

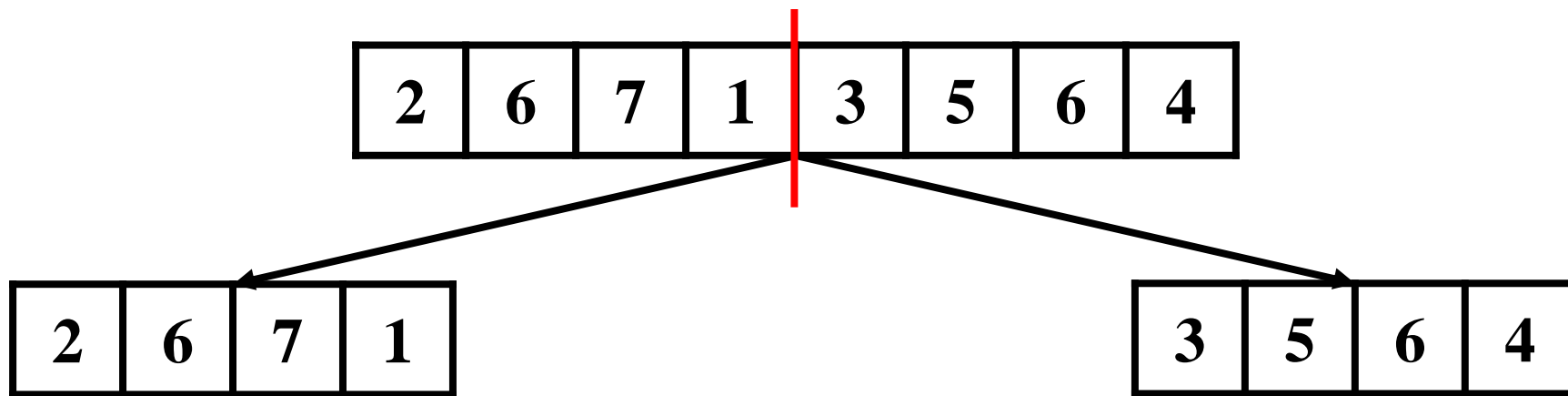
Design and Analysis of Algorithms

Lecture 7: Quicksort

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

算法回顾：归并排序



分而治之框架

分解原问题

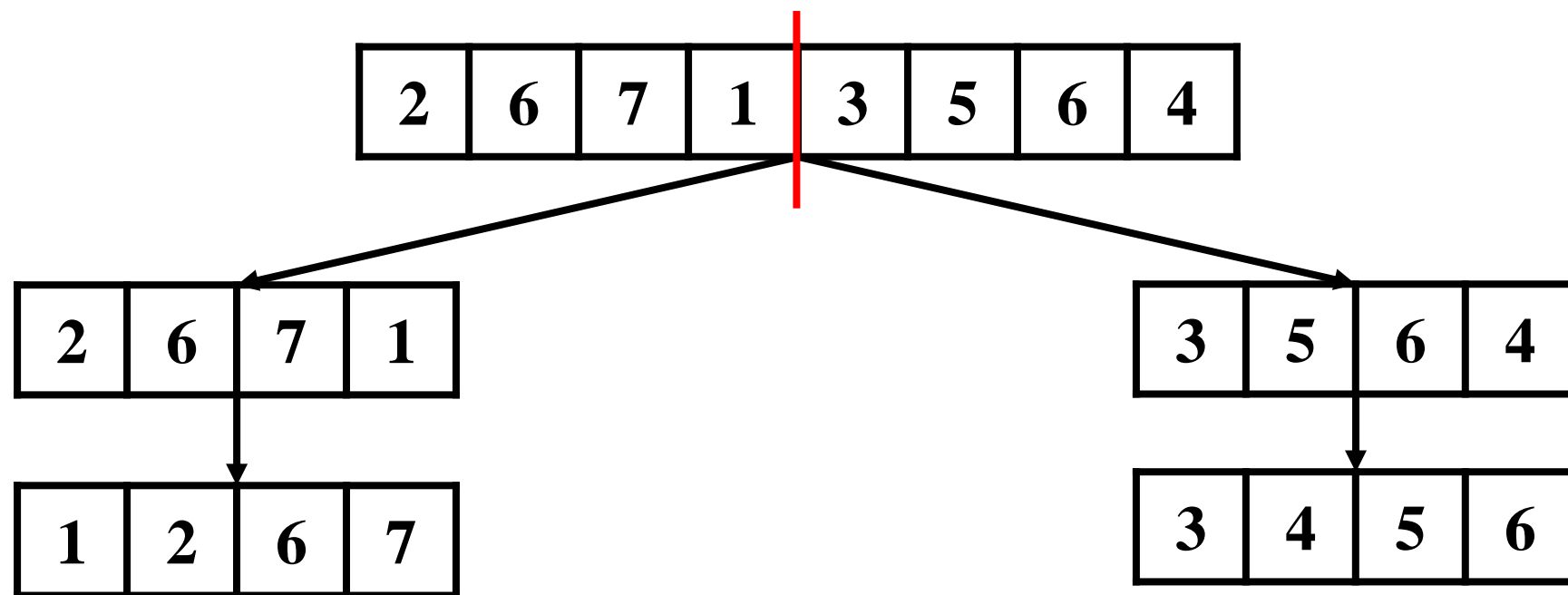


解决子问题



合并问题解

算法回顾：归并排序



分而治之框架

分解原问题

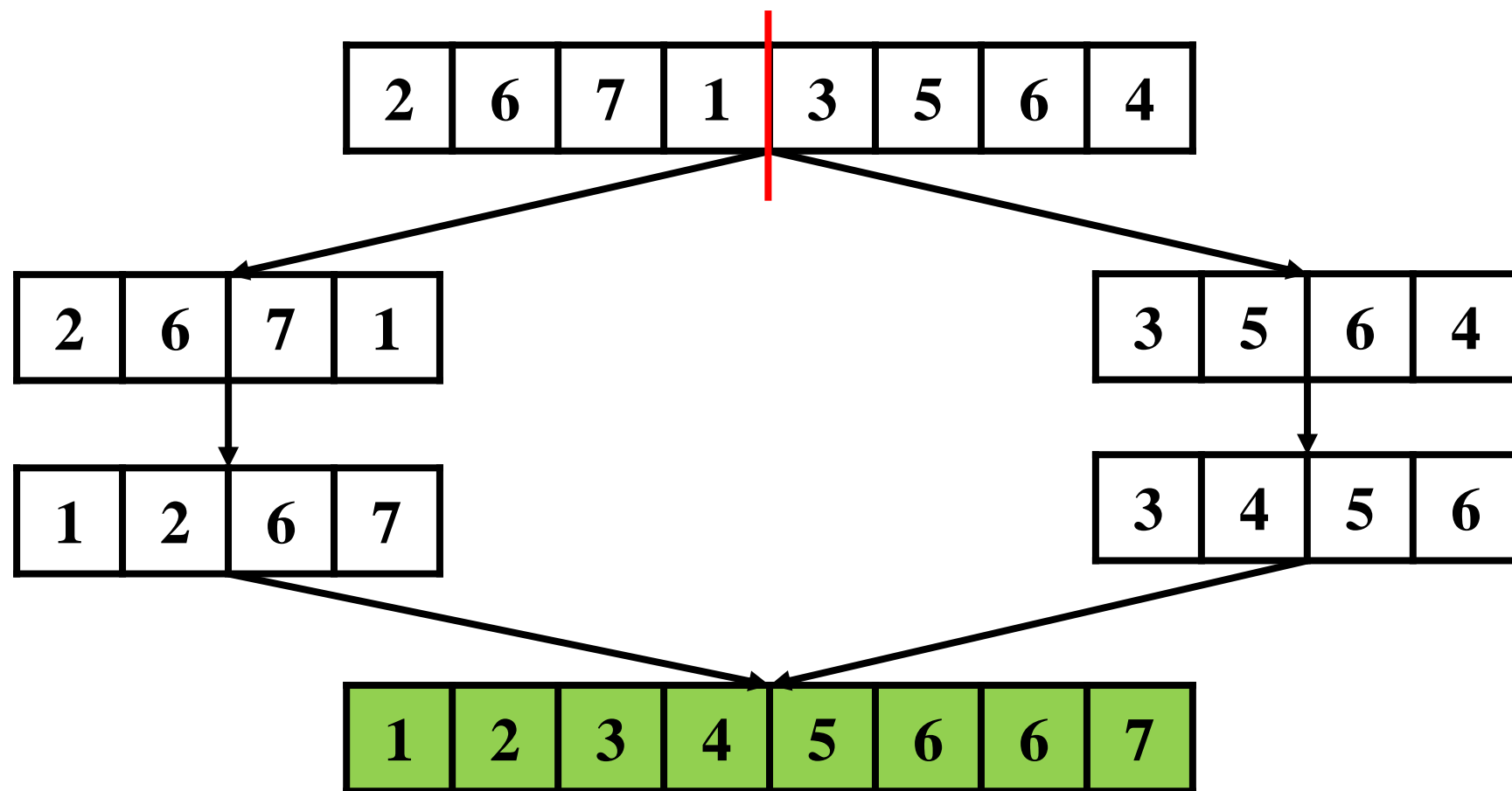


解决子问题



合并问题解

算法回顾：归并排序



分而治之框架

分解原问题

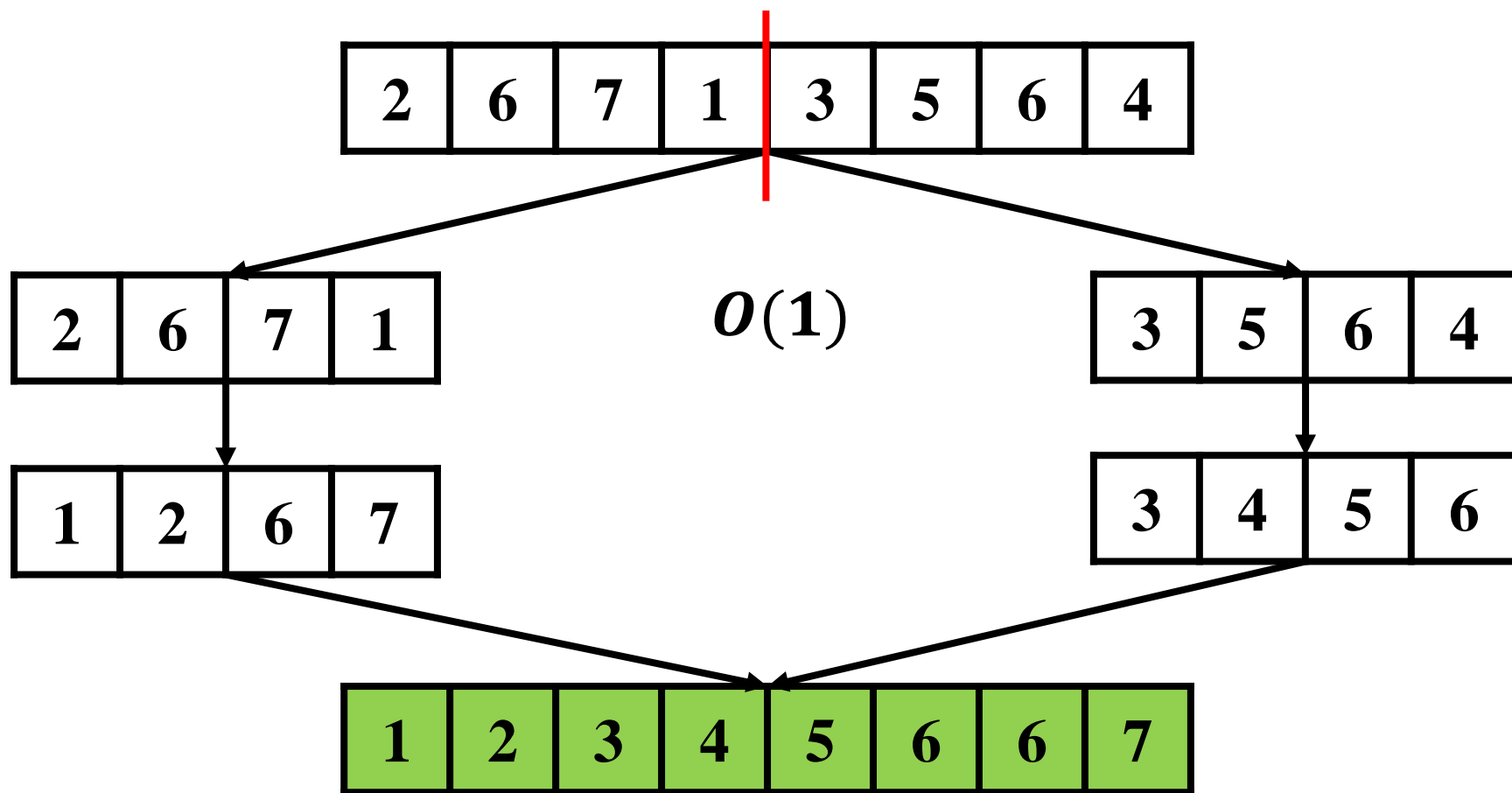


解决子问题



合并问题解

算法回顾：归并排序



分而治之框架

分解原问题

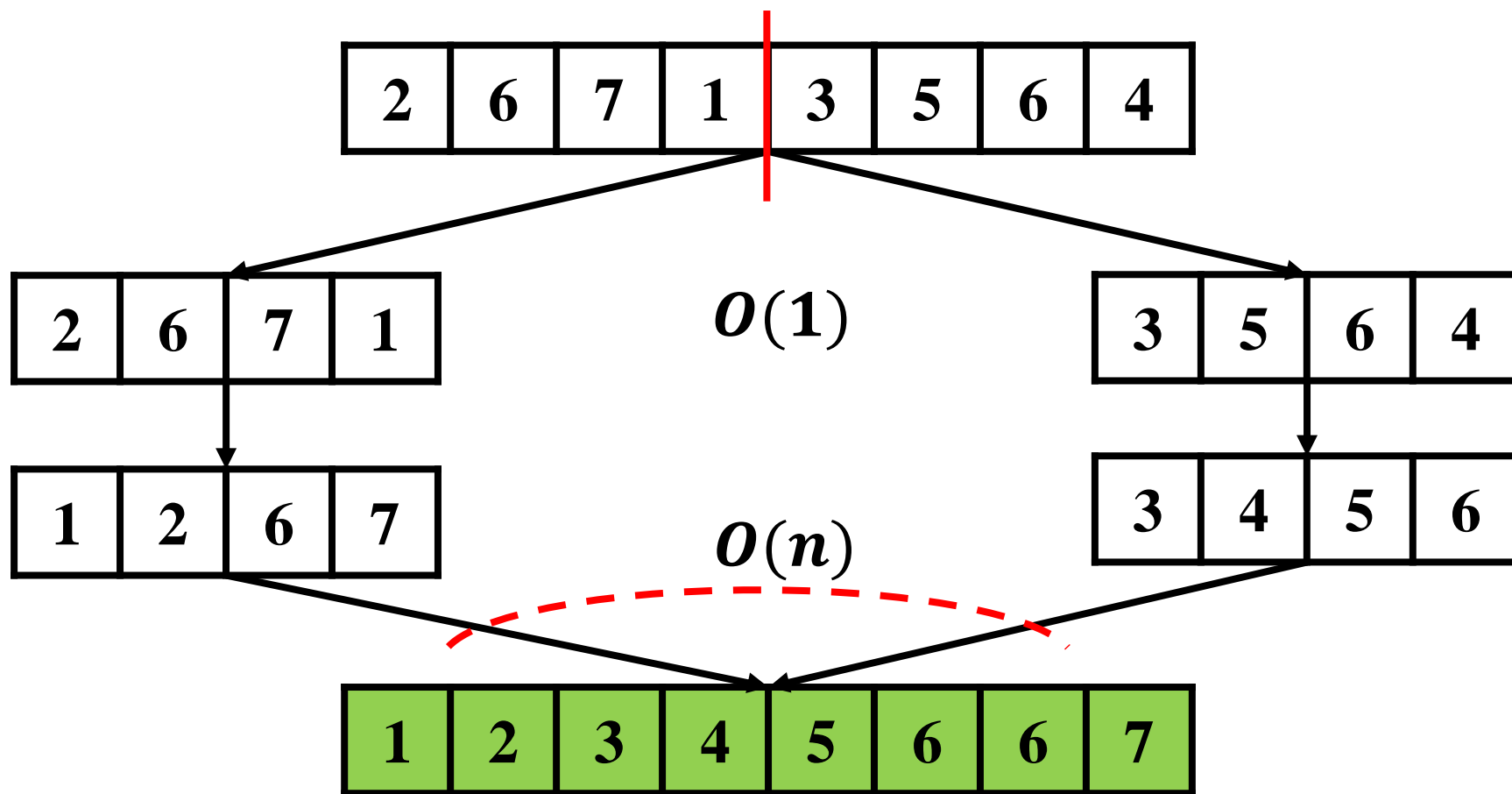


解决子问题



合并问题解

算法回顾：归并排序



分而治之框架

分解原问题



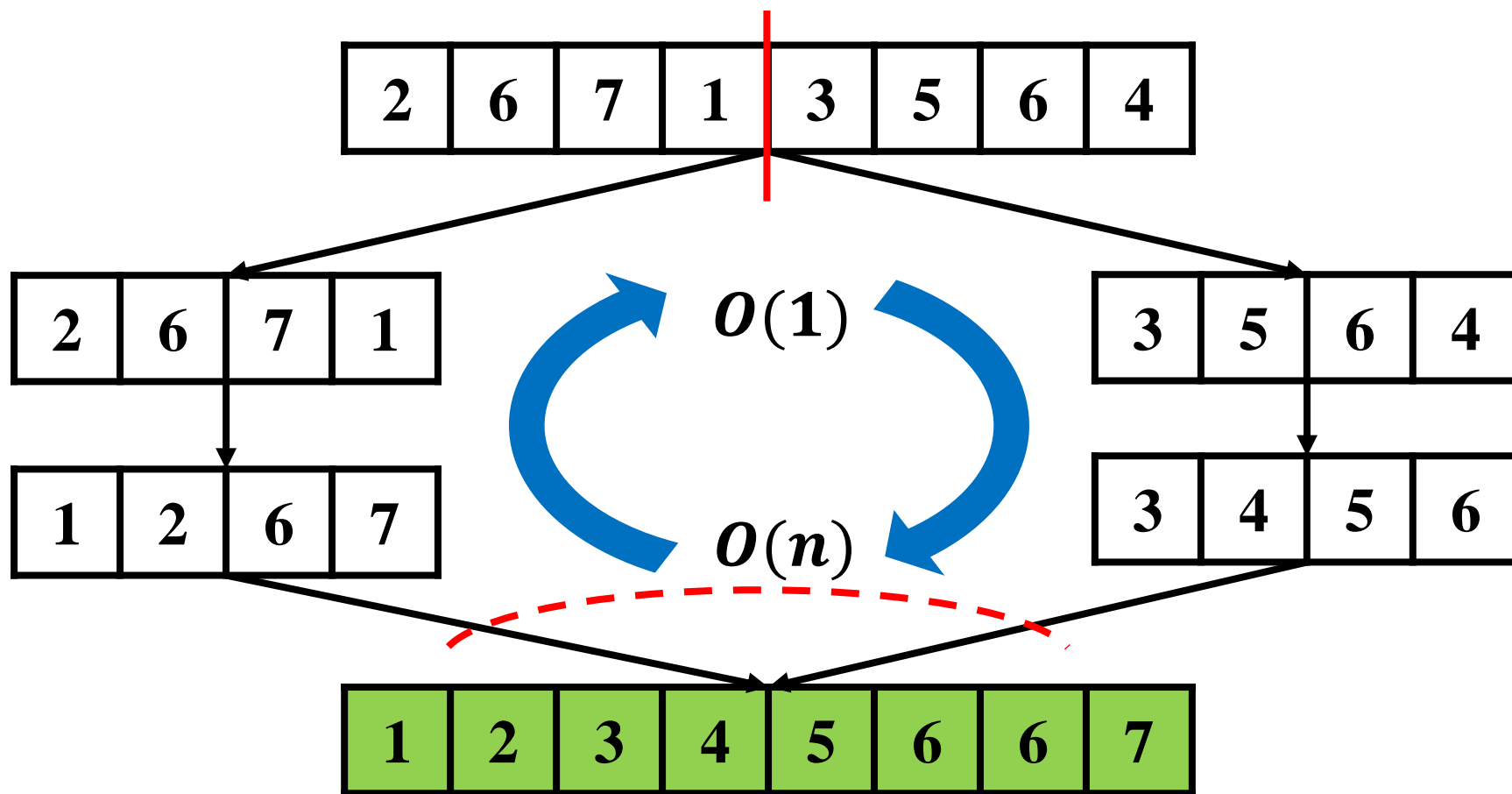
解决子问题



合并问题解

归并排序：简化分解，侧重合并

从归并排序到快速排序



分而治之框架

分解原问题

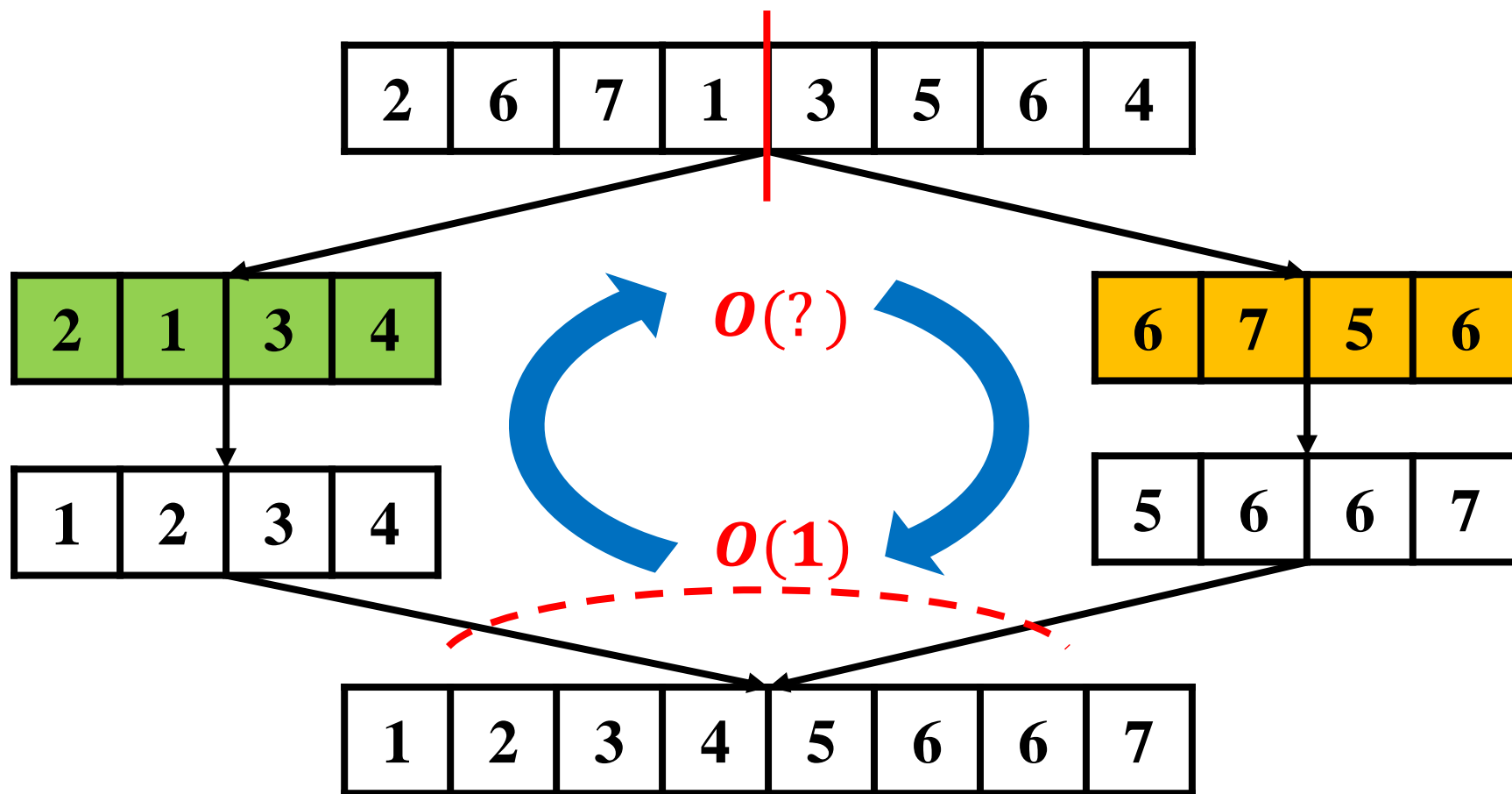


解决子问题



合并问题解

从归并排序到快速排序



分而治之框架

分解原问题



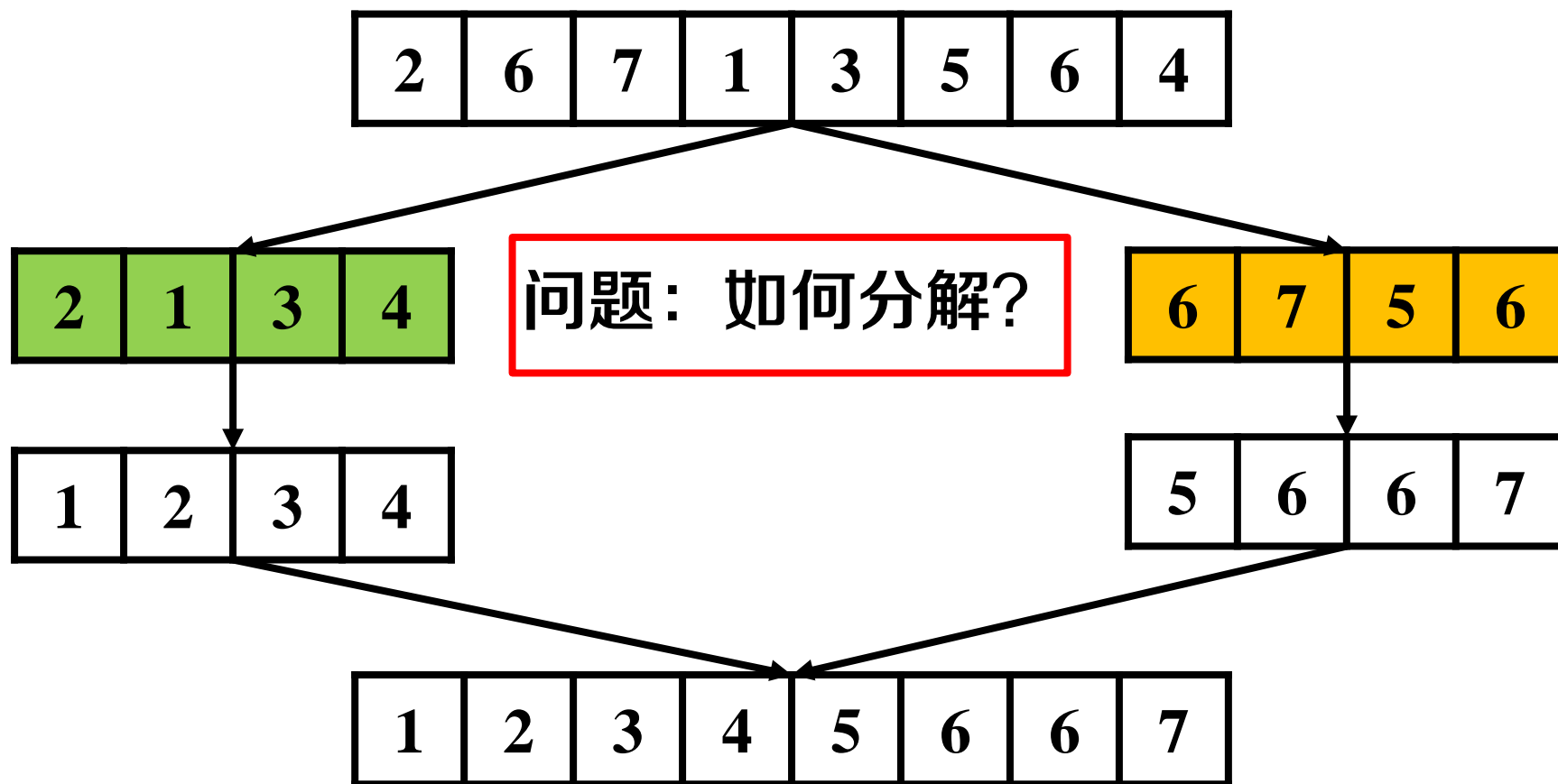
解决子问题



合并问题解

快速排序：侧重分解，简化合并

从归并排序到快速排序



分而治之框架

分解原问题



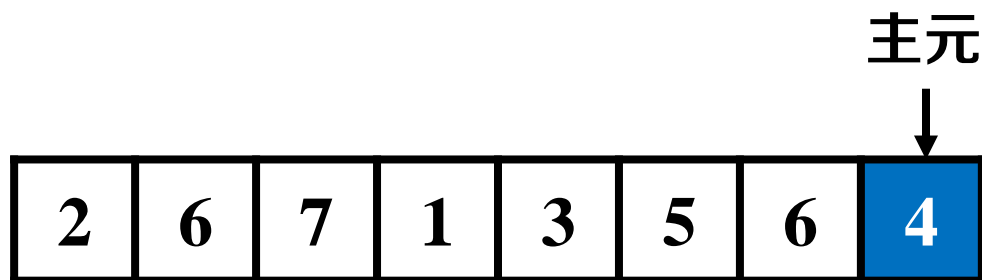
解决子问题



合并问题解

快速排序：侧重分解，简化合并

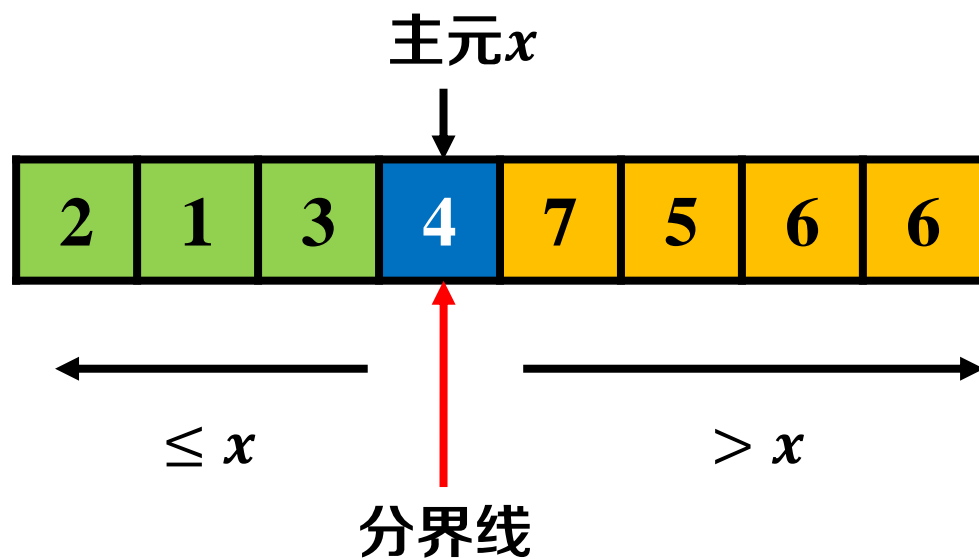
- 基本思想
 - 任选元素 x 作为分界线，称为**主元(pivot)**



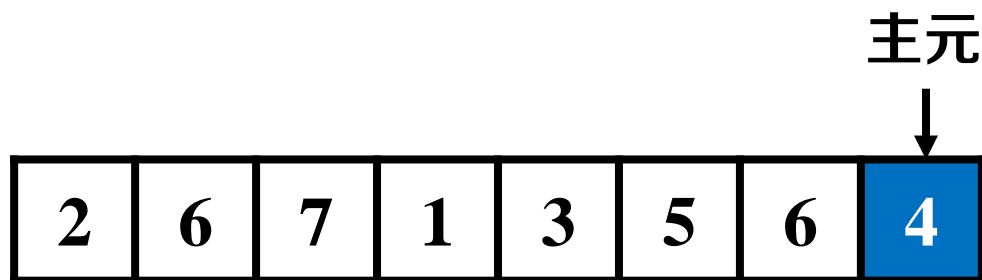
数组划分



- 基本思想
 - 任选元素 x 作为分界线，称为**主元(pivot)**
 - 交换重排，满足 x 左侧元素小于右侧



- 实现方法
 - 选取固定位置主元 x （如尾元素）

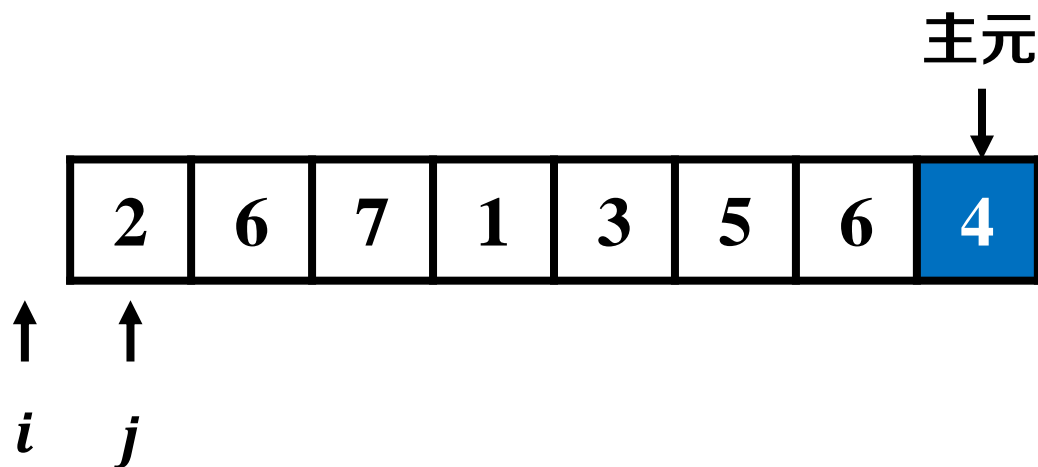
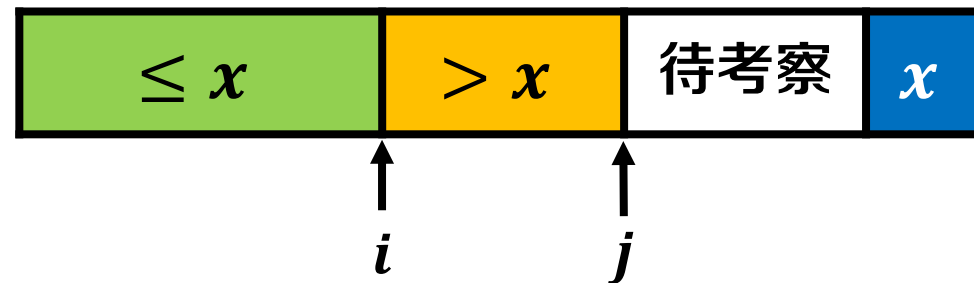


