# Design and Analysis of Algorithms Part II: Dynamic Programming Lecture 13: Longest Common Substrings

童咏昕

北京航空航天大学 计算机学院

## 动态规划篇概述



- 在算法课程第二部分"动态规划"主题中,我们将主要聚焦于如下 经典问题:
  - 0-1 Knapsack (0-1背包问题)
  - Maximum Contiguous Subarray II (最大连续子数组 II)
  - Longest Common Subsequences (最长公共子序列)
  - Longest Common Substrings (最长公共子串)
  - Minimum Edit Distance (最小编辑距离)
  - Rod-Cutting (钢条切割)
  - Chain Matrix Multiplication (矩阵链乘法)

## 动态规划篇概述

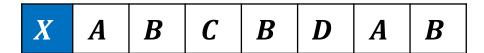


- 在算法课程第二部分"动态规划"主题中,我们将主要聚焦于如下 经典问题:
  - 0-1 Knapsack (0-1背包问题)
  - Maximum Contiguous Subarray II (最大连续子数组 II)
  - Longest Common Subsequences (最长公共子序列)
  - Longest Common Substrings (最长公共子串)
  - Minimum Edit Distance (最小编辑距离)
  - Rod-Cutting (钢条切割)
  - Chain Matrix Multiplication (矩阵链乘法)



- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素(如字符)去掉后所得结果

- 示例
  - 给定序列X





- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素(如字符)去掉后所得结果

- 示例
  - 给定序列X

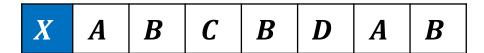


X的子序列

| $X_{seq}$ | A | С | В | В |  |
|-----------|---|---|---|---|--|
|-----------|---|---|---|---|--|



- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素(如字符)去掉后所得结果
- 子串
  - 给定序列中零个或多个连续的元素(如字符)组成的子序列
- 示例
  - 给定序列X

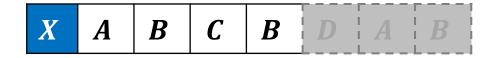


X的子序列

| $X_{seq}$ A | <i>C</i> | В | В |
|-------------|----------|---|---|
|-------------|----------|---|---|



- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素(如字符)去掉后所得结果
- 子串
  - 给定序列中零个或多个连续的元素(如字符)组成的子序列
- 示例
  - 给定序列X

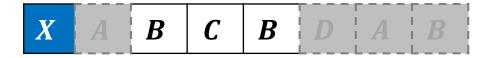


X的子序列

X的子串



- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素(如字符)去掉后所得结果
- 子串
  - 给定序列中零个或多个连续的元素(如字符)组成的子序列
- 示例
  - 给定序列X



X的子序列

X的子串

| $X_{seq}$ | A | С | В | В | $X_s$ | str | В | С | В |
|-----------|---|---|---|---|-------|-----|---|---|---|
|-----------|---|---|---|---|-------|-----|---|---|---|



• 给定两个序列X和Y





• 给定两个序列X和Y









• 给定两个序列X和Y







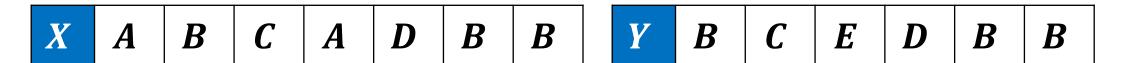
• 给定两个序列X和Y







• 给定两个序列X和Y



• 公共子串示例



问题: 如何求两个给定序列的最长公共子串?

# 问题定义



## • 形式化定义

### 最长公共子串问题

#### **Longest Common Substring Problem**

#### 输入

• 序列 $X = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ 和序列 $Y = \langle y_1, y_2, ..., y_m \rangle$ 

## 问题定义



## • 形式化定义

#### 最长公共子串问题

#### **Longest Common Substring Problem**

#### 输入

- 序列 $X = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ 和序列 $Y = \langle y_1, y_2, ..., y_m \rangle$ 输出
- 求解一个公共子串 $Z = \langle z_1, z_2, ..., z_l \rangle$ ,令



## • 形式化定义

#### 最长公共子串问题

#### **Longest Common Substring Problem**

#### 输入

- 序列 $X = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ 和序列 $Y = \langle y_1, y_2, ..., y_m \rangle$ 输出
- 求解一个公共子串 $Z = \langle z_1, z_2, ..., z_l \rangle$ , 令

$$\max |Z|$$

$$s.t.Z = \langle x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+l-1} \rangle = \langle y_j, y_{j+1}, ..., y_{j+l-1} \rangle$$
  
 $(1 \le i \le n-l+1; 1 \le j \le m-l+1)$ 



## • 形式化定义

#### 最长公共子串问题

#### **Longest Common Substring Problem**

#### 输入

- 序列 $X = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ 和序列 $Y = \langle y_1, y_2, ..., y_m \rangle$ 输出
- 求解一个公共子串 $Z = \langle z_1, z_2, ..., z_l \rangle$ , 令

 $\max |Z|$ 

#### 优化目标

$$s. t. Z = \langle x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+l-1} \rangle = \langle y_j, y_{j+1}, ..., y_{j+l-1} \rangle$$
  
 $(1 \le i \le n - l + 1; 1 \le j \le m - l + 1)$ 



## • 形式化定义

#### 最长公共子串问题

#### **Longest Common Substring Problem**

#### 输入

- 序列 $X = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ 和序列 $Y = \langle y_1, y_2, ..., y_m \rangle$ 输出
- 求解一个公共子串 $Z = \langle z_1, z_2, ..., z_l \rangle$ , 令

