Design and Analysis of Algorithms

Part II: Dynamic Programming

Lecture 12: Longest Common Subsequence

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

动态规划篇概述

- **在算法课程第二部分“动态规划”主题中，我们将主要聚焦于如下经典问题：**
  - 0-1 Knapsack (0-1背包问题)
  - Maximum Contiguous Subarray II (最大连续子数组 II)
  - Longest Common Subsequences (最长公共子序列)
  - Longest Common Substrings (最长公共子串)
  - Minimum Edit Distance (最小编辑距离)
  - Rod-Cutting (钢条切割)
  - Chain Matrix Multiplication (矩阵链乘法)

动态规划篇概述

- 在算法课程第二部分动态规划主题中，我们将主要聚焦于如下经典问题：
  - 0-1 Knapsack (0-1背包问题)
  - Maximum Contiguous Subarray II (最大连续子数组 II)
  - Longest Common Subsequences (最长公共子序列)
  - Longest Common Substrings (最长公共子串)
  - Minimum Edit Distance (最小编辑距离)
  - Rod-Cutting (钢条切割)
  - Chain Matrix Multiplication (矩阵链乘法)

问题背景：子序列

- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果

Introduction to Part II

- In Part II, we will illustrate Dynamic Programming (DP) using several examples:
  - 0-1 Knapsack (0–1背包)
  - Rod-Cutting (钢条切割)
  - Chain Matrix Multiplication (矩阵链乘法)
  - Longest Common Subsequences (最长公共子序列)
  - Minimum Edit Distance (最小编辑距离)
  - All-Pairs Shortest Paths (所有结点对的最短路径)

问题背景：子序列

- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 示例
  - 给定序列X

X	A	B	C	B	D	A	B

问题背景：子序列

- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 示例
  - 给定序列X

X	A	B	C	B	D	A	B

  - X的子序列

X_1	A	B	C	B	D	A	B

问题背景：子序列

- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 示例
  - 给定序列X

X	A	B	C	B	D	A	B

  - X的子序列

X_1	A	B	C	B	D	A	B

X_2	A	B	C	B

问题背景：子序列

- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 示例
  - 给定序列X

X	A	B	C	B	D	A	B

  - X的子序列

X_1	A	B	C	B	D	A	B

X_2	A	B	C	B

X_3	A	C	B	B

问题背景：公共子序列

- 给定两个序列X和Y

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

问题背景：公共子序列

- 给定两个序列X和Y

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

- 公共子序列示例

X_1	C	A

Y_1	C	A

问题背景：公共子序列

- 给定两个序列X和Y

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

- 公共子序列示例

X_1	C	A

Y_1	C	A

X_2	A	B	A

Y_2	A	B	A

问题背景：公共子序列

- 给定两个序列X和Y

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

- 公共子序列示例

X_1	C	A

Y_1	C	A

X_2	A	B	A

Y_2	A	B	A

X_3	B	C	A	B

Y_3	B	C	A	B

问题背景：公共子序列

- 给定两个序列X和Y

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

- 公共子序列示例

X_1	C	A

Y_1	C	A

X_2	A	B	A

Y_2	A	B	A

X_3	B	C	A	B

Y_3	B	C	A	B

问题：如何求两个给定序列的最长公共子序列?

问题定义

- **形式化定义**

最长公共子序列问题

Longest Common Subsequence Problem

输入

- 序列$X = < x_1, x_2, \dots, x_n >$和序列$Y = < y_1, y_2, \dots, y_m >$

问题定义

- **形式化定义**

最长公共子序列问题

Longest Common Subsequence Problem

输入

- 序列$X = < x_1, x_2, \ldots, x_n >$和序列$Y = < y_1, y_2, \ldots, y_m >$

输出

- 求解一个公共子序列$Z = < z_1, z_2, \ldots, z_l >$，令

$$\max |Z|$$

问题定义

- 形式化定义

最长公共子序列问题

Longest Common Subsequence Problem

输入

- 序列$X = < x_1, x_2, \dots, x_n >$和序列$Y = < y_1, y_2, \dots, y_m >$

输出

- 求解一个公共子序列$Z = < z_1, z_2, \dots, z_l >$，令

$$\max |Z|$$

$$s.t. < z_1, z_2, \dots, z_l > = < x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l} > = < y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_l} >$$
$$(1 \le i_1 < i_2, \dots, i_l \le n; 1 \le j_1 < j_2, \dots, j_l \le m)$$

问题定义

- 形式化定义

最长公共子序列问题

Longest Common Subsequence Problem

输入

- 序列$X = < x_1, x_2, \dots, x_n >$和序列$Y = < y_1, y_2, \dots, y_m >$

输出

- 求解一个公共子序列$Z = < z_1, z_2, \dots, z_l >$，令

$$\max |Z|$$

优化目标

$$s.t. < z_1, z_2, \dots, z_l > = < x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l} > = < y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_l} >$$
$$(1 \leq i_1 < i_2, \dots, i_l \leq n; 1 \leq j_1 < j_2, \dots, j_l \leq m)$$

问题定义

- 形式化定义

最长公共子序列问题

Longest Common Subsequence Problem

输入

- 序列$X = < x_1, x_2, \dots, x_n >$和序列$Y = < y_1, y_2, \dots, y_m >$

输出

- 求解一个公共子序列$Z = < z_1, z_2, \dots, z_l >$，令

$$\max |Z|$$

优化目标

$$s.t. < z_1, z_2, \dots, z_l > = < x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l} > = < y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_l} >$$
$$(1 \le i_1 < i_2, \dots, i_l \le n; 1 \le j_1 < j_2, \dots, j_l \le m)$$