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**

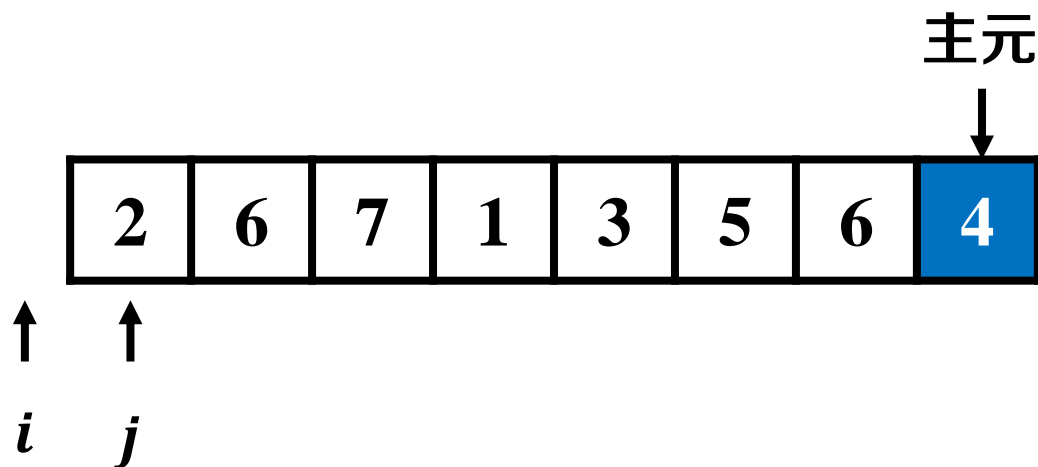
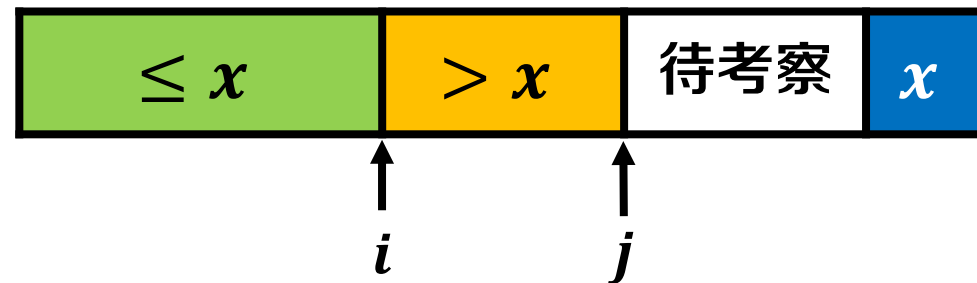


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

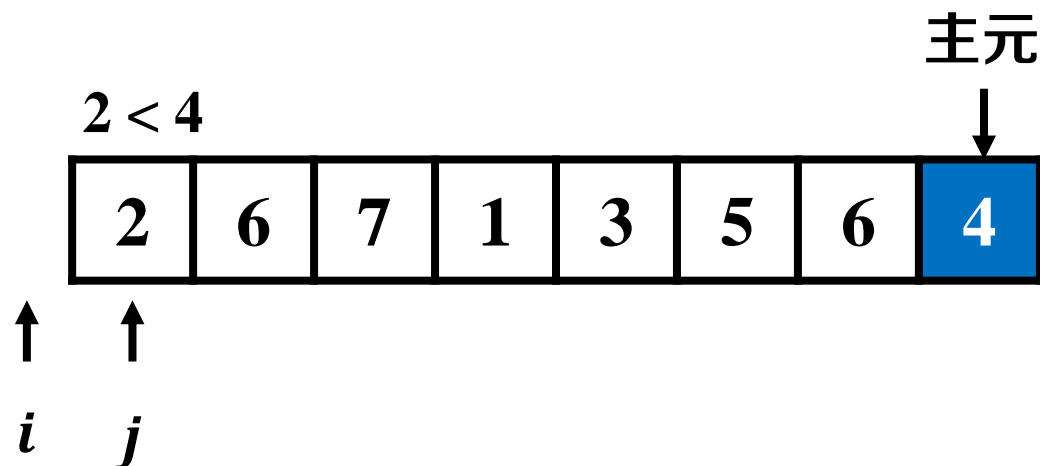
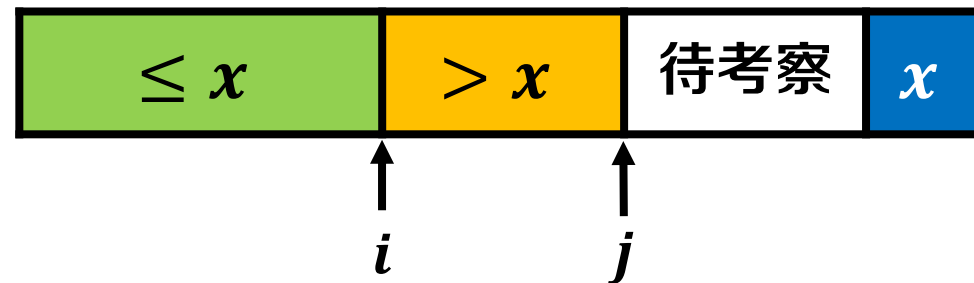


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

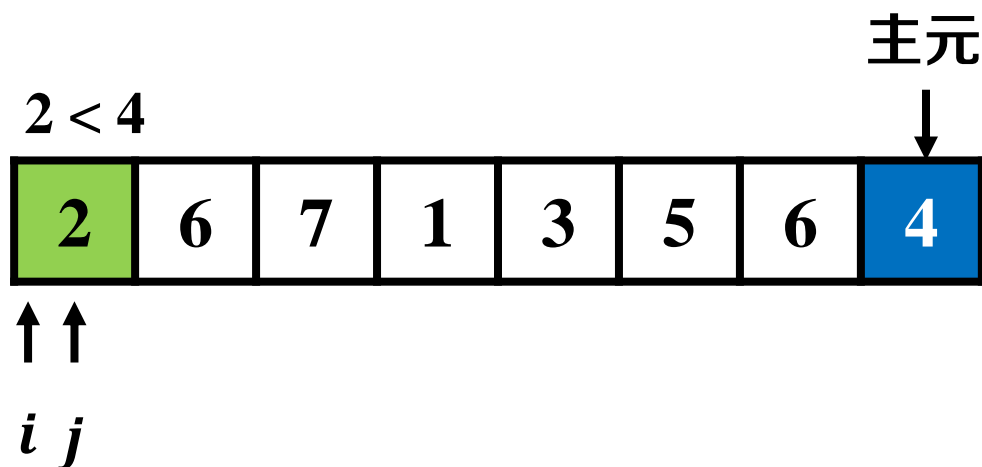
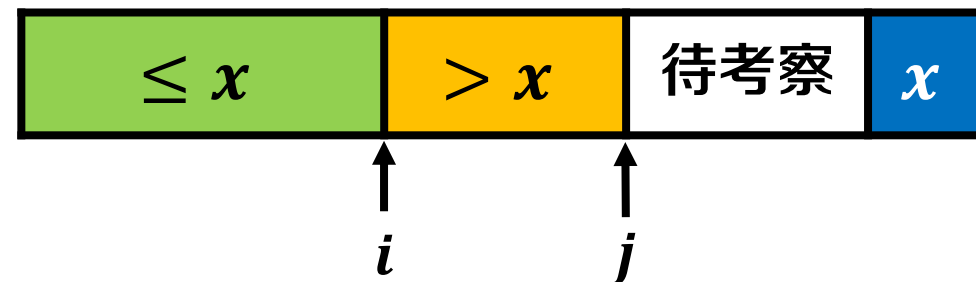


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

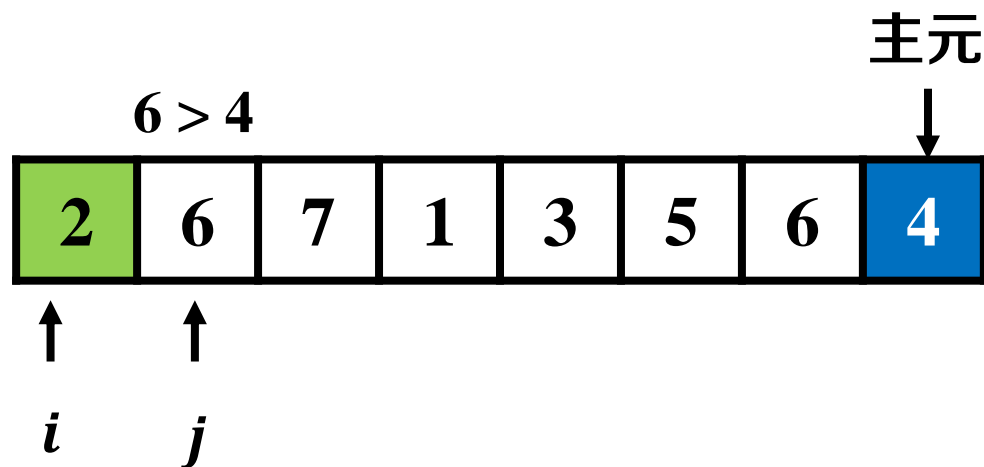
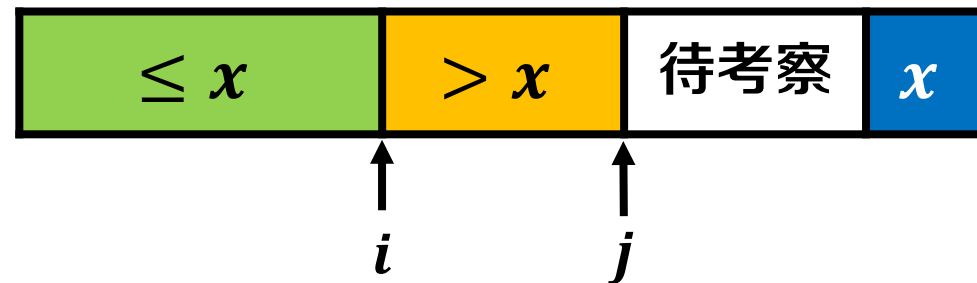


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

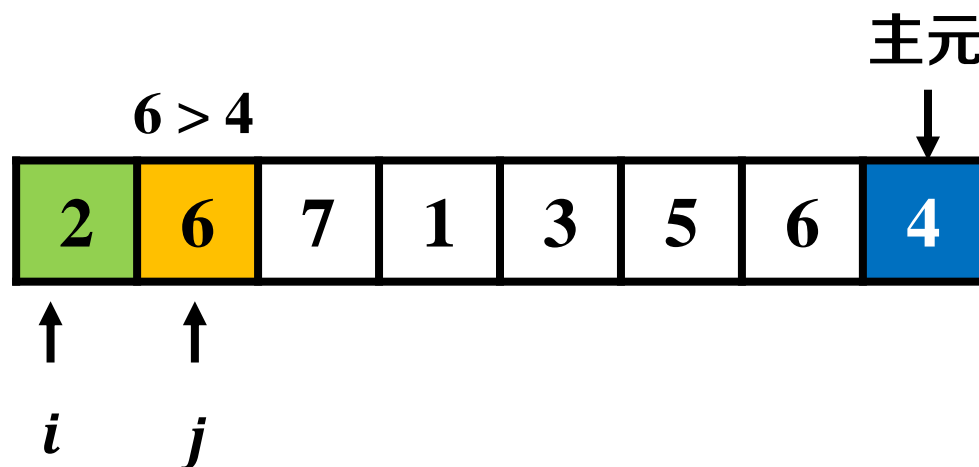
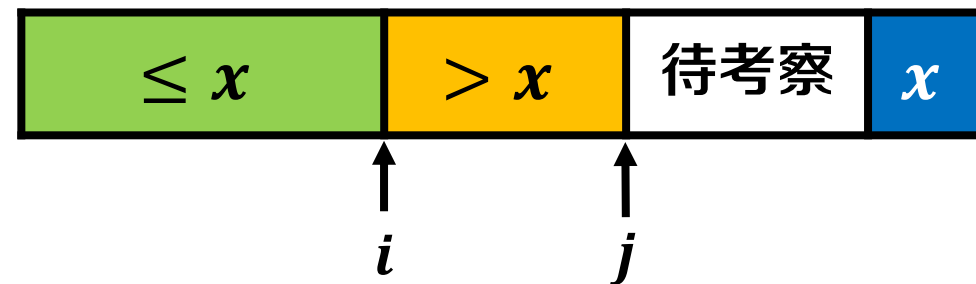


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

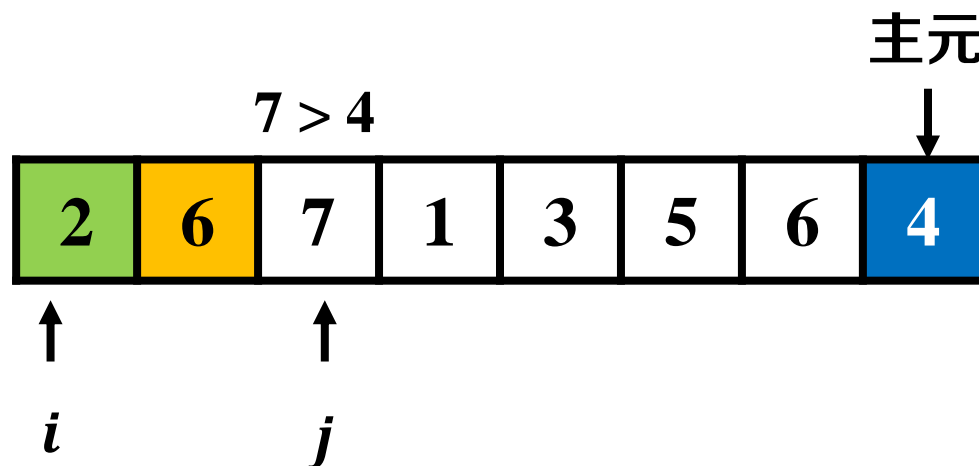
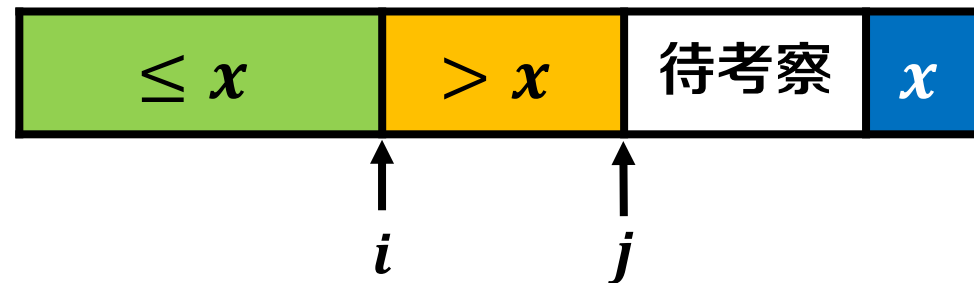


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

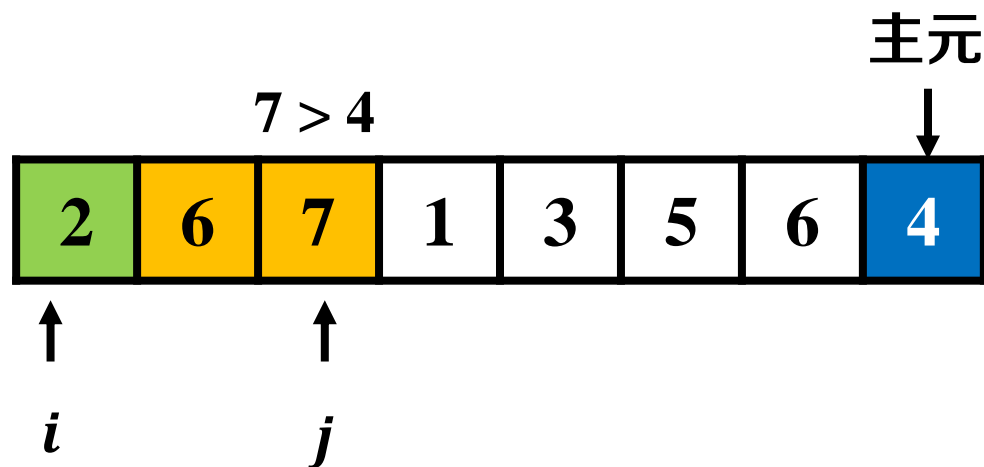
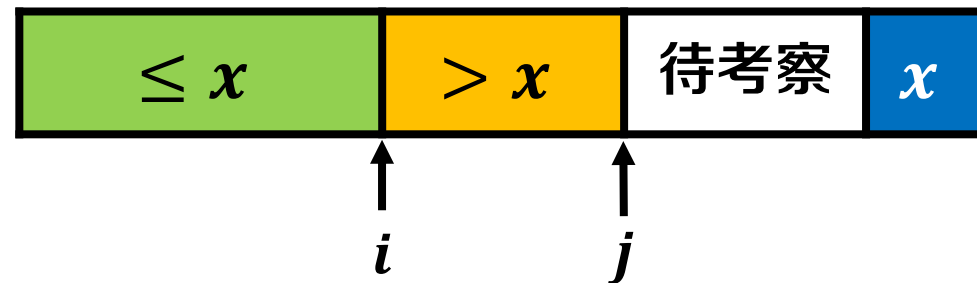


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

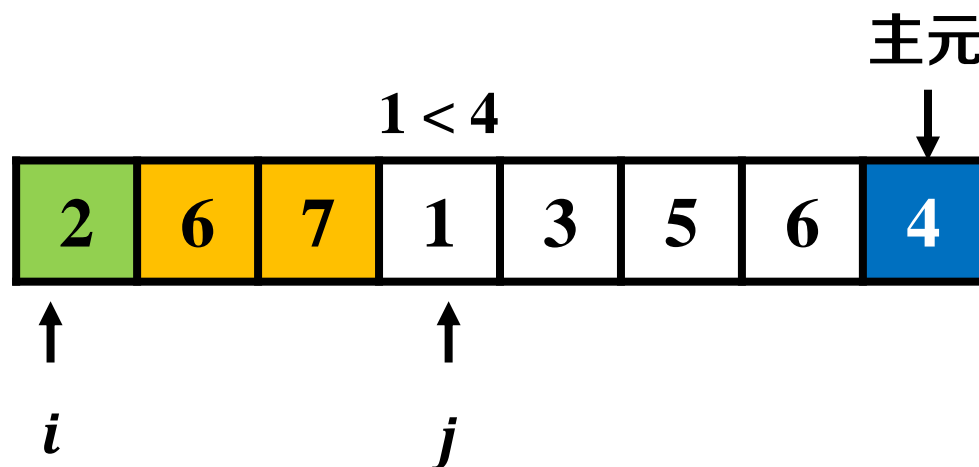
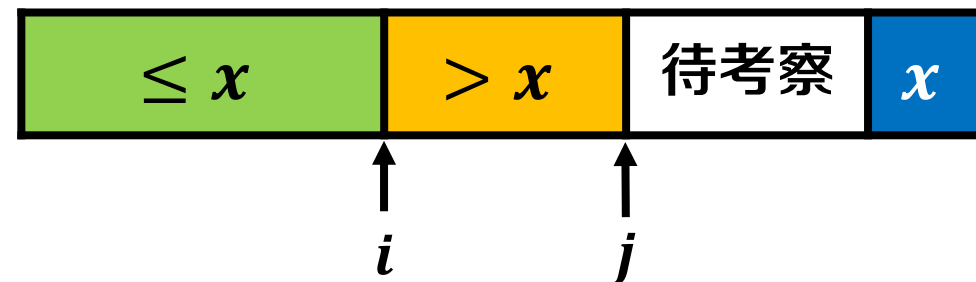


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

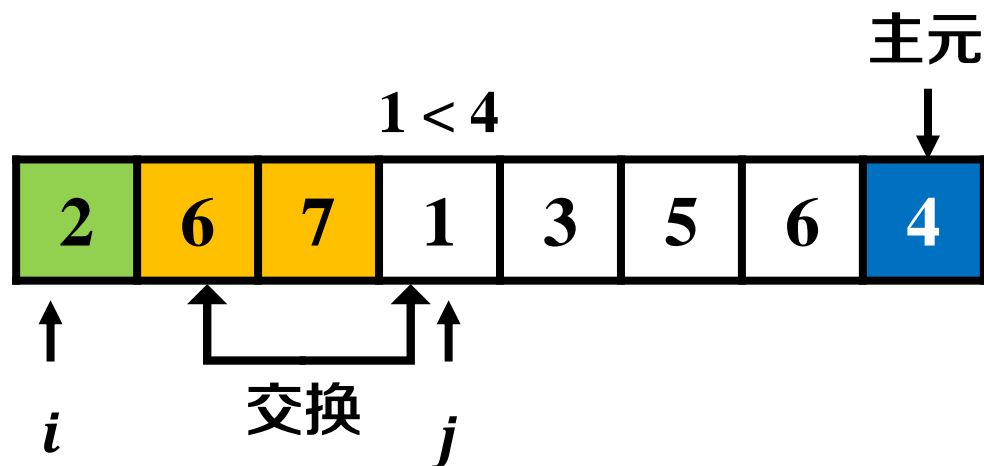
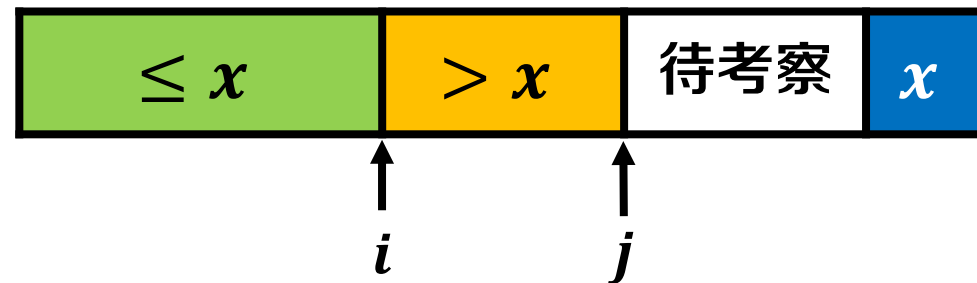


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

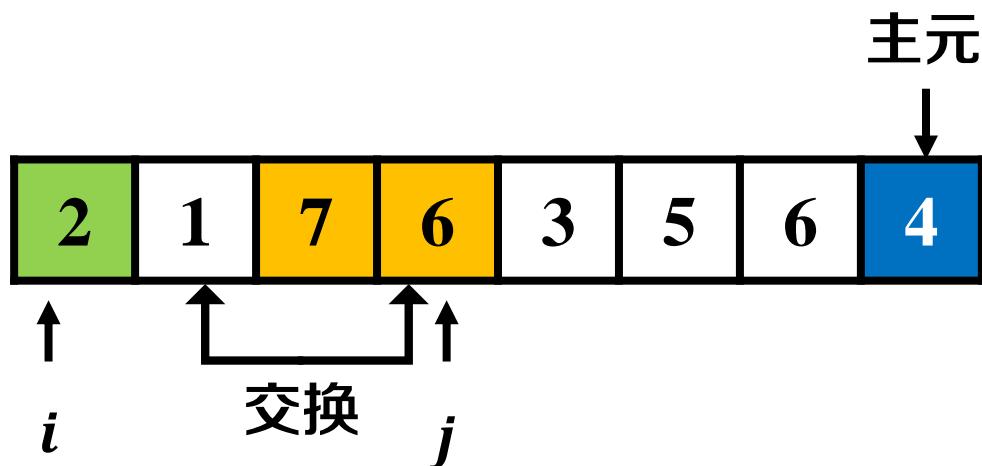
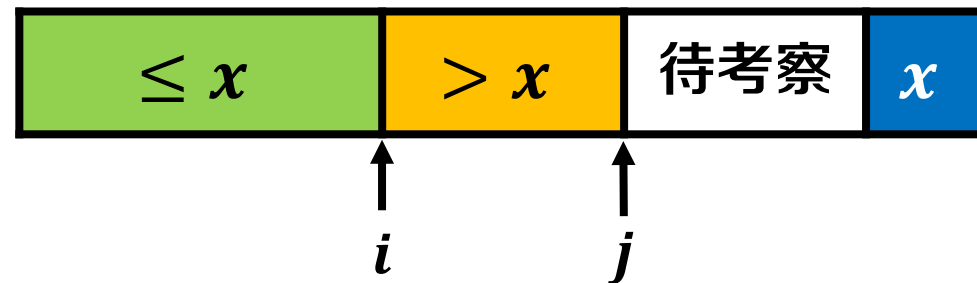


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

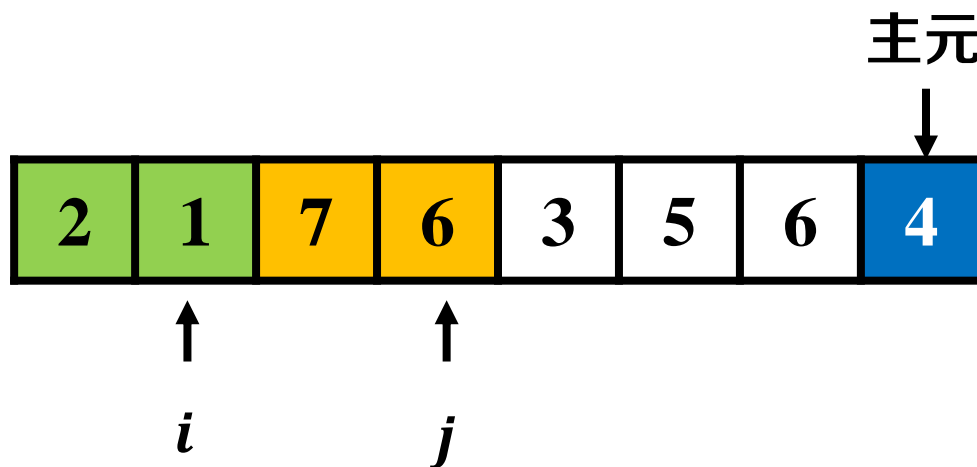
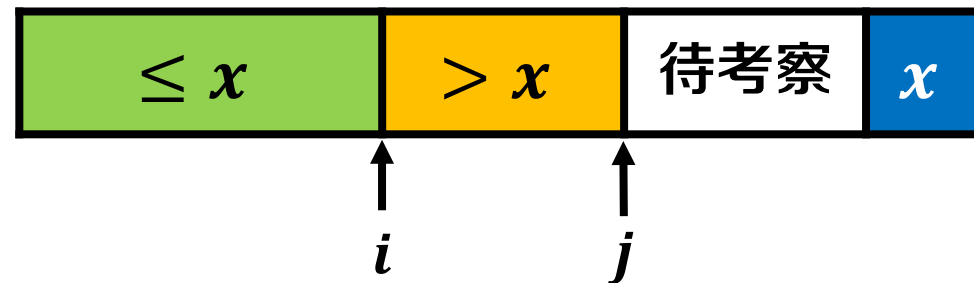


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

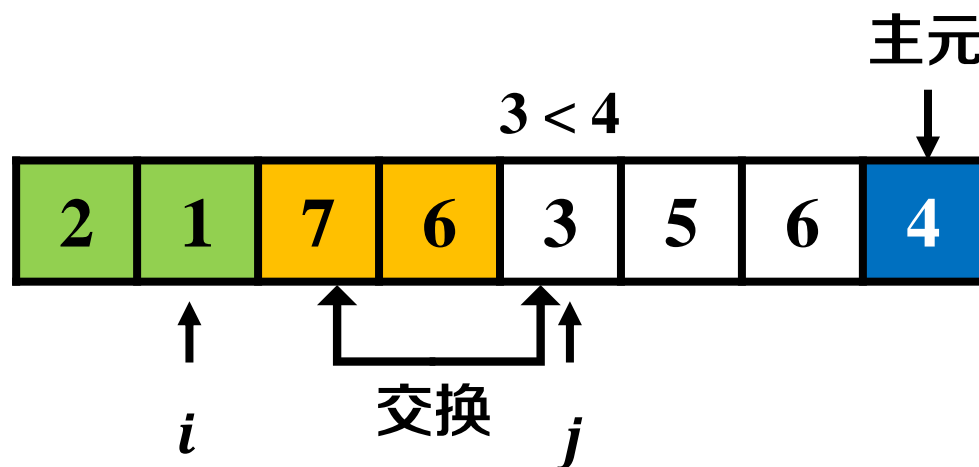
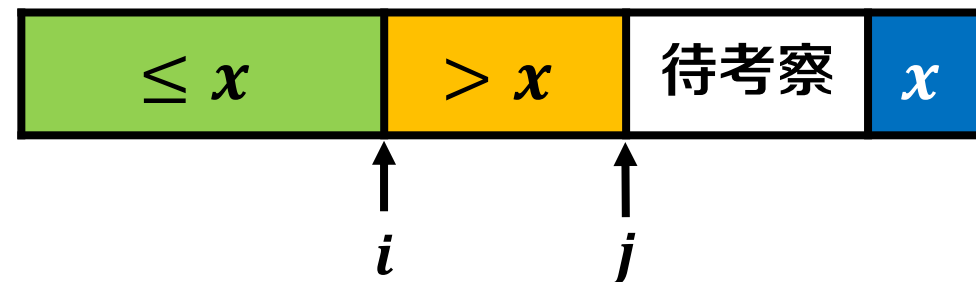


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

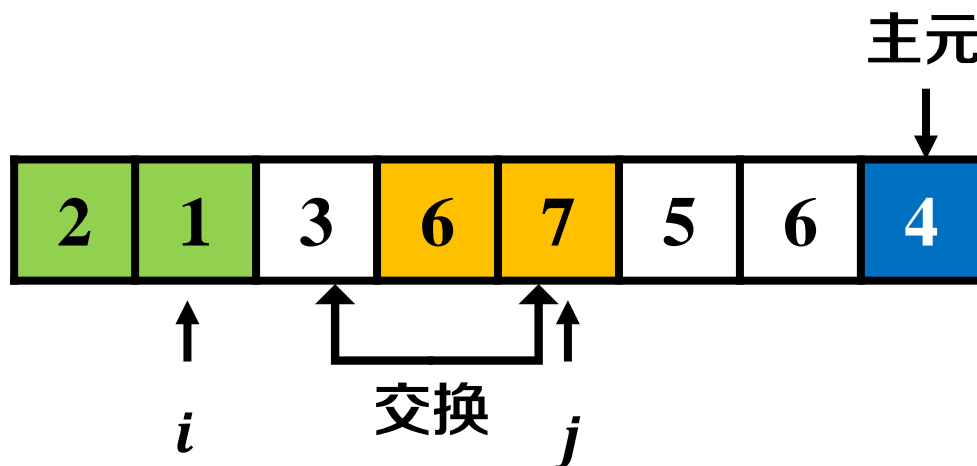
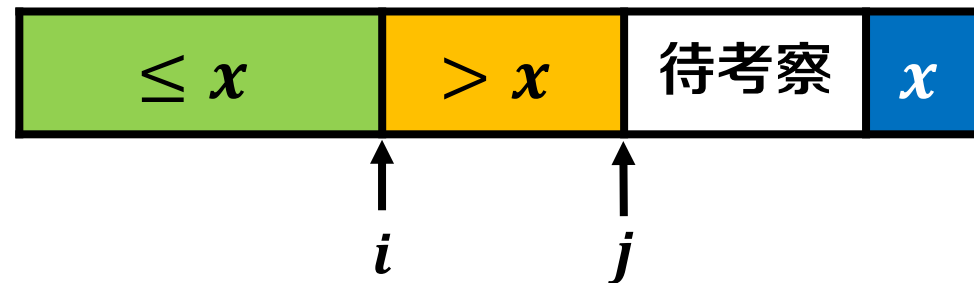


