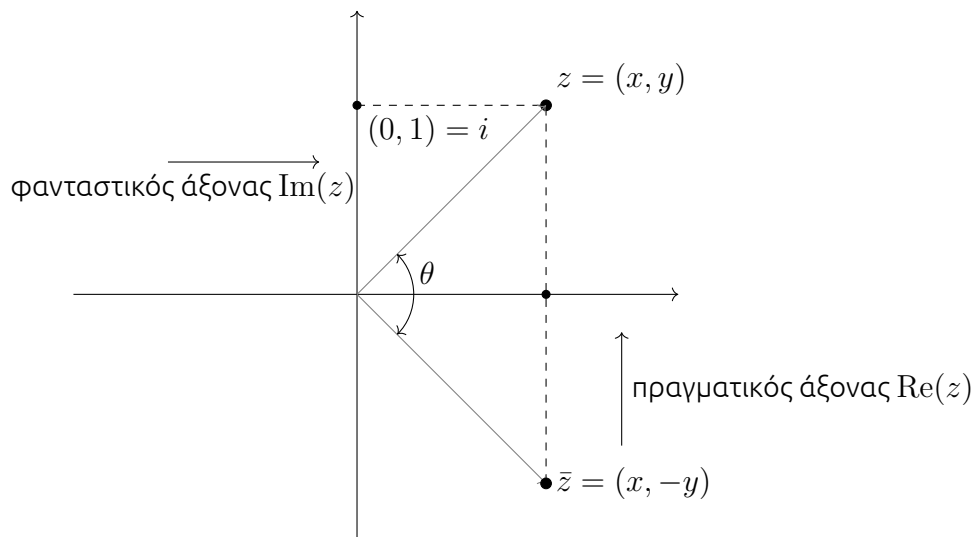
Αν $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του \mathbb{C} είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{1-1} A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

- $(x, 0), (y, 0) \in A \implies (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in A$
- $(x, 0)(y, 0) = (xy, 0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$1 = (1, 0)$$

$$x = (x, 0)$$

Ορίζω:

$$i = (0, 1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Έτσι:

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$\stackrel{x=(x,0)}{=} x \cdot 1 + y \underset{i=(0,1)}{i}$$

$$\implies \boxed{z = x + iy}$$

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z = (x, y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\substack{\text{πολικές} \\ \text{του } (x,y)}}{=} \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \\ &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} z &= |z| \underbrace{(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= |z| \cdot e^{i\theta} \end{aligned}$$

όπου στο εξής:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}$$

$\boxed{\text{τύπος του Euler}}$

Τελικά:

$$\boxed{z = |z| e^{i\theta}} \quad (\text{πολική μορφή μιγαδικών})$$

Σημείωση: $\cos \theta + i \sin \theta$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\substack{\text{σειρές} \\ \text{McLaurin}}}{=} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \\ &\stackrel{i^2=-1}{=} \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \right) \\ &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta} \end{aligned}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα $\text{Arg} z$ (μη μηδενικού) μιγαδικού z να είναι η γωνία θ που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του \mathbb{C} με την ημιευθεία OA , όπου A το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του $z = x + iy$.

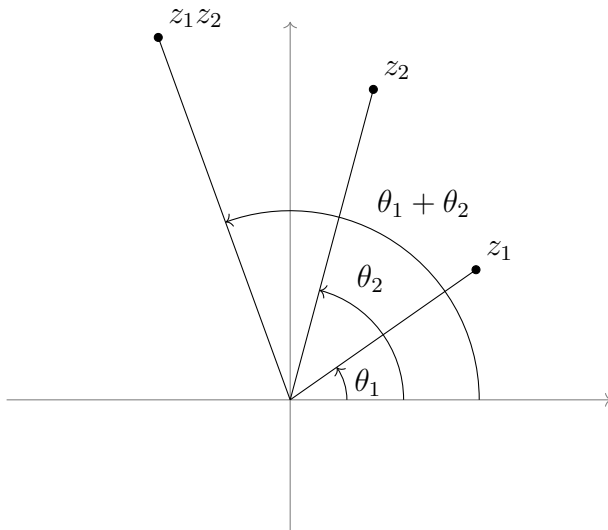
Έτσι:

$$z = |z| e^{i \text{Arg } z} \quad \text{πολική μορφή του } z$$

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i \text{Arg } z_1} |z_2| e^{i \text{Arg } z_2}$$

$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2)}}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} \\ &= \left| \frac{z_1}{z_2} \right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$



Ιδιότητα: $z\bar{z} = |z|^2$

Κεφάλαιο 2 Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

π.χ.

$$f(z) = z^2 \implies f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{Re}(f)} + i \underbrace{(2xy)}_{\text{Im}(f)}$$

$$\stackrel{\text{γεωμετρική}}{\equiv} \stackrel{\text{μορφή}}{(x^2 - y^2, 2xy)}$$

Τελικά: $\boxed{f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)} \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

π.χ.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{|z|\bar{z}} \stackrel{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z} \\ \stackrel{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} &= \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \stackrel{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x, y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \stackrel{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}} \end{aligned}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

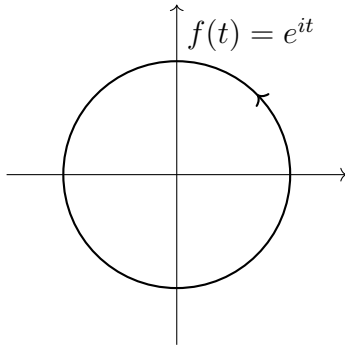
$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιν. μεταβλ.}} \xleftrightarrow{1-1} \begin{matrix} \text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \end{matrix}$$

όπου u, v πραγμ. συναρτ. 2 μεταβλητών

Υπάρχουν $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, μιγαδικές πραγματικής μεταβλητής
π.χ

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{it}, t \in (0, \pi] \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

$$t \rightarrow (\cos t, \sin t) \quad \text{καμπύλη } x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$



Η γραφ. παράσταση της $f(t) = e^{it}$, $t \in (-\pi, \pi)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0, 0)$ με αντιωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1, t) = (1, 0) + t(0, 1)$$

Το πεδίο ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδ. μεταβλητών υπολογίζεται ως συνήθως (με τις πραγματικές συναρτήσεις) ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ Διαφοροποιήσεις

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Πρέπει ο παρον. να είναι διάφορος του μηδενός: Έτσι $z \neq 0$ Άρα Π.Ο = $\mathbb{C} - \{(0, 0)\}$

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 2}$$

Σημείωση Η g είναι **ρητή** συνάρτηση (δηλ. πηλίκο δύο (μιγαδικών) πολυωνύμων).

Κάθε συνάρτηση της μορφής $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ καλείται (μιγαδικό) πολύωνυμο.

Πρέπει παρον. $\neq 0$ δηλ:

$$z^2 + 2 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{ΠΡΟΣΟΧΗ!! Κάθε μιγαδικό} \\ \text{πολύωνυμο βαθμού } N \text{ έχει} \\ \text{ΑΚΡΙΒΩΣ } N \text{ ρίζες στο } \mathbb{C} \end{array} \right)$$

$$z^2 + 2 = 0 \xrightarrow{i^2 = -1} z^2 - 2i^2 = 0$$

$$\implies (z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i) = 0$$

$$\implies \boxed{z = \pm \sqrt{2}i}$$

Τελικά Π.Ο = $\mathbb{C} - \{\pm \sqrt{2}i\}$

$$h(z) = \operatorname{Arg} z, \text{ Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}$$

Για $z = 0$ ΔΕΝ ορίζεται όρισμα, επειδή $0 = |0| \cdot e^{i\theta} \forall \theta$

Σημείωση $az^2 + bz + c = 0$

$a, b, c \in \mathbb{C}$

Λύνεται με διακρίνουσα κατά τα γνωστά.

Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα Horner για πολυώνυμα (με πραγματικούς συντελεστές) βαθμού $N \geq 3$.

$$\begin{aligned} a(z) &= e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= (e^x \cos y, e^x \sin y), \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ως διανυσματικό πεδίο προφανώς $\text{Π.Ο} = \mathbb{R}^2$

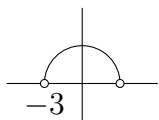
Έτσι $\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$.

$l(z) = \operatorname{Log}$ (αντίστροφη της e^z)

$$\underbrace{\operatorname{Log}}_{\text{ορισμός}} := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

μιγαδικός λογάριθμος

$$\text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(3) &= \ln |-3| = i \operatorname{Arg}(-3) \\ &= \ln 3 + i\pi \end{aligned}$$

$$\lambda(z) = \sin z \stackrel{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\left(\begin{array}{lcl} e^{i\theta} & = & \cos \theta + i \sin \theta \quad \theta \in (-\pi, \pi] \\ e^{-i\theta} & = & \cos \theta - i \sin \theta \\ \hline \sin \theta & = & \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right)$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$

$$m(z) = \cos z \stackrel{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\text{Π.Ο} = \mathbb{C}$

Όλες οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες ισχύουν στο \mathbb{C} όπως στο \mathbb{R} .

$$h(z) = \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{2k\pi + \text{Arg } z}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

(Η $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται ως το **σύνολο** όλων των λύσεων της εξίσωσης $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$)

$$\Pi.O = \mathbb{C} - \{0\}$$

2.1 Όριο/Συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής

Ορισμός

Έστω $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ μιγ. συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι σ.συσσ. του A και έστω $a = a_0 + ib_0$. Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) &= a \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow & \\ \left\{ \begin{array}{l} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a_0 \\ \textbf{ΚΑΙ} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b_0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Επίσης, αν $z_0 \in A$, τότε

f συνεχής στο σημείο z_0

$$\Leftrightarrow$$

οι συναρτήσεις $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ΣΥΝΕΧΕΙΣ στο σημείο (x_0, y_0) (ως πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

Έτσι:

$$\left. \begin{array}{l} \text{οι πολυωνυμικές} \\ \text{η εκθετική} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\sin z, \cos z) \\ \text{οι υπερβολικές } (\text{ch}, \text{sh}) \end{array} \right\} \text{συνεχείς στο } \mathbb{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{οι ρητές} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\tan z, \cot z) \end{array} \right\} \text{συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους}$$

Ορίζω το ∞ του μιγαδικού επιπέδου να είναι το σύνολο σημείων που απέχουν "άπειρη" απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται ως:

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{ όπου:}$$

$$\infty + z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\infty \cdot z = \infty \quad \forall z \neq 0$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \neq \infty$$

Όλες οι πράξεις του ορίου που ξέρετε ισχύουν και στους μιγαδικούς (αρκεί να μην εμφανίζονται οι γνωστές απροσδιόριστες μορφές):

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Ο κανόνας De l' Hospital ισχύει στους μιγαδικούς.

Σημείωση:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \in \mathbb{C} \iff \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = a \in \mathbb{C}$$

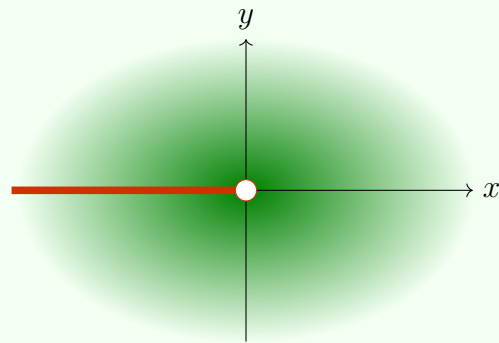
$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$$

Θ.

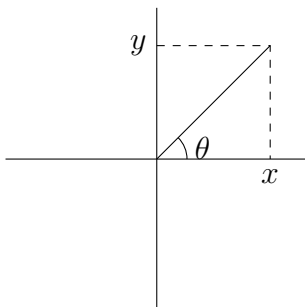
Έστω $\text{Arg } z : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$
Τότε η $\text{Arg } z$ **είναι συνεχής** στο σύνολο:

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ ΚΑΙ } y = 0\}$$

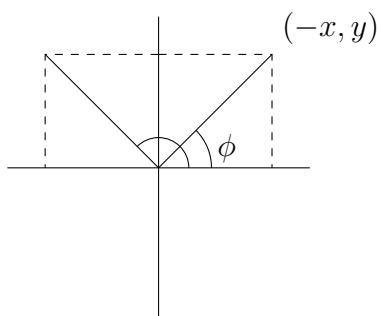


Έστω $z = x + iy$

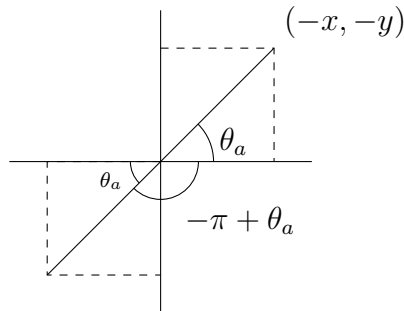
(α) $x > 0, y > 0$



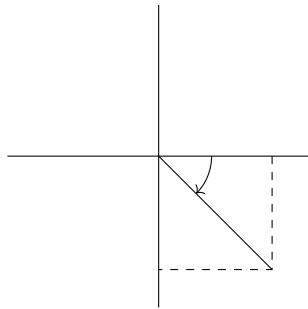
(β) $x < 0, y > 0$



(γ) $x < 0, y < 0$



(δ) $x > 0, y < 0$



$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x, y > 0 \\ \pi - \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x < 0, y > 0 \\ -\pi + \arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x < 0, y < 0 \\ -\arctan \left| \frac{y}{x} \right|, & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

Για $x = 0$, τότε $\operatorname{Arg} := \frac{\pi}{2}$ ή $-\frac{\pi}{2}$
 Για $y = 0$, τότε $\operatorname{Arg} := 0$ ή π

Έστω $z_0 = x_0 < 0$

• Έστω $z = x_0 + it$ ($t > 0$)

Για $t \rightarrow 0^+$, $z \rightarrow z_0 = x_0$, αλλά:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Arg} z \stackrel{z=x_0+it}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \operatorname{Arg} (x_0 + it) \stackrel{\text{2ο τετ.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\pi - \arctan \left| \frac{t}{x_0} \right| \right) = \pi - \arctan 0 = \pi$$

• Για $z = x_0 + it$ ($t < 0$), τότε:

$t \rightarrow 0^-$, $z \rightarrow z_0$, και

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Arg} z = \lim_{t \rightarrow 0^-} \operatorname{Arg} (x_0 + it) \stackrel{\text{3ο τετ.}}{=} -\pi + \arctan 0 = -\pi$$

Άρα το όριο στο $z_0 = x_0$ ΔΕΝ υπάρχει, και έτσι η $\operatorname{Arg} z$ ασυνεχής στα $z = x_0$ με $x_0 \leq 0$.

Αν $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$ πού είναι ασυνεχής;

2.2 Μιγαδική παράγωγος

Την εβδομάδα της 28^{ης} θα γίνουν κανονικά τα μαθήματα του Ατρέα.

Ορισμός

Έστω $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο σημείο z_0 , αν υπάρχει το ΟΡΙΟ:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a \in \mathbb{C}$$

(ή ισοδύναμα $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = a \in \mathbb{C}$)

Στο εξής το όριο αυτό συμβολίζουμε με $f'(z_0)$ ή $\frac{df(z_0)}{dz}$

Ορισμός

Αν $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$, θα λέμε στο εξής ότι η f είναι ΟΛΟΜΟΡΦΗ (ή ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - holomorphic/analytic) **στο σημείο z_0** , εάν η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **ΣΕ ΚΑΘΕ**

ΣΗΜΕΙΟ του ανοικτού δίσκου



$$D_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

για κάποιο $\epsilon > 0$

Αν f ολόμορφη σε ΚΑΘΕ σημείο του A λέμε ότι η f ολόμορφη στο A .

Ορισμός

Αν A μη ανοικτό, λέμε ότι η f ολόμορφη στο A , αν υπάρχει $B \supset A$, B ανοικτό ώστε η f στο B .

Όλες οι γνωστές ιδιότητες της παραγώγου που γνωρίζετε ισχύουν και για τη μιγαδική παράγωγο

π.χ. Έστω f, g **μιγαδικά** παραγωγίσιμες σε σημείο z_0 . Τότε:

- f παραγ. στο $z_0 \implies f$ συνεχής στο z_0
- $(af \pm bg)'(z_0) = af'(z_0) \pm bg'(z_0) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \quad (g(z_0) \neq 0)$
- Ο κανόνας αλυσίδας ισχύει στις μιγαδικές συναρτήσεις:

$$(h \circ g)'(z_0) = h'(g(z_0)) g'(z_0)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σύνθεση καλά ορισμένη

Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης Έστω f ολόμορφη σε σημείο z_0 με $f'(z_0) \neq 0$.

Αν $w_0 = f(z_0)$, τότε υπάρχουν $\epsilon, \epsilon' > 0$ ώστε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : D_\epsilon(w_0) \rightarrow D_{\epsilon'}(z_0)$ καλά ορισμένη, ολόμορφη στο w_0 και

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Θ.: Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Θεωρώ $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ και A ανοικτό.

Τότε:

f μιγαδικά παραγωγίσιμη στο z_0



(α) Η $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ είναι **διαφορίσιμο** διανυσμ. πεδίο στο σημείο (x_0, y_0)

ΚΑΙ

(β)

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{εξισώσεις C-R}}$$

Πόρισμα (ΠΡΑΚΤΙΚΟΤΑΤΟ) Αν $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι έτσι ώστε:

(α) u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0) και "κοντά" στο (x_0, y_0)

$$(β) \begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad \xleftarrow{\text{C-R}}$$

Τότε (\implies) η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$

Παρ.