 $\max |Z|$ 

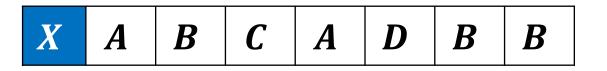
#### 优化目标

$$s. t. Z = \langle x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+l-1} \rangle = \langle y_j, y_{j+1}, ..., y_{j+l-1} \rangle$$

$$(1 \le i \le n - l + 1; 1 \le j \le m - l + 1)$$

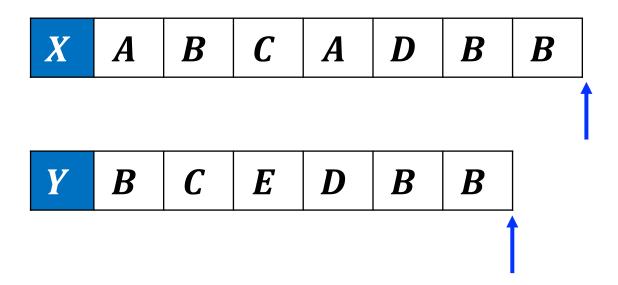
约束条件





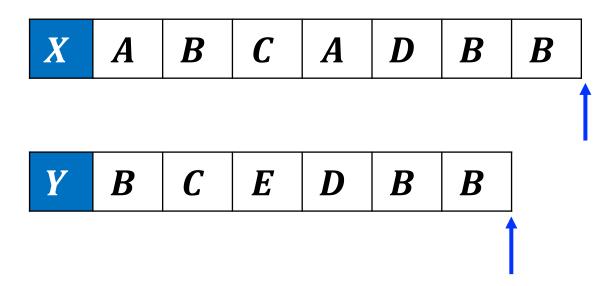
• 序列X和序列Y各选择一个位置X[i]和Y[j]





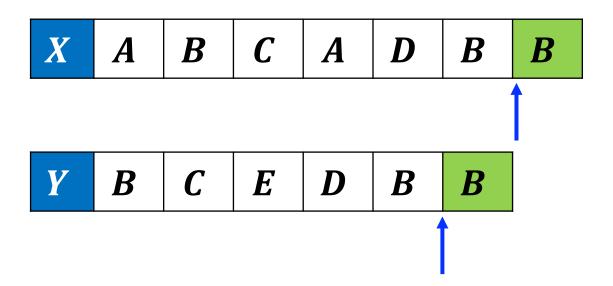
• 序列X和序列Y各选择一个位置X[7]和Y[6]





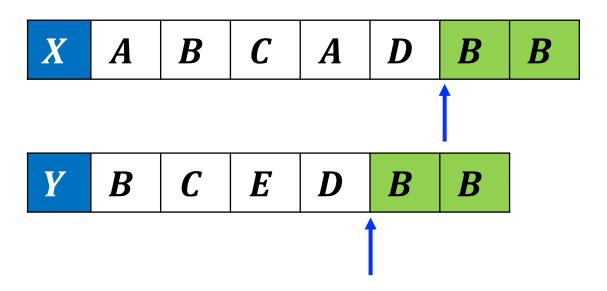
- 序列X和序列Y各选择一个位置X[7]和Y[6]
- 依次检查元素是否匹配





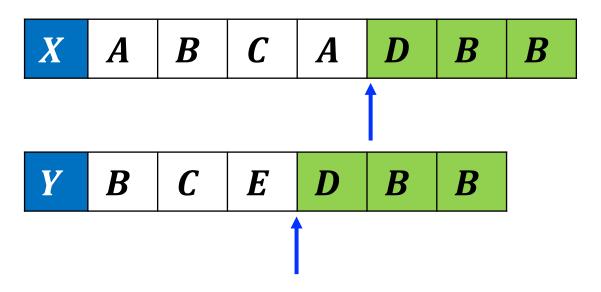
- 序列X和序列Y各选择一个位置X[7]和Y[6]
- 依次检查元素是否匹配
  - 元素相等继续匹配





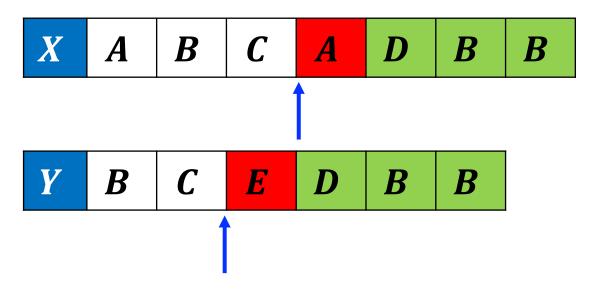
- 序列X和序列Y各选择一个位置X[7]和Y[6]
- 依次检查元素是否匹配
  - 元素相等继续匹配





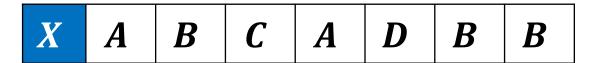
- 序列X和序列Y各选择一个位置X[7]和Y[6]
- 依次检查元素是否匹配
  - 元素相等继续匹配





- 序列X和序列Y各选择一个位置X[7]和Y[6]
- 依次检查元素是否匹配
  - 元素相等继续匹配
  - 元素不等(或某序列已达端点)匹配终止





- 枚举所有的X[i],Y[j]
- 求以其为结尾的尽可能长的公共子串







最长公共子串长度为3

- 枚举所有的X[i],Y[j]
- 求以其为结尾的尽可能长的公共子串
- 记录最长公共子串长度



| X | A | B | <b>C</b> | A | D | B | B |
|---|---|---|----------|---|---|---|---|
|   | Y | B | C        | E | D | B | B |



| X | A        | B | <b>C</b> | A | D | B | B |
|---|----------|---|----------|---|---|---|---|
|   | Y        | В | C        | E | D | B | B |
|   | <u> </u> | 1 | 1        |   |   |   |   |
| X | A        | B | <b>C</b> | A | D | B | B |

**——** 



| A | B     | <b>C</b>      | A   | D   | B   | B   |
|---|-------|---------------|---|---|---|---|
| Y | B     | <b>C</b>      | E   | D   | B   | B   |
| A | В     | <i>C</i>      | A   | D   | В   | B   |
| Y | B     | <i>C</i>      | E   | D   | B   | B   |
| A | R     | <i>C</i>      | A   | D   | R   | В   |
| Y |       |               |   |   |   | B   |
|   | Y A Y | Y B  A B  Y B | Y         B         C           A         B         C           Y         B         C           A         B         C | Y         B         C         E           A         B         C         A           Y         B         C         E | Y         B         C         E         D           A         B         C         A         D           Y         B         C         E         D | Y         B         C         E         D         B           A         B         C         A         D         B           Y         B         C         E         D         B           A         B         C         A         D         B |

