Design and Analysis of Algorithms

Part IV: Graph Algorithms

Lecture 30: Single Source Shortest Path

Bellman-Ford

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

图算法篇概述

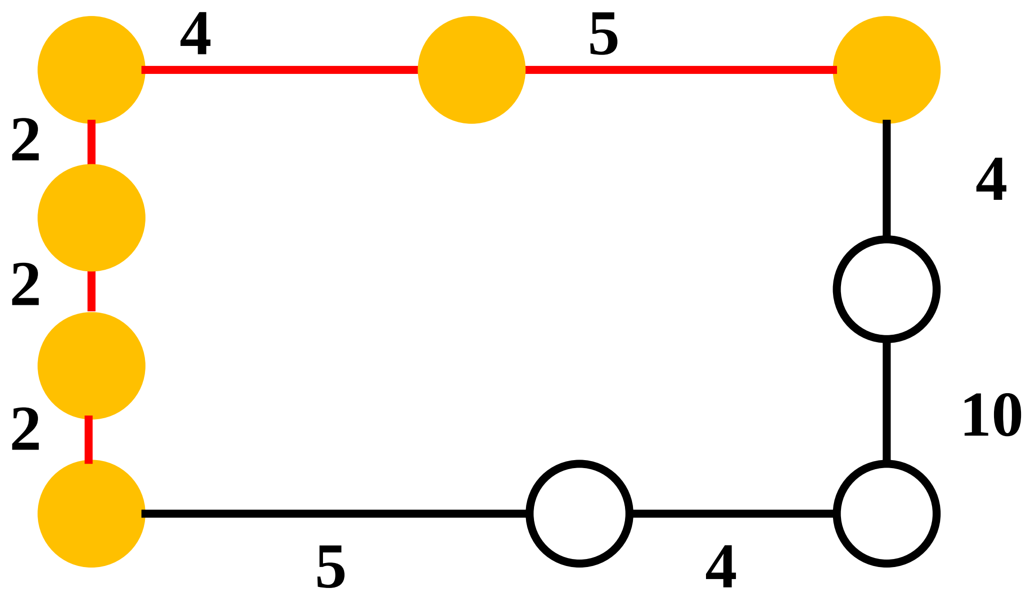
- 在算法课程第四部分“图算法”主题中，我们将主要聚焦于如下经典问题：
  - Basic Concepts in Graph Algorithms（图算法的基本概念）
  - Breadth-First Search (BFS，广度优先搜索)
  - Depth-First Search (DFS，深度优先搜索)
  - Cycle Detection（环路检测）
  - Topological Sort （拓扑排序）
  - Strongly Connected Components（强连通分量）
  - Minimum Spanning Trees (最小生成树)
  - Single Source Shortest Path (单源最短路径)
  - All-Pairs Shortest Paths (所有点对最短路径)
  - Bipartite Graph Matching（二分图匹配）
  - Maximum/Network Flows (最大流/网络流)