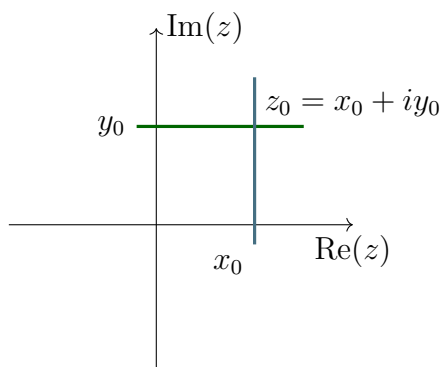
$$\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy), \text{ άρα} \end{aligned}$$

$$f = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right.$$

Παρατηρήσεις

(α) Έστω f μιγαδικά παραγ. συνάρτηση σε σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$



- Έστω $z = x + iy_0$ ($x \in \mathbb{R}$) είναι τυχαίο σημείο της "οριζόντιας" ευθείας που διέρχεται από το z_0
- Για $x \rightarrow x_0$, τότε $z = x + iy_0 \rightarrow x_0 + iy_0 = z_0$ (δηλ. $z \rightarrow z_0$ όταν $x \rightarrow x_0$ πάνω στην οριζόντια ευθεία)

Τότε για $z = x + iy_0$ έχω:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ &\Rightarrow \boxed{f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)} := \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, αν εργαστούμε κατά μήκος της "κάθετης" ευθείας που διέρχεται από το z_0 , έχουμε:

$$\boxed{f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)} := -i \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

(β) Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{df(z_0)}{dz} \\ \Rightarrow \boxed{df(z_0) = f'(z_0) dz} \end{aligned}$$

$dz :=$ στοιχειώδης όγκος
στο επίπεδο xy

$df(z_0) :=$ στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο uv
στο οποίο μετασχηματίζεται το dz
μέσω της απεικόνισης f

$$df(z_0) = |f'(z_0)| e^{i \operatorname{Arg} f'(z_0)} dz \quad (f'(z_0) \neq 0)$$

Για τις παραγώγους στοιχειωδών συναρτήσεων ισχύουν τα συνήθη από την πραγματική ανάλυση.

π.χ Αν $f(z) = e^z$, τότε $(e^z)' = e^z \forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) = e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{(e^x \sin y)}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

$$\text{Ορίζω} \begin{cases} u(x, y) = \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y \\ v(x, y) = \operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y \end{cases}$$

- u, v καλά ορισμένες $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, και επιπλέον u, v είναι **ΣΥΝΕΧΕΙΣ** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\bullet \begin{cases} u_x = e^x \cos y & u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y & v_y = e^x \cos y \end{cases}, \text{ έτσι παρατηρώ ότι } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$\xrightarrow{\text{πόρισμα}} f(z) = e^z$ μιγαδικά παραγωγίσιμη $\forall z \in \mathbb{C}$

• Γνωρίζω ότι αν η $f = u + iv$ είναι μιγ. παραγ., τότε $f'(z) = u_x + iv_x$.

Έτσι στην προκειμένη περίπτωση:

$$f'(z) = (e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^z$$

n.x $\text{Log} z = \frac{1}{z} \forall z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 0\}$ (υπό την προϋπόθεση ότι $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$)

διότι $\text{Log} z = w \xrightarrow{\text{ορ.}} z = e^w$, άρα $\forall z \in \mathbb{C}^*$, από το θεώρ. παραγωγίσιμης αντίστροφης συνάρτησης έχουμε: $(\text{Log} z)' = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$

Με την ίδια λογική (και με χρήση των ιδιοτήτων παραγώγου) αποδεικνύεται ότι

- $(z^n)' = nz^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(z^{-n})' = -nz^{-n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$
- $(z^a)' = az^{a-1} \quad \forall a \in \mathbb{Q} \text{ ή } a \text{ άρρητος ή } a \text{ έχει μη μηδενικό φανταστικό μέρος} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* (\mathbb{C}^* \text{ όπως στο λογάρισμα})$
- $(\sin z)' = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cos z)' = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\sinh z)' = \cosh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cosh z)' = \sinh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(a^z)' = a^z \text{Log} a \quad \forall z \in \mathbb{C}$

κλπ.

2.3 Ασκήσεις

ΝΑΟ η $f(z) = \bar{z}$ ΔΕΝ είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **σε κανένα** σημείο του \mathbb{C} .

- $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$, ορίζω $\begin{cases} u(x, y) = x \\ v(x, y) = -y \end{cases}$
- Προφανώς u και v καλά ορισμένες και συνεχείς $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, αλλά:

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, άρα αφού η μία από τις δύο εξισ. C-R δεν ισχύει $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, η $f(z) = \bar{z}$ **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγ. $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$\begin{cases} u = e^x \cos y_0 \\ v = e^x \sin y_0 \end{cases}$$

Άσκ. 2 Η συνάρτηση $f(z) = |z|$ **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε **ΚΑΝΕΝΑ** σημείο του \mathbb{C} .

Οι εξισώσεις C-R σε πολικές συντ/νες είναι οι εξής:

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\theta & \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi] \\ u_\theta = -\rho v_\rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) \\ &= f(|z|e^{i\text{Arg} z}) = f(\rho e^{i\theta}) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta) \end{aligned}$$

$$f(z) = |z| = \rho, \text{ άρα } \begin{cases} u(\rho, \theta) = \rho \\ v(\rho, \theta) = 0 \end{cases}$$

Οι u, v καλά ορισμένες και συνεχείς $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$ αλλά

$$u_\rho = 1 \neq \frac{1}{\rho} \cdot 0 = \frac{1}{\rho} v_\theta \quad \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$$

και αφού μία από τις εξισώσεις C-R δεν ισχύει $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$ αναγκαστικά η $f(z) = |z|$ δεν είναι μιγαδικά παραγ. σε κανένα σημείο του \mathbb{C} .

π.χ

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad z \neq 0 \\ |z|^2 &= z\bar{z} \quad \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη.

Άσκ. 3 Υπολογίστε τα όρια:

$$(a) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2}$$

$$(b) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1}$$

$$(c) \lim_{z \rightarrow \infty} e^z$$

Στα όρια ισχύει ο De L' Hospital

(a)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{z^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{\underset{\text{L'Hospital}}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{2ze^{z^2} - 0}{2z}}} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{z^2} = e^0 = 1$$

διότι $e^{z^2} - 1$ και z^2 μιγ. παραγ.

(β) Θα προσπαθήσω να αποδείξω ότι το όριο δεν υπάρχει, κάτι που φαντάζομαι επειδή μέσα στο όριο υπάρχει ο \bar{z} .

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του οριζώντιου άξονα" που διέρχεται από το $z_0 = 1$.
Δηλ. θεωρώ σημεία z της μορφής

$$z = x + i0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Προφανώς για $x \rightarrow 1$, έχω: $z \rightarrow z_0 = 1$.

Τότε $\forall z = x$ έχω:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1} \underset{\substack{\text{κατα μήκος} \\ \text{του οριζ. άξονα}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 1$$

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του κάθετου άξονα" που διέρχεται από το $z_0 = 1$, δηλαδή σημεία:

$$z = 1 + ix \quad (x \in \mathbb{R})$$

Προφανώς για $x \rightarrow 0$, έχω $z \rightarrow z_0 = 1$, και

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1} &\underset{\substack{\text{κατα μήκος} \\ \text{του κατακόρυφου άξονα}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + ix)^2 - 1}{(1 - ix)^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2ix - x^2 - 1}{1 - 2ix - x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ix - x^2}{-2ix - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2i - x}{-2i - x} = \frac{2i}{-2i} = -1 \end{aligned}$$

Εφόσον $1 \neq -1$ το όριο ΔΕΝ υπάρχει.

(γ) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = ?$

- Έστω $z = x$ ($x < 0$), για $x \rightarrow -\infty$, τότε $z \rightarrow \infty$ και $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- Έστω $z = x$ ($x > 0$), για $x \rightarrow +\infty$, τότε $z \rightarrow \infty$, αλλά: $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, συνεπώς το $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$ ΔΕΝ υπάρχει.

Άσκ. 4 Αν $f(z) = u + iv$ είναι ακεραία (ολόμορφη στο \mathbb{C}) και αν

$$au + bv = c$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ σταθερές όχι όλες ίσες με μηδέν, ΝΔΟ $f(z) = A$, $A \in \mathbb{C}$ σταθερά.

- Έστω $\underline{c} = 0$, εξ' υποθέσεως $a^2 + b^2 \neq 0$
- Έστω $c \neq 0$, πάλι πρέπει $a^2 + b^2 \neq 0$ (διότι αλλιώς $0 = c$, άτοπο)
- Τελικά $a^2 + b^2 \neq 0$ σε κάθε περίπτωση.

$$\begin{aligned} \begin{cases} au_x + bv_x = 0 \\ au_y + bv_y = 0 \end{cases} &\implies \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[u_y = -v_x \text{ αφού } f \text{ ακεραία}]{u_x = v_y} \begin{bmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2$$

και επειδή $a^2 + b^2 \neq 0$, πρέπει $u_x^2 + u_y^2 = 0$ για να έχει λύση το σύστημα $\implies u_x = 0$ και $u_y = 0 \xrightarrow{\mathbb{C}-\mathbb{R}} u_x = u_y = v_x = v_y = 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \implies f(z) = A \in \mathbb{C}$ σταθερά.

Άσκ. Βρείτε τα σημεία ολομορφίας των συναρτήσεων:

(α) $f(z) = \text{Log}(z - i)$

(β) $g(z) = \tan z$

(α) Έστω ότι $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$. Τότε είναι γνωστό ότι η $\text{Log } z$ είναι μιγαδικά παραγ. στο $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 0\}$.

Έτσι η $\text{Log}(z - i)$ είναι μιγ. παραγ. στο σύνολο

$$\begin{aligned} & \mathbb{C} - \{x + iy : \text{Re}(z - i) \leq 0 \text{ και } \text{Im}(z - i) = 1\} \\ & \stackrel{z=x+iy}{=} \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y - 1 = 0\} \\ & = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 1\} \end{aligned}$$

(β) $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, η g είναι ολόμορφη στο \mathbb{C} εκτός των σημείων που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

$$\begin{aligned} \bullet \cos z = 0 & \iff \cos(x + iy) = 0 \iff \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = 0 \xrightarrow{\text{ορ. sin \& cos}} \\ & \cos x \cdot \frac{e^{-y} + e^y}{2} - \sin x \cdot \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = 0 \iff \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y = 0 \iff \\ & \left| \begin{array}{l} \cos x \cdot \cosh y = 0 \\ \text{και} \\ \sin x \cdot \sinh y = 0 \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sin x = 0 \end{array} \right| \text{ ή } \left| \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \text{και} \\ \sinh y = 0 \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{l} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{array} \right|, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Τελικά $\cos z \iff \boxed{z = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$ και έτσι g είναι ολόμορφη στο

$$\mathbb{C} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Άσκ. Έστω $f(x + iy) = (x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$

(i) Να γραφεί η f συναρτήσει του $z = x + iy$

(ii) Να βρείτε όλα τα σημεία, όπου η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη

(iii) Να βρείτε όλα τα σημεία στα οποία η f είναι ολόμορφη

(i) $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
 $(z = x + iy)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left(\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2\right) \\ &= \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - i(z - \bar{z}) + i\left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4}\right) \\ &= \frac{z^2 + 2|z|^2 + \bar{z}^2}{4} - i(z - \bar{z} - |z|^2) \end{aligned}$$

(ii) Προφανώς $\left| \begin{array}{l} \text{Re}(f) := u(x, y) = x^2 + 2y \\ \text{Im}(f) := v(x, y) = x^2 + y^2 \end{array} \right|$

- Οι u και v είναι συνεχείς (ως πολυωνυμικές) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\bullet \begin{cases} u_x = v_y \\ \text{ΚΑΙ} \\ u_y = -v_x \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = 2y \\ \text{ΚΑΙ} \\ 2 = -2x \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ \text{ΚΑΙ} \\ x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ \text{ΚΑΙ} \\ y = -1 \end{cases}$$

Άρα η f είναι μιγαδ. παραγ. **μόνον** στο $\boxed{z = -1 - i}$, και μάλιστα εφ' όσον $f(z) = f'(x + iy) = u_x + iv_x$:

$$f'(-1 - i) = 2(-1) + i2(-1) = \underline{-2 - i2}$$

(iii) ΔΕΝ υπάρχουν σημεία όπου η f είναι ολόμορφη.

Κεφάλαιο 3 Μιγαδική ολοκλήρωση

Εισαγωγή

Ορισμός

Καλούμε **καμπύλη** στο μιγαδικό επίπεδο κάθε συνεχή συνάρτηση

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

όπου $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.

Έτσι: $\gamma(t)$ καλείται

ΑΠΛΗ αν είναι 1-1 (δεν αυτοτέμνεται)

ΚΛΕΙΣΤΗ αν έχει ίδια αρχή και πέρας

ΛΕΙΑ αν είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με συνεχή παράγωγο

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

και μη μηδενική παράγωγο $\forall t$

- Κάθε τέτοια καμπύλη έχει ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ (φορά διαγραφής) προς την κατεύθυνση αύξησης του t

π.χ. $\gamma(t) = e^{it}, t \in (-\pi, \pi]$

$$\gamma(t) = e^{-it}, t \in (-\pi, \pi]$$

- Αν γ κλειστή λέω ότι είναι θετικά προσανατολισμένη αν η φορά διαγραφής είναι η αντιωρολογιακή
- $-\gamma$: ίδιο ίχνος με τη γ , αλλά αντίθετη φορά διαγραφής
- $\gamma_1 + \gamma_2$:

Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ ΣΥΝΕΧΗΣ μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής και $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ λεία καμπύλη. Καλώ επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f ΠΑΝΩ στη γ να είναι ο ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\gamma'(t) dt}_{d\gamma(t)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$$\begin{aligned} d\gamma(t) &= d(x(t) + iy(t)) = \\ &= dx(t) + i dy(t) = (x'(t) + iy'(t)) dt \end{aligned}$$

$$d\gamma(t) = \gamma'(t) dt$$

Οι κλασικές ιδιότητες των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων έργου ισχύουν στους μιγαδικούς. Ενδεικτικά:

- $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$
- $\int_{\gamma} (af + by)(z) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$
- $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz \leq M \cdot (\text{μήκος της } \gamma) \text{ όπου } M \text{ μέγιστο της } |f| \text{ επί της } \gamma$
- $\int_{\gamma} |dz| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt := \text{μήκος της καμπ. } \gamma$

Πρόταση: Έστω $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ συνεχής επί καμπύλης λείας $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

Τότε:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \underbrace{\left(\int_{\gamma} u dx - v dy \right)}_{\text{επικαμπύλιο ολοκλ. διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2} + i \underbrace{\left(\int_{\gamma} u dy + v dx \right)}_{\text{επικαμπύλιο ολοκλ. διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2}$$

Απόδ.

$$\begin{aligned}
 & \int_{\gamma} (u + iv) d(x + iy) \\
 &= \int_a^b \left[u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \right] (x'(t) + iy'(t)) dt \\
 &= \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \right) dt + i \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t) \right) dt \\
 &\stackrel{\text{op.}}{=} \left(\int_{\gamma} u dx - v dy \right) + i \left(\int_{\gamma} u dy + v dx \right)
 \end{aligned}$$

Ορίζω $\bar{f}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$

Τότε

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} u dx - v dy &\stackrel{\text{λογ. II}}{:=} \text{έργο του πεδίου } \bar{f} \text{ επί της καμπύλης } \gamma \\
 \int_{\gamma} u dy + v dx &\stackrel{\text{λογ. II}}{:=} \underline{\text{ροή}} \text{ του } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma
 \end{aligned}$$

3.1 Αντιπαράγωγος και ανεξαρτησία δρόμου

Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ είναι μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση (μιγαδικής μεταβλητής) σε τόπο GCC (τόπος := ανοικτό και συνεκτικό σύνολο). Αν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $F = F(z)$, έτσι ώστε:

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G, \text{ τότε η } F \text{ καλείται αντιπαράγωγος της } f.$$

Θ.

Έστω $f = f(z)$ είναι συνεχής μιγαδική συνάρτηση σε τόπο G . Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- Η f είναι ΜΟΝΑΔΙΚΗ αντιπαράγωγο F (με προσέγγιση σταθεράς)

- $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$, για ΚΑΘΕ κλειστή λεία καμπύλη εντός του G

- $\oint_{\gamma} f(z) dz$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου (δηλαδή εξαρτάται μόνον από το αρχικό και τελικό σημείο του δρόμου)

Οι συνήθεις αντιπαράγωγοι εξακολουθούν να ισχύουν, π.χ.:

$$\begin{aligned}\int z^n dz &= \frac{z^{n+1}}{n+1} + c, \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \\ \int \frac{1}{z} dz &= \text{Log} z + c, \forall z \in \mathbb{C}^* \\ \int z^{-n} dz &= \frac{z^{-n+1}}{-n+1} + c, \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}, c \in \mathbb{C} \text{ στάθερα} \\ \int \sin z dz &= -\cos z + c \\ \int \cos z dz &= \sin z + c \\ &\text{κλπ.}\end{aligned}$$

3.2 Θεώρημα Cauchy

Έστω $f = f(z)$ είναι **ολόμορφη** συνάρτηση **πάνω** και στο **εσωτερικό απλής**, κλειστής και λείας καμπύλης γ .

Τότε:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Απόδ. Έστω $f = u + iv$, όπου $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πάνω και στο εσωτερικό της γ . Τότε:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} f(z) dz &= \left(\oint_{\gamma} u dx - v dy \right) + i \left(\oint_{\gamma} u dy + v dx \right) \\ &\stackrel{\text{Θεώρ. Green}}{=} \iint_R (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_R (u_x - v_y) dx dy\end{aligned}$$

και επειδή η f ολόμορφη ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann $\forall (x, y)$ στο εσωτερικό της γ , δηλαδή το R , άρα:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz \stackrel{u_x=v_y}{\stackrel{u_y=v_x}}{=} \iint_R 0 dx dy + i \iint_R 0 dx dy = 0$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \underbrace{a}_{\text{έργο του πεδίου } f \text{ κατά μήκος } \gamma} + i \underbrace{b}_{\text{ροή του πεδίου } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν υπάρχει έστω και ένα σημείο όπου η f δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο εσωτερικό της γ , τότε το **θεώρ. Cauchy δεν ισχύει εν γένει**.