约束条件

蛮力枚举

- **枚举所有子序列**

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

X	A

枚举并检查长度为1的子序列

蛮力枚举

- 枚举所有子序列

X	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*

Y	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*

X	*A*

X	*B*

枚举并检查长度为1的子序列

蛮力枚举

- 枚举所有子序列

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

X	A

X	B

X	C

枚举并检查长度为1的子序列

蛮力枚举

- 枚举所有子序列

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

X	A
X	B
X	C
X	B
X	D
X	A
X	B

枚举并检查长度为1的子序列

蛮力枚举

- 枚举所有子序列

X	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*

Y	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*

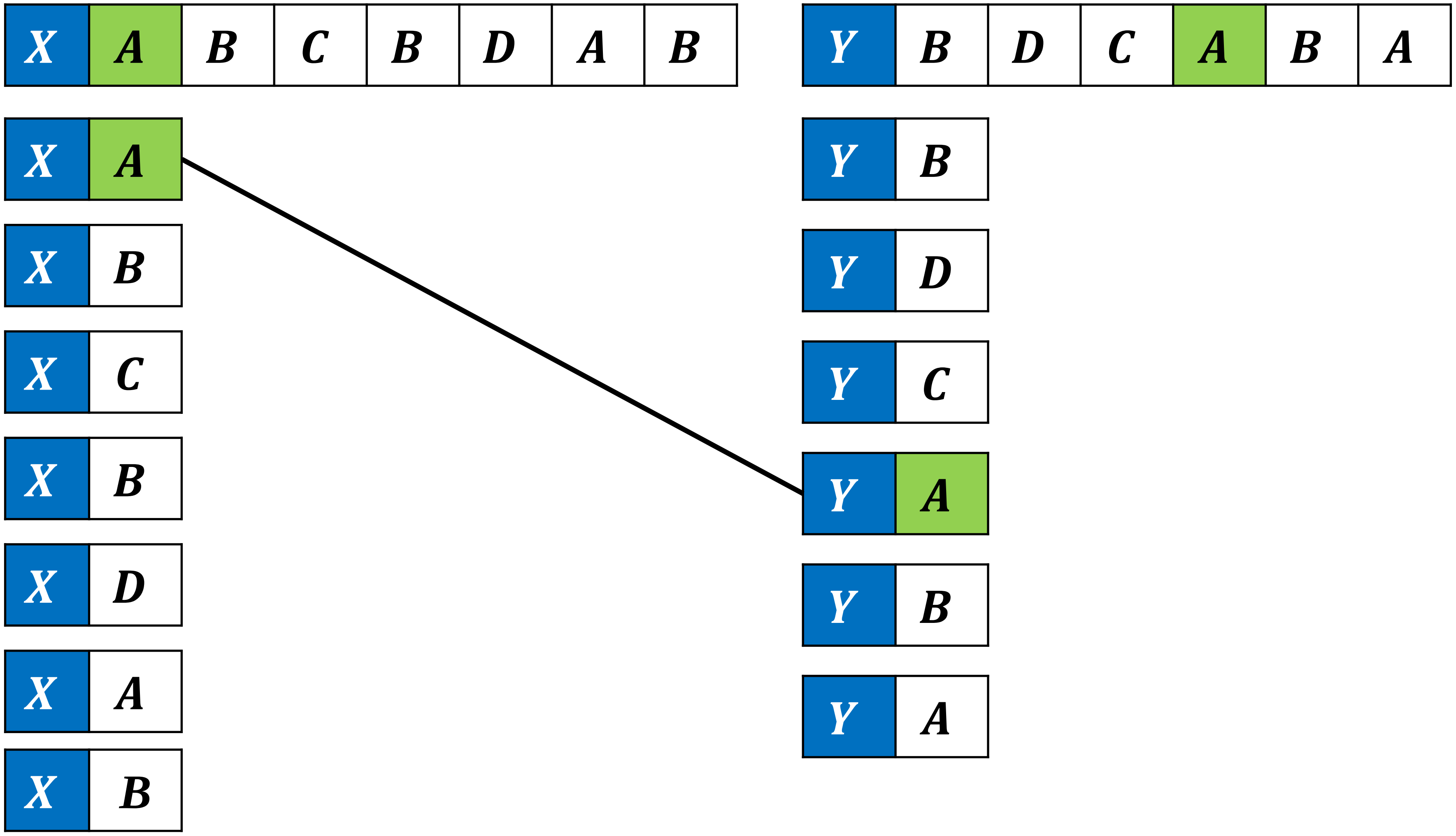
X	*A*
X	*B*
X	*C*
X	*B*
X	*D*
X	*A*
X	*B*

