# Design and Analysis of Algorithms

## Part IV: Graph Algorithms

## Lecture 23: DFS on Directed Graphs

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

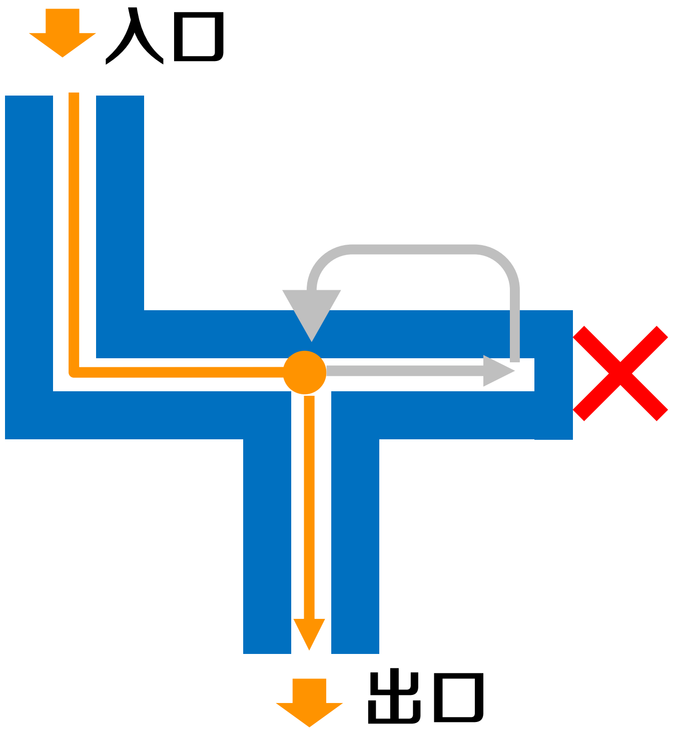
# 图算法篇概述

- 在算法课程第四部分“图算法”主题中，我们将主要聚焦于如下经典问题：
  - Basic Concepts in Graph Algorithms（图算法的基本概念）
  - Breadth-First Search (BFS，广度优先搜索）
  - Depth-First Search (DFS，深度优先搜索）
  - Cycle Detection（环路检测）
  - Topological Sort （拓扑排序）
  - Strongly Connected Components（强连通分量）
  - Minimum Spanning Trees (最小生成树)
  - Single Source Shortest Path (单源最短路径)
  - All-Pairs Shortest Paths (所有点对最短路径)
  - Bipartite Graph Matching（二分图匹配）
  - Maximum/Network Flows (最大流/网络流)

# 深度优先搜索回顾：算法思想

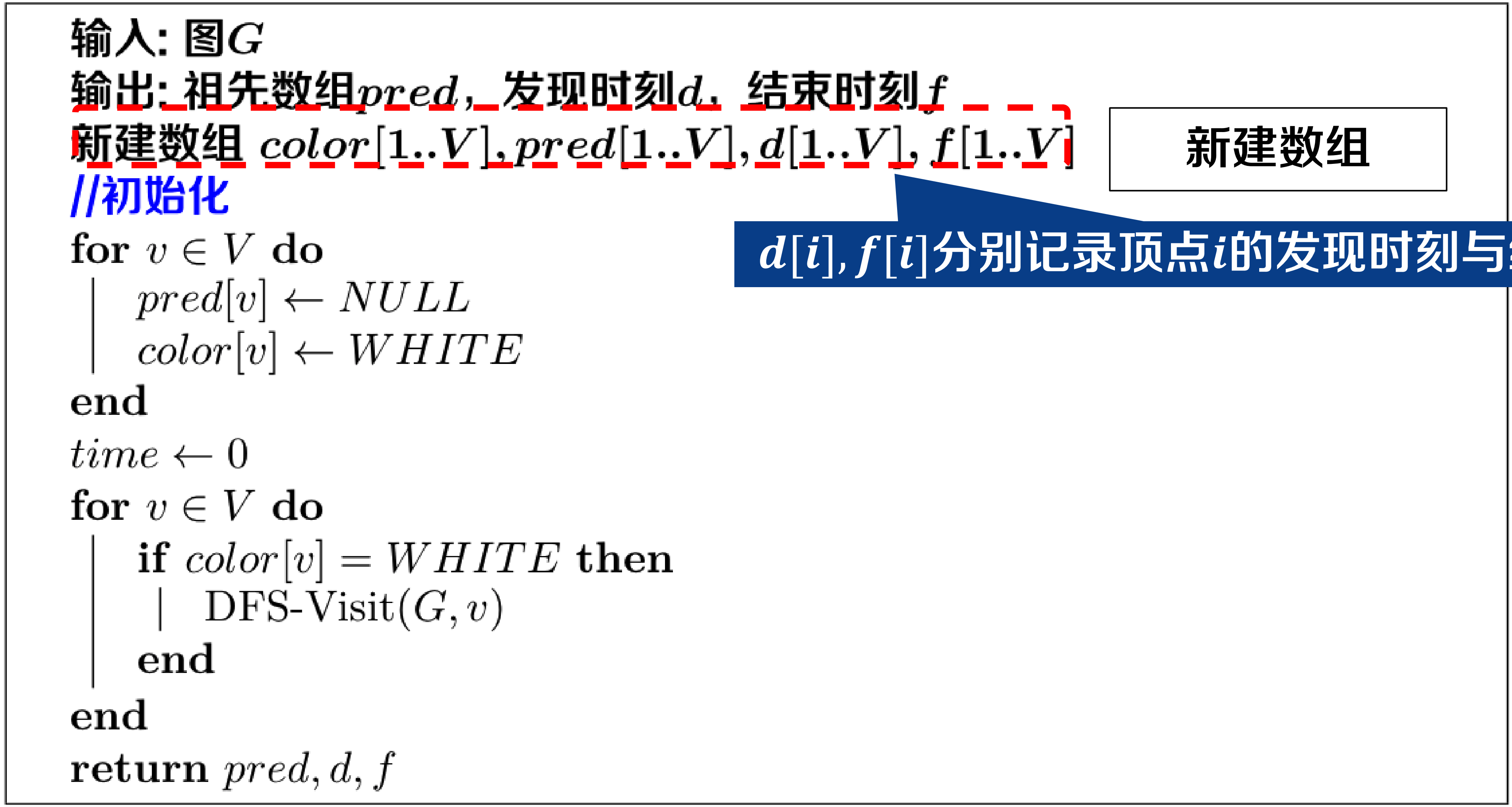
- 算法步骤
  - 分叉时，任选一条边深入
  - 无边时，后退一步找新边
  - 找到边，从新边继续深入

- 辅助数组
  - $color$：表示顶点状态
    - $White$：白色顶点尚未被发现
    - $Black$：黑色顶点已被处理
    - $Gray$：正在处理，尚未完成
  - $pred$：顶点$u$由$pred[u]$发现
  - $d$：顶点发现时刻（变成灰色的时刻）
  - $f$：顶点完成时刻（变成黑色的时刻）



# 伪代码

- **DFS($G$)**



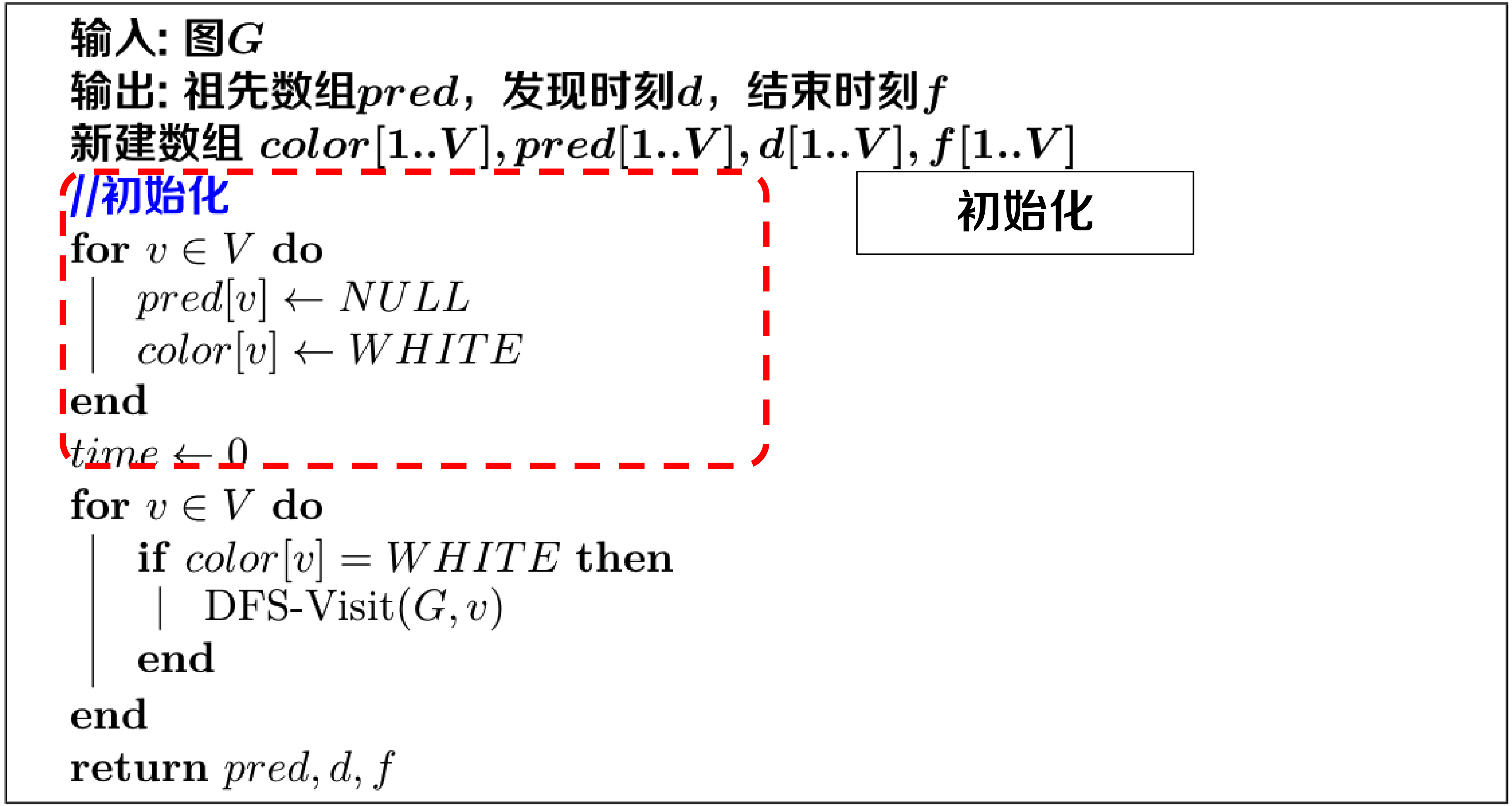
```
输入: 图$G$
输出: 祖先数组$pred$，发现时刻$d$，结束时刻$f$
新建数组 $color[1..V], pred[1..V], d[1..V], f[1..V]$
//初始化
for $v \in V$ do
    $pred[v] \leftarrow NULL$
    $color[v] \leftarrow WHITE$
end
$time \leftarrow 0$
for $v \in V$ do
    if $color[v] = WHITE$ then
        DFS-Visit($G, v$)
    end
end
return $pred, d, f$
```