**——** 



| X | A | B | <b>C</b> | A | D | B | B |
|---|---|---|----------|---|---|---|---|
|   | Y | В | С        | E | D | B | B |
|   |   |   |          |   | - |   |   |
| X | A | B | <b>C</b> | A | D | B | B |
|   | Y | В | C        | E | D | В | B |
|   |   |   | •        |   |   |   |   |
| X | A | B | C        | A | D | B | B |
|   | Y | B | С        | E | D | B | B |



| X | A | B | <b>C</b> | A | D | B | B |
|---|---|---|----------|---|---|---|---|
|   | Y | В | C        | E | D | B | B |
|   |   |   | -        | - |   |   |   |
| X | A | B | <b>C</b> | A | D | B | B |
|   | Y | B | С        | E | D | B | B |
|   |   |   | •        |   |   |   |   |
| X | A | B | C        | A | D | В | B |
|   | Y | B | <b>C</b> | E | D | B | B |

• 可能存在最优子结构和重叠子问题

问题: 如何利用动态规划求解?

# 问题结构分析



- 给出问题表示
  - C[i,j]
    - X[1..i]和Y[1..j]中,以 $x_i$ 和 $y_j$ 结尾的最长公共子串Z[1..l]的长度

| $X_i$ | $x_1$ | $x_2$                 |     | $x_{i-1}$ | $x_i$ |
|-------|-------|-----------------------|-----|-----------|-------|
| $Y_j$ | $y_1$ | <b>y</b> <sub>2</sub> | ••• | $y_{j-1}$ | $y_j$ |



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算

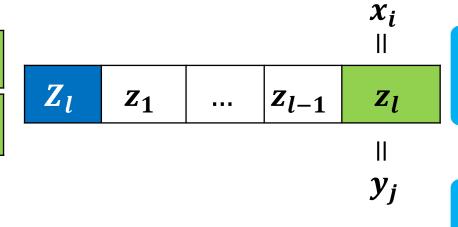


# 问题结构分析



- 给出问题表示
  - C[i,j]
    - X[1..i]和Y[1..j]中,以 $x_i$ 和 $y_j$ 结尾的最长公共子串Z[1..l]的长度

| $X_i$ | $x_1$ | $x_2$ | <br>$x_{i-1}$ | $x_i$ |
|-------|-------|-------|---------------|-------|
| $Y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | <br>$y_{j-1}$ | $y_j$ |



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



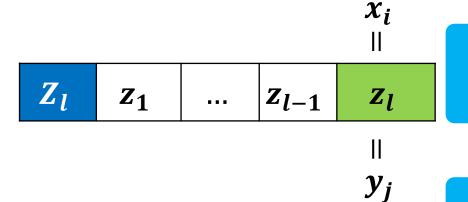
## 问题结构分析



## • 给出问题表示

- C[i,j]
  - X[1..i]和Y[1..i]中,以 $x_i$ 和 $y_i$ 结尾的最长公共子串Z[1..i]的长度

| $X_i$ | $x_1$ | $x_2$                 | <br>$x_{i-1}$ | $x_i$ |
|-------|-------|-----------------------|---------------|-------|
| $Y_j$ | $y_1$ | <i>y</i> <sub>2</sub> | <br>$y_{j-1}$ | $y_j$ |



## • 明确原始问题

- $p_{max} = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \{C[i, j]\}$ 
  - X[1..n]和Y[1..m]中最长公共子串的长度

问题结构分析



递推关系建立



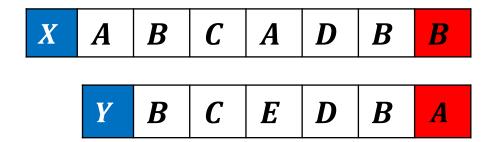
自底向上计算



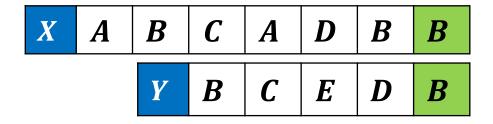
# 递推关系建立:分析最优(子)结构



• 情况1:  $x_7 \neq y_6$ 



• 情况2:  $x_7 = y_6$ 



问题结构分析



递推关系建立



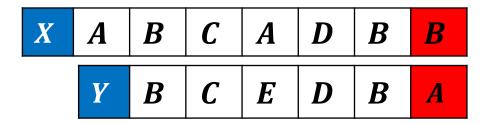
自底向上计算





• 情况1:  $x_7 \neq y_6$ 

C[7,6]



问题结构分析



递推关系建立

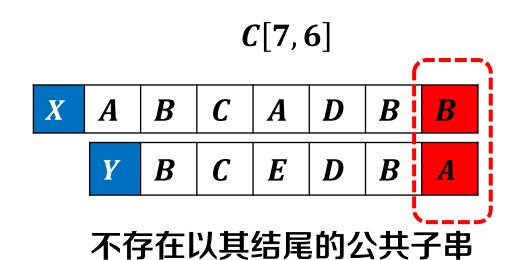


自底向上计算





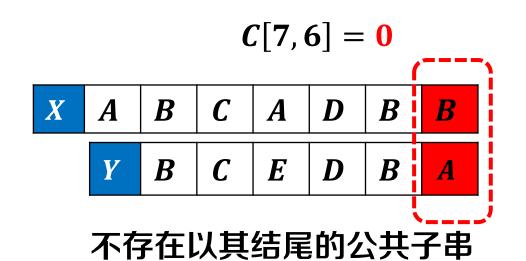
• 情况1:  $x_7 \neq y_6$ 







• 情况1:  $x_7 \neq y_6$ 



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算





• 情况1:  $x_i \neq y_j$ 

$$C[i,j]=0$$

| X | $x_1$                 | $x_2$ | <br>$x_{i-1}$ | $x_i$ |
|---|-----------------------|-------|---------------|-------|
| Y | <i>y</i> <sub>1</sub> | $y_2$ | <br>$y_{j-1}$ | $y_j$ |