Y	*B*
Y	*D*
Y	*C*
Y	*A*
Y	*B*
Y	*A*

枚举并检查长度为1的子序列

蛮力枚举

- 枚举所有子序列



枚举并检查长度为1的子序列

蛮力枚举

- **枚举所有子序列**

X	A	B	C	B	D	A	B

X	A	B	C	B
X	A	B	C	D
X	A	B	C	A

…

X	B	D	A	B

…

X	C	B	D	B
X	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

Y	B	D	C	A
Y	B	D	C	B

…

Y	B	D	A	B

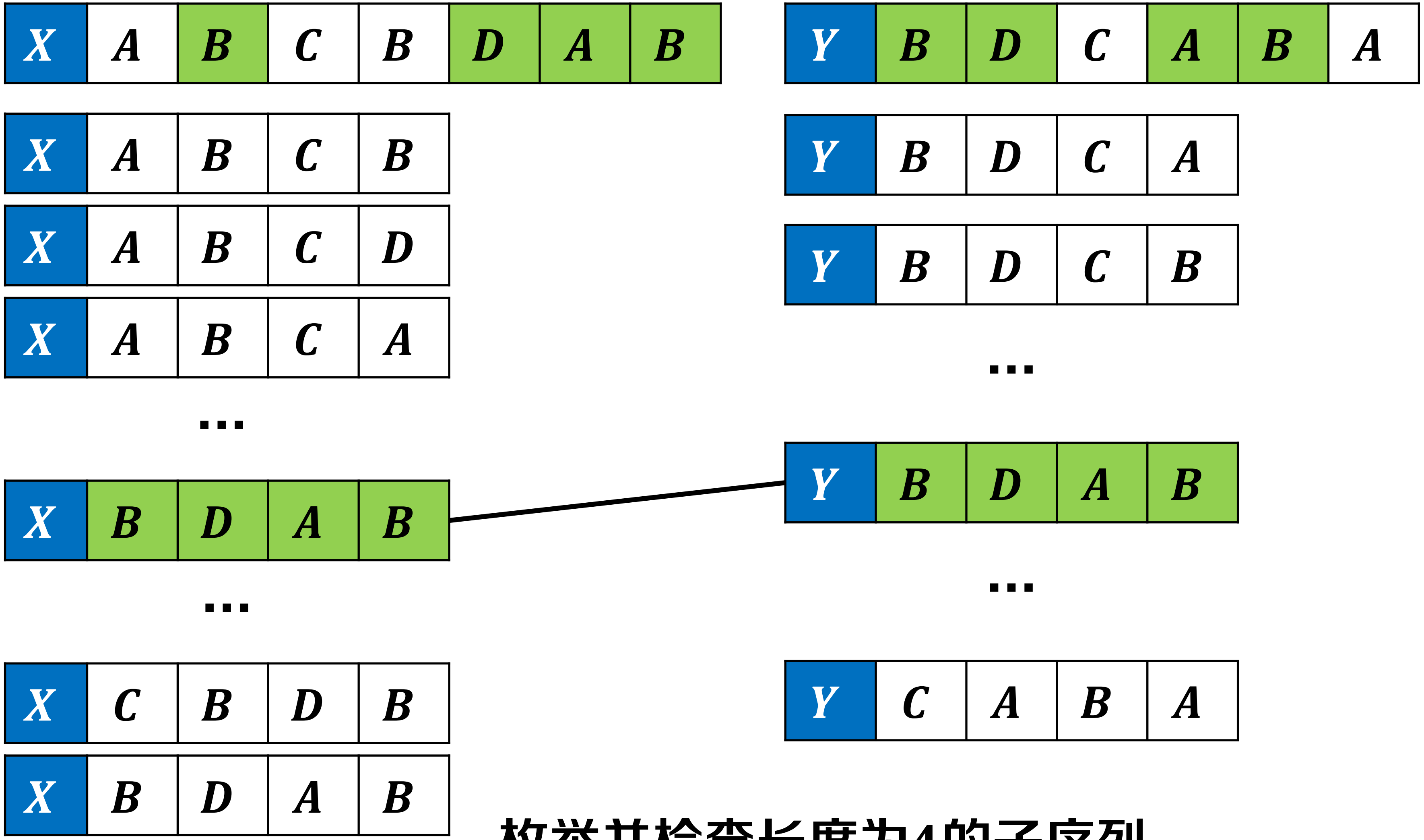
…

Y	C	A	B	A

枚举并检查长度为4的子序列

蛮力枚举

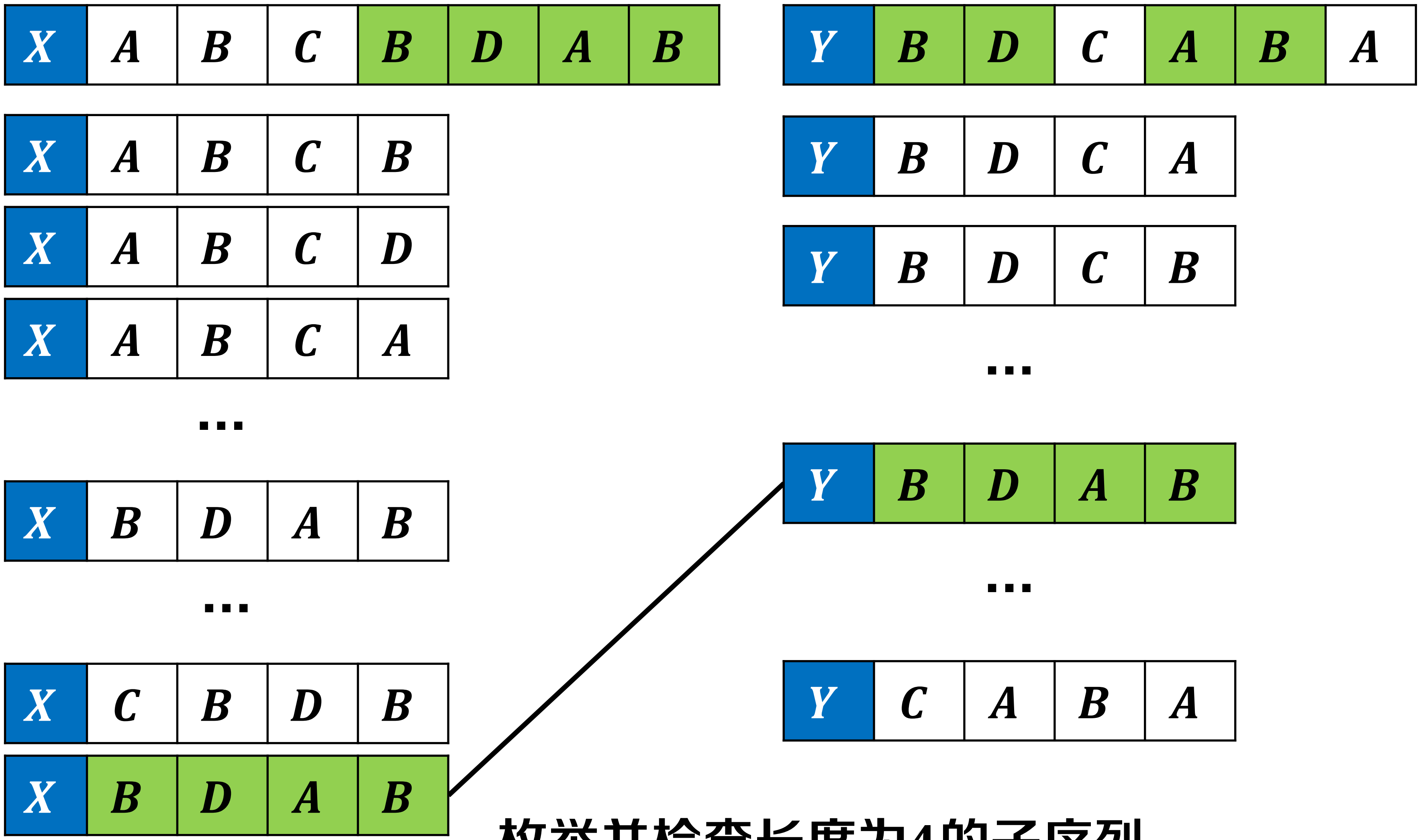
- 枚举所有子序列



枚举并检查长度为4的子序列

蛮力枚举

- 枚举所有子序列



枚举并检查长度为4的子序列

蛮力枚举

- **枚举所有子序列**

X	A	B	C	B	D	A	B

X	A	B	C	B	D
X	A	B	C	B	A
X	A	B	C	B	B
X	A	B	B	D	A
X	A	B	B	D	B

…

X	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

Y	B	D	C	A	B
Y	B	D	C	A	A
Y	B	D	C	B	A
Y	B	D	A	B	A
Y	B	C	A	B	A
Y	D	C	A	B	A

枚举并检查长度为5的子序列

蛮力枚举

- 枚举所有子序列

X	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*

X	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*
X	*A*	*B*	*C*	*B*	*A*
X	*A*	*B*	*C*	*B*	*B*
X	*A*	*B*	*B*	*D*	*A*
X	*A*	*B*	*B*	*D*	*B*

…

X	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*

Y	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*

Y	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*
Y	*B*	*D*	*C*	*A*	*A*
Y	*B*	*D*	*C*	*B*	*A*
Y	*B*	*D*	*A*	*B*	*A*
Y	*B*	*C*	*A*	*B*	*A*
Y	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*