π.χ $\oint_{|z|=1 \text{ με θετική φορά}} \frac{dz}{z}$

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \stackrel{\gamma(t)=e^{it}}{=} \int_{t \in [0, 2\pi)} \frac{dz}{z} \stackrel{\text{ο.ρ.}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{it})}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})^2}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i$$

Θ.: Παραμόρφωση δρόμων

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη σε τόπο G με σύνολο $\partial G = \gamma_1 \cup \gamma_2$ όπου γ_1, γ_2 απλές λειστές καμπύλες, λείες, με κοινό προσανατολισμό π.χ. όπως στο σχήμα. Τότε $\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz$

Απόδ. Φέρνω δύο ευθ. τμήματα L_1 και L_2 που διαμερίζουν το G σε δύο χωρία έστω G_1, G_2 . Τότε το θ . Cauchy ισχύει και στο G_1 και στο G_2 .

$$\begin{aligned} & \bullet \int_{\gamma_1^+ + L_1 + \gamma_2^+ + L_2} f(z) dz = 0 \quad (\theta. \text{Cauchy για το χωρίο } G_1) \\ & \bullet \int_{\gamma_2^- - L_1 - \gamma_2^- - L_2} f(z) dz = 0 \quad (\theta. \text{Cauchy για το χωρίο } G_2) \\ & \Rightarrow \left| \begin{aligned} & \left(\int_{\gamma_1^+} + \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^+} + \int_{L_2} \right) f(z) dz = 0 \\ & \left(\int_{\gamma_1^-} - \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^-} - \int_{L_2} \right) f(z) dz = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \oint_{\gamma_1} f(z) dz - \oint_{\gamma_2} f(z) dz = 0 \end{aligned}$$

Πόρισμα (Γενικευμένο θεώρ. Cauchy) Έστω $f = f(z)$ ολόμορφη σε τόπο G με σύνολο $\partial G = \Gamma \cup (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n)$, όπου:

- $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ απλές, κλειστές, λείες και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΕΣ καμπύλες
- Οι $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ βρίσκονται εντός της Γ και
- Κάθε καμπύλη $\gamma_j \quad j = 1, \dots, n$ βρίσκεται εκτός των υπόλοιπων $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n$

$$\text{Τότε: } \oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \oint_{\gamma_j} f(z) dz$$

Θ.: Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμημ. λείας και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ καμπύλης γ . Τότε ΓΙΑ ΚΑΘΕ σημείο z_0 ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ ισχύει:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Απόδειξη Έστω $|z - z_0| = r$ κύκλος ακτίνας r κατάλληλης ώστε ο δίσκος $|z - z_0| \leq r$ να βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό της γ .

Τότε από το θεώρημα παραμόρφ. δρόμων, εφ' όσον $\frac{f(z)}{z - z_0}$ ολόμορφη στο γραμμοσκιασμένο χωρίο, έχουμε:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \underbrace{\oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz}_{I_2} + \underbrace{\oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz}_{I_1}$$

Για το I_2 έχω:

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \stackrel{z = z_0 + re^{i\theta}}{\substack{\theta \in [0, 2\pi]}} f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta \\ &= 2\pi i f(z_0) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{lll} l = l' & \iff & |l - l'| < \epsilon \forall \epsilon > 0 \\ & \implies & \text{προφ. ισχύει} \\ & \impliedby & \text{'Εστω } l \neq l' \implies |l - l'| \geq \epsilon_0 > 0 \text{ άτοπο} \implies l = l' \end{array} \right)$$

Έτσι:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = I_1$$

$$|I_1| \leq \oint_{|z - z_0| = r} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} dz \leq M \cdot \oint_{|z - z_0| = r} \frac{1}{|z - z_0|} dz,$$

όπου $M = \max \left\{ |f(z) - f(z_0)| \mid \forall z : |z - z_0| = r \right\}$

$$\begin{aligned} &= M \oint_{|z - z_0| = r} \frac{1}{r} |dz| \\ &= \frac{M}{r} \underbrace{\oint_{|z - z_0| = r} |dz|}_{\text{μήκος καμπύλης}} = \frac{2\pi Mr}{r} = 2\pi M \end{aligned}$$

Αλλά f ολόμορφη στο z_0 , άρα f συνεχής στο z_0 .

Εξ' ορισμού λοιπόν: $\forall \epsilon > 0 \exists r_1 > r > 0 : \forall z : 0 < |z - z_0| < r < r_1 \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

Έτσι $\forall \epsilon > 0$ μπορώ να βρω ακτίνα $r : |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \forall z : |z - z_0| = r$, δηλ. $M \leq \epsilon$ και τελικά

$$|I_1| \leq 2\pi M \leq 2\pi \epsilon \forall \epsilon > 0 \implies I_1 = 0$$

Θ.: Ολοκληρ. τύπος Cauchy για παραγώγους

Έστω f είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ .

Αν z_0 σημείο στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ , τότε η f ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΚΑΘΕ ΤΑΞΗΣ στο σημείο z_0 και μάλιστα:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

3.3 Εφαρμογές

(1) Θεώρ. μέσης τιμής Gauss

Αν f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό θετικά προσανατολισμένου κύκλου $|z - z_0| = R$, τότε:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$$

Απόδειξη Εφαρμόζω τον ολοκλ. τύπο του Cauchy με τα δεδομένα μου και έχω:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \\ &\stackrel{\text{ορισμός}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} d(z_0 + Re^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= \text{ζητούμενο} \end{aligned}$$

(2) **Ανισότητα Cauchy** Έστω f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό θετικά προσανατολισμένου κύκλου $|z - z_0| = R$ και $M_R = \max \{ |f(z)|, \forall z : |z - z_0| = R \}$

Τότε:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_R}{R^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Απόδ. Εφαρμόζουμε τον ολοκλ. τύπο Cauchy για παραγώγους προσαρμοσμένο στα δεδομένα:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} |dz| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} M_R \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{|z-z_0|^{n+1}} |dz| \\ &= \frac{n!}{2\pi} M_R \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{R^{n+1}} |dz| \\ &= \frac{n!}{2\pi} M_R \frac{1}{R^{n+1}} \underbrace{\oint_{|z-z_0|=R} |dz|}_{\text{μήκος κύκλου } z-z_0=R} \\ &= \frac{n!}{2\pi} M_R \frac{1}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n! M_R}{R^n} \end{aligned}$$

(3) Θεώρ. Liouville

Κάθε **ακεραία** συνάρτηση (δηλ. ολόμορφη στο \mathbb{C}) και φραγμένη στο \mathbb{C} είναι η σταθερή συνάρτηση.

Απόδ. Έστω $z \in \mathbb{C}$ τυχαίο. Χρησιμοποιώ ανισότητα Cauchy για $n = 1$:

$$|f'(z)| \leq \frac{1! M_R}{R}, \quad M_R = \max \left\{ |f(z)| : |z - z_0| = R \right\}$$

Αφού f εξ' υποθέσεως είναι φραγμένη, άρα $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Δηλ. $|f'(z)| \leq \frac{M_R}{R} \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

Τότε $|f'(z)| = 0 \iff f'(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C} \iff f(z) = c \in \mathbb{C}$

(4) Αρχή μεγίστου/ελαχίστου

Έστω f ολόμορφη σε ανοικτό και συνεκτικό σύνολο G και μη σταθερή στο G . Τότε η $|f|$ **ΔΕΝ** έχει μέγιστη τιμή στο G .

Αν μάλιστα $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$, τότε η $|f|$ **ΔΕΝ** έχει ελάχιστη τιμή στο G .

Ειδικά αν G είναι και **ΦΡΑΓΜΕΝΟ** και η f είναι συνεχής στο σύνολο του G (το οποίο είναι απλή, λεία καμπύλη), τότε η $|f|$ **ΠΑΙΡΝΕΙ ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΠΑΝΩ στο σύνολο του G** . Ομοίως αν $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$, τότε η $|f|$ παίρνει ελάχιστη τιμή ΠΑΝΩ στο σύνολο του G .

Άσκ. Υπολογίστε το $\int_{\gamma} (i\bar{z} - z) dz$

όπου γ είναι η παραβολή $y = 2t^2 + 1$ με αρχή το σημείο $(1, 3)$ και πέρας το σημείο $2, 9$.

Γενικά, μπορώ να κινηθώ μέσω ορισμού, αντιπαραγώγου ή θεωρημάτων. Η \bar{z} δεν έχει παράγωγο, άρα δεν έχει αντιπαράγωγο (διαφορετικά από προηγούμενη εφαρμογή θα είχε άπειρες παραγώγους).

Έχουμε:

$$\int_{\gamma} (i\bar{z} - z) dz = i \int_{\gamma} \bar{z} dz - \int_{\gamma} z dz = I_1 + I_2$$

- όσον αφορά το I_2 , εφ' όσον η $f(z) = z$ είναι ολόμορφη στο \mathbb{C} ως πολυώνυμο, έχει μοναδική αντιπαράγωγο (με προσέγγιση σταθεράς), άρα:

$$\int_{\gamma} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{z_0=1+3i}^{z_1=2+9i}$$

(αντιπαράγωγος $\xrightarrow{\text{θεωρία}}$ ανεξαρτησία δρόμου)

$$\begin{aligned} &= \frac{(2+9i)^2}{2} - \frac{(1+3i)^2}{2} \\ &= \frac{69}{2} - 15i \\ &= B \end{aligned}$$

- Για το I_1 :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= i \int_{\gamma} \bar{z} \, dz \quad \text{ορισμός} \\
 &\quad \text{διότι η } \bar{z} \text{ ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο} \\
 &\quad \stackrel{(t, 2t^2+1)}{t+i(2t^2+1)=\gamma(t)} \int_1^2 \overline{\gamma(t)} \, d(\gamma(t)) \\
 &= \int_1^2 \left[t - i(2t^2 + 1) \right] \underbrace{[1 + 4ti] \, dt}_{\gamma'(t) \, dt := d\gamma(t)} \\
 &= i \int_1^2 \left[t + 4t(2t^2 + 1) \right] + i[1 + 2t^2 + 4t^2] \, dt \\
 &= i \int_1^2 (5t + 8t^3) + i(6t^2 + 1) \, dt \\
 &= i \left[\frac{5t^2}{2} + 2t^4 \right]_1^2 - (2t^3 + t)_1^2 \\
 &= A + B
 \end{aligned}$$

Τελικά

Από εδώ και στο εξής, μέχρι νεωτέρας, όλοι μαζί, Τρίτη και Πέμπτη.

Άσκ. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$(α) \oint_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{z \cos z}{2z+1} \, dz$$

$$(β) \oint_{|z|=3} \frac{z^3+2}{(z-2)^3} \, dz$$

$$(γ) \oint_{|z|=2} \frac{\rho^z}{z^2-1} \, dz$$

Όλες οι καμπύλες θεωρούνται προσανατολισμένες με τη θετική φορά.

(α) Θα χρησιμοποιήσω ολοκλ. τύπο Cauchy.

Έστω $f(z) = z \cos z$, ολόμορφη στο \mathbb{C} άρα και πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2}$$

Προφανώς:

$$\begin{aligned}
 &\oint_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{z \cos z}{2z+1} \, dz \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{z \cos z}{z - \left(-\frac{1}{2}\right)} \, dz,
 \end{aligned}$$

όπου $z_0 = -\frac{1}{2} \in \underline{\text{εσωτερικό του κύκλου } |z - \frac{1}{2}| = \frac{3}{2}}$, ο οποίος είναι θετικά προσανατολισμένος.

Τότε ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες ώστε να έχω

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{z \cos z}{z - (-\frac{1}{z})} dz \\ &= |z \cos z|_{z_0=-\frac{1}{2}} \Rightarrow \oint_{|z-\frac{1}{2}|=\frac{3}{2}} \frac{z \cos z}{z + \frac{1}{2}} dz = 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \cos\left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Τελικά: $\boxed{\oint_{\gamma} \frac{z \cos z}{2z+1} dz = \frac{-\pi i}{2} \cos\left(-\frac{1}{2}\right)}$

(β) Θα χρησιμοποιήσω τύπο Cauchy για παραγώγους με $n = 2$.

Έστω $g(z) = z^3 + 2$, προφανώς ακεραία (ολόμορφη σε όλο το \mathbb{C}), άρα ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου μας.

Επίσης, $z_0 = 2 \in$ εσωτερικό του θετικά προσανατολισμένου κύκλου μας, άρα από τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε:

$$\begin{aligned} g''(2) &= \frac{2!}{2\pi i} \oint_{|z|=3} \frac{g(z)}{(z-2)^3} dz \quad (g(z) = z^3 + 2) \\ \Rightarrow \oint_{|z|=3} \frac{z^3 + 2}{(z-2)^3} dz &= \pi i \cdot g''(2) \end{aligned}$$

$$g'(z) = 3z^2$$

$$g''(z) = 6z$$

$$g''(2) = 12$$

Τελικά $\oint_{|z|=3} \frac{z^3 + 2}{(z-2)^3} dz = 12\pi i$

(γ) Χρησιμοποιώ κατ' αρχήν γενικευμένο θεώρημα Cauchy, και έχω:

$$\begin{aligned} I_{\text{ζητούμενο}} &= \oint_{\gamma_1} \frac{e^z dz}{(z-1)(z+1)} + \oint_{\gamma_2} \frac{e^z dz}{(z-1)(z+1)} \\ &= \oint_{\gamma_1} \frac{e^z/(z+1)}{z-1} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^z/(z-1)}{z+1} dz \\ &\stackrel{\text{τύπος Cauchy}}{=} 2\pi i \frac{e^z}{z+1} \Big|_{z=1} + 2\pi i \frac{e^z}{z-1} \Big|_{z=-1} \\ &= \pi i e - \pi i e^{-1} \end{aligned}$$

(διότι οι αριθμητές $\begin{cases} a(z) = \frac{e^z}{z+1} \\ b(z) = \frac{e^z}{z-1} \end{cases}$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις πάνω και στο εσωτερικό των καμπύλων γ_1 και γ_2 αντιστοίχως και $z_0 = 1 \in$ εσωτερικό της γ_1 ενώ $z_1 = -1 \in$ εσωτερικό γ_2)

Θέμα: Υπολογίστε το $\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-i)^2} dz$ για όλες τις τιμές του R , όπου $R > 0$ και $R \neq 1$

(α) $R < 1$

Τότε $I = 0$ από θεώρ Cauchy αφού ανωμαλία $z_0 = i$ εκτός κύκλου $|z| = R$

(β) $R > 1$

Τότε $z_0 = i \in$ εσωτερικό κύκλου $|z| = R$ οπότε χρησιμοποιώ τύπο Cauchy για παραγώγους και βρίσκω

$$I = 0$$

.

Άσκ. Έστω f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό κύκλου $|z| = R$, με $f(z) \neq 0 \forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου και $f(z) = c$ για κάθε z πάνω στον κύκλο $|z| = R$.

ΝΔΟ $|f(z)| = A \geq 0 \forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου.

Θα χρησιμοποιήσω αρχή μεγίστου/ελαχίστου, η οποία λέει ότι η $|f(z)|$ παίρνει τόσο τη μέγιστη, όσο και την ελάχιστη τιμή της ΠΑΝΩ στον κύκλο $|z| = R$.

Εφ' όσον όμως $f(z) = c \forall z : |z| = R$ τότε $|f(z)| = |c| = \text{σταθερό} \forall z$ πάνω στον κύκλο, όπου όμως η $|f|$ παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Άρα η $\max |f| = \min |f| \forall z : |z| = R$, συνεπώς $|f| = \text{σταθερά} \forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου.

Άσκ. Έστω f ακεραία και $|f(z)| \leq A|z| \forall z \in \mathbb{C}$. ΝΔΟ $f(z) = cz$, όπου $c \in \mathbb{C}$ σταθερά.

Θα χρησιμοποιήσω ανισότητα Cauchy για $n = 2$, προσπαθώντας να δείξω ότι:

$$|f''(z)| = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

τότε $f'(z) = c \implies f(z) = cz + d \quad c, d \in \mathbb{C}$. Από υπόθεση, για $z = 0$ έχω $|f(0)| \leq A \cdot 0 \implies f(0) = 0$ άρα $d = 0$.

Ανισότητα Cauchy

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \cdot M_R}{R^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

όπου $M_R = \max \left\{ |f(z)| : |z - z_0| = R \right\}$

Έτσι για $n = 2$ έχω για $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f''(z_0) \leq \frac{2! \cdot M_R}{R^2} = \frac{2MR}{R^2}$$

Για $|z - z_0| = R$ δηλ. για $z = z_0 + Re^{i\theta}$ έχω $|f(z)| \stackrel{\text{εξ' υποθέσεως}}{\leq} A|z| = A|z_0 + Re^{i\theta}| \leq A|z_0| + AR$

Τότε:

$$|f''(z_0)| \leq \frac{2(|z_0| + R)}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

άρα $|f''(z_0)| = 0 \forall z_0 \in \mathbb{C}$, άρα $f''(z_0) = 0 \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

Κεφάλαιο 4 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα και εφαρμογές

Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ μιγαδική συνάρτηση. Ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$ καλείται **ΑΝΩΜΑΛΟ σημείο** της f , εάν είτε η f ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ στο z_0 , είτε ορίζεται στο z_0 αλλά δεν έχει "καλή συμπεριφορά" στο z_0 , π.χ. δεν είναι ολόμορφη στο z_0

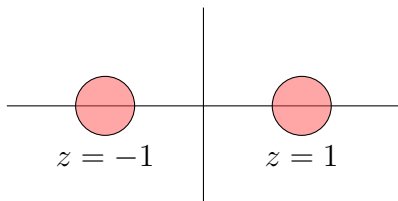
- Αν z_0 είναι ανώμαλο σημείο της f , τότε το z_0 καλείται **ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ ανώμαλο σημείο** της f , εάν η f είναι ολόμορφη στον Ανοικτό δακτύλιο

$$0 < |z - z_0| < R$$

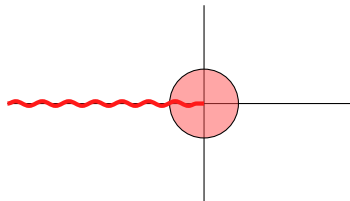
για κάποιο $R > 0$, διαφορετικά το z_0 καλείται ΜΗ απομονωμένο ανώμαλο σημείο.

π.χ.

- $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$ ($z_0 = 1, z_0 = -1$) απομονωμένα ανώμαλα σημεία της f



- $g(z) = \text{Log} z$ ($z_0 = 0$ μη απομονωμένη ανωμαλία. Επίσης τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα των πραγματικών είναι μη απομονωμένα ανώμαλα σημεία του λογάριθμου)



- $h(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ ($z_0 = 0$ το μοναδικό μεμονωμένο σημείο)

Έστω z_0 είναι **ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ** ανώμαλο σημείο μιας συνάρτησης f . Τότε υπάρχει κάποιος δακτύλιος

$$0 < |z - z_0| < R$$

όπου η f είναι ολόμορφη και η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^k, \quad \forall 0 < |z - z_0| < R$$

Δηλ.