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

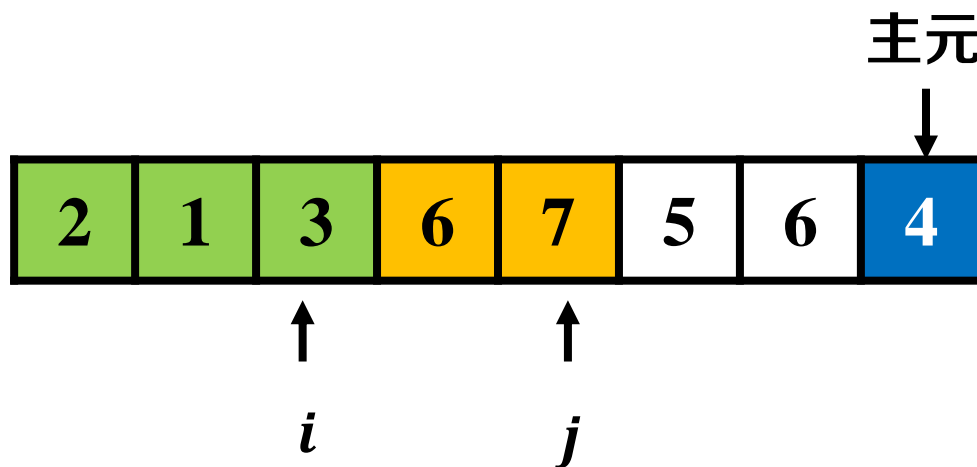
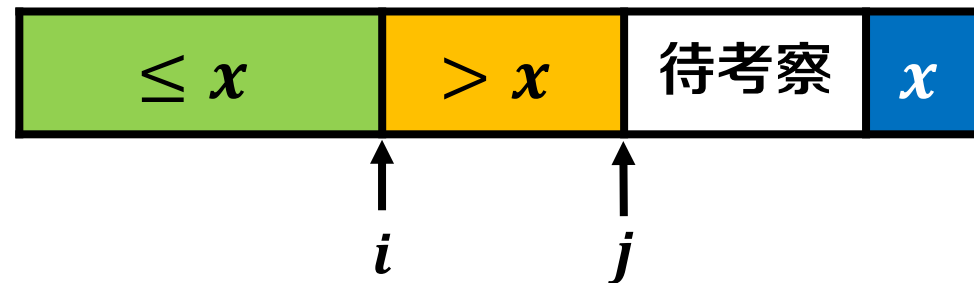


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

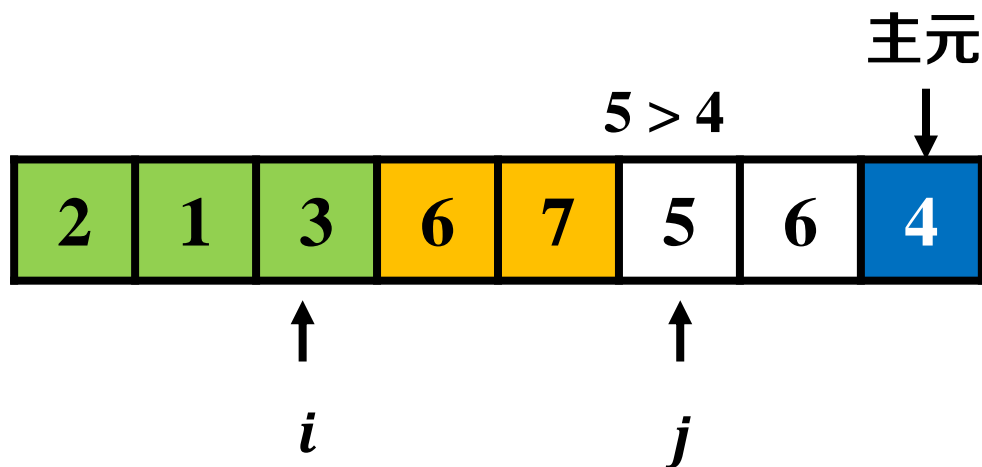
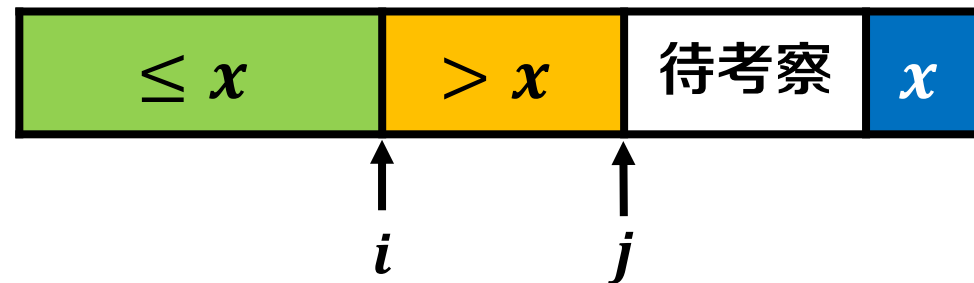


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

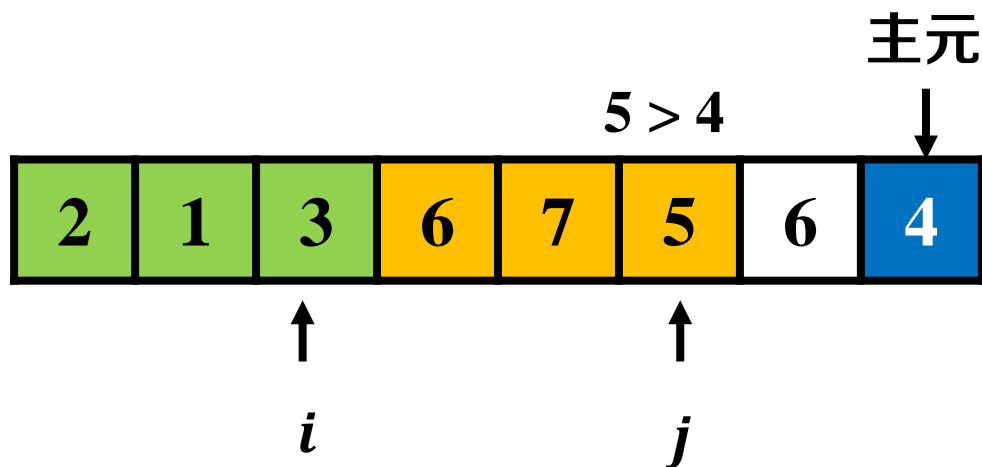
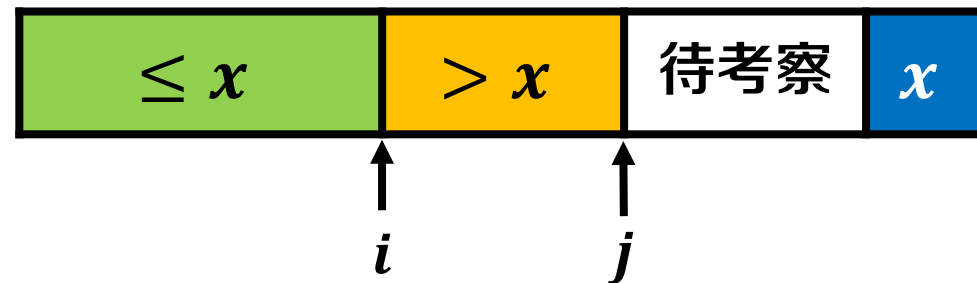


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

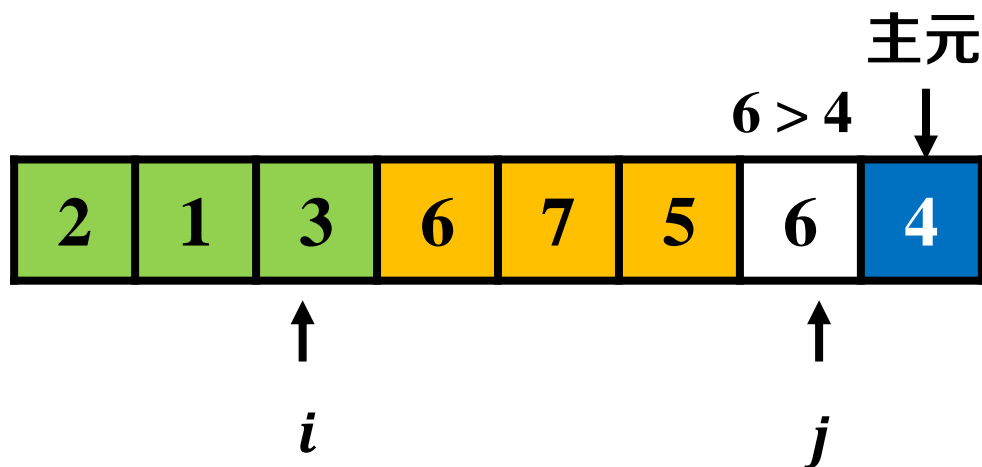
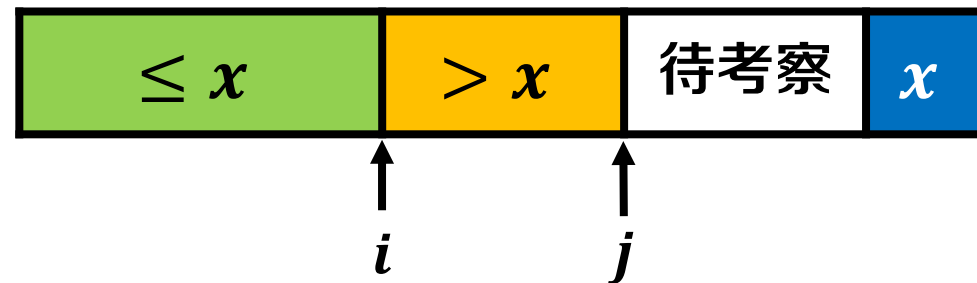


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

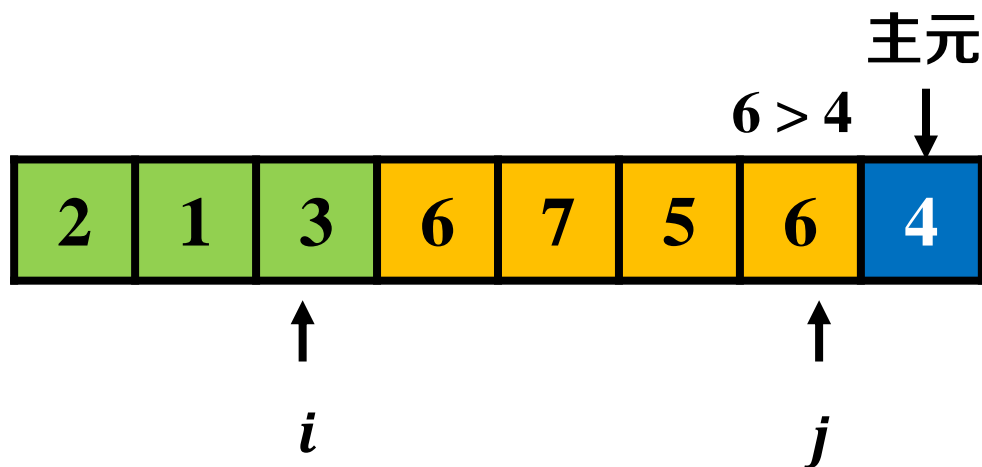
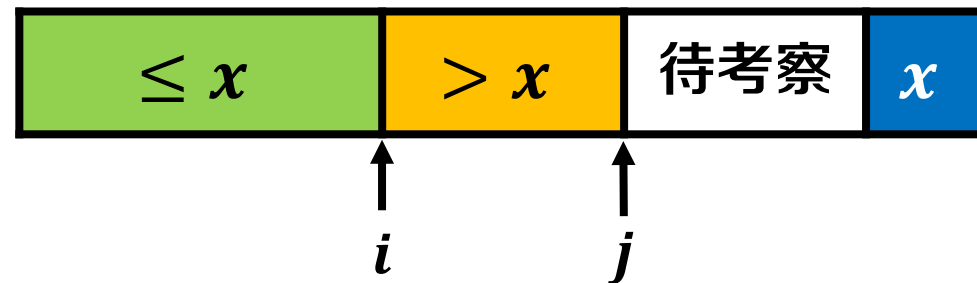


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移

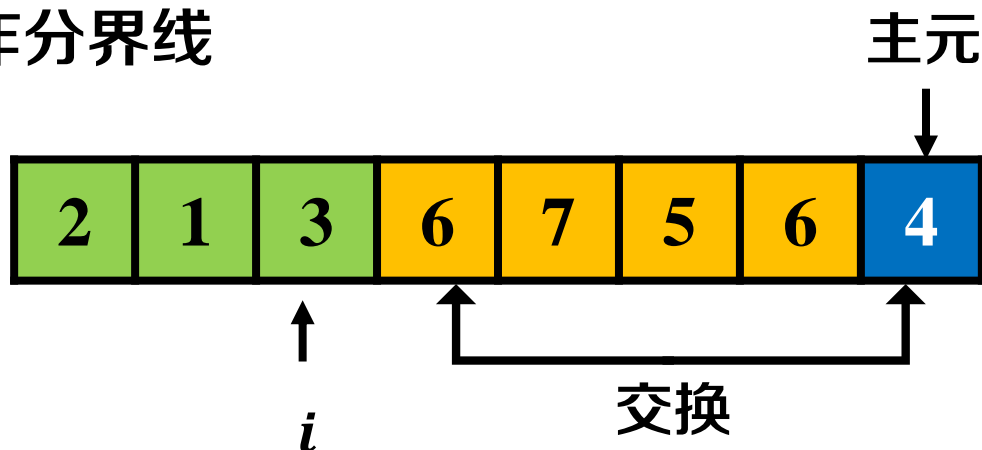
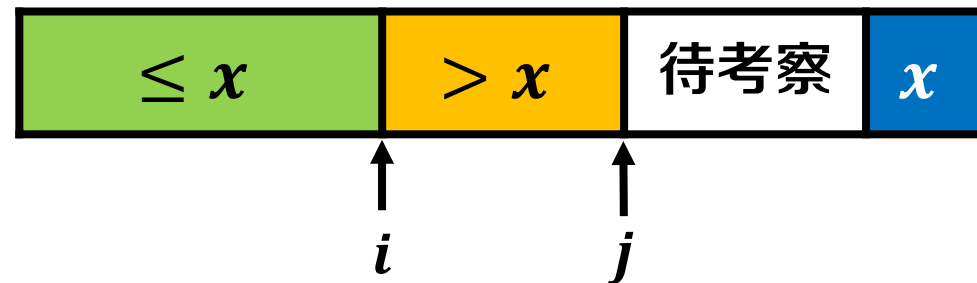


数组划分



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移
- 把主元放在中间作分界线

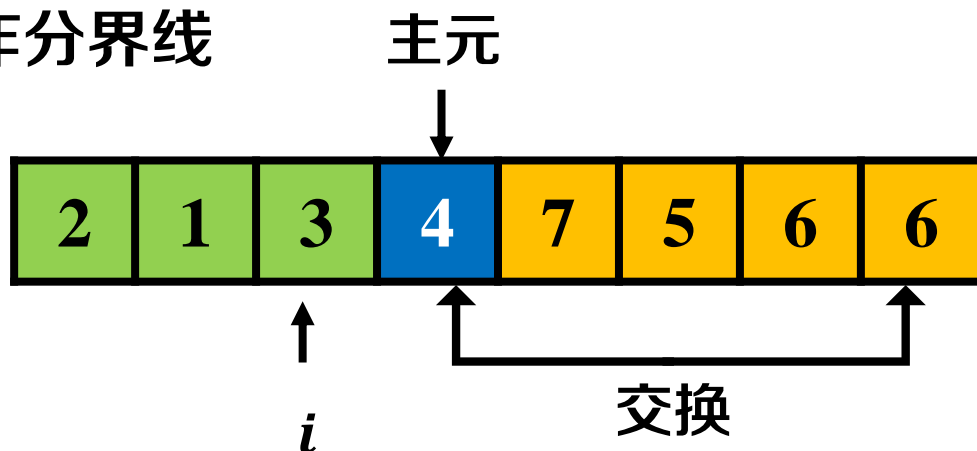
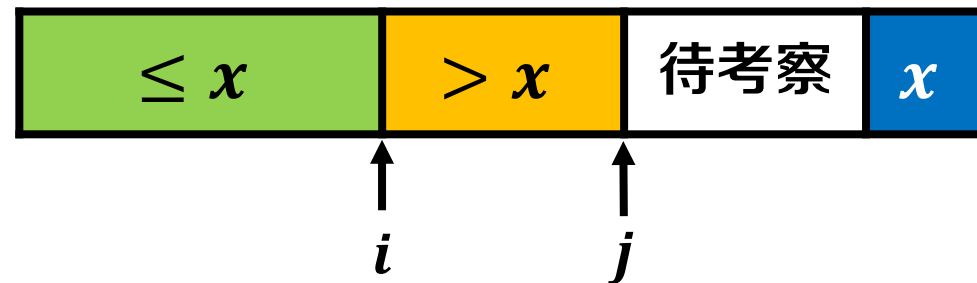


数组划分



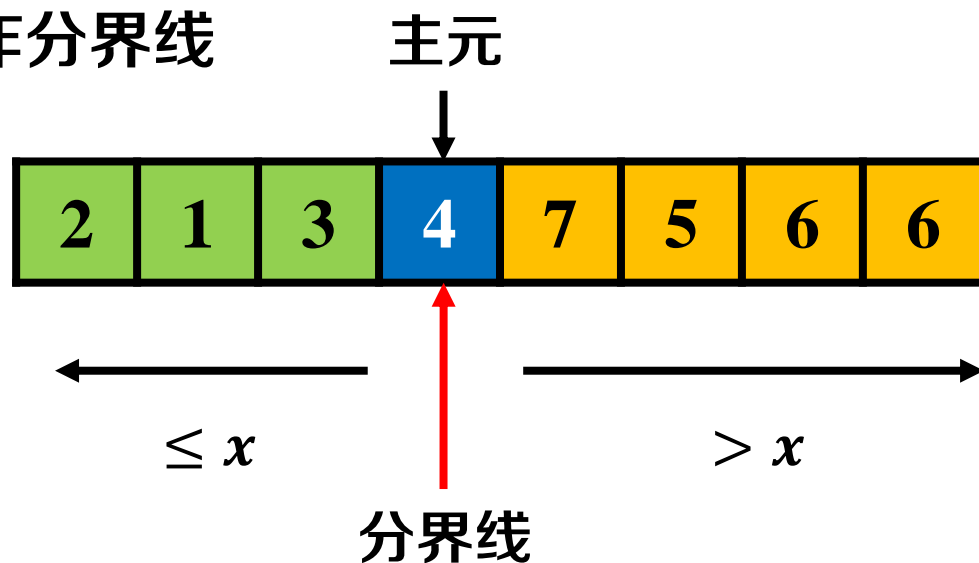
- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移
- 把主元放在中间作分界线



- 实现方法

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，**只和主元比较**
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i, j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移
- 把主元放在中间作分界线



数组划分：伪代码



- Partition(A, p, r)

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 划分位置 q

$x \leftarrow A[r]$

选取主元

$i \leftarrow p - 1$

for $j \leftarrow p$ **to** $r - 1$ **do**

if $A[j] \leq x$ **then**

 exchange $A[i + 1]$ with $A[j]$

$i \leftarrow i + 1$

end

end

exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$

$q \leftarrow i + 1$

return q

数组划分：伪代码



- Partition(A, p, r)

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 划分位置 q

$x \leftarrow A[r]$

$i \leftarrow p - 1$

for $j \leftarrow p$ to $r - 1$ do

 if $A[j] \leq x$ then

 exchange $A[i + 1]$ with $A[j]$

$i \leftarrow i + 1$

 end

end

exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$

$q \leftarrow i + 1$

return q

比主元小的元素交换到前面

数组划分：伪代码



- Partition(A, p, r)

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 划分位置 q

$x \leftarrow A[r]$

$i \leftarrow p - 1$

for $j \leftarrow p$ **to** $r - 1$ **do**

if $A[j] \leq x$ **then**

 exchange $A[i + 1]$ with $A[j]$

$i \leftarrow i + 1$

end

end

exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$

$q \leftarrow i + 1$

return q

主元作分界线

数组划分：复杂度分析



- Partition(A, p, r)