新建数组

$d[i], f[i]$分别记录顶点$i$的发现时刻与结束时刻

# 伪代码

- **DFS(*G*)**

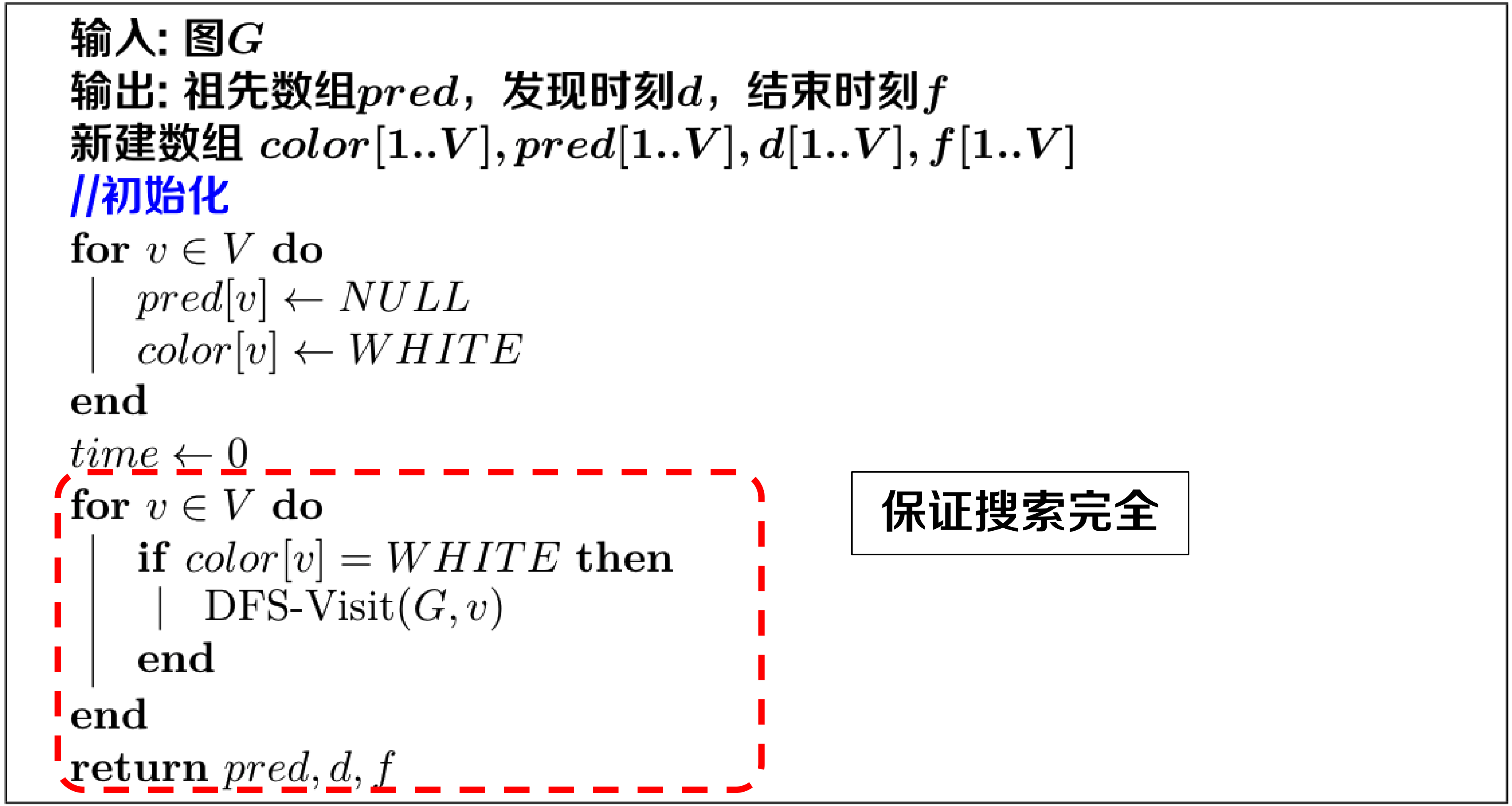


```
输入: 图$G$
输出: 祖先数组$pred$，发现时刻$d$，结束时刻$f$
新建数组 $color[1..V], pred[1..V], d[1..V], f[1..V]$
//初始化
for $v \in V$ do
    $pred[v] \leftarrow NULL$
    $color[v] \leftarrow WHITE$
end
$time \leftarrow 0$
for $v \in V$ do
    if $color[v] = WHITE$ then
        DFS-Visit$(G, v)$
    end
end
return $pred, d, f$
```

初始化

# 伪代码

- **DFS($G$)**

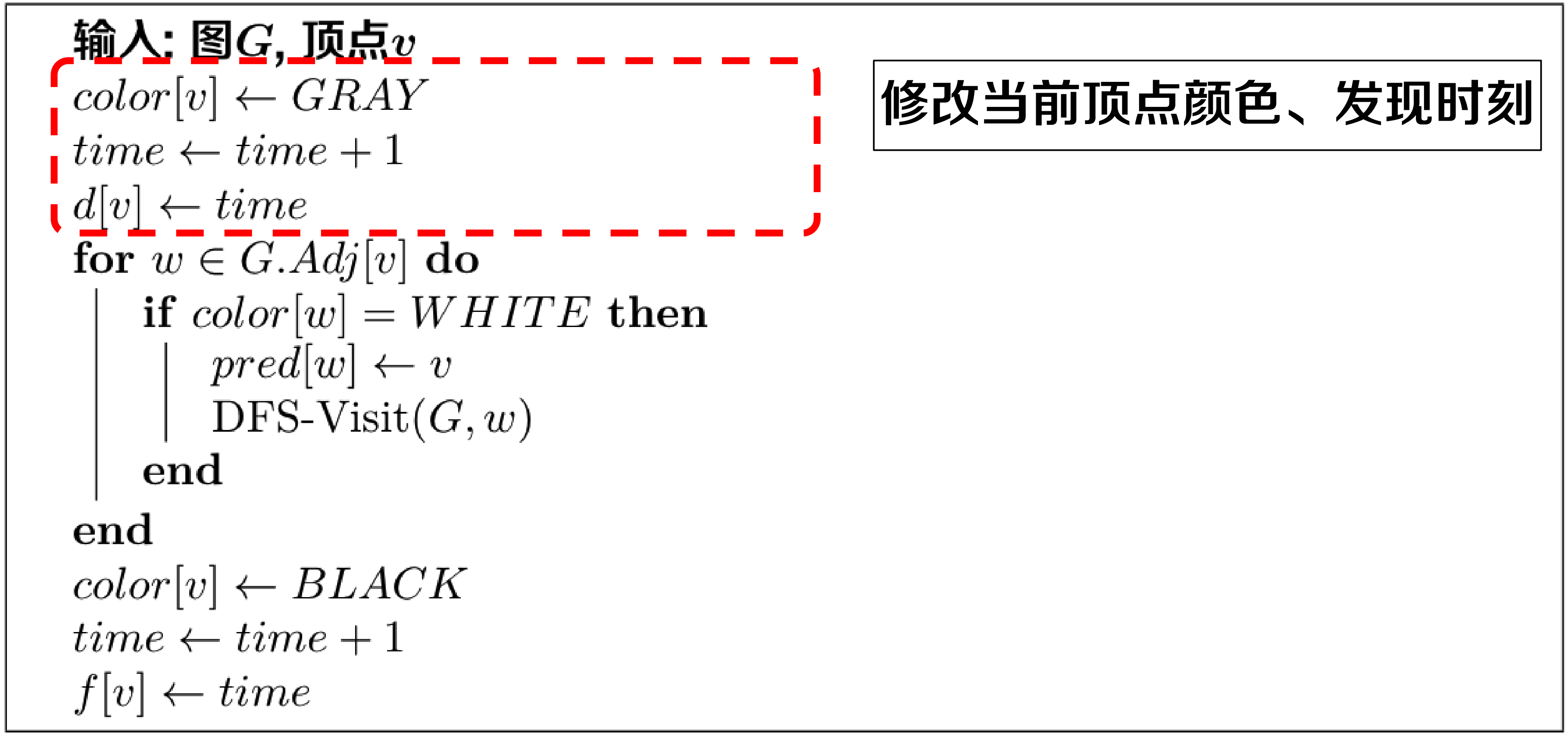


```
输入: 图$G$
输出: 祖先数组$pred$，发现时刻$d$，结束时刻$f$
新建数组 $color[1..V], pred[1..V], d[1..V], f[1..V]$
//初始化
for $v \in V$ do
    $pred[v] \leftarrow NULL$
    $color[v] \leftarrow WHITE$
end
$time \leftarrow 0$
for $v \in V$ do
    if $color[v] = WHITE$ then
        DFS-Visit$(G, v)$
    end
end
return $pred, d, f$
```

保证搜索完全

# 伪代码

- **DFS-Visit($G, v$)**

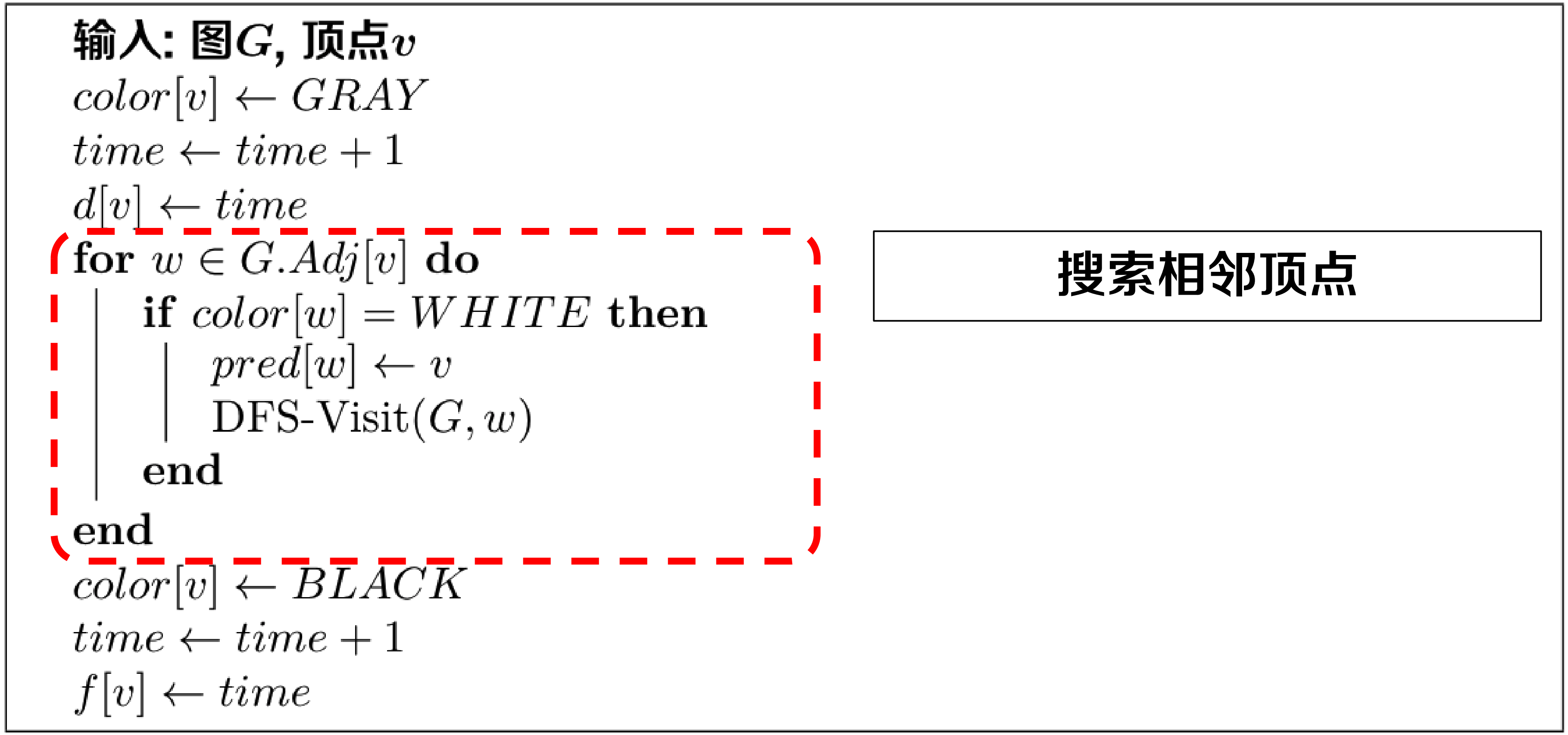


```
输入: 图$G$, 顶点$v$
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in G.Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($G, w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

修改当前顶点颜色、发现时刻

# 伪代码

- **DFS-Visit($G, v$)**

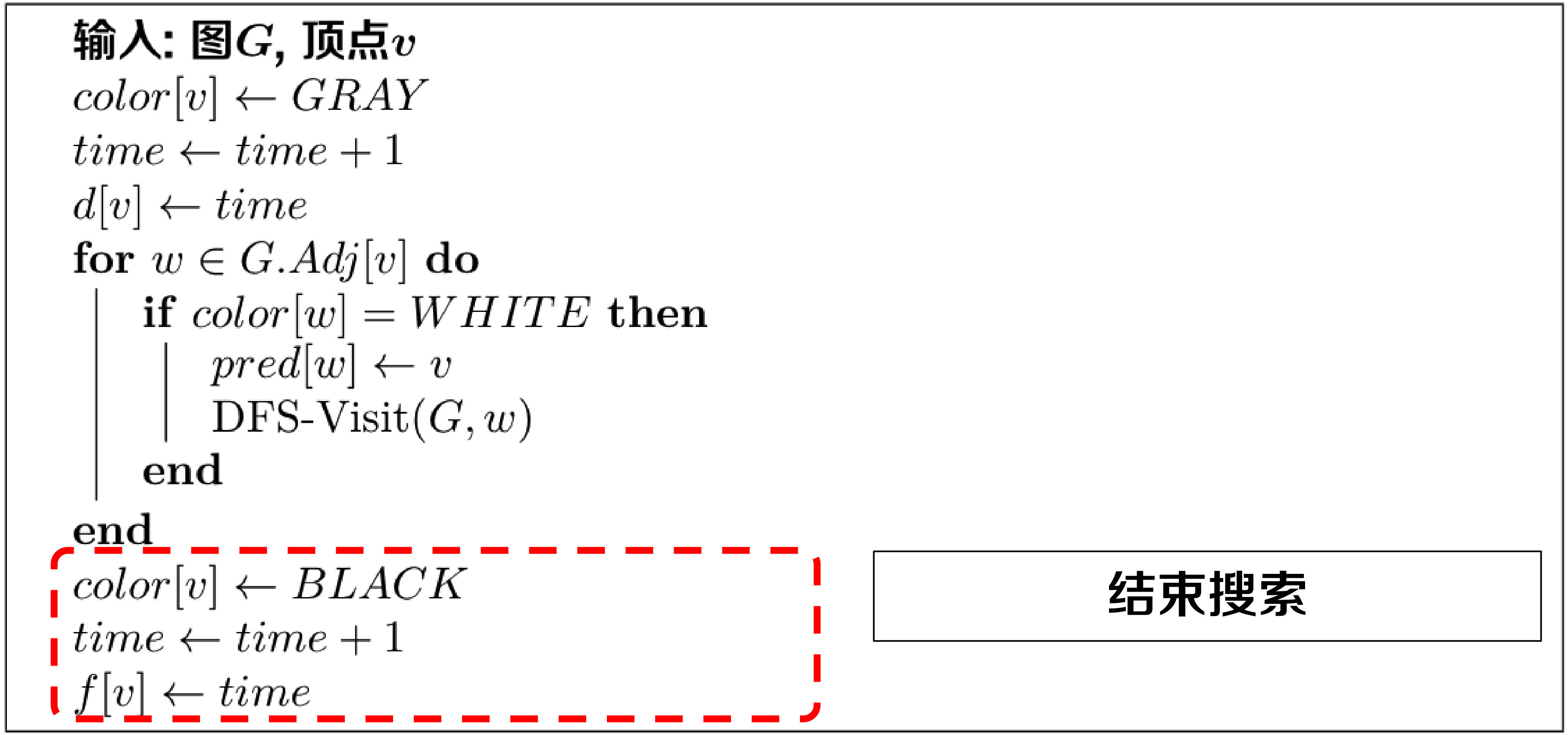