枚举并检查长度为5的子序列

蛮力枚举

- 枚举所有子序列

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

X	B

Y	B

长度为1

X	A	B

Y	A	B

长度为2

X	A	B	A

Y	A	B	A

长度为3

X	B	D	A	B

Y	B	D	A	B

长度为4

X					

Y					

长度为5

X						

Y						

长度为6

蛮力枚举

- 枚举所有子序列

X	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*

Y	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*

长度为1

X	*B*

Y	*B*

长度为2

X	*A*	*B*

Y	*A*	*B*

长度为3

X	*A*	*B*	*A*

Y	*A*	*B*	*A*

长度为4

X	*B*	*D*	*A*	*B*

Y	*B*	*D*	*A*	*B*

蛮力枚举

- 枚举所有子序列

X	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*

Y	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*

X	*B*

Y	*B*

长度为1

X	*A*	*B*

Y	*A*	*B*

长度为2

X	*A*	*B*	*A*

Y	*A*	*B*	*A*

长度为3

X	*B*	*D*	*A*	*B*

Y	*B*	*D*	*A*	*B*

长度为4

最长公共子序列

枚举观察

X	B	D	A	B

Y	B	D	A	B

长度为4

枚举观察

X	*B*	*D*	*A*	*B*
X	*D*	*A*	*B*	

Y	*B*	*D*	*A*	*B*
Y	*D*	*A*	*B*	

长度为4

长度为3

枚举观察

X	*B*	*D*	*A*	*B*		*Y*	*B*	*D*	*A*	*B*	长度为4
X	*D*	*A*	*B*			*Y*	*D*	*A*	*B*		长度为3
X	*A*	*B*				*Y*	*A*	*B*			长度为2

枚举观察

X B D A B	Y B D A B	长度为4
X D A B	Y D A B	长度为3
X A B	Y A B	长度为2
X B	Y B	长度为1

枚举观察

X B D A B	Y B D A B	长度为4
X D A B	Y D A B	长度为3
X A B	Y A B	长度为2
X B	Y B	长度为1

- 可能存在**最优子结构**和**重叠子问题**

枚举观察

X B D A B	Y B D A B	长度为4
X D A B	Y D A B	长度为3
X A B	Y A B	长度为2
X B	Y B	长度为1

- 可能存在**最优子结构**和**重叠子问题**

问题：如何利用动态规划求解？

问题结构分析

- 给出问题表示
  - $C[i,j]$：$X[1..i]$和$Y[1..j]$的最长公共子序列长度

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i

Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

问题结构分析

- **给出问题表示**
  - $C[i,j]$：$X[1..i]$和$Y[1..j]$的最长公共子序列长度

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

- **明确原始问题**
  - $C[n,m]$： $X[1..n]$和$Y[1..m]$的最长公共子序列长度

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符
  - 情况1：$x_7 \neq y_6$

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

  - 情况2：$x_7 = y_6$

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

  - 情况1：$x_7 \neq y_6$

$C[7,6]$

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	A

不同时出现

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符
  - 情况1：$x_7 \neq y_6$

$C[7,6-1]+0$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	A	

$C[7,6]$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	A	

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符
  - 情况1：$x_7 \neq y_6$

$C[7,6]$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	A	

$C[7, 6-1]+0$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	A	

$C[7-1, 6]+0$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	A	

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符
  - 情况1：$x_7 \neq y_6$

$C[7,6]$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	A	

max

$C[7,6-1]+0$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	A	

$C[7-1,6]+0$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	A	

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i \neq y_j$

$C[i,j]$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$$\max \begin{cases} C[i,j-1]+0 \\ C[i-1,j]+0 \end{cases}$$

$C[i,j-1]+0$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i-1,j]+0$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