提纲

- 问题背景
- 算法思想
- 算法实例
- 算法分析
- 算法性质

问题背景

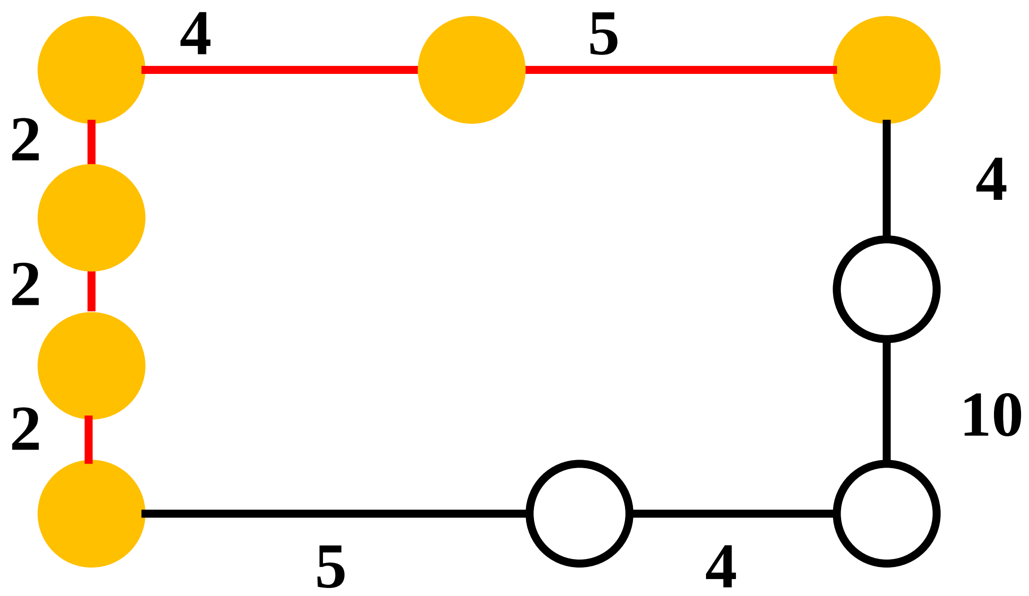
- 从知春路到其他站点，如何安排路线？



Dijkstra算法可以求解单源最短路径

问题背景

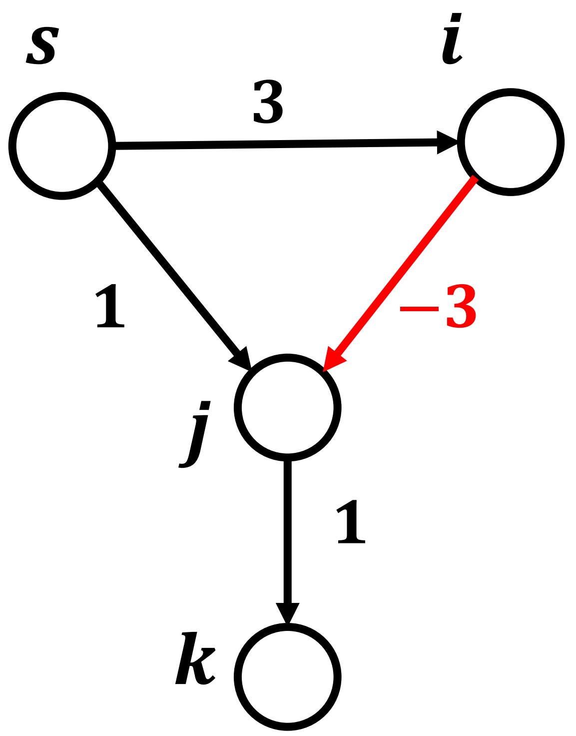
- 从知春路到其他站点，如何安排路线？



Dijkstra算法适用范围：边权为正的图

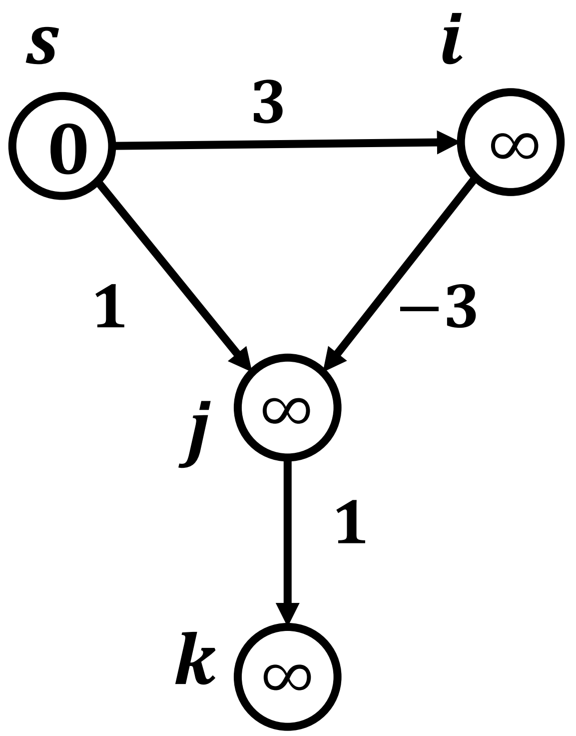
问题背景

- 图中存在**负权边**，Dijkstra算法不再适用



问题背景

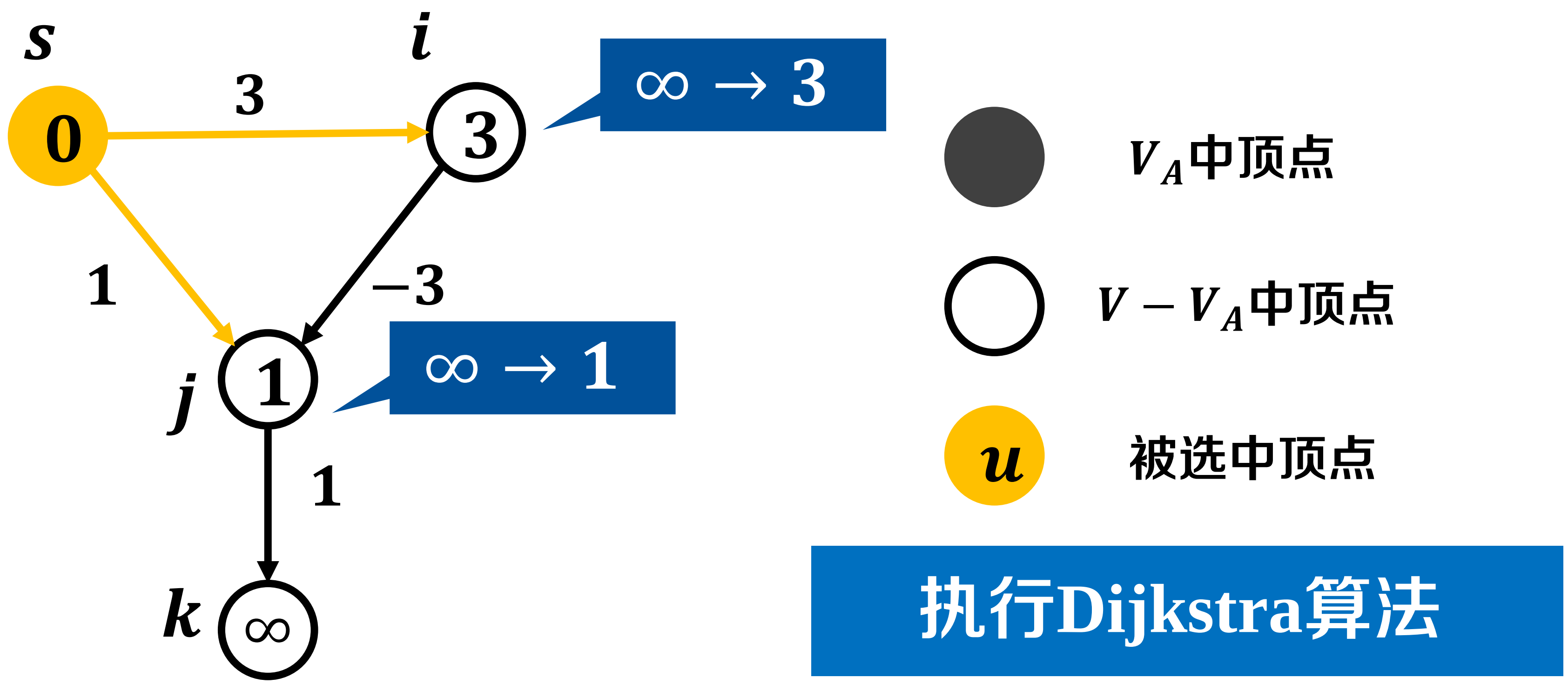
- 图中存在负权边，Dijkstra算法不再适用



执行Dijkstra算法

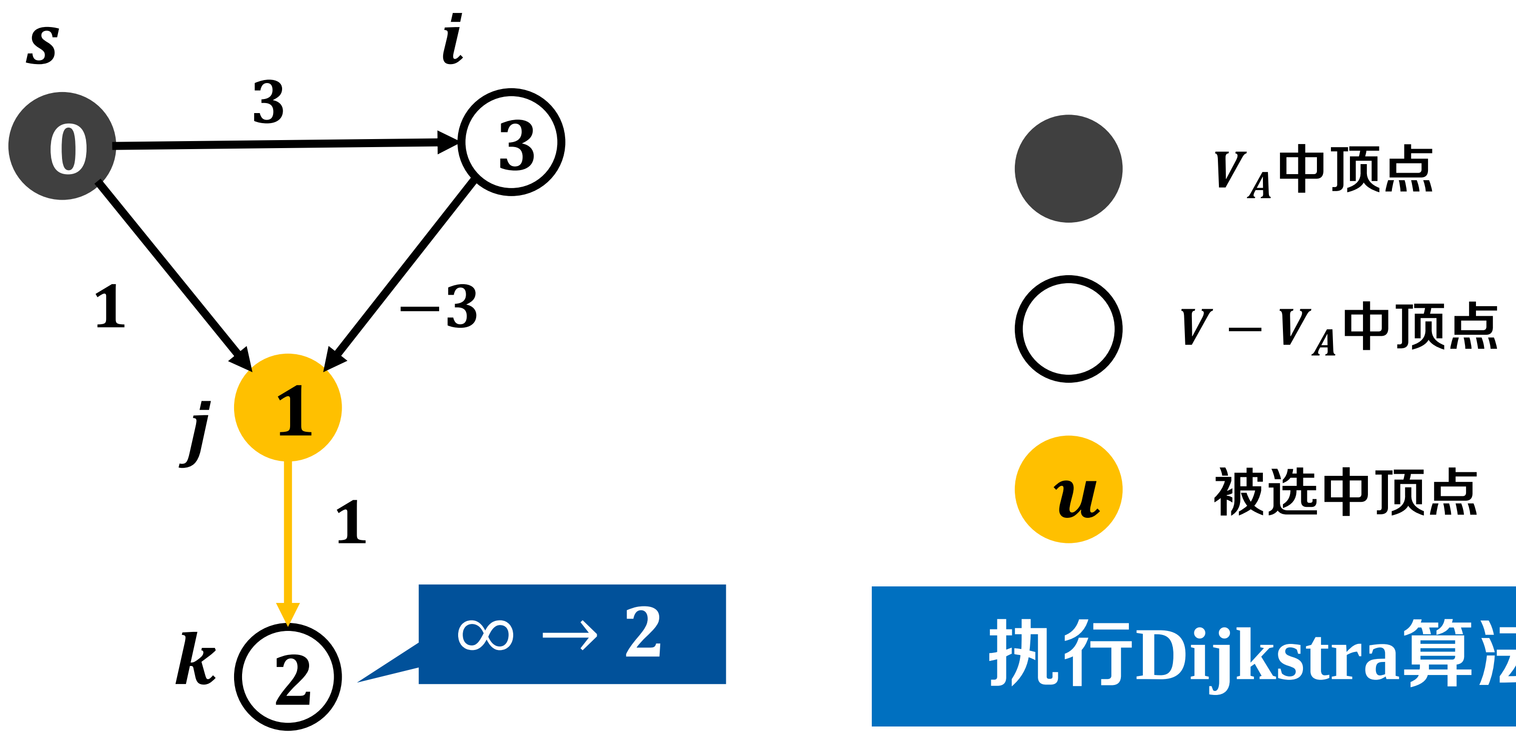
问题背景

- 图中存在负权边，Dijkstra算法不再适用



问题背景

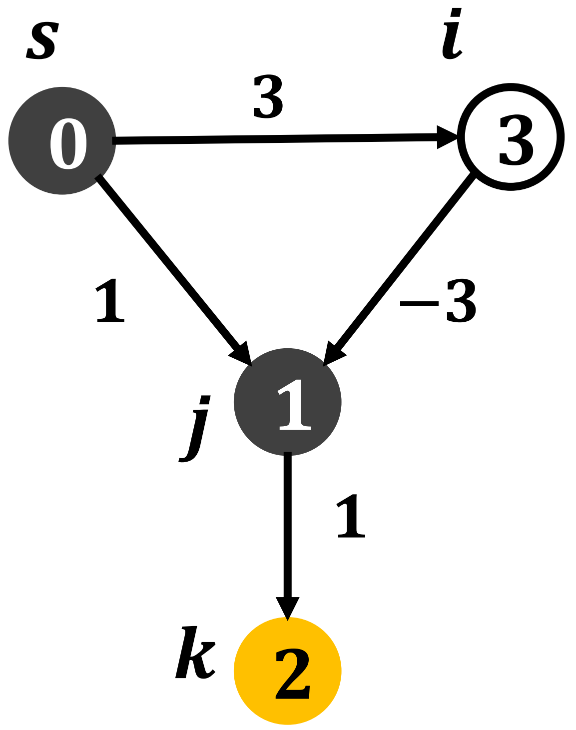
- 图中存在负权边，Dijkstra算法不再适用



执行Dijkstra算法

问题背景

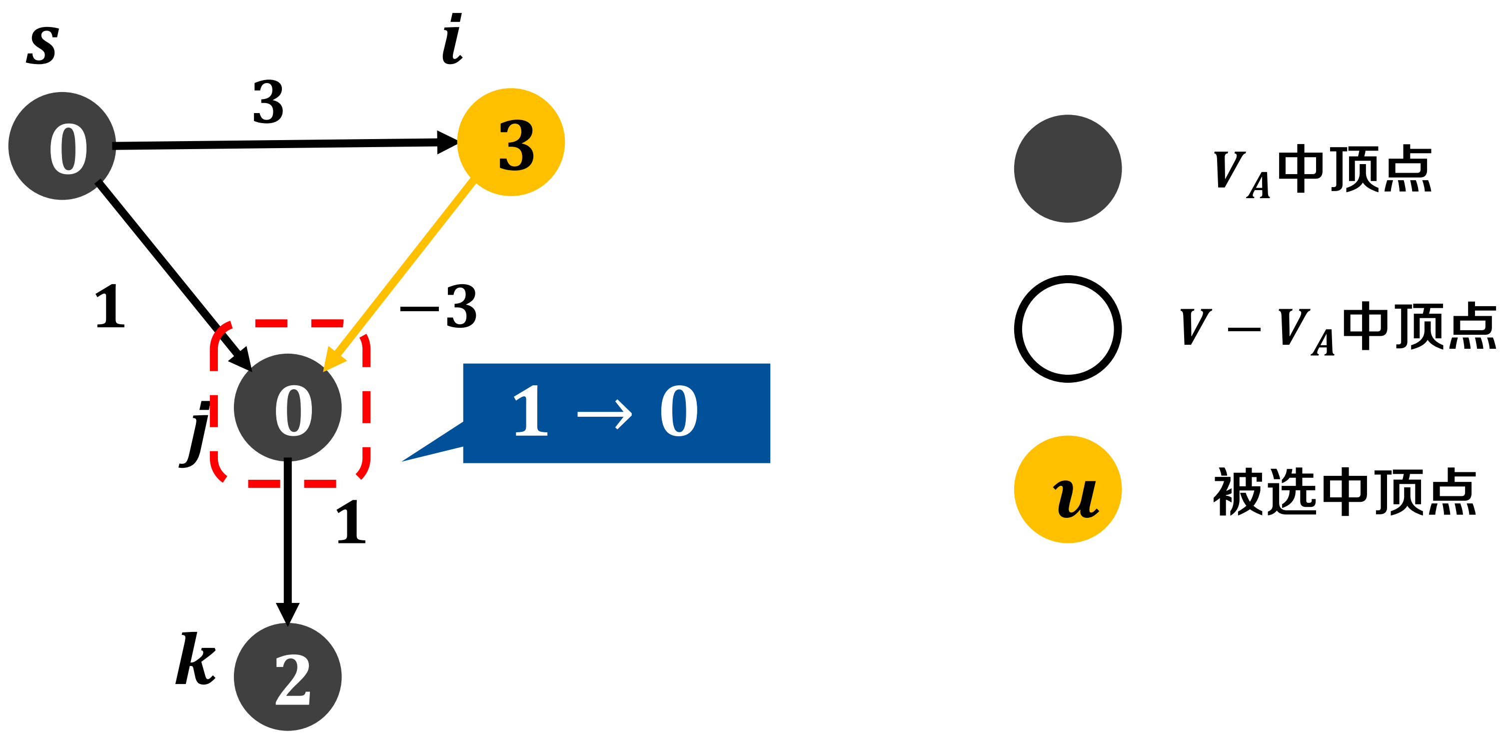
- 图中存在负权边，Dijkstra算法不再适用



执行Dijkstra算法

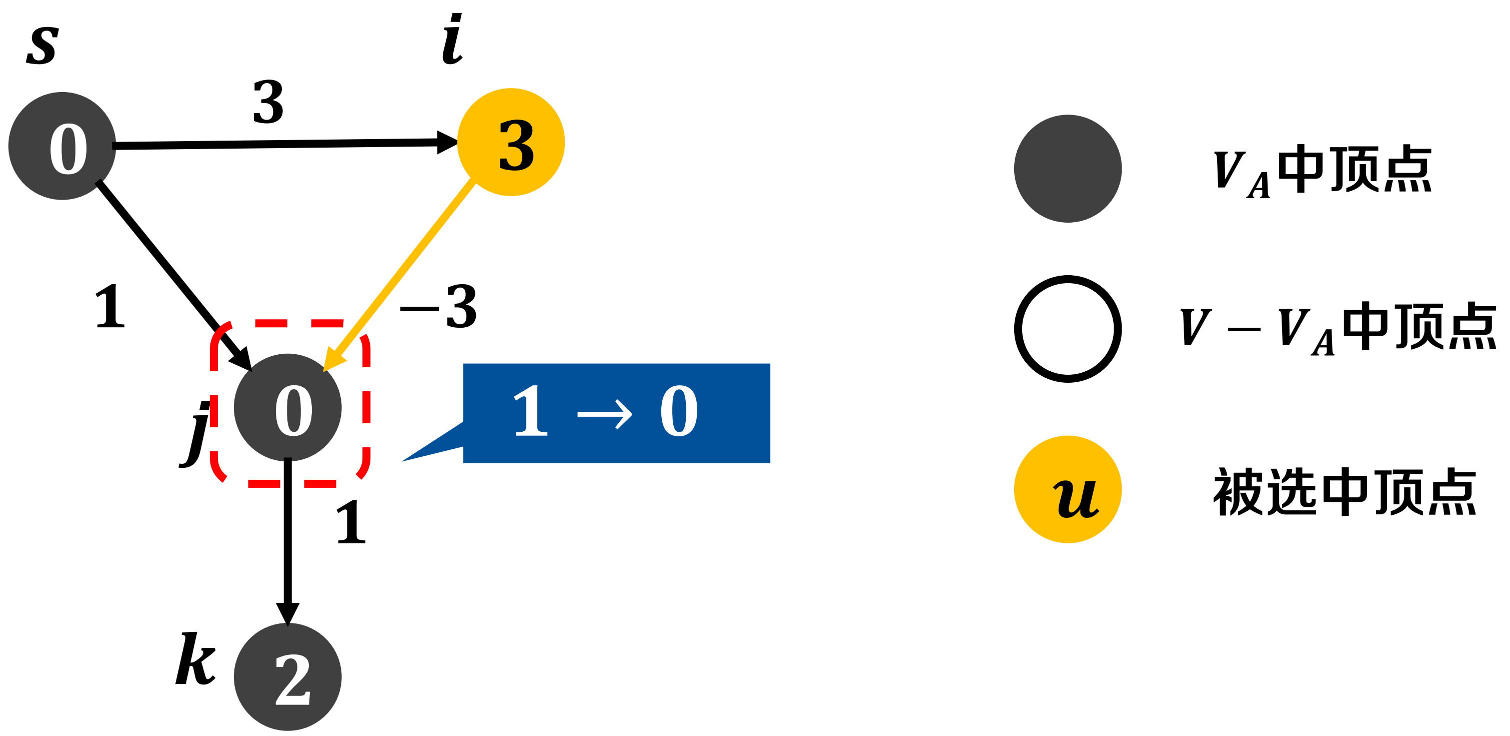
问题背景

- 图中存在负权边，Dijkstra算法不再适用



问题背景

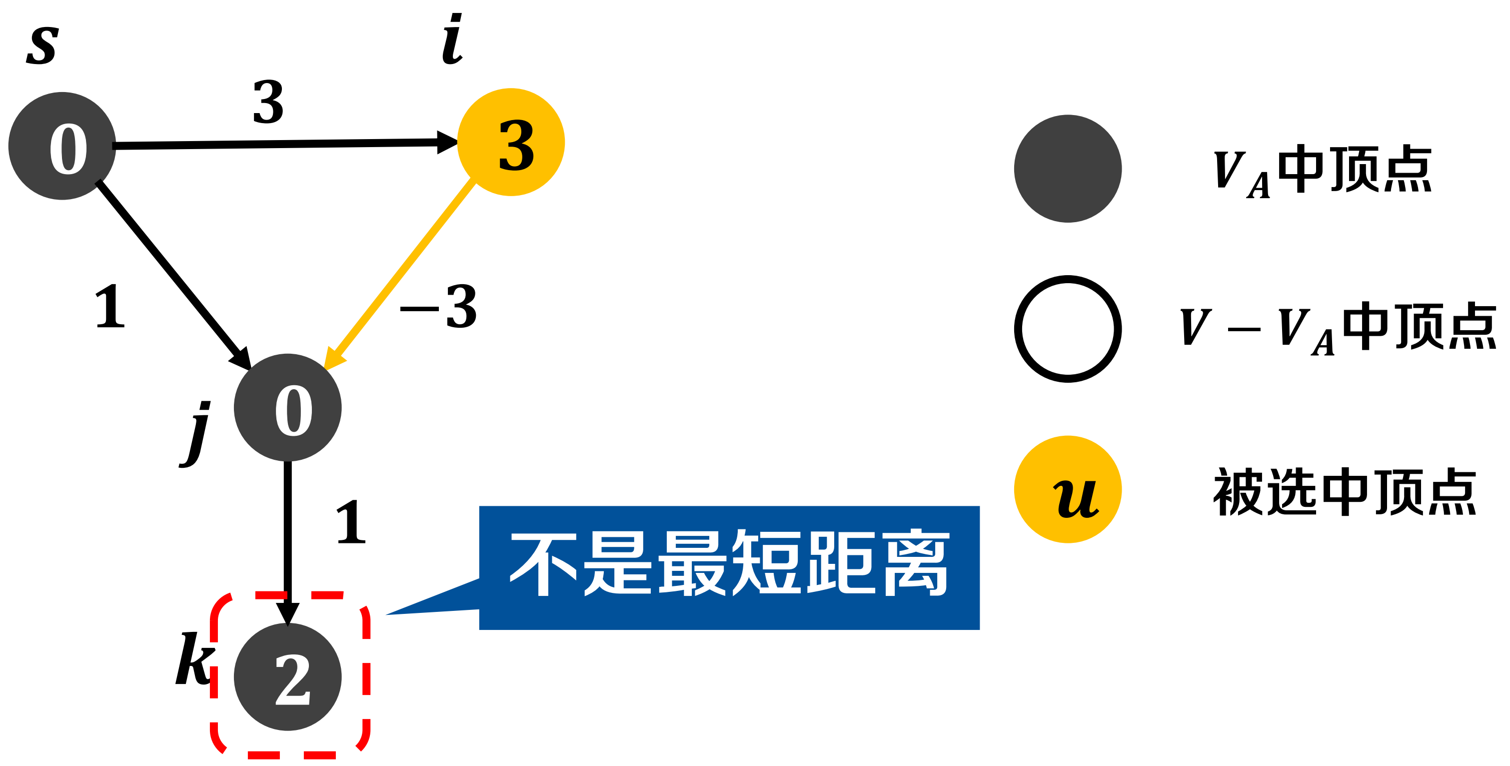
- 图中存在负权边，Dijkstra算法不再适用



Dijkstra算法：到黑色顶点的最短路应该已经计算出

问题背景

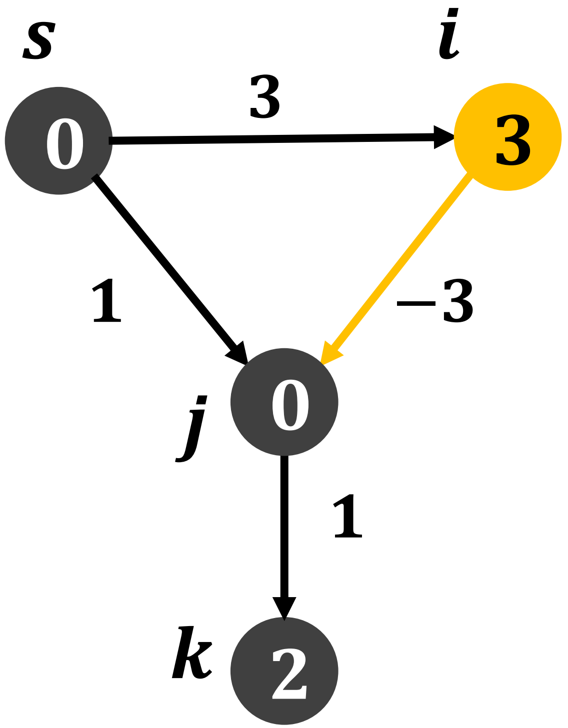
- 图中存在负权边，Dijkstra算法不再适用



Dijkstra算法：到黑色顶点的最短路应该已经计算出

问题背景

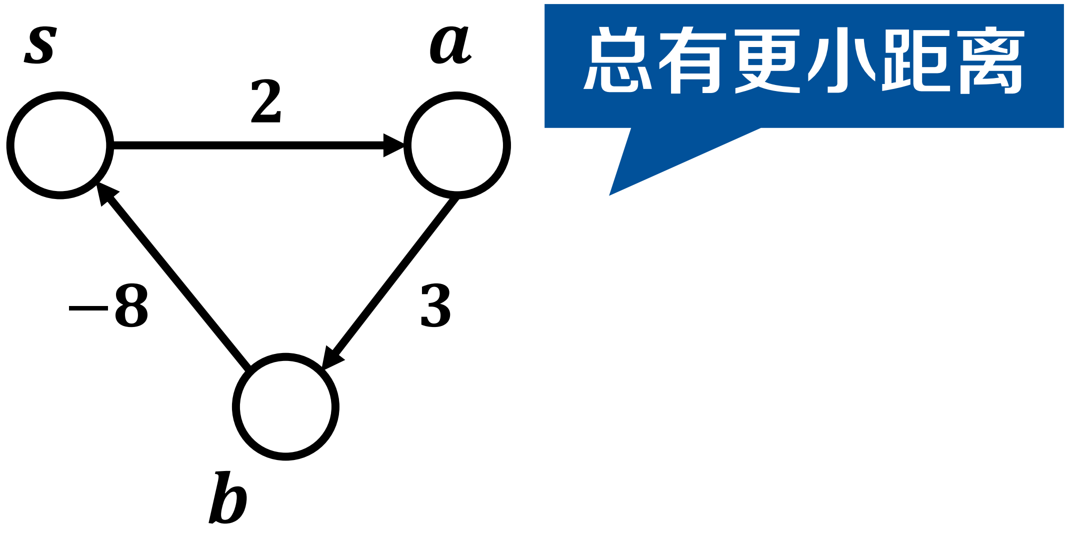
- 图中存在负权边，Dijkstra算法不再适用



问题：图中存在负权边时，是否存在单源最短路径？

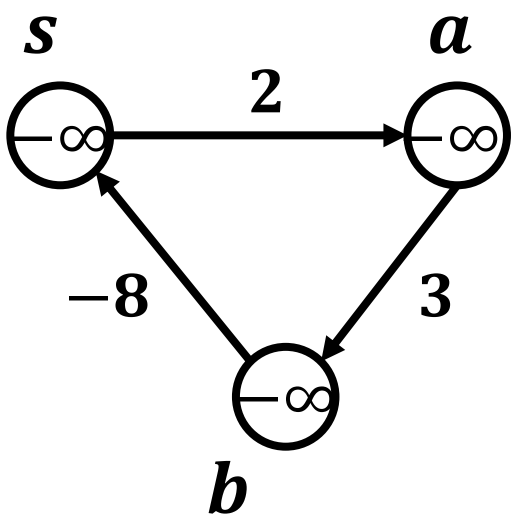
问题背景

- 图中存在负权边时，是否存在单源最短路径？
  - 如果源点s可达**负环**，则难以定义最短路径



问题背景

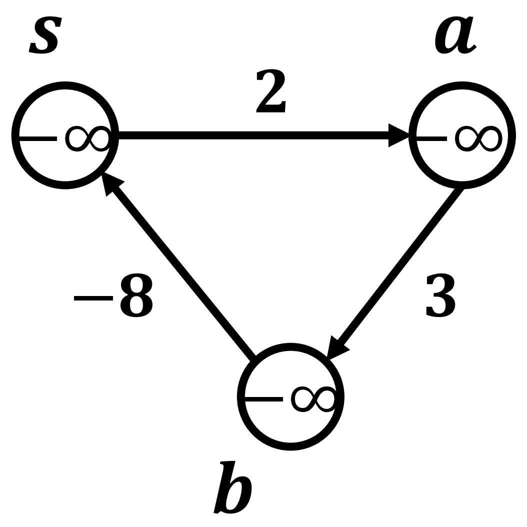
- 图中存在负权边时，是否存在单源最短路径？
  - 如果源点s可达负环，则难以定义最短路径



最终松弛到$-\infty$

问题背景

- 图中存在负权边时，是否存在单源最短路径？
  - 如果源点s可达负环，则难以定义最短路径



最终松弛到$-\infty$

若源点s无可达负环，则存在源点s的单源最短路径

问题定义

单源最短路径问题

Single Source Shortest Paths Problem

输入

- 带权图$G =< V, E, W >$
- 源点编号s

问题定义

单源最短路径问题

Single Source Shortest Paths Problem

输入

- 带权图$G =< V, E, W >$
- 源点编号s

输出

- 源点s到所有其他顶点t的**最短距离**$\delta(s, t)$和**最短路径**$< s, \dots, t >$
- 或存在源点s可达的负环

问题定义

单源最短路径问题

Single Source Shortest Paths Problem

输入

- 带权图$G =< V, E, W >$
- 源点编号s

输出

- 源点s到所有其他顶点t的最短距离$\delta(s, t)$和最短路径$< s, \dots, t >$
- 或存在源点s可达的负环

挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径？

问题定义

单源最短路径问题

Single Source Shortest Paths Problem

输入

- 带权图$G=<V,E,W>$
- 源点编号s

输出

- 源点s到所有其他顶点t的最短距离$\delta(s,t)$和最短路径$<s,\ldots,t>$
- 或存在源点s可达的负环

挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径？

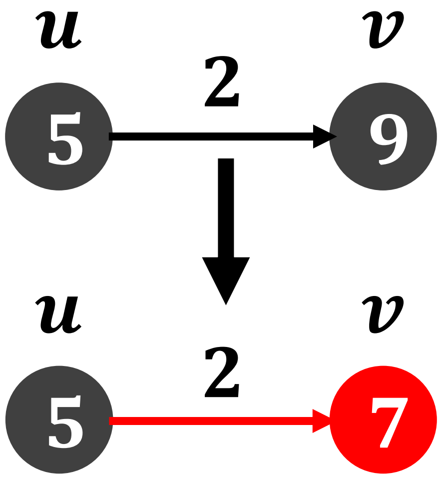
挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？

提纲

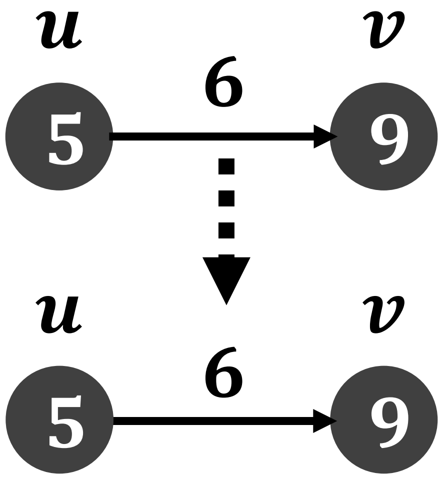
- 问题背景
- 算法思想
- 算法实例
- 算法分析
- 算法性质

算法思想

- Dijkstra算法通过松弛操作迭代更新最短距离



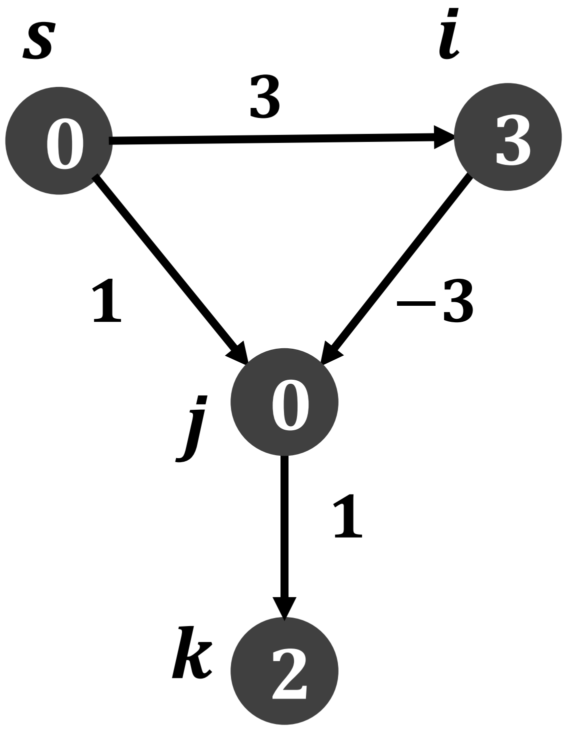
松弛成功



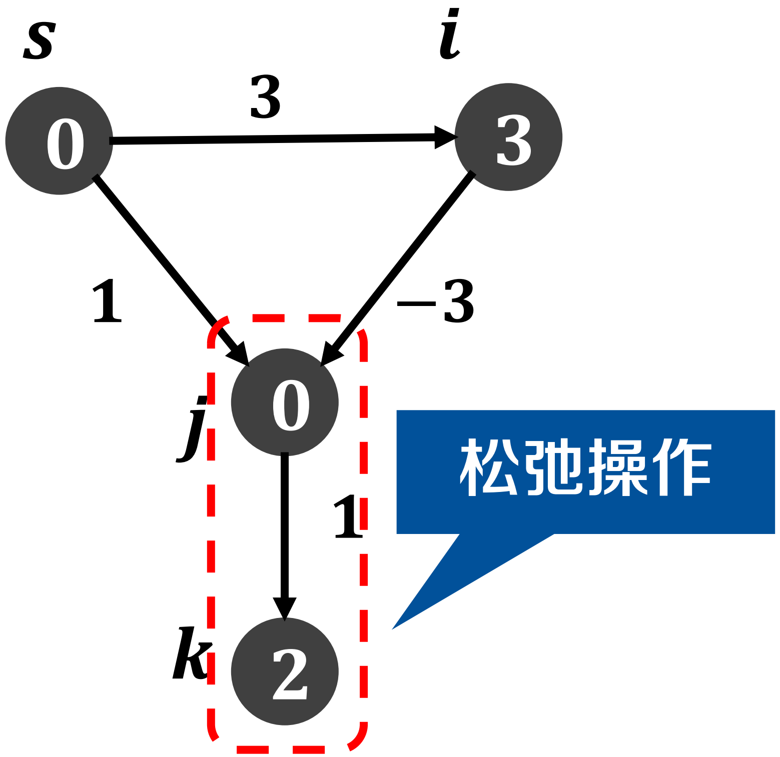
松弛失败

算法思想

- 存在负权边时，需要比Dijkstra算法更多次数的松弛操作



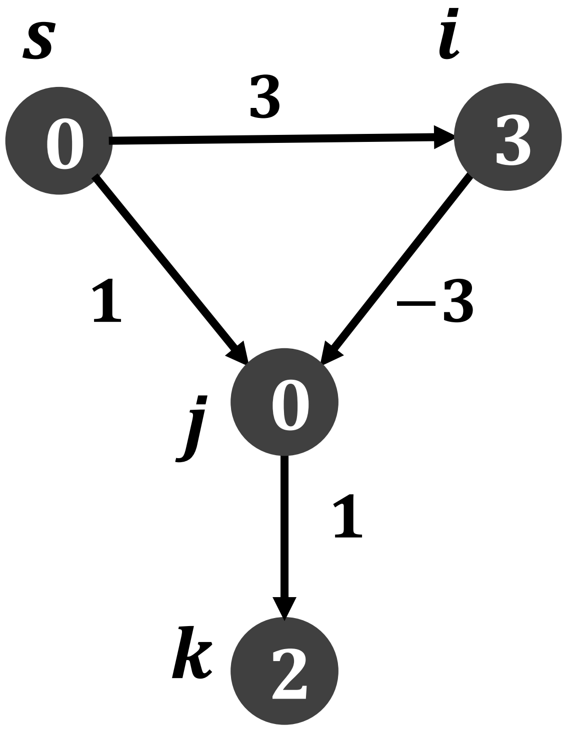
*Dijkstra*算法



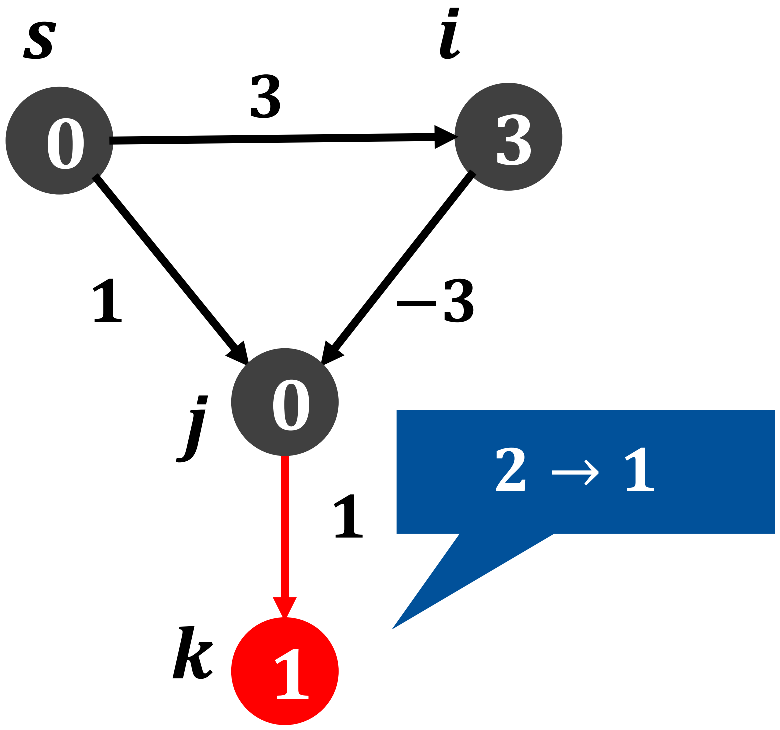
目标算法

算法思想

- 存在负权边时，需要比Dijkstra算法更多次数的松弛操作



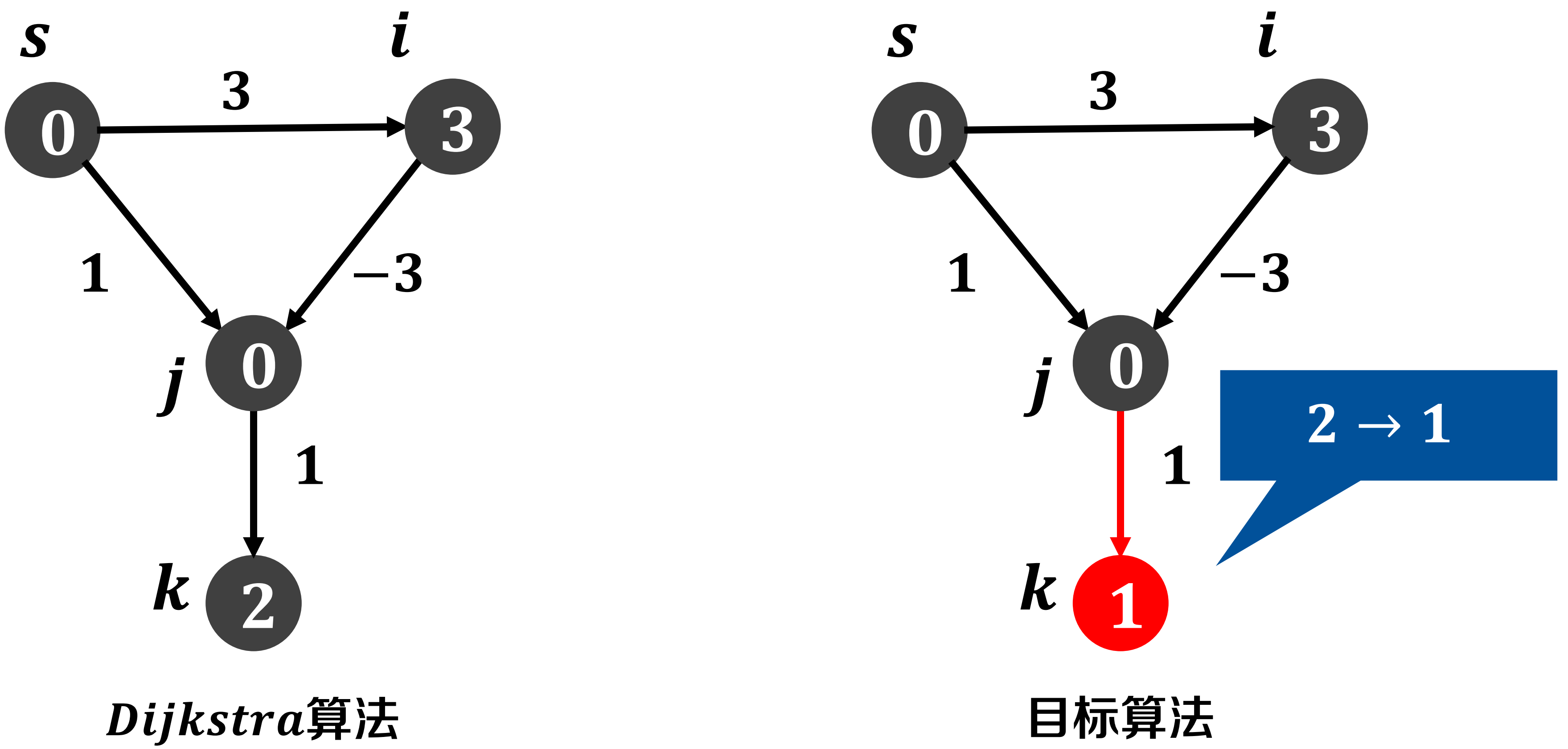
*Dijkstra*算法



目标算法

算法思想

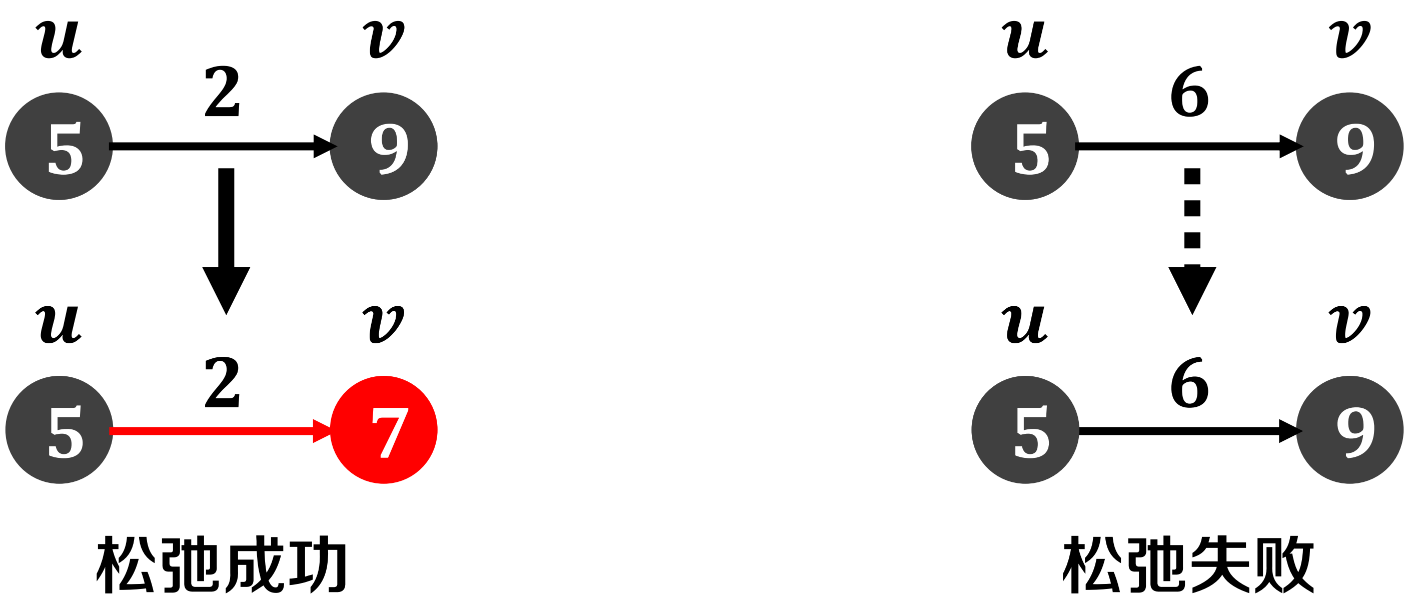
- 存在负权边时，需要比Dijkstra算法更多次数的松弛操作



问题：图中存在负权边时，如何利用松弛操作求解单源最短路？

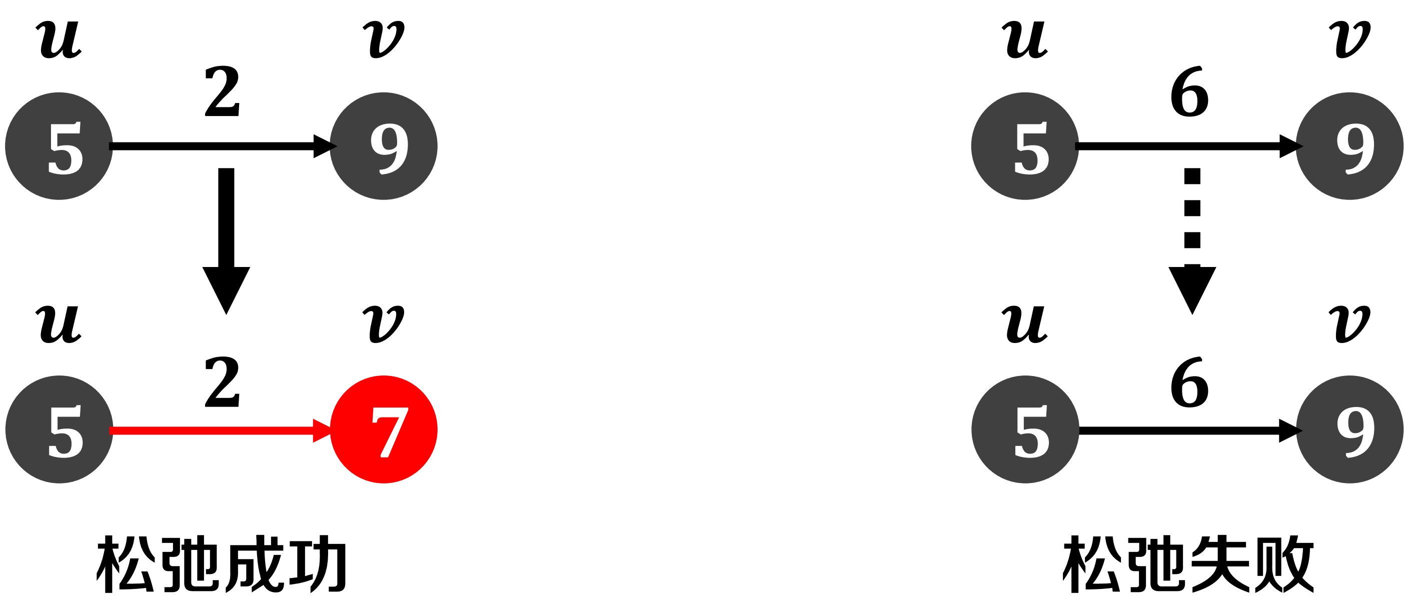
算法思想

- Bellman-Ford算法
  - 解决挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径？
    - 每轮对所有边进行松弛，持续迭代$|V|-1$轮