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 划分位置 q

$x \leftarrow A[r]$

$i \leftarrow p - 1$

for $j \leftarrow p$ **to** $r - 1$ **do**

if $A[j] \leq x$ **then**

 exchange $A[i + 1]$ with $A[j]$

$i \leftarrow i + 1$

end

end

exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$

$q \leftarrow i + 1$

return q

} $O(n)$

时间复杂度: $O(n)$

快速排序：算法框架



2	6	7	1	3	5	6	4
---	---	---	---	---	---	---	---

分解原问题

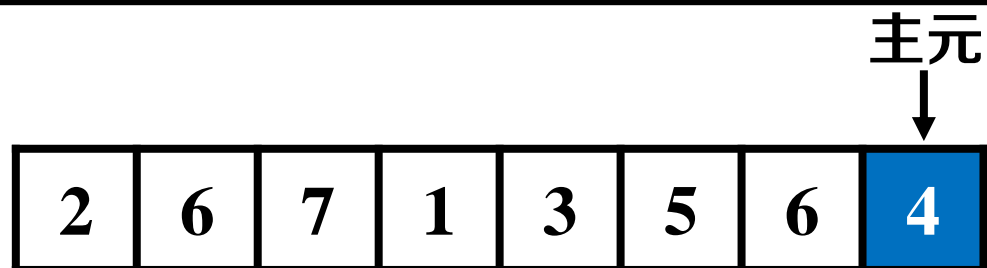


解决子问题



合并问题解

快速排序：算法框架



分解原问题

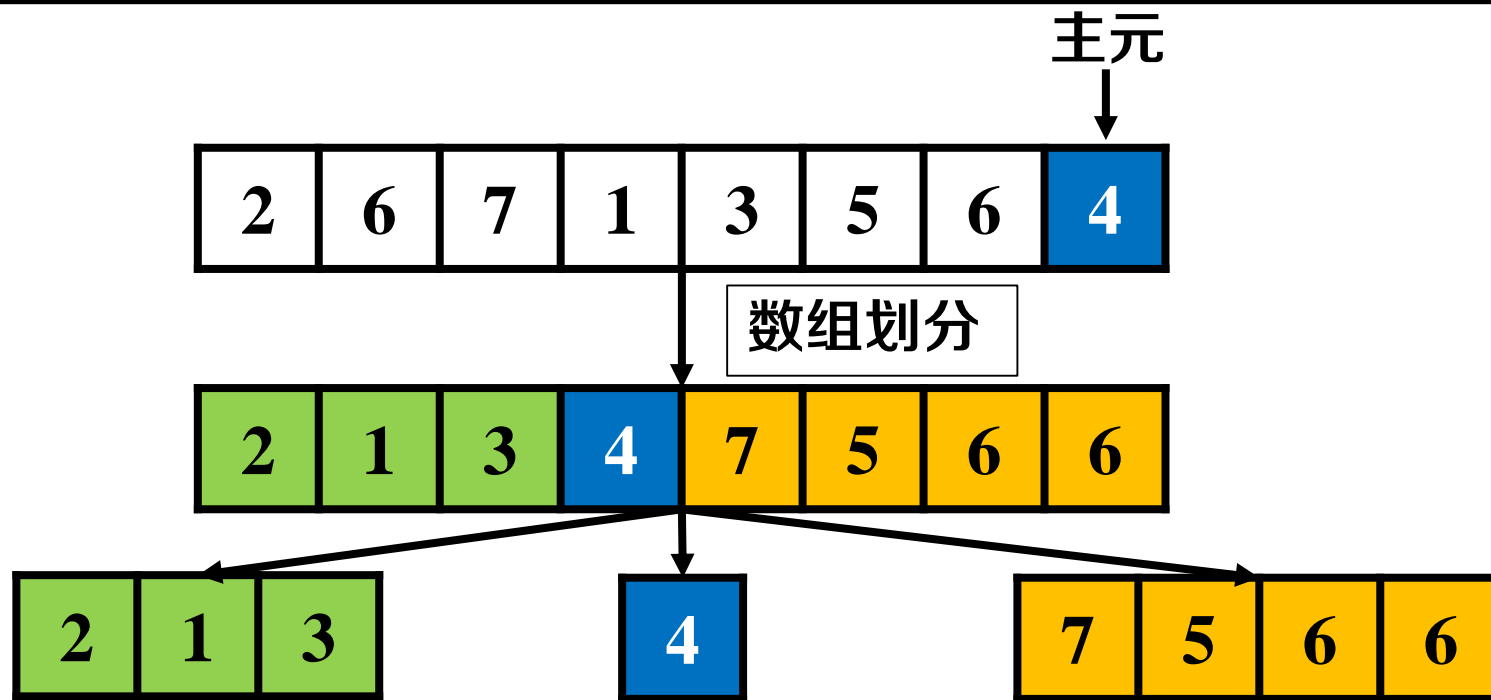


解决子问题



合并问题解

快速排序：算法框架



分解原问题

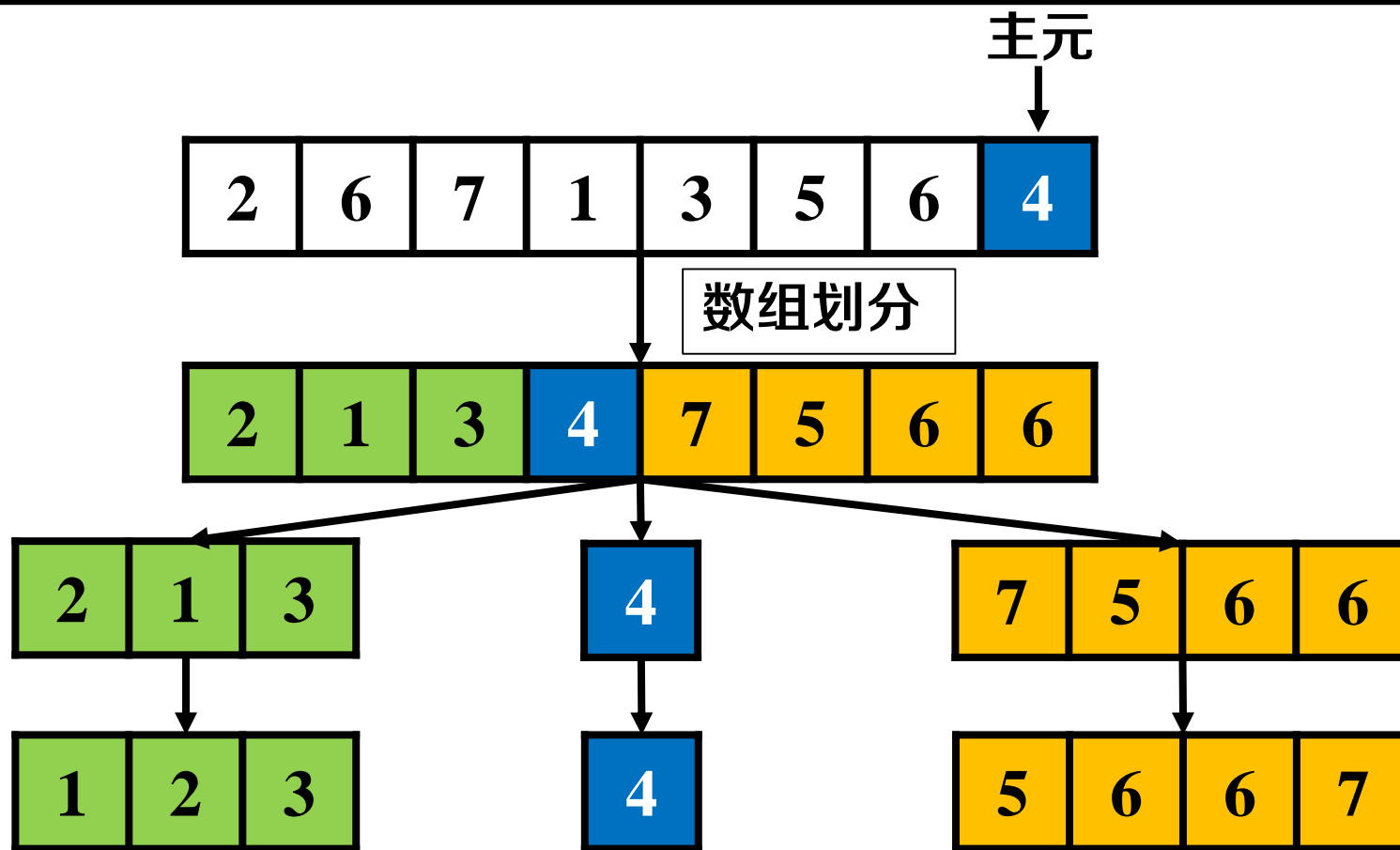


解决子问题



合并问题解

快速排序：算法框架



分解原问题

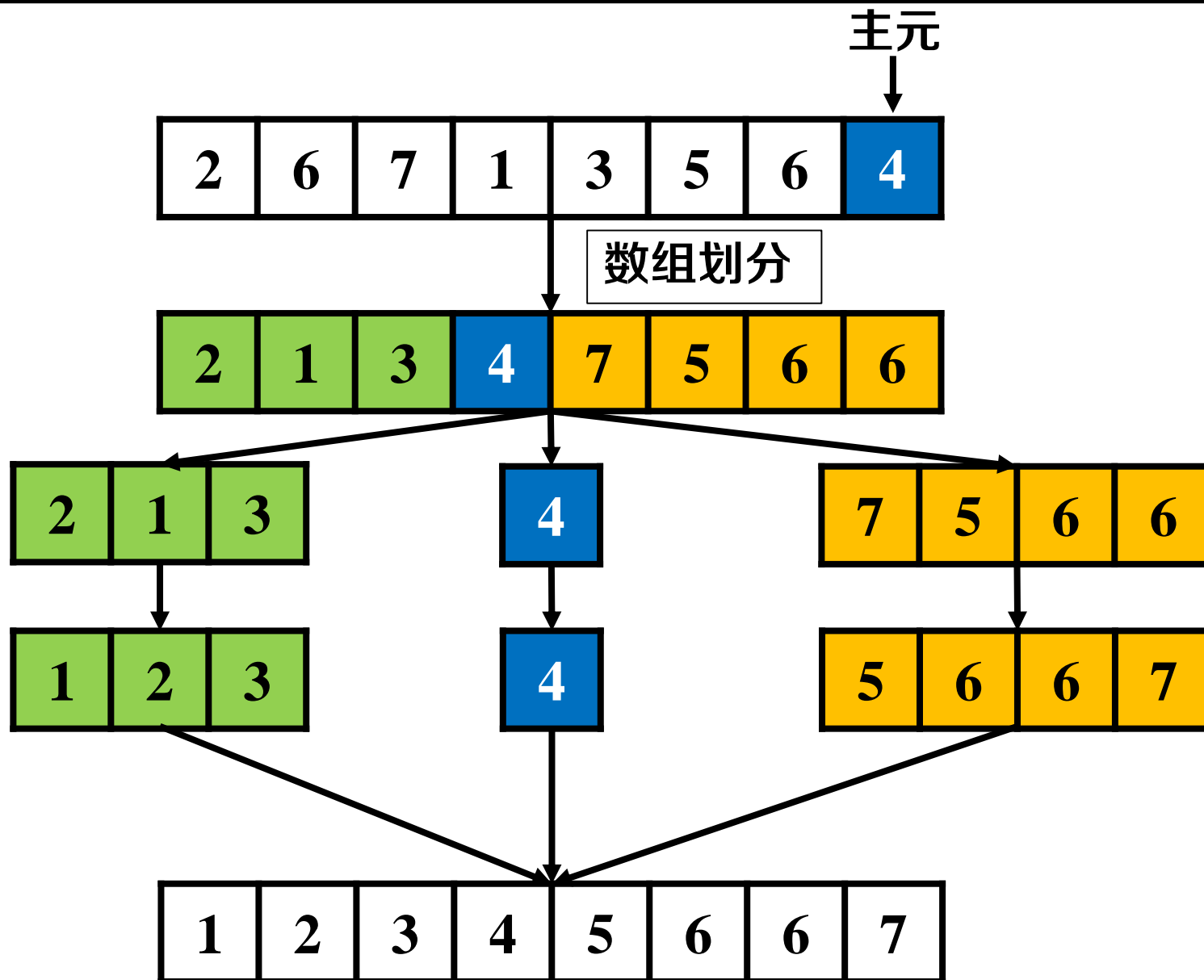


解决子问题



合并问题解

快速排序：算法框架



分解原问题

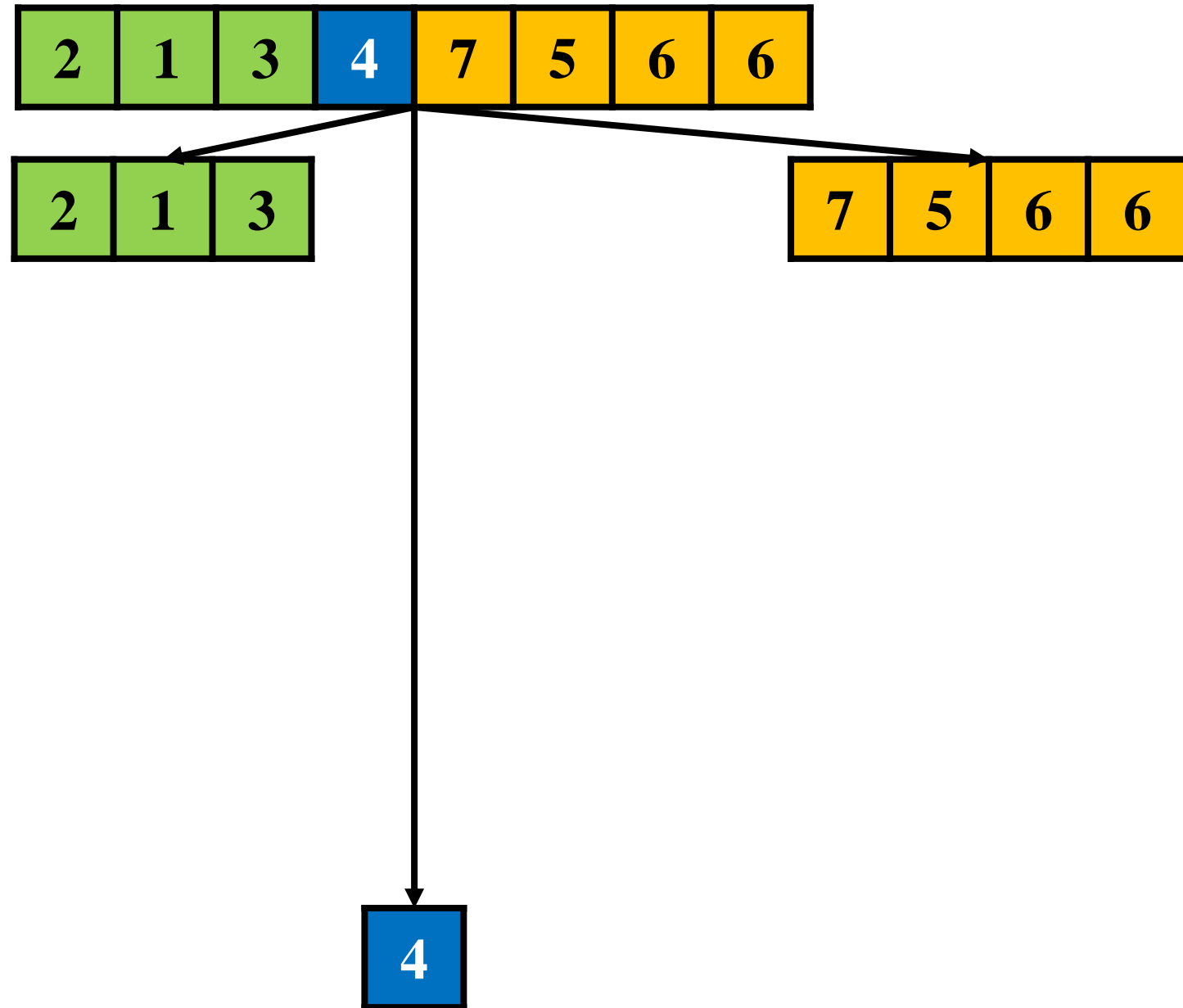
解决子问题

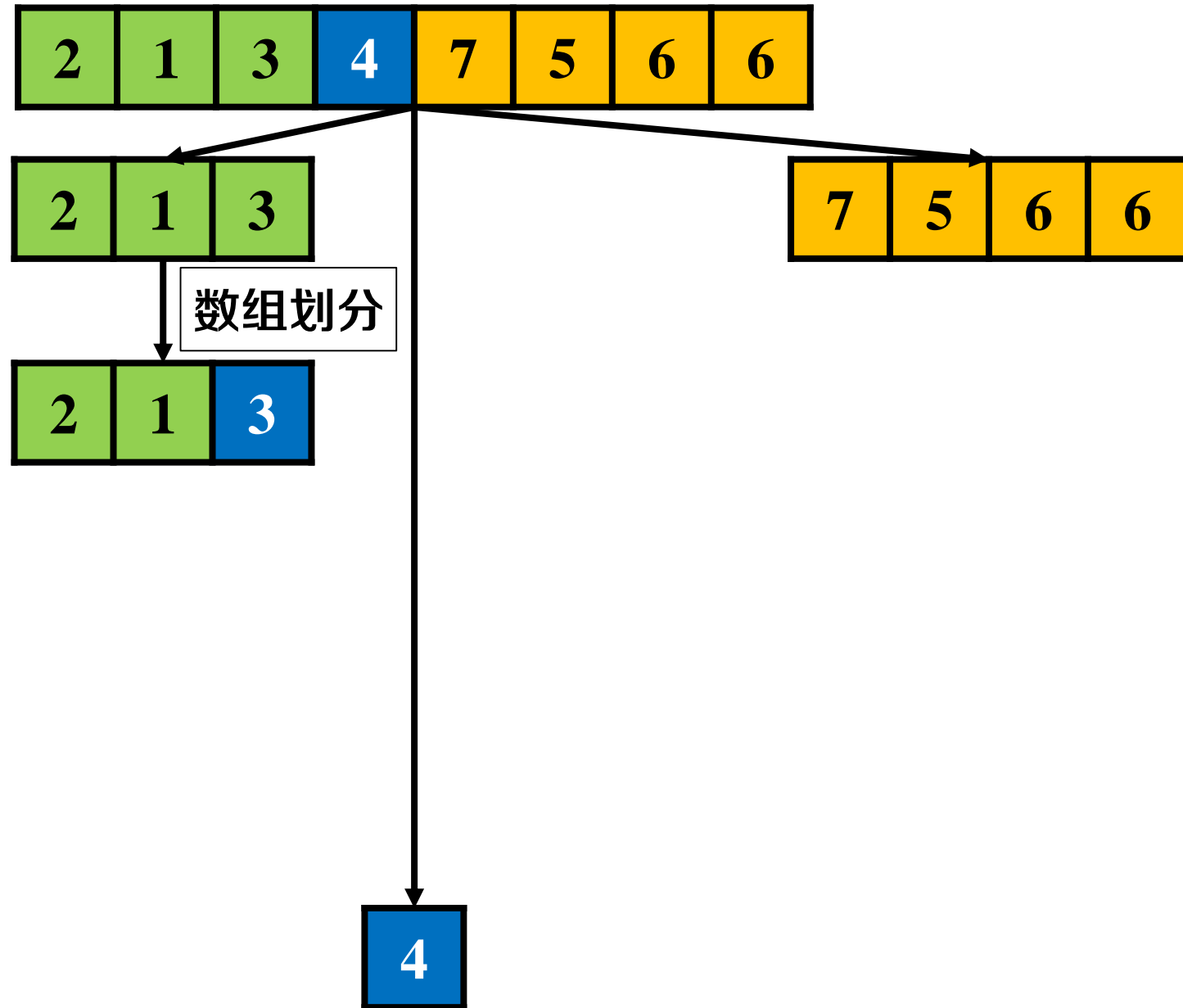
合并问题解

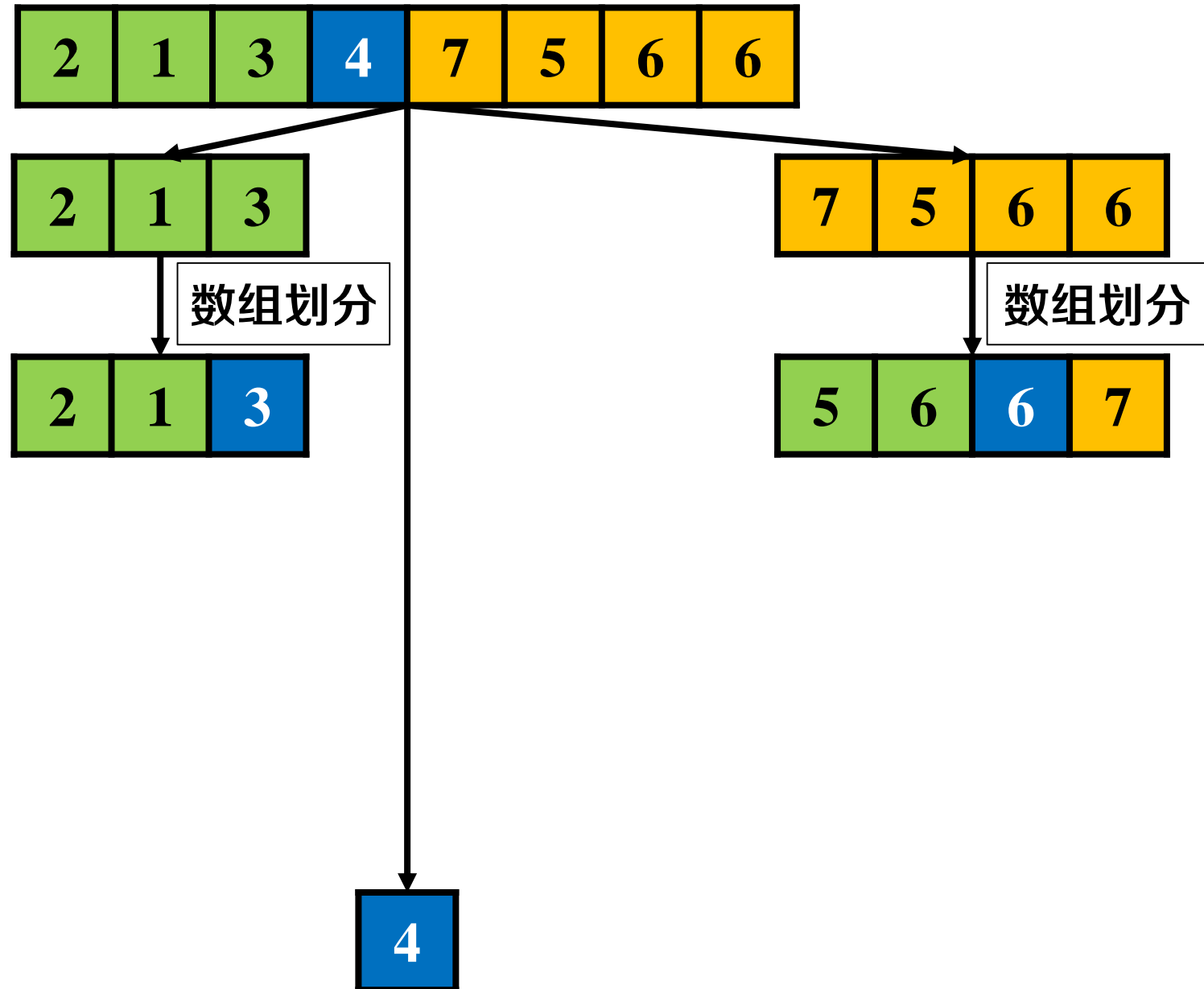
2	6	7	1	3	5	6	4
---	---	---	---	---	---	---	---

2	6	7	1	3	5	6	4
---	---	---	---	---	---	---	---

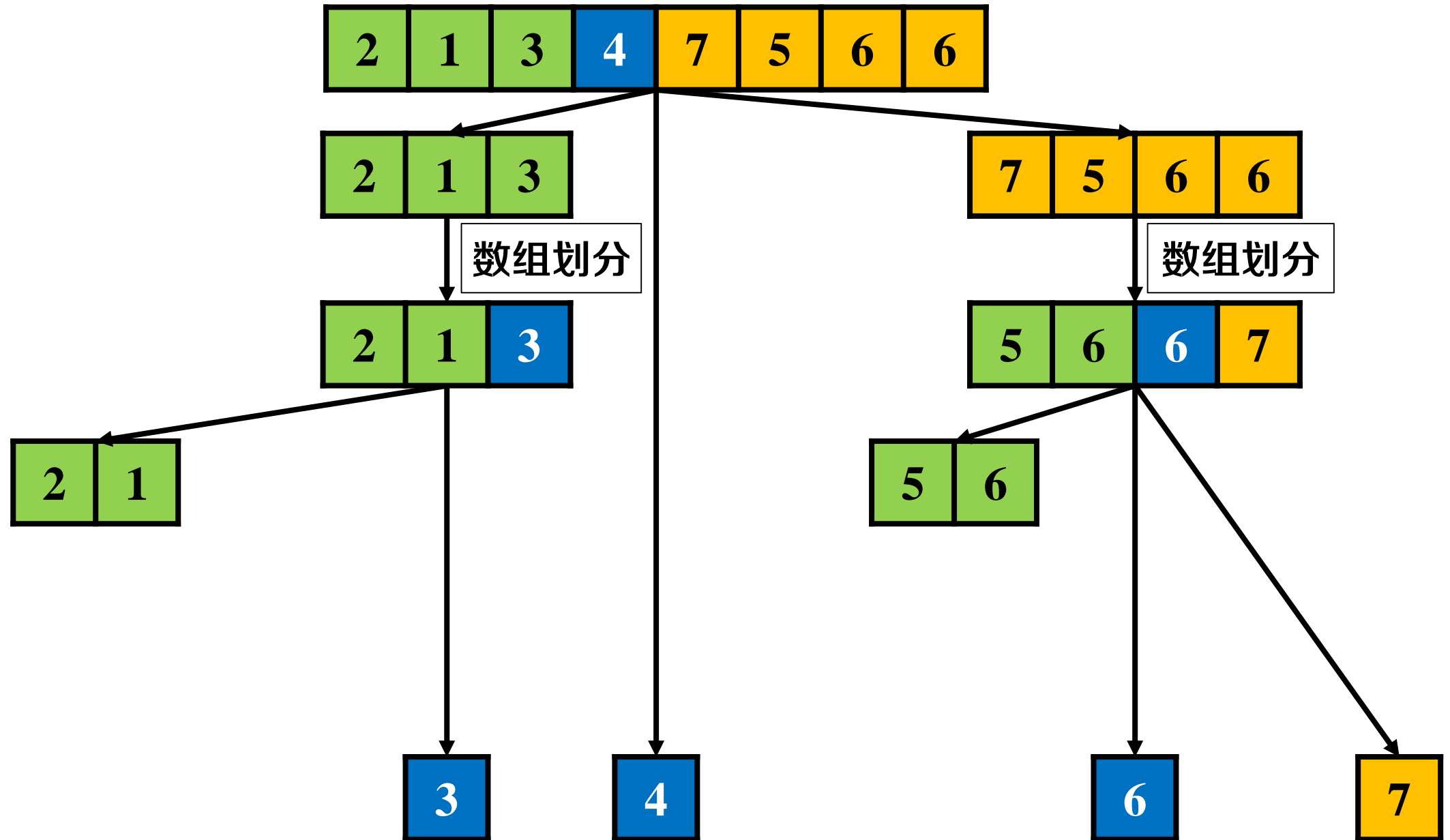


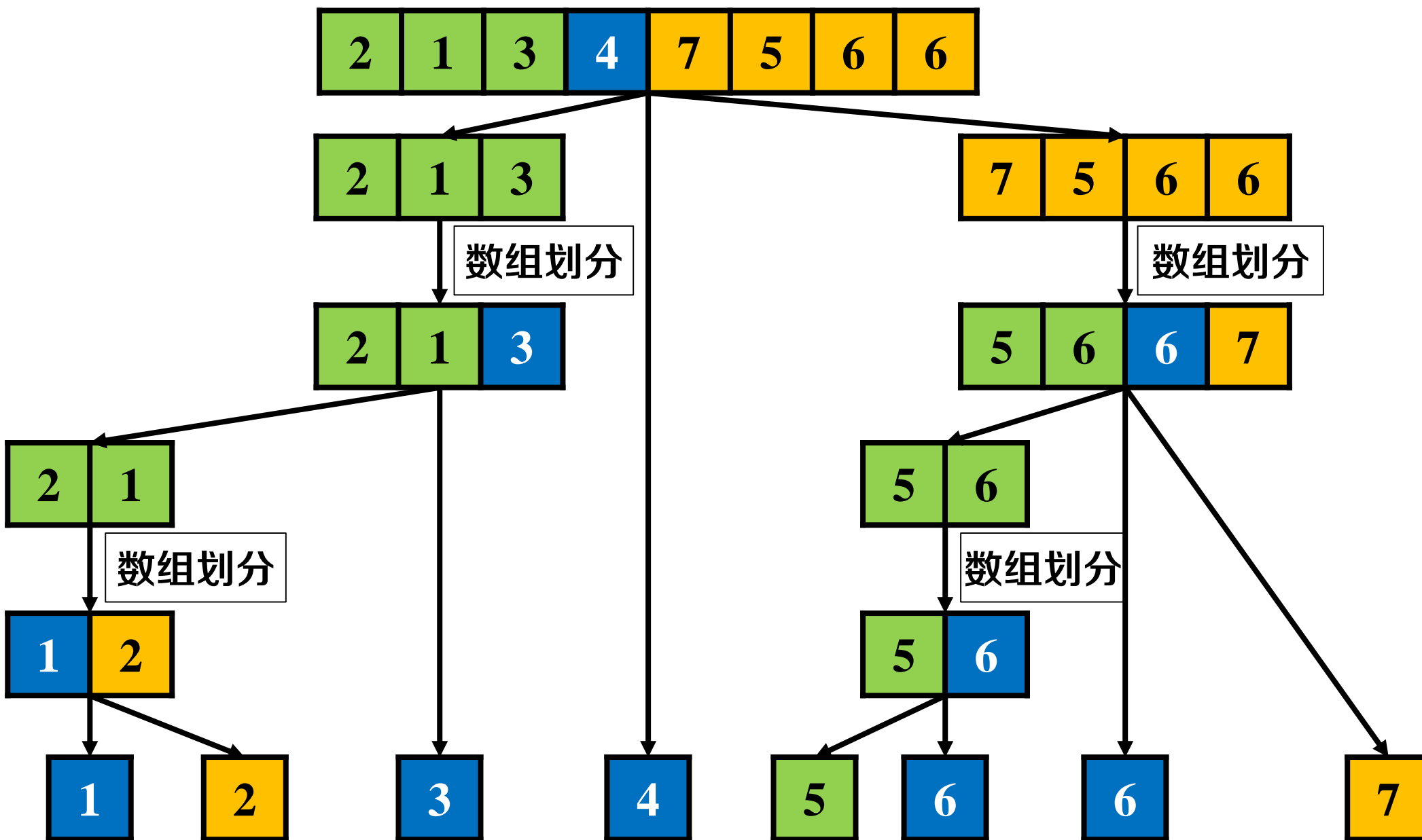


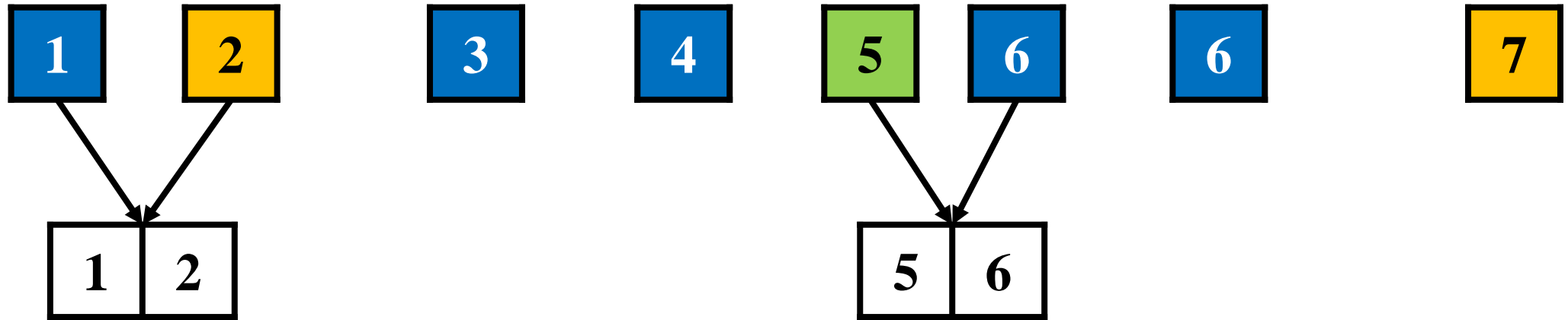


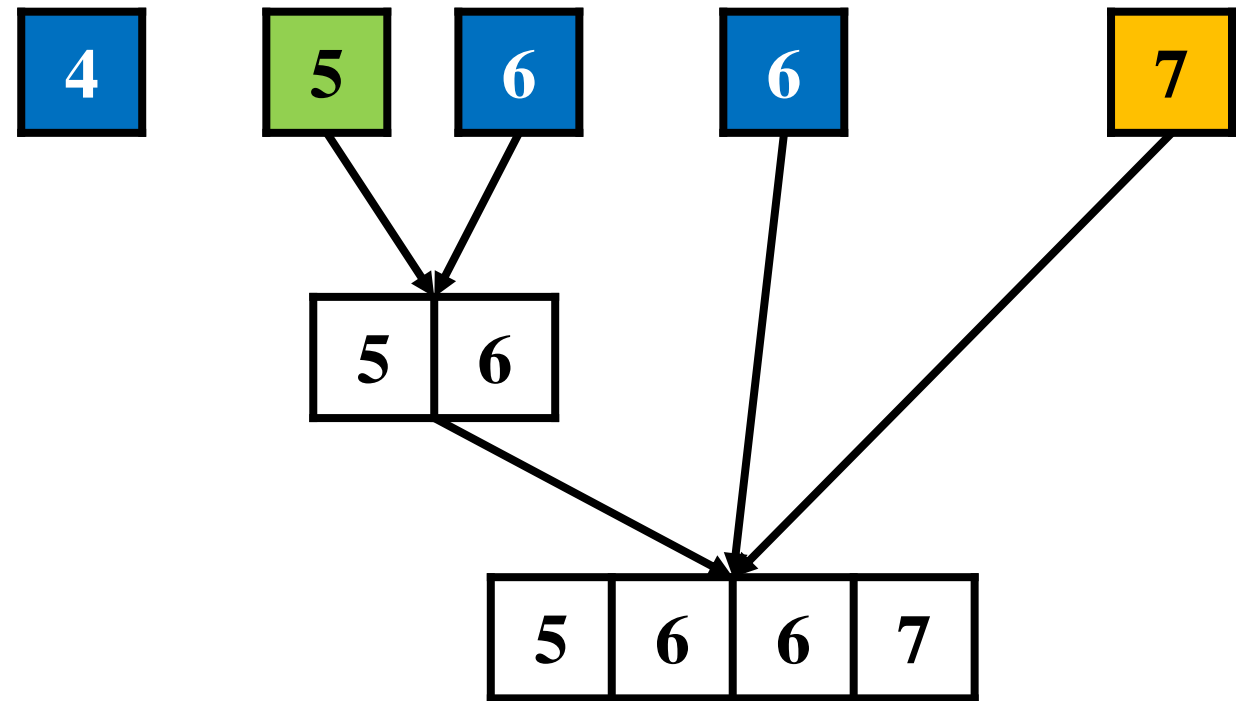
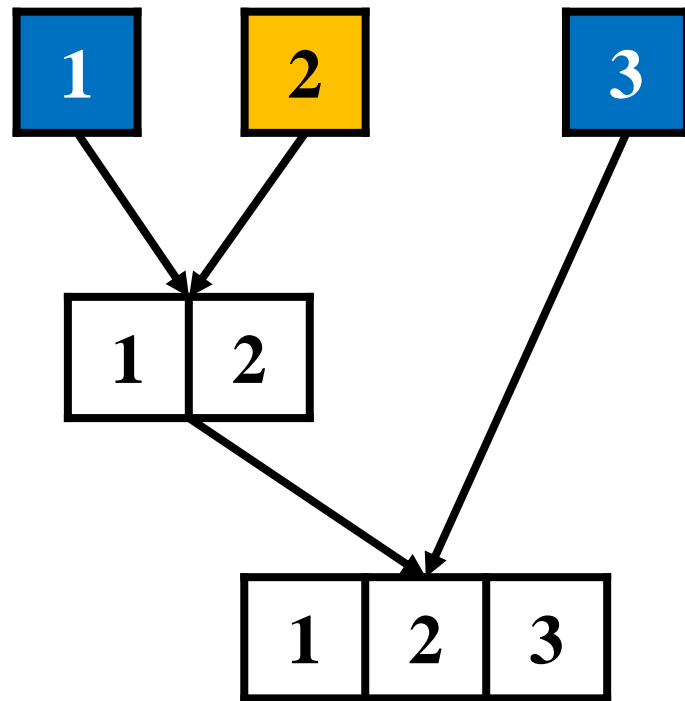


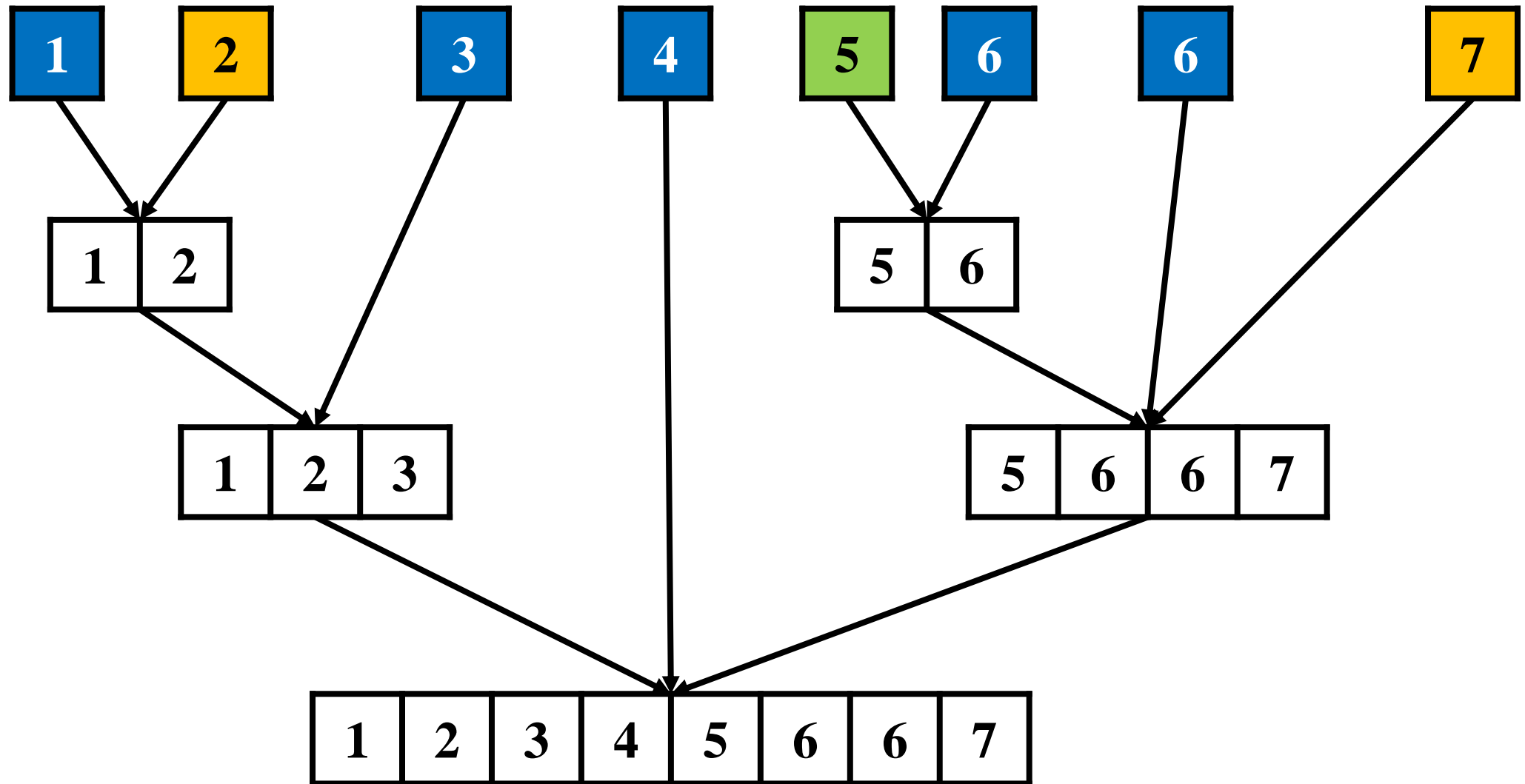
算法实例











快速排序：伪代码



- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort($A, 1, n$)

输入：数组 A ，起始位置 p ，终止位置 r

输出：有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

 QuickSort($A, p, q - 1$)

 QuickSort($A, q + 1, r$)

end

数组划分

快速排序：伪代码



- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort($A, 1, n$)

输入：数组 A ，起始位置 p ，终止位置 r

输出：有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$
 QuickSort($A, p, q - 1$)
 QuickSort($A, q + 1, r$)

end

左右分治

快速排序：复杂度分析



- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用: QuickSort($A, 1, n$)

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ ----- $O(n)$

 QuickSort($A, p, q - 1$)

 QuickSort($A, q + 1, r$)

end

快速排序：复杂度分析



- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort($A, 1, n$)

输入：数组 A ，起始位置 p ，终止位置 r

输出：有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ ----- $O(n)$
 QuickSort($A, p, q - 1$) ----- ?
 QuickSort($A, q + 1, r$) ----- ?

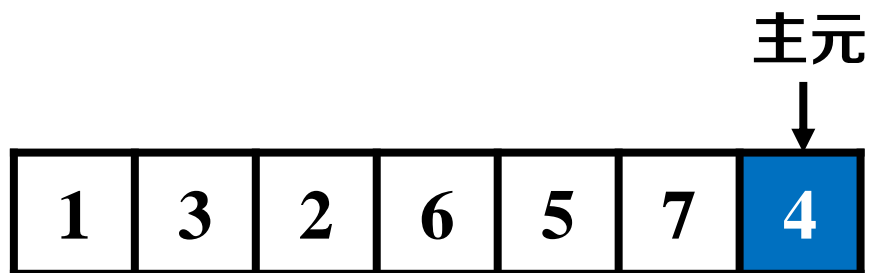
end

问题：子问题规模不确定，如何分析时间复杂度？

快速排序：复杂度分析



- 最好情况
 - 数组划分后，每次主元都在中间



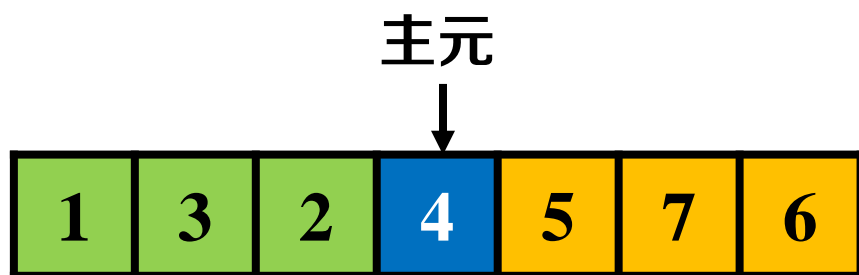
输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r
输出: 有序数组 A

```
if  $p < r$  then
     $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) - - - O(n)$ 
    QuickSort( $A, p, q - 1$ )
    QuickSort( $A, q + 1, r$ )
end
```

快速排序：复杂度分析



- 最好情况
 - 数组划分后，每次主元都在中间

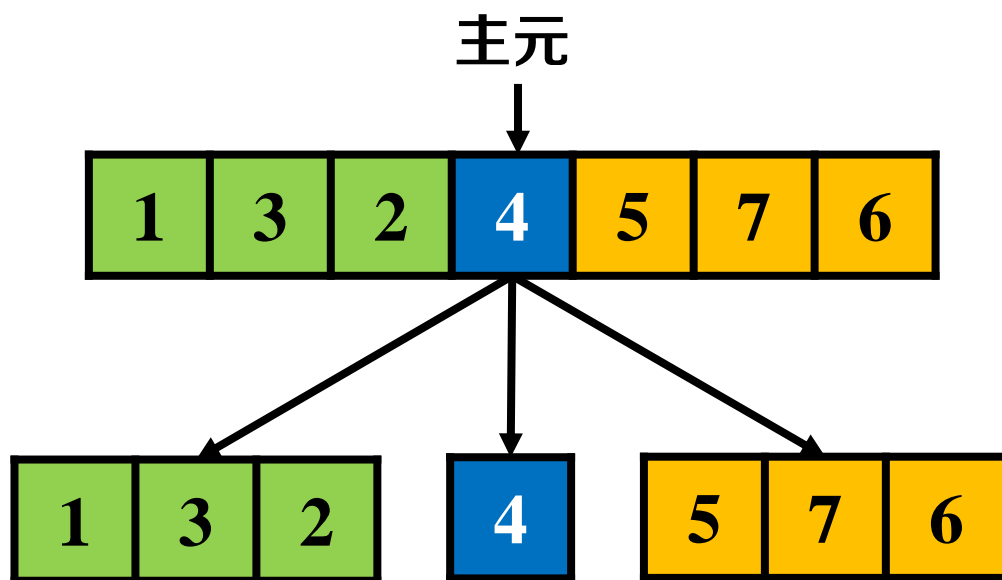


输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r
输出: 有序数组 A
if $p < r$ then
 $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) - - - O(n)$
 QuickSort($A, p, q - 1$)
 QuickSort($A, q + 1, r$)
end

快速排序：复杂度分析



- 最好情况
 - 数组划分后，每次主元都在中间



输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) \text{ --- } O(n)$

 QuickSort($A, p, q - 1$)