问题结构分析

↓

递推关系建立

↓

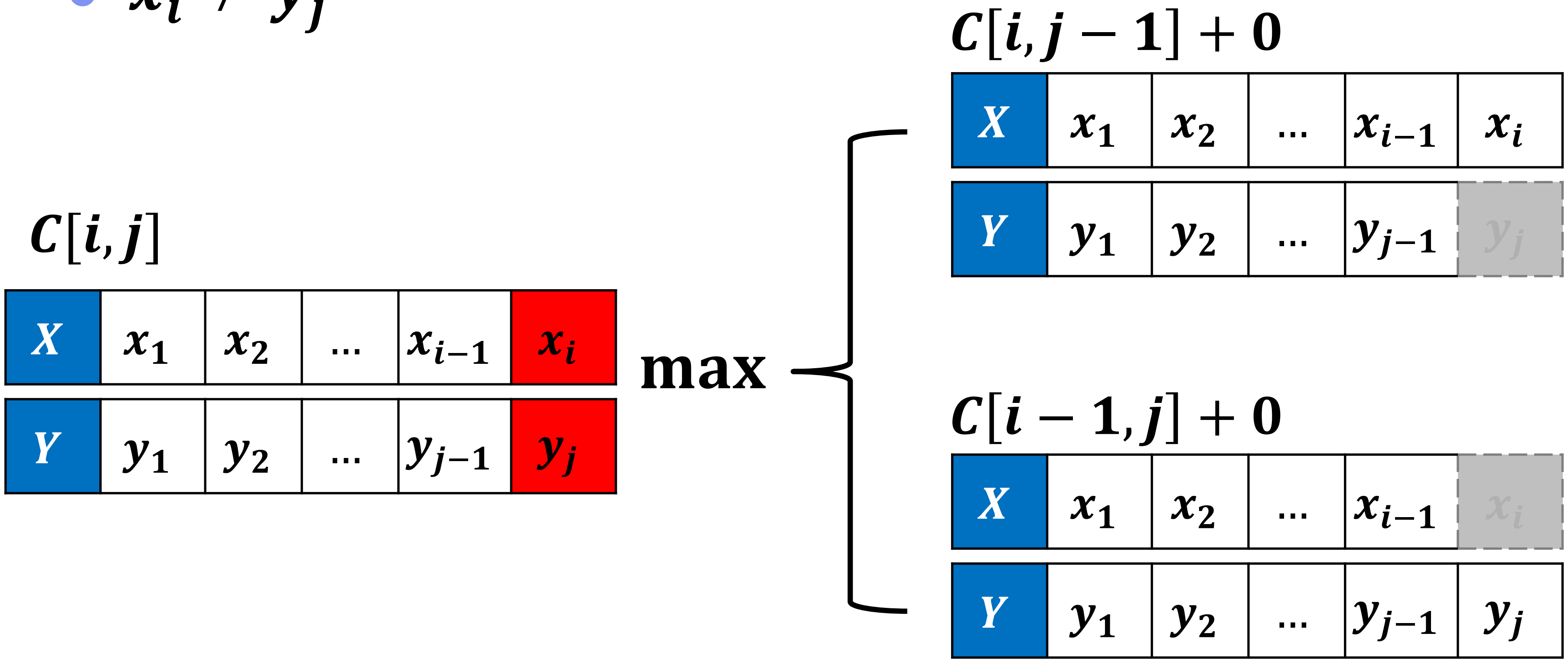
自底向上计算

↓

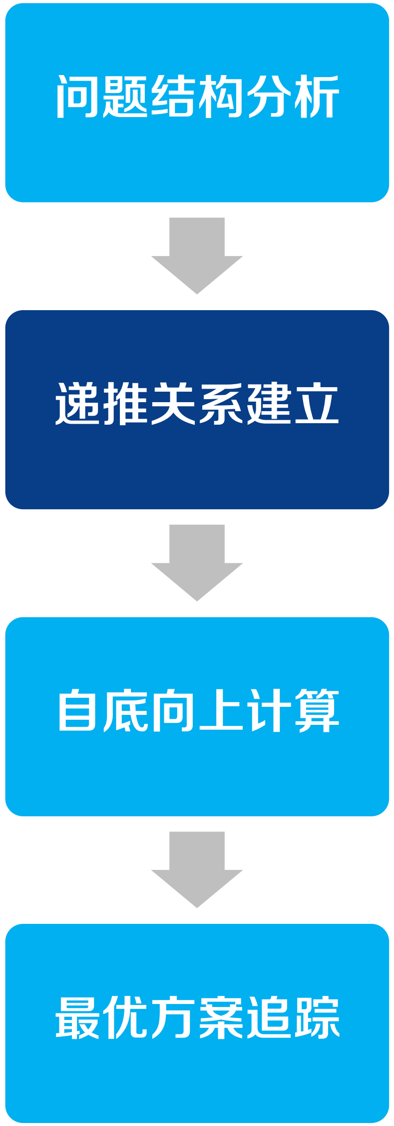
最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i \neq y_j$



- $C[i,j] = \max\{C[i-1,j], C[i,j-1]\}$



递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i \neq y_j$

$C[i,j]$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

max

$C[i,j-1]+0$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i-1,j]+0$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

- $\boxed{C[i,j]} = \max\{\boxed{C[i-1,j], C[i,j-1]}\}$

最优子结构

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

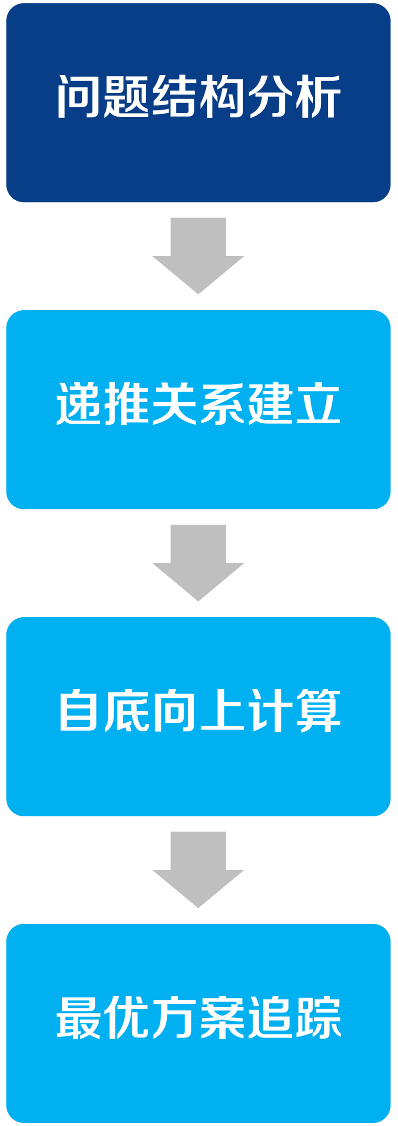
递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符
  - 情况2：$x_7 = y_6$

$C[7,6]$

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	B



递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

  - 情况2：$x_7 = y_6$

$C[7,6]$

X	A	B	C	B	D	A	B
	Y	B	D	C	A	B	B

可同时出现

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

  - 情况2：$x_7 = y_6$

$C[7,6]$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	B	

可同时出现

$C[7-1,6-1]+1$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	B	

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符
  - 情况2：$x_7 = y_6$

$C[7,6]$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	B	

也可不同时出现

$C[7-1,6-1]+1$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	B	

$C[7,6-1]+0$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	B	

$C[7-1,6]+0$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	B	

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符
  - 情况2：$x_7 = y_6$

$C[7,6]$

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	B

max

$C[7-1,6-1]+1$

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	B

$C[7,6-1]+0$

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	B

$C[7-1,6]+0$

X	A	B	C	B	D	A	B

Y	B	D	C	A	B	B

问题结构分析 → 递推关系建立 → 自底向上计算 → 最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$

$C[i,j]$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

max

$C[i-1,j-1]+1$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i-1,j]+0$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i,j-1]+0$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$

$C[i,j]$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

max

$C[i-1, j-1] + 1$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i-1, j] + 0$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i, j-1] + 0$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

问题：3个问题是否都需要求解?

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$
  - $C[i-1,j]$比$C[i-1,j-1]$至多大1
  - $C[i,j-1]$比$C[i-1,j-1]$至多大1

$C[i,j]$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$$\max \begin{cases} \boxed{C[i-1,j-1]} + 1 \\ \boxed{C[i-1,j]} + 0 \\ \boxed{C[i,j-1]} + 0 \end{cases}$$

$\boxed{C[i-1,j-1]} + 1$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$\boxed{C[i-1,j]} + 0$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$\boxed{C[i,j-1]} + 0$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$
  - $C[i-1,j]$比$C[i-1,j-1]$至多大1
  - $C[i,j-1]$比$C[i-1,j-1]$至多大1
  - $C[i-1,j-1]+1$，另外两个+0

$C[i,j]$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

max

$C[i-1,j-1]\boxed{+1}$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i-1,j]\boxed{+0}$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i,j-1]\boxed{+0}$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$
  - $C[i-1,j]$比$C[i-1,j-1]$至多大1
  - $C[i,j-1]$比$C[i-1,j-1]$至多大1
  - $C[i-1,j-1]+1$，另外两个+0

$C[i,j]$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

max

$C[i-1,j-1]\boxed{+1}$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i-1,j]\boxed{+0}$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i,j-1]\boxed{+0}$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$$C[i-1,j-1]+1 \geq \max\{C[i,j-1],C[i-1,j]\}$$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$
  - $C[i-1,j]$比$C[i-1,j-1]$至多大1
  - $C[i,j-1]$比$C[i-1,j-1]$至多大1
  - $C[i-1,j-1]+1$，另外两个+0

$C[i,j]$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

max

$C[i-1,j-1]+1$ 已充分

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i-1,j]+0$ 非必要

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i,j-1]+0$ 非必要

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$$C[i-1,j-1]+1 \geq \max\{C[i,j-1],C[i-1,j]\}$$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$