算法思想

- **Bellman-Ford算法**
  - 解决挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径？
    - 每轮对所有边进行松弛，持续迭代$|V|-1$轮
  - 解决挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
    - 若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环



提纲

问题背景

算法思想

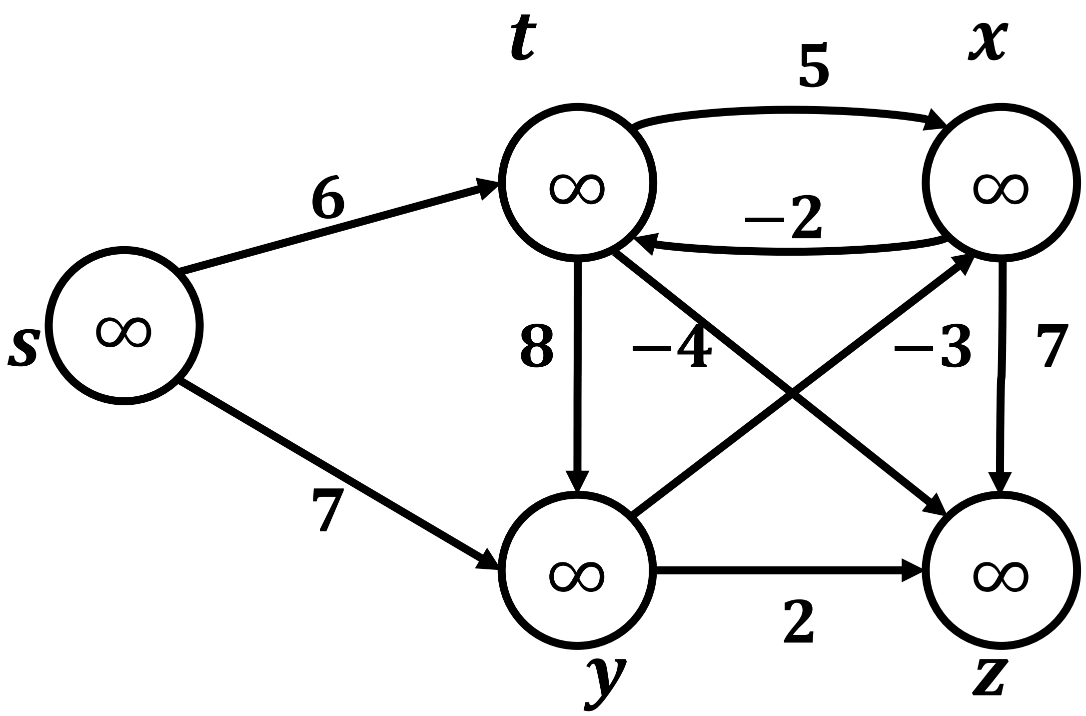
算法实例

算法分析

算法性质

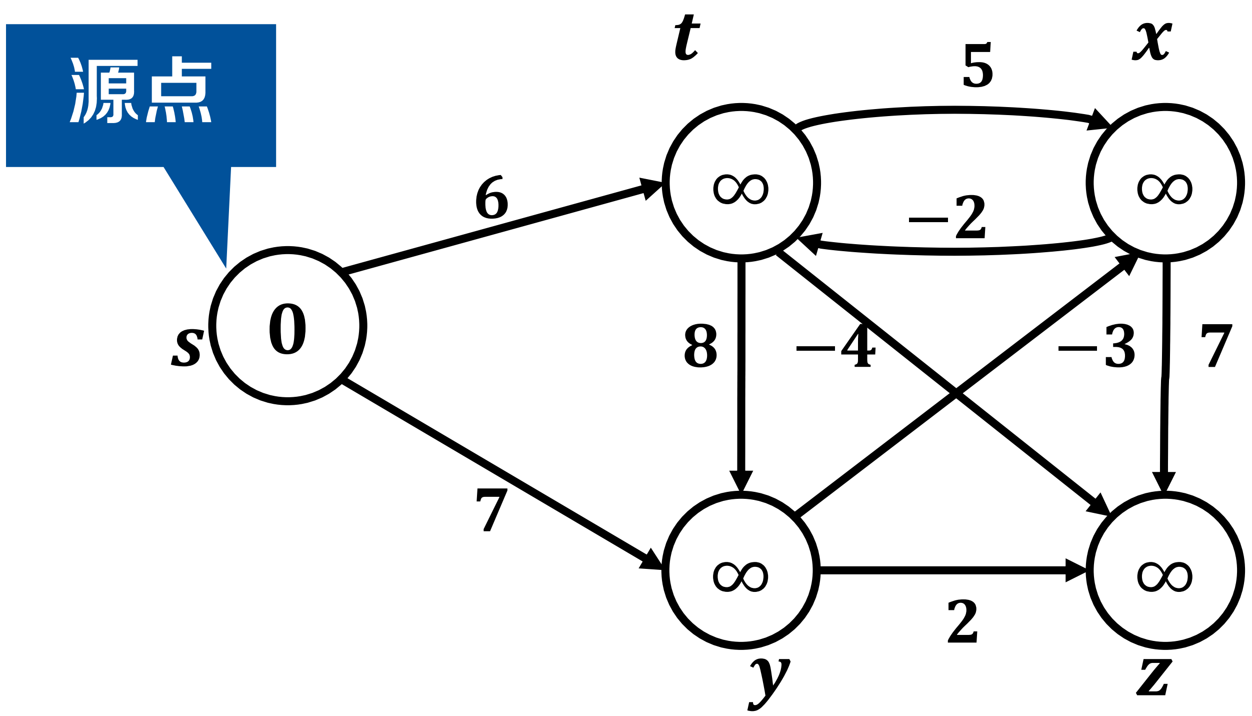
算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	N	N	N	N
$dist$	∞	∞	∞	∞	∞



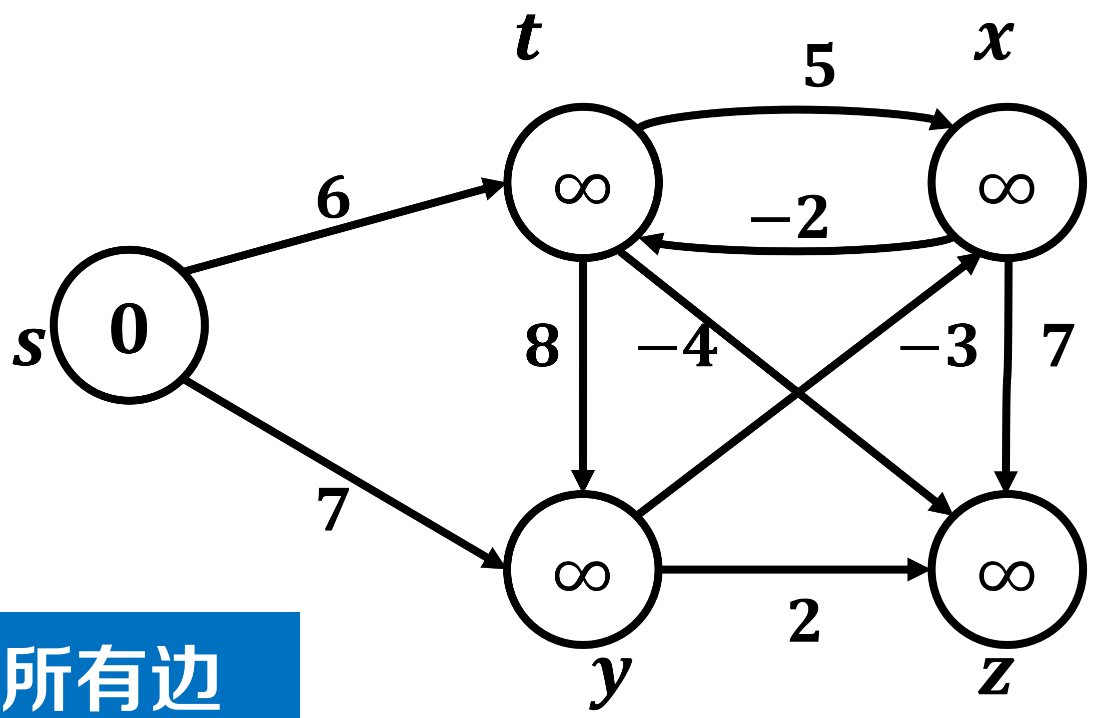
算法实例

V	s	t	x	y	z
pred	N	N	N	N	N
dist	0	∞	∞	∞	∞

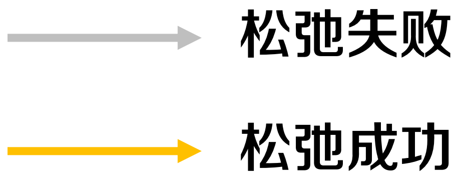


算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	N	N	N	N
$dist$	0	∞	∞	∞	∞



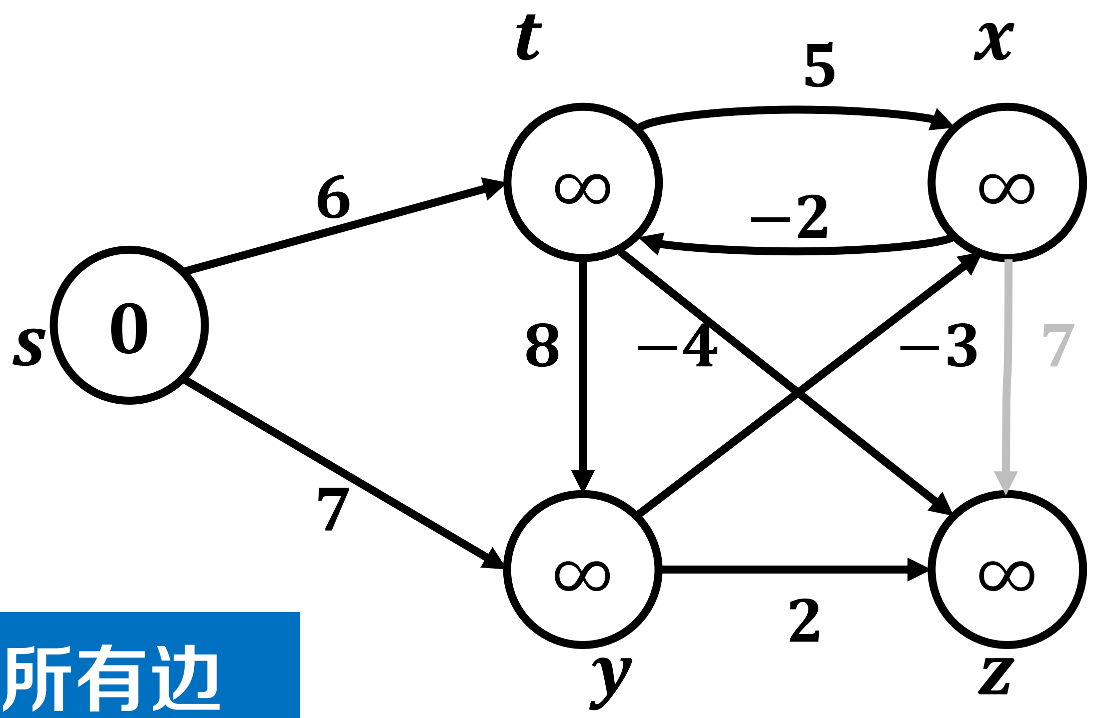
松弛顺序：$(x,z),(t,x),$ $(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),$ $(t,y),(s,t),(s,y)$



第1轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	N	N	N	N
$dist$	0	∞	∞	∞	∞



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

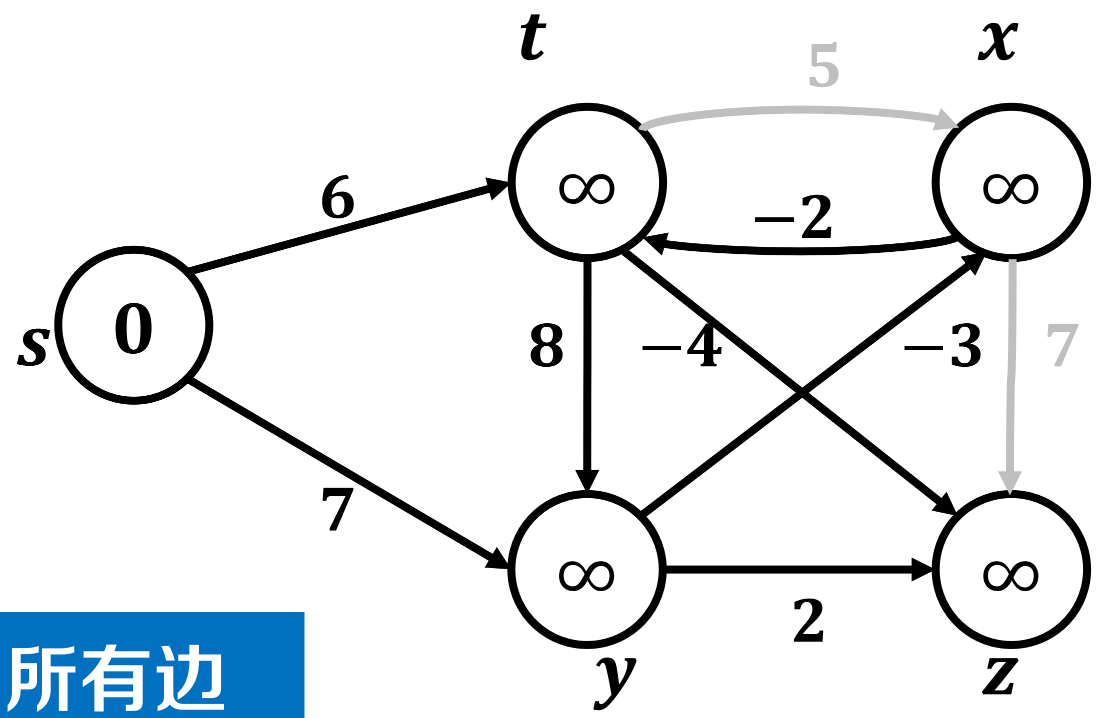
松弛失败

松弛成功

第1轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	N	N	N	N
$dist$	0	∞	∞	∞	∞



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

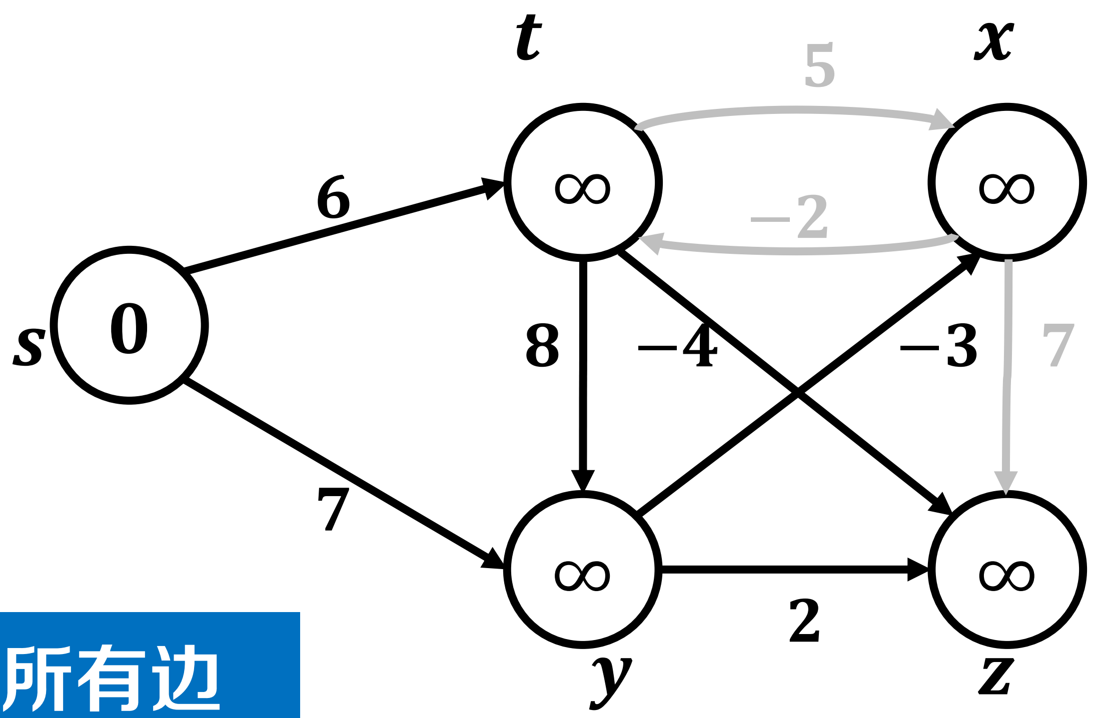
松弛失败

松弛成功

第1轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	N	N	N	N
$dist$	0	∞	∞	∞	∞



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

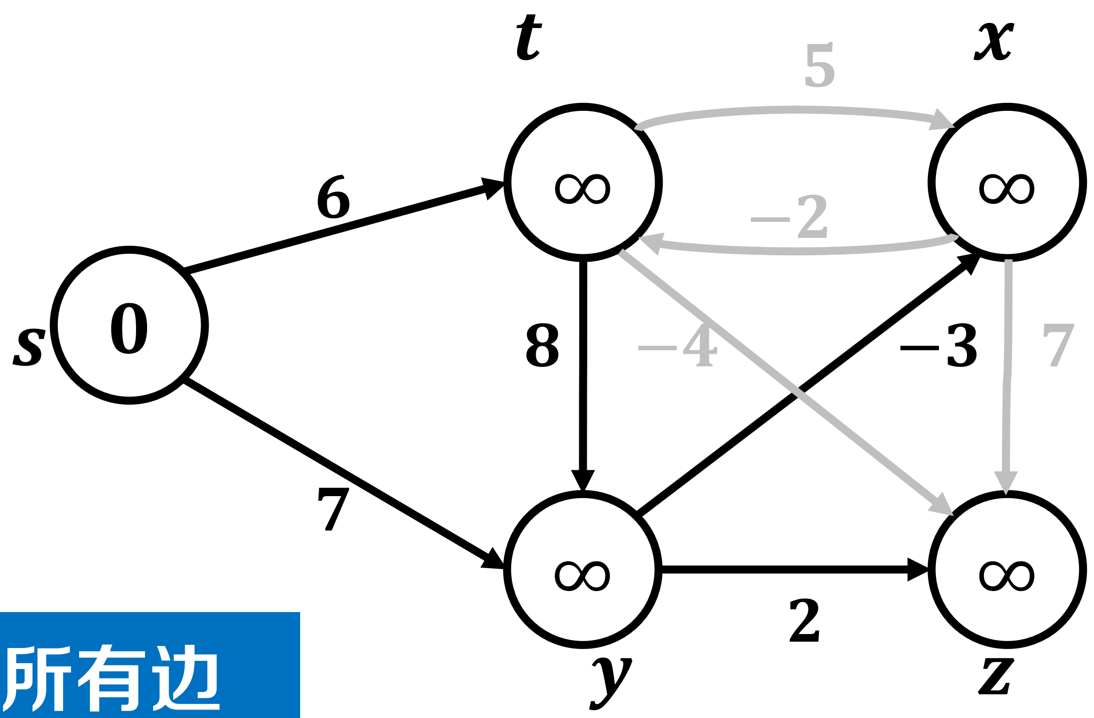
松弛失败

松弛成功

第1轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	N	N	N	N
$dist$	0	∞	∞	∞	∞



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

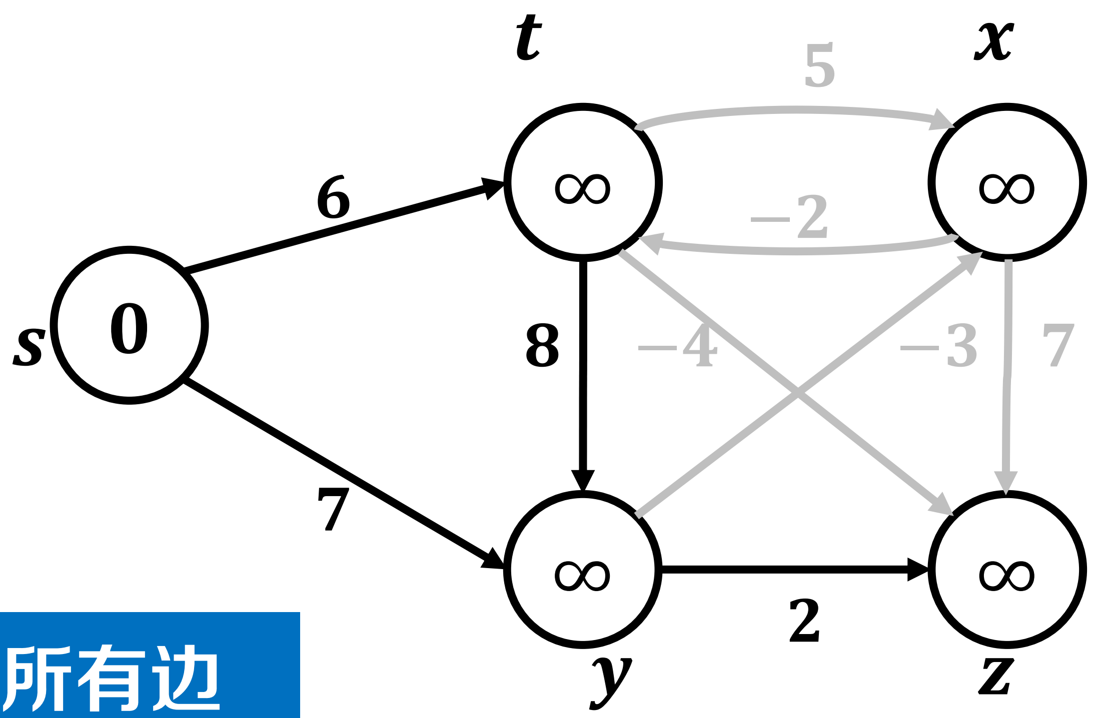
松弛失败

松弛成功

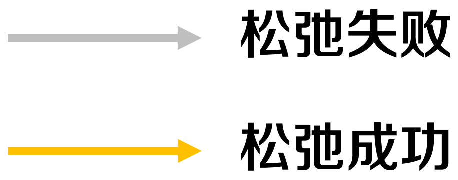
第1轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	N	N	N	N
$dist$	0	∞	∞	∞	∞