```
输入: 图$G$, 顶点$v$
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in G.Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($G, w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

搜索相邻顶点

# 伪代码

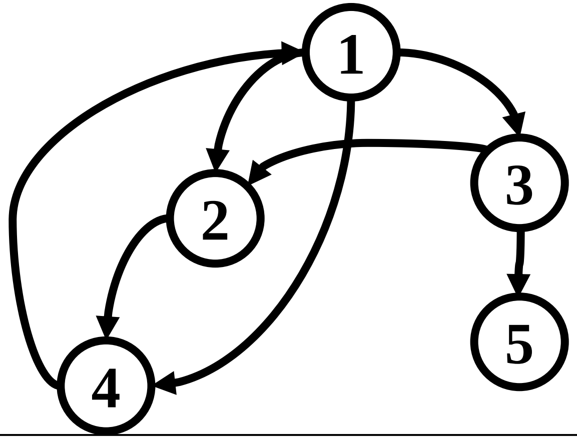
- **DFS-Visit($G, v$)**



```
输入: 图$G$, 顶点$v$
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in G.Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($G, w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

结束搜索

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 0$

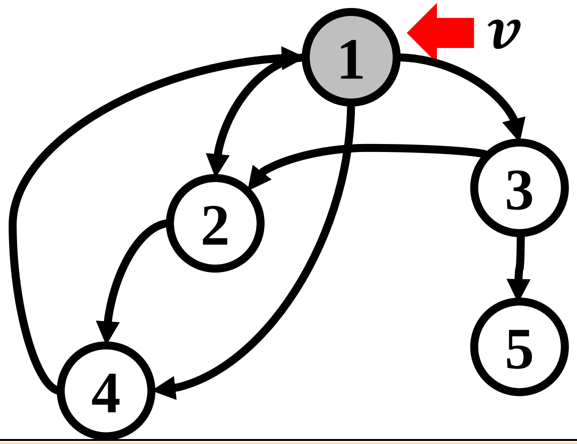
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | N | N | N | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | W | W | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ |  |  |  |  |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  |  |  |  |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 0$

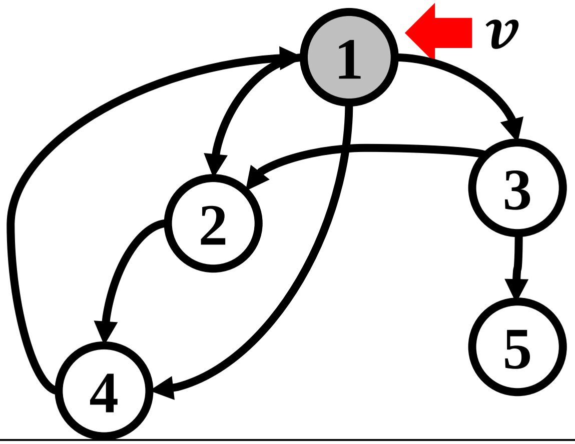
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | N | N | N | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | W | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | | | | | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 1$

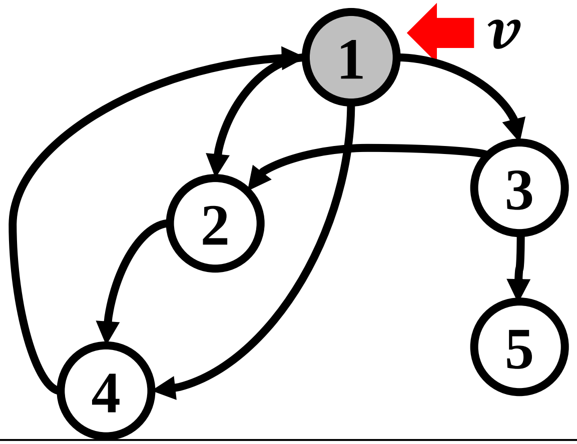
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | N | N | N | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | W | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ |  |  |  |  |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  |  |  |  |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 1$

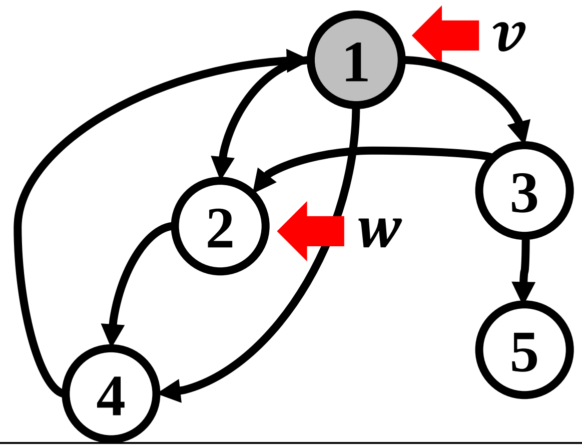
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | N | N | N | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | W | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | | | | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 1$

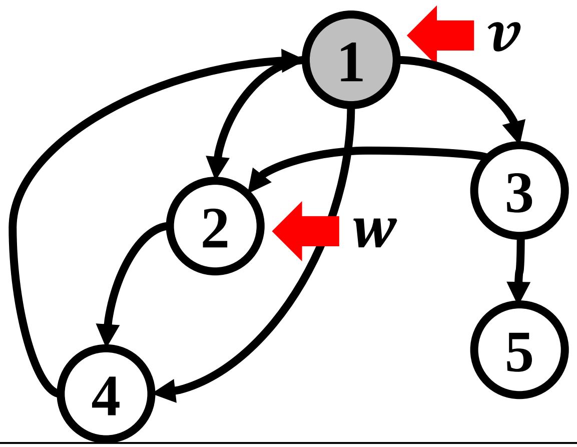
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | N | N | N | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | W | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | | | | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 1$

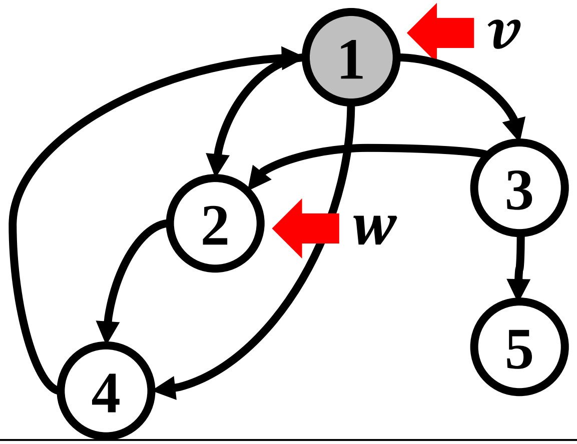
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | N | N | N | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | W | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | | | | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 1$

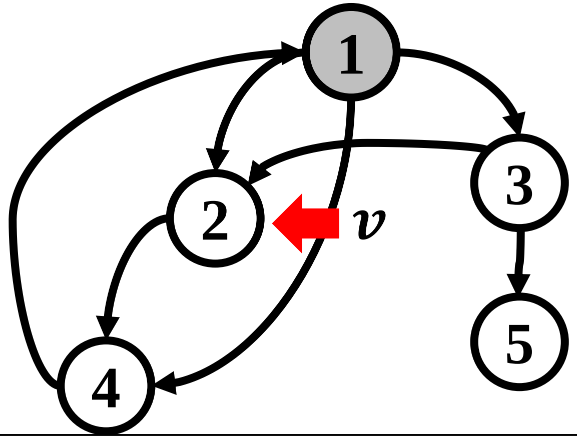
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | N | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | W | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | | | | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 1$

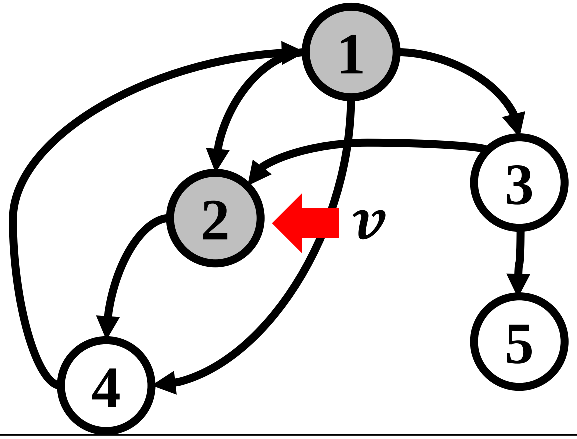
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | N | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | W | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | | | | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 1$

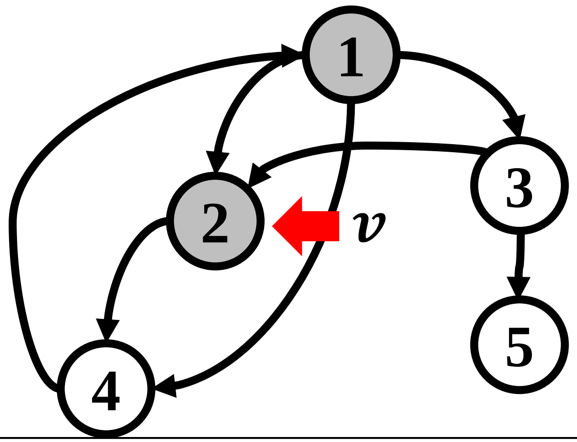
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | N | N | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | G | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | | | | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 2$

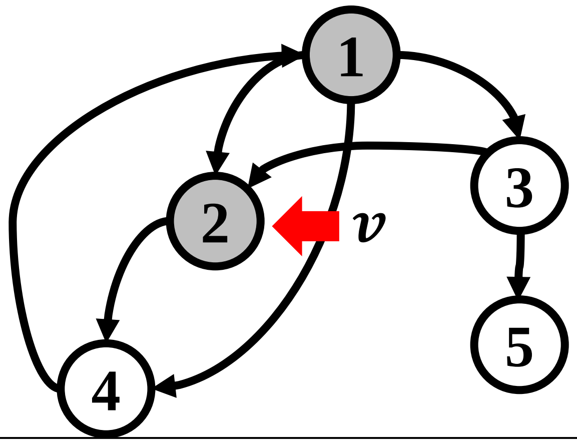
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | N | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 |  |  |  |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  |  |  |  |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 2$

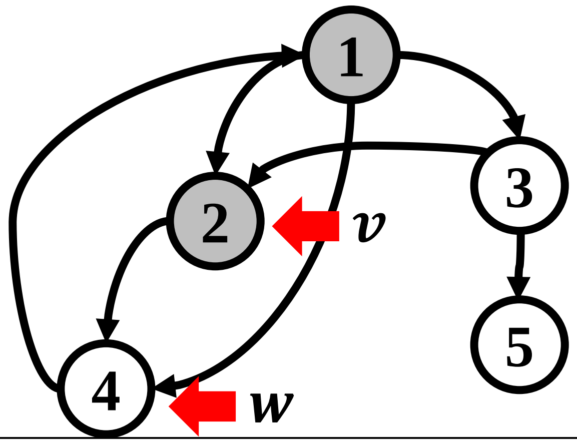
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | N | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | | | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 2$

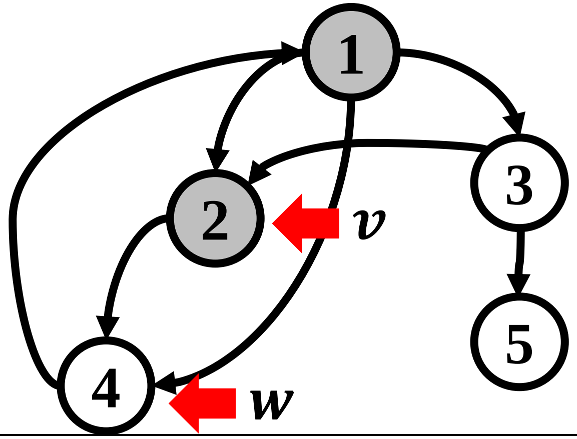
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | N | N |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | W | W |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | | | |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
color[v] ← GRAY
time ← time + 1
d[v] ← time
for w ∈ Adj[v] do
    if color[w] = WHITE then
        pred[w] ← v
        DFS-Visit(w)
    end
end
color[v] ← BLACK
time ← time + 1
f[v] ← time
```