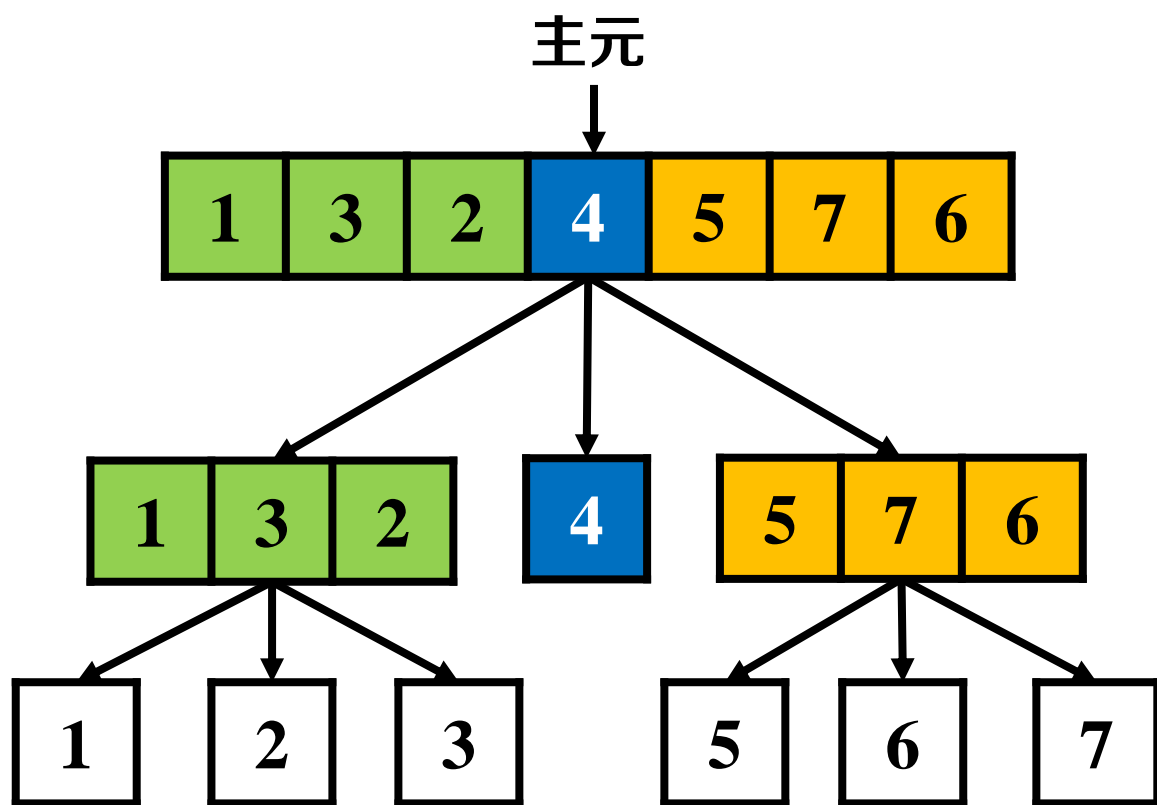
 QuickSort($A, q + 1, r$)

end

快速排序：复杂度分析



- 最好情况
 - 数组划分后，每次主元都在中间

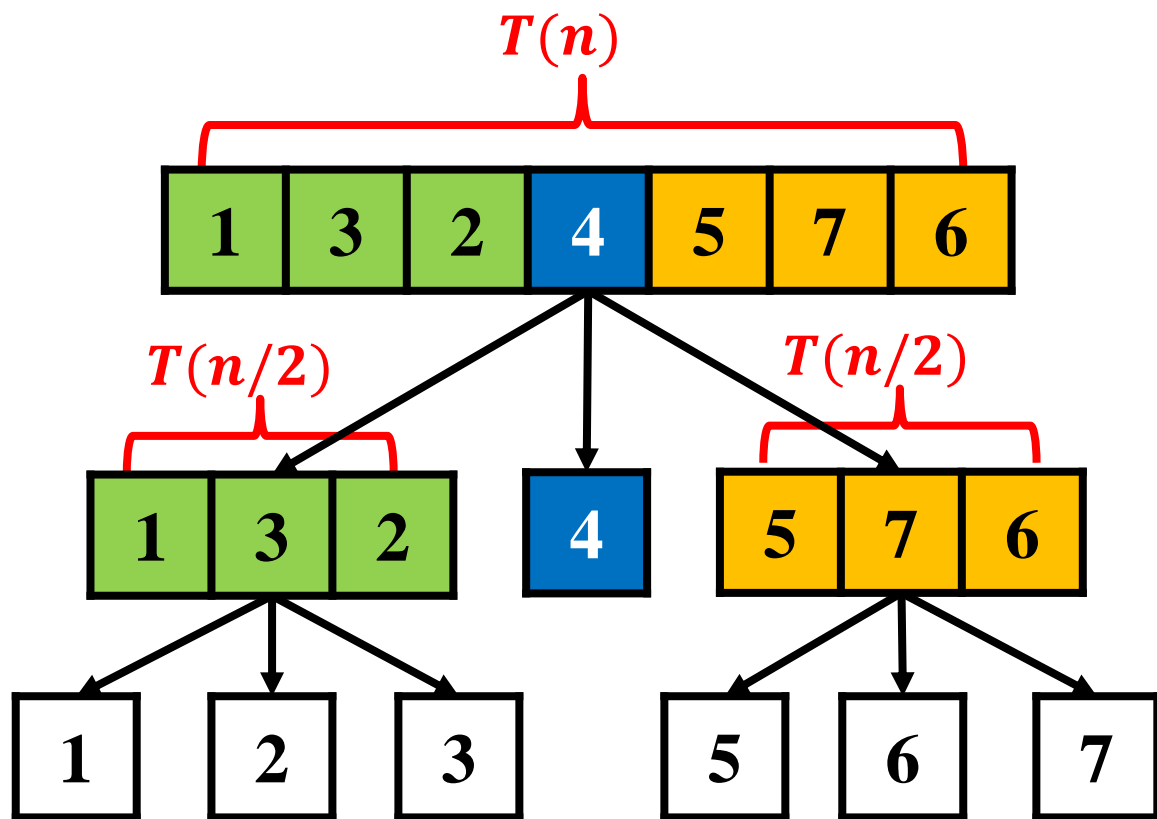


输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r
输出: 有序数组 A
if $p < r$ then
 $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) \dots O(n)$
 QuickSort($A, p, q - 1$)
 QuickSort($A, q + 1, r$)
end

快速排序：复杂度分析



- 最好情况
 - 数组划分后，每次主元都在中间

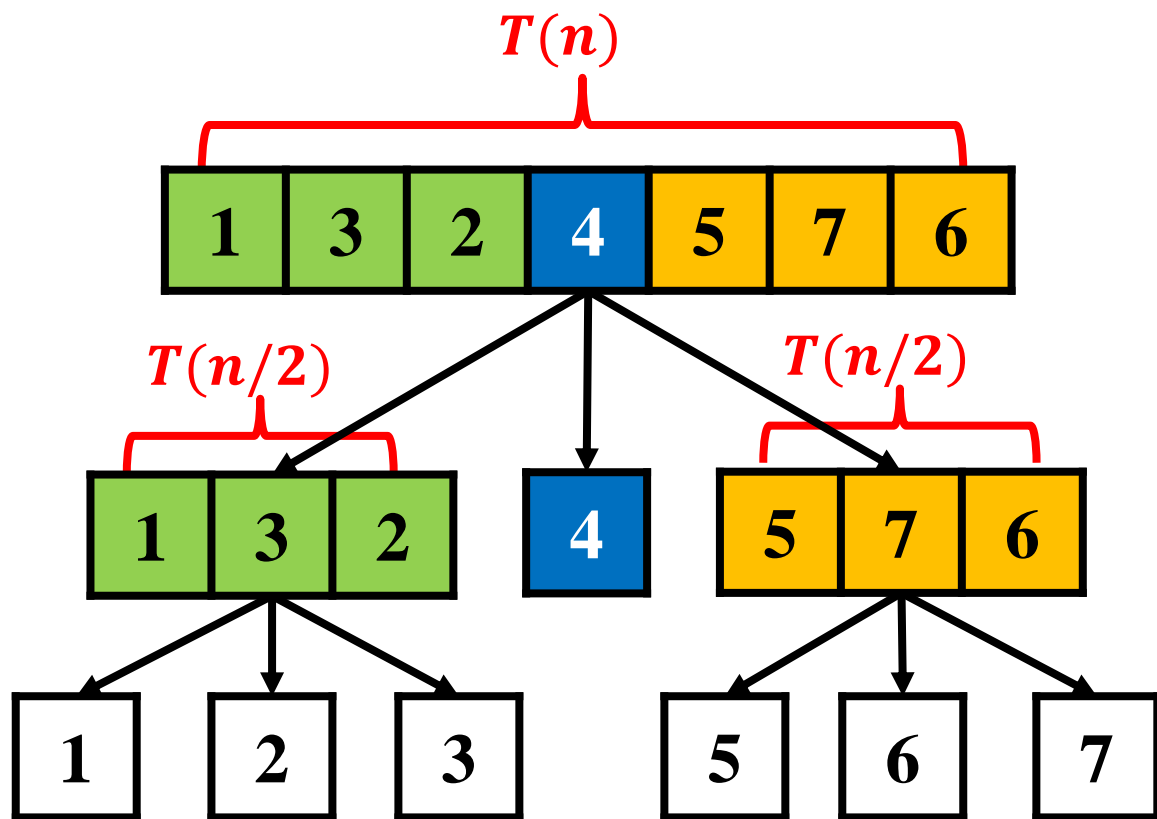


输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r
输出: 有序数组 A
if $p < r$ then
 $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) \text{ --- } O(n)$
 QuickSort($A, p, q - 1$)
 QuickSort($A, q + 1, r$)
end

快速排序：复杂度分析



- 最好情况
 - 数组划分后，每次主元都在中间



输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r
输出: 有序数组 A
if $p < r$ then
 $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) \dots O(n)$
 QuickSort($A, p, q - 1$) $\dots T(n/2)$
 QuickSort($A, q + 1, r$) $\dots T(n/2)$
end

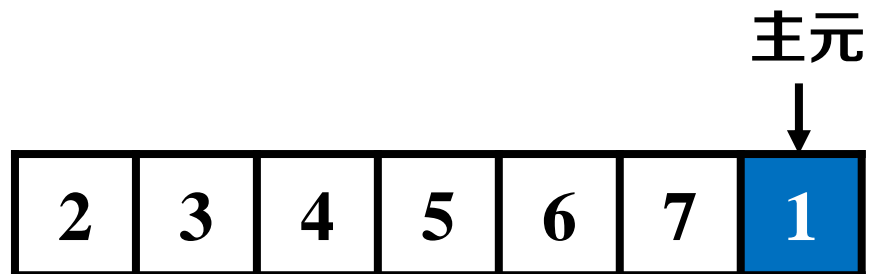
$$T(n) = 2T(n/2) + O(n) = O(n \log n)$$

快速排序：复杂度分析



- 最坏情况

- 数组划分后，每次主元都在一侧



输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) \text{ --- } O(n)$

QuickSort($A, p, q - 1$)

QuickSort($A, q + 1, r$)

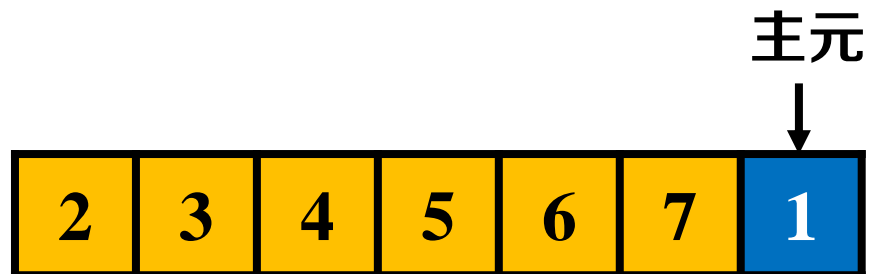
end

快速排序：复杂度分析



- 最坏情况

- 数组划分后，每次主元都在一侧



输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) \text{ --- } O(n)$

 QuickSort($A, p, q - 1$)

 QuickSort($A, q + 1, r$)

end

快速排序：复杂度分析



- 最坏情况

- 数组划分后，每次主元都在一侧

主元



输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) - - - O(n)$

 QuickSort($A, p, q - 1$)

 QuickSort($A, q + 1, r$)

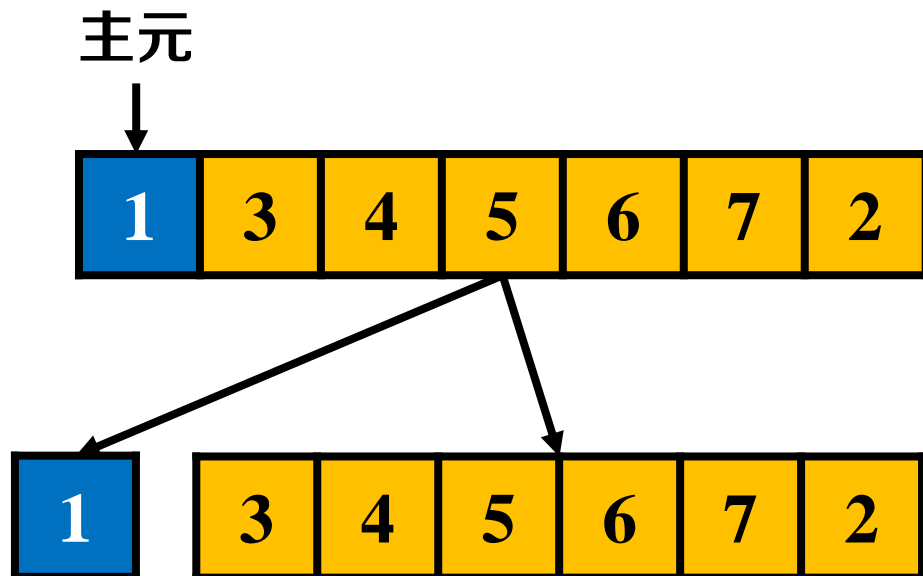
end

快速排序：复杂度分析



- 最坏情况

- 数组划分后，每次主元都在一侧



输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) \text{ --- } O(n)$

 QuickSort($A, p, q - 1$)

 QuickSort($A, q + 1, r$)

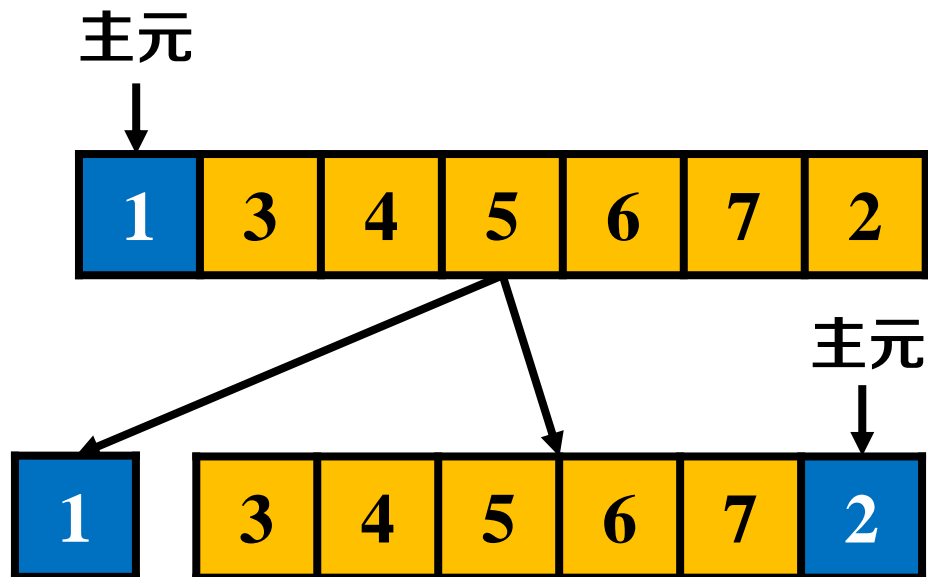
end

快速排序：复杂度分析



- 最坏情况

- 数组划分后，每次主元都在一侧



输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) \text{ --- } O(n)$

 QuickSort($A, p, q - 1$)

 QuickSort($A, q + 1, r$)

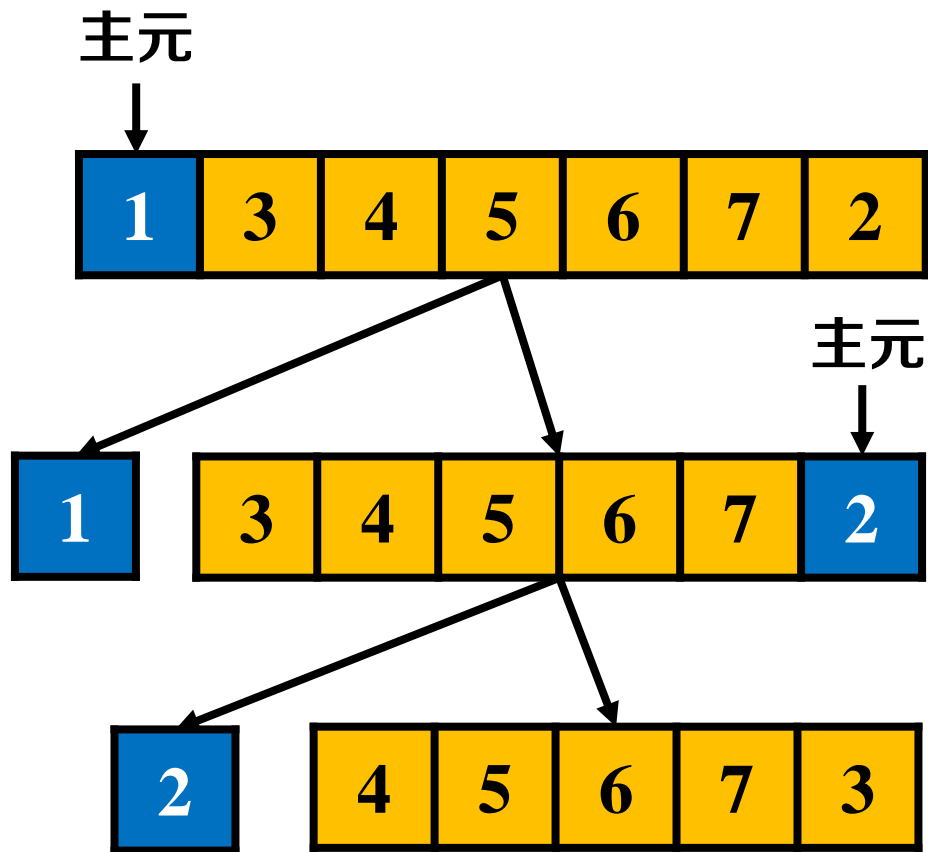
end

快速排序：复杂度分析



- 最坏情况

- 数组划分后，每次主元都在一侧



输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) \text{ --- } O(n)$

 QuickSort($A, p, q - 1$)

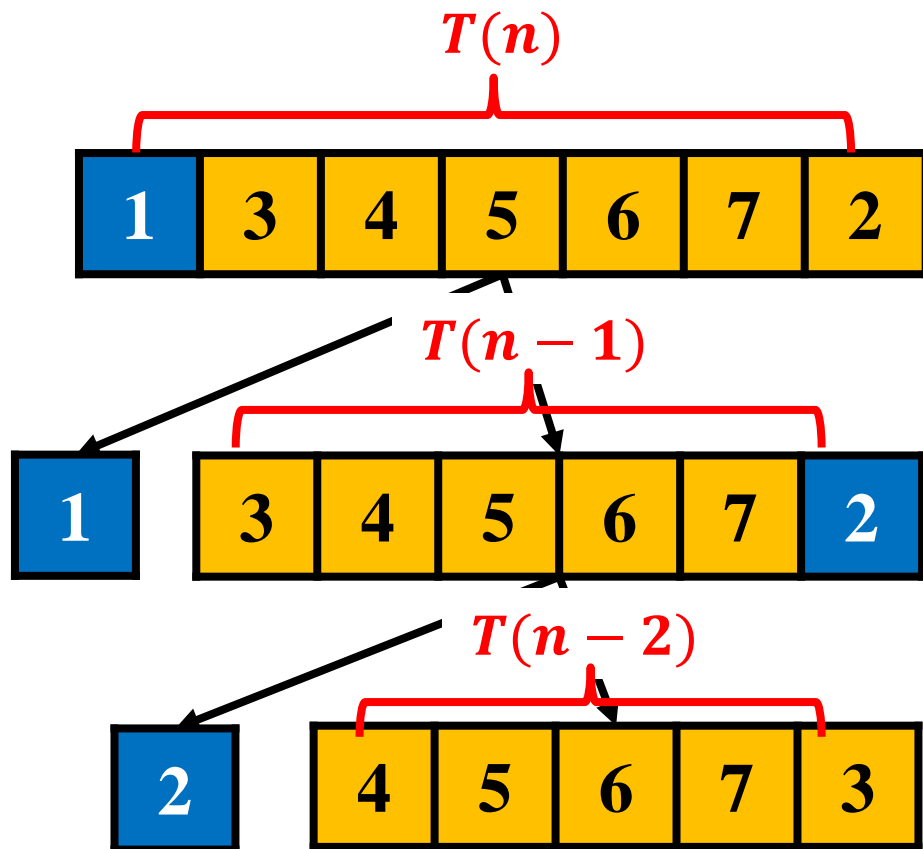
 QuickSort($A, q + 1, r$)

end

快速排序：复杂度分析



- 最坏情况
 - 数组划分后，每次主元都在一侧



输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r
输出: 有序数组 A

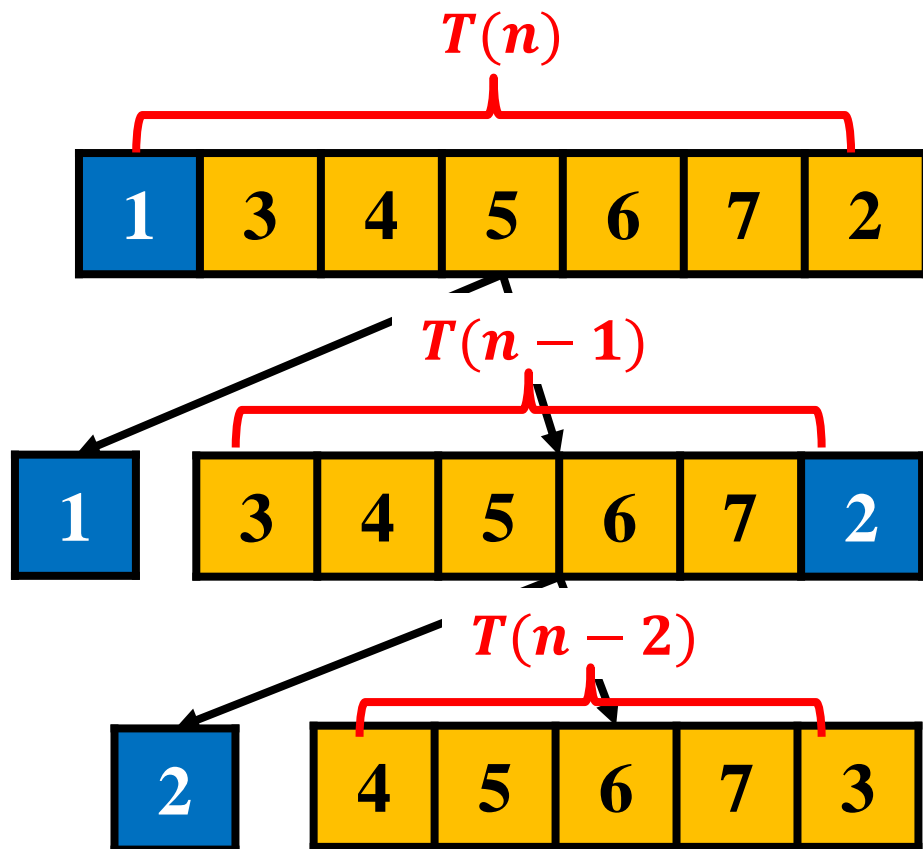
```
if  $p < r$  then
     $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) \dots O(n)$ 
    QuickSort( $A, p, q - 1$ )
    QuickSort( $A, q + 1, r$ )
end
```

快速排序：复杂度分析



- 最坏情况

- 数组划分后，每次主元都在一侧



...

```
输入: 数组  $A$ , 起始位置  $p$ , 终止位置  $r$   
输出: 有序数组  $A$   
if  $p < r$  then  
     $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r) \text{ --- } O(n)$   
    QuickSort( $A, p, q - 1$ ) ---  $T(0)$   
    QuickSort( $A, q + 1, r$ ) ---  $T(n - 1)$   
end
```

$$T(n) = T(n - 1) + T(0) + O(n) = O(n^2)$$

- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用: **QuickSort($A, 1, n$)**

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

 QuickSort($A, p, q - 1$)

 QuickSort($A, q + 1, r$)

end

- 最好情况: $O(n \log n)$
- 最坏情况: $O(n^2)$

快速排序：复杂度分析



- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort($A, 1, n$)

输入：数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出：有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

 QuickSort($A, p, q - 1$)

 QuickSort($A, q + 1, r$)

end

- 最好情况： $O(n \log n)$
- 最坏情况： $O(n^2)$

快速排序看似不优于归并排序

快速排序：复杂度分析



- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort($A, 1, n$)

输入：数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出：有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

 QuickSort($A, p, q - 1$)

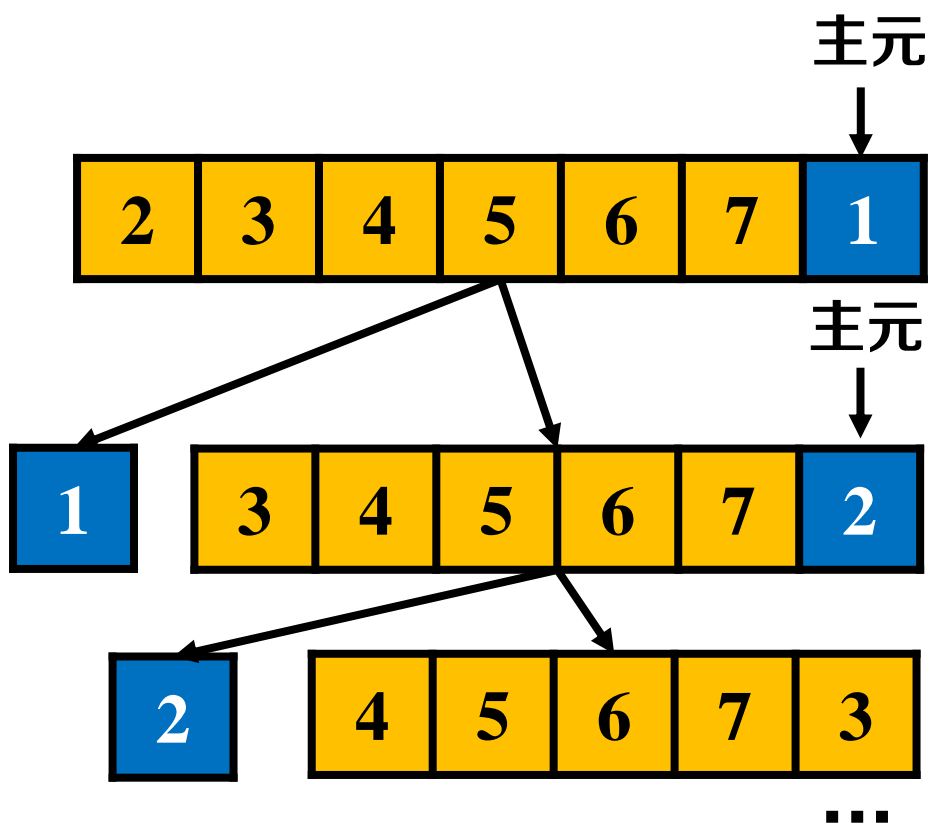
 QuickSort($A, q + 1, r$)

end

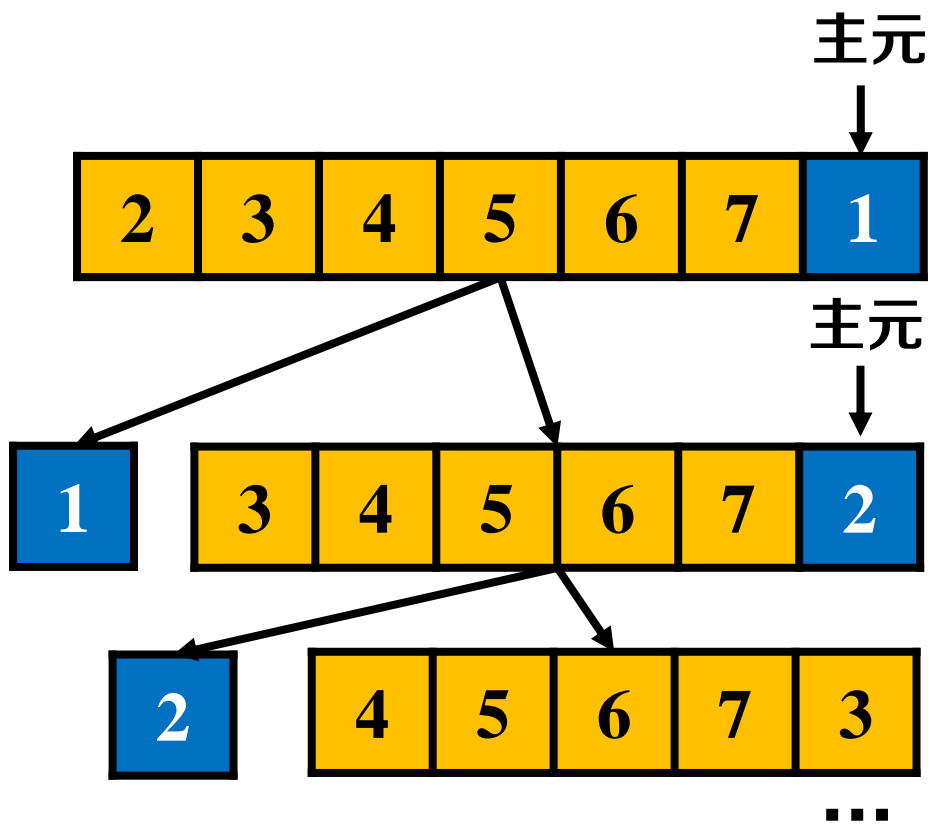
- 最好情况： $O(n \log n)$
- 最坏情况： $O(n^2)$

问题：如何摆脱输入导致最坏情况的困境？

- 反思最差情况



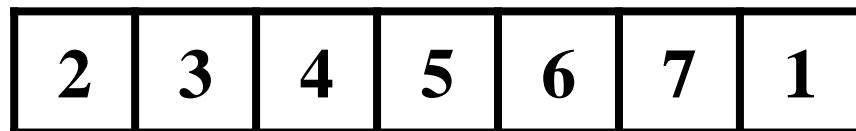
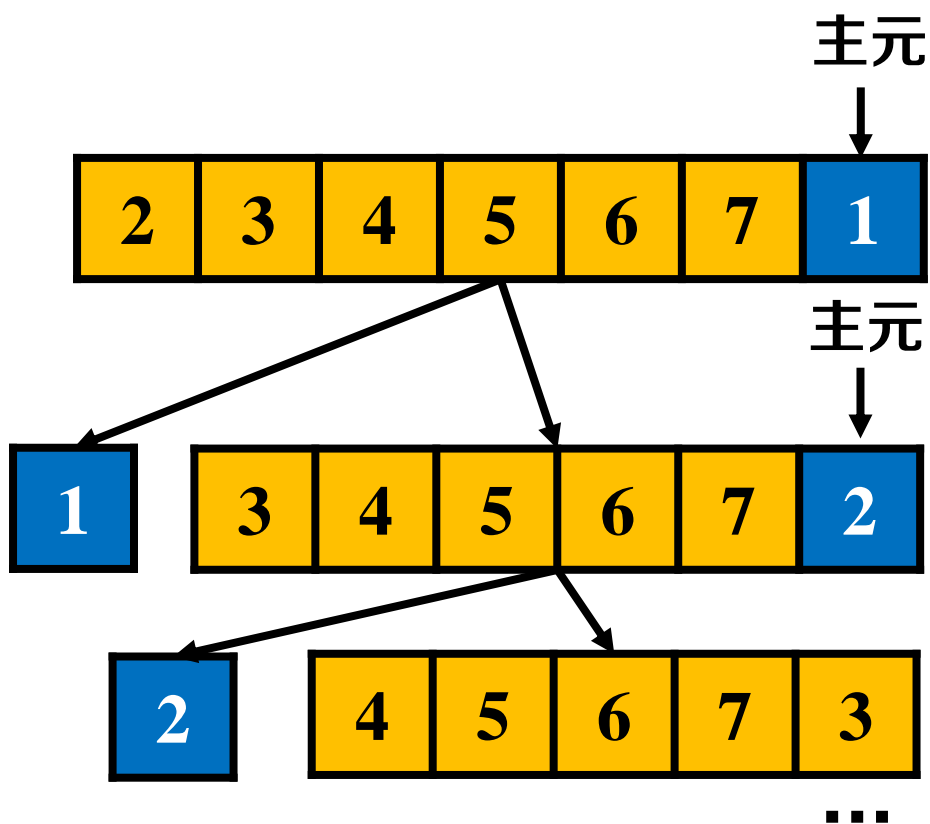
- 反思最差情况
 - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况