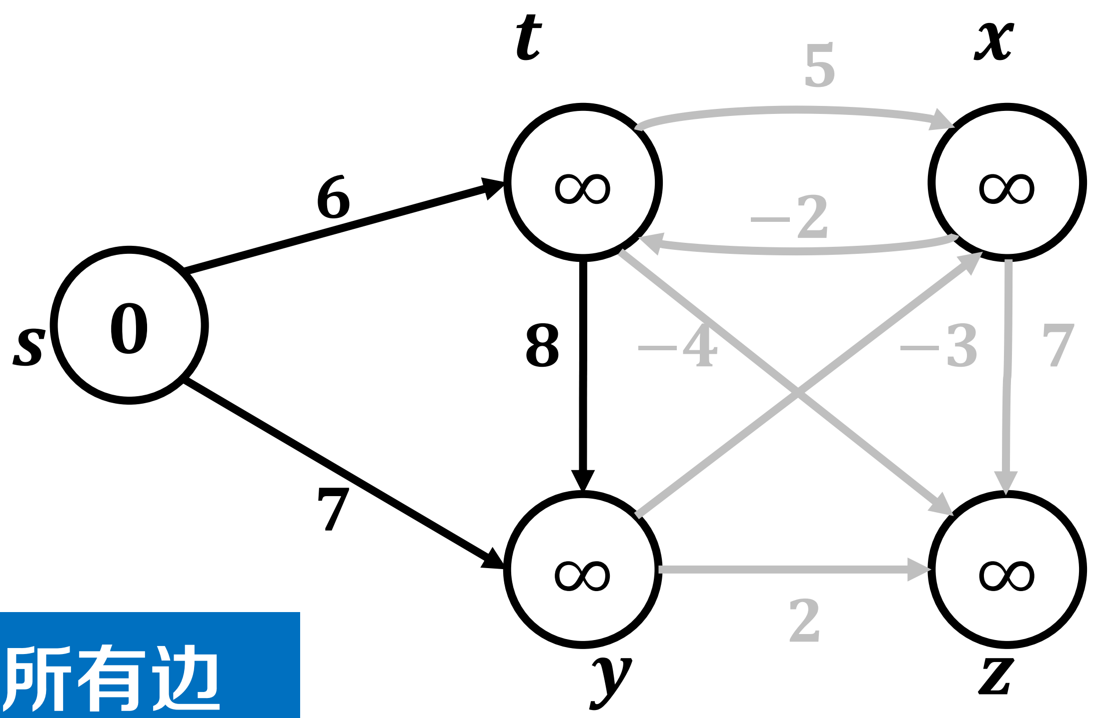
松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$



第1轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	N	N	N	N
$dist$	0	∞	∞	∞	∞



松弛顺序：$(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

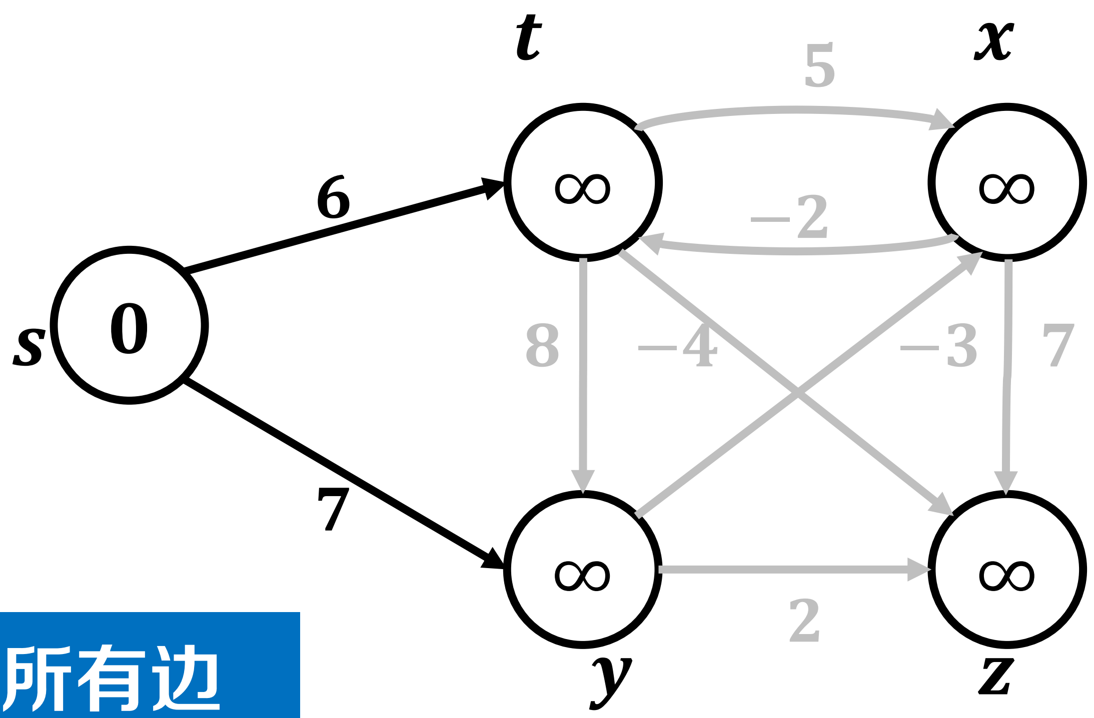
松弛失败

松弛成功

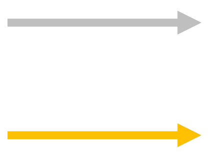
第1轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	N	N	N	N
$dist$	0	∞	∞	∞	∞



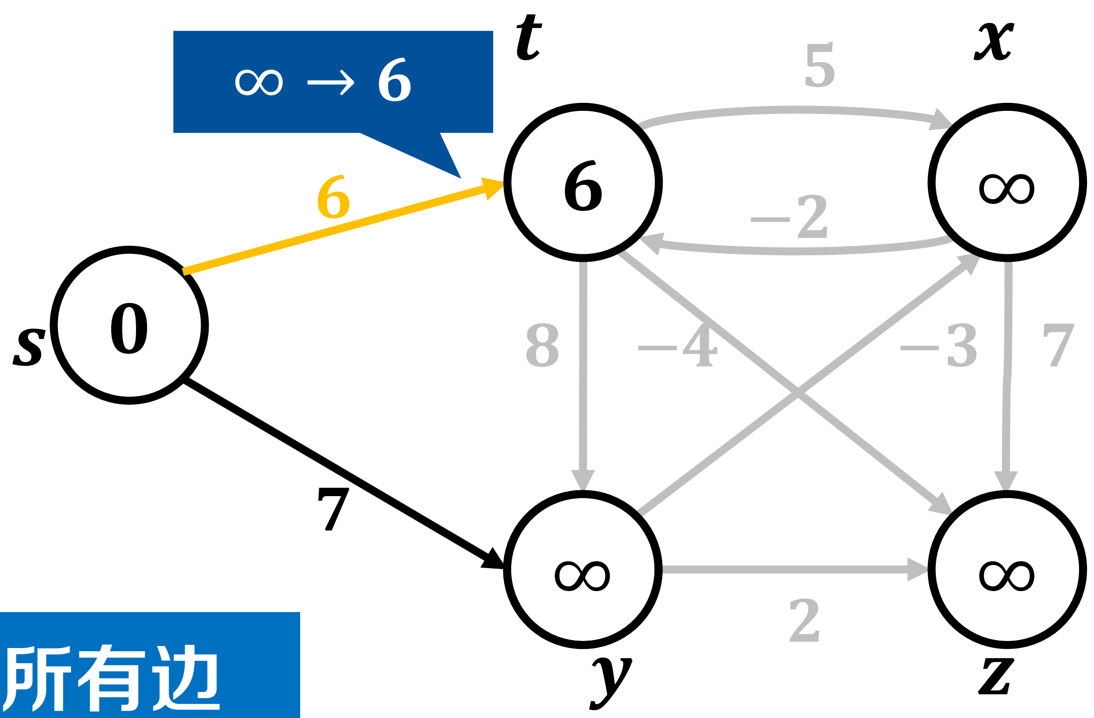
松弛顺序： $(x, z), (t, x), (x, t), (t, z), (y, x), (y, z), (t, y), (s, t), (s, y)$



第1轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	N	N	N
$dist$	0	6	∞	∞	∞



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

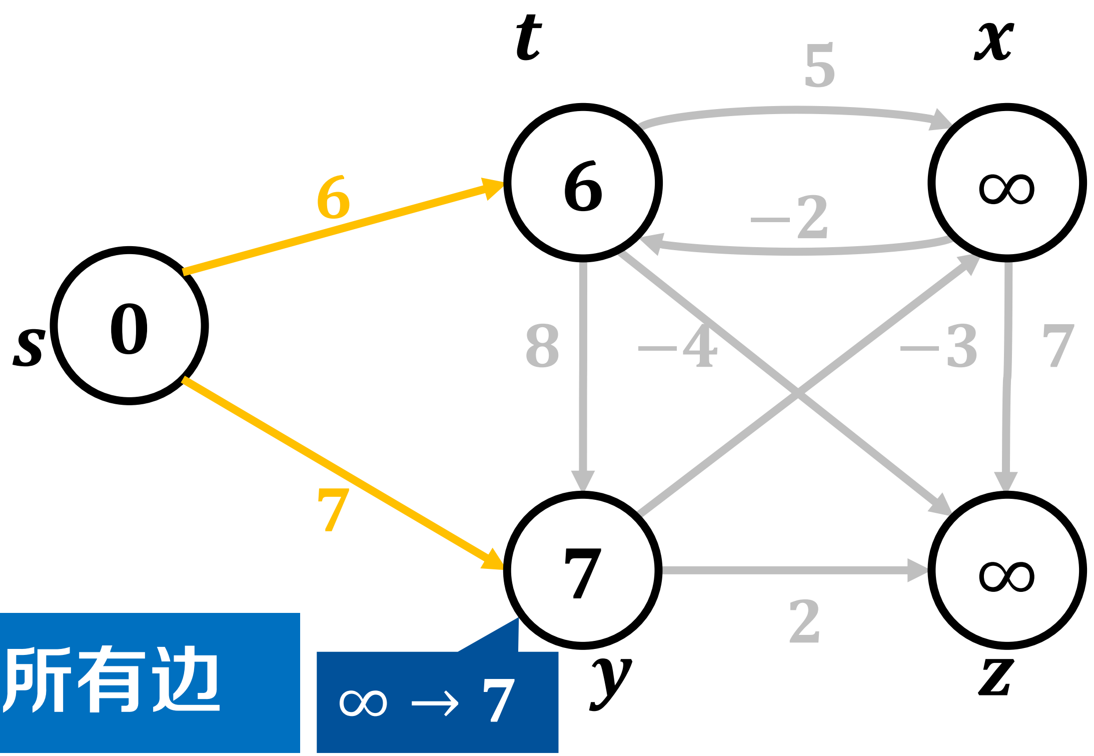
松弛失败

松弛成功

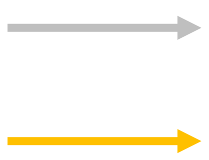
第1轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	N	s	N
$dist$	0	6	∞	7	∞



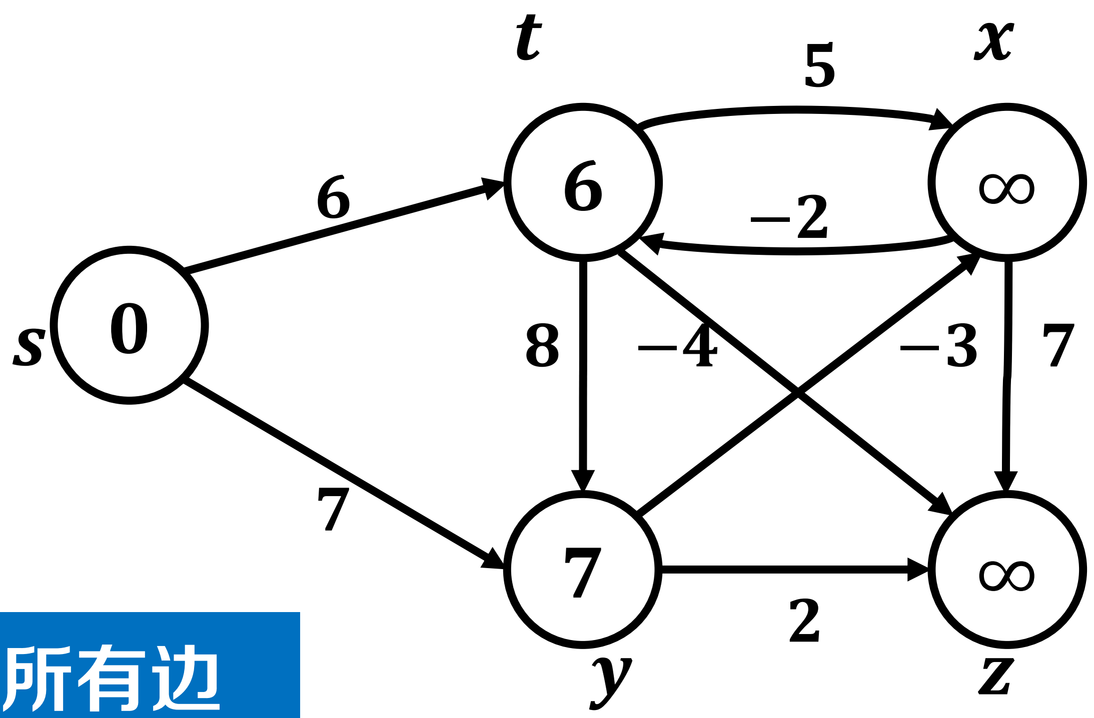
松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$



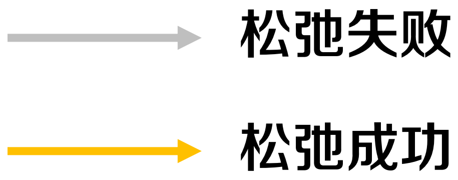
第1轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	N	s	N
$dist$	0	6	∞	7	∞



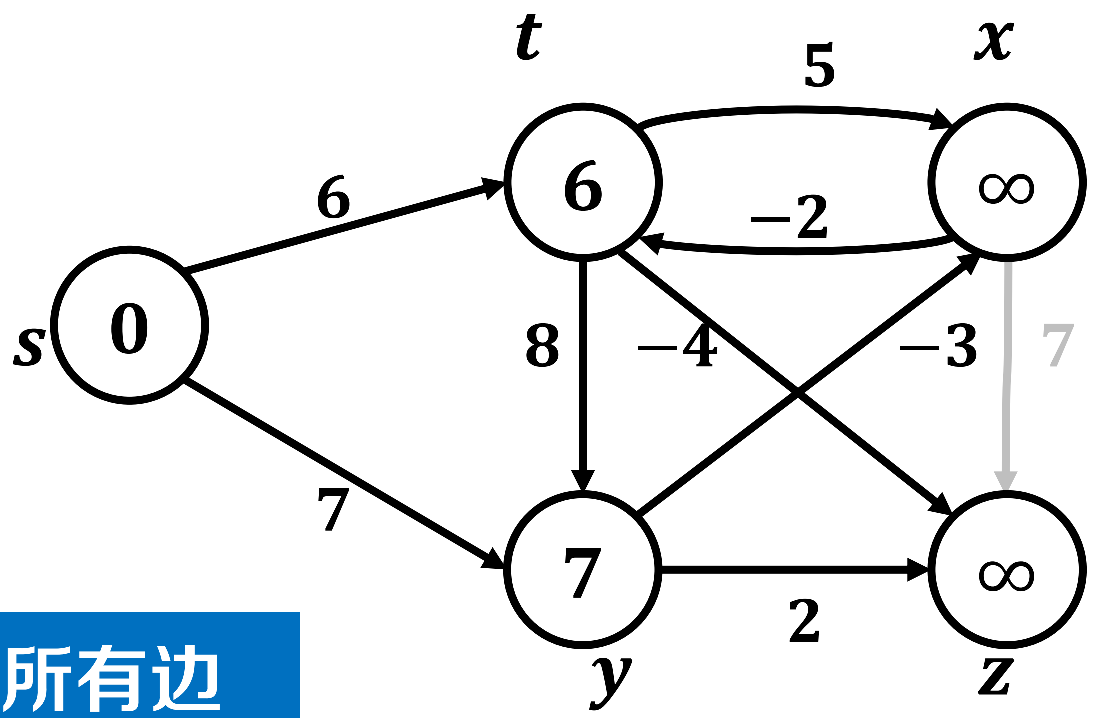
松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$



第2轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	N	s	N
$dist$	0	6	∞	7	∞



松弛顺序： $(x, z), (t, x), (x, t), (t, z), (y, x), (y, z), (t, y), (s, t), (s, y)$

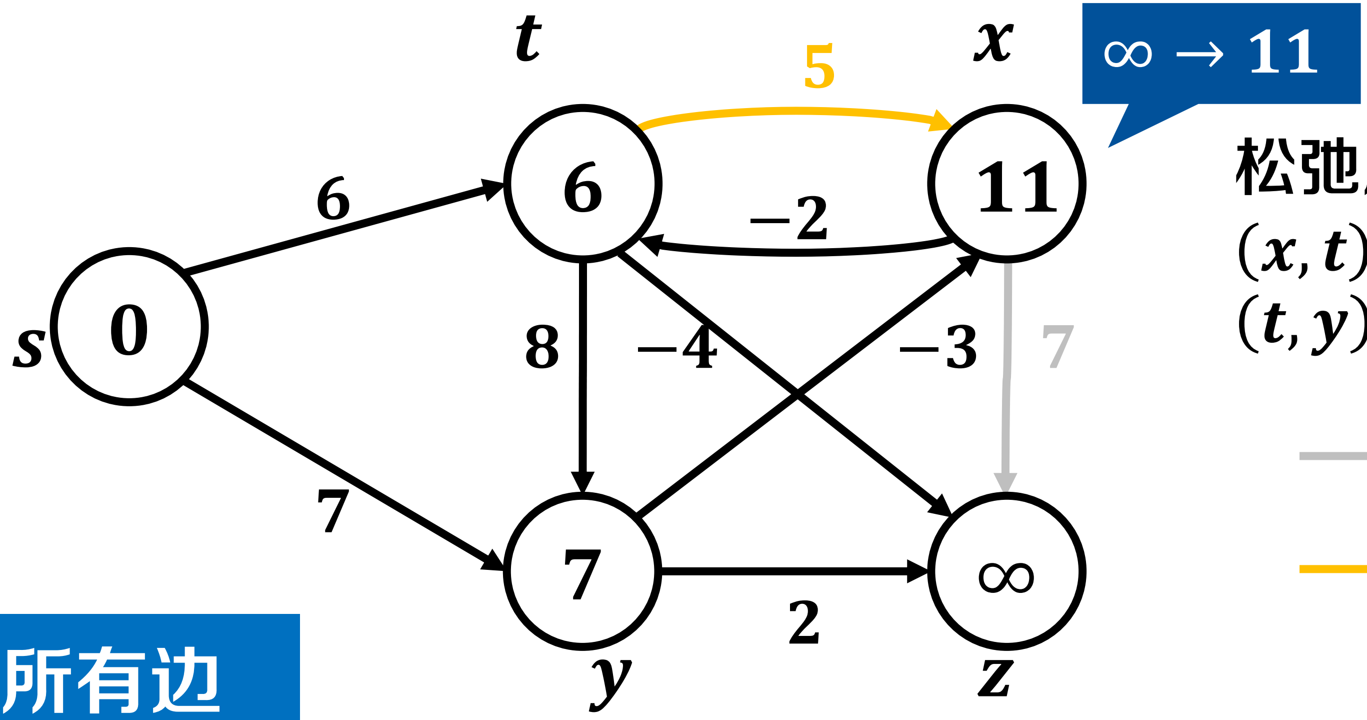
松弛失败

松弛成功

第2轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	t	s	N
$dist$	0	6	11	7	∞



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

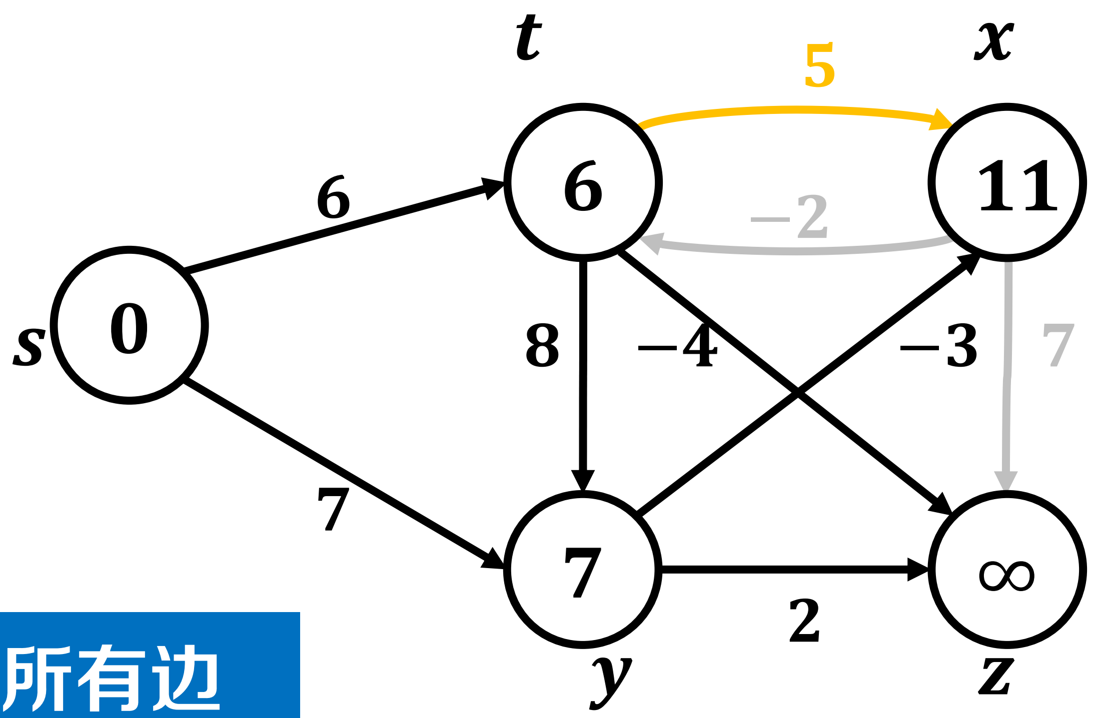
松弛失败

松弛成功

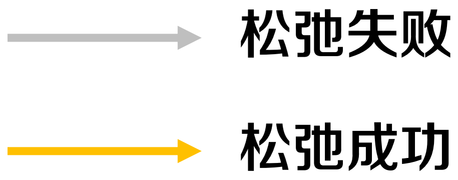
第2轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	t	s	N
$dist$	0	6	11	7	∞



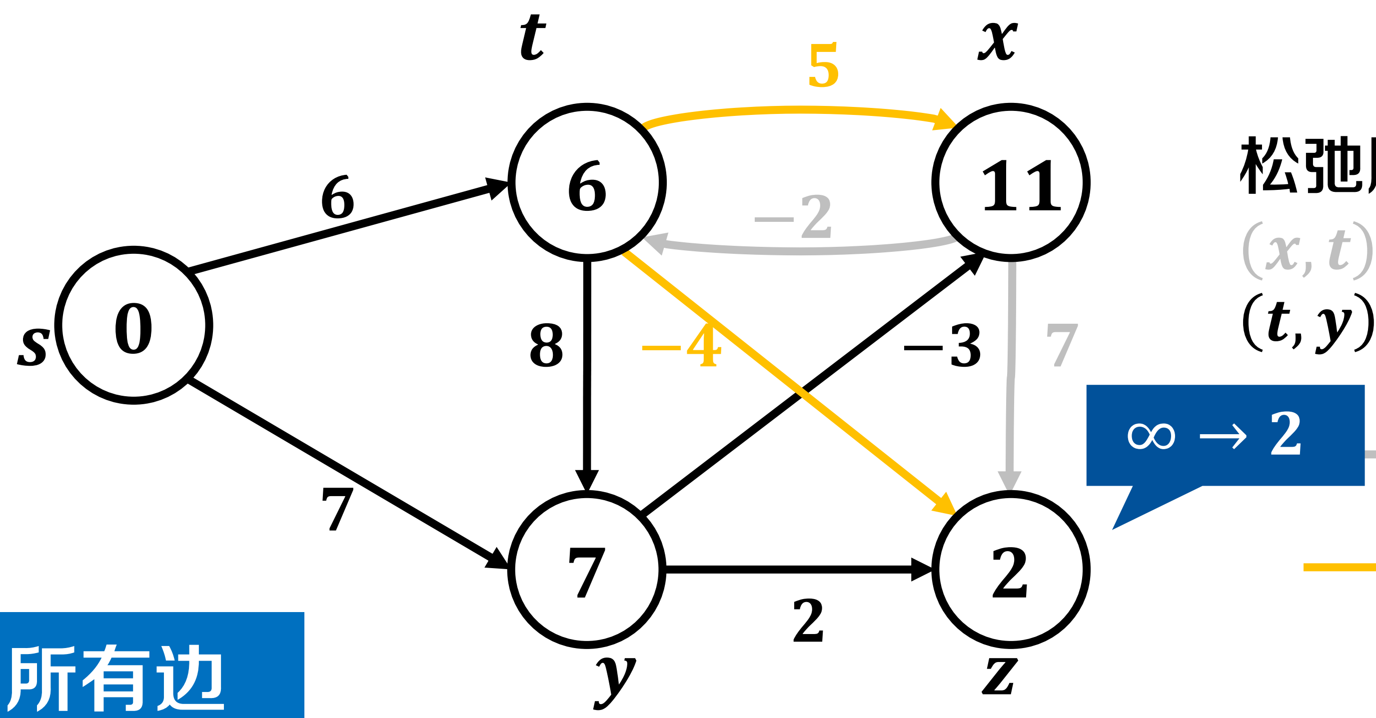
松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$