*time* = 2

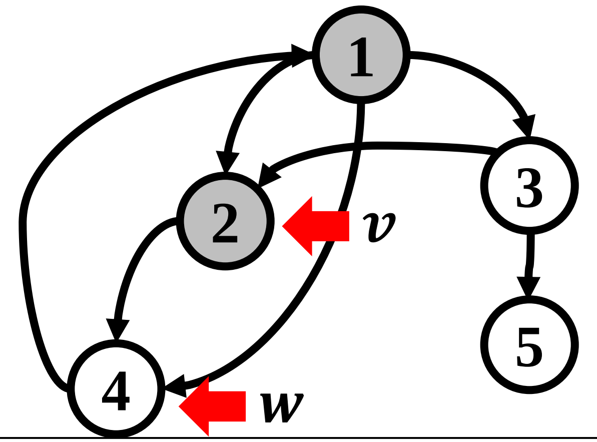
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | N | N |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | W | W |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 |  |  |  |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  |  |  |  |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 2$

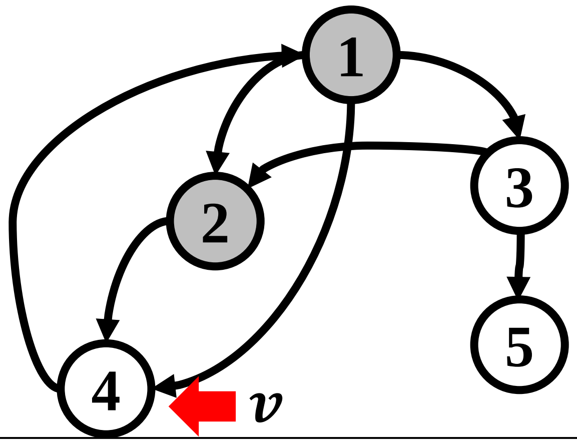
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | | | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 2$

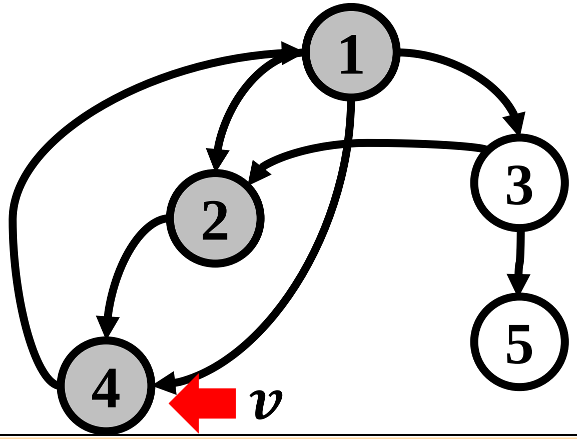
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | W | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 |  |  |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  |  |  |  |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 2$

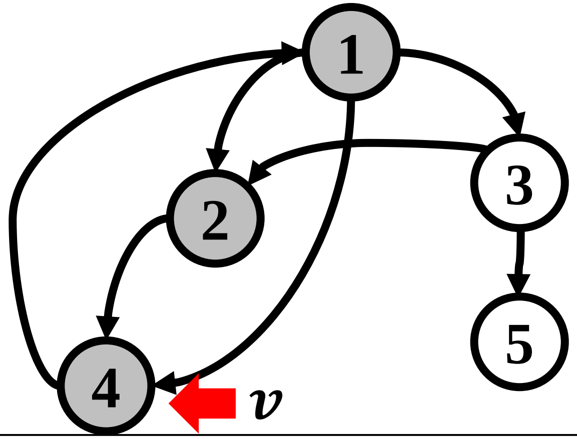
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | N | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | G | W | G | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | | | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

*time* = 3

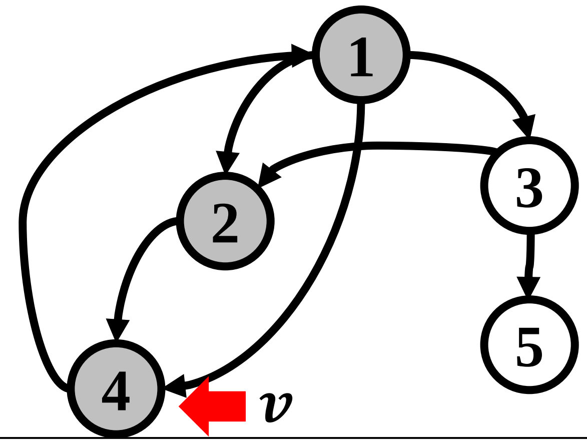
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | G | W |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | | | |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* | | | | | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 3$

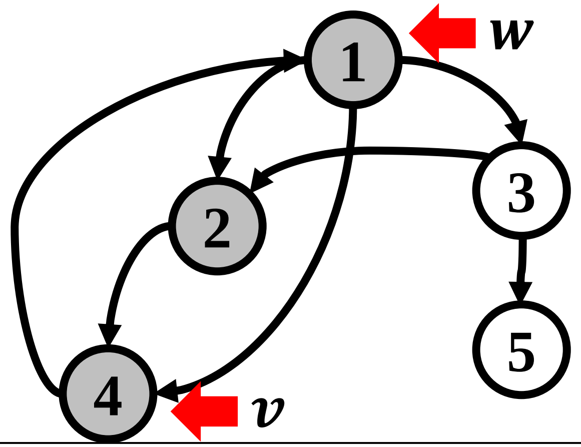
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | G | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 |  | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  |  |  |  |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 3$

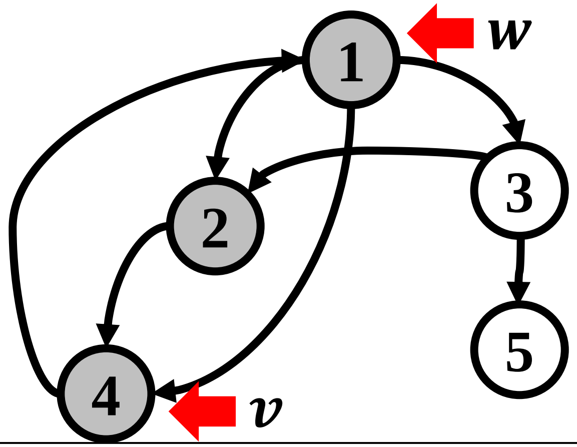
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | G | W |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 |  | 3 |  |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  |  |  |  |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 3$

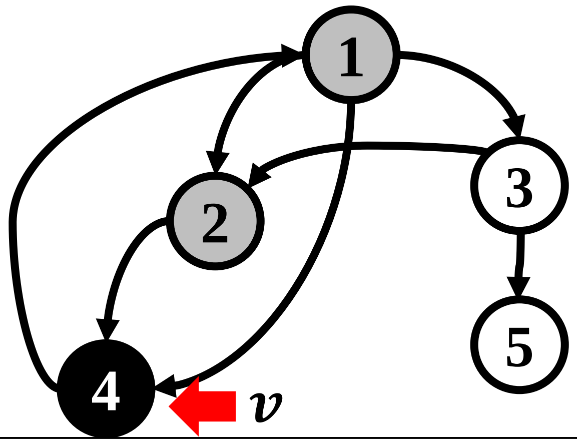
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | N | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | G | W | G | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 |  | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  |  |  |  |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

*time* = 3

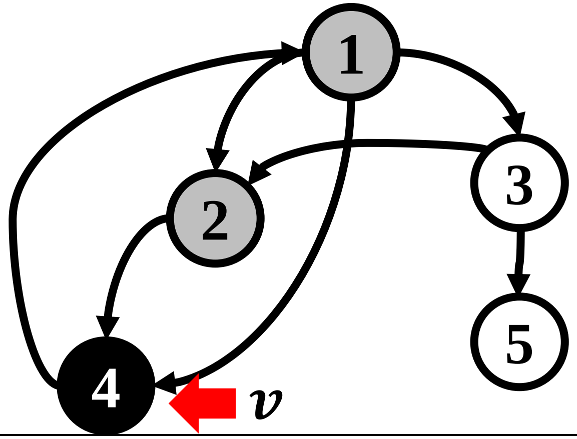
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | B | W |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 |  | 3 |  |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  |  |  |  |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

***time*** = **4**

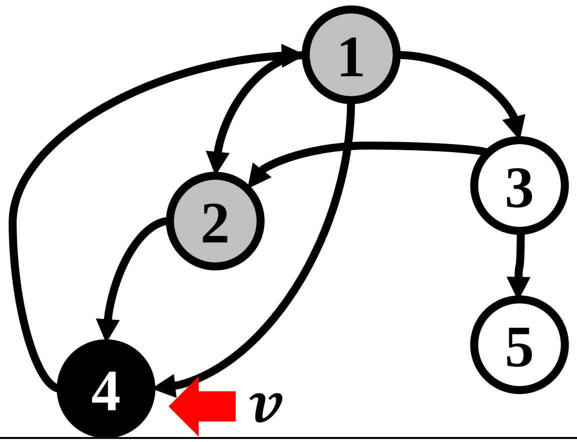
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | B | W |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 |  | 3 |  |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  |  |  |  |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 4$