$C[i,j]$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$\longrightarrow$

$C[i-1,j-1]+1$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$

$C[i,j]$

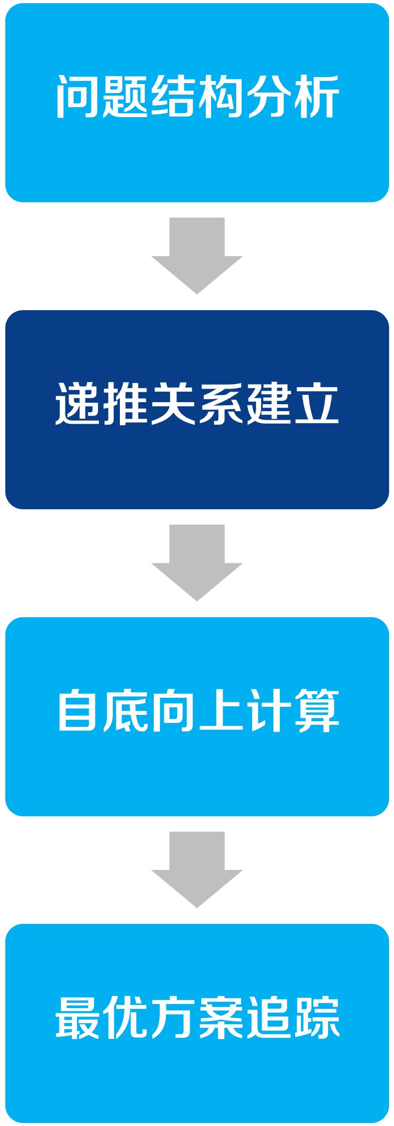
X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$\longrightarrow$

$C[i-1,j-1]+1$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

- $C[i,j] = C[i-1,j-1]+1$



递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$

$C[i,j]$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

$C[i-1,j-1]+1$

X	x_1	x_2	…	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	…	y_{j-1}	y_j

- $\boxed{C[i,j]} = \boxed{C[i-1,j-1]} + 1$

最优子结构

问题结构分析

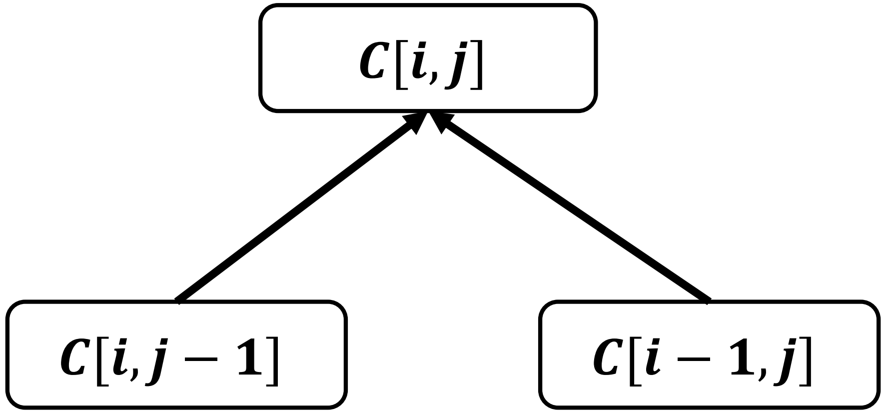
递推关系建立

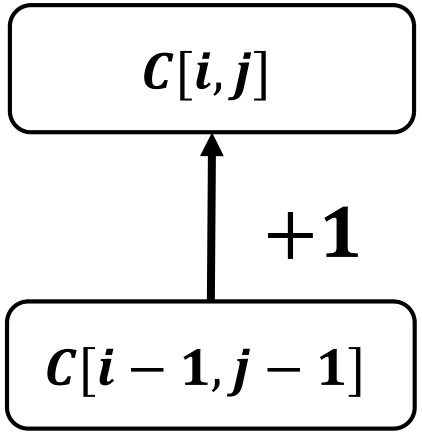
自底向上计算

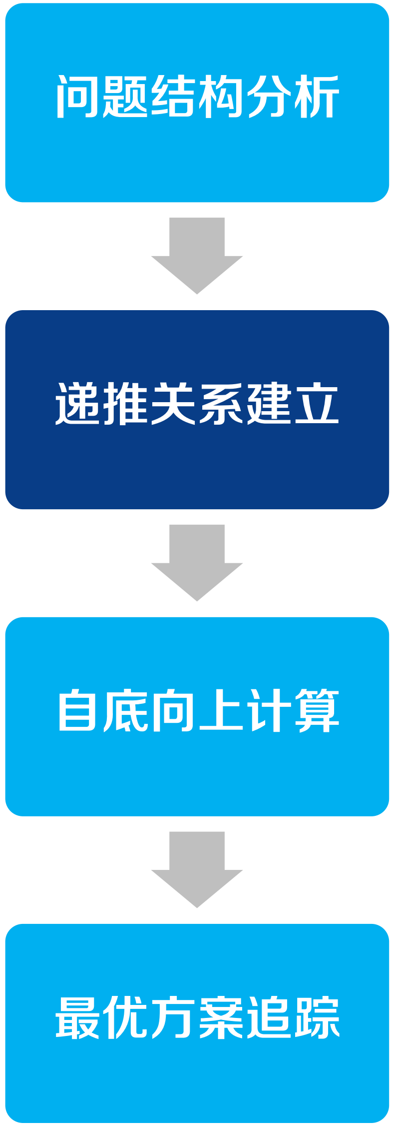
最优方案追踪

递推关系建立：构造递推公式

- $$C[i,j]=\begin{cases}\max\{C[i-1,j],C[i,j-1]\}, & x_i\neq y_j\\ C[i-1,j-1]+1 & , x_i=y_j\end{cases}$$







自底向上计算：确定计算顺序

- 初始化
  - $C[i,0] = C[0,j] = 0$
    - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	…	$j=m$
$i=0$					
$i=1$					
$i=2$					
…					
$i=n$					

问题结构分析

↓

递推关系建立

↓

自底向上计算

↓

最优方案追踪

自底向上计算：确定计算顺序

- 初始化
  - $C[i,0] = C[0,j] = 0$
    - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	…	$j=m$
$i=0$	0	0	0	0	0
$i=1$	0				
$i=2$	0				
…	0				
$i=n$	0				

初始化

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

自底向上计算：确定计算顺序

- **初始化**
  - $C[i,0] = C[0,j] = 0$
    - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0
- **递推公式**
  - $C[i,j] = \begin{cases} \max\{C[i-1,j], C[i,j-1]\}, x_i \neq y_j \\ C[i-1,j-1]+1 \qquad ,x_i = y_j \end{cases}$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	…	$j=m$
$i=0$	0	0	0	0	0
$i=1$	0				
$i=2$	0				
…	0			$C[i,j]$	
$i=n$	0				