第2轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	t	s	t
$dist$	0	6	11	7	2



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

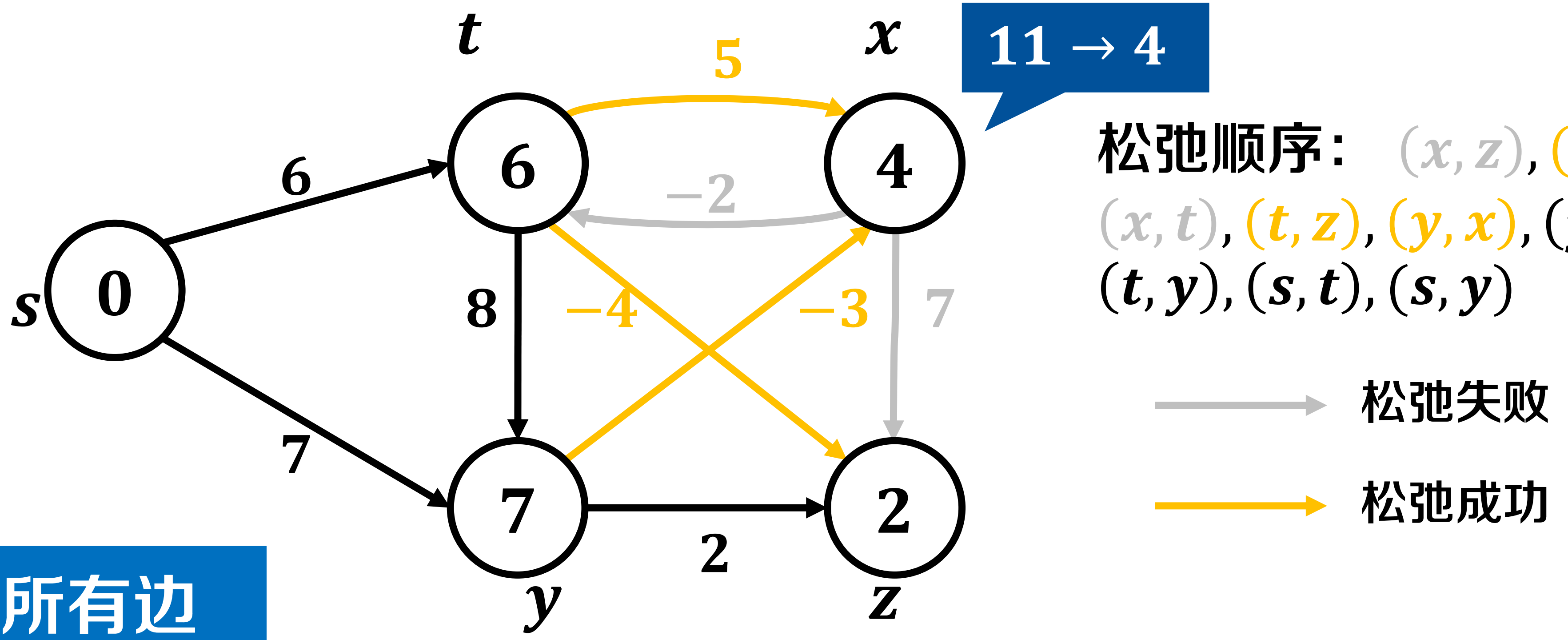
松弛失败

松弛成功

第2轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	y	s	t
$dist$	0	6	4	7	2

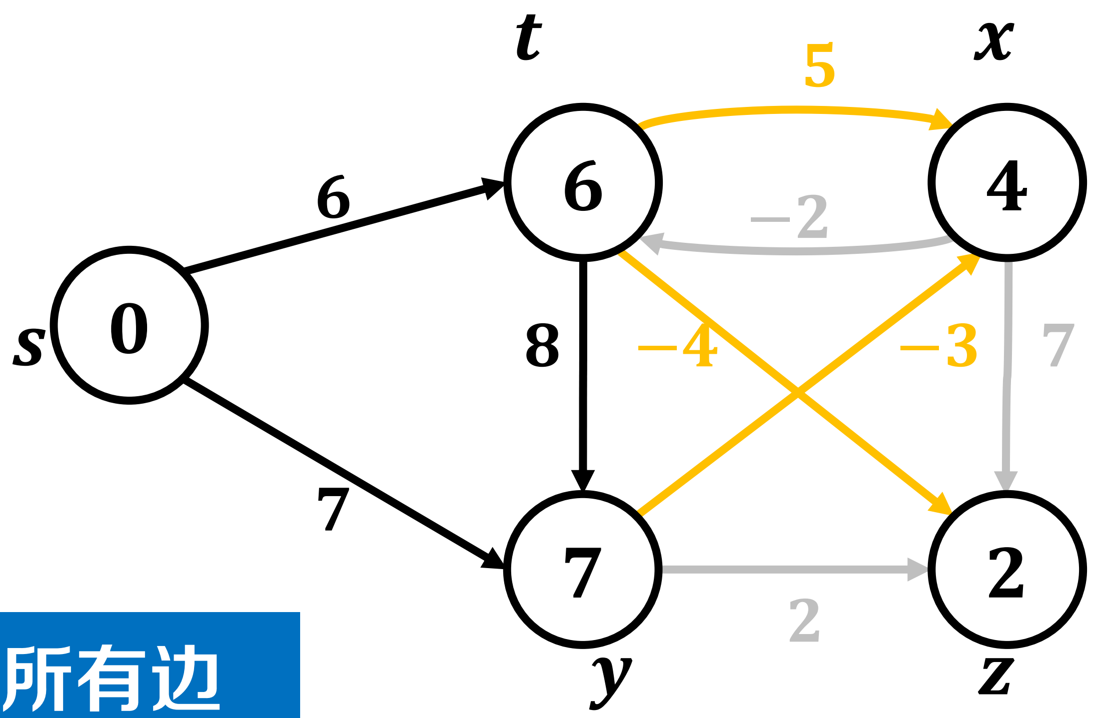


松弛顺序：$(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

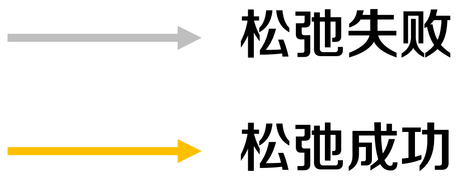
第2轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	y	s	t
$dist$	0	6	4	7	2



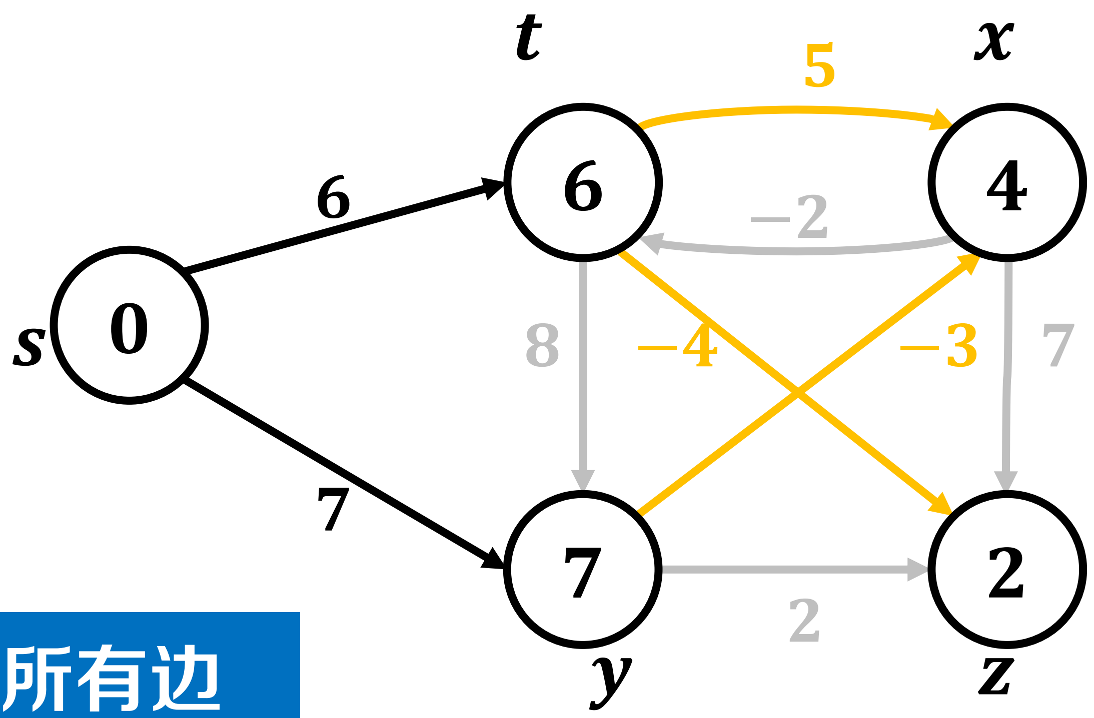
松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$



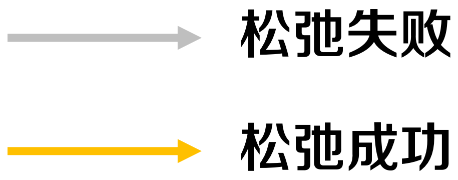
第2轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	y	s	t
$dist$	0	6	4	7	2



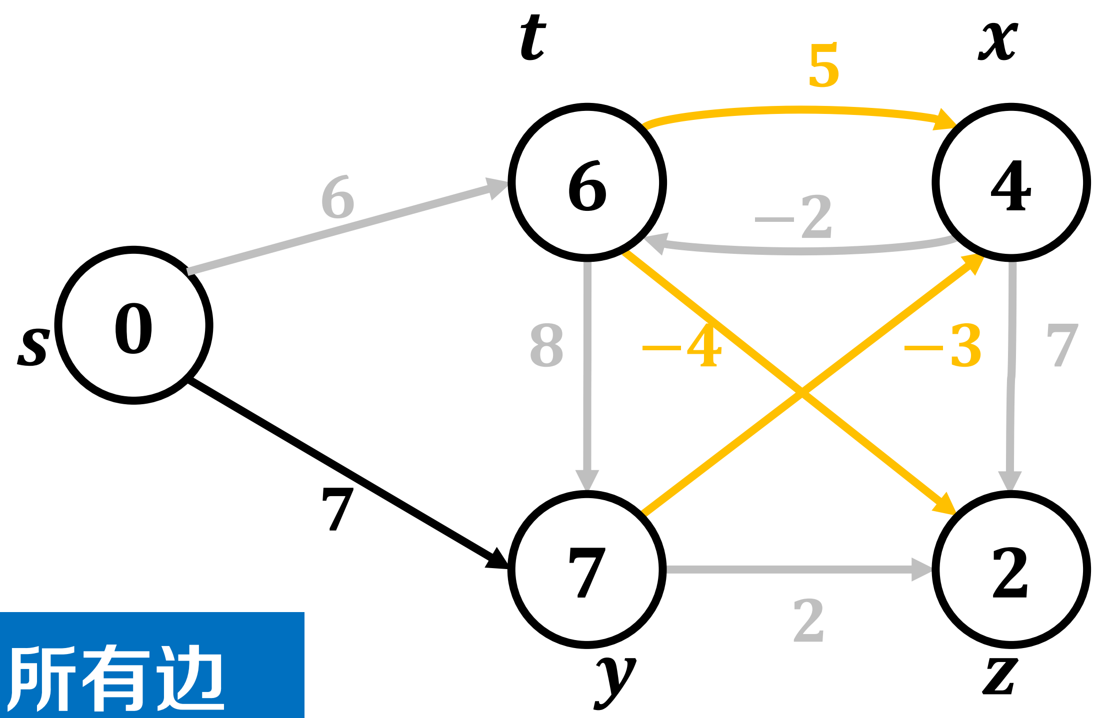
松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$



第2轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	y	s	t
$dist$	0	6	4	7	2



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

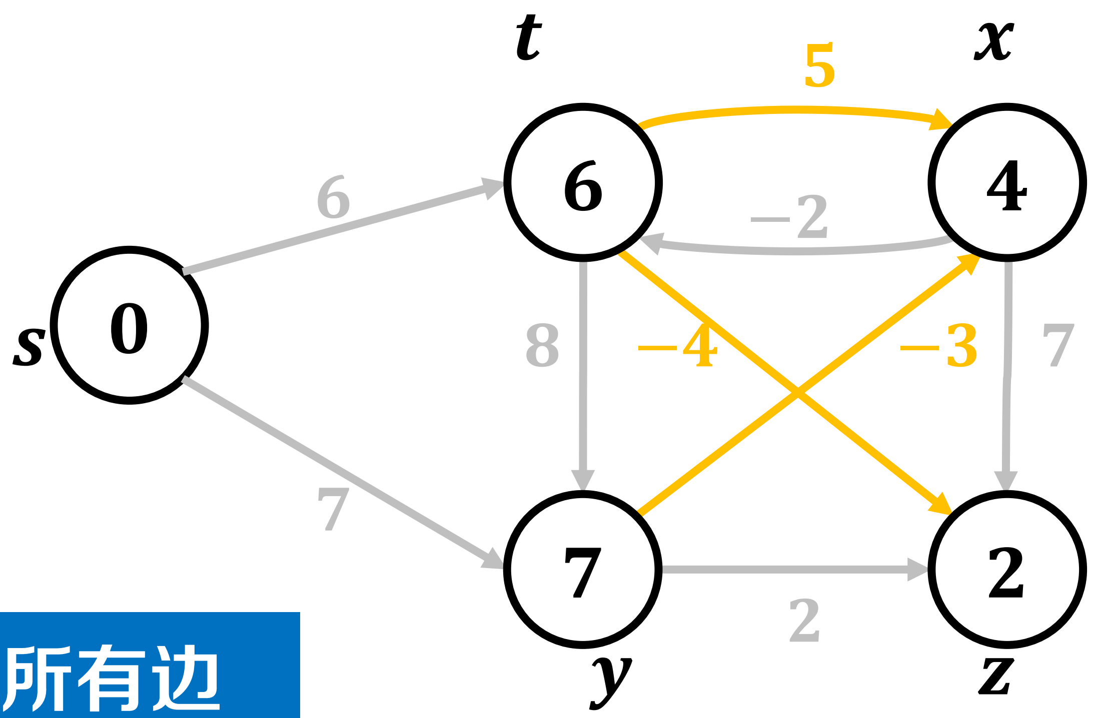
松弛失败

松弛成功

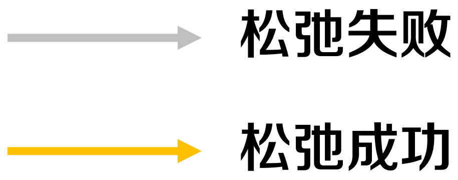
第2轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	y	s	t
$dist$	0	6	4	7	2



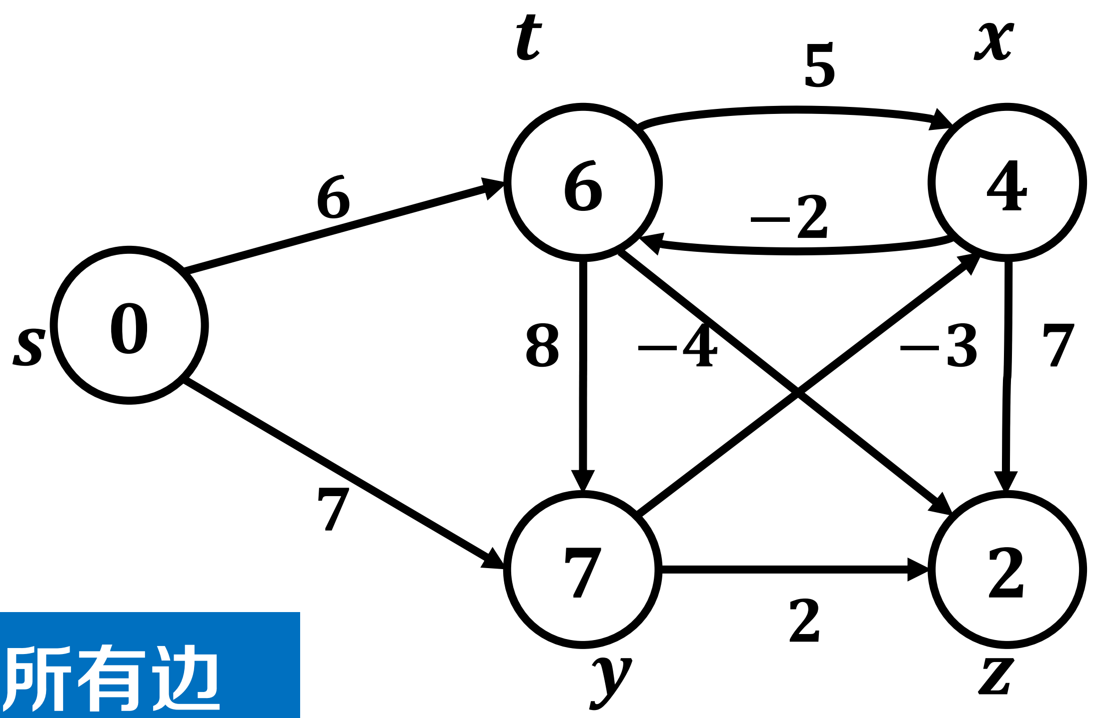
松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$



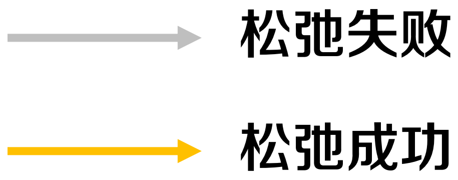
第2轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	y	s	t
$dist$	0	6	4	7	2



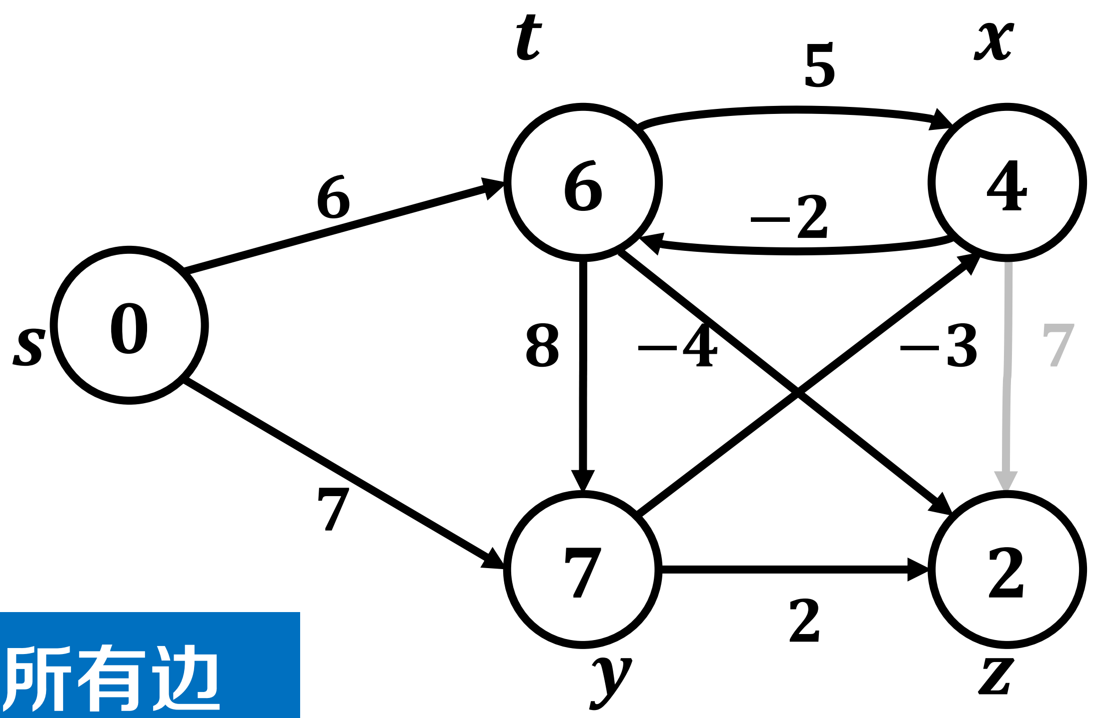
松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$



第3轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	y	s	t
$dist$	0	6	4	7	2



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

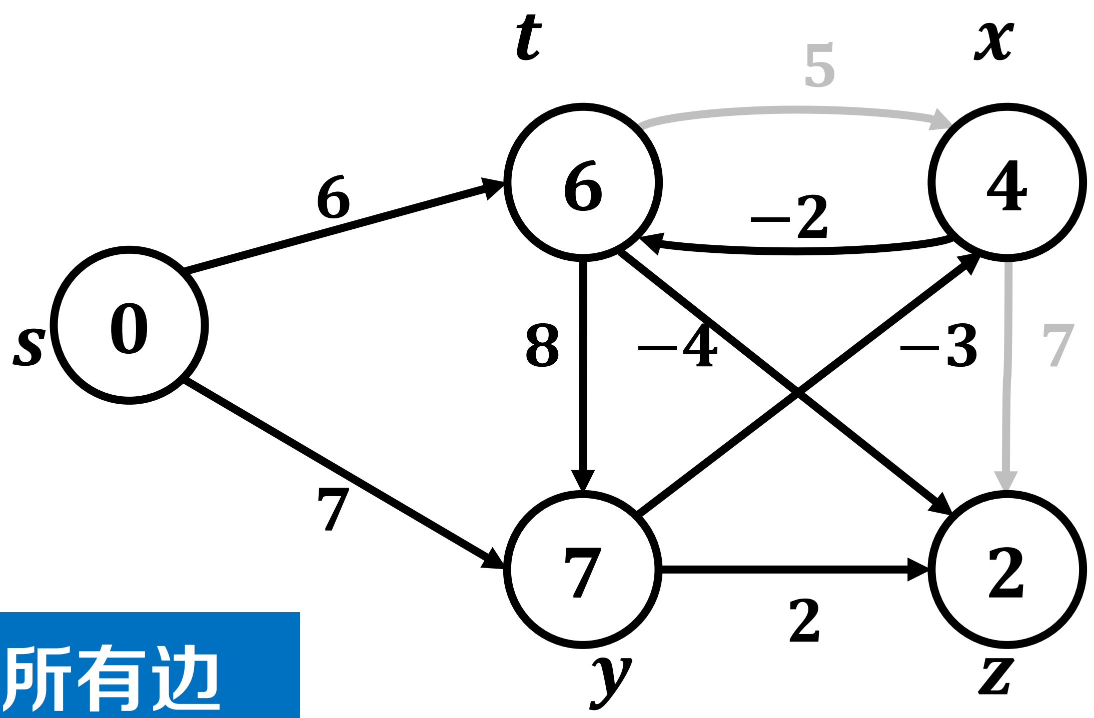
松弛失败

松弛成功

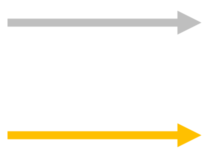
第3轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	s	y	s	t
$dist$	0	6	4	7	2



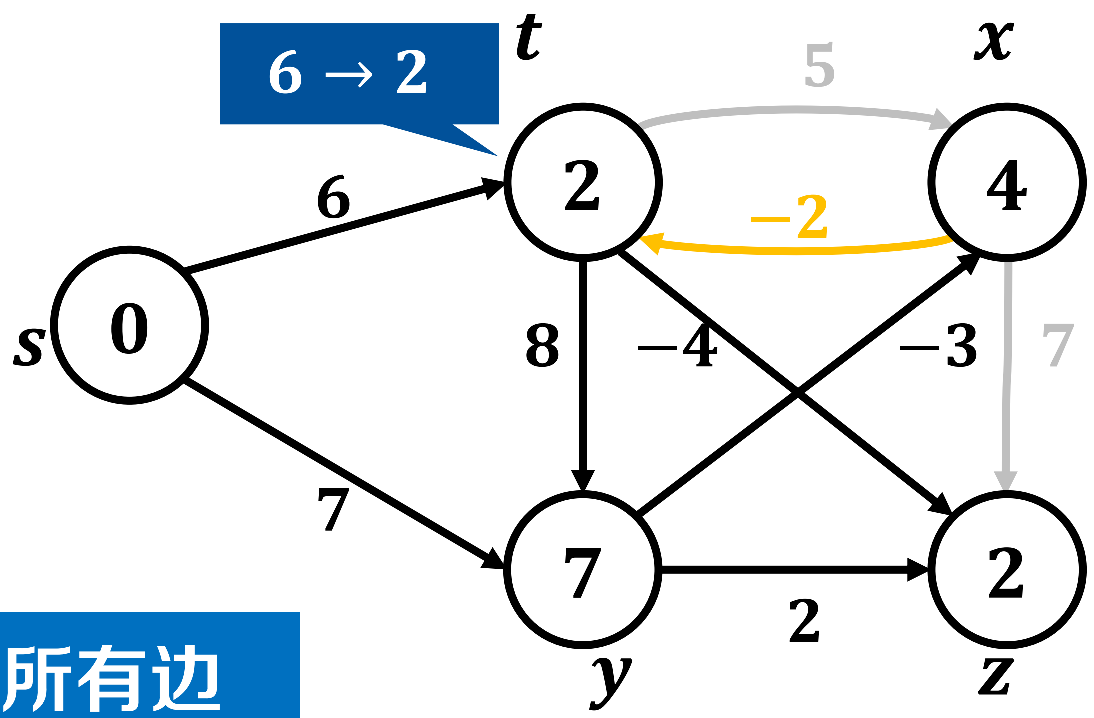
松弛顺序：$(x,z),(t,x),$
$(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),$
$(t,y),(s,t),(s,y)$