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^k + \cdots$$

Θα λέμε ότι:

- Το z_0 είναι **ΑΠΑΛΕΙΨΙΜΗ ανωμαλία**, εάν:

$$a_n = 0 \quad \forall n < 0$$

όπου $a_n \in \mathbb{C}$ οι συντελεστές του αναπτύγματος Laurent της f "γύρω" από το z_0 .

π.χ. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ $z_0 = 0$ (ανώμαλο σημείο)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots \quad \text{δεν είναι απαλείψιμη ανωμαλία στο } 0$$

- Το z_0 καλείται **ΠΟΛΟΣ** της f τάξης $k \in \mathbb{N}$, εάν

$$a_n = 0 \quad \forall n < -k$$

Τότε το ανάπτυγμα Laurent της f γίνεται:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Έτσι έχουμε:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \underbrace{\left(a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \dots + a_0(z - z_0)^k + \dots \right)}_{=g(z)}$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \quad \forall 0 < |z - z_0| < R$$

όπου $g = g(z)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο z_0 με $g(z_0) \neq 0$.

Τελικά: (εναλλακτικός ορισμός)

z_0 πόλος της f τάξης $k \in \mathbb{N}$

\Updownarrow

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \text{ με } g \text{ κάποια ολόμορφη συνάρτηση στο } z_0 \text{ για την οποία } \boxed{g(z_0) \neq 0}$$

- Το z_0 καλείται **ΟΥΣΙΩΔΗΣ ΑΝΩΜΑΛΙΑ** της f , εάν υπάρχει ΑΠΕΙΡΟ ΠΛΗΘΟΣ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ όρων a_n στο ανάπτυγμα Laurent της f ΜΕ ΔΕΙΚΤΕΣ n να είναι ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

π.χ. Τι είδους ανωμαλία είναι το σημείο z_0 για τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 - 1} &= \frac{1}{(z - 1)(z + 1)} \stackrel{\text{αλλά κλάσματα}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(z - 1) + 2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2} \right)^n, \quad \left| \frac{z-1}{2} \right| < 1 \quad \left(\frac{1}{1-z} = \sum z^n \quad |z| < 1 \right) \\ \frac{1}{z^2 - 1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z - 1) - \frac{1}{16}(z - 1)^2 + \dots \quad 0 < \left| \frac{z-1}{2} \right| < 1 \end{aligned}$$

Το $z_0 = 1$ είναι πόλος 1ης τάξης εξ' ορισμού.

ΠΡΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ για ταξινόμηση ΑΠΟΜΕΝΩΜΕΝΩΝ ανώμαλων σημείων:

Έστω z_0 είναι απομονωμένο ανώμαλο σημείο της f . Τότε:

• z_0 είναι απαλείψιμη ανωμαλία \iff υπάρχει το $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}$ (όχι το ∞)

• z_0 πόλος τάξης k \iff Ο $k \in \mathbb{N}$ ο μοναδικός φυσικός ώστε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lambda \in \mathbb{C} - \underbrace{\{0\}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ εδώ! Το όριο θέλω μη μηδενικό (επειδή μηδενίζεται για όλα τα επόμενα $n > k$)

• z_0 ουσιώδης ανωμαλία της f \iff Το $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ΔΕΝ υπάρχει

Τελικά:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \begin{cases} = \lambda \in \mathbb{C} & \implies z_0 \text{ απαλείψιμη ανωμαλία} \\ \infty & \implies z_0 \text{ πόλος} \\ \text{ΔΕΝ υπάρχει} & \implies z_0 \text{ ουσιώδης ανωμαλία} \end{cases}$$

4.0.1 Πώς βρίσκουμε (κάποιες φορές) την τάξη ενός πόλου z_0

Λήμμα

Έστω $f = f(z)$ ολόμορφη σε σημείο z_0 . Τότε:

$$z_0 \text{ ρίζα της } f \text{ πολ/τας } \kappa \iff f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(\kappa-1)}(z_0) = 0 \text{ και } f^{(\kappa)}(z_0) \neq 0$$

Απόδειξη

" \Leftarrow " Αφού f ολόμορφη στο z_0 **αναπτύσσεται ΠΑΝΤΑ** σε σειρά Taylor "γύρω" από το z_0 ως εξής:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= \cancel{f(z_0)} + \cancel{f'(z_0)}(z - z_0) + \dots + \frac{\cancel{f^{(k-1)}(z_0)}}{(k-1)!} (z - z_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k + \dots \\ &= (z - z_0)^k \underbrace{\left(\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} + \dots \right)}_{=h(z)} \end{aligned}$$

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z), \text{ όπου } h(z) \text{ ολόμορφη στο } z_0 \text{ με } h(z_0) \neq 0$$

" \Rightarrow " Τότε $f(z) = (z - z_0)^k h(z)$, όπου h ολόμορφη στο z_0 με $h(z_0) \neq 0$. Παραγωγίζοντας $k-1$ φορές παίρνουμε $f^{(j)}(z_0) = 0 \forall j = 0, 1, \dots, k-1$, ενώ $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

• Έστω τώρα $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$, όπου a, b είναι ολόμορφες στο z_0 . Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα αριθμητή πολ/τας K ($K = 0, 1, 2, \dots$) και ρίζα παρονομαστή πολ/τας Λ ($\Lambda = 1, 2, 3, \dots$). Τότε:

$$z_0 \text{ είναι: } \begin{cases} \text{απαλείψιμη ανωμαλία για την } f & \text{εάν: } K \geq \Lambda \\ \text{πόλος τάξης } \Lambda - K & \text{εάν: } K < \Lambda \end{cases}$$

4.0.2 Υπολογισμός ολοκληρωτικού υπολοίπου σε απομονωμένο ανώμαλο σημείο z_0

Ορισμός: Ολοκληρωτικό υπόλοιπο

Σειρά Laurent της f στο z_0 :

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

Ο όρος $a_{-1} = \oint_{\gamma} f(z) dz$ καλείται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 , συμβολικά $\text{Res}(f, z_0)$.

Έστω z_0 είναι απομονωμένο ανώμαλο σημείο συνάρτησης f .

- Αν z_0 **απαλείψιμη ανωμαλία**, τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0

$$\text{Res}(f, z_0) = 0$$

Τελικά:

$$z_0 \text{ απαλείψιμο} \implies \text{Res}(f, z_0) = 0$$

- Αν z_0 είναι πόλος τάξης N , τότε το $\text{Res}(f, z_0)$ βρίσκεται ως εξής:

Εφόσον z_0 πόλος τάξης N έχουμε:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + a_0(z - z_0)^k + \cdots$$

$$\implies \left((z - z_0)^k f(z) \right)^{\overbrace{(k-1)}^{\text{παράγωγος}}} = (k-1)!a_{-1} + a_0(k \cdots 2)(z - z_0) + \cdots$$

$$\implies \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\left((z - z_0)^k f(z) \right)^{(k-1)} \right] = (k-1)!a_{-1}$$

$$\implies a_{-1} \stackrel{\text{op.}}{=} \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\left((z - z_0)^k f(z) \right)^{(k-1)} \right]$$

Προσοχή! Το $(k-1)$ είναι **ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ!**

- z_0 **ουσιώδης ανωμαλία**: Τότε **αναγκαστικά** θα πρέπει να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της f στο z_0 και μέσω αυτού να υπολογίσετε τον όρο $a_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$

Θ.: Ολοκληρωτικών υπολοίπων

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμημ. λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ , εκτός **ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΩΝ ΑΝΩΜΑΛΩΝ** σημείων z_1, \dots, z_n στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ . Τότε:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j)$$

Θ.: Αρχή ταυτισμού

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμηματικά λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ .

Αν $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ακολουθία σημείων στο εσωτερικό της γ , με $z_k \neq z_\lambda \ \forall k \neq \lambda$ και είναι τέτοια ώστε $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$ ανήκει στο εσωτερικό της γ .

Τότε, εάν $f(z_k) = 0 \ \forall k$ ισχύει

$$f(z) = 0 \quad \forall z \text{ στο εσωτερικό της } \gamma$$

Άσκηση Να ταξινομηθούν όλα τα ανώμαλα σημεία των συναρτήσεων

(α) $f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^2}$

(β) $g(z) = \frac{e^z}{z^3}$

(γ) $h(z) = \frac{\cos(1/2)}{z}$

(δ) $k(z) = \frac{z}{e^z - 1}$

και να υπολογιστούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στα σημεία αυτά.

(α) Ανώμαλα σημεία της f (σημεία όπου η f) "πιθανώς" δεν ορίζεται ή αν ορίζεται δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη):

"Το μοναδικό ανώμαλο σημείο είναι αυτό που μηδενίζει τον παρονομαστή, δηλαδή το $z_0 = 0$."

Προφανώς το $z_0 = 0$ μηδενίζει τον παρονομαστή της f δύο φορές, δηλαδή το $z_0 = 0$ είναι διπλή ρίζα του παρονομαστή.

Έστω

$$a(z) = \text{"αριθμητής"} = 1 - \cos(z), \quad a(0) = 1 - \cos(0) = 0$$

$$a'(z) = \sin(z), \quad a'(0) = 0$$

$$a''(z) = \cos(z), \quad a''(0) = 1 \neq 0$$

Άρα το $z_0 = 0$ είναι **διπλή** ρίζα του αριθμητή.

Επομένως, το $z_0 = 0$ είναι "απαλείψιμη ανωμαλία", διότι:

πολλαπλότητα ρίζας $z_0 = 0$ του αριθμητή = 2 \geq πολλαπλότητα ρίζας $z_0 = 0$ του παρονομαστή = 2

Αφού το $z_0 = 0$ είναι απαλείψιμη ανωμαλία:

$$\boxed{\text{Res}(f, 0) = 0}$$

(β) Το $z_0 = 0$ είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της g . Προφανώς η ρίζα του παρονομαστή είναι πολλαπλότητας 3. Το $z_0 = 0$ δεν μηδενίζει τον αριθμητή, διότι $e^{0^2} = 1 \neq 0$, άρα η πολλαπλότητα του $z_0 = 0$ για τον αριθμητή είναι ίση με 0 και έτσι το $z_0 = 0$ είναι **πόλος**, τάξης:

$$\left. \begin{array}{l} \text{πολλαπλότητα ρίζας } z_0 = 0 \text{ του παρονομαστή} \\ - \\ \text{πολλαπλότητα ρίζας } z_0 = 0 \text{ του αριθμητή} \end{array} \right\} 3 - 0 = 3$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(g, 0) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left([z - 0]^3 \frac{e^{z^2}}{z^3} \right)'' \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\left(e^{z^2} \right)'' \right] \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(2ze^{z^2} \right)' \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(2e^{z^2} + 4z^2 e^{z^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1
 \end{aligned}$$

(γ) Το μοναδικό ανώμαλο σημείο είναι το $z_0 = 0$

Σημείωση

Αν z_0 είναι **πόλος** για συνάρτηση f και αν η g είναι ακεραία, τότε το z_0 είναι ουσιώδους ανωμαλία για την $g \cdot f$.

Έτσι, με βάση τη σημείωση αυτή το z_0 είναι ουσιώδους ανωμαλία.

Άρα:

$\text{Res}(h, 0) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} a_1$ (ο οποίος είναι συντελεστής του $\frac{1}{z - z_0} \stackrel{z_0=0}{=} \frac{1}{z}$), στο ανάπτυγμα Laurent της h με κέντρο το z_0

Επομένως:

$$\begin{aligned}
 \cos(z) &\stackrel{\text{McLaurin}}{=} 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad z \in \mathbb{C} \\
 \cos\left(\frac{1}{z}\right) &= 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} - \dots \quad z \in \mathbb{C} - \{0\} \\
 \frac{1}{z} \cdot \cos\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z^3} - \dots \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}
 \end{aligned}$$

Έτσι:

$$\text{Res}(h, 0) = \text{"συντελεστής του } \frac{1}{z} \text{ στο ανάπτυγμα Laurent της } h" = 1.$$

$$(δ) \quad k(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

Σημεία που μηδενίζουν παρονομαστή

$$e^z = 1 \iff z = \log 1 = \ln 1 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Άρα τα σημεία $z_k = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$ ανώμαλα σημεία της $k(z)$.

Για $n = 0$ έχουμε $z_0 = 0$ ανώμαλο σημείο της $k(z)$ που μηδενίζει τον παρονομαστή και αριθμητή 1 φορά άρα απαλείψιμο.

$$\text{Res}(k, 0) = 0$$

Για $n \neq 0$ έχουμε $z_n = 2n\pi i$ μηδενίζουν μια φορά παρονομαστή, καμία αριθμητή, άρα πόλοι 1^{ης} τάξης.

Έτσι:

$$\begin{aligned}\text{Res}(k, z_n) &= \frac{1}{1} \lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n) k(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n) \frac{z}{e^z - 1} \stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{z + z - z_n}{e^z} = \frac{z_n}{e^{z_n}} = \frac{2n\pi i}{e^{2n\pi i}} = 2n\pi i\end{aligned}$$

(2) Υπολογίστε το $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{\cosh z} dz$

- (α) τύπος (θεώρ. ολοκλ. υπολοίπων)
- (β) ανώμαλα σημεία, θέλεις ΕΝΤΟΣ καμπύλης
- (γ) ταξινόμηση ανώμαλων
- (δ) υπολ. $\text{Res}(f, z_j)$, z_j ανώμαλα

(α) Από θεωρία έχω:

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res} \left(\frac{e^z}{\cosh z}, z_j \right)$$

όπου z_j ανώμαλα σημεία εντός κύκλου: $|z| = 3$

(β) Ανώμαλα σημεία της $e^z / \cosh z$:

$$\begin{aligned}\cosh z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0 \\ e^z + \frac{1}{e^z} = 0 &\stackrel{z \neq 0}{\Leftrightarrow} e^{2z} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow 2z = \log(-1) = \ln(-1) + i(\pi + 2i\pi) \\ &\Rightarrow \boxed{z = \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

$$z = \frac{\pm\pi i}{2}, \frac{\pm 3\pi i}{2}, \frac{\pm 5\pi i}{2} \text{ ανώμαλα σημεία}$$

Άρα μένουν οι $z_1 = \frac{\pi i}{2}$ και $z_2 = \frac{-\pi i}{2}$ βρίσκονται ΕΝΤΟΣ κύκλου $|z| = 3$.

Έτσι από θεώρημα ολοκλ. υπολοίπων έχουμε:

$$I = 2\pi i \left(\text{Res} \left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{\pi i}{2} \right) + \text{Res} \left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{-\pi i}{2} \right) \right)$$

(γ) Αλλά το $z_1 = \frac{\pi i}{2}$ είναι πόλος 1^{ης} τάξης, διότι

- μηδενίζει μια φορά τον παρονομαστή, αφού

$$A(z) = \cosh z, \quad \cosh\left(\frac{\pi i}{2}\right) = 0$$

$$A'(z) = \sinh z, \quad \sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right) \neq 0$$

(τα μηδενικά του $\sinh z$ είναι στα $k\pi i$)

και προφανώς δε μηδενίζει καθόλου τον αριθμητή, αφού

$$e^z \neq 0 \quad \forall z$$

άρα και

$$e^{\pi i/2} \neq 0$$

(δ) Ακριβώς με την ίδια λογική, το $z_1 = -\frac{\pi i}{2}$ είναι πόλος 1^{ης} τάξης.

(ε)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{2}} \left(\left(z - \frac{\pi i}{2} \right) \frac{e^z}{\cosh z} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{2}} \frac{e^z \left(z - \frac{\pi i}{2} \right) + e^z}{\sinh z} \\ &= \frac{e^z}{\sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right)} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, -\frac{\pi i}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi i}{2}} \left(\left(z + \frac{\pi i}{2} \right) \frac{e^z}{\cosh z} \right) \\ &= \frac{e^{-\pi i/2}}{\sinh(\pi i/2)} \end{aligned}$$

(□) Τελικά

$$I = 2\pi i \left(\frac{e^{\pi i/2}}{\sinh(\frac{\pi i}{2})} + \frac{e^{-\pi i/2}}{\sinh(-\frac{\pi i}{2})} \right)$$

4.1 Εφαρμογές ολοκλ. υπολοίπων

4.1.1 Λήμμα Jordan

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη στο διάτρητο δίσκο

$$0 < |z - z_0| < R,$$

το z_0 είναι **ΑΠΛΟΣ ΠΟΛΟΣ** της f (δηλ. πόλος 1^{ης} τάξης), και έστω γ_ρ είναι το τόξο $\gamma_\rho := \{z : z = z_0 + \rho e^{i\theta}\}$ και $\rho < R$. Τότε:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = i(\theta_1 - \theta_0) \operatorname{Res}(f, z_0)$$

Απόδ.

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \int_{\gamma_\rho} \left(\frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z) \right) dz, \text{ όπου}$$

$h = h(z)$ ολόμορφη στο z_0 , διότι το z_0 είναι απλός πόλος της f .

$$\begin{aligned} I_0 &= a_{-1} \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_\rho} h(z) dz \\ &= a_{-1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} i \rho e^{i\theta} d\theta + \int_{\gamma_\rho} h(z) dz \\ I_0(\rho) &= \text{Res}(f, z_0) \cdot i(\theta_1 - \theta_0) + \int_{\gamma_\rho} h(z) dz \end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο, $\rho \rightarrow 0^+$, έχουμε:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\rho h_0}} f(z) dz = i(\theta_1 - \theta_0) \text{Res}(f, z_0) + \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\rho} h(z) dz$$

Αρκεί ΝΔΟ $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\rho} h(z) dz = 0$.

Αλλά h ολόμορφη στο $z_0 \implies h$ συνεχής στο $z_0 \implies h$ φραγμένη σε μία περιοχή του z_0 . Έτσι:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_\rho} \right| &\leq \int_{\gamma_\rho} |h(z)| |dz| \leq M \cdot \int_{\gamma_\rho} |dz| \\ &= (\theta_1 - \theta_0) \rho M \rightarrow 0, \end{aligned}$$

όπου M είναι άνω φράγμα της h σε μια περιοχή του z_0 .

