

北京学院《算法设计与分析》

(2020 年秋季学期)

第二次作业

作业提交截止时间：2020 年 11 月 12 日 23 : 55

1 假日愉悦值问题 (20 分)

Ange 开始计划她的 N 天长假，第 i 天她可以从以下三种活动中选择一种进行。

1. 去海边游泳。可以获得 a_i 点愉悦值；
2. 去野外爬山。可以获得 b_i 点愉悦值；
3. 在家里学习。可以获得 c_i 点愉悦值。

由于她希望自己的假日丰富多彩，她并不希望连续两天（或者两天以上）进行相同类型的活动。

试设计算法制定一个假日安排，使得在满足 Ange 要求的情形下所获得的愉悦值的和最大，并分析该算法的时间复杂度。

2 小跳蛙问题 (20 分)

给定 n 块石头，依次编号为 1 到 n 。第 i 块石头的高度是 h_i 。

现有一只小跳蛙在第 1 块石头上，它重复以下操作，直到它到达第 n 块石头：

若它当前在第 i 块石头上，则可跳到第 j ($i+1 \leq j \leq i+k$) 块石头上，耗费的体力为 $|h_i - h_j|$ 。试设计算法求它最少耗费多少体力可以到达第 n 块石头，并分析该算法的时间复杂度。

3 取星星问题 (20 分)

Ange 在玩一个取星星游戏：现有 n 个格子排成一行，每个格子里面存在一颗星星。第 i 个格子和第 $i+1$ ($i < n$) 个格子相邻。两颗星星满足如下两个条件之一则称为相连：

1. 两颗星星所在的格子相邻；
2. 两颗星星都与另外某颗星星相连。

目前 Ange 想从这些格子中取出给定的 m 颗星星，其对应得格子编号依次为 $b_1..b_m$ (已经正序)。取出星星 b_i 的花费为当前与 b_i 相连的星星个数。试设计算法求出一个取星星的顺序使得总花费最小，并分析该算法的时间复杂度。

例如 $n = 20, m = 3, [b_1, b_2, b_3] = [3, 6, 14]$ 。此时总花费最小的取星星顺序如下：

1. 取下第 14 个格子里的星星，格子 1 到 20 里的星星 (除自己外) 都与之相连，花费 19；
2. 取下第 6 个格子里的星星，格子 1 到 13 里的星星 (除自己外) 都与之相连，花费 12；
3. 取下第 3 个格子里的星星，格子 1 到 5 里的星星 (除自己外) 都与之相连，花费 4。

总花费为 $19 + 12 + 4 = 35$ 。

4 叠塔问题 (20 分)

给定 n 块积木，编号为 1 到 n 。第 i 块积木的重量为 w_i ，硬度为 s_i ，价值为 v_i 。

现要从中选择部分积木垂直摞成一座塔，要求每块积木满足如下条件：

若第 i 块积木在积木塔中，那么在其之上的积木的重量和不能超过其硬度。

试设计算法求出满足上述条件的价值和最大的积木塔，并分析该算法的时间复杂度。

5 数组排序问题 (20 分)

给定整数数组 $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ 。你的任务是对该数组进行一系列操作使其变为非降序数组：每次操作你需要选定一个数字 x ，然后将数组中所有等于 x 的元素统一移至数组的开始或结尾。例如数组 $A = [2, 1, 3, 1, 1, 3, 2]$ 可以通过如下两次操作变为非降序数组：

1. 将所有等于 1 的元素移至数组开头得到 $[1, 1, 1, 2, 3, 3, 2]$;
2. 将所有等于 3 的元素移至数组结尾得到 $[1, 1, 1, 2, 2, 3, 3]$ 。

请你设计算法来计算将给定数组变为非降序数组所需要的最少操作次数，并分析该算法的时间复杂度。