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

自底向上计算：确定计算顺序

- **初始化**
  - $C[i,0] = C[0,j] = 0$
    - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0
- **递推公式**
  - $C[i,j] = \begin{cases} \max\{C[i-1,j], C[i,j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1,j-1]+1 & , x_i = y_j \end{cases}$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	…	$j=m$
$i=0$	0	0	0	0	0
$i=1$	0				
$i=2$	0				
…	0			$C[i,j]$	
$i=n$	0				

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

自底向上计算：确定计算顺序

- **初始化**
  - $C[i,0] = C[0,j] = 0$
    - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0
- **递推公式**
  - $C[i,j] = \begin{cases} \max\{C[i-1,j], C[i,j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1,j-1]+1 & , x_i = y_j \end{cases}$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	...	$j=m$
$i=0$	0	0	0	0	0
$i=1$	0				
$i=2$	0				
...	0			$C[i,j]$	
$i=n$	0				

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

自底向上计算：确定计算顺序

- 初始化
  - $C[i,0] = C[0,j] = 0$
    - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0
- 递推公式
  - $C[i,j] = \begin{cases} \max\{C[i-1,j], C[i,j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1,j-1]+1 & , x_i = y_j \end{cases}$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	…	$j=m$
$i=0$	0	0	0	0	0
$i=1$	0				
$i=2$	0				
…	0			$C[i,j]$	
$i=n$	0				

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

自底向上计算：依次求解问题

- 初始化
  - $C[i,0] = C[0,j] = 0$
    - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0
- 递推公式
  - $C[i,j] = \begin{cases} \max\{C[i-1,j], C[i,j-1]\}, x_i \neq y_j \\ C[i-1,j-1]+1 \quad\quad\quad , x_i = y_j \end{cases}$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	…	$j=m$
$i=0$	0	0	0	0	0
$i=1$	0				
$i=2$	0				
…	0				
$i=n$	0				★

自底向上计算

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组$rec[1..n]$，记录子问题来源
  - $$rec[i,j]=\begin{cases} LU, & if\ C[i,j]=C[i-1,j-1]+1 \\ U, & if\ C[i,j]=C[i-1,j] \\ L, & if\ C[i,j]=C[i,j-1] \end{cases}$$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	…	$j=m$
$i=0$					
$i=1$					
$i=2$					
…				$C[i,j]$	
$i=n$					

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组$rec[1..n]$，记录子问题来源
  - $$rec[i,j]=\begin{cases}LU, & if\ C[i,j]=C[i-1,j-1]+1\\ U, & if\ C[i,j]=C[i-1,j]\\ L, & if\ C[i,j]=C[i,j-1]\end{cases}$$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	...	$j=m$
$i=0$					
$i=1$					
$i=2$					
...				$C[i,j]$	
$i=n$					

  - 最长公共子序列末尾为$X[i]=Y[j]$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组$rec[1..n]$，记录子问题来源

  - $$rec[i,j]=\begin{cases} LU, & if\ C[i,j]=C[i-1,j-1]+1 \\ U, & if\ C[i,j]=C[i-1,j] \\ L, & if\ C[i,j]=C[i,j-1] \end{cases}$$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	…	$j=m$
$i=0$					
$i=1$					
$i=2$					
…				$C[i,j]$	
$i=n$					

  - 最长公共子序列在$X[1..i-1]$和$Y[1..j]$中

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组$rec[1..n]$，记录子问题来源
  - $$rec[i,j]=\begin{cases}LU, & if\ C[i,j]=C[i-1,j-1]+1\\ U, & if\ C[i,j]=C[i-1,j]\\ L, & if\ C[i,j]=C[i,j-1]\end{cases}$$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	…	$j=m$
$i=0$					
$i=1$					
$i=2$					
…				$C[i,j]$	
$i=n$					

  - 最长公共子序列在$X[1..i]$和$Y[1..j-1]$中

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

最优方案追踪：输出最优方案

- 输出最长公共子序列

  - $$rec[i,j] = \begin{cases} LU, & if\ C[i,j] = C[i-1,j-1]+1 \\ U, & if\ C[i,j] = C[i-1,j] \\ L, & if\ C[i,j] = C[i,j-1] \end{cases}$$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	...	$j=m$
$i=0$					
$i=1$					
$i=2$					
...					
$i=n$					

$rec[\,] = L$

  - 最长公共子序列在$X[1..i]$和$Y[1..j-1]$中

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

最优方案追踪：输出最优方案

- 输出最长公共子序列

  - $$rec[i,j] = \begin{cases} LU, & if\ C[i,j] = C[i-1,j-1]+1 \\ U, & if\ C[i,j] = C[i-1,j] \\ L, & if\ C[i,j] = C[i,j-1] \end{cases}$$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	…	$j=m$
$i=0$					
$i=1$					
$i=2$					
…					
$i=n$			$rec[\,]=U$		

$rec[\,]=L$

  - 最长公共子序列在$X[1..i-1]$和$Y[1..j]$中

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

最优方案追踪：输出最优方案

- 输出最长公共子序列

  - $$rec[i,j]=\begin{cases}LU, & if\ C[i,j]=C[i-1,j-1]+1\\ U, & if\ C[i,j]=C[i-1,j]\\ L, & if\ C[i,j]=C[i,j-1]\end{cases}$$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	...	$j=m$
$i=0$					
$i=1$					
$i=2$				$rec[\,]=LU$	
...					
$i=n$			$rec[\,]=U$		

$rec[\,]=L$

  - 最长公共子序列末尾为$X[i]=Y[j]$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

最优方案追踪：输出最优方案

- 输出最长公共子序列

  - $$rec[i,j] = \begin{cases} LU, & if\ C[i,j] = C[i-1,j-1]+1 \\ U, & if\ C[i,j] = C[i-1,j] \\ L, & if\ C[i,j] = C[i,j-1] \end{cases}$$

$C[i,j]$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	…	$j=m$
$i=0$					
$i=1$					
$i=2$				$rec[\,]=LU$	
…					
$i=n$			$rec[\,]=U$		

$rec[\,]=L$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

初始化

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$X_i \neq Y_j$

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$X_i \neq Y_j$

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$$X_i \neq Y_j$$

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$$\mathrm{C}[1,1] = \max\{C[1,0], C[0,1]\}$$

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U					
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0				
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U				
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0			
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U			
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$X_i = Y_j$

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1		
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$C[1,4] = C[0,3] + 1$