随机划分



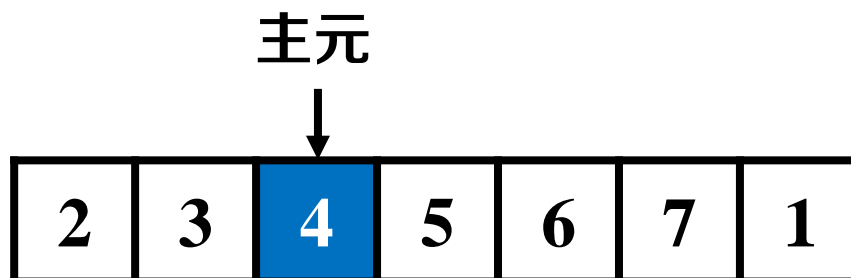
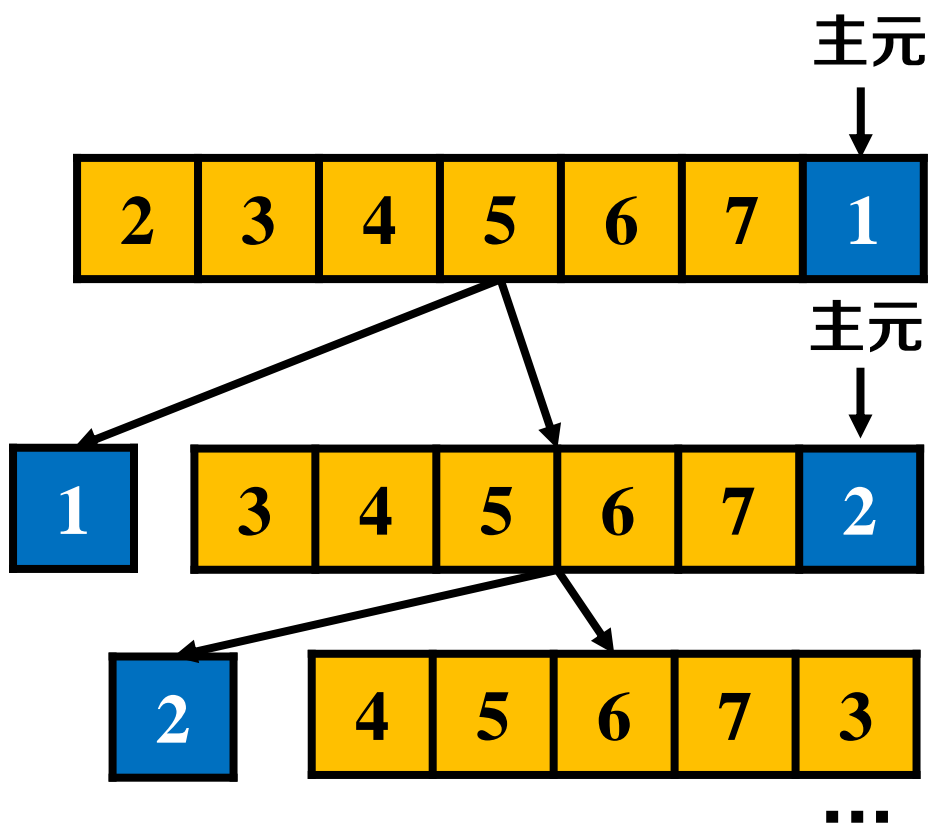
- 反思最差情况
 - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
 - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况



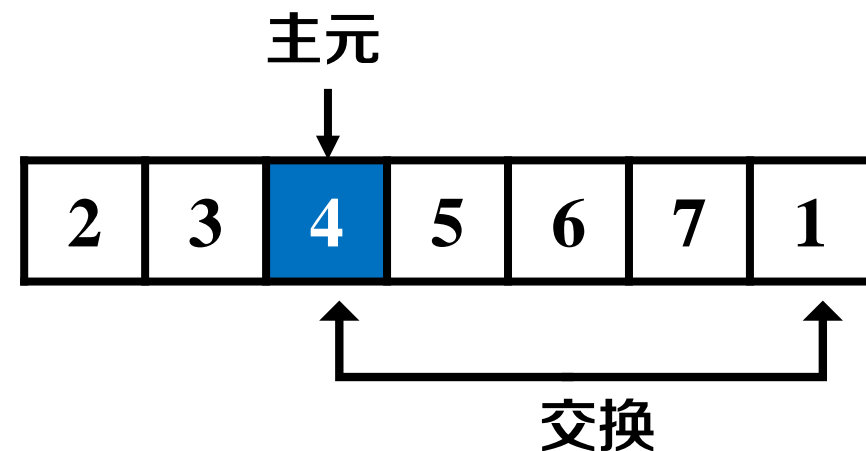
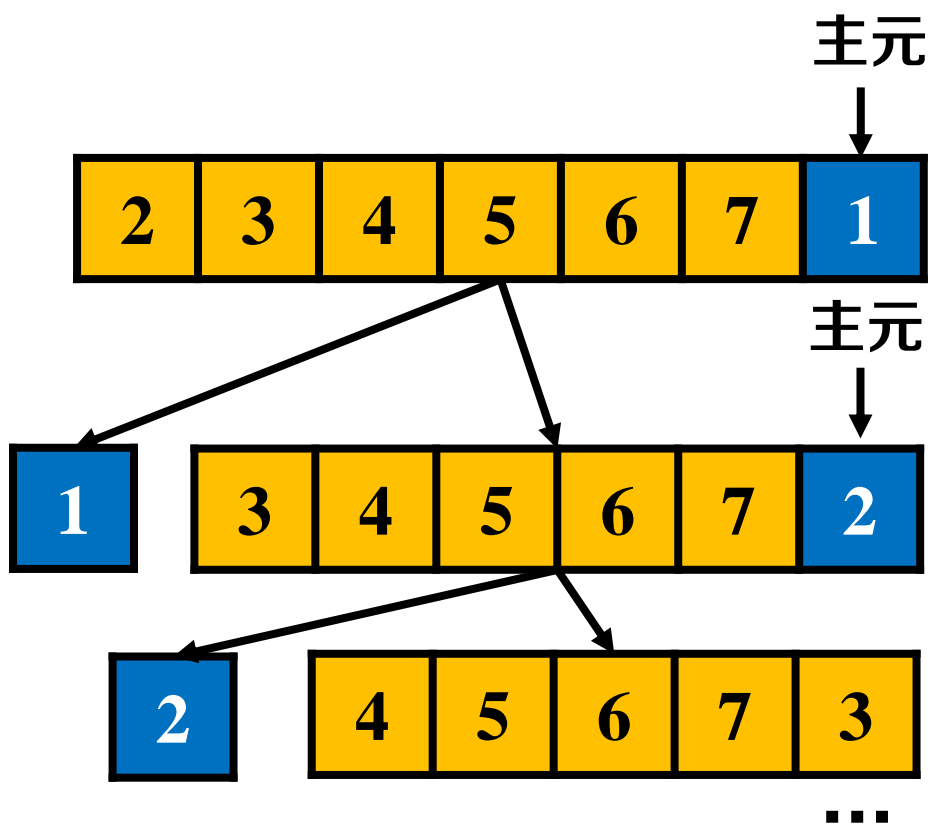
随机划分



- 反思最差情况
 - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
 - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况

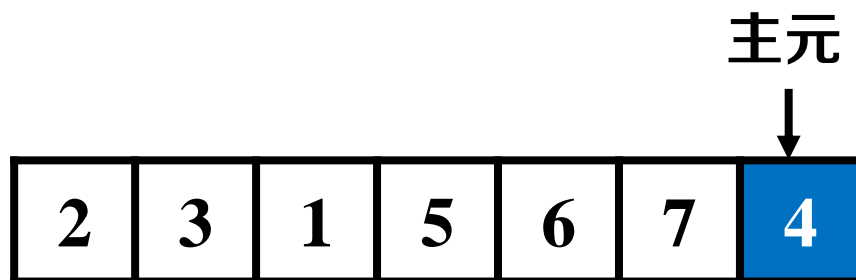
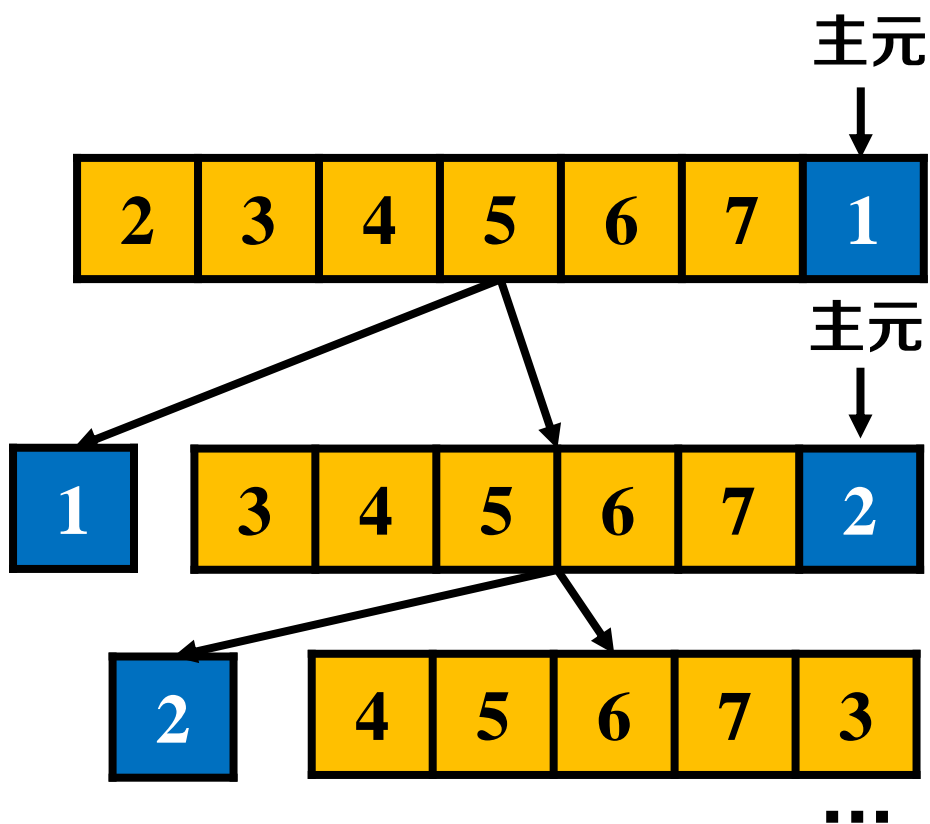


- 反思最差情况
 - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
 - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况



随机划分

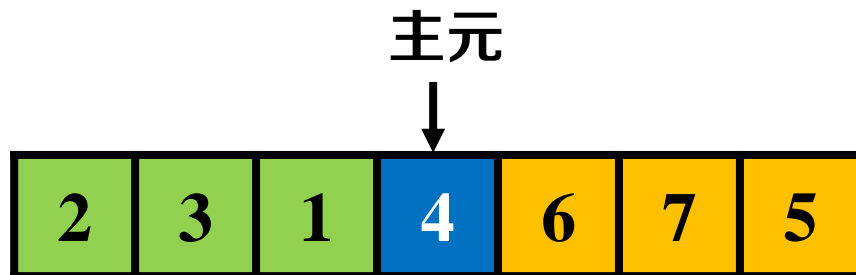
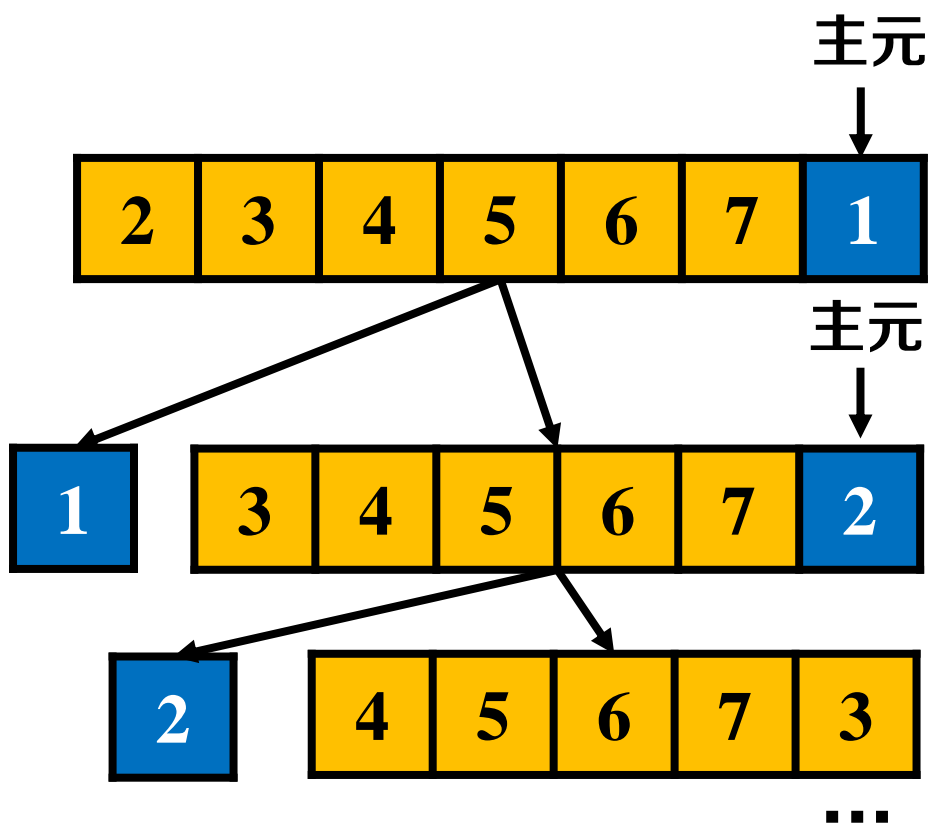
- 反思最差情况
 - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
 - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况



随机划分

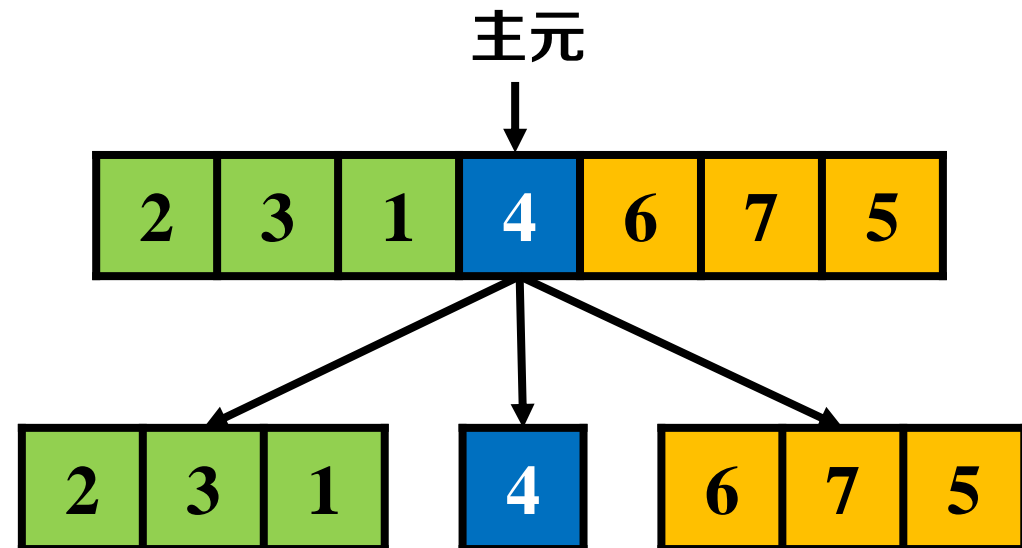
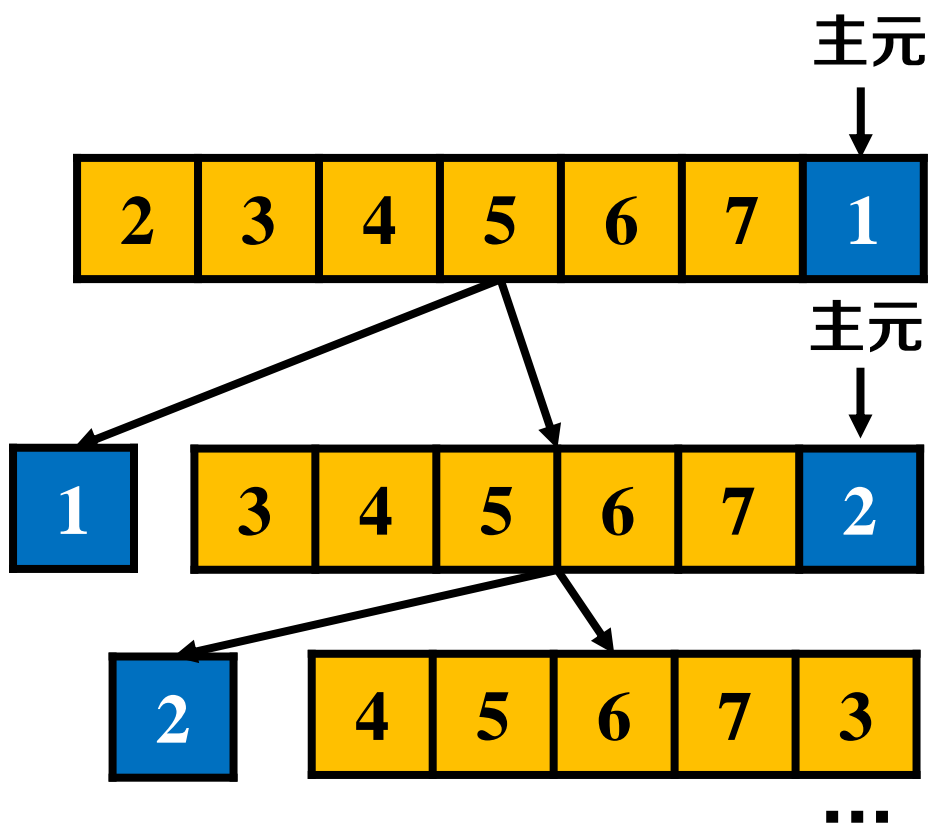


- 反思最差情况
 - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
 - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况



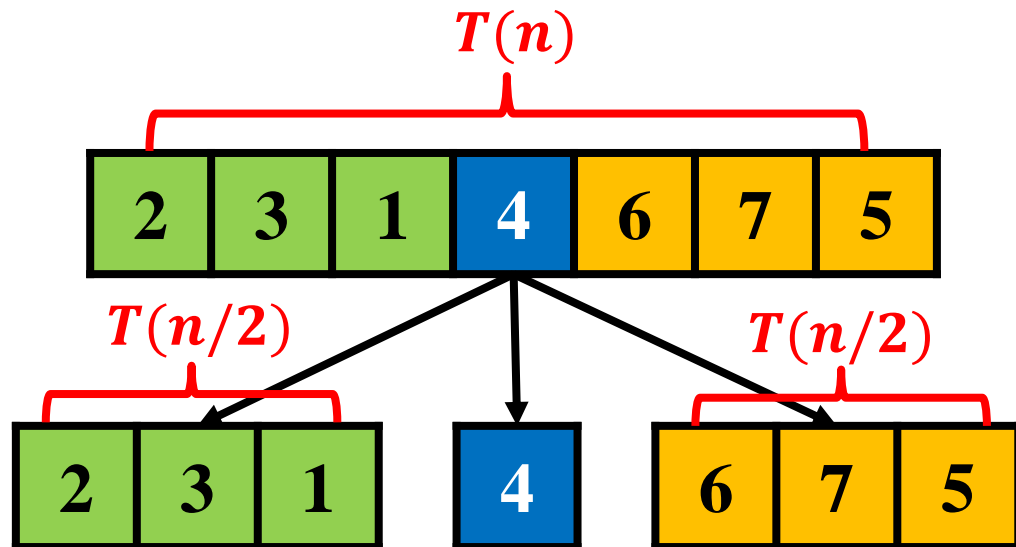
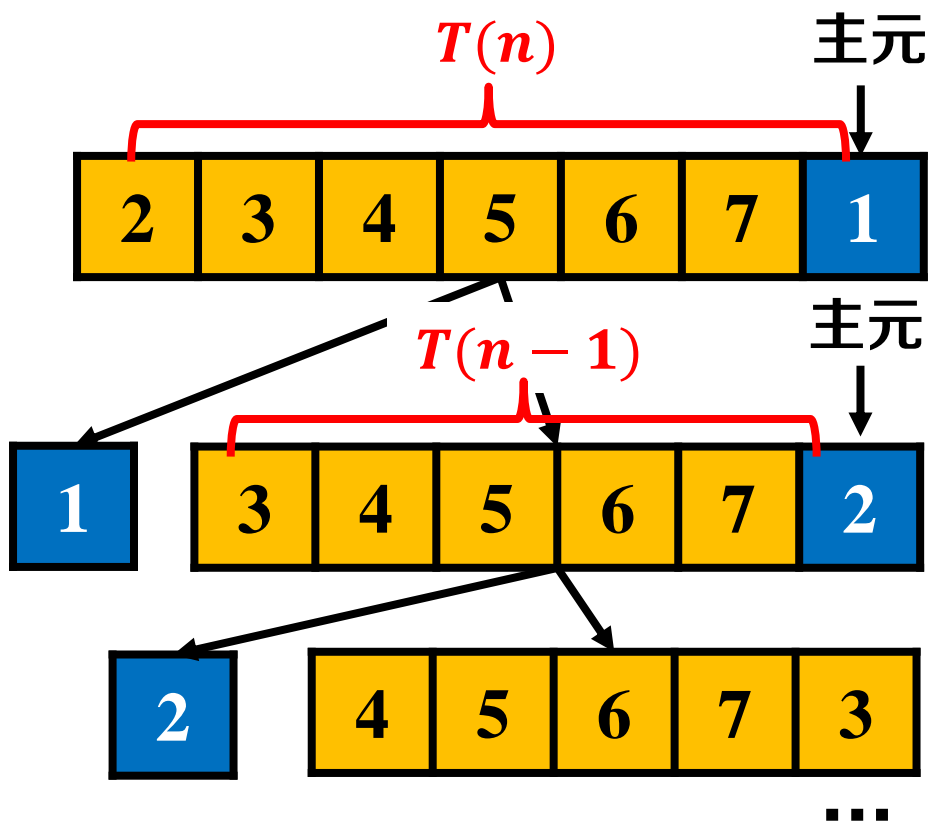
随机划分

- 反思最差情况
 - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
 - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况



随机划分

- 反思最差情况
 - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
 - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况



随机划分：伪代码



- Randomized-Partition(A, p, r)

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 划分位置 q

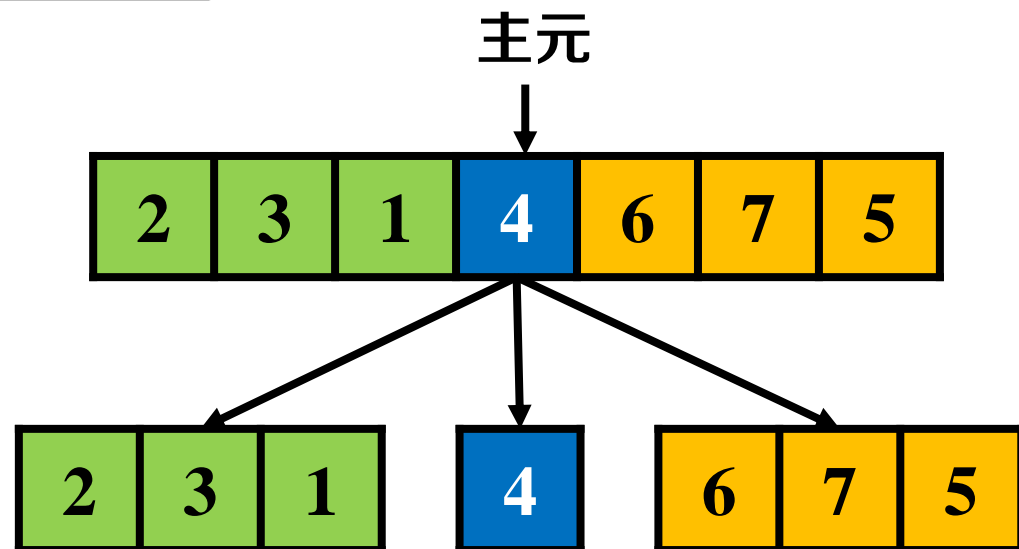
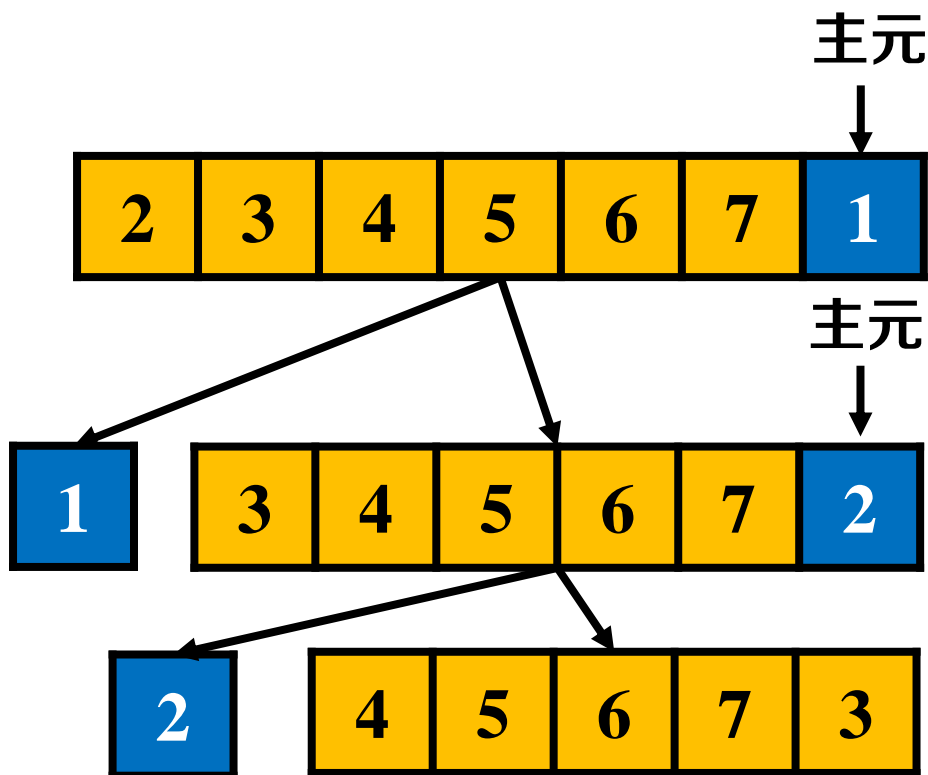
$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$

exchange $A[s]$ with $A[r]$

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

return q

随机选取主元



随机划分：伪代码



● Randomized-Partition(A, p, r)

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 划分位置 q

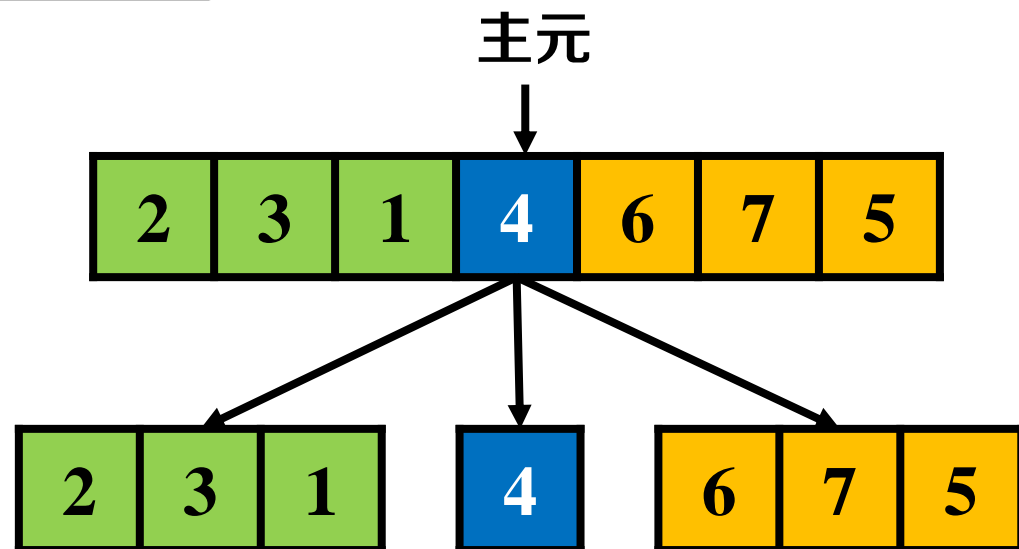
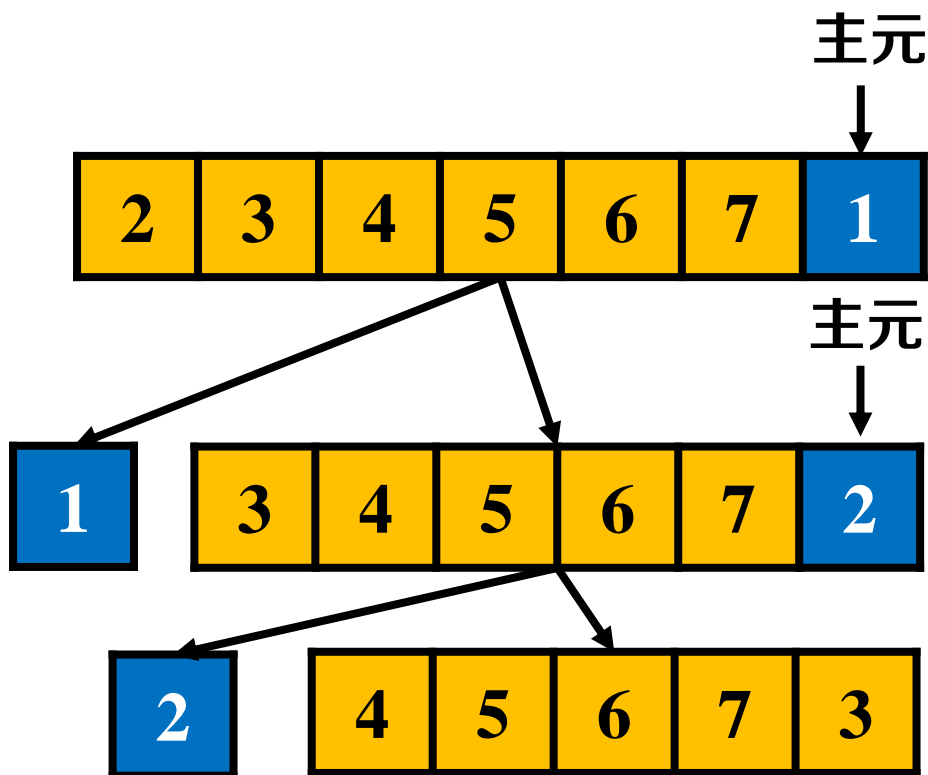
$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$

exchange $A[s]$ with $A[r]$

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

return q

交换到末尾



随机划分：伪代码



- Randomized-Partition(A, p, r)