(α) Υπολογισμός περιήλων ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

Θ.

Έστω $f = f(z)$ ολόμορφη στο \mathbb{C} εκτός από πεπερασμένου πλήθους απομονωμένα ανώμαλα σημεία, και η f τέτοια ώστε

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0.$$

Υποθέτουμε ότι η f έχει:

- ανώμαλα σημεία z_1, \dots, z_n ΣΤΟ ΑΝΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\text{Im}(z) > 0$
- ανώμαλα σημεία w_1, \dots, w_k ΣΤΟ ΚΑΤΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\text{Im}(z) < 0$
- ΠΟΛΟΥΣ 1^{ης} τάξης μόνον ζ_1, \dots, ζ_r πάνω στον ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΞΟΝΑ.

Τότε:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \overbrace{\text{Res}(f, z_j)}^{\text{άνω ημιεπίπεδο}} + \pi i \sum_{\lambda=1}^r \overbrace{\text{Res}(f, z_\lambda)}^{\text{απλοί πόλοι πάνω σε πραγμ. άξονα}}$$

ή ισοδύναμα:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = -2\pi i \sum_{\mu=1}^k \overbrace{\text{Res}(f, w_\mu)}^{\text{κάτω ημιεπίπεδο}} - \pi i \sum_{\lambda=1}^r \overbrace{\text{Res}(f, \zeta_\lambda)}^{\text{απλοί πόλοι πάνω σε πραγμ. άξονα}}$$

4.1.2 Ασκήσεις

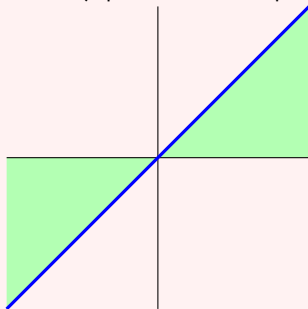
Άσκ. Υπολογίστε το $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x+1)(x^2+4x+5)}$

τέτοια ολοκληρώματα καλούνται καταχρηστικά ή κατά Cauchy

Το $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ δεν υπάρχει, επειδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{N, M \rightarrow 0} \int_N^M x dx$$

που εξαρτάται από την διαδρομή που ακολουθούν τα M, N .



(α) Θεωρώ $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+4z+5)^2}$

(β) Ελέγχω αν ισχύει η συνθήκη

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{(z+1)(z^2+4z+5)^2} &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z^5} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{4}{z}+\frac{5}{z^2}\right)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^4} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{4}{z}+\frac{5}{z^2}\right)^2} = 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

(γ) Υπολογίζω **όλα** τα ανώμαλα σημεία της f και τα ταξινομώ:

$$\begin{aligned} (z+1)(z^2+4z+5)^2 &= 0 \iff \\ \iff z_0 &= -1 \text{ (απλή ρίζα)} \quad \text{και } z_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} \\ \iff z_0 &= -1 \text{ (απλή)} \quad \text{και } z_{1,2} = -2 \pm i \text{ (διπλές ρίζες)} \end{aligned}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} z_0 &= -1 \quad (\text{απλός πόλος στον πραγματικό άξονα}) \\ z_1 &= -2 + i \quad (\text{διπλός πόλος στο άνω ημιεπίπεδο}) \\ z_2 &= -2 - i \quad (\text{διπλός πόλος στο κάτω ημιεπίπεδο}) \end{aligned}$$

(δ) Τύπος:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = + \overbrace{2\pi i \cdot \text{Res}(f, -2+i)}^{\text{ανώμαλο στο άνω ημιεπίπεδο}} + \pi i \text{Res}(f, -1)$$

(ε) Υπολογισμός ολοκλ. υπολοίπου

$$\begin{aligned} \bullet \text{Res}(f, -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{(z+1)(z^2+4z+5)^2} = \frac{1}{4}. \\ \bullet \text{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left((z-z_1)^2 \frac{1}{(z+1)(z-z_1^2)(z-z_2)^2} \right)' \\ \text{όπου } z_1 &= -2+i, \quad z_2 = -2-i \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{1}{(z+1)(z-z_2)^2} \right)' = - \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z-z_2)^2 + 2(z+1)(z-z_2)}{(z+1)^2(z-z_2)^4} \\ &= - \frac{(z_1-z_2) + 2(z_1+1)}{(z_1+1)^2(z_1-z_2)^3} \\ z_1-z_2 &= \cancel{-2+i} + \cancel{2+i} \\ &= - \frac{2i + 2(i-1)}{(i-1)^2(2i)^3} = \frac{4i-2}{+2 \cdot 8} \\ &= \boxed{\frac{2i-1}{8}} \end{aligned}$$

(ϐ) Τελικό αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x+1)(x^2+4x+5)^2} &= 2\pi i \cdot \frac{2i-1}{8} + \pi i \cdot \frac{1}{4} \\ &= -\frac{\pi}{2} - \cancel{\frac{\pi i}{4}} + \cancel{\frac{\pi i}{4}} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(2) Υπολογίστε το $\oint_{\gamma} \frac{1}{z(z-z_1)^2} dz$, όπου γ είναι το τετράγωνο: με θετική φορά.

Εφαρμόζω θεώρ. ολοκλ. υπολοίπων

$$I = 2\pi i \cdot \text{Res} \left(f, \begin{array}{c} \text{στα ανώμαλα σημεία} \\ \text{ΕΝΤΟΣ τετραγώνου} \end{array} \right) + i\frac{\pi}{2} \text{Res}(f, \overbrace{0}^{\text{πάνω στην καμπύλη}})$$

$$\bullet \text{Res}(f, 0) \stackrel{\substack{z=0 \text{ απλός} \\ \text{πόλος}}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(z-z_1)^2} = \frac{1}{z_1^2}$$

$$\bullet \text{Res}(f, z_1) \stackrel{\substack{\text{δεύτερης} \\ \text{πόλος}}}{=} \lim_{z \rightarrow z_1} \left((z-z_1)^2 \frac{1}{z(z-z_1)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow z_1} -\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)^2}$$

Αντικαθιστώντας παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

4.1.3 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$

όπου R είναι μια ρητή συνάρτηση των $\sin \theta$ και $\cos \theta$

Μεθοδολογία: Θέτουμε $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Τότε:

$$dz = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$$

$$\text{άρα } \boxed{dz = iz d\theta}$$

$$\text{Επίσης: } \begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz} \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε τα παραπάνω και παίρνουμε:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} K(z) dz,$$

όπου K είναι μια ρητή συνάρτηση του z . Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το θ. ολοκλ. υπολοίπων, και έχουμε:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = 2\pi \sum_{j=1}^n \text{Res}(K, z_j),$$

όπου $z_j, j=1, \dots, n$ ανώμαλα σημεία της K εντός του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$.

Παράδειγμα: Υπολογίστε το $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 + \sin \theta} d\theta$

(α) Θέτω $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$

Τότε

$$dz = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} d\theta = iz dz$$

$$\text{άρα } \boxed{dz = iz d\theta}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz} \\ \bullet \cos(2\theta) &= \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} \stackrel{z=e^{i\theta}}{=} \frac{z^2 + z^{-2}}{2} = \frac{z^4 + 1}{2z^2} \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{2 + \frac{z^2-1}{2iz}} \frac{dz}{iz} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{z^4 + 1}{z^2(z^2 + 4iz - 1)} dz \end{aligned}$$

(β) Ανώμαλα σημεία: Εκείνα που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Άρα

$$z^2(z^2 + 4iz - 1) = 0 \iff$$

$$z = 0 \text{ (διπλή)} \quad \text{ή} \quad z_{1,2} = \frac{-4i \pm \sqrt{16i^2 + 4}}{2} = -2i \pm i\sqrt{3} = i(-2 \pm \sqrt{3})$$

Από αυτά με ενδιαφέρουν μόνον τα ανώμαλα σημεία ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου, δηλ.:

$$z_0 = 0 \text{ (διπλή)}$$

$$z_1 = i(-2 + \sqrt{3})$$

(γ) Ταξινόμηση ανώμαλων σημείων και υπολογισμός ολοκληρωτικών υπολοίπων

$z_0 = 0$ είναι πόλος 2^{ης} τάξης (μηδενίζει δύο φορές τον παρονομαστή, καμία τον αριθμητή)

$z_1 = i(-2 + \sqrt{3})$ πόλος 1^{ης} τάξης

$$\text{Ο τύπος } \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0)^N f(z) \right)^{(N-1)} \text{ θα δίνεται}$$

και έτσι αν $f(z) = (z^4 + 1)/z^2(z^2 + 4iz - 1)$, τότε

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\cancel{z^2} \frac{z^4 + 1}{\cancel{z^2}(z^2 + 4iz - 1)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4z^3(z^2 + 4iz - 1) - (2z + 4i)(z^4 + 1)}{(z^2 + 4iz - 1)^2} \\ &= -4i \end{aligned}$$

Έστω $z_1 = i(-2 + \sqrt{3})$ και $z_2 = i(-2 - \sqrt{3})$. Τότε

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \cancel{(z - z_1)} \frac{z^4 + 1}{z^2 \cancel{(z - z_1)}(z - z_2)} \\ &= \frac{z_1^4 + 1}{z_1^2(z_1 - z_2)} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 2)^4 + 1}{-\left(\sqrt{3} - 2\right)^2 \cdot i2\sqrt{3}} = i \frac{(\sqrt{3} - 2)^4 + 1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)^2}\end{aligned}$$

(δ) Τελικά από θεώρημα ολοκλ. υπολοίπων έχω:

$$\begin{aligned}I &= 2\pi i \left(-4i + i \frac{(\sqrt{3} - 2)^4 + 1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)^2} \right) \\ &= 8\pi - \pi \cdot \frac{(\sqrt{3} - 2)^4 + 1}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)^2}\end{aligned}$$

4.1.4 Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης f

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) e^{-i\omega x} dx$$

όπου $x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$

Θ.

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη στο \mathbb{C} εκτός πεπερασμένου πλήθους απομονωμένων ανώμαλων σημείων και η f έτσι ώστε:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

Υποθέτουμε ότι:

- (α) Η f έχει ανώμαλα σημεία z_1, \dots, z_n στο ΑΝΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\operatorname{Im}(z) > 0$
- (β) Η f έχει ανώμαλα σημεία w_1, \dots, w_m στο ΚΑΤΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\operatorname{Im}(z) < 0$
- (γ) Η f έχει **ΑΠΛΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ** ζ_1, \dots, ζ_r πάνω στον **πραγματικό άξονα**.

Τότε

(α) Αν $\boxed{\omega < 0}$, έχουμε:

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} \left(f(z) e^{-i\omega z}, z_j \right) + \pi i \sum_{\mu=1}^r \operatorname{Res} \left(f(z) e^{-i\omega z}, \zeta_\mu \right)$$

(β) Αν $\boxed{\omega > 0}$, έχουμε:

$$\hat{f}(\omega) = -2\pi i \sum_{\lambda=1}^m \operatorname{Res} \left(f(z) e^{-\omega z}, \underset{\substack{\text{κάτω} \\ \text{ημιεπ.}}}{w_\lambda} \right) - \pi i \sum_{\mu=1}^r \operatorname{Res} \left(f(z) e^{-i\omega z}, \zeta_\mu \right).$$

Μέρος II

Κεχαγιάς

Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί αριθμοί

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$x, y \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1$$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$

$$= x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_1y_2 + i^2x_2y_1$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

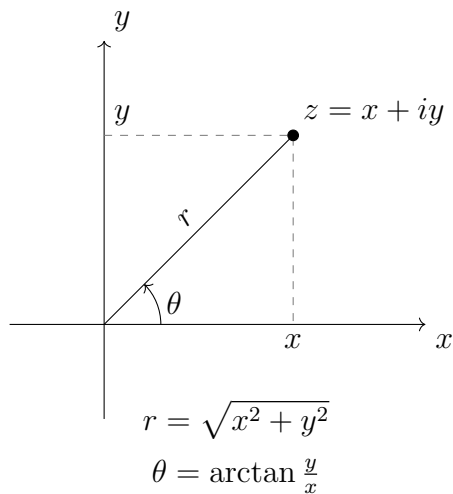
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\operatorname{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow \text{μέτρο του } z$$

γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ. $z = x \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$)

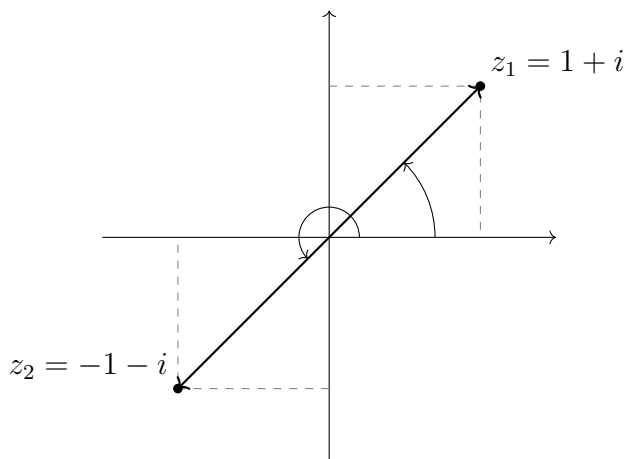
$$\begin{aligned} z = x + iy &= r \cdot \cos \theta + ir \sin \theta \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \quad (\text{Euler}) \end{aligned}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ διότι}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \cos \theta + ir \sin \theta \end{aligned}$$



$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}e^{i(-3\pi/4)} = \sqrt{2}e^{i13\pi/4}$$

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Γενικά: } -1 - i = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.1 Συναρτήσεις

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z = x + iy$$

$$\text{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^\circ \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^\circ \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \quad \theta_0 = \arctan \left(\left| \frac{y}{x} \right| \right)$$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$$

$$\text{Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση } \arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \text{mod}(z) \cdot e^{i\text{Arg}(z)} \\ &= \text{mod}(z) \cdot e^{i(\text{Arg}(z) + 2k\pi)} \end{aligned}$$

$$z_1 = \text{mod}(z_1)e^{i\text{Arg}(z_1)}$$

$$z_2 = \text{mod}(z_2)e^{i\text{Arg}(z_2)}$$

$$z_1 z_2 = \text{mod}(z_1)\text{mod}(z_2)e^{i(\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2))}$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \text{ επειδή}$$

$$\text{Arg}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) = \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi$$

Γενικά, αν $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, τότε:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Όμως:

$$\begin{aligned} \arg(z^z) &= \arg(z) + \arg(z) \\ &\neq 2\arg(z) \end{aligned}$$

διότι:

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

$$A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\}$$

$$2A = \{2a : a \in A\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{4, 5\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \{1 + 4, 1 + 5, 2 + 4, 2 + 5, 3 + 4, 3 + 5\} = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$2A = \{2, 4, 6\}$$

1.2 η-οστές ρίζες

$$z = a^{1/n} \iff z^n = a$$

Δηλ. ποιο z ικανοποιεί αυτή

$$a = |a|e^{i\theta}$$

$$z = re^{i\phi}$$

$$(re^{i\phi})^n = |a|e^{i\theta}$$

$$\implies r^n \cdot e^{in\phi} = |a|e^{i\theta}$$

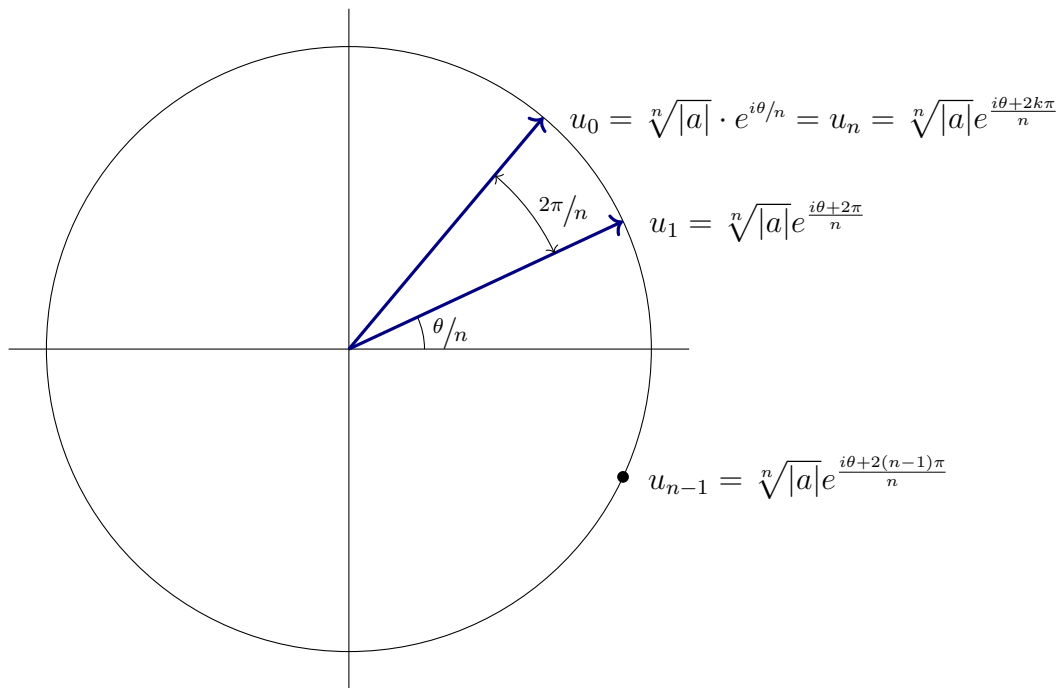
$$\implies r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi) = |a| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} r^n = |a| \implies r = \sqrt[n]{|a|} \\ \cos(n\phi) = \cos \theta \\ \sin(n\phi) = \sin \theta \implies \end{array} \right. \implies n\phi = \theta + 2k\pi \in \mathbb{Z} \implies \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$\implies z = a^{1/n} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Όμως αρκεί να πάρω $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$)

$$a^{1/n} = \left\{ \sqrt[n]{|a|}e^{i\theta/n}, \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\theta+2\pi}{n}}, \dots \right.$$