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算





• 情况1:  $x_i \neq y_j$ 

$$C[i,j]=0$$

| X | $x_1$ | $x_2$                 | <br>$x_{i-1}$ | $x_i$ |
|---|-------|-----------------------|---------------|-------|
| Y | $y_1$ | <b>y</b> <sub>2</sub> | <br>$y_{j-1}$ | $y_j$ |

无子问题

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算





情况2: x<sub>7</sub> = y<sub>6</sub>

*C*[7, 6]

| X | A | B | С        | A | D | B | B |
|---|---|---|----------|---|---|---|---|
|   | Y | В | <i>C</i> | E | D | B | B |

问题结构分析



递推关系建立



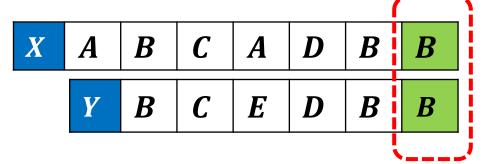
自底向上计算





情况2: x<sub>7</sub> = y<sub>6</sub>

*C*[7, 6]



存在以其结尾的公共子串

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算

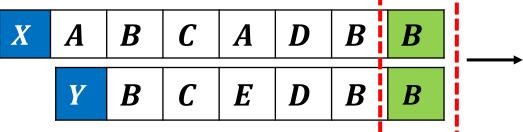




情况2: x<sub>7</sub> = y<sub>6</sub>

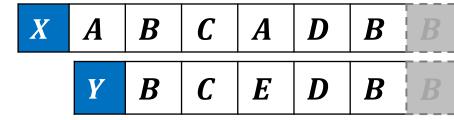






存在以其结尾的公共子串

$$C[7,6] = C[7-1,6-1] + 1$$



递推关系建立



自底向上计算





• 情况2:  $x_i = y_j$ 



| X | $x_1$                 | $x_2$ | <br>$x_{i-1}$ | $x_i$ |
|---|-----------------------|-------|---------------|-------|
| Y | <i>y</i> <sub>1</sub> | $y_2$ | <br>$y_{j-1}$ | $y_j$ |

问题结构分析



递推关系建立

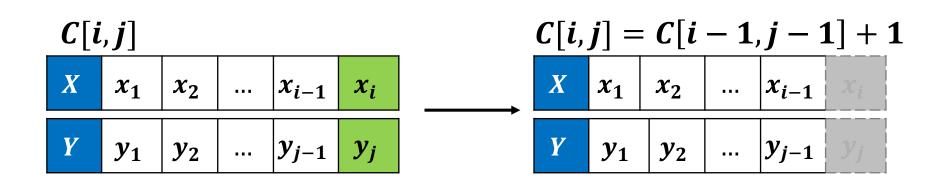


自底向上计算





• 情况2:  $x_i = y_j$ 



问题结构分析



递推关系建立

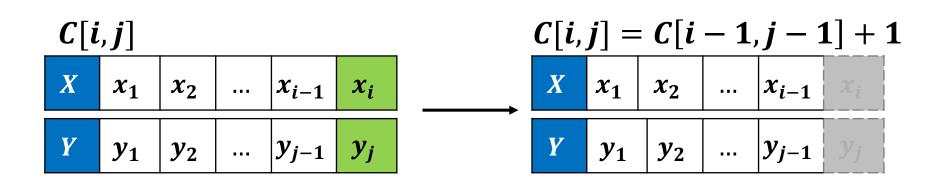


自底向上计算





• 情况2:  $x_i = y_i$ 



问题结构分析

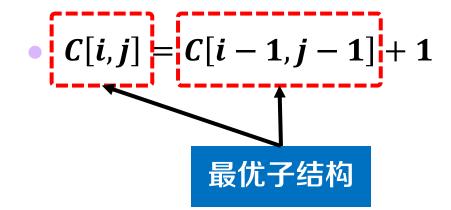


递推关系建立



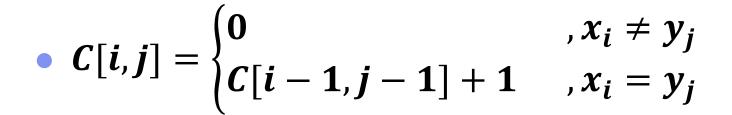
自底向上计算

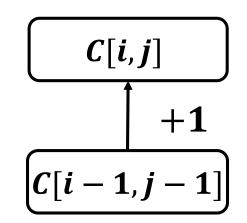




#### 递推关系建立: 构造递推公式







#### 问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



### 自底向上计算:确定计算顺序



- 初始化
  - C[i, 0] = C[0, j] = 0
    - 。 某序列长度为0时,最长公共子串为0

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



#### 自底向上计算:确定计算顺序



- 初始化
  - C[i, 0] = C[0, j] = 0

`~\_\_\_\_/

。 某序列长度为0时,最长公共子串为0

| C[i,j] | j = 0 | <i>j</i> = 1 | j=2 |   | j=m | 初始化 |
|--------|-------|--------------|-----|---|-----|-----|
| i = 0  | 0     | 0            | 0   | 0 | 0   |     |
| i = 1  | 0     |              |     |   |     |     |
| i = 2  | 0     |              |     |   |     |     |
|        | 0     |              |     |   |     |     |
| i = n  | 0     |              |     |   |     |     |