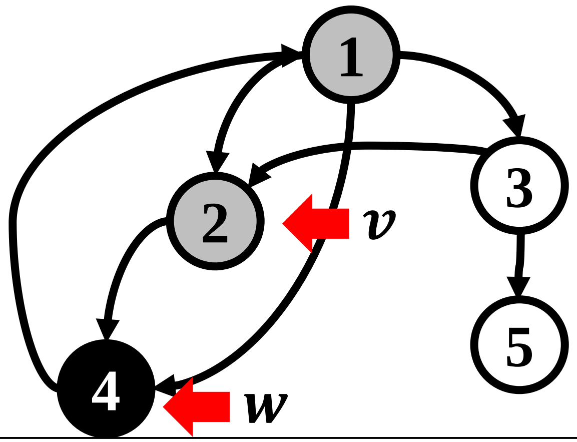
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 |  | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  |  |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

***time* = 4**

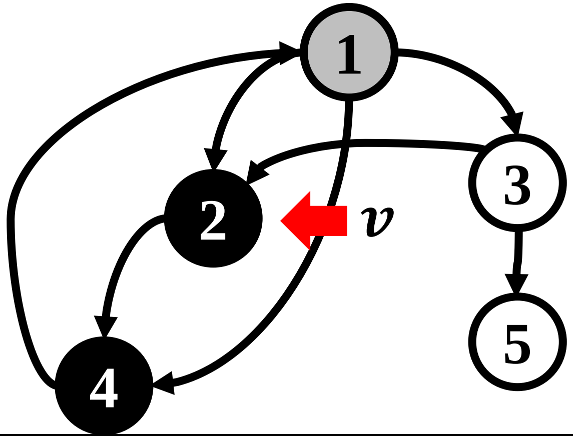
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | G | W | B | W |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 |  | 3 |  |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  |  |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 4$

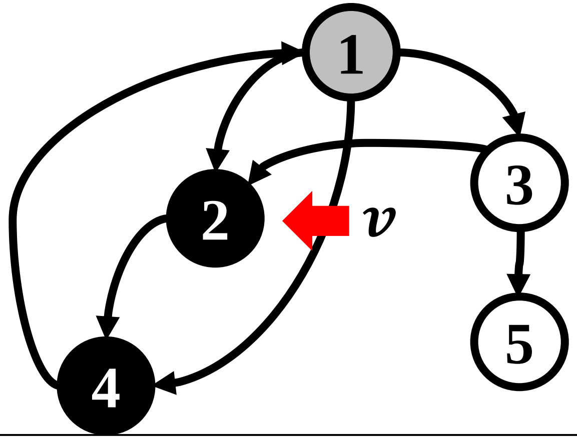
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | W | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | | 3 | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* | | | | 4 | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 5$

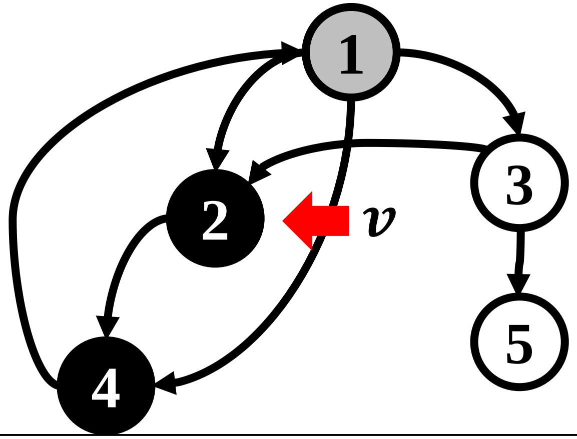
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | W | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 |  | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  |  |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 5$

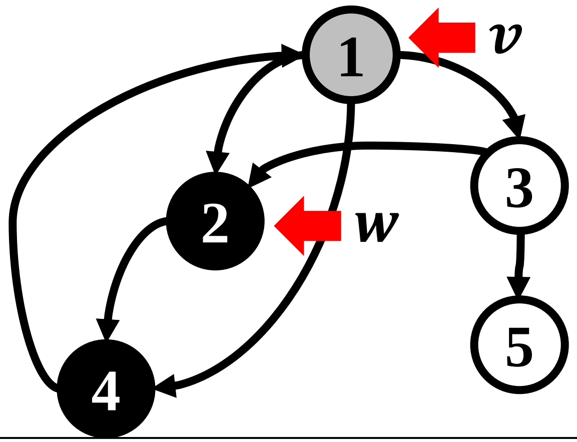
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | W | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 |  | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 5$