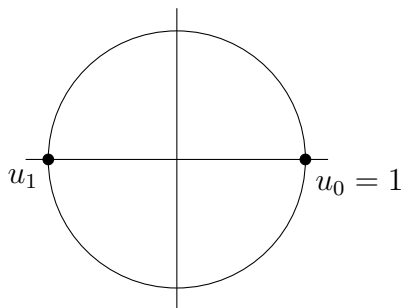


Παρ. $a^{1/2} = 1^{1/2}$

$$a = 1 = 1 \cdot e^{i0} \quad |a| = 1, \theta = 0$$

$$u_0 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2 \cdot 0 \cdot \pi}{2}\right)} = e^{i0} = 1$$

$$u_1 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2 \cdot \pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1$$



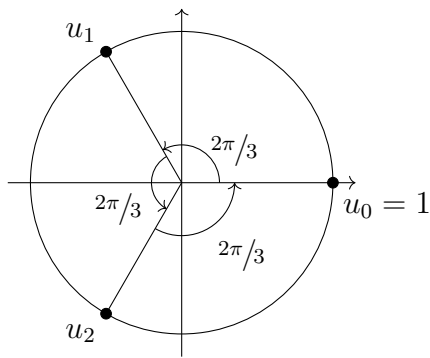
Παρ. $a^{1/3} = 1^{1/3} = z$

$$a = 1 = e^{i0}, |a| = 1, \theta = 0$$

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$u_2 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$



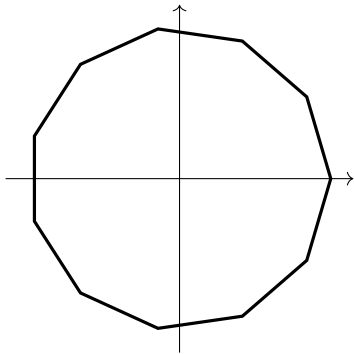
Διαφορετικά

$$\begin{aligned}
 1^{1/3} = z &\iff 1 = z^3 \\
 &\iff z^3 - 1 = 0 \\
 &\iff (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \\
 &\iff (z - 1) \left(z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Παρ. $1^{1/11} = z \iff 1 = z^{11}$

$$\begin{aligned}
 &\iff z^{11} - 1 = 0 \\
 &\iff (z - 1)(z^{10} + z^9 + \dots + z^2 + z + 1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{10}\}$$



Κεφάλαιο 2 Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$$e^z, \log(z)$$

$$e^z \stackrel{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ήξερα } e^x &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 e^{iy} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} .
 \end{aligned}$$

Τώρα η νέα συνάρτηση $e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

Παρ.

$$\begin{aligned}e^{1+i} &= ee^i = e \cdot (\cos 1 + i \sin 1) \\&= e \cdot \cos 1 + i \cdot e \cdot \sin 1\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(e^{1+i}) = e \cos 1$$

$$\operatorname{Im}(e^{1+i}) = e \sin 1$$

$$\log(e) = 1$$

$$\log(-1) = \log(e^{i(\pi+2k\pi)}) = i(\pi + 2k\pi)$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\theta$$

Ορίζω

Πλειότιμη $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$

Μονότιμη $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z)$ είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$\begin{aligned}\log(1+i) &= \log(\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2k\pi)}) \\&= \log(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right\}$$

2.1

Από σήμερα: $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Πριν 7 ημέρες: $e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i \sin y$

Σήμερα: $\exp(z) \stackrel{\text{op}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Θ.

Η $\exp(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z \in \mathbb{C}$ και ικανοποιεί:

(1) $\forall z : (\exp(z))' = \exp(z)$

(2) $\forall z_1, z_2 : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$

(3) $\forall \theta \in \mathbb{R} : \exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$

Απόδ.

(1)

$$\begin{aligned}(\exp(z))' &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)' \\&= 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \exp(z)\end{aligned}$$

(2) $g(z) = \exp(z) \exp(\zeta - z)$

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dz} &= \exp(z) \exp(\zeta - z) + \exp(z) \exp(\zeta - z)(-1) = 0 \\&\implies g(z) = c \implies c = g(0) = \exp(\zeta) \\&\implies \exp(\zeta) = g(z) = \exp(z) \exp(\zeta - z)\end{aligned}$$

Θέτω: $z = z_1, \zeta = z_1 + z_2$

Οπότε:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

(3)

$$\begin{aligned}\exp(i\theta) &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) \\&= \cos \theta + i \sin \theta\end{aligned}$$

$$\exp(z) = e^z$$

$$\exp(1+i) = 1 + (1+i) + \frac{(1+i)^2}{2!} + \dots$$

$$e^{1+i} = 1 + (i+1) + \dots$$

ή ο αρ. $e = 2.718$ υψωμένος στη μιγαδική δύναμη $1+i$

Θ.

Η $\exp(z)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$

Απόδ.

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \exp(2\pi i) = \exp(z)$$

Η εικόνα του συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}$ υπό την συνάρτηση $f(z)$ Δηλ.

$$f(A) = \{w = f(z), z \in A\}$$

Παρ. Να δειχθεί ότι $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Διότι: έστω $w = re^{i\phi} \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Θα βρω $z = \rho e^{i\theta} = x + iy$ τ.ώ: $\exp(z) = w$.

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy)$$

$$w = re^{i\phi}$$

$$\exp(x) = |\exp(z)| = |w| = r \implies \boxed{x = \ln(r)}$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(w)$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(\exp(x) \exp(iy)) = y$$

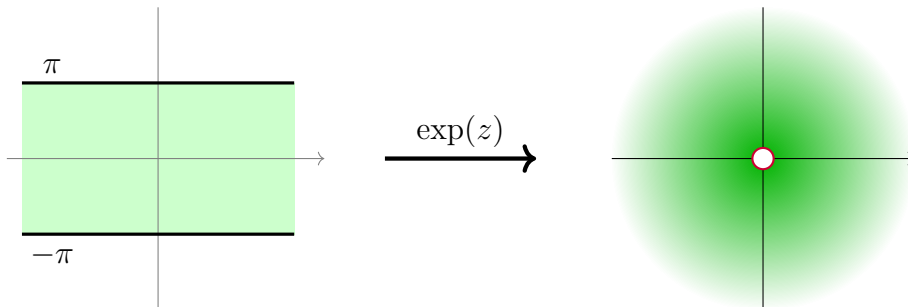
$$\text{Arg}(w) = \text{Arg}(re^{i\phi}) = \phi$$

$$\text{Arg}(\exp(z)) = \text{Arg}(w) \implies \boxed{y = \phi}$$

Τελικά $z = x + iy = \ln(r) + i\phi$ ικανοποιεί $\exp(z) = re^{i\phi} = w$. Άρα $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

Στην πραγματικότητα, δεν χρειάζομαι όλο το \mathbb{C} διότι:

$$\exp(U) = \mathbb{C} - \{0\}, \quad \text{όπου } U = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi)\}$$



2.2 Λογαριθμική Συν.

$$w = \overbrace{\log(z)}^{\text{πλειότιμη}} \iff z = \exp(w)$$

$$w = \log(1 + i)$$

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$$

$$\log(1 + i) = \log\left(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{2}) + \log\left(e^{i[\frac{\pi}{4} + 2k\pi]}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \left\{ \dots, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{7\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{17\pi}{4}, \dots \right\}$$

$$\boxed{\log(z) = \ln(r) + i\arg(z)} \leftarrow \text{πλειότιμη}$$

$$\boxed{\text{Log}(z) = \ln(r) + i\text{Arg}(z)} \leftarrow \begin{array}{l} \text{μονότιμη} \\ \text{ασυνεχής για } x \in (-\infty, 0] \end{array}$$

2.3 Μιγαδικές δυνάμεις

$$z^c = e^{\log(z^c)} = e^{c \log z} = e^{c(\ln(|z|) + i \arg(z))}$$

ή

$$z^c = e^{\text{Log}(z^c)} = e^{c(\ln(|z|) + i \text{Arg}(z))}$$

$$\underbrace{(1+i)^{2-i}}_{\substack{z=1+i \\ c=2-i}} = e^{(2-i) \log(1+i)} = e^{(2-i)(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))}$$

$$z = 1 + i$$

$$c = 2 - i$$

$$\begin{aligned} &= e^{(2 \ln(\sqrt{2}) + (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)) + i(-\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 4k\pi)} \\ &= e^{2 \ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi} \cdot e^{i(-\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 4k\pi)} \\ &= 2e^{\pi/4 + 2k\pi} \cdot \left[\cos \left(-\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 4k\pi \right) + i \sin \left(-\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 4k\pi \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+i} &= (1+i)^{1/2} = e^{1/2 \cdot \log(1+i)} \\ &= e^{1/2(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} \\ &= e^{1/2 \ln(\sqrt{2})} \cdot e^{i(\frac{\pi}{8} + k\pi)} \\ &= \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{\pi}{8} + k\pi)} \\ &= \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + k\pi \right) \right) \\ &= \begin{cases} \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \right) \\ \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{9\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{9\pi}{8} \right) \right) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(-1)^i = e^{\log((-1)^i)} = e^{i \log(-1)} = e^{i(i(2k+1)\pi)} = e^{-(2k+1)\pi}$$

$$\begin{aligned} (1+i)^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2} \log(1+i)} = e^{\sqrt{2}(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} \\ &= \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot e^{i\sqrt{2}(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} \\ &= \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi \right) \right] \\ \cos \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \right) &= \cos \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi \right) \\ \implies \frac{\sqrt{2}\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2k\sqrt{2}\pi + 2m\pi \implies 2k\sqrt{2}\pi = 2m\pi \implies \sqrt{2} = m/k \end{aligned}$$

$$(1+i)^{p/q} = \dots$$

$$m = \lambda q$$

Παρ. Να βρεθούν οι τιμές του n τ.ώ:

$$c_n = \sum_{k=0}^n i^k \in \mathbb{I}$$

n	
0	1
1	$1 + i$
2	$1 + i + i^2 = 1$
3	$1 + i + i^2 + i^3 = 0$
4	1
5	$1 + i$
6	i
\vdots	\vdots

Αρα $\forall_{n,m} : c_n = c_{n+4m}$

Οι φανταστικές τιμές του c_n προκύπτουν για

$$n = 2, 3, \\ 6, 7, \\ 10, 11,$$

Απ. $n \in \{m + 4l : m \in \{2, 3\}, l \in \mathbb{N}_0\}$

Παρ. Να λυθεί η $(1 + z)^{2n} = -(1 - z)^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$

Λύση Φαίνεται άμεσα ότι $z \neq 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{2n} = -1 &\implies \\ \frac{1+z}{1-z} &= (-1)^{1/2n} = \left(e^{i(2k+1)\pi} \right)^{1/2n} \\ z &= \frac{e^{i(2k+1)\pi/2n} - 1}{e^{i(2k+1)\pi/2n} + 1} \\ &= \frac{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) - 1}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + 1} \\ &= \frac{2 \sin^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i 2 \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)}{\begin{cases} \cos\phi - 1 = -2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ \cos\phi + 1 = 2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \end{cases} \frac{2 \cos^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i 2 \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)}{2 \cos^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i 2 \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \left[-\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \right]}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \left[\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \right]} \\ z_k &= i \tan\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1 \end{aligned}$$

2.4

2.4.1 Η γραμμική απεικόνιση

Τύπος: $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$

Προφανώς η $w = f(z) = az + b$ είναι 1-1 συνάρτηση και εύκολα βρίσκουμε την αντίστροφή της λύνοντας την $w = az + b$ ως προς z .

Έτσι: $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = az + b$ και μπορώ να την επεκτείνω στο $\bar{\mathbb{C}}$ με 1-1 τρόπο θέτοντας

$$f(\infty) = \infty$$

Γεωμετρική ερμηνεία

- Προφανώς, από τη δομή της, η γραμμική απεικόνιση απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και κύκλους σε κύκλους.

Ερώτηση Έστω $f(z) = az + b$.

Αν $Ax + By + \Gamma = 0$ ευθεία τυχαία, βρείτε πού αυτή απεικονίζεται μέσω της $f(z)$.

$$\begin{aligned} w &= u + iv = az + b \\ &= u(x, y) + iv(x, y) = a(x + iy) + b \end{aligned}$$

$$\bullet \quad w = az + b \iff z = \frac{w-b}{a} \iff x + iy = \frac{u+iv-(b_0+ib_1)}{a_0+ia_1} = \frac{[(u-b_0)+i(v-b_1)][a_0-a_1i]}{|a|^2} = \frac{(u-b_0)a_0+a_1(v-b_1)}{|a|^2} + i \frac{-a_1(u-b_0)+a_0(v-b_1)}{|a|^2}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_0u + a_1v - (a_0b_0 + a_1b_1)}{|a|^2} \\ y &= \frac{-a_1u + a_0v - (a_1b_0 + a_0b_1)}{|a|^2} \end{aligned}$$

(μπορεί να είναι λάθος)

$$\begin{aligned} Ax + By + \Gamma &= 0 \\ \iff A(a_0u + a_1v - (a_0b_0 + a_1b_1)) + B(-a_1u + a_0v - (a_1b_0 + a_0b_1)) + \Gamma|a|^2 &= 0 \end{aligned}$$

2.4.2 Αντιστροφή $f(z) = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$)

Προφανώς: $\mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = \frac{1}{z}$
και μπορεί να επεκταθεί στο $\bar{\mathbb{C}}$ θέτοντας $f(0) = \infty$ και $f(\infty) = 0$.

Εννοείται ότι είναι 1-1 με $w = \frac{1}{z} \iff \frac{1}{w}$ δηλ. για $\begin{cases} w = u + iv \\ z = x + iy \end{cases}$ έχουμε:

$$x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \iff \begin{cases} x = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2 + v^2} \end{cases} \quad (2)$$

Έτσι φαίνεται ότι η συνάρτηση αυτή απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.

Πράγματι, αν $Ax + By + \Gamma = 0$ τυχαία ευθεία στο επίπεδο του z , τότε από (2):

$$A \frac{u}{u^2 + v^2} - B \frac{v}{u^2 + v^2} + \Gamma = 0$$

$$\iff \boxed{Au - Bv + \Gamma(u^2 + v^2) = 0}$$

- $\Gamma = 0$ τότε $Au - Bv = 0$ άρα ευθεία απεικον. σε ευθεία, ενώ:
- $\Gamma \neq 0$ τότε $u^2 + v^2 + \frac{A}{\Gamma}u - \frac{B}{\Gamma}v = 0$ **δηλ.** κύκλος

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

Η $f(z) = \frac{1}{z}$ απεικονίζει το εσωτερικό μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ με κέντρο το $z = 0$, στο εξωτερικό του (με 1-1 τρόπο, και αντιστρόφως).

Πράγματι:

$$z : |z| < 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } |f(z)| = \frac{1}{|z|} > 1 \implies |f(z)| > 1$$

$$z : |z| > 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } |f(z)| = \frac{1}{|z|} < 1 \implies |f(z)| < 1$$

$$z : |z| = 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$$

2.4.3 Μετασχ. Möbius

Καλούμε ρητογραμμικό μετασχηματισμό (Möbius) κάθε συνάρτηση

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (\text{με } ad - bc \neq 0)$$

Προφανώς: $f : \mathbb{C} - \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} - \{a/c\}$, αν $c \neq 0$
 ή $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ αν $c = 0$
 Η f είναι 1-1 (εύκολο).

- Αποδεικνύεται ότι ο μετασχ. Möbius είναι σύνθεση διαστολής, περιστροφής, μετάθεσης και αντιστροφής, άρα απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.
- Ο μετασχ. Möbius (στην περίπτωση ευθείας ή κύκλου) απεικονίζει συμπληρωματικούς τόπους σε συμπληρωματικούς τόπους.
- Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ μετασχ. Möbius που απεικονίζει ΤΡΙΑ σημεία z_1, z_2, z_3 σε ΤΡΙΑ ΑΛΛΑ σημεία $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2), w_3 = f(z_3)$, και έχει τη μορφή:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

2.4.4 Τριγωνομετρικές και αντίστροφές τους

π.χ.

- Η συνάρτηση

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

είναι 2π -περιοδική, άρα μη αντιστρέψιμη στο \mathbb{C}

Έστω $E_k = \{x + iy : \kappa\pi - \frac{\pi}{2} < x < \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, y \in \mathbb{R}\}$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι "κατακόρυφες λωρίδες".

Για $k=0$, έχω:

Τότε η $\sin z$ γίνεται 1-1 με πεδίο τιμών το σύνολο

$$A = \mathbb{C} - \{u + iv : |u| \geq 1 \text{ και } v = 0\}$$

Έτσι η $\sin : E_k \rightarrow A$ είναι 1-1 (για κάθε συγκεκριμένο $k \in \mathbb{Z}$), άρα αντιστρέψιμη.

- Από $w = \sin z$ παίρνω:

$$\begin{cases} u(x, y) = \sin x \cosh y \\ v(x, y) = \cos x \sinh y \end{cases}$$

- Για $x = \frac{\pi}{2}$, $y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικονίζεται}]{\sin z} (\cosh y, 0)$

Αλλά $\cosh y$ δεν είναι 1-1 $\forall y$, επομένως η $\sin z$ ΔΕΝ μπορεί να είναι 1-1 πάνω στην $x = \frac{\pi}{2}$, η οποία εξαιρείται από το πεδίο ορισμού. Έτσι, από το πεδίο τιμών, εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \geq 1, v = 0\}$$

- Για $x = -\frac{\pi}{2}$, ομοίως εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \leq -1, v = 0\}$$

- Για $x=0$, $y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικον.}]{\sin z} (0, \sinh y)$ και επειδή $\sinh y$ 1-1 γν. αύξ. με πεδίο τιμών το $\mathbb{R} \forall y$ η $x=0$ απειον. στην $v=0$.

- Έστω $x = a$ ($a \neq \pm \frac{\pi}{2}$), $a \neq 0$.

$$\text{Τότε: } \begin{cases} u = \sin a \cosh y \\ v = \cos a \sinh y \end{cases} \implies \boxed{\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1}. \text{ Αν } a \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ τότε } \begin{cases} u > 0 \\ v \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ και}$$

αντίστοιχα για $a \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Έτσι ορίζουμε:

$$= \arcsin : E' \rightarrow E_k :$$

$$\arcsin z = w \iff z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2}$$

$$\iff e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \iff e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{4 - 4z^2}}{2}$$

$$\implies iw = \log \left(z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}} \right)$$

$$\implies \boxed{\arcsin z = \log \left(z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}} \right)}$$

- Τρίτη 22/11 Ατρέας, 2 τμήματα
- Πέμπτη 24/11 Κεχαγιάς, 2 τμήματα
- Παρασκευή 25/11 Κεχαγιάς, 2 τμήματα

Κεφάλαιο 3 Ακολουθίες & Σειρές (Μιγαδικών αριθμών/συναρτήσεων)

Ορισμός

Ακολουθία $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$

Ορισμός

Λέμε ότι η $u_n(z)$ τείνει σε $u(z)$.

Γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = u(z)$

$$\forall z, \forall \epsilon > 0 \exists N_{\epsilon, z} : n \geq N_{\epsilon, z} \implies |u_n(z) - u(z)| < \epsilon$$

Παρ. $u_n(z) = 1 + \frac{z}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} = 1$ διότι

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, \forall \epsilon > 0 : n \geq \frac{|z|}{\epsilon} + 1 &\implies \left| \underbrace{1 + \frac{z}{n} - 1}_{\frac{z}{n}} \right| < \epsilon \\ &\iff \left| \frac{z}{n} \right| < \epsilon \\ &\iff n > \frac{|z|}{\epsilon} \end{aligned}$$

Ορισμός

Έστω ακολουθία $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$

Ορίζω νέα ακολουθία $(S_1(z))_{n=1}^{\infty}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} S_1(z) &= u_1(z) \\ S_2(z) &= u_1(z) + u_2(z) \\ &\dots \\ S_n(z) &= u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) \end{aligned}$$

Εάν $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$ γράφω $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = S(z)$ και το ονομάζω **σειρά**.

Παρ. για $n \in \mathbb{N}$ ορίζω $u_n(z) = z^n \cdot (1 - z)$. Τότε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n(1 - z) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (z^n - z^{n+1}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (z - z^2 + z^2 - z^3 + z^3 - z^4 + \dots - z^{N+1}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (z - z^{N+1}) = z - \lim_{N \rightarrow \infty} z^{N+1} \\ &\stackrel{\text{Θέτω } z=re^{i\theta}}{=} z - \lim_{N \rightarrow \infty} r^N e^{iN\theta} \\ &= z \text{ όταν } |z| < 1 \end{aligned}$$

Τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (1 - z) = \begin{cases} z & \text{όταν } |z| < 1 \\ \text{δεν ορίζεται} & \text{όταν } |z| \geq 1 \end{cases}$$

(Για $z = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} = 0^n(1 - z) = 0 = z$)
 Ισχύει $|z| < 1 \implies \lim_{N \rightarrow \infty} z^N = 0$, διότι

$$\begin{aligned} \forall z \text{ με } |z| < 1, \epsilon > 0 \quad n \geq \frac{\ln e}{\ln |z|} + 1 &\implies |z^n| < \epsilon \\ &\iff |z|^n < \epsilon \\ &\iff n \cdot \ln |z| < \ln e \\ &\iff n < \frac{\ln e}{\ln |z|} \end{aligned}$$

Ορισμός

Λέω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ **συγκλίνει απολύτως** αν $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ συγκλίνει.

Ορισμός

Λέμε ότι η $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$ **συγκλίνει ομοιόμορφα** στην $u(z)$ αν

$$\forall z, \forall \epsilon > 0 \exists \underbrace{N_{\epsilon}}_{\text{Το } N_{\epsilon} \text{ δεν εξαρτάται από το } z} : n \geq N_{\epsilon} \implies |u_n(z) - u(z)| < \epsilon$$

Παρόμοια πράγματα λέμε και για την $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$

Παρ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (1 - z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε z με $|z| \leq \frac{1}{2}$
Διότι

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N z^n(1 - z) = z - \lim_{N \rightarrow \infty} z^{N+1}$$

→ Αρκεί να δείξω ότι $z^{N+1} \rightarrow 0$ ομοιόμορφα.

$$\forall z, |z| \leq \frac{1}{2}, \forall \epsilon > 0, \forall n \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} + 1 \implies |z^{N+1}| < \epsilon$$

Ισχυρίζομαι ότι

$$\forall z, |z| \leq \frac{1}{2}, \forall \epsilon > 0, \forall n \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln \frac{1}{2}} + 1 \implies |z^{N+1}| < \epsilon$$

$$\text{διότι } |z| \leq \frac{1}{2} \implies \frac{\ln \epsilon}{\ln \frac{1}{2}} \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|}$$

Θ.

Έστω $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z)$ ομοιόμορφα στο χωρίο Δ .

$$\text{Τότε } \int_c u(z) dz = \int_c \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c u_n(z) dz$$

Θ.

Θέτω $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία αναλυτικών (ολόμορφων) συναρτήσεων και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο χωρίο D . Τότε

$$\frac{du}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n}{dz}$$

Θ.

Αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Θ.

Αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(z)|$ και $\forall n, z : |u_n(z)| \leq |v_n(z)|$, τότε συγκλίνει και η

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$$

Θ.: Κριτήριο του λόγου

Έστω $L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right|$. Τότε

$L(z) < 1$ η $\sum_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει

$L(z) > 1$ η $\sum_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει

$L(z) = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε

Θ.: Κριτήριο της ρίζας

Έστω $L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|}$. Τότε

$$L(z) < 1 \quad \eta \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{συγκλίνει}$$

$$L(z) > 1 \quad \eta \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{δεν συγκλίνει}$$

$$L(z) = 1 \quad \text{δεν μπορούμε να αποφανθούμε}$$

Παρ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ συγκλίνει όταν $|z| \leq 1$, δεν συγκλίνει όταν $|z| > 1$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \quad L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)(n+2)}{z^n/n(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z| \frac{n}{n+2} = |z|$$

Όταν $|z| = 1$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Αφού συγκλίνει απολύτως, συγκλίνει (για κάθε $z : |z| = 1$)

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ συγκλίνει όταν $|z| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N z^n &= z + z^2 + z^3 + \dots + z^N \\ &= z \cdot (1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1}) \\ &= z \cdot \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{z}{1 - z} (1 - z^N) \\ &= \frac{z}{1 - z} \quad \text{για } N \rightarrow \infty \text{ όταν } |z| < 1 \end{aligned}$$

Για $|z| > 1$ δεν συγκλίνει.

Για $|z| = 1$ δεν συγκλίνει (τουλάχιστον για κάποιες τιμές).

Εναλλακτικά, με κριτήριο ρίζας: $L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z^n|} = |z|$

και κριτήριο λόγου: $L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| = |z|$

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$

$$L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(z+2)^{n+1}}{(n+1)^3 4^{n+1}}}{\frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z+2|}{4} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^3 = \frac{|z+2|}{4} \rightarrow \begin{cases} |z+2| < 4 & \text{συγκλίνει} \\ |z+2| = 4 & * \\ |z+2| > 4 & \text{δεν συγκλίνει} \end{cases}$$

Αν $|z+2| = 4$, ελέγχουμε αν συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)^3 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$

$$L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!|z|^{n+1}}{n!|z|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|z| = \begin{cases} \infty & |z| \neq 0 \\ 0 & |z| = 0 \end{cases}$$

- $\sum \frac{z^n}{n(n+1)}$ συγκλίνει για $|z| \leq 1$
- $\sum z^n$ συγκλίνει για $|z| \leq 1$
- $\sum \frac{(z+2)^n}{(n+1)34^n}$ συγκλίνει για $|z+2| \leq 4$
- $\sum n!z^n$ συγκλίνει για $|z| = 0$

Ορισμός

Δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

Θ.

Για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ υπάρχει $R \geq 0$, τ.ώ:

$|z - z_0| < R$ η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα
 $|z - z_0| > R$ η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει

Στο $|z - z_0| = R$ η ΔΣ μπορεί να συγκλίνει σε κάποια σημεία και να μην συγκλίνει σε άλλα. Αυτό παρατηρούμε και στα 4 παραπάνω παραδείγματα.

Όταν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \rightarrow$ σειρά Taylor.

Όταν $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \rightarrow$ σειρά Laurent.

Η σειρά Laurent περιλαμβάνει την Taylor ως ειδική περίπτωση.

Αν είναι "γνήσια" σειρά Laurent ($a_n \neq 0$ για κάποια αρνητικά n), τότε το z_0 λέγεται ανώμαλο σημείο της σειράς Laurent.

Από την ΑΛΛΗ ΕΒΔΟΜΑΔΑ
ΤΡΙ και ΠΕ στον ΑΤΡΕΙΑ ΚΑΙ ΤΑ 2 τμήματα

Θ.

Για κάθε ΔΣ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ υπάρχει αριθμός $R \geq 0$ (ακτίνα σύγκλισης) τ.ώ

(α) Η ΔΣ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα στο $\underbrace{D_R(z_0)}_{\text{δίσκος σύγκλισης}} = \{z : |z - z_0| < R\}$

(β) Η ΔΣ αποκλίνει στο $\{z : |z - z_0| > R\}$

(γ) Σε κάθε σημείο του συνόρου του δίσκου σύγκλισης $\{z : |z - z_0| = R\}$ η ΔΣ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει

Θ.

Για κάθε ΔΣ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $\forall z \in D_R(z_0)$ ισχύουν:

(α)

$$\frac{d f}{d z} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n-1}$$

(β) Για κάθε $C \subseteq D_R(z_0)$

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z - z_0)^n dz$$

Θ.

Έστω $f(z)$ αναλυτική στο εσωτερικό κλειστής καμπύλης C . Έστω z_0 , z σημεία στο εσωτερικό της C . Τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{C'} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right) (z - z_0)^n$$

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \sin z$, γύρω από το $z_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{array}{ll} f(z) = \sin(z) & f(0) = 0 \\ f'(z) = \cos(z) & f'(0) = 1 \\ f''(z) = -\sin(z) & f''(0) = 0 \\ f'''(z) = -\cos(z) & f'''(0) = -1 \end{array}$$

$$\sin(z) = 0(z - z_0)^0 + \frac{1}{1!}(z - z_0)^1 + \frac{0}{2!}(z - z_0)^2 + \frac{1}{3!}(z - z_0)^3 + \dots$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor

Α' τρόπος

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}/2, \quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}/2$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1/2, \quad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1/2, \dots$$

$$\sin(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^3$$

Β' τρόπος $u = z - \pi/3 \implies z = u + \pi/3$

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sin(u + \pi/3) = \sinh \cos \frac{\pi}{3}^{1/2} + \cosh \sin \frac{\pi}{3}^{\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}u^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}u^3 + \dots \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \dots \end{aligned}$$

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \frac{1}{1-z}$ γύρω από το $z_0 = 2$

ΛΥΣΗ

$$z - 2 = u$$

$$z - 1 = u + 1$$

$$1 - z = -(1 + u)$$

$$\forall u : |u| < 1 : \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{1+u} = -1 + u - u^2 + u^3 - \dots$$

$$|z - 2| < 1 : \frac{1}{1-z} = -1 + (z - 2) - (z - 2)^2 + (z - 2)^3$$

(για $z = 3$, $f(z) = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$)

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3}$ γύρω από το $z_0 = 0$

$$\begin{aligned}\frac{z}{z^2-2z-3} &= \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{3}z + \frac{8}{36}z^2 + \dots\end{aligned}$$

$$|z| < 1 \quad \left| \frac{z}{3} \right| < 1 \implies |z| < 3$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-2z-3} &= \frac{1}{(z-1)^2-4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \left(1 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^4 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^6 + \dots \right)\end{aligned}$$

$$|z-1| < 2: \quad \frac{1}{z^2-2z-3} = -\frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2}{4} - \frac{\left(\frac{z-1}{2}\right)^4}{4} - \dots$$

Θ.

$$\text{Έστω } R_2 < R_1, \quad \begin{aligned} C_1 &= \{z : |z - z_0| = R_1\} \\ C_2 &= \{z : |z - z_0| = R_2\} \end{aligned}$$

$$A_{R_2, R_1}(z_0) = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\} \quad \text{δακτύλιος χωρίς σύνορο}$$

$$\bar{A}_{R_2, R_1}(z_0) = \{z : R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2\} \quad \text{δακτύλιος με σύνορο}$$

Έστω $f(z)$ αναλυτική στο $\bar{A}_{R_2, R_1}(z_0)$. Τότε $\forall z \in A_{R_1, R_2}(z_0)$ ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Αυτή λέγεται σειρά Laurent (Λοράντ) της $f(z)$ γύρω από το z_0 .

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

(η C εντός του $A_{R_2, R_1}(z_0)$)

ΠΑΡ. Βρείτε την σειρά Laurent της $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ γύρω από το $z_0 = 0$.

Λύση

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \cdot \sin z \\ &= \frac{1}{z^2} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)\end{aligned}$$

$$\forall z : 0 < |z| < \infty : \quad \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

Το $z_0 = 0$ είναι **πόλος** πρώτης τάξης.

ΠΑΡ $\frac{\sin z}{z}$

$$0 < |z| < \infty : \quad \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Το $z_0 = 0$ είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο.

ΠΑΡ Να βρεθεί η σειρά Laurent της $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}$ γύρω από το $z_0 = -1$

Λύση

$$\begin{aligned}\frac{e^{2z}}{(z+1)^2} &= \frac{e^{-2}}{(z+1)^2} \cdot e^{2(z+1)} \\ &= e^{-2} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \left(1 + 2(z+1) + \frac{4 \cdot (z+1)^2}{2!} + \frac{8 \cdot (z+1)^3}{3!} + \dots \right)\end{aligned}$$

$$0 < |z+1| < \infty : \quad \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} = \frac{e^{-2}}{(z+1)^2} + \frac{2e^{-2}}{z+1} + 2e^{-2} + \frac{4e^{-2}}{3} \cdot (z+1) + \dots$$

Παρατηρώ ότι $z_0 = -1$ είναι πόλος 2^{ης} τάξης

$$\oint \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz = \oint \frac{e^{-2}}{(z+1)^2} dz + \oint \frac{2e^{-2}}{z+1} dz + \oint \frac{4e^{-2}}{3} (z+1) dz + \dots$$

$$\oint \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz = 2e^{-2} 2\pi i$$

Ορισμός

Έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Έστω n_1 ο ελάχιστος n τ.ώ. $a_n \neq 0$.

(αν δεν υπάρχει το ελάχιστο, θέτω $n_1 = -\infty$)

α. Αν $-n_1 = 0$, τότε το z_0 είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο (πόλος μηδενικής τάξης)

β. Αν $\infty > -n_1 > 0$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $-n_1$

γ. Αν $n_1 = -\infty$, τότε το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο (πόλος ∞ τάξης)

Η $f(z) = e^{1/z}$ έχει το $z_0 = 0$ πόλο άπειρης τάξης.

3.1 Δέκα Σειρές Laurent

1. $f(z) = (z - 2) \sin(z - 1)$ γύρω από το $z_0 = 1$

Λύση

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - 1) \sin(z - 1) - \sin(z - 1) \\ &= (z - 1)^2 - \frac{(z - 1)^4}{3!} + \frac{(z - 1)^6}{5!} - \dots - \left(z - 1 - \frac{(z - 1)^3}{3!} + \frac{(z - 1)^5}{5!} - \dots \right) \\ &= -(z - 1) + (z - 1)^2 + \frac{(z - 1)^3}{3!} - \frac{(z - 1)^4}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Ισχύει $\forall z \in \mathbb{C}$

2. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$, $z_0 = -2$

Λύση

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z + 1)(z + 2)} = -\frac{1}{z + 1} + \frac{2}{z + 2} \\ g_2(z) &= \frac{1}{z + 2} \\ g_1(z) &= -\frac{1}{z + 1} = -\frac{1}{z + 2 - 1} = \frac{1}{1 - (z + 2)} = 1 + (z + 2) + (z + 2)^2 + \dots \quad 0 < |z + 2| < 1 \\ f(z) &= g_2(z) + g_1(z) \\ &= \frac{2}{z + 2} + 1 + (z + 2) + (z + 2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Σε δυνάμεις της $(z + 2)$ αλλά μακριά από το $z_0 = -2$ (δηλ. $|z + 2| > 1$)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2}{z + 2} + \frac{1}{1 - (z + 2)} \\ \frac{1}{1 - (z + 2)} &= -\frac{1}{z + 2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{z + 2} + 1} \\ &= -\frac{1}{z + 2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z + 2}} = -\frac{1}{z + 2} \left(1 + \frac{1}{z + 2} + \frac{1}{(z + 2)^2} + \dots \right) \\ f(z) &= \frac{1}{z + 2} - \frac{1}{(z + 2)^2} - \frac{1}{(z + 2)^3} - \dots \end{aligned}$$

Το $z_0 = -2$ είναι πόλος 1^{ης} τάξης.

3. Η ίδια σειρά, γύρω και κοντά στο $z_0 = -1$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z + 1} + \frac{2}{z + 2} \\ g_2(z) &= \frac{2}{z + 2} = \frac{2}{1 + (z + 1)} = 2 \cdot (1 - (z + 1) + (z + 1)^2 - (z + 1)^3 + \dots) \\ f(z) &= -\frac{1}{z + 1} + 2 - 2 \cdot (z + 1) + 2(z + 1)^2 - 2(z + 1)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{z+1} + 2 - 2 \cdot (z-1) + 2(z+1)^2 - 2(z+1)^3 + \dots = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} \quad 0 < |z+1| < 1$$

$$\frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} \quad 0 < |z+2| < 1$$

Θα επιβεβαιώσω ότι οι δύο αυτές σειρές είναι ίσες μεταξύ τους και με την τιμή της συνάρτησης.

$$f(-3/2) = \frac{-3/2}{9/4 - 3/2 + 3/4} = 6$$

$$f_1(-3/2) = 2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 6$$

$$f_2(-3/2) = 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 6$$

4. $f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z-1)^2}$ γύρω από το $z_0 = 0$

Λύση

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = (1 + z + z^2 + z^3 + \dots)' = 0 + 1 + 2z + 3z^2 + \dots$$

$$f_2(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots$$

$$f(z) = f_1 f_2 = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 3 + 4z + 5z^2 + \dots$$

5. $f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z-1)^2}$, $z_0 = 1$

$$f_2(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(1+(z-1))^2}$$

$$\frac{1}{(1+u)^2} = 1 - 2u + 3u^2 - \dots$$

$$\frac{1}{z^2} = 1 - 2(z-1) + 3(z-1)^2 + \dots$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)} + 3 - 4(z-1) + \dots$$

$$\frac{1}{(1+u)^2} = \frac{1}{1+2u+u^2}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 + 2u + u^3 + \dots \\ \hline 1 + 2u + u^2 & 1 - 2u + 3u^2 + \dots \\ -2u - u^2 & \\ -2u - 4u^2 - 2u^3 & \\ 3u^2 + 2u^3 & \end{array}$$

Ομοίως, τη σειρά της $\frac{1}{z^2+3z+2}$ γύρω από το $z_0 = -1$ μπορώ να την βρω αντικαθιστώντας:

$$\frac{1}{z^2 + 3z + 2} = \frac{1}{(z+1)^2 + (z-1)} = \frac{1}{u^2 + u}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & u + u^2 \\ \hline 1 + u & \frac{1}{u} - 1 + \dots \\ -u & \end{array}$$

6. $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ γύρω από το $z_0 = 0$

Λύση

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} \cdot (1 + z + z^2 + \dots) \\ &= -\frac{1}{z} - 1 - z - \dots \end{aligned}$$

για $0 < |z| < 1$

7. $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ γύρω από το $z_0 = 0$ για $|z| > 1$

Λύση $f(z) = f_1(z)f_2(z)$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z} \\ f_2(z) &= \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) \\ f(z) &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

8. $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$, να βρεθούν όλες οι δυνατές σειρές Laurent γύρω από το $z_0 = 0$.