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



#### 自底向上计算:确定计算顺序



#### • 初始化

- C[i, 0] = C[0, j] = 0
  - 。 某序列长度为0时,最长公共子串为0
- 递推公式

• 
$$C[i,j] = \begin{cases} 0 & , x_i \neq y_j \\ C[i-1,j-1] + 1 & , x_i = y_j \end{cases}$$

| C[i,j] | j = 0 | <i>j</i> = 1 | j = 2 |        | j = m |
|--------|-------|--------------|-------|--------|-------|
| i = 0  | 0     | 0            | 0     | 0      | 0     |
| i = 1  | 0     |              |       |        |       |
| i = 2  | 0     |              |       |        |       |
| •••    | 0     |              |       | C[i,j] |       |
| i = n  | 0     |              |       |        |       |

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



#### 自底向上计算: 依次求解问题



#### • 初始化

- C[i, 0] = C[0, j] = 0
  - 。 某序列长度为0时,最长公共子串为0
- 递推公式

• 
$$C[i,j] = \begin{cases} 0 & , x_i \neq y_j \\ C[i-1,j-1]+1 & , x_i = y_j \end{cases}$$

| C[i,j] | j = 0 | j = 1    | j=2       |   | j = m   |       |
|--------|-------|----------|-----------|---|---------|-------|
| i = 0  | 0     | 0        | 0         | 0 | 自       | 底向上计算 |
| i = 1  | 0     |          |           |   |         |       |
| i = 2  | 0     | <u>+</u> |           |   |         |       |
| •••    | 0     | <u>+</u> | _ = = = ' |   |         |       |
| i = n  | 0     | <u>+</u> | '         |   | <b></b> |       |

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



#### 自底向上计算: 依次求解问题



#### • 初始化

- C[i, 0] = C[0, j] = 0
  - 。 某序列长度为0时,最长公共子串为0

#### • 原始问题

$$p_{max} = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \{C[i, j]\}$$

| C[i,j] | j = 0 | <i>j</i> = 1 | j=2 |     | j=m |
|--------|-------|--------------|-----|-----|-----|
| i = 0  | 0     | 0            | 0   | 0   | 0   |
| i = 1  | 0     |              |     |     |     |
| i = 2  | 0     |              | *   |     |     |
| •••    | 0     |              |     | 最优解 |     |
| i = n  | 0     |              |     |     |     |

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



#### 最优方案追踪



- 记录决策过程
  - 最长公共子串末尾位置为 $p_{max}$
  - 最长公共子串长度为*l<sub>max</sub>*

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算

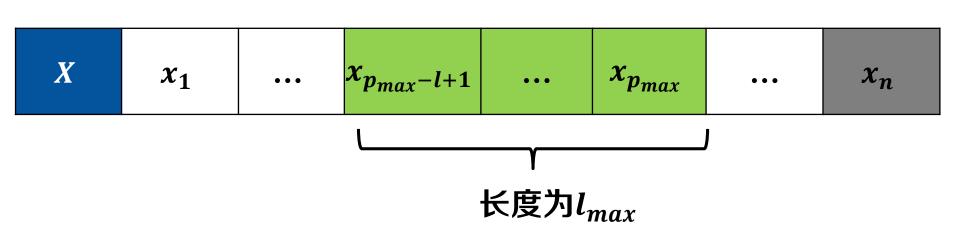


#### 最优方案追踪



- 记录决策过程
  - 最长公共子串末尾位置为 $p_{max}$
  - 最长公共子串长度为*l<sub>max</sub>*

- 输出最优方案
  - 最长公共子串 $< x_{p_{max}-l+1}, x_{p_{max}-l+2}, \dots, x_{p_{max}} >$



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算





|         | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | C | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | В | C | E | D | В | B |   |



|         | 1 | 2        | 3        | 4 | 5                | 6 | 7 |
|---------|---|----------|----------|---|------------------|---|---|
| $X_{i}$ | A | В        | <b>C</b> | A | D                | В | B |
| $Y_{j}$ | В | <b>C</b> | E        | D | $\boldsymbol{B}$ | B |   |

位置 $p_{max} = 0$ 长度 $l_{max} = 0$ 

**C**[]

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 |   |   |   |   |   |   |   |
| 1 |   |   |   |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |   |   |
| 6 |   |   |   |   |   |   |   |
| 7 |   |   |   |   |   |   |   |



|         | 1 | 2        | 3        | 4 | 5                | 6 | 7 |
|---------|---|----------|----------|---|------------------|---|---|
| $X_{i}$ | A | В        | <b>C</b> | A | D                | В | В |
| $Y_{j}$ | В | <b>C</b> | E        | D | $\boldsymbol{B}$ | В |   |

| C[] |   |   |       |   |   | · |   |
|-----|---|---|-------|---|---|---|---|
| j   | 0 | 1 | 2     | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0   | 0 | 0 | 0     | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1   | 0 |   | ÷π#ムイ | V |   |   |   |
| 2   | 0 |   | 初始化   |   |   |   |   |
| 3   | 0 |   |       |   |   |   |   |
| 4   | 0 |   |       |   |   |   |   |
| 5   | 0 |   |       |   |   |   |   |
| 6   | 0 |   |       |   |   |   |   |
| 7   | 0 |   |       |   |   |   |   |



|         | 1          | 2 | 3              | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|------------|---|----------------|---|---|---|---|
| $X_i$   | A          | В | <b>C</b>       | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | _ <i>B</i> | λ | $x_i \neq y_i$ |   | В | В |   |

| <b>C</b> [] |   | $x_i \neq$ | $= y_j$ | В | <b>B</b> |   |   |
|-------------|---|------------|---------|---|----------|---|---|
| j           | 0 | 1          | 2       | 3 | 4        | 5 | 6 |
| 0           | 0 | 0          | 0       | 0 | 0        | 0 | 0 |
| 1           | 0 |            |         |   |          |   |   |
| 2           | 0 |            |         |   |          |   |   |
| 3           | 0 |            |         |   |          |   |   |
| 4           | 0 |            |         |   |          |   |   |
| 5           | 0 |            |         |   |          |   |   |
| 6           | 0 |            |         |   |          |   |   |
| 7           | 0 |            |         |   |          |   |   |