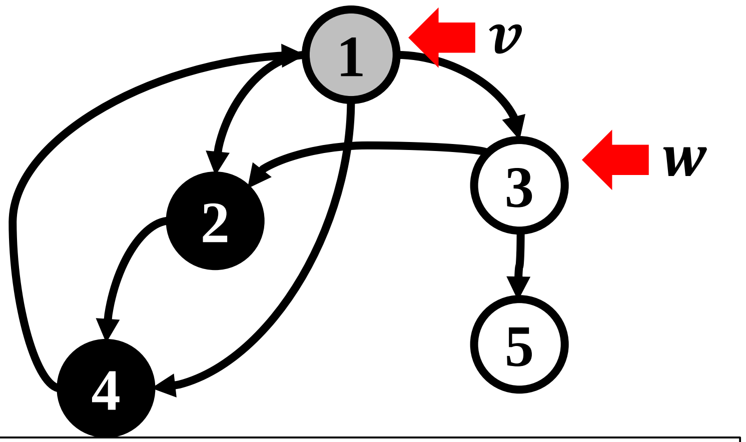
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | W | B | W |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 |  | 3 |  |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
color[v] ← GRAY
time ← time + 1
d[v] ← time
for w ∈ Adj[v] do
    if color[w] = WHITE then
        pred[w] ← v
        DFS-Visit(w)
    end
end
color[v] ← BLACK
time ← time + 1
f[v] ← time
```

*time* = 5

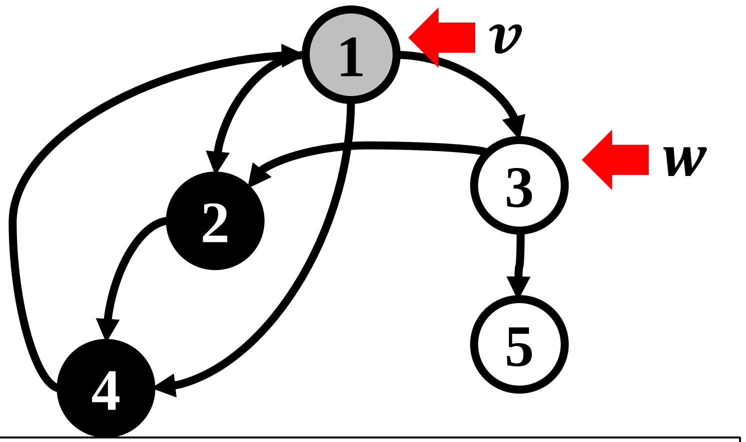
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | W | B | W |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 |  | 3 |  |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 5$

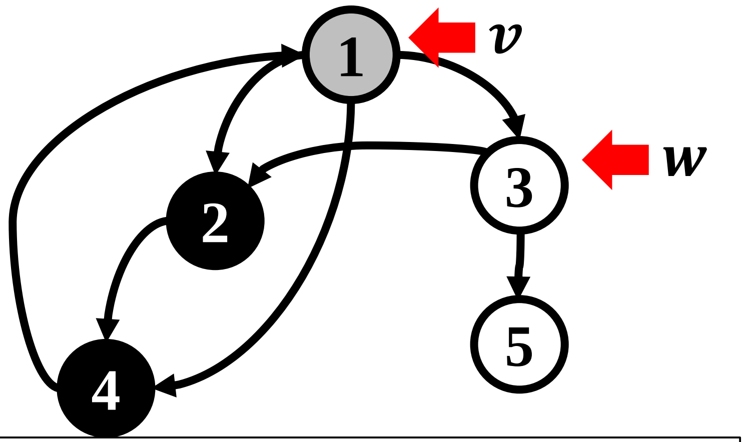
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | N | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | W | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 |  | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 5$

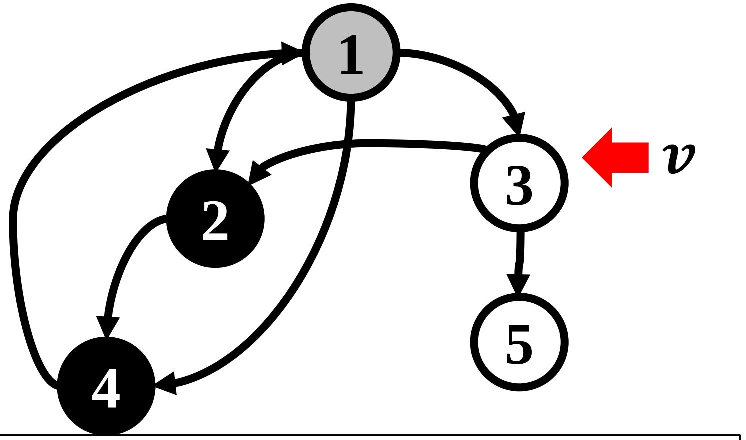
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | W | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 |  | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 5$

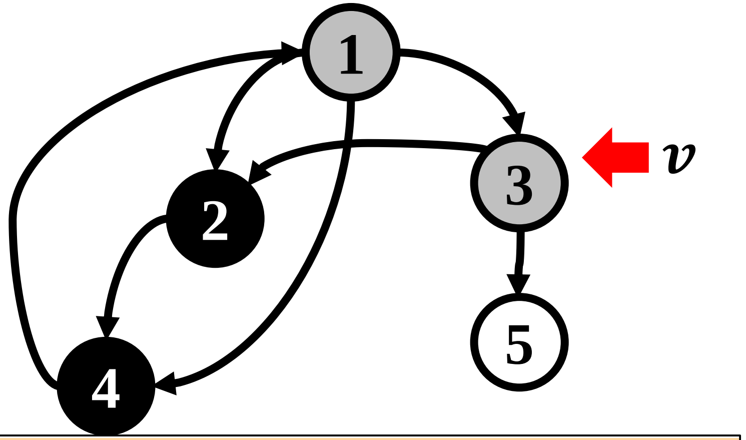
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | W | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 |  | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 5$

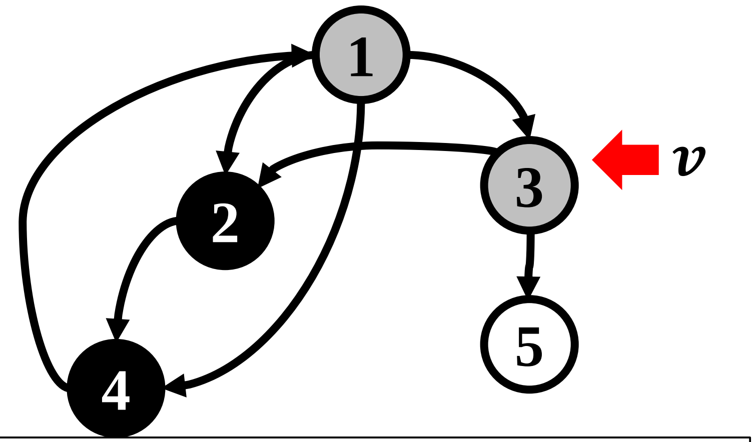
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | G | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 |  | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 6$

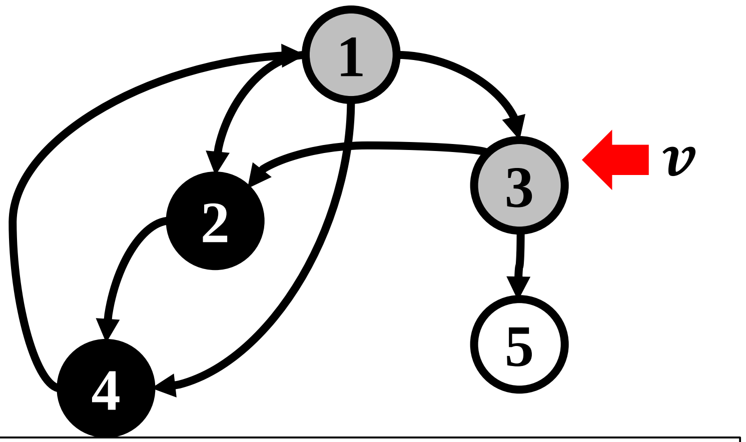
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | B | G | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 |  | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 6$

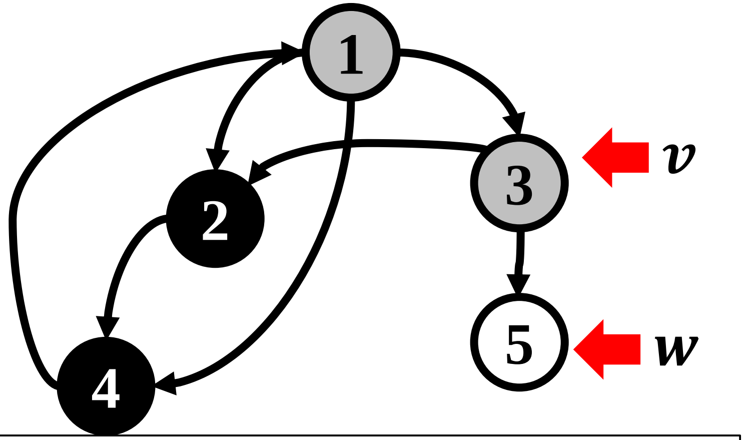
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | B | G | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | 6 | 3 | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | 5 | | 4 | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 6$

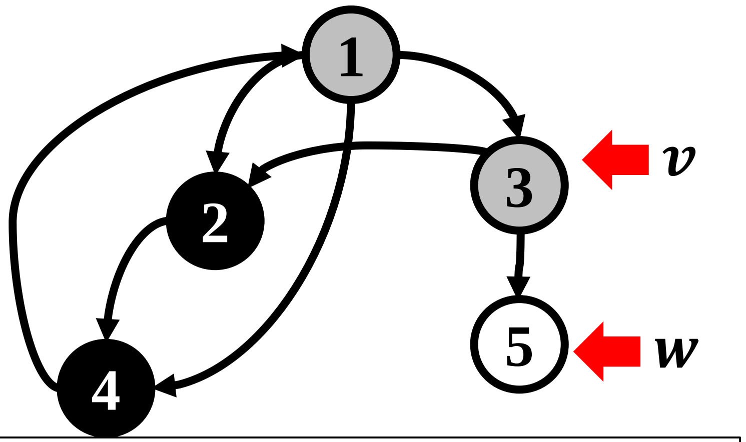
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | G | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | 6 | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 6$

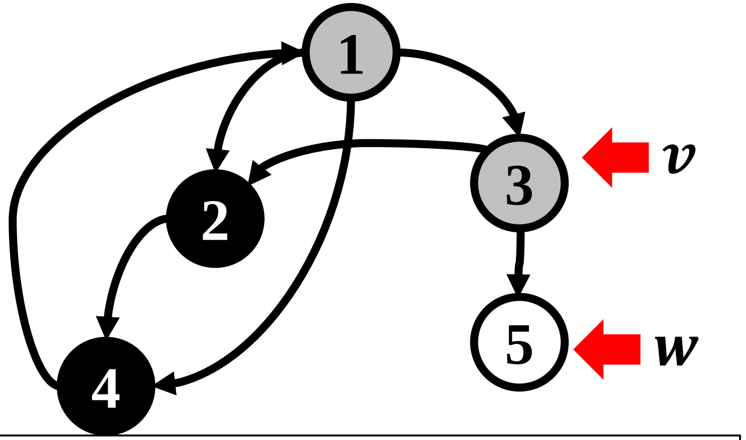
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | N |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | G | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | 6 | 3 | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* | | 5 | | 4 | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 6$

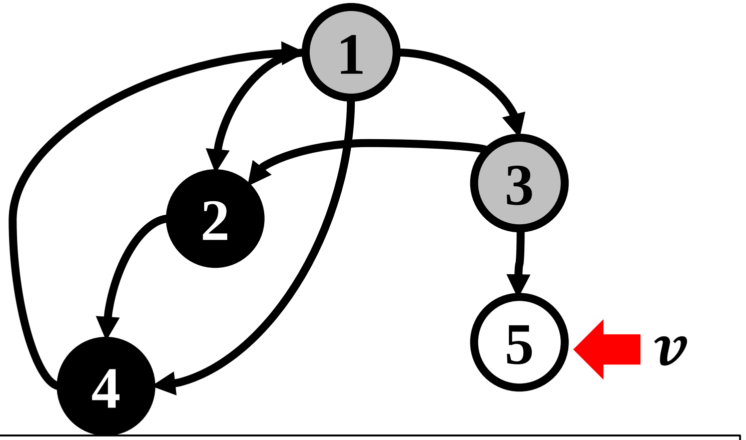
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | G | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | 6 | 3 | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | 5 | | 4 | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 6$

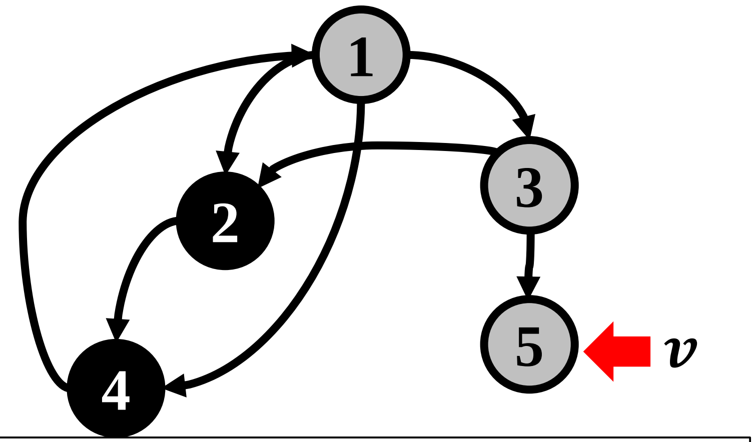
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | B | G | B | W |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | 6 | 3 | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | 5 | | 4 | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 6$

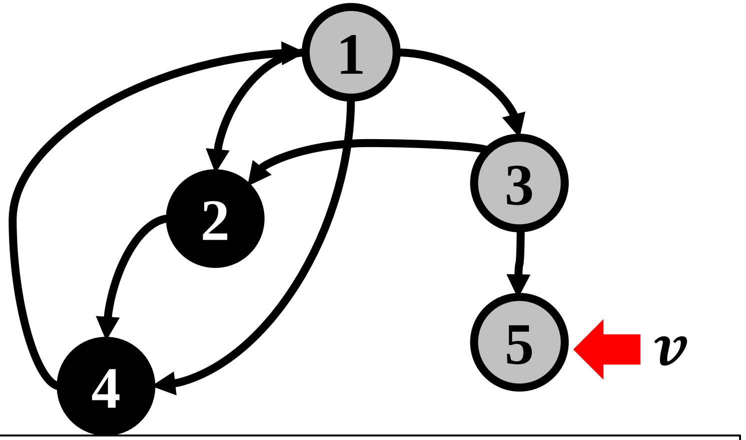
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | B | G | B | G |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | 6 | 3 | |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | 5 | | 4 | |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 7$

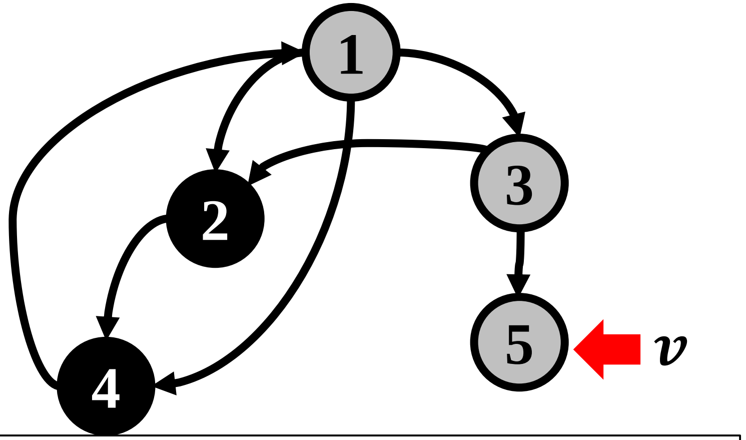
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | G | B | G |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | 6 | 3 |  |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 7$

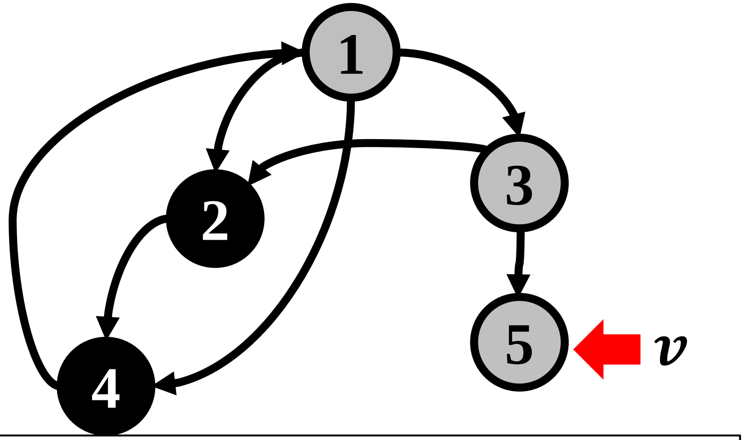
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | G | B | G |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
color[v] ← GRAY
time ← time + 1
d[v] ← time
for w ∈ Adj[v] do
    if color[w] = WHITE then
        pred[w] ← v
        DFS-Visit(w)
    end
end
color[v] ← BLACK
time ← time + 1
f[v] ← time
```

*time* = 7

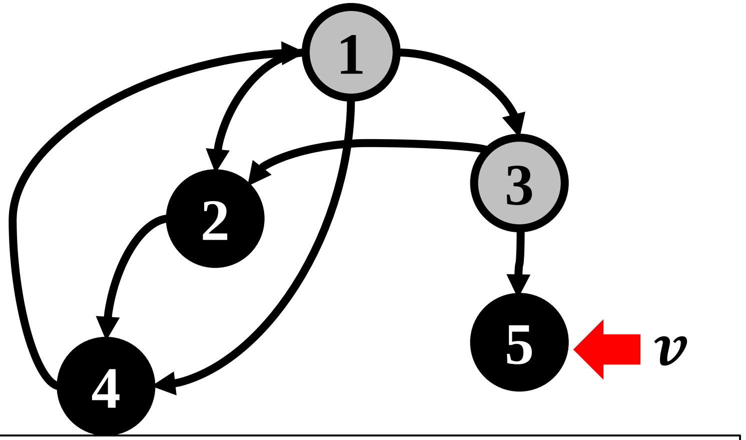
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | G | B | G |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit($w$)
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 7$

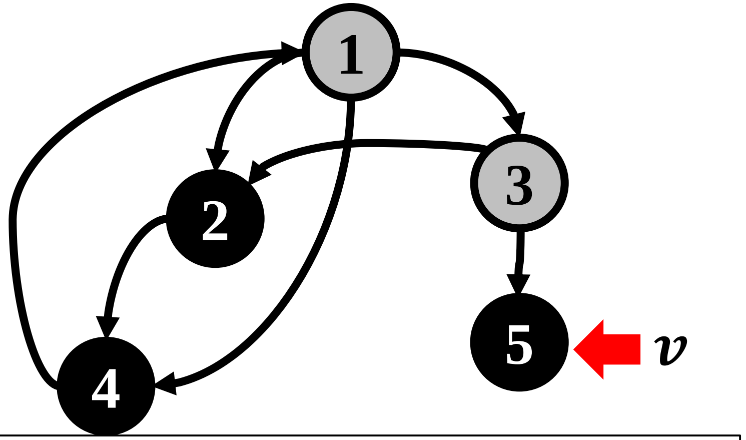
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | B | G | B | B |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 8$