Λύση Τα ΑΣ (ανώμαλα σημεία) είναι $z_1 = 1$ και $z_2 = -2$. Οπότε

Αυτή είναι η άσκηση που θα πέσει στις εξετάσεις αν δεν έχει κέφι ο Κεχαγιάς.

1η σειρά: $|z| < 1$

2η σειρά: $1 < |z| < 2$

3η σειρά: $2 < |z|$

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{f_1(z)} + \underbrace{\frac{1}{z+2}}_{f_2(z)} = f_1(z) + f_2(z)$$

1η σειρά $|z| < 1$

$$f_1(z) = -(1 + z + z^2 + \dots)$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots\right)}_{|\frac{z}{2}| < 1}$$

άρα για $\forall z : |z| < 1$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{5z}{4} - \frac{7z^2}{8} - \dots$$

2η σειρά $1 < |z| < 2$ με $u = 1/z$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{\frac{1}{u} - 1} = \frac{u}{1-u} \\ &= u(1 + u + u^2) + \dots \\ &= u + u^2 + u^3 + \dots \\ f_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \\ f_2(z) &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} \end{aligned}$$

Τελικά:

$$f(z) = \dots - 1/z^2 - 1/2 - z/4 + z^2/8 + \dots$$

3η σειρά $2 < |z|$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \\ f_2(z) &= \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} \\ &= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \dots\right) \\ f_2(z) &= \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} - \dots \\ f(z) &= f_1 + f_2 = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 4 Αρμονικές συναρτήσεις

Θ.

Αν η $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{c} \text{Cauchy-} \\ \text{Riemann} \end{array} \right)$$

Παρ. $f(z) = z^3 = (x + iy)^3$

$$= x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + (iy)^3$$

$$= (x^3 - 3xy^2) + i \cdot (3x^2y - y^3)$$

Δηλ. $u = x^3 - 3xy^2 \quad u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y$
 $v = 3x^2y - y^3 \quad u_y = -6xy = -v_x$

Ορισμός

Λέμε την $u(x, y)$ **αρμονική** στο χωρίο D αν $\forall (x, y) \in D$:

(α) Οι u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} είναι συνεχείς

(β) Ισχύει η εξίσωση του Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Θ.

Αν η $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ είναι **αναλυτική στο D**, τότε οι $u(x, y), v(x, y)$ είναι αρμονικές στο D

Απόδ. Αφού η $f(z)$ είναι αναλυτική ισχύουν

$$\left. \begin{array}{l} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_{xx} = v_{yx} \\ v_{xy} = u_{yx} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$u_{xx} = -u_{yy} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Ομοίως δείχνεται $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Παρ. $f(z) = z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$
 Θα δείξω ότι οι u, v αρμονικές

Λύση

$$u_{xx} = (u_x)_x = (3x^2 - 3y^2)_x = 6x$$

$$u_{yy} = (u_y)_y = (-6xy)_y = -6x$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 6x - 6x = 0 \quad \text{άρα η } u \text{ αρμ.}$$

$$v_{xx} = (v_x)_x = (6xy)_x = 6y$$

$$v_{yy} = (v_y)_y = (3x^2 - 3y^2)_y = -6y$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 6y - 6y = 0 \quad \text{άρα η } v \text{ αρμ.}$$

Ορισμός

Αν η $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ είναι αναλυτική, λέμε ότι οι u, v είναι **συζυγείς αρμονικές**

Παρ. Να βρεθεί η συζυγής αρμονική της $u = x^2 - y^2$

Λύση Από την εκφώνηση υποτίθεται ότι υπάρχει αναλυτική $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, με $u(x, y) = x^2 - y^2$. Τότε:

$$\begin{aligned} u_x = 2x = v_y &\implies v(x, y) = \int 2x \, dy = 2xy + c(x) \\ \implies v_x = 2y + \frac{dc}{dx} = -u_y = 2y &\implies \frac{dc}{dx} = 0 \\ \implies c \text{ σταθ.} \end{aligned}$$

Τελικά $v(x, y) = 2xy + c$, $f(z) = \underbrace{x^2 - y^2}_u + \underbrace{i2xy}_v + \tilde{c} = (x + iy)^2 + \tilde{c} = \boxed{z^2 + \tilde{c} = f(z)}$

Παρ. Να βρεθεί η συζυγής αρμονική της $u = e^x \cos y$

Λύση Με το μάτι $f(z) = e^z$, $v(x, y) = e^x \sin y$

Αλλιώς $u = e^x \cos y$, $u_x = e^x \cos y = v_y \implies v = e^x \sin y + c \implies v_x = e^x \sin y + \frac{dz}{dx} = -u_y \implies \dots \implies v = e^x \sin y + c$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \cos y + ie^x \sin y + \tilde{c} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) + \tilde{c} \\ &= e^x = e^x e^{iy} + \tilde{c} = e^z + \tilde{c} = f(z) \end{aligned}$$

4.0.1 Τι σημαίνει/σε τι χρησιμεύει/τι είναι η εξίσωση του Laplace;

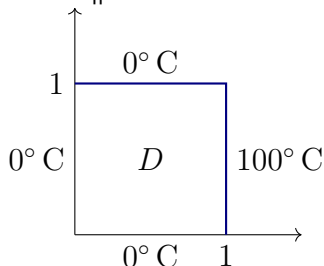
Η λύση της Εξ. Laplace περιγράφει προβλήματα όπως

- (1) μετάδοση θερμότητας σε σταθερή κατάσταση
- (2) ροή ρευστών
- (3) πυκνότητα ηλ. φορτίου
- (4) δυναμικό μέσα σε έναν αγωγό

Η εξ. Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ είναι διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Αν αυτή ισχύει σε κάποιο χωρίο D και την εφοδιάσω με **οριακές συνθήκες** (τιμές της $u(x, y)$ στο ∂D - σύνορο του D), τότε έχω μοναδική λύση στο πρόβλημα Dirichlet:

- (1) $\forall (x, y) \in D : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- (2) $\forall (x, y) \in \partial D : u(x, y) = F(x, y)$

Παρ. Ένα μεταλλικό τετράγωνο έλασμα D έχει σταθερές θερμοκρασίες στα άκρα του, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η θερμοκρασία του ελάσματος δίνεται από τη λύση του:

$$(1) \forall (x, y) : \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix} : u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$(2) \forall (x, y) : \begin{matrix} u(x, 0) = 0 \\ u(x, 1) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(1, y) = 100 \end{matrix}$$

Τι σχέση έχουν όλα αυτά με

(1) Μιγαδικές συναρτήσεις;

(2) Λογισμό II;

Τι ασκήσεις μπαίνουν στις εξετάσεις;

Τι σημαίνει η εξ. Laplace;

Διακριτοποίηση εξίσωσης Laplace

$$\forall (x, y) \in D : u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\forall (x, y) \in \partial D : u(x, y) = \underbrace{F(x, y)}_{\text{δεδομένη συνάρτηση}}$$

$$u_x(m\delta, n\delta) \simeq \frac{u((m+1)\delta, n\delta) - u(m\delta, n\delta)}{\delta}$$

$$u_x((m-1)\delta, n\delta) \simeq \frac{u(m\delta, n\delta) - u((m-1)\delta, n\delta)}{\delta}$$

$$u_{xx}(m\delta, n\delta) \simeq \frac{u_x(m\delta, n\delta) - u_x((m-1)\delta, n\delta)}{\delta}$$

$$u_{xx} \simeq \frac{u((m+1)\delta, n\delta) - 2u(m\delta, n\delta) - u((m-1)\delta, n\delta)}{\delta^2}$$

$$u_{yy} \simeq \frac{u(m\delta, (n+1)\delta) - 2u(m\delta, n\delta) - u(m\delta, (n-1)\delta)}{\delta^2}$$

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = \frac{-4u(m\delta, n\delta) + u((m+1)\delta, n\delta) + u(m\delta, (n+1)\delta) + u((m-1)\delta, n\delta) + u(m\delta, (n-1)\delta)}{\delta^2}$$

$$\implies u(m\delta, n\delta) = \frac{u((m+1)\delta, n\delta) + u((m-1)\delta, n\delta) + u(m\delta, (n+1)\delta) + u(m\delta, (n-1)\delta)}{4}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η εξίσωση Laplace δηλώνει ότι η τιμή σε κάθε σημείο είναι ο μέσος όρος της τιμής των 4 γειτονικών σημείων.

Παρ. Στο προηγούμενο πρόβλημα:

$$\begin{aligned} u(1/2, 1/2) &= \frac{1}{4} \left(u(1/2, 0) + u(1/2, 1) + u(0, 1/2) + u(1, 1/2) \right) \\ \implies u(1/2, 1/2) &= \frac{1}{4} (0 + 0 + 0 + 100) \\ &= 25 \end{aligned}$$

Τότε θα μπορούσαμε να βρούμε τη λύση λύνοντας ένα σύστημα 9x9, ή με υπολογιστική προσέγγιση.

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in D : u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ \forall (x, y) \in \partial D : u(x, y) &= \underbrace{F(x, y)}_{\text{δεδομένη συνάρτηση}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} \operatorname{Re} \left(\frac{u(x, y) + iv(x, y)}{x - x_0 + i(y - y_0)} d(x + iy) \right) \\ v(x_0, y_0) &= \dots\end{aligned}$$

Από θεώρημα του Gauss/Μέσης Τιμής:

$$\begin{aligned}\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta} \\ u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta \\ v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta\end{aligned}$$

, δηλαδή σε κάθε σημείο η τιμή είναι ο μέσος όρος των γειτόνων.

Αυτά που μπαίνουν στις εξετάσεις είναι: Να βρεθεί η συζυγής αρμονική, και να λυθεί η εξίσωση Laplace, κάτι που θα μάθουμε τις επόμενες Παρασκευές.

4.1 Αρμονικές στην εξίσωση Laplace

Παρ. Δίνεται το χωρίο $D = \{z : a < \operatorname{Re}(z) < b\}$
 $\forall (x, y) \in D : u_{xx} + u_{yy} = 0$
 Να βρεθεί $u(x, y)$ τ.ώ $\forall y : u(a, y) = u_1$
 $\forall y : u(b, y) = u_2$

Λύση Λόγω συμμετρίας υποθέτω ότι $u(x, y) = u(x)$ οπότε $0 = u_{xx} + u_{yy} = u_{xx} \implies u_x = k \implies u = kx + \lambda$
 Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες:

$$\left. \begin{aligned}u_1 = u(a) &= ka + \lambda \\ u_2 = u(b) &= kb + \lambda\end{aligned} \right| \implies \boxed{u(x, y) = \frac{u_1 - u_2}{a - b}x + \frac{?}{u_1}}$$

$$\begin{aligned}u &= kx + \lambda \\ v &= 0 \\ u_y = -v_x &\implies 0 = -v_x \implies v = c(y) \\ \implies v_y = \frac{dc}{dy} = u_x &= k \implies v(y) = ky + c' \\ \implies f(x, y) = u + iv &= kx + \lambda + i(ky + c') \\ \implies f(z) &= kz + c''\end{aligned}$$

Παρ.

$$\hat{u}(\rho, \theta) = u(\theta)$$

$$D = \{(\rho, \theta) : \theta_1 < \theta < \theta_2\}$$

$$D = \{z : \theta_1 < \text{Arg}(z) < \theta_2\}$$

$$u(z) = u_1 \text{ όταν } \text{Arg}(z) = \theta_1$$

$$u(z) = u_2 \text{ όταν } \text{Arg}(z) = \theta_2$$

Παρατηρώ ότι $\text{Arg}(z) = \text{Im}(\text{Log}(z))$

Άρα με $f(z) = \text{Log}(z)$, η $\text{Arg}(z)$ είναι αρμονική όπως και η $u(z) = k \cdot \text{Arg}(z) + \lambda$, ισοδύναμα

$$u(x, y) = k \cdot \arctan(y, x) + \lambda$$

Σημείωση: $\arctan(y, x) = \text{Arg}(x + iy)$

$$u(x, y) = \frac{u_1 - u_2}{\theta_1 - \theta_2} \arctan(y, x) + \lambda$$

Παρ. $u(x, y) = g(r)$

Παρατηρώ ότι $f(z) = \underbrace{\text{Log}(z)}_{\text{αναλυτική}} = \underbrace{\ln r}_{\text{αρμονική}} + i \text{Arg}(z)$

Άρα υποθέτω λύση της μορφής:

$$u(x, y) = k \ln r + \lambda \implies \dots$$

$$u(x, y) = \frac{u_1 - u_2}{R_1 - R_2} \ln(r) + c$$

Παρ.

$$u(x, y) = \frac{u_2 - u_1}{\theta_2 - \theta_1} \arctan(y, x) + u_1 = \boxed{\frac{1}{\pi} \arctan(y, x) = u(x, y)}$$

$$x < 0 : u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \arctan(0, x) = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$x > 0 : u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \arctan(0, x) = \frac{0}{\pi} = 0$$

Παρ. $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctan(y, x - x_0)$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & x < x_1 \\ u_1 & x_1 < x < x_2 \\ u_2 & x_2 < x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & x_N < x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N (u_n - u_{n-1}) \arctan(y, x_n - x) + u_0 \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} (u_{n-1} - u_n) \arctan(y, x - x_n) + u_{N-1} \end{aligned}$$

4.2

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = f(z)$$

Μετασχηματισμός Möbius

Απεικονίζει (κύκλους και ευθείες) σε (κύκλους και ευθείες)

Παρ. Ο Μ/Σ $\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$ απεικονίζει την ευθεία $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ στον κύκλο $\{(u, v) : u^2 + v^2 = 1\}$

διότι $w = \frac{i-x}{i+x} \implies |w| = \frac{|i-x|}{|i+x|} = 1$

Επίσης απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ στον δίσκο $\{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$

διότι $|w|^2 = \left| \frac{i - (x + iy)}{i + (x + iy)} \right|^2 = \left| \frac{-x + i(-y + 1)}{x + i(y + 1)} \right|^2 = \frac{A}{B}$

$$A = |-x + i(-y + 1)|^2 = x^2 + (1 - y)^2$$

$$B = |x + i(y + 1)|^2 = x^2 + (1 + y)^2$$

Βλέπω ότι $(1 - y)^2 < (1 + y)^2 \quad \forall y < 0$ διότι $\forall y > 0 : A < B$

Τι σχέση έχουν αυτά με τις αρμονικές συναρτήσεις και με το πρόβλημα Dirichlet; Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για λύση του προβλήματος σε χωρία πέρα του άνω ημιεπιπέδου.

Παρ. Να λυθεί αυτό:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} 1 : & 0 < \theta = \arctan(y, x) < \pi \\ 0 : & \pi < \theta = \arctan(y, x) < 2\pi \end{cases}$$

$$1 = \frac{i - w}{i + w} \implies i + w = i - w \implies w = -w \implies w = 0$$

$$-1 = \frac{i - w}{i + w} \implies -i - w = i - w \implies w = \infty$$

$$i = \frac{i - w}{i + w} \implies iw - 1 = i - w \implies w = 1$$

$$-i = \frac{i - w}{i + w} \implies \dots \implies w = -1$$

Στο επίπεδο uw το πρόβλημα $\nabla^2 \Psi = 0$ στο $\{(u, v) : v > 0\}$, $\begin{cases} 1 & \forall (u, 0) : u > 0 \\ 0 & \forall (u, 0) : u < 0 \end{cases}$

$$\Psi = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan(v, y)$$

οπότε $\Phi(x, y) = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan(u(x, y), v(x, y))$

$$x + iy = \frac{i - (u + iv)}{i + (u + iv)} = \underbrace{\dots}_{\text{πραγμ.}} + i \underbrace{\dots}_{\text{φαντ.}} \implies \dots$$

$$\dots \implies u = \frac{2x}{(1+x)^2 + y^2}, \quad v = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(1+x)^2 + y^2}$$

οπότε τελικά:

$$\Phi(x, y) = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{1 - (x^2 + y^2)}{(1 + x)^2 + y^2}, \frac{2x}{(1 + x)^2 + y^2} \right)$$

Παρ.

$$w = f(z) = \sin(\pi z)$$

$$z = g(w) = \frac{1}{\pi} \arcsin(w)$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$w = \sin(\phi) = \sin(a + ib) =$$

$$= \sin(a) \cos(ib) + \sin(ib) \cos(a)$$

$$= \sin a \cosh b + i \sinh b \cos a$$

$$w = \sin(\pi z) = \sin(\pi x) \cosh(\pi y) + i \sinh(\pi y) \cos(\pi x)$$

Και η λύση προκύπτει:

$$\Psi = \frac{5}{\pi} \arctan(v, u + 1) - \frac{10}{\pi} \arctan(v, u - 1) + 10$$

$$\Phi = \frac{5}{\pi} \arctan(\sinh(\pi y) \cos(\pi x), \sin(\pi x) \cosh(\pi y) + 1) - \frac{10}{\pi} \arctan(\sinh(\pi y) \cos(\pi x), \sin(\pi x) \cosh(\pi y) - 1) + 10$$