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU		
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1		
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1					
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU					
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1				
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L				
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1			
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L			
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1		
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U		
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1					
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U					
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1				
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U				
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2			
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU			
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2		
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L		
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4						
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1					
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU					
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1				
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U				
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2			
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U			
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2		
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U		
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5						
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1					
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U					
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2				
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU				
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2			
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U			
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2		
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U		
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0						
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6						
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1					
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U					
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2				
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U				
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2			
7	0						

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U			
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3		
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU		
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0						

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1					

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU					

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2				

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U				

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2			

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U			

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3		

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U		

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

最长公共子序列的长度

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
[illegible]	[illegible]	[illegible]	U	U	LU	U

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	$\boxed{\text{U}}$

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

			A

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	$\boxed{\text{LU}}$
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

			A

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

		B	A

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

		B	A

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

	C	B	A

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

	C	B	A

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

B	C	B	A

$C[\,]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[\,]$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
X_i	*A*	*B*	*C*	*B*	*D*	*A*	*B*
Y_j	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*A*	

B	C	B	A

最长公共子序列

$C[\,]$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[\,]$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

伪代码

- **Longest-Common-Subsequence(X, Y)**

输入: 两个序列X,Y
输出: X和Y的最长公共子序列
$n \leftarrow$length(X)
$m \leftarrow$length(Y)
//初始化
新建二维数组$C[0..n, 0..m]$和$rec[0..n, 0..m]$
for $i \leftarrow 0$ *to* n **do**
  $C[i, 0] \leftarrow 0$
end
for $j \leftarrow 0$ *to* m **do**
  $C[0, j] \leftarrow 0$
end

序列长度

伪代码

- **Longest-Common-Subsequence(X, Y)**

输入: 两个序列X,Y

输出: X和Y的最长公共子序列

$n \leftarrow$length(X)

$m \leftarrow$length(Y)

//初始化

新建二维数组$C[0..n, 0..m]$和$rec[0..n, 0..m]$

for $i \leftarrow 0$ *to* n **do**

  $C[i, 0] \leftarrow 0$

end

for $j \leftarrow 0$ *to* m **do**

  $C[0, j] \leftarrow 0$

end

初始化

伪代码

- **Longest-Common-Subsequence(X, Y)**

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        if X_i = Y_j then
            C[i, j] ← C[i − 1, j − 1] + 1
            rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if C[i − 1, j] ≥ C[i, j − 1] then
            C[i, j] ← C[i − 1, j]
            rec[i, j] ← "U"
        end
        else
            C[i, j] ← C[i, j − 1]
            rec[i, j] ← "L"
        end
    end
end
return C, rec
```

依次计算子问题

伪代码

- **Longest-Common-Subsequence(X, Y)**

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        if X_i = Y_j then
            C[i, j] ← C[i − 1, j − 1] + 1
            rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if C[i − 1, j] ≥ C[i, j − 1] then
            C[i, j] ← C[i − 1, j]
            rec[i, j] ← "U"
        end
        else
            C[i, j] ← C[i, j − 1]
            rec[i, j] ← "L"
        end
    end
end
return C, rec
```

末尾相等

伪代码

- **Longest-Common-Subsequence(X, Y)**

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        if X_i = Y_j then
            C[i, j] ← C[i − 1, j − 1] + 1
            rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if C[i − 1, j] ≥ C[i, j − 1] then
            C[i, j] ← C[i − 1, j]
            rec[i, j] ← "U"
        end
        else
            C[i, j] ← C[i, j − 1]
            rec[i, j] ← "L"
        end
    end
end
return C, rec
```

记录长度和决策

伪代码

- **Longest-Common-Subsequence(X, Y)**

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        if X_i = Y_j then
            C[i, j] ← C[i − 1, j − 1] + 1
            rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if C[i − 1, j] ≥ C[i, j − 1] then
            C[i, j] ← C[i − 1, j]
            rec[i, j] ← "U"
        end
        else
            C[i, j] ← C[i, j − 1]
            rec[i, j] ← "L"
        end
    end
end
return C, rec
```

末尾不等

伪代码

- **Print-LCS(rec, X, i, j)**

输入: 追踪数组rec, 序列X, 当前位置i和j
输出: $X[1..i]$和$Y[1..j]$的最长公共子序列

```
if i = 0 or j = 0 then
|   return NULL
end
if rec[i, j] = "LU" then
|   Print-LCS(rec, X, i − 1, j − 1)
|   print x_i
end
else if rec[i, j] = "U" then
|   Print-LCS(rec, X, i − 1, j)
end
else
|   Print-LCS(rec, X, i, j − 1)
end
```

倒序追踪方案

伪代码

- **Print-LCS**(rec, X, i, j)

输入: 追踪数组rec, 序列X, 当前位置i和j
输出: $X[1..i]$和$Y[1..j]$的最长公共子序列

```
if i = 0 or j = 0 then
|   return NULL
end
if rec[i, j] = "LU" then
|   Print-LCS(rec, X, i − 1, j − 1)
|   print x_i
end
else if rec[i, j] = "U" then
|   Print-LCS(rec, X, i − 1, j)
end
else
|   Print-LCS(rec, X, i, j − 1)
end
```

递归终止：序列长度为0

伪代码

- **Print-LCS(rec, X, i, j)**

```
输入: 追踪数组rec, 序列X, 当前位置i和j
输出: X[1..i]和Y[1..j]的最长公共子序列
if i = 0 or j = 0 then
|   return NULL
end
if rec[i, j] = "LU" then
|   Print-LCS(rec, X, i − 1, j − 1)
|   print x_i
end
else if rec[i, j] = "U" then
|   Print-LCS(rec, X, i − 1, j)
end
else
|   Print-LCS(rec, X, i, j − 1)
end
```

追踪方案：末尾相等

伪代码

- **Print-LCS(rec, X, i, j)**

```
输入: 追踪数组rec, 序列X, 当前位置i和j
输出: X[1..i]和Y[1..j]的最长公共子序列
if i = 0 or j = 0 then
 |  return NULL
end
if rec[i, j] = "LU" then
 |  Print-LCS(rec, X, i − 1, j − 1)
 |  print x_i
end
else if rec[i, j] = "U" then
 |  Print-LCS(rec, X, i − 1, j)
end
else
 |  Print-LCS(rec, X, i, j − 1)
end
```

追踪方案：末尾不等

时间复杂度分析

- **Longest-Common-Subsequence(X, Y)**

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        if X_i = Y_j then
            C[i, j] ← C[i − 1, j − 1] + 1
            rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if C[i − 1, j] ≥ C[i, j − 1] then
            C[i, j] ← C[i − 1, j]
            rec[i, j] ← "U"
        end
        else
            C[i, j] ← C[i, j − 1]
            rec[i, j] ← "L"
        end
    end
end
return C, rec
```

时间复杂度：$O(n \cdot m)$

谢谢

BDA

Beihang University