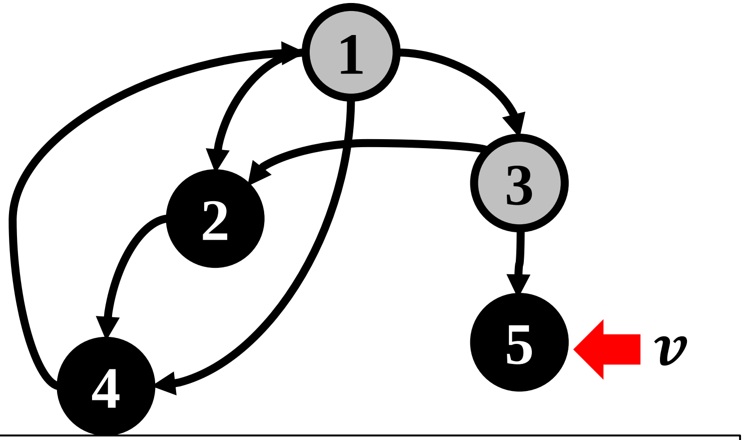
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | G | B | B |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 |  |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 8$

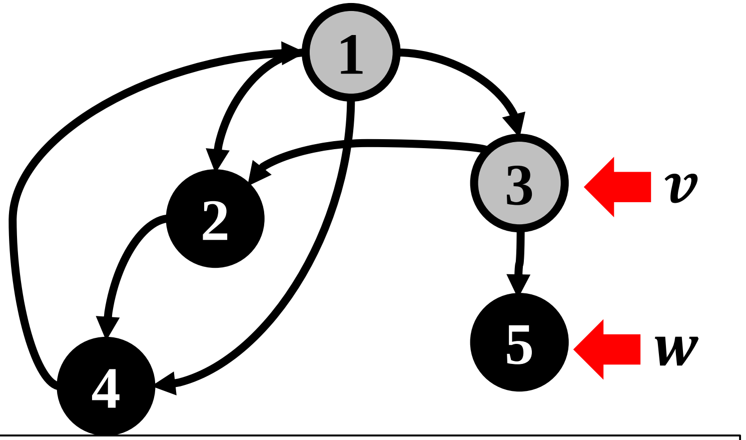
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | G | B | B |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 | 8 |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 8$

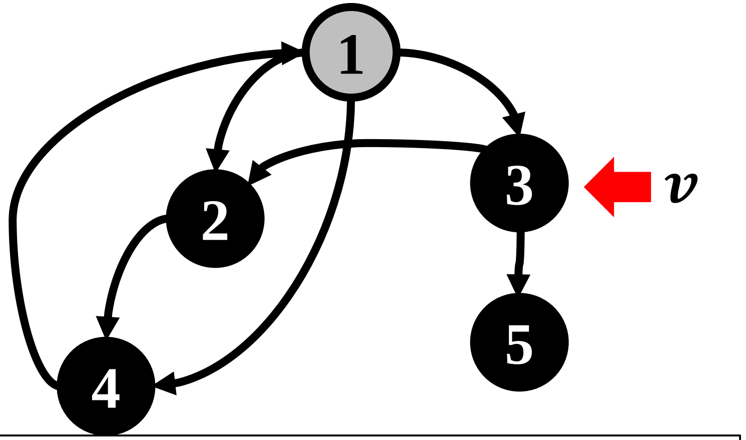
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | G | B | B |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 | 8 |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 8$

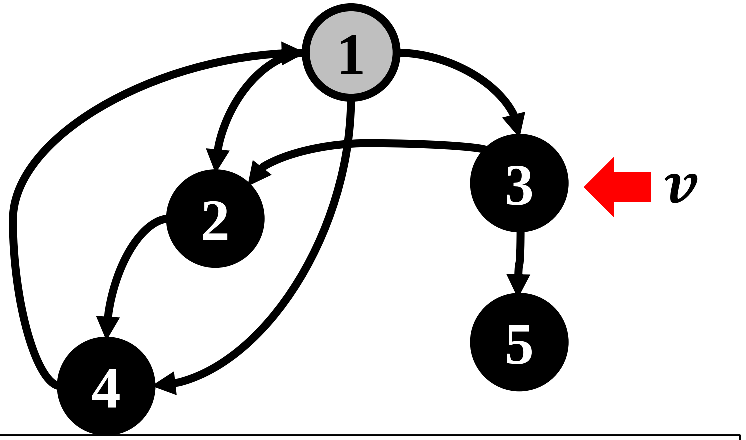
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | B | B | B |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 |  | 4 | 8 |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 9$

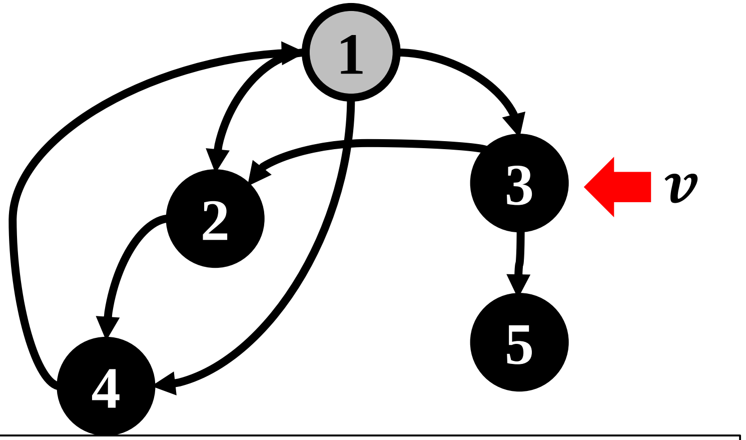
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | B | B | B | B |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  | 5 |  | 4 | 8 |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 9$

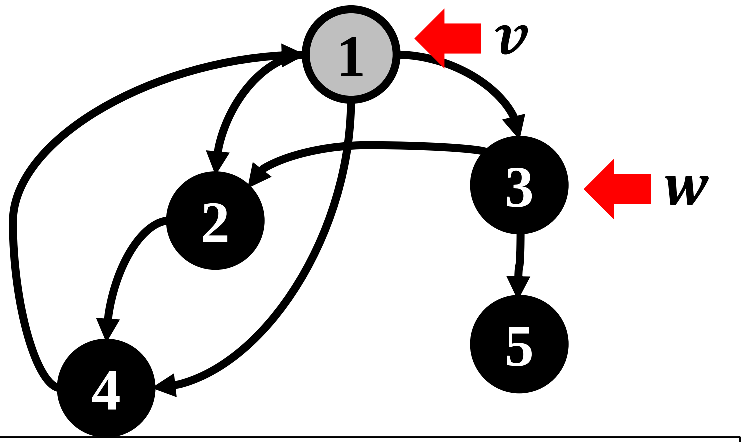
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | G | B | B | B | B |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  | 5 | 9 | 4 | 8 |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

*time* = 9

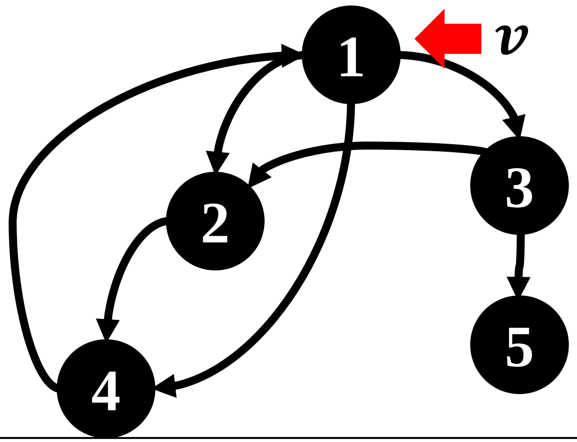
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | G | B | B | B | B |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 | 9 | 4 | 8 |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 9$

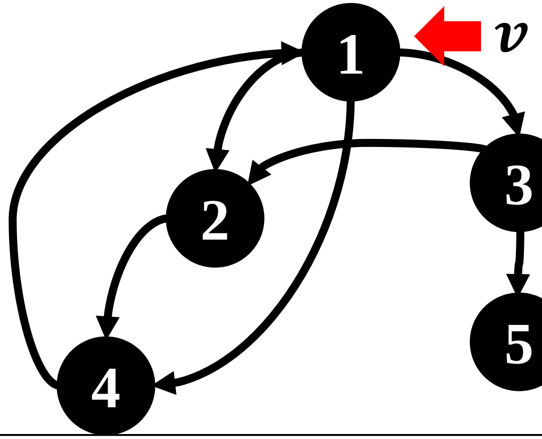
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | B | B | B | B | B |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ |  | 5 | 9 | 4 | 8 |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

*time* = 10

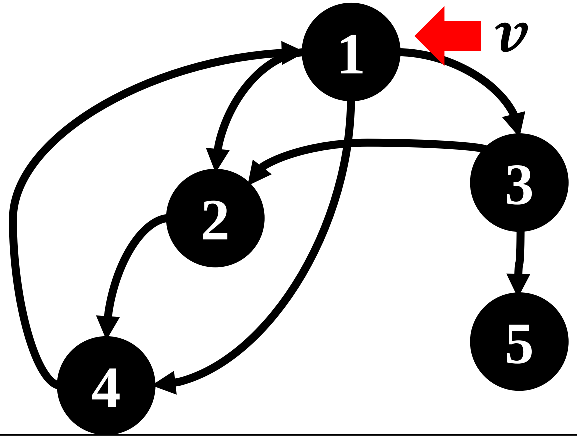
| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *pred* | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *color* | B | B | B | B | B |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| *v* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* |  | 5 | 9 | 4 | 8 |

# 深度优先搜索回顾：有向图算法实例



```
$color[v] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[v] \leftarrow time$
for $w \in Adj[v]$ do
    if $color[w] = WHITE$ then
        $pred[w] \leftarrow v$
        DFS-Visit$(w)$
    end
end
$color[v] \leftarrow BLACK$
$time \leftarrow time + 1$
$f[v] \leftarrow time$
```

$time = 10$

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $color$ | B | B | B | B | B |

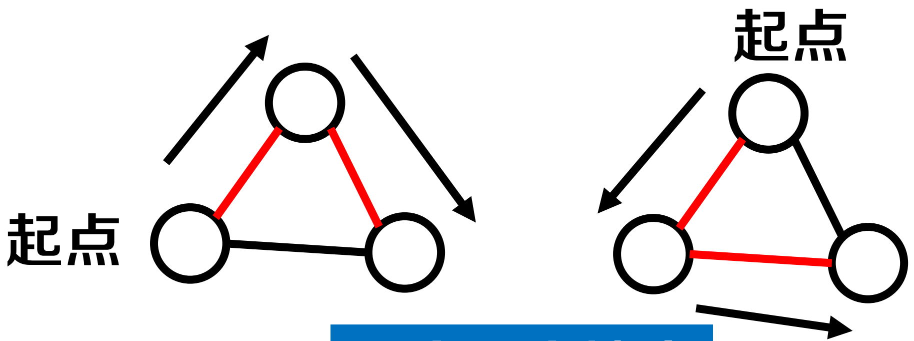
| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | 1 | 2 | 6 | 3 | 7 |