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 划分位置 q

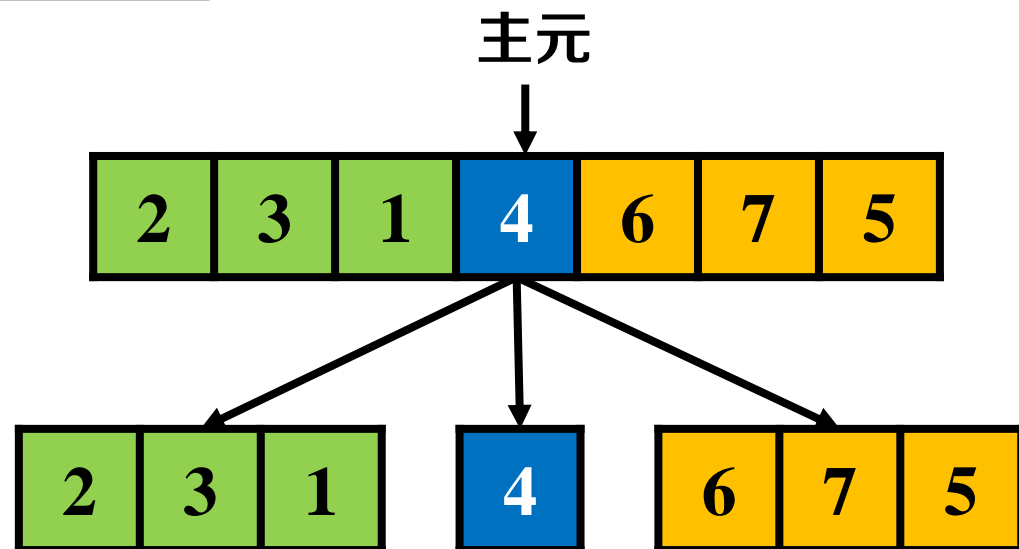
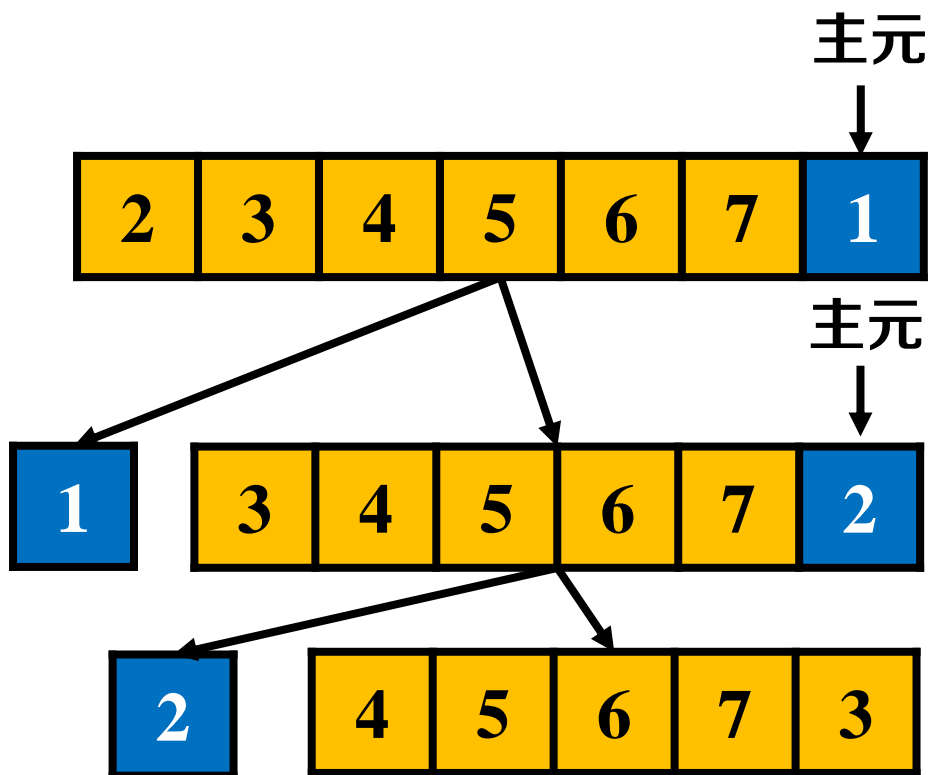
$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$

exchange $A[s]$ with $A[r]$

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

return q

执行数组划分



随机化快速排序：算法框架



2	3	4	5	6	7	1
---	---	---	---	---	---	---

分解原问题



解决子问题

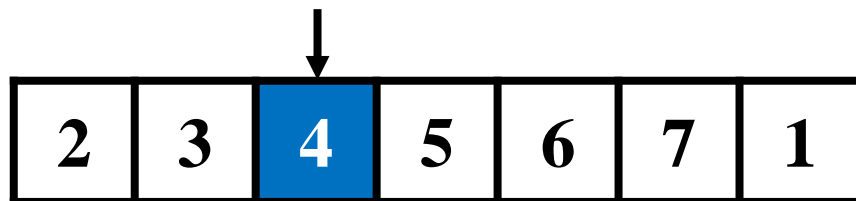


合并问题解

随机化快速排序：算法框架



随机化选取主元



分解原问题



解决子问题



合并问题解

随机化快速排序：算法框架



分解原问题

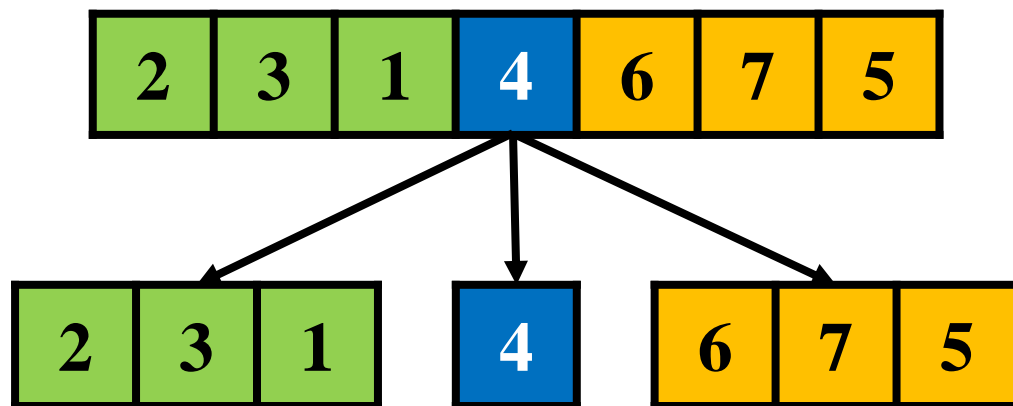


解决子问题



合并问题解

随机化快速排序：算法框架



分解原问题

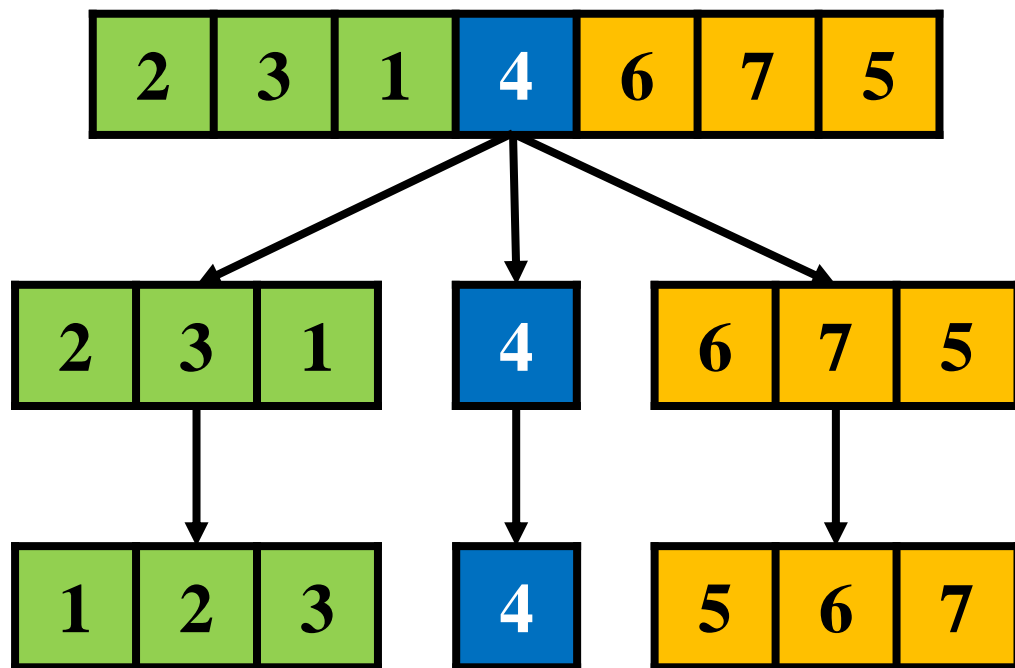


解决子问题



合并问题解

随机化快速排序：算法框架



分解原问题

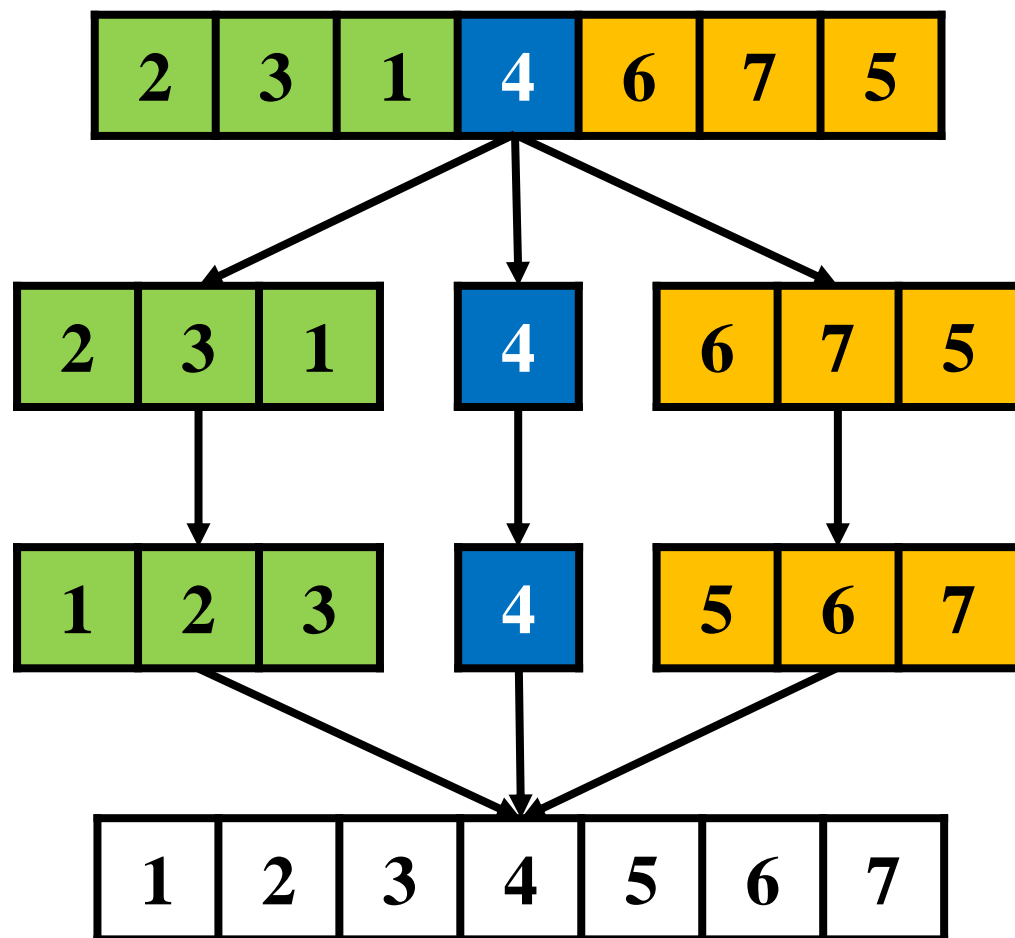


解决子问题



合并问题解

随机化快速排序：算法框架



分解原问题



解决子问题



合并问题解

随机化快速排序：伪代码



- **Randomized-Partition(A, p, r)**

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 划分位置 q

$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$

exchange $A[s]$ with $A[r]$

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

return q

- **Randomized-QuickSort(A, p, r)**

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p \leq r$ then

$q \leftarrow \text{Randomized-Partition}(A, p, r)$

 Randomized-QuickSort($A, p, q - 1$)

 Randomized-QuickSort($A, q + 1, r$)

end

随机选取主元

随机化快速排序：伪代码



- **Randomized-Partition(A, p, r)**

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 划分位置 q

$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$

exchange $A[s]$ with $A[r]$

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

return q

- **Randomized-QuickSort(A, p, r)**

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Randomized-Partition}(A, p, r)$
 Randomized-QuickSort($A, p, q - 1$)
 Randomized-QuickSort($A, q + 1, r$)

end

左右分治

- **Randomized-Partition(A, p, r)**

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 划分位置 q

$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$

exchange $A[s]$ with $A[r]$

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

return q

- **Randomized-QuickSort(A, p, r)**

输入: 数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出: 有序数组 A

if $p < r$ then

$q \leftarrow \text{Randomized-Partition}(A, p, r)$

 Randomized-QuickSort($A, p, q - 1$)

 Randomized-QuickSort($A, q + 1, r$)

end

问题：如何分析时间复杂度？

随机化快速排序：复杂度分析



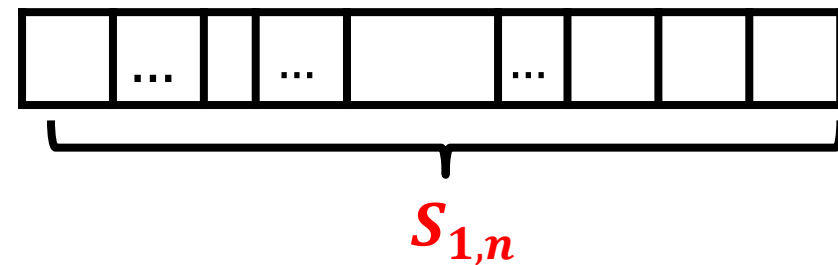
- 分析目标：期望复杂度
 - 计算元素期望比较次数 $E[X]$

- 分析目标：期望复杂度
 - 计算元素期望比较次数 $E[X]$
- 符号表示
 - z_k ：数组 A 中第 k 小的元素（假设元素互不相同）
 - 集合 $S_{i,j}$ ： $\{z_i, \dots, z_j\}$

随机化快速排序：复杂度分析



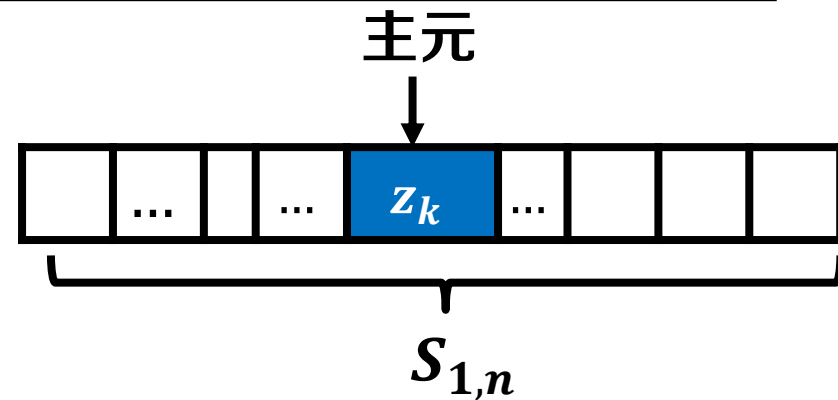
- 分析目标：期望复杂度
 - 计算元素期望比较次数 $E[X]$
- 符号表示
 - z_k ：数组 A 中第 k 小的元素（假设元素互不相同）
 - 集合 $S_{i,j}$ ： $\{z_i, \dots, z_j\}$



随机化快速排序：复杂度分析



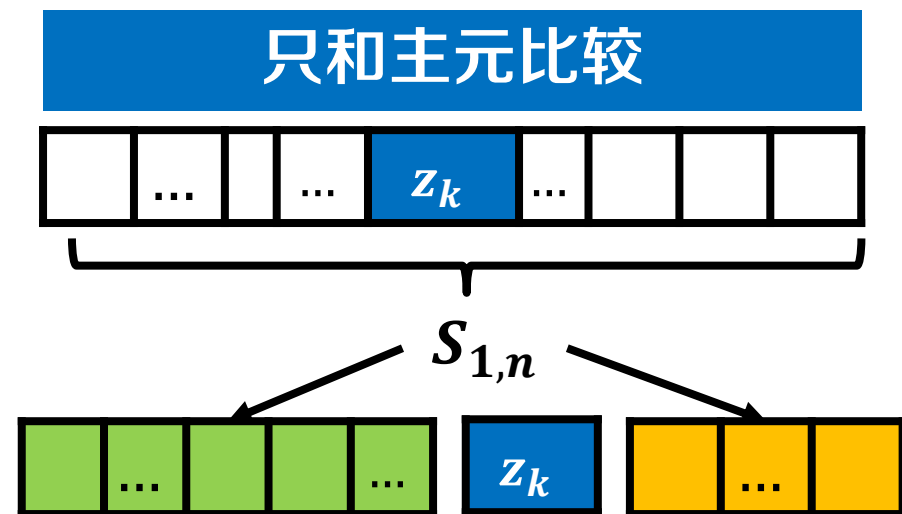
- 分析目标：期望复杂度
 - 计算元素期望比较次数 $E[X]$
- 符号表示
 - z_k ：数组 A 中第 k 小的元素（假设元素互不相同）
 - 集合 $S_{i,j}$ ： $\{z_i, \dots, z_j\}$



随机化快速排序：复杂度分析

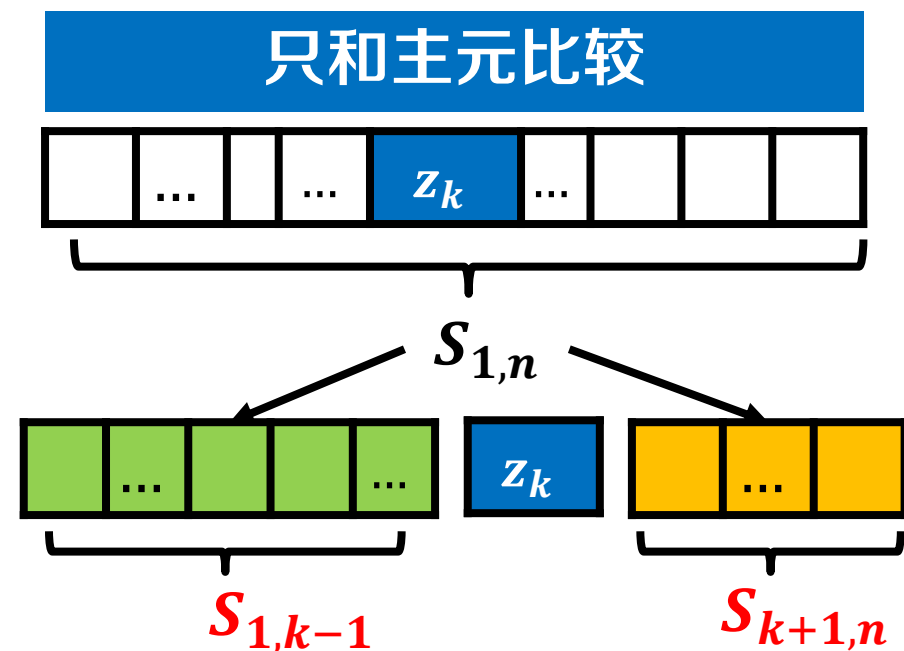


- 分析目标：期望复杂度
 - 计算元素期望比较次数 $E[X]$
- 符号表示
 - z_k ：数组 A 中第 k 小的元素（假设元素互不相同）
 - 集合 $S_{i,j}$ ： $\{z_i, \dots, z_j\}$



随机化快速排序：复杂度分析

- 分析目标：期望复杂度
 - 计算元素期望比较次数 $E[X]$
- 符号表示
 - z_k ：数组 A 中第 k 小的元素（假设元素互不相同）
 - 集合 $S_{i,j}$ ： $\{z_i, \dots, z_j\}$