第3轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	x	y	s	t
$dist$	0	2	4	7	2



松弛顺序：$(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

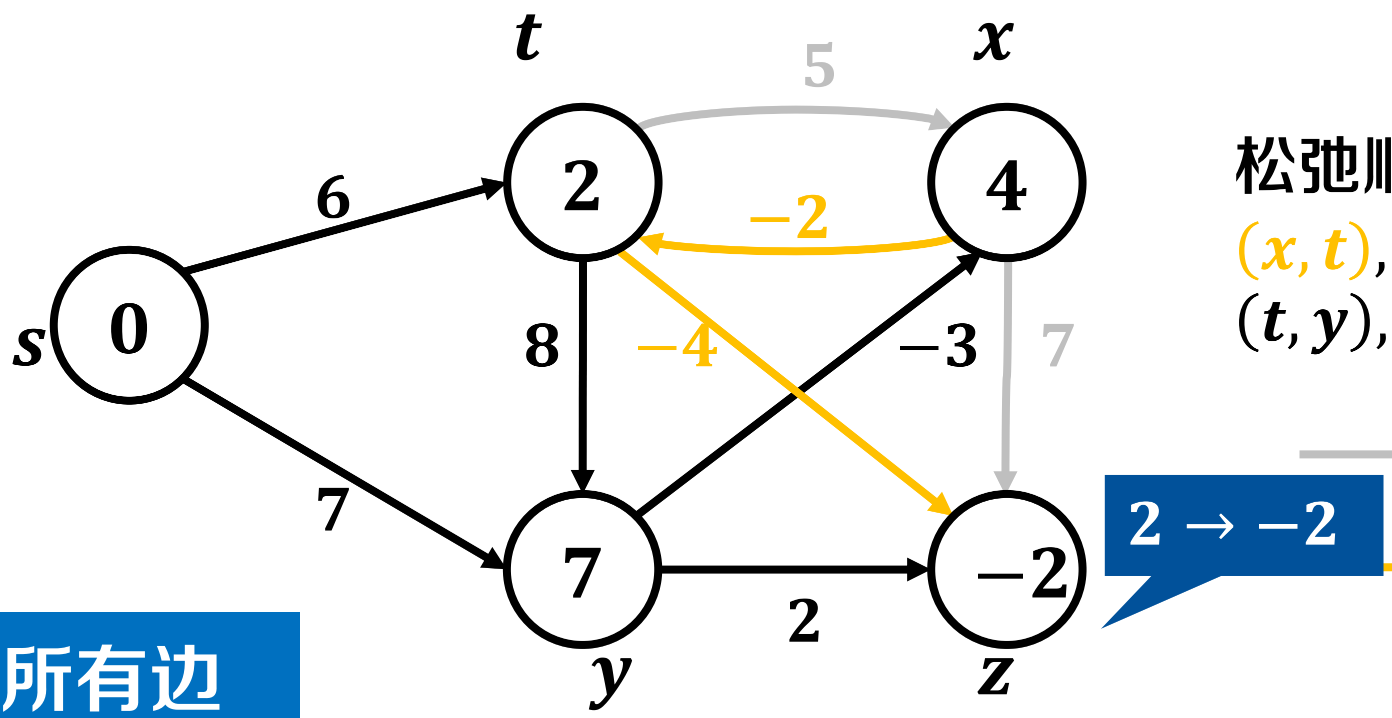
松弛失败

松弛成功

第3轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	x	y	s	t
$dist$	0	2	4	7	-2



松弛顺序：$(x,z),(t,x),$
$(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),$
$(t,y),(s,t),(s,y)$

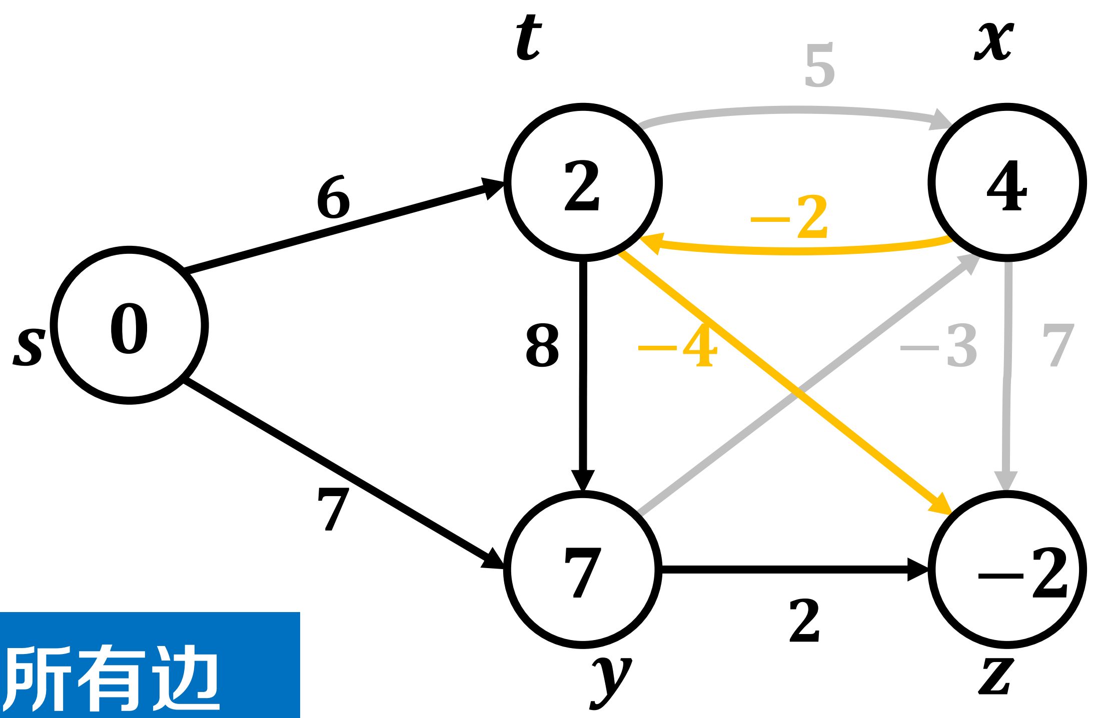
松弛失败

松弛成功

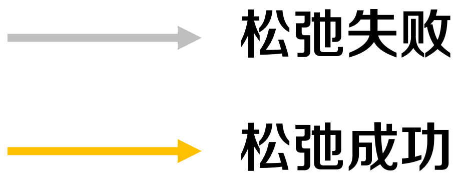
第3轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	x	y	s	t
$dist$	0	2	4	7	-2



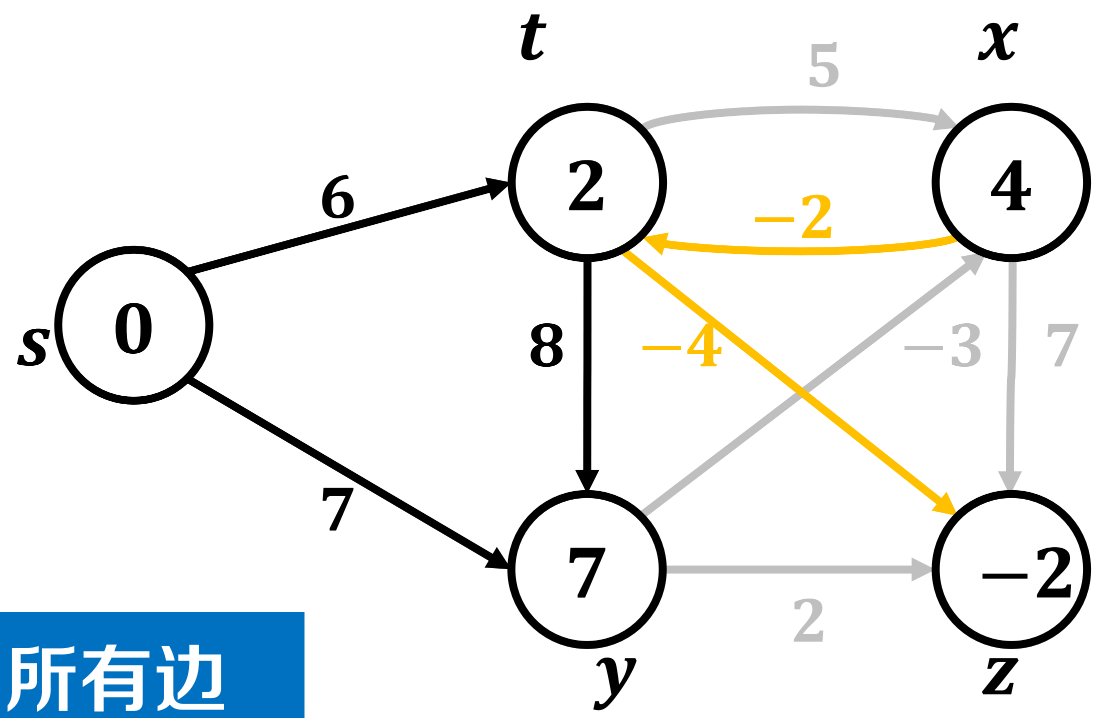
松弛顺序： $(x,z),(t,x),$ $(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),$ $(t,y),(s,t),(s,y)$



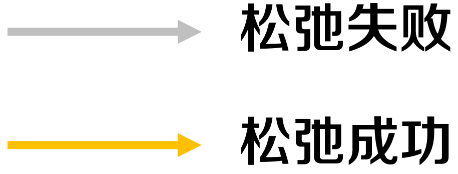
第3轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	x	y	s	t
$dist$	0	2	4	7	-2



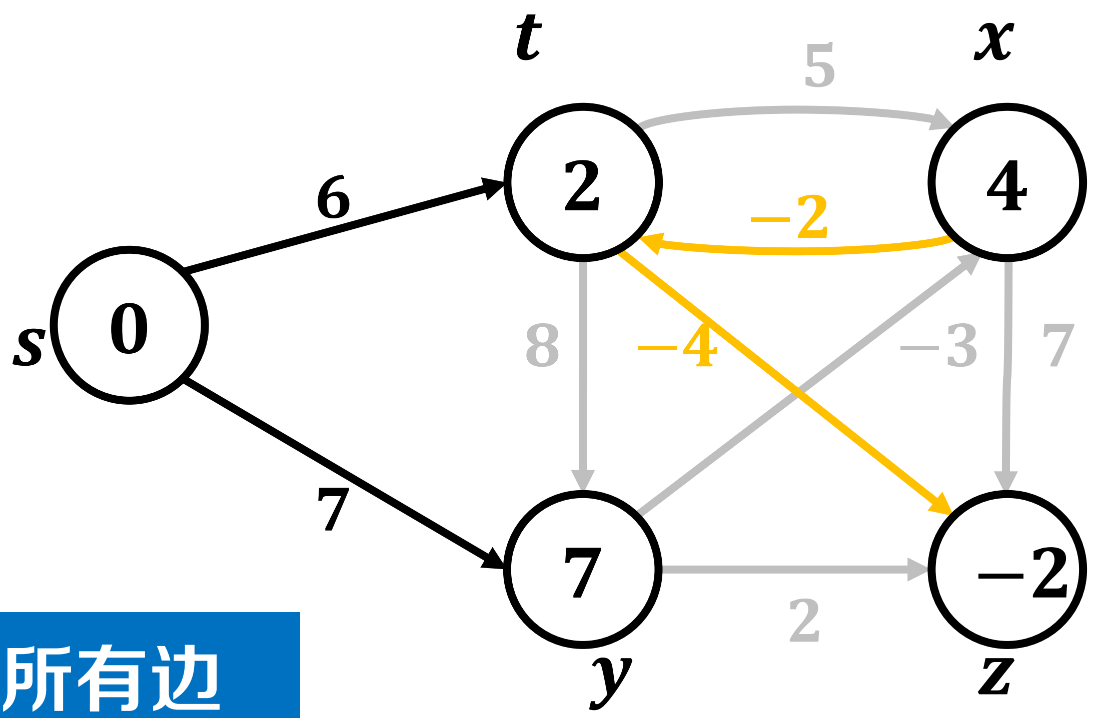
松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$



第3轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	x	y	s	t
$dist$	0	2	4	7	-2



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

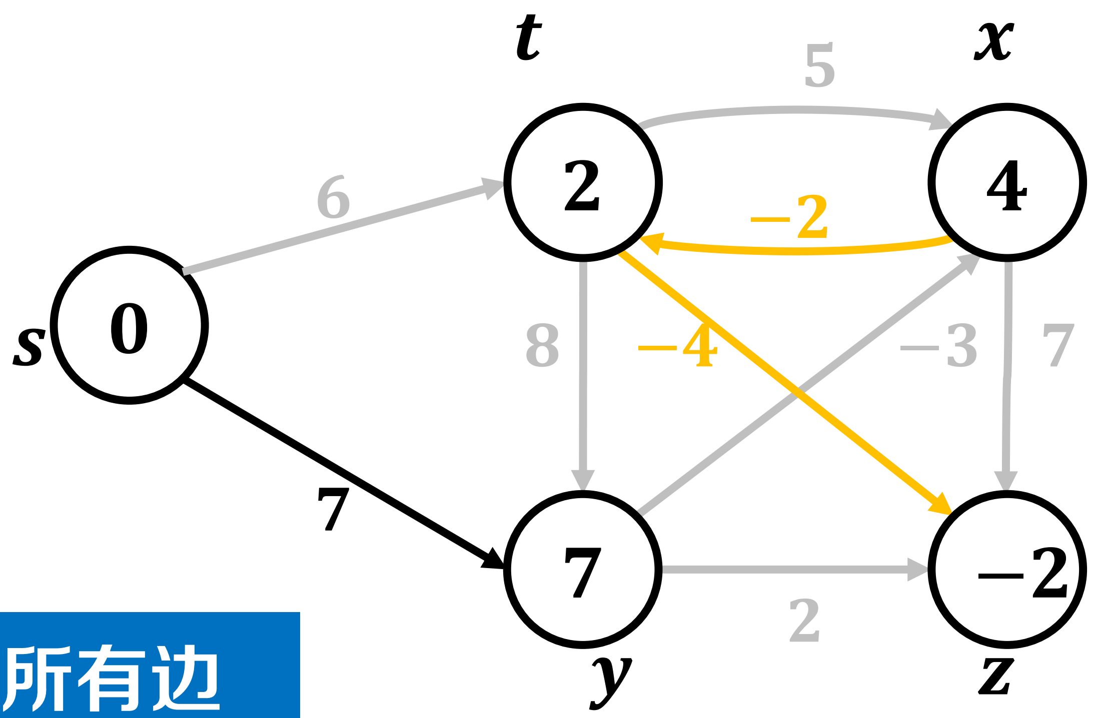
松弛失败

松弛成功

第3轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	x	y	s	t
$dist$	0	2	4	7	-2



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

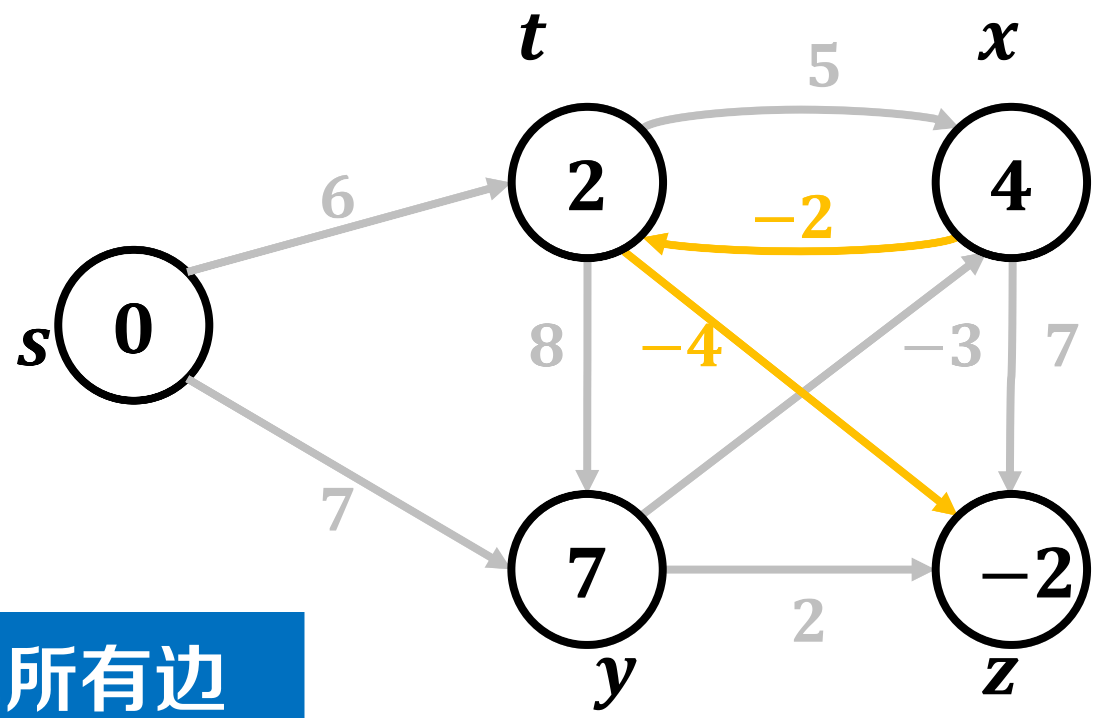
松弛失败

松弛成功

第3轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	x	y	s	t
$dist$	0	2	4	7	-2



松弛顺序：$(x,z),(t,x),$
$(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),$
$(t,y),(s,t),(s,y)$

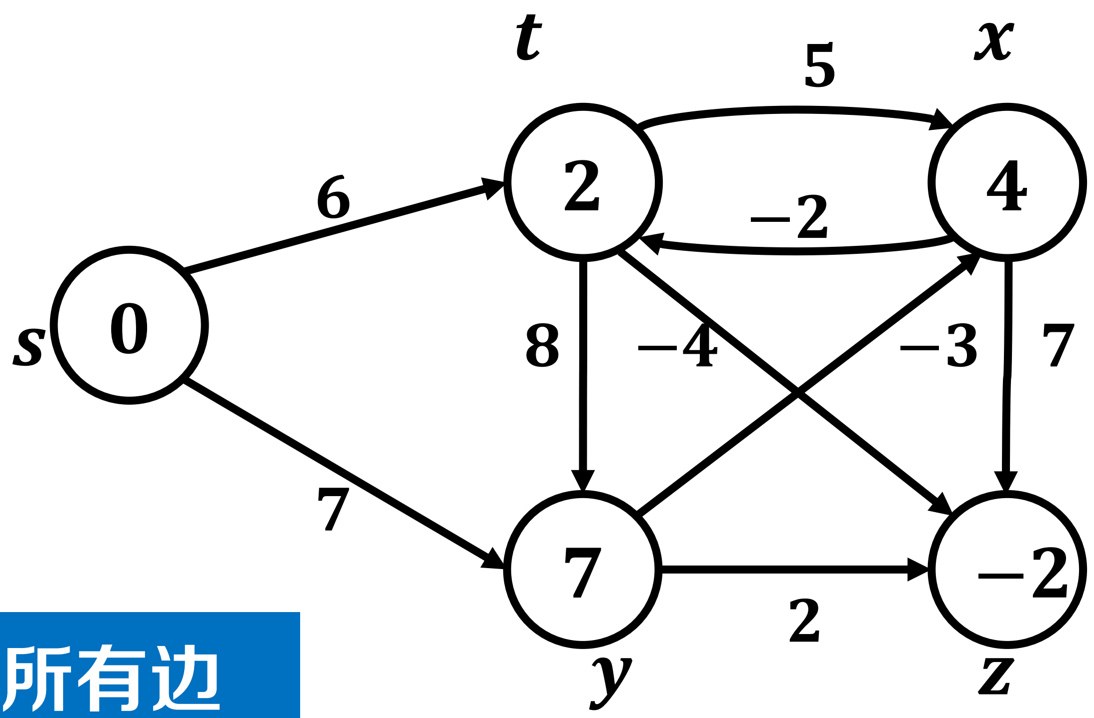
松弛失败

松弛成功

第3轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	x	y	s	t
$dist$	0	2	4	7	-2



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$

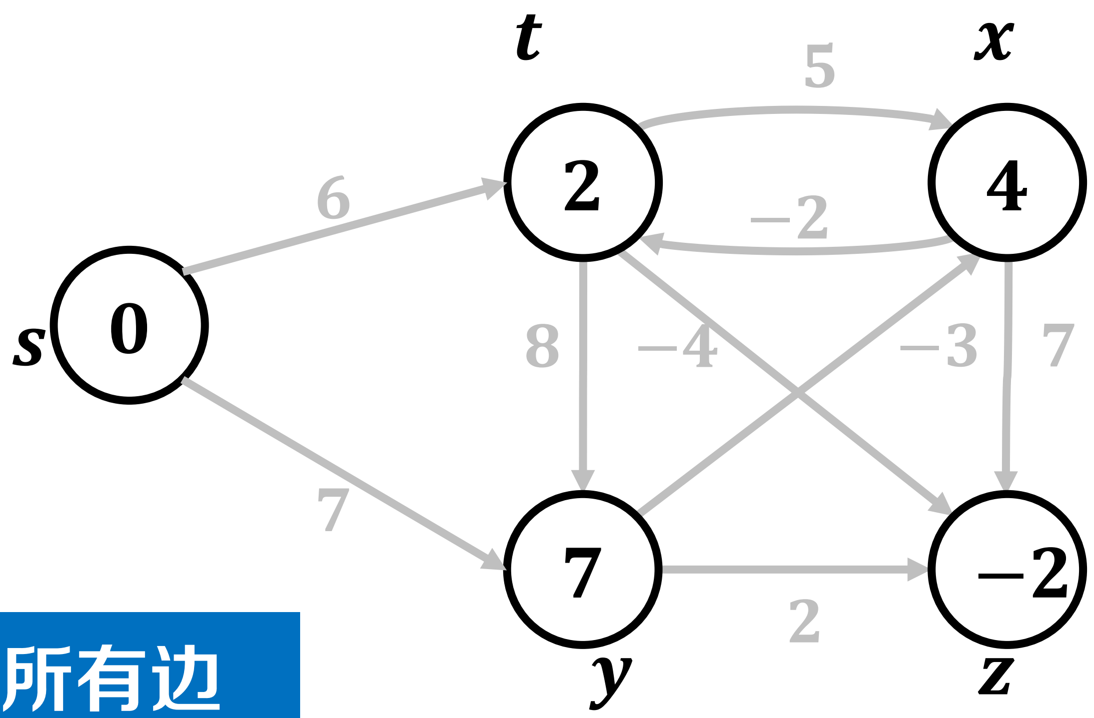
松弛失败

松弛成功

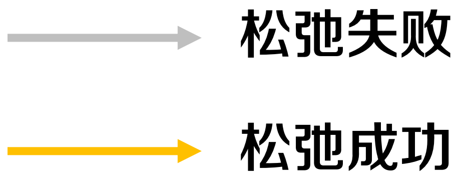
第4轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	x	y	s	t
$dist$	0	2	4	7	-2



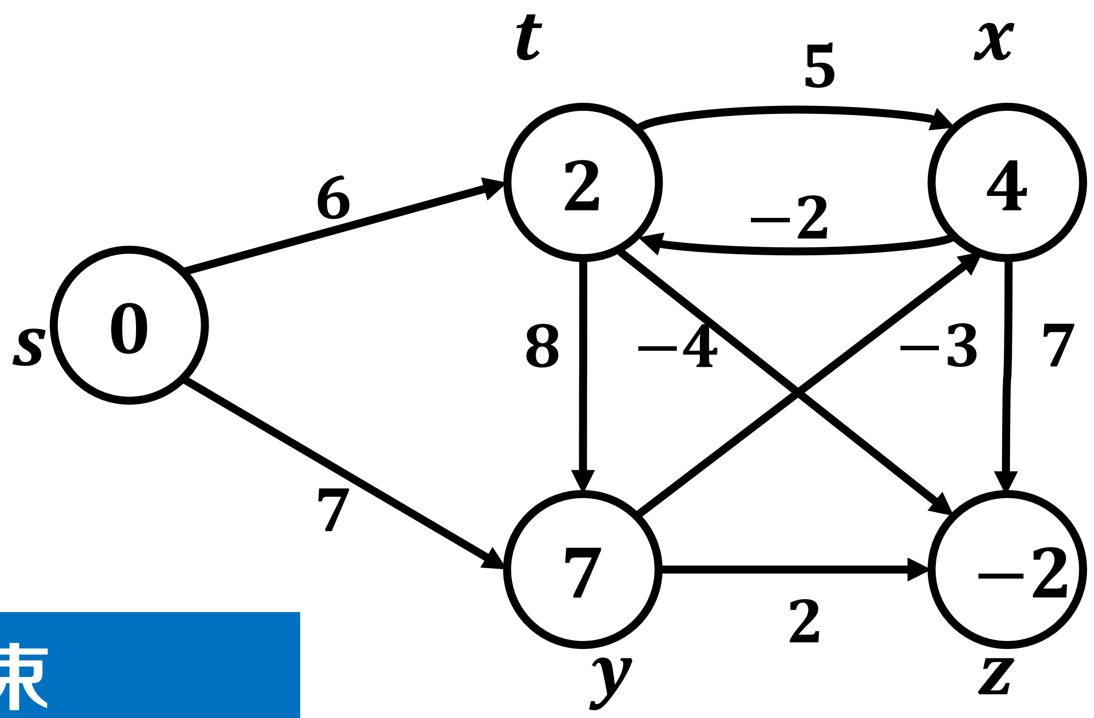
松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$