|         | 1          | 2 | 3              | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|------------|---|----------------|---|---|---|---|
| $X_i$   | A          | В | C              | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | _ <i>B</i> | λ | $x_i \neq y_i$ |   | В | B |   |

| C[] | \ | $x_i \neq$ | - <i>y</i> j | B |   |   |   |
|-----|---|------------|--------------|---|---|---|---|
| j   | 0 | 1          | 2            | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0   | 0 | 0          | 0            | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1   | 0 | 0          |              |   |   |   |   |
| 2   | 0 |            |              |   |   |   |   |
| 3   | 0 |            |              |   |   |   |   |
| 4   | 0 |            |              |   |   |   |   |
| 5   | 0 |            |              |   |   |   |   |
| 6   | 0 |            |              |   |   |   |   |
| 7   | 0 |            |              |   |   |   |   |



|         | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | <b>C</b> | A | D | В | B |
| $Y_{j}$ |   | С |          | D | В | В |   |

|   | Г | 1 |
|---|---|---|
| L |   | 1 |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |
| 2 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | C | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | B | C | E | D | B | B |   |

|   | Γ | 1 |
|---|---|---|
| L |   | 1 |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |
| 2 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | <b>C</b> | A | D | В | B |
|         | B |   |          |   |   | В |   |

|   | Г | 7 |
|---|---|---|
| C |   | ı |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |
| 2 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         |                  |   |          |   | 5 |   | 7 |
|---------|------------------|---|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A                | В | <b>C</b> |   |   |   | B |
| $Y_{j}$ | $\boldsymbol{B}$ | С | E        | D | В | В |   |

|   | Γ | 1 |
|---|---|---|
| L |   | 1 |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |
| 2 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_j$   | B | C | E        | D | В | В |   |

|   | Γ | ٦ |
|---|---|---|
| C |   | - |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         | 1 | 2 | 3        | 4       | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|----------|---------|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | <b>C</b> | A       | D | В | В |
| $Y_j$   | В | C | $x_i =$  | $= y_j$ | } | В |   |

| C[] |   |     | $x_i - y_j$ |   |   |   |   |
|-----|---|-----|-------------|---|---|---|---|
| j   | 0 | 1   | 2           | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0   | 0 | 0   | 0           | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1   |   | 0   | 0           | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2   | 0 | ( ) |             |   |   |   |   |
| 3   | 0 |     |             |   |   |   |   |
| 4   | 0 |     |             |   |   |   |   |
| 5   | 0 |     |             |   |   |   |   |
| 6   | 0 |     |             |   |   |   |   |
| 7   | 0 |     |             |   |   |   |   |



|         | 1 | 2 | 3        | 4       | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|----------|---------|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | <b>C</b> | A       | D | В | В |
| $Y_j$   | В | C | $x_i =$  | $= y_j$ | 3 | В |   |

| <b>C</b> [] |                                   |                                   | $x_i - y_j$ |   |   |   |   |
|-------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------|---|---|---|---|
| j $i$       | 0                                 | 1                                 | 2           | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0           | 0                                 | 0                                 | 0           | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1           | $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ | 0                                 | 0           | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2           | 0                                 | $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ |             |   |   |   |   |
| 3           | 0                                 |                                   |             |   |   |   |   |
| 4           | 0                                 |                                   |             |   |   |   |   |
| 5           | 0                                 |                                   |             |   |   |   |   |
| 6           | 0                                 |                                   |             |   |   |   |   |
| 7           | 0                                 |                                   |             |   |   |   |   |



|       |   |   | 3        |   |   |   |   |
|-------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В | <i>C</i> | A | D | В | B |
| $Y_j$ | В | С | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max}=2$ 长度 $l_{max}=1$ 

**C**[]

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 |   |   |   |   |
| 3 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         |   | 2 |          |   |   |   |   |
|---------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | <b>C</b> | A | D | В | B |
| $Y_{j}$ | В | С | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max}=2$ 长度 $l_{max}=1$ 

|   | Г | 7 |
|---|---|---|
| C |   | ı |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |   |   |   |
| 3 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         |   |   |          |   | 5 |   |   |
|---------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_i$   | A | В | <b>C</b> | A | D | В | B |
| $Y_{j}$ | В | С | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max}=2$ 长度 $l_{max}=1$ 

|   | Г | 7 |
|---|---|---|
| C |   | ı |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |   |   |
| 3 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       |   |   | 3        |   |   |   |   |
|-------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_j$ | В | С | E        | D | В | В |   |

|   | Г | 1 |
|---|---|---|
| L |   | 1 |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |   |
| 3 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_j$ | В | С | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max}=2$ 长度 $l_{max}=1$ 

|   | Г | 1 |
|---|---|---|
| L |   | ı |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         | 1              | 2 | 3                | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|----------------|---|------------------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A              | В | С                | A | D | В | B |
| $Y_{j}$ | $oldsymbol{B}$ | C | $\boldsymbol{E}$ | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 2$ 长度 $l_{max} = 1$ 

|   | Г | 7 |
|---|---|---|
| C |   | ı |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 |   |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       |   |   | 3 |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В | C | A | D | В | B |
| $Y_j$ | В | С | E | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

|   | Г | 7 |
|---|---|---|
| C |   | ı |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 |   |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         |   |   | 3 |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | С | A | D | В | В |
|         |   |   | E |   |   | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 |   |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         |   |   | 3 |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | С | A | D | В | В |
|         |   |   | E |   |   | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |   |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       |   |          | 3 |   |   |   |   |
|-------|---|----------|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В        | C | A | D | В | B |
| $Y_j$ | В | <b>C</b> | E | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

|   | Γ | ٦ |
|---|---|---|
| C |   | - |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |   |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       | 1 | 2        | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|----------|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В        | С | A | D | В | В |
| $Y_j$ | В | <b>C</b> | E | D | В | В |   |

位置 $p_{max}=3$ 长度 $l_{max}=2$ 

|   | ٦ |
|---|---|
| C | - |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       |   |   |          |   | 5 |   |   |
|-------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_j$ | В | С | E        | D | B | В |   |