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 10 | 5 | 9 | 4 | 8 |

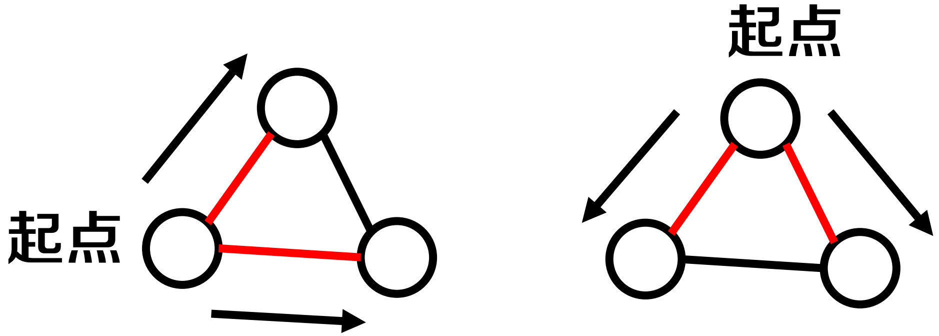
# 连通无向图的优先树与连通有向图的优先森林

- 无向图
  - 树的形状：取决于搜索顺序
  - 树的数量：确定1棵优先树

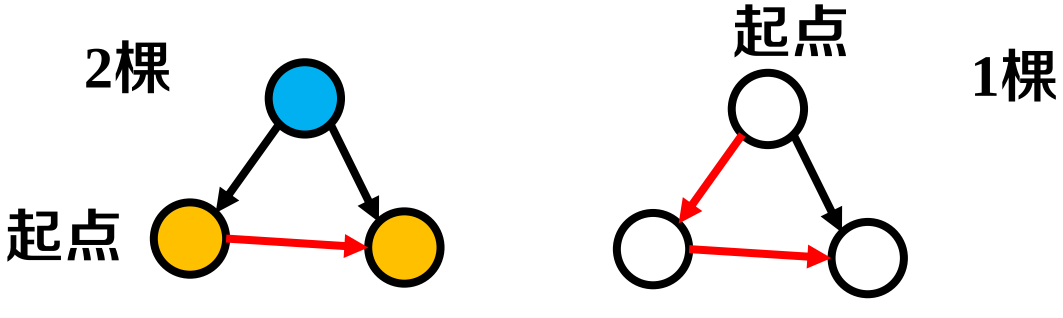
- 有向图
  - 树的形状：取决于搜索顺序
  - 树的数量：取决于搜索顺序



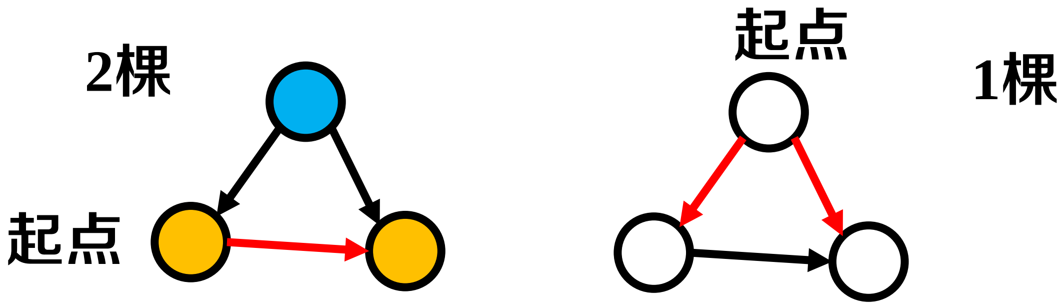
深度优先搜索



广度优先搜索

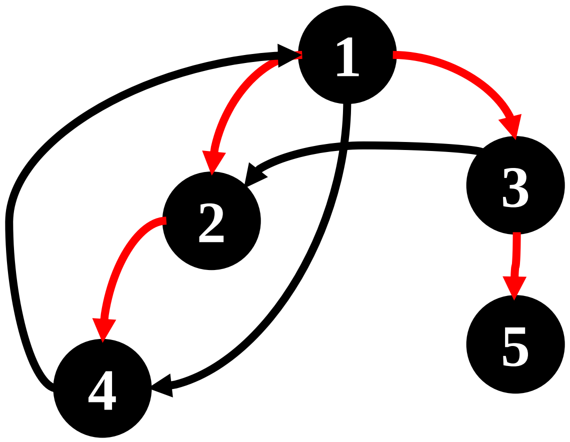


深度优先搜索



广度优先搜索

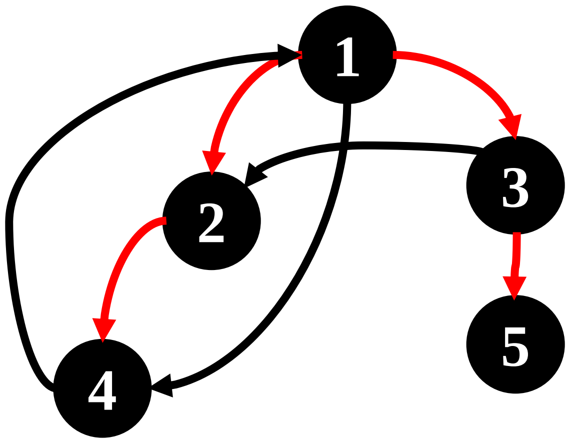
# 有向图深度优先森林



$time = 10$

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

# 有向图深度优先森林

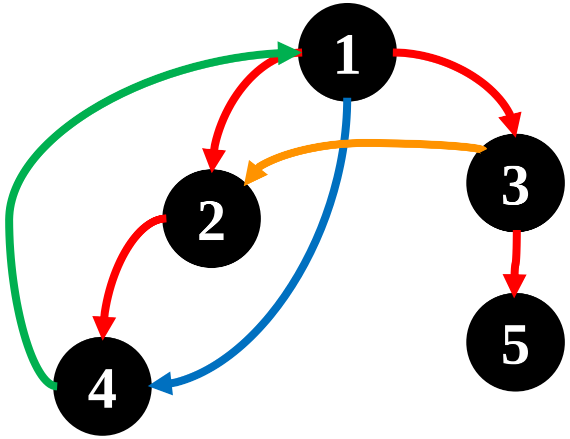


$time = 10$

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

- 回顾深度优先搜索边的性质
  - 后向边：不是树边，但两顶点在深度优先树中是祖先后代关系
  - 对于无向图，非树边一定是后向边

# 有向图深度优先森林



$time = 10$

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $pred$ | N | 1 | 1 | 2 | 3 |

区别1：祖先指向后代？还是相反？

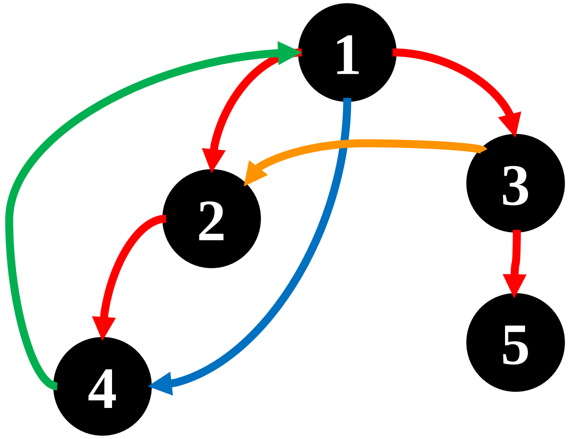
- 回顾深度优先搜索边的性质
  - 后向边：不是树边，但两顶点在深度优先树中是祖先后代关系
  - 对于无向图，非树边一定是后向边

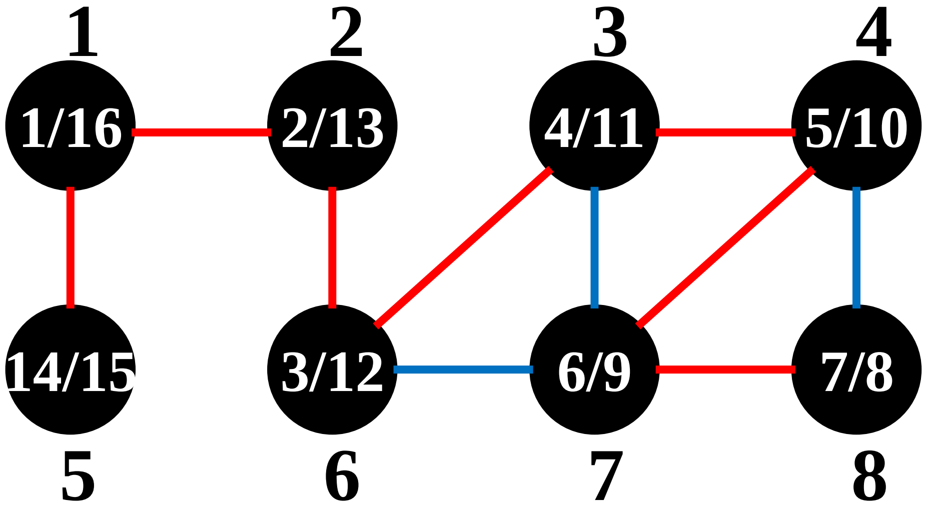
区别2：非树边出现在兄弟顶点之间

# 深度优先搜索边的分类

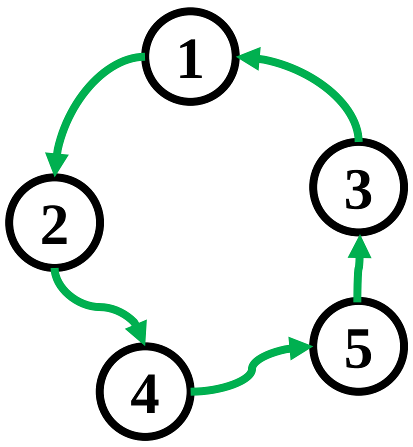
- 有向图，深度优先搜索有4类边
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边

- 无向图，深度优先搜索有2类边
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 后向边：两顶点有祖先后代关系的非树边

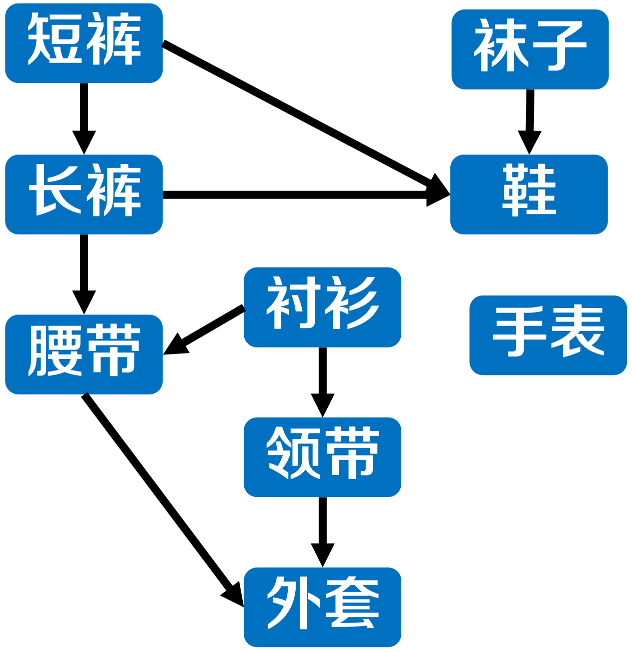




# 深度优先搜索应用



环路的存在性判断


短裤

袜子

长裤

鞋

衬衫

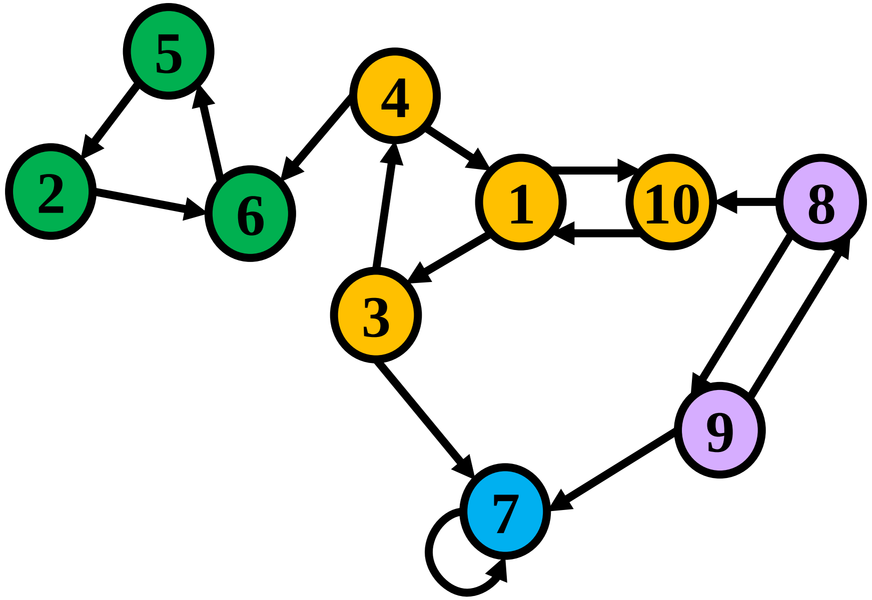
腰带

手表

领带

外套

拓扑排序



强连通分量

# 谢谢

BDA

Beihang University