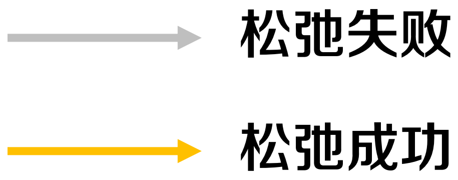
第4轮：松弛所有边

算法实例

V	s	t	x	y	z
$pred$	N	x	y	s	t
$dist$	0	2	4	7	-2



松弛顺序： $(x,z),(t,x),(x,t),(t,z),(y,x),(y,z),(t,y),(s,t),(s,y)$



松弛结束

提纲

问题背景

算法思想

算法实例

算法分析

算法性质

伪代码

- **Bellman-Ford(G, s)**

输入: 图$G =< V, E, W >$, 源点s
输出: 单源最短路径P
新建一维数组$dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
//初始化
for $u \in V$ do
  $dist[u] \leftarrow \infty$
  $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[s] \leftarrow 0$

初始化辅助数组

伪代码

- **Bellman-Ford(G, s)**

输入: 图$G =< V, E, W >$, 源点s
输出: 单源最短路径P
新建一维数组$dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
//初始化
for $u \in V$ **do**
    $dist[u] \leftarrow \infty$
    $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[s] \leftarrow 0$

初始化源点距离

伪代码

- **Bellman-Ford(G, s)**

```
//执行单源最短路径算法
for i ← 1 to |V| − 1 do
    for (u, v) ∈ E do
        if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
            dist[v] ← dist[u] + w(u, v)
            pred[v] ← u
        end
    end
end
for (u, v) ∈ E do
    if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
        print 存在负环
        break
    end
end
```

进行$|V| - 1$轮松弛

伪代码

- **Bellman-Ford(G, s)**

```
//执行单源最短路径算法
for i ← 1 to |V| − 1 do
    for (u, v) ∈ E do
        if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
            dist[v] ← dist[u] + w(u, v)
            pred[v] ← u
        end
    end
end
for (u, v) ∈ E do
    if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
        print 存在负环
        break
    end
end
```

对所有边进行松弛操作

伪代码

- **Bellman-Ford(G, s)**

```
//执行单源最短路径算法
for i ← 1 to |V| − 1 do
    for (u, v) ∈ E do
        if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
            dist[v] ← dist[u] + w(u, v)
            pred[v] ← u
        end
    end
end
for (u, v) ∈ E do
    if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
        print 存在负环
        break
    end
end
```

更新辅助数组

伪代码

- **Bellman-Ford(G, s)**

```
//执行单源最短路径算法
for i ← 1 to |V| − 1 do
    for (u, v) ∈ E do
        if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
            dist[v] ← dist[u] + w(u, v)
            pred[v] ← u
        end
    end
end
for (u, v) ∈ E do
    if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
        print 存在负环
        break
    end
end
```

判断是否存在负环

时间复杂度分析

- **Bellman-Ford(G, s)**

输入: 图$G = < V, E, W >$, 源点s
输出: 单源最短路径P
新建一维数组$dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
//初始化
for $u \in V$ **do**
  $dist[u] \leftarrow \infty$
  $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[s] \leftarrow 0$

$$\left.\right\} O(|V|)$$

时间复杂度分析

- **Bellman-Ford(G, s)**

```
//执行单源最短路径算法
for i ← 1 to |V| − 1 do
    for (u, v) ∈ E do
        if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
            dist[v] ← dist[u] + w(u, v)
            pred[v] ← u
        end
    end
end
for (u, v) ∈ E do
    if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
        print 存在负环
        break
    end
end
```

$O(|E|)$

时间复杂度分析

- **Bellman-Ford(G, s)**

//执行单源最短路径算法

```
for i ← 1 to |V| − 1 do
    for (u, v) ∈ E do
        if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
            dist[v] ← dist[u] + w(u, v)
            pred[v] ← u
        end
    end
end
for (u, v) ∈ E do
    if dist[u] + w(u, v) < dist[v] then
        print 存在负环
        break
    end
end
```

$O(|E|)$

$O(|E| \cdot |V|)$

$O(|E|)$

时间复杂度分析

- **Bellman-Ford(G, s)**

//执行单源最短路径算法

for $i \leftarrow 1$ to $|V| - 1$ **do**
    for $(u, v) \in E$ **do**
        if $dist[u] + w(u, v) < dist[v]$ **then**
            $dist[v] \leftarrow dist[u] + w(u, v)$
            $pred[v] \leftarrow u$
        end
    end
end
for $(u, v) \in E$ **do**
    if $dist[u] + w(u, v) < dist[v]$ **then**
        print **存在负环**
        break
    end
end

时间复杂度$O(|E| \cdot |V|)$

提纲

问题背景

算法思想

算法实例

算法分析

算法性质

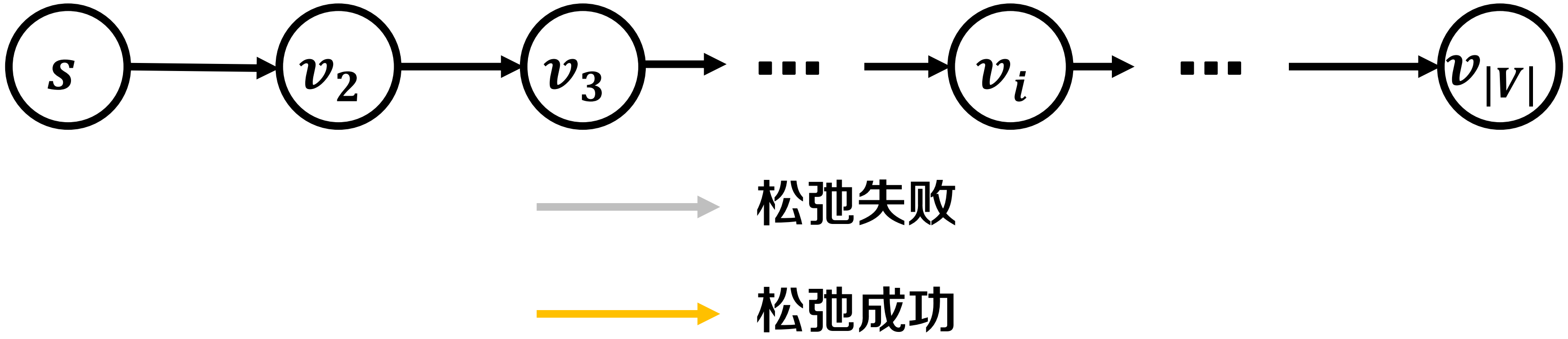
算法思想

- **Bellman-Ford算法**
  - 挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径？
    - 解决方案：每轮对所有边进行松弛，持续迭代$|V|-1$轮
  - 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
    - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环

松弛成功　　　　松弛失败

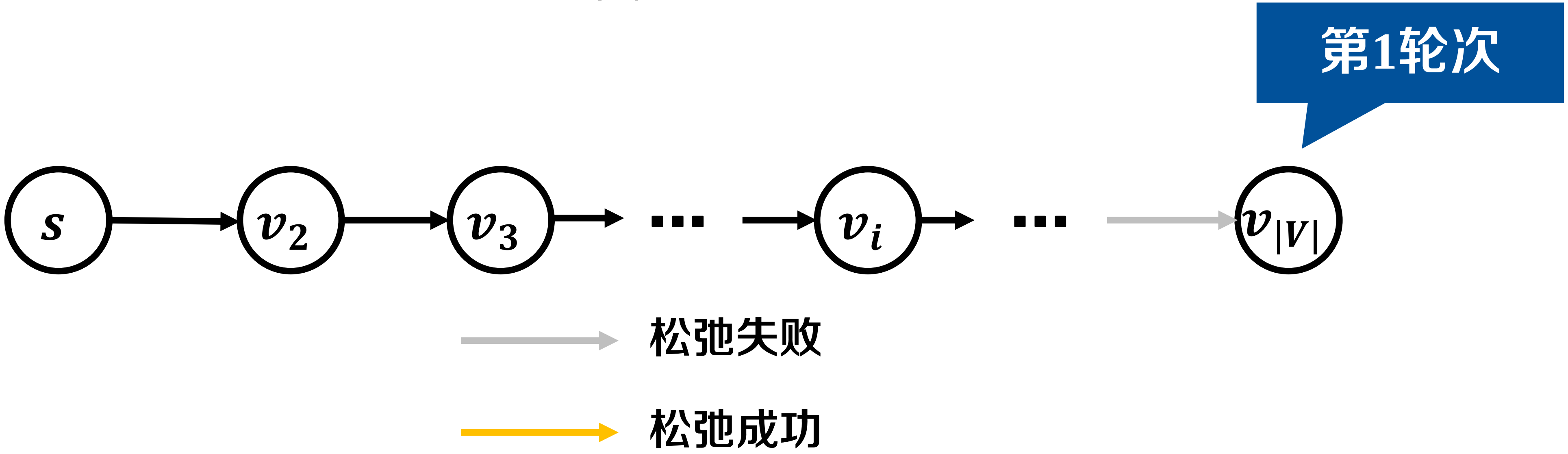
算法正确性

- 挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径?
  - 解决方案：每轮对所有边进行松弛，持续迭代$|V|-1$轮
- 最坏情况
  - 非环路的路径$< s, v_2, v_3, \ldots, v_{|V|} >$至多经过$|V|-1$条边



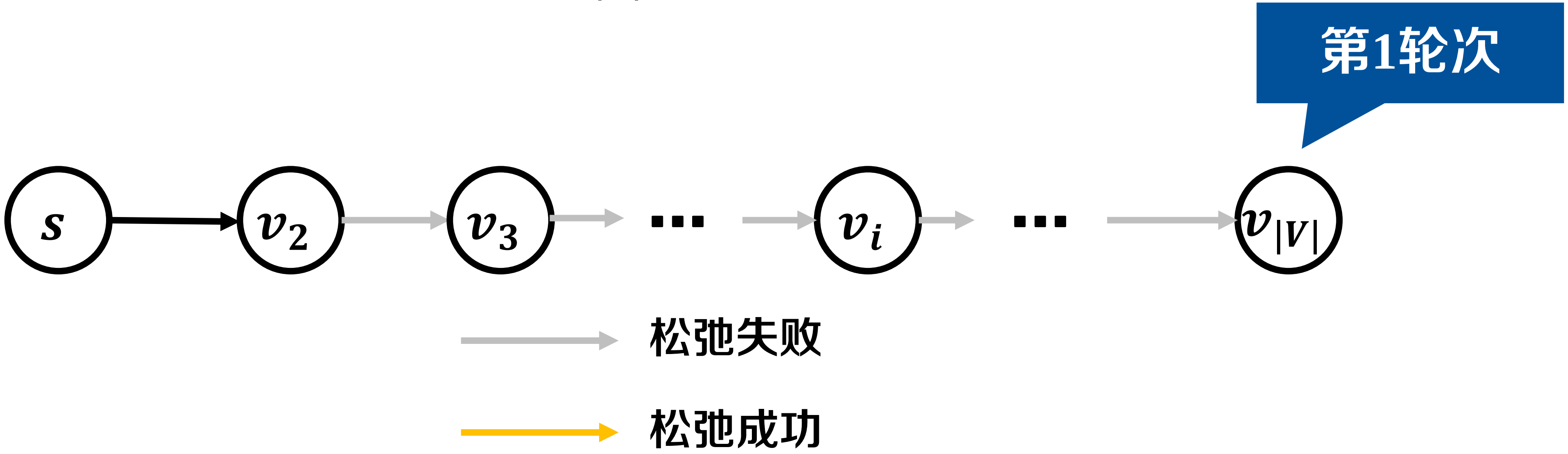
算法正确性

- 挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径？
  - 解决方案：每轮对所有边进行松弛，持续迭代$|V|-1$轮
- 最坏情况
  - 非环路的路径$< s, v_2, v_3, \dots, v_{|V|} >$至多经过$|V|-1$条边



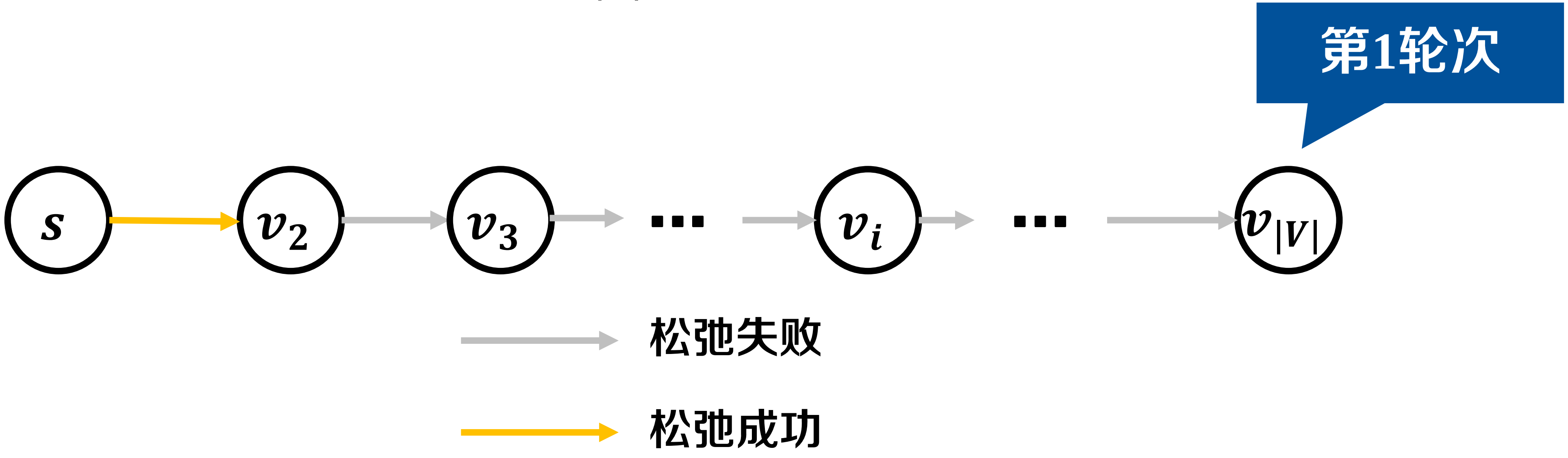
算法正确性

- 挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径？
  - 解决方案：每轮对所有边进行松弛，持续迭代$|V|-1$轮
- 最坏情况
  - 非环路的路径$< s, v_2, v_3, \dots, v_{|V|} >$至多经过$|V|-1$条边



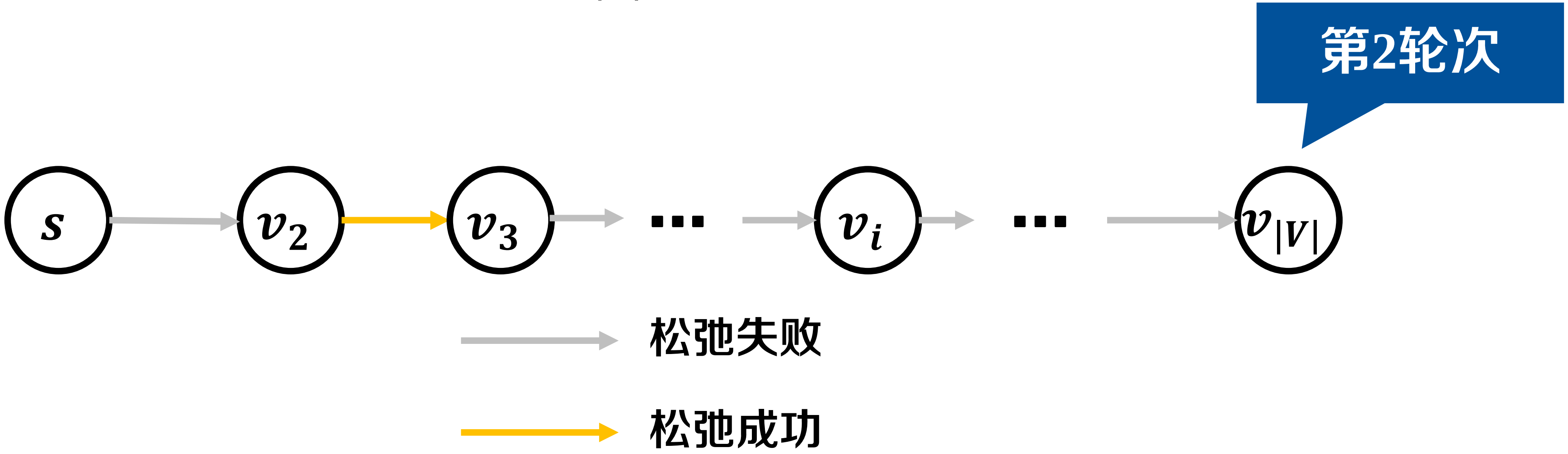
算法正确性

- 挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径？
  - 解决方案：每轮对所有边进行松弛，持续迭代$|V|-1$轮
- 最坏情况
  - 非环路的路径$< s, v_2, v_3, \dots, v_{|V|} >$至多经过$|V|-1$条边



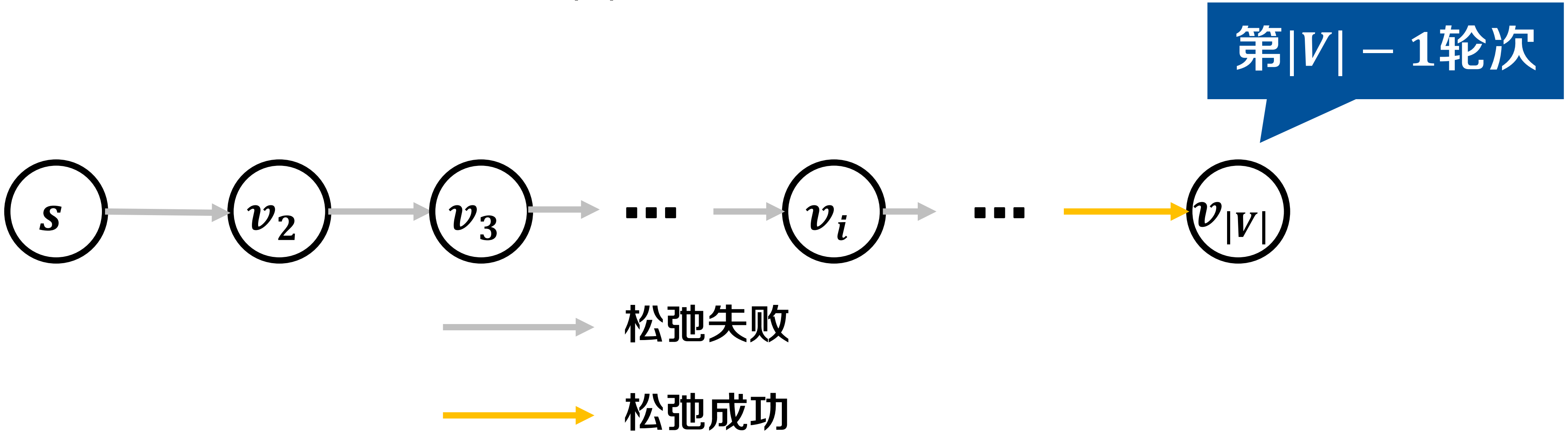
算法正确性

- 挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径？
  - 解决方案：每轮对所有边进行松弛，持续迭代$|V|-1$轮
- 最坏情况
  - 非环路的路径$< s, v_2, v_3, \ldots, v_{|V|} >$至多经过$|V|-1$条边



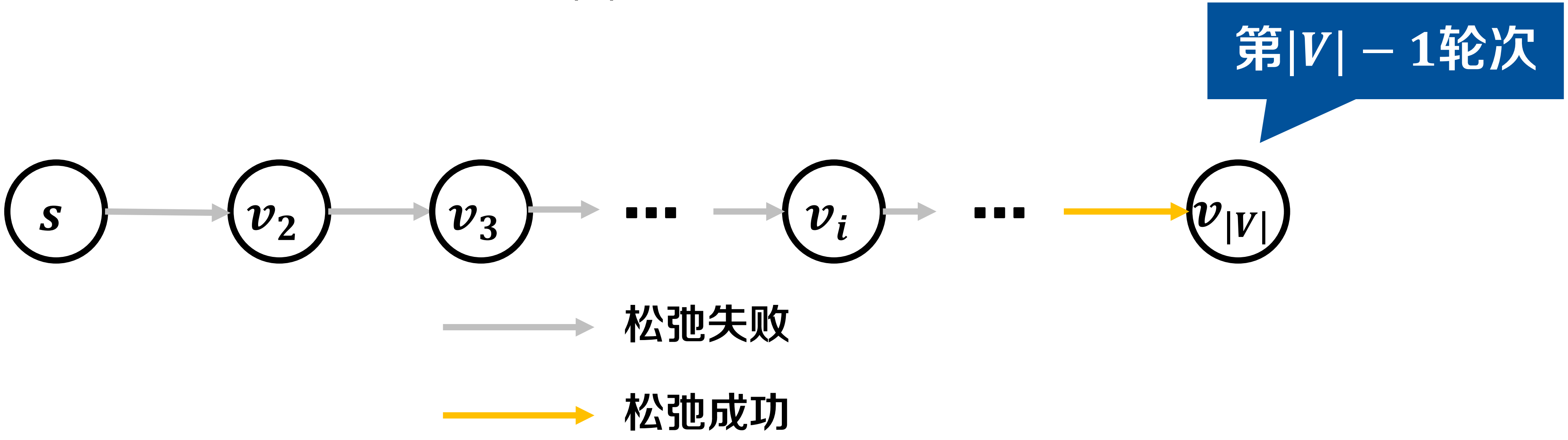
算法正确性

- 挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径？
  - 解决方案：每轮对所有边进行松弛，持续迭代$|V|-1$轮
- 最坏情况
  - 非环路的路径$< s, v_2, v_3, \dots, v_{|V|} >$至多经过$|V|-1$条边



算法正确性

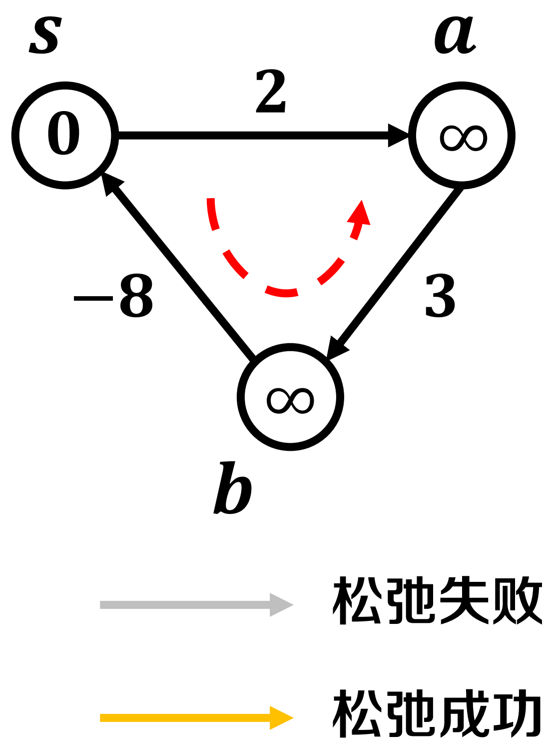
- 挑战1：图中存在负权边时，如何求解单源最短路径？
  - 解决方案：每轮对所有边进行松弛，持续迭代$|V|-1$轮
- 最坏情况
  - 非环路的路径$< s, v_2, v_3, \dots, v_{|V|} >$至多经过$|V|-1$条边