位置 $p_{max}=3$ 长度 $l_{max}=2$ 

|   | Г | 7 |
|---|---|---|
| C |   | ı |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 |   |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_i$   | A | В | <b>C</b> | A | D | В | B |
| $Y_{j}$ | В | С | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       | 1 | 2        | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В        | <b>C</b> | A | D | В | B |
| $Y_j$ | В | <b>C</b> | E        | D | B | В |   |

位置 $p_{max}=3$ 长度 $l_{max}=2$ 

|   | Γ | 1 |
|---|---|---|
| C |   | 1 |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       | 1 | 2        | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В        | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_j$ | В | <b>C</b> | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       |   |          |          |   | 5 |   |   |
|-------|---|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В        | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_j$ | В | <b>C</b> | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | B | <b>C</b> | A | D | В | B |
| $Y_{j}$ | В | C | E        | D | B | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

|   | Γ | ٦ |
|---|---|---|
| L |   |   |
|   | _ |   |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В | <b>C</b> | A | D | В | B |
| $Y_j$ | В | С | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 |   |   |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | B | <b>C</b> | A | D | B | B |
| $Y_{j}$ | В | С | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

|   | Γ | 1 |
|---|---|---|
| L |   | 1 |

| j $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2     | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3     | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5     | 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |
| 6     | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7     | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         |   |   |          |   | 5 |   |   |
|---------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | В | C | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max}=3$ 长度 $l_{max}=2$ 

|   | Г | 1 |
|---|---|---|
| C |   | 1 |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         |   |          |          |   | 5 |   |   |
|---------|---|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | B        | <b>C</b> | A | D | B | B |
|         | B | <b>C</b> | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |   |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В | <b>C</b> | A | D | В | В |
|       |   |   | E        |   |   |   |   |

位置 $p_{max}=3$ 长度 $l_{max}=2$ 

|   | Г |  |
|---|---|--|
| L |   |  |
|   |   |  |

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |   |
| 6 | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       | 1 | 2        | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В        | <b>C</b> | A | D | B | B |
| $Y_j$ | В | <b>C</b> | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

|   | Γ | ٦ |
|---|---|---|
| C |   | - |

| j $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2     | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3     | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5     | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6     | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7     | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         | 1              | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|----------------|---|---|---|---|---|---|
|         | A              |   |   |   | D | В | В |
| $Y_{j}$ | $oldsymbol{B}$ | С | E | D | B | В |   |

位置 $p_{max}=3$ 长度 $l_{max}=2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 |   |   |   |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         |   |   |   | 4 |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$   | A | В | C | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | В | С | E | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2     | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3     | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5     | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6     | 0 | 1 | 0 |   |   |   |   |
| 7     | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       | 1 | 2        | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|----------|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A |          |   |   |   | В | В |
| $Y_j$ | B | <b>C</b> | E | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2     | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3     | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5     | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6     | 0 | 1 | 0 | 0 |   |   |   |
| 7     | 0 |   |   |   |   |   |   |



|         |   |          |          | 4 |   |   |   |
|---------|---|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В        | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | В | <b>C</b> | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max}=3$ 长度 $l_{max}=2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |   |   |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       | 1      | 2        | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|--------|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A<br>B | В        | <b>C</b> | A | D | В | B |
| $Y_j$ | В      | <b>C</b> | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4                                 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|-----------------------------------|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0                                 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0                                 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0                                 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0                                 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0                                 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0                                 | 2 |   |
| 7 | 0 |   |   |   |                                   |   |   |



|       | 1 | 2        | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B        | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_j$ | В | <b>C</b> | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |   | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7 | 0 |   |   |   |   |   |   |



|       | 1 | 2 | 3        | 4 | 5                | 6 | 7 |
|-------|---|---|----------|---|------------------|---|---|
| $X_i$ | A | В | <b>C</b> | A | D                | В | В |
| $Y_j$ | В | С | E        | D | $\boldsymbol{B}$ | В |   |

位置 $p_{max}=3$ 长度 $l_{max}=2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7 | 0 | 1 |   |   |   |   |   |



|         | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | B | C | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | В | С | E | D | B | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 0 |   |   |   |   |



|         | 1 | 2        | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В        | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | B | <b>C</b> | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 3$ 长度 $l_{max} = 2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 0 | 0 |   |   |   |



|       | 1 | 2        | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | В        | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_j$ | В | <b>C</b> | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max}=3$ 长度 $l_{max}=2$ 

| j $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2     | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3     | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5     | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6     | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7     | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |   |   |



|         |   |          |          |   | 5 |   |   |
|---------|---|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В        | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | В | <b>C</b> | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max}=3$ 长度 $l_{max}=2$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4                                 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|-----------------------------------|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0                                 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0                                 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0                                 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0                                 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0                                 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1                                 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ | 2 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0                                 | 1 |   |



|         | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | <b>C</b> | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | В | C | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 7$ 长度 $l_{max} = 3$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |



|         | 1 | 2        | 3        | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|----------|----------|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В        | <b>C</b> | A | D | В | B |
| $Y_{j}$ | В | <b>C</b> | E        | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 7$ 长度 $l_{max} = 3$ 

|   | Г | 7 |
|---|---|---|
| C |   | ı |

| j | 0 | 1 | 2 | 3        | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|----------|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0        | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0        | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0        | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0        | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0        | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0        | 4 |   | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 最长公共子串长度 |   |   | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 0 | 0        | 0 | 1 | 3 |



|         | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_{i}$ | A | В | C | A | D | В | В |
| $Y_{j}$ | В | C | E | D | В | В |   |

位置 $p_{max} = 7$ 长度 $l_{max} = 3$ 

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |



Longest-Common-Substring(X, Y)

```
输入: 两个字符串X, Y
 输出: X和Y的最长公共子串
//初始化
n \leftarrow \operatorname{length}(X)
m \leftarrow \operatorname{length}(Y)
新建二维数组C[0..n,0..m]
 l_{max} \leftarrow 0
p_{max} \leftarrow 0
 for i \leftarrow 0 to n do
  C[i,0] \leftarrow 0
 end
for j \leftarrow 0 to m do
  C[0,j] \leftarrow 0
 end
```