最坏情况下进行$|V|-1$轮松弛操作，可以保证求得单源最短路径

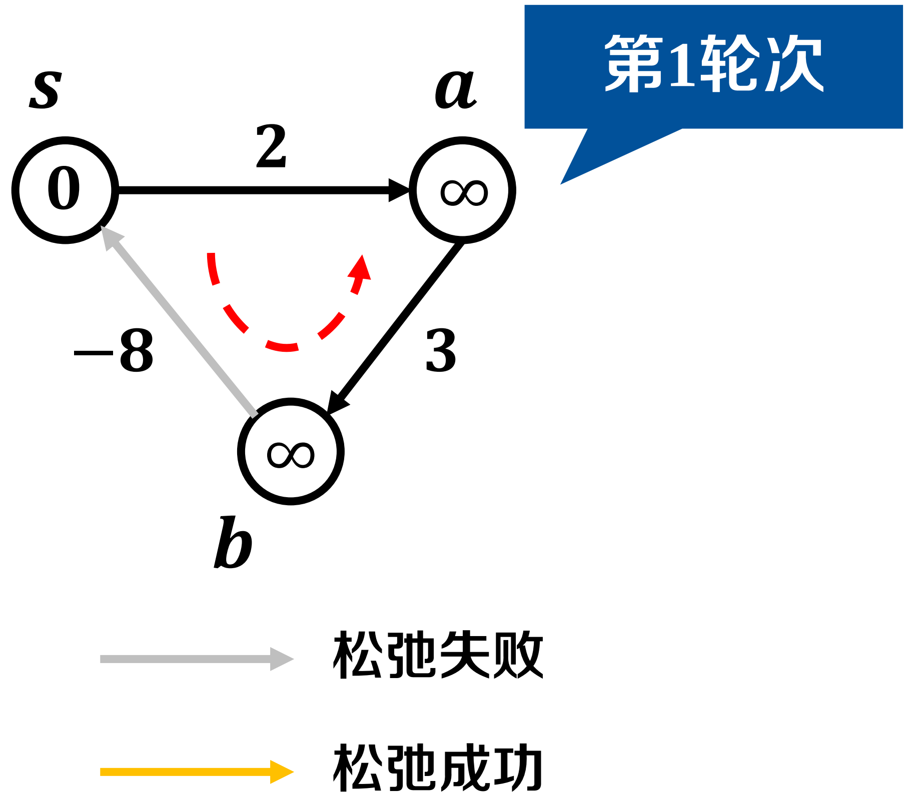
算法正确性

- 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
  - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环
- 若源点s可达负环，可松弛成功无限次



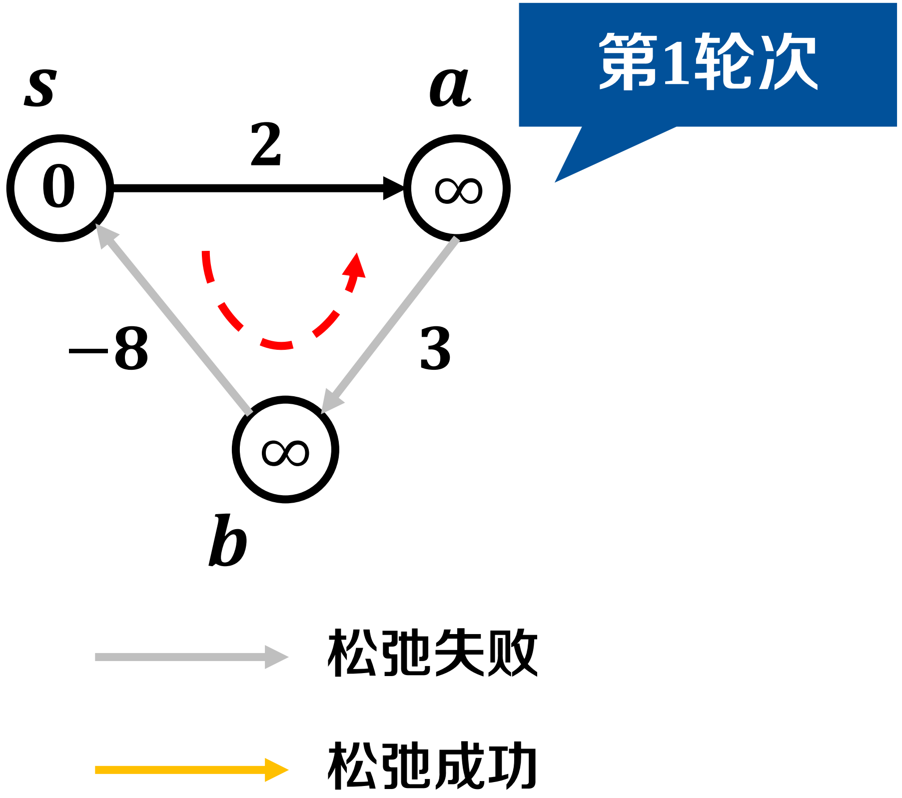
算法正确性

- 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
  - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环
- 若源点s可达负环，可松弛成功无限次



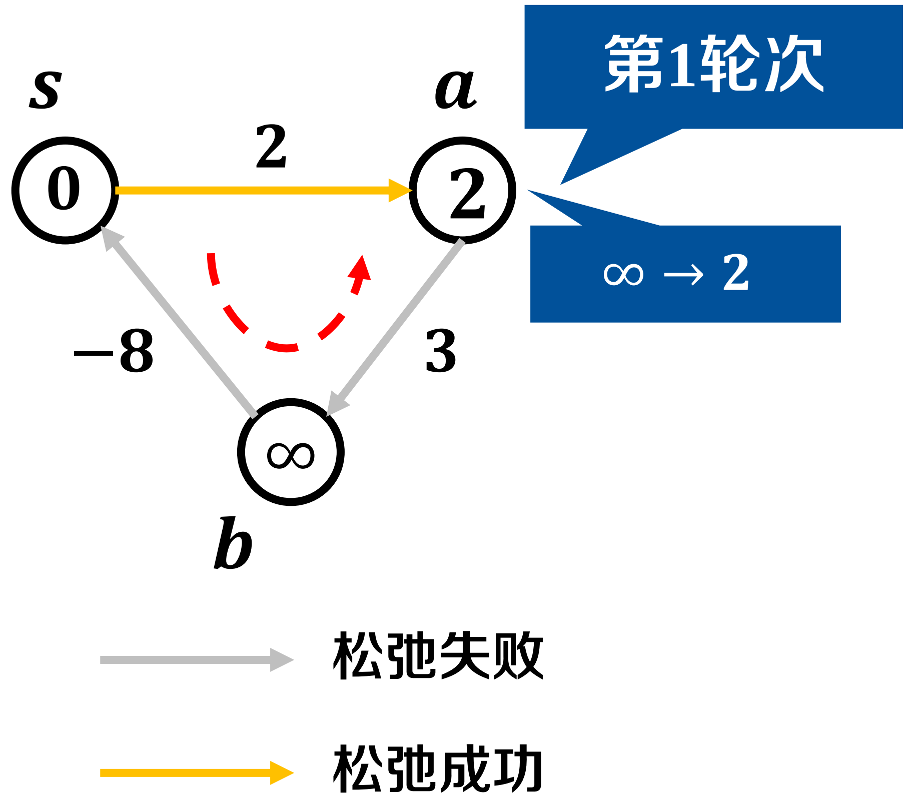
算法正确性

- 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
  - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环
- 若源点s可达负环，可松弛成功无限次



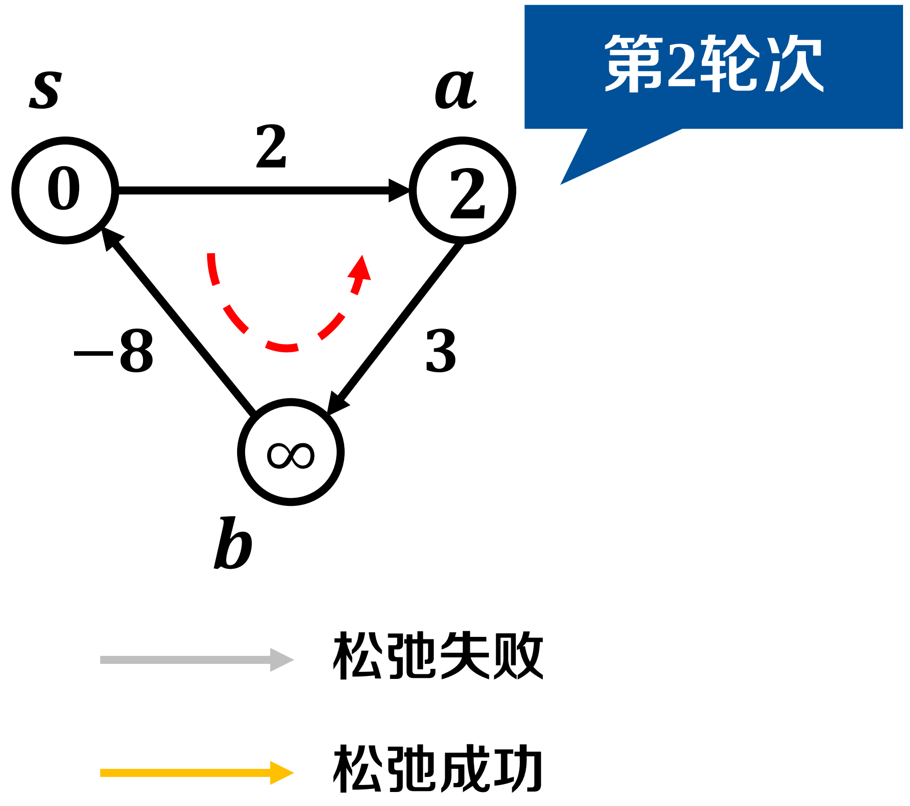
算法正确性

- 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
  - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环
- 若源点s可达负环，可松弛成功无限次



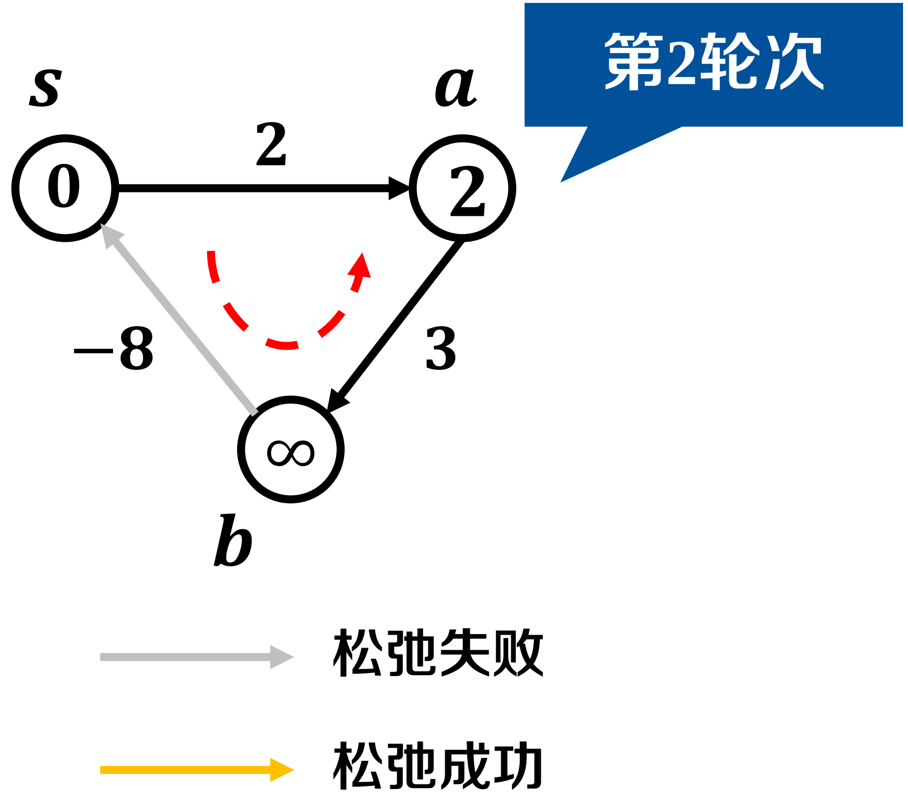
算法正确性

- 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
  - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环
- 若源点s可达负环，可松弛成功无限次



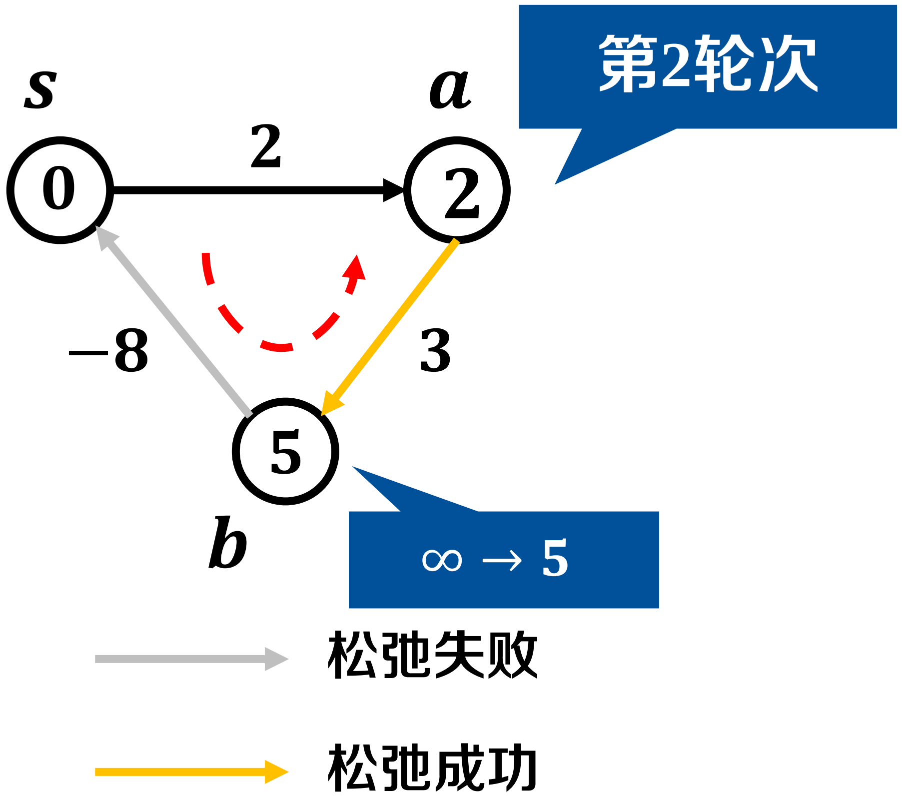
算法正确性

- 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
  - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环
- 若源点s可达负环，可松弛成功无限次



算法正确性

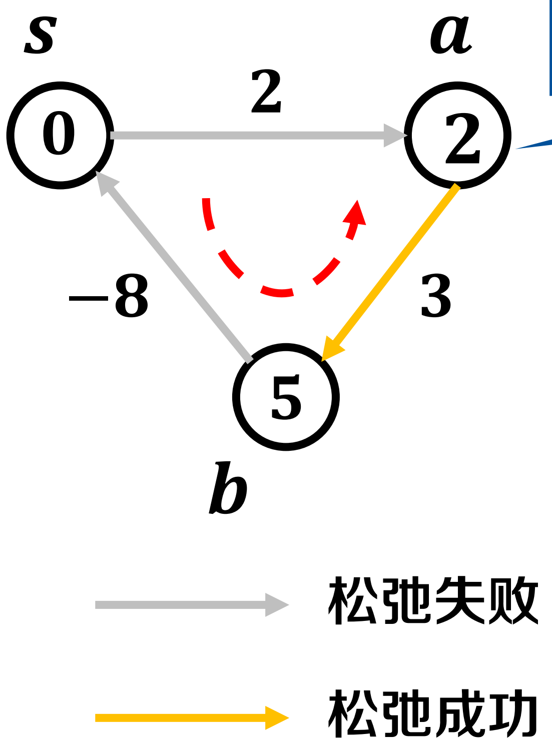
- 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
  - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环
- 若源点s可达负环，可松弛成功无限次



算法正确性

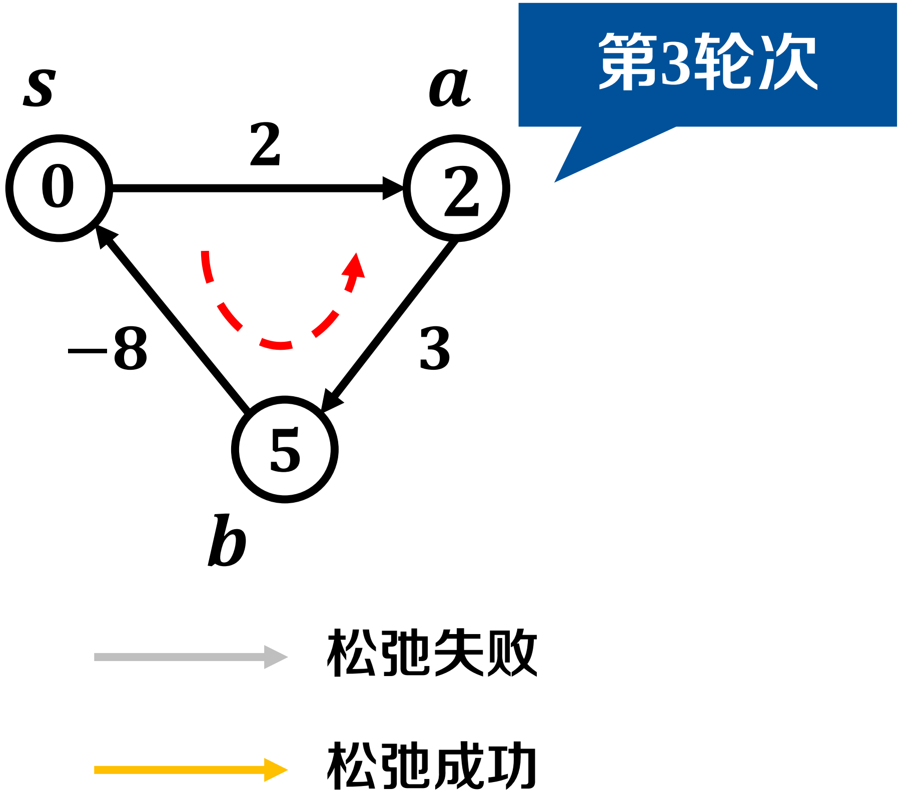
- 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
  - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环
- 若源点s可达负环，可松弛成功无限次

第2轮次结束($|V|-1=3-1=2$)
最短路径应已求出



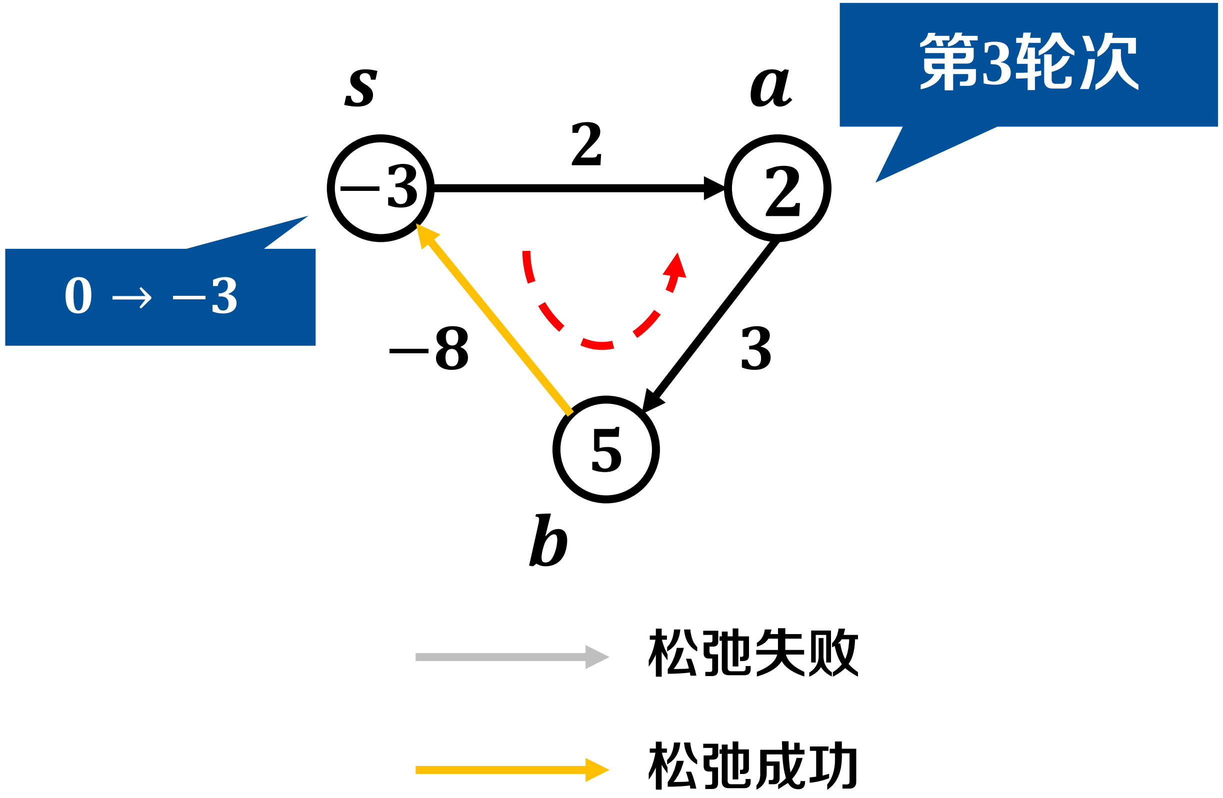
算法正确性

- 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
  - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环
- 若源点s可达负环，可松弛成功无限次



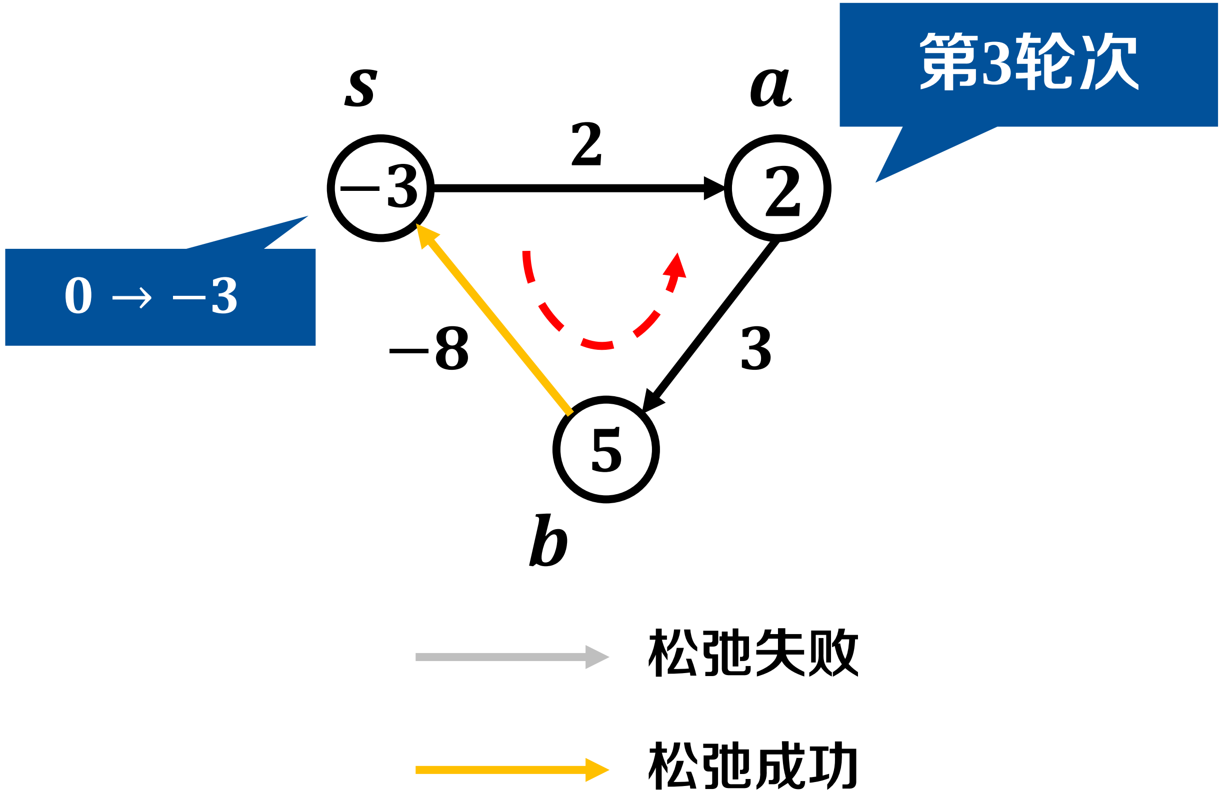
算法正确性

- 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
  - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环
- 若源点s可达**负环**，可松弛成功**无限次**



算法正确性

- 挑战2：图中存在负权边时，如何发现源点可达负环？
  - 解决方案：若第$|V|$轮仍松弛成功，存在源点s可达的负环
- 若源点s可达负环，可松弛成功无限次



第$|V|$轮仍松弛成功的原因：存在源点可达的负环

小结

	广度优先搜索	Dijkstra算法	Bellman-Ford算法
适用范围	无权图	带权图 （所有边权为正）	带权图
松弛次数	——	$\|E\|$次	$\|V\| \cdot \|E\|$次
数据结构	队列	优先队列	——
运行时间	$O(\|V\| + \|E\|)$	$O(\|E\| \cdot \log\|V\|)$	$O(\|E\| \cdot \|V\|)$

谢谢

BDA

Beihang University