序列长度

#### 伪代码



#### Longest-Common-Substring(X, Y)

```
输入: 两个字符串X, Y
 输出: X和Y的最长公共子串
//初始化
n \leftarrow \operatorname{length}(X)
m \leftarrow \operatorname{length}(Y)
新建二维数组C[0..n,0..m]
l_{max} \leftarrow 0
p_{max} \leftarrow 0
for i \leftarrow 0 to n do
C[i,0] \leftarrow 0
end
for j \leftarrow 0 to m do
 C[0,j] \leftarrow 0
\end
```

#### 初始化最优解



#### Longest-Common-Substring(X, Y)

```
//动态规划
for i \leftarrow 1 to n do
                                                      依次计算子问题
    for j \leftarrow 1 to m do
      if X_i \neq Y_i then
          C[i,j] \leftarrow 0
        end
        else
            C[i,j] \leftarrow C[i-1,j-1] + 1
            if C[i,j] > l_{max} then
              l_{max} \leftarrow C[i,j]
               p_{max} \leftarrow i
            end
        end
    end
end
return l_{max}, p_{max}
```



#### Longest-Common-Substring(X, Y)

```
//动态规划
for i \leftarrow 1 to n do
    for j \leftarrow 1 to m_{do}
      if X_i \neq Y_i then
                                                            末尾不等
      C[i,j] \leftarrow 0
      \mathbf{end}
        else
            C[i,j] \leftarrow C[i-1,j-1] + 1
            if C[i,j] > l_{max} then
             l_{max} \leftarrow C[i,j]
               p_{max} \leftarrow i
             end
        end
    end
end
return l_{max}, p_{max}
```



#### Longest-Common-Substring(X, Y)

```
//动态规划
for i \leftarrow 1 to n do
     for j \leftarrow 1 to m do
           if X_i \neq Y_i then
              C[i,j] \leftarrow 0
           \mathbf{end}
          {f else}
                                                                                  末尾相等
             \begin{vmatrix} C[i,j] \leftarrow C[i-1,j-1] + 1 \\ \textbf{if } C[i,j] > l_{max} \textbf{ then} \end{vmatrix} 
                    l_{max} \leftarrow C[i,j]
                     p_{max} \leftarrow i
                 end
           end
     end
end
return l_{max}, p_{max}
```



#### Longest-Common-Substring(X, Y)

```
//动态规划
for i \leftarrow 1 to n do
    for j \leftarrow 1 to m do
        if X_i \neq Y_i then
          C[i,j] \leftarrow 0
        end
        else
            C[i,j] \leftarrow C[i-1,j-1] + 1
        if C[i,j] > l_{max} then
                                                    记录最长公共子串
            l_{max} \leftarrow C[i,j]
              p_{max} \leftarrow i
            end
        \mathbf{end}
    end
end
return l_{max}, p_{max}
```

# 伪代码



• Print-LCS(X,  $l_{max}$ ,  $p_{max}$ )

```
输入: 字符串 X, l_{max}, p_{max}
输出: X 和 Y的最长公共子串
if l_{max}=0 then
-1 return NULL
end
for i\leftarrow (p_{max}-l_{max}+1) to p_{max} do
-1 print X_i
end
```

# 伪代码



## • Print-LCS(X, $l_{max}$ , $p_{max}$ )

```
输入: 字符串 X, l_{max}, p_{max}
输出: X 和 Y的最长公共子串
if l_{max} = 0 then
-  return NULL
end
for i \leftarrow (p_{max} - l_{max} + 1) to p_{max} do
-  print X_i
end
```

#### 追踪最优解

# 时间复杂度分析

return  $l_{max}, p_{max}$ 



#### Longest-Common-Substring(X, Y)

```
//动态规划
for i \leftarrow 1 to n do
    for j \leftarrow 1 to m do
        if X_i \neq Y_i then
         C[i,j] \leftarrow 0
        end
        else
            C[i,j] \leftarrow C[i-1,j-1] + 1
            if C[i,j] > l_{max} then
              l_{max} \leftarrow C[i,j]
               p_{max} \leftarrow i
             end
        end
    end
end
```

时间复杂度:  $O(n \cdot m)$ 



| X | D | B | D | A | B |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | С | A | B | B |   |

| X | D | B | D | A | B |  |
|---|---|---|---|---|---|--|
| Y | C | A | B | B |   |  |



| X | D | В | D | A | B |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | C | A | B | B |   |

## 最长公共子串

| X | D | В | D | A | $oxedsymbol{B}$ |
|---|---|---|---|---|-----------------|
| Y | C | A | В | B | <u> </u>        |

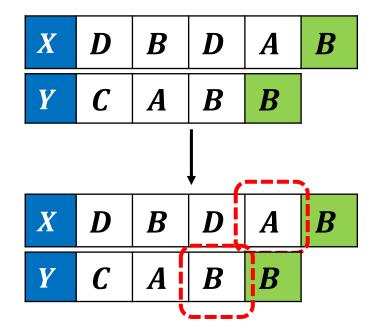
情况2:  $x_5 = y_4$ 



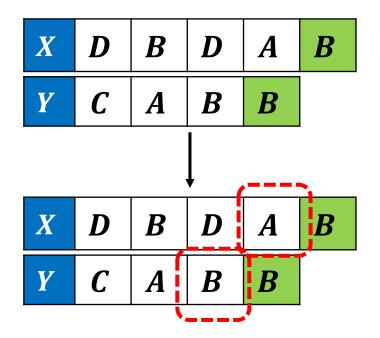
| X | D | B | D | A | B |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | C | A | B | B |   |

| X | D | B | D | A | B |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | C | A | B | B |   |





## 最长公共子串



情况1:  $x_4 \neq y_3$ 