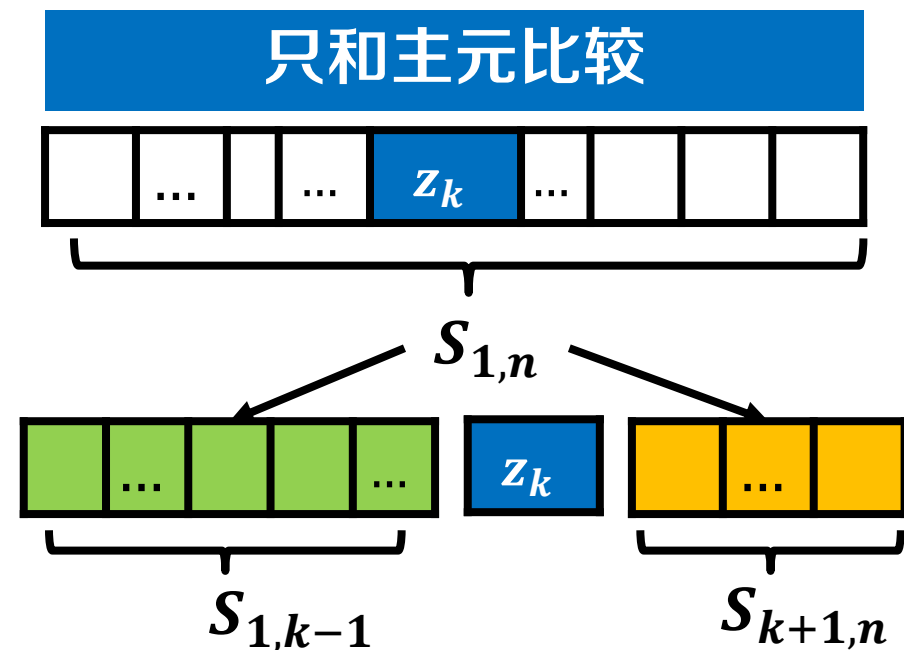
随机化快速排序：复杂度分析



- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数

- $E[X] =$



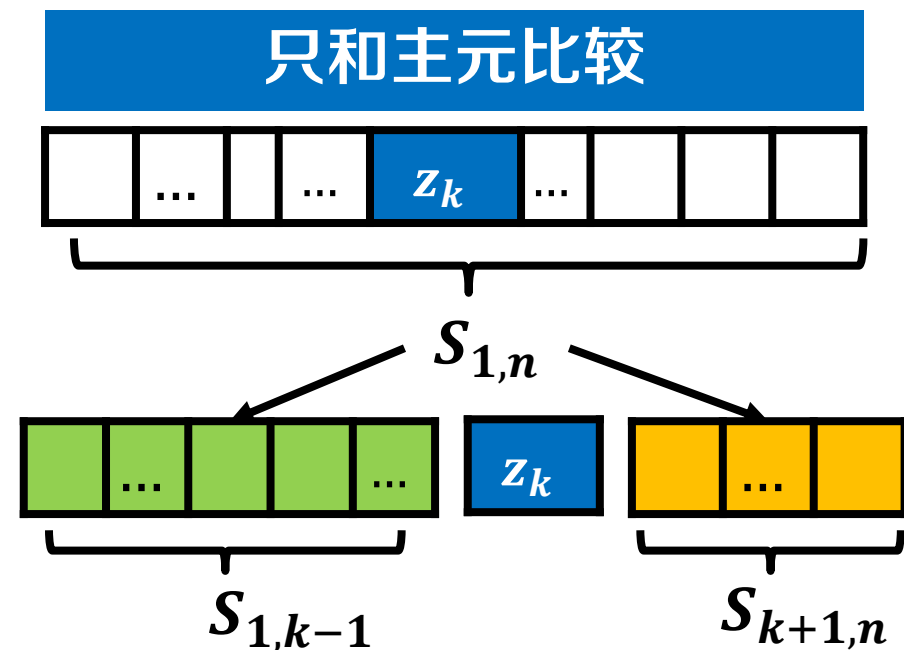
随机化快速排序：复杂度分析



- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数

- $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}\right]$



随机化快速排序：复杂度分析

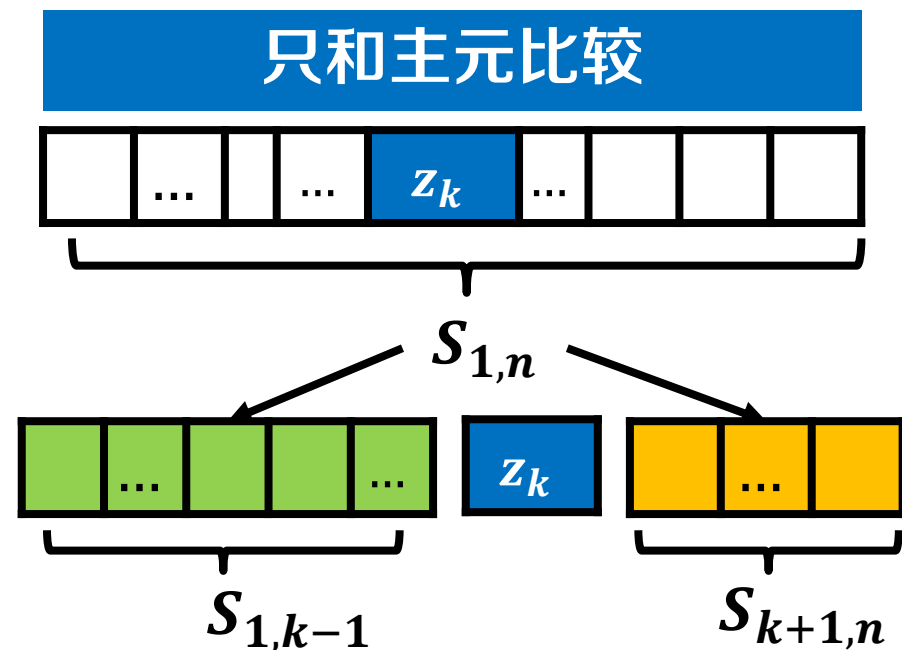


- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数

- $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$

期望的线性特性

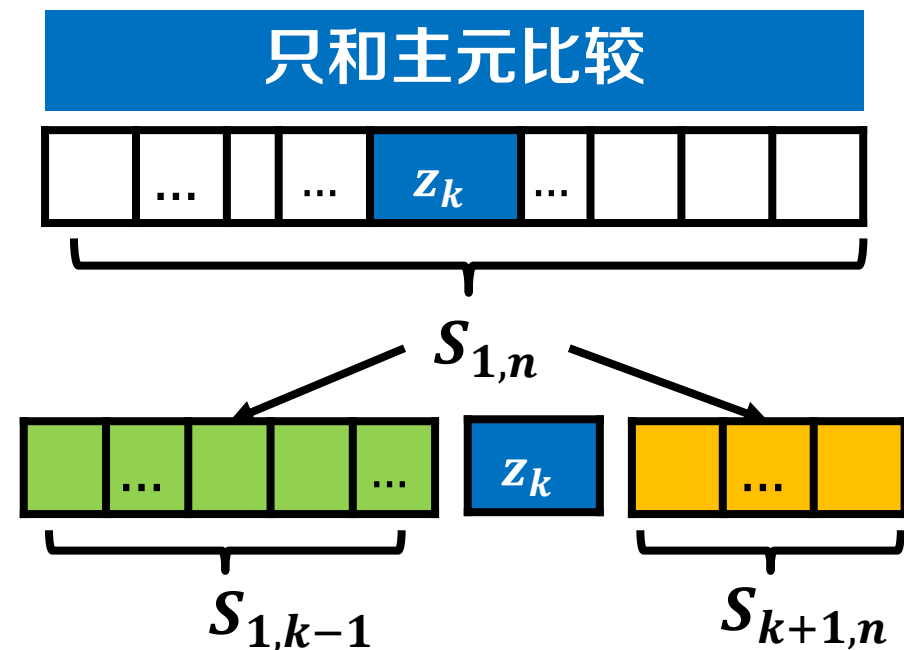


随机化快速排序：复杂度分析



- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = ?$

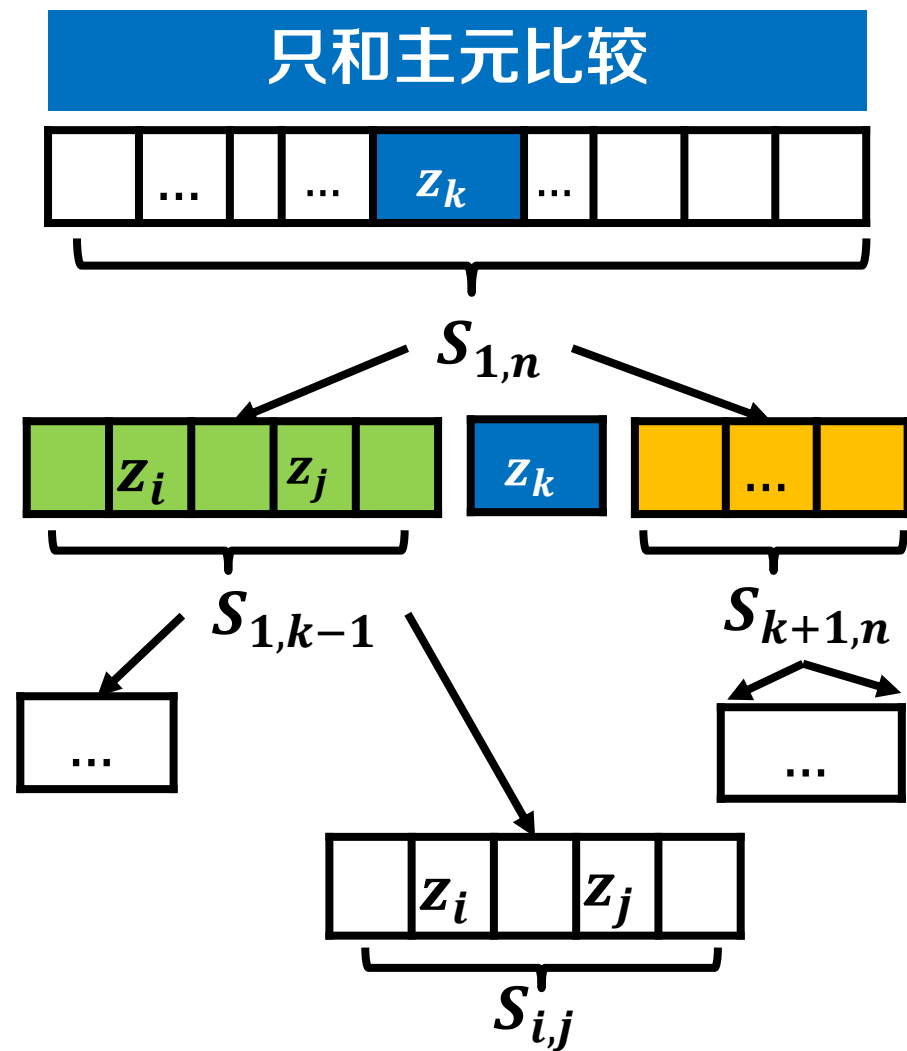


随机化快速排序：复杂度分析



- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = ?$

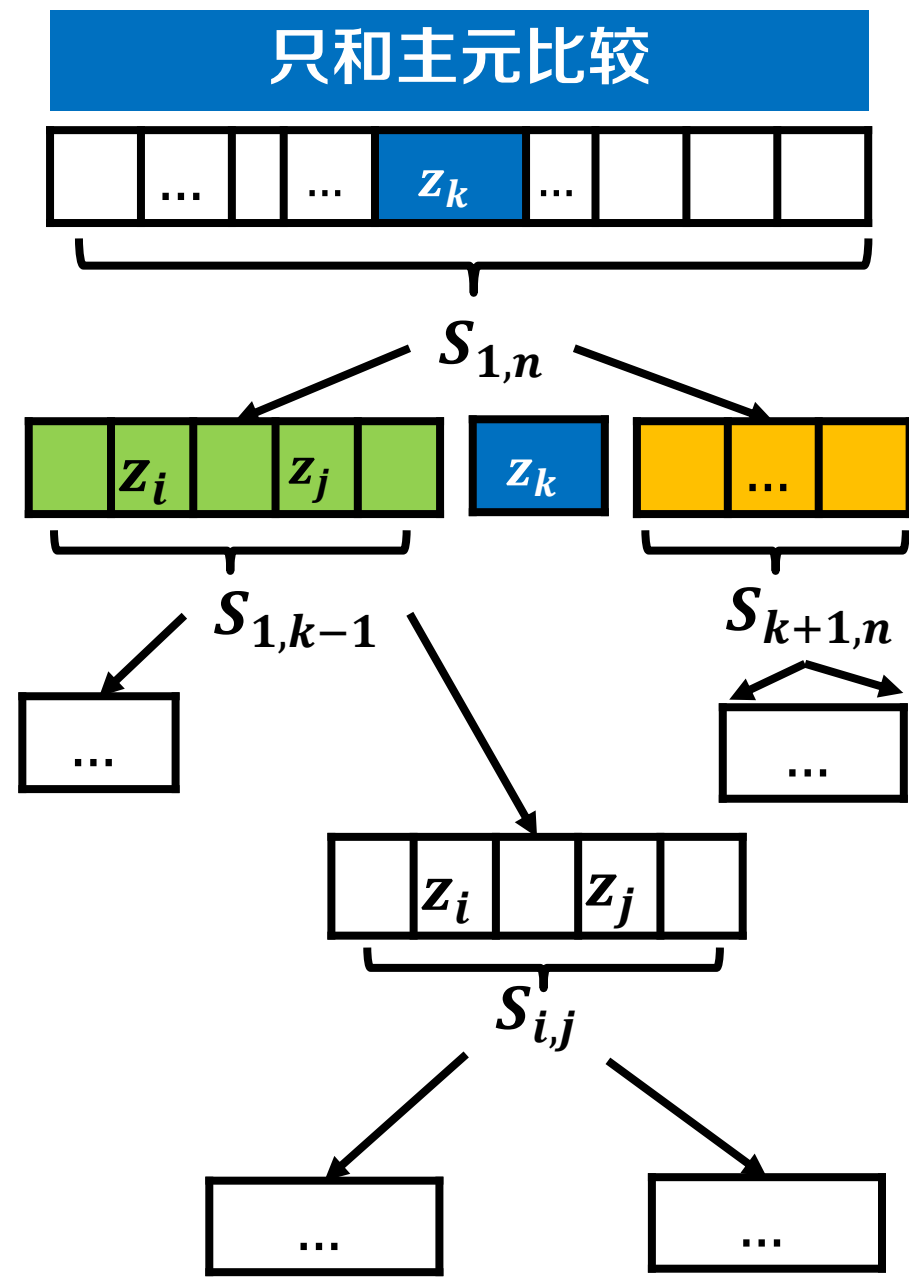


随机化快速排序：复杂度分析



- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = ?$

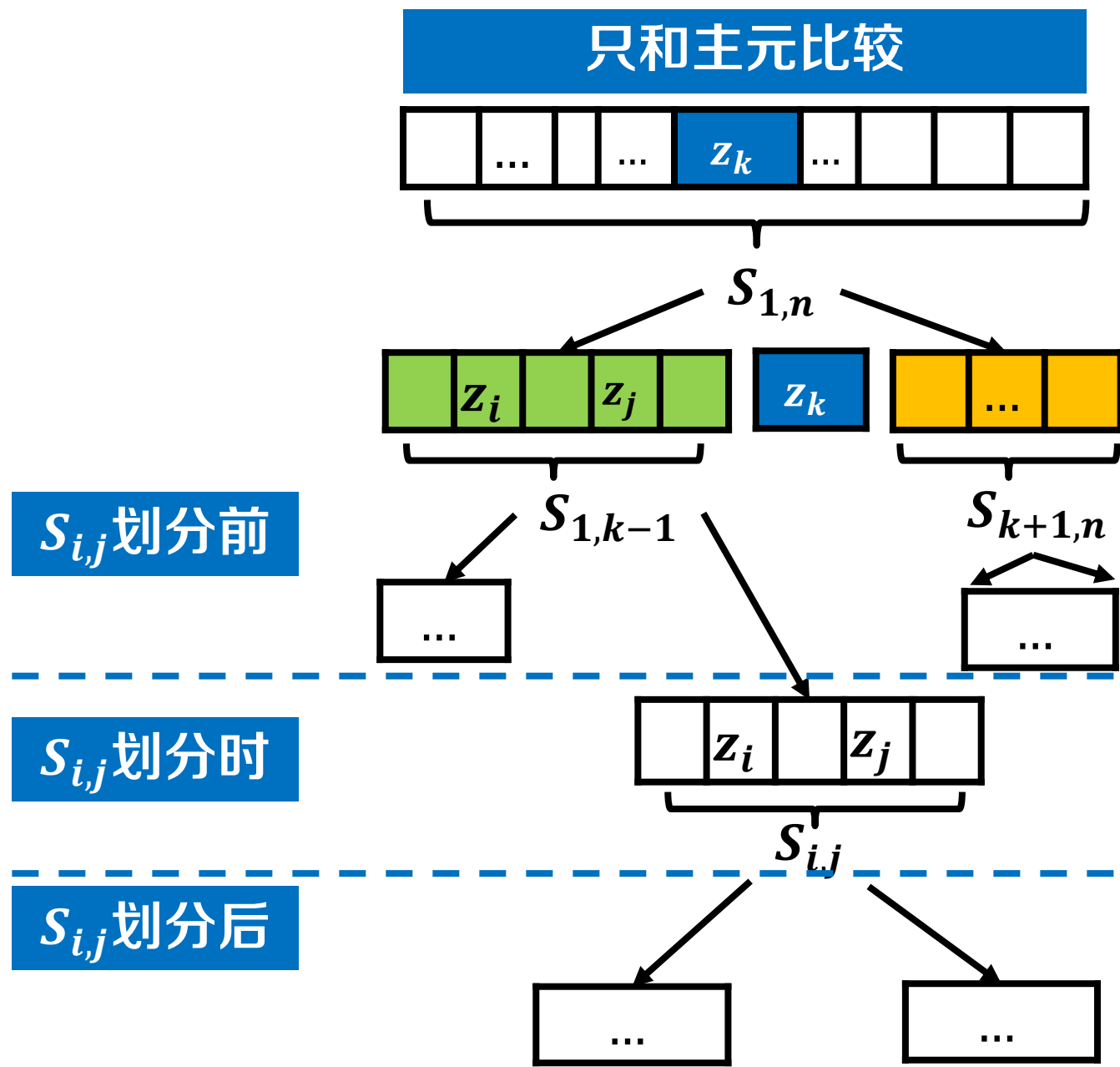


随机化快速排序：复杂度分析



- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = ?$

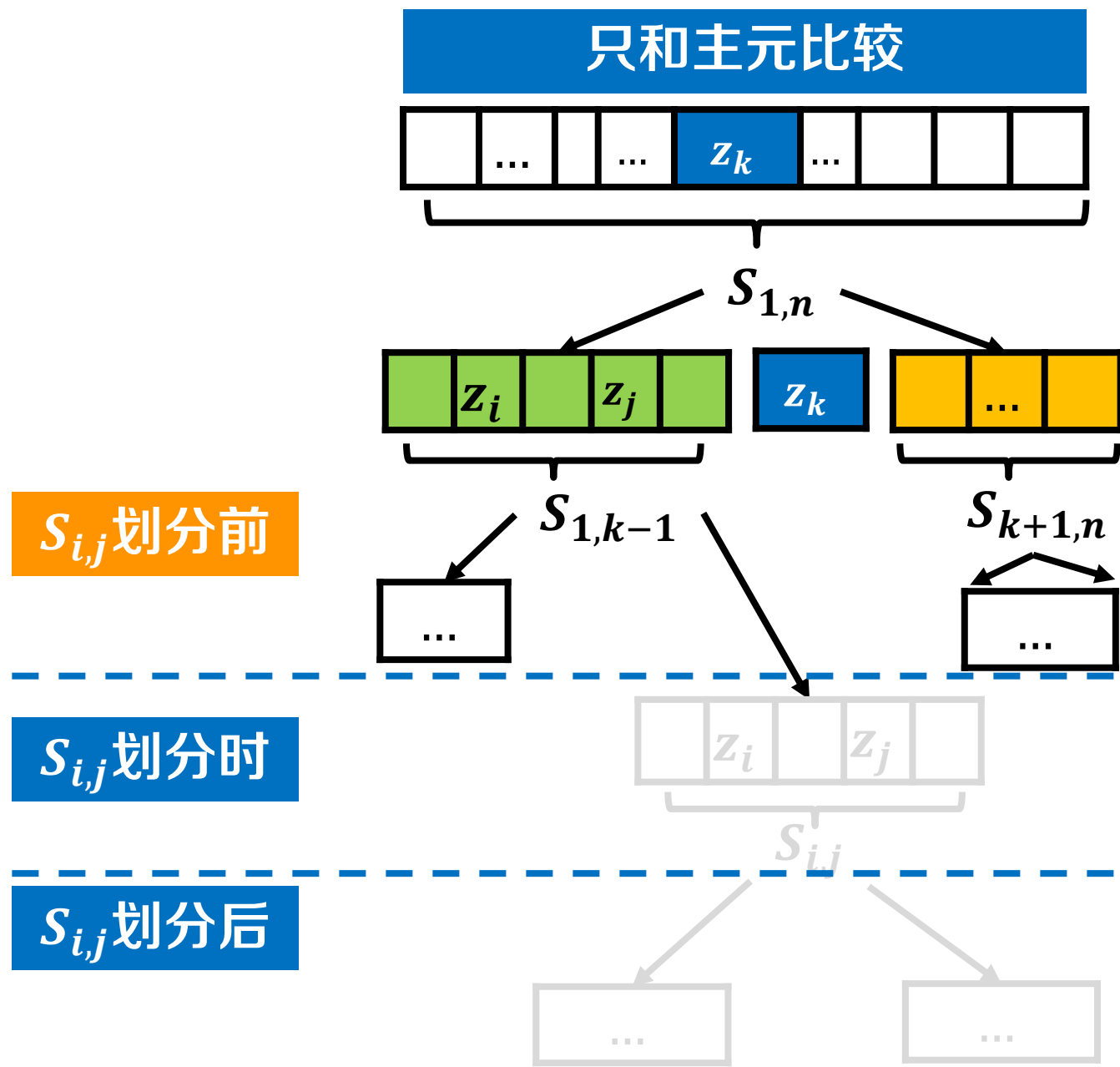


随机化快速排序：复杂度分析



- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = ?$

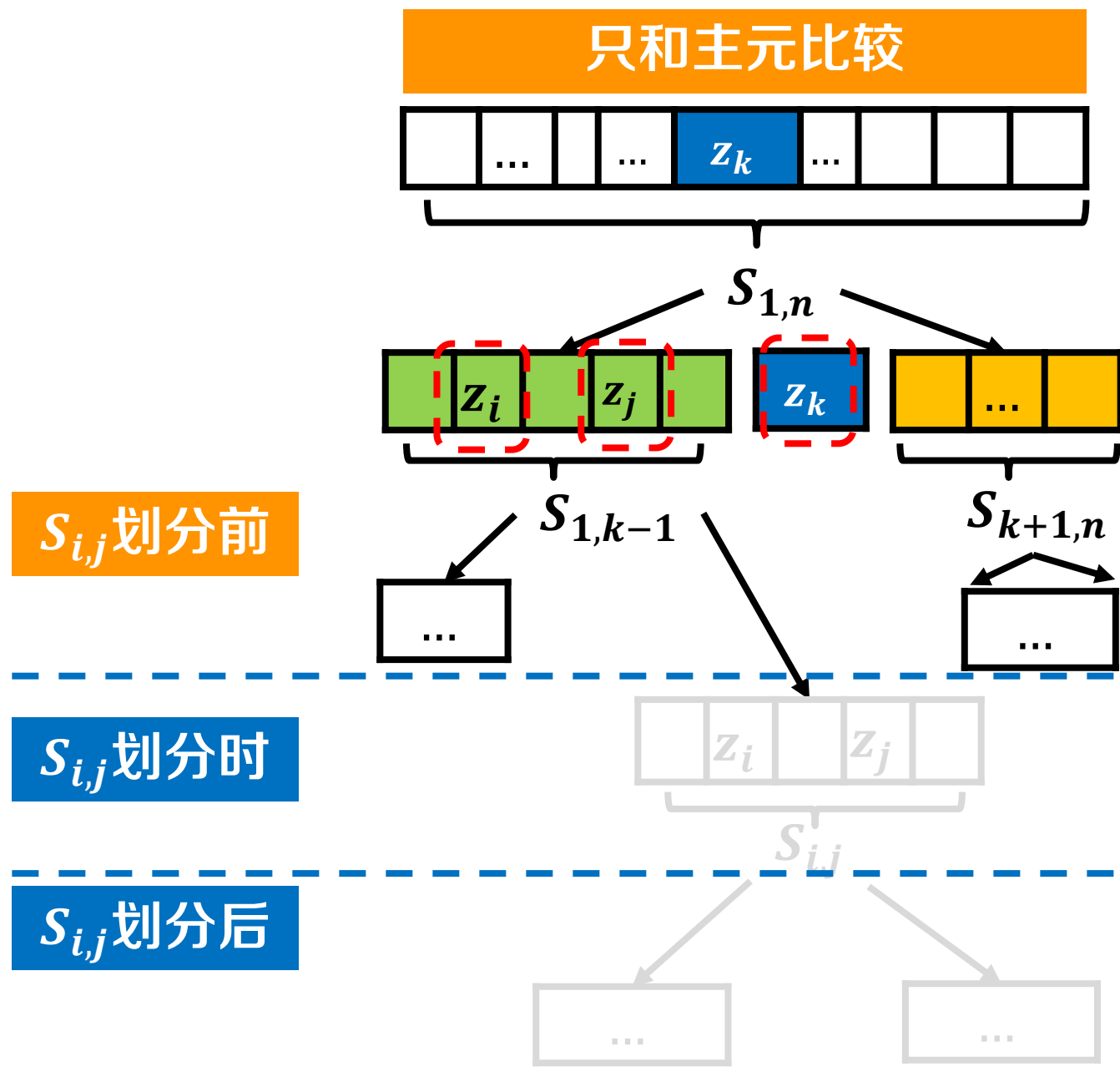


随机化快速排序：复杂度分析



- 推导过程

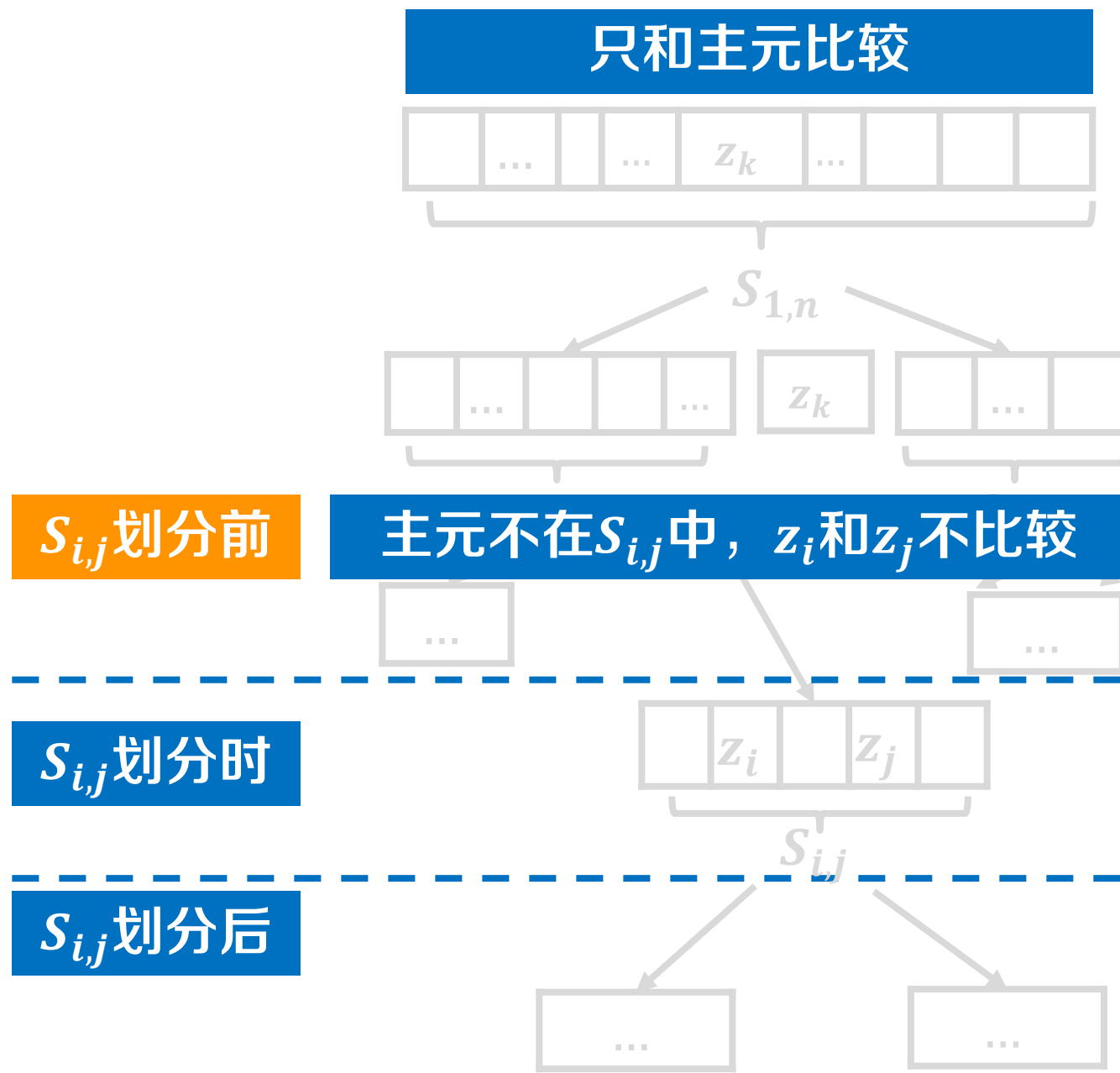
- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = ?$



随机化快速排序：复杂度分析

- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = ?$

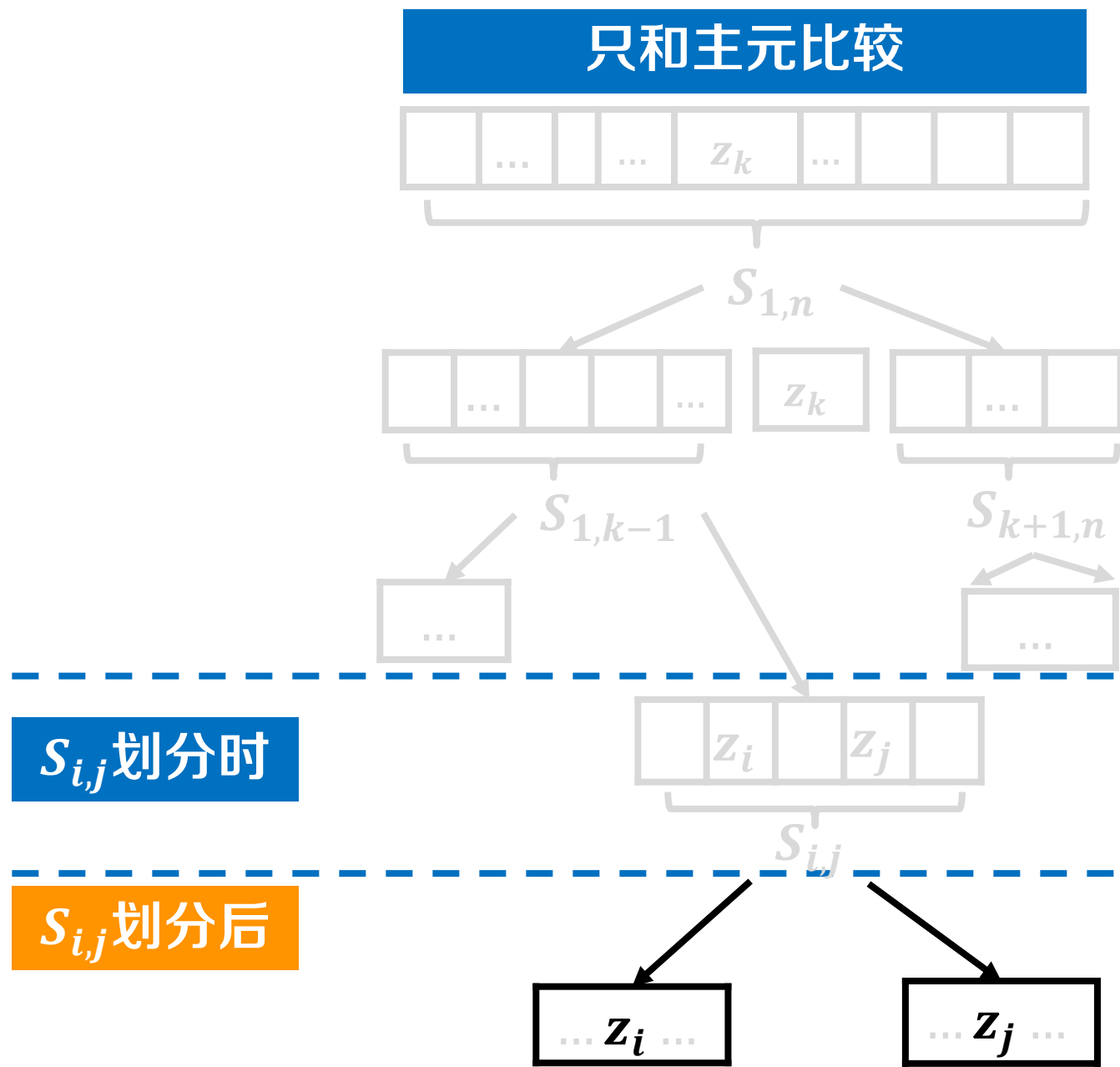


随机化快速排序：复杂度分析



- 推导过程

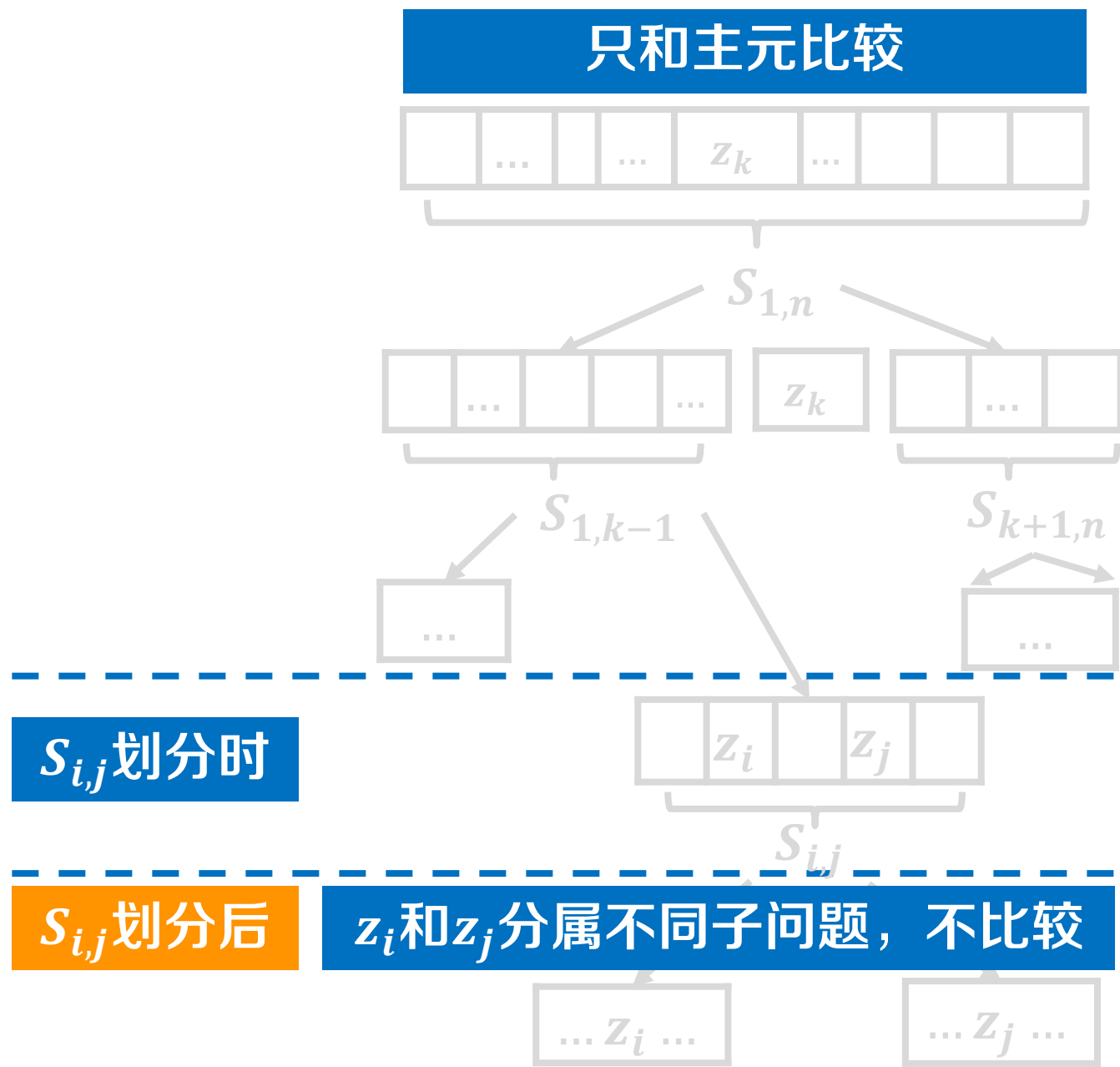
- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = ?$



随机化快速排序：复杂度分析

• 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = ?$



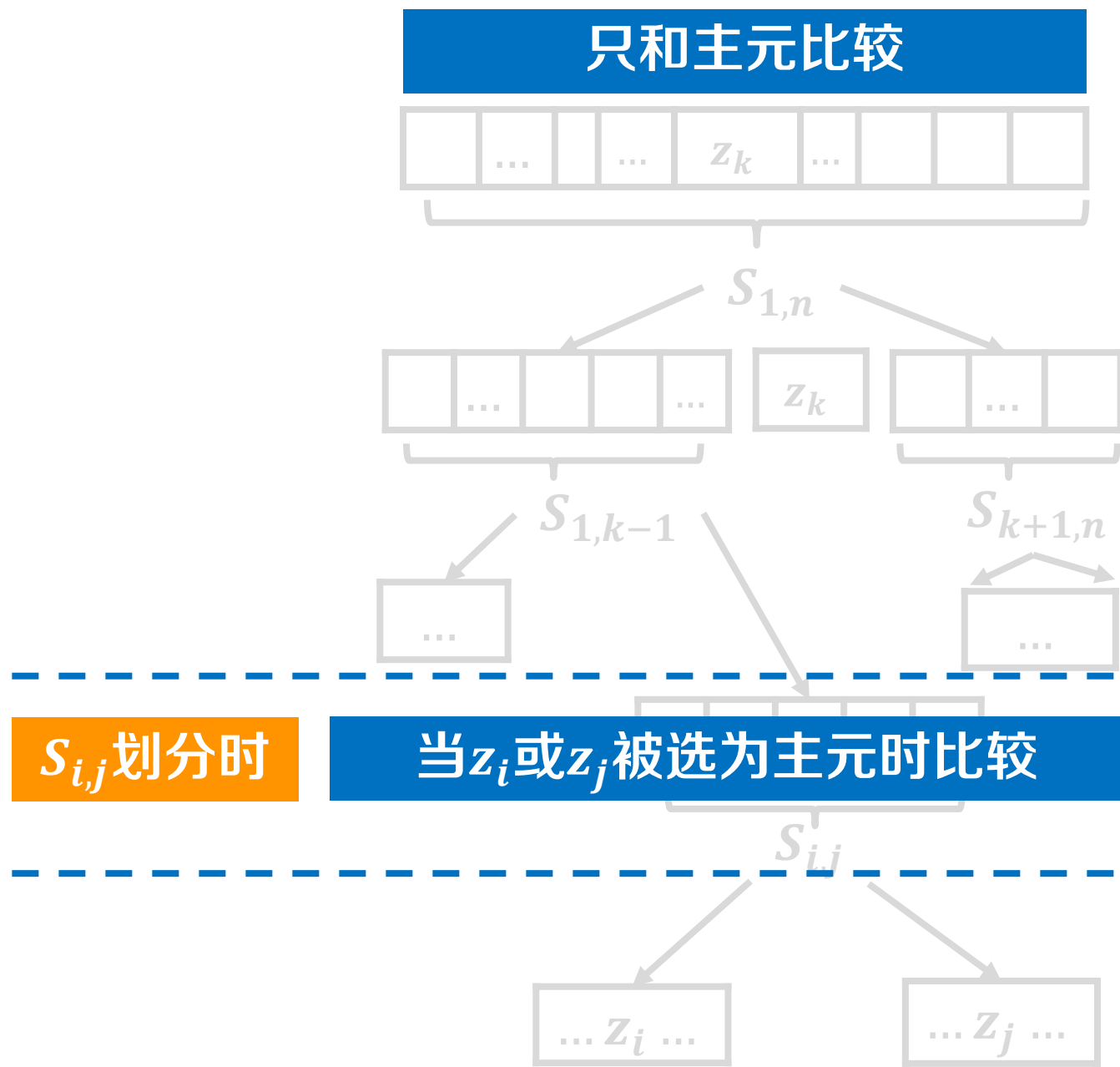
- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = ?$



随机化快速排序：复杂度分析

- 推导过程

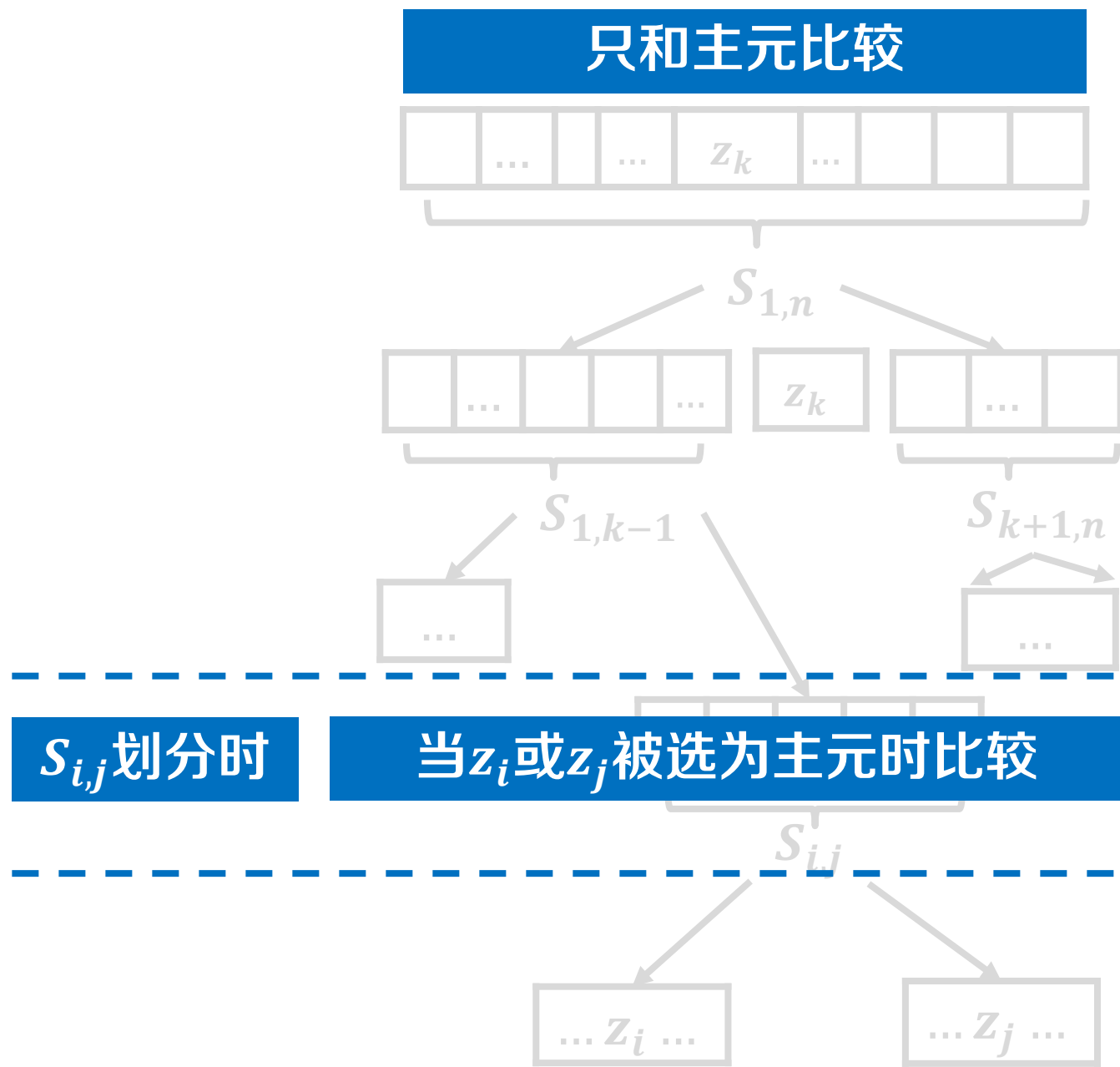
- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = ?$



随机化快速排序：复杂度分析

- 推导过程

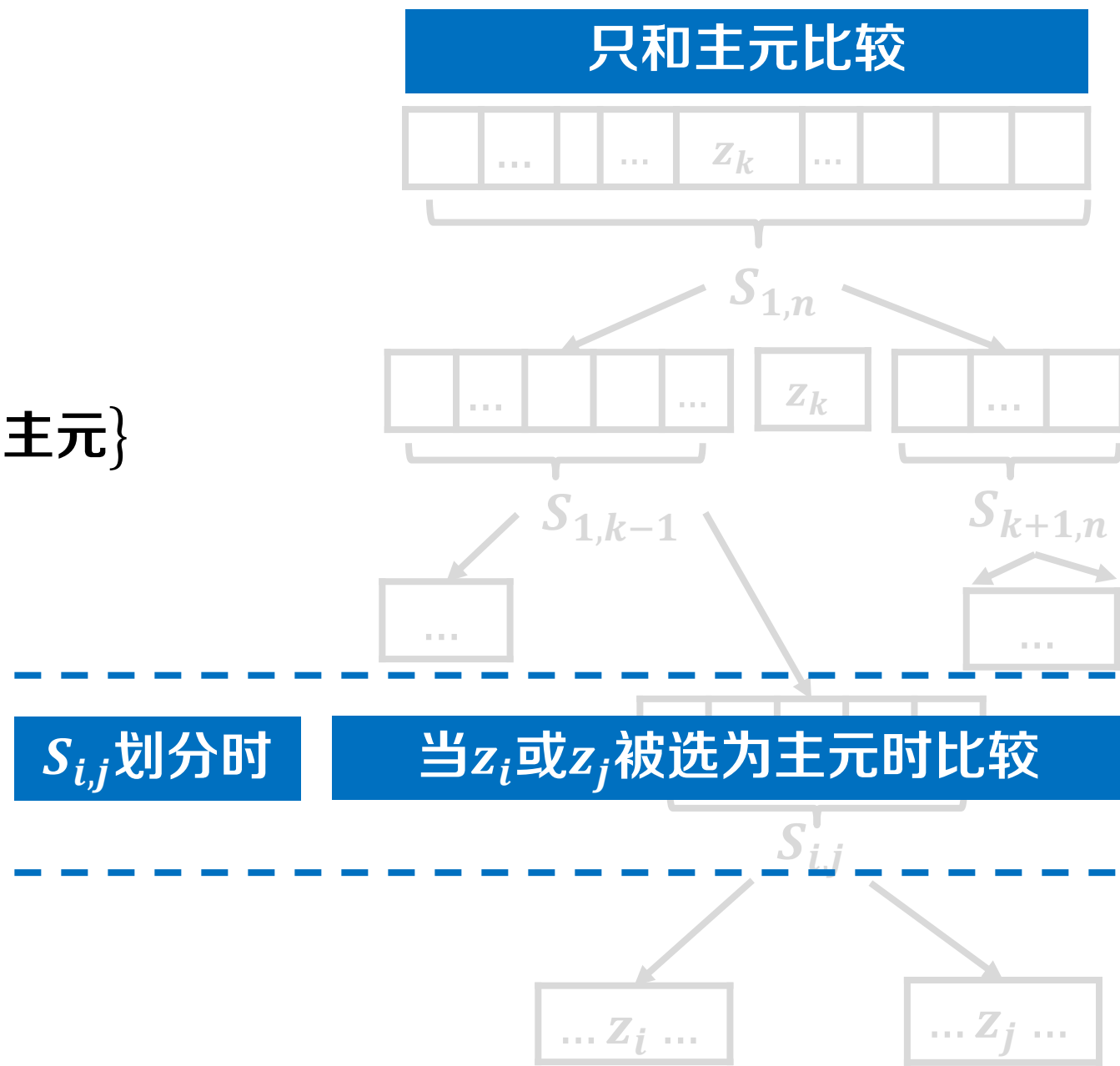
- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = \Pr\{z_i \text{ 或 } z_j \text{ 被选为主元}\}$



随机化快速排序：复杂度分析

• 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$
- $E[X_{ij}] = \Pr\{z_i \text{ 或 } z_j \text{ 被选为主元}\}$
 $= \Pr\{z_i \text{ 是主元}\} + \Pr\{z_j \text{ 是主元}\}$
 $= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1}$
 $= \frac{2}{j-i+1}$



- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数

- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$

- $E[X_{ij}] = \frac{2}{j-i+1}$

- $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} =$

- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数

- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$

- $E[X_{ij}] = \frac{2}{j-i+1}$

- $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1}$


$$k = j - i$$

- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数

- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$

- $E[X_{ij}] = \frac{2}{j-i+1}$

- $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k}$

随机化快速排序：复杂度分析



- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数

- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$

- $E[X_{ij}] = \frac{2}{j-i+1}$

- $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} O(\log n) \end{aligned}$$

调和级数: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = O(\log n)$

- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数

- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$

- $E[X_{ij}] = \frac{2}{j-i+1}$

- $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} O(\log n) = \mathbf{O(n \log n)} \end{aligned}$$

- 推导过程

- 随机变量 X_{ij} : z_i 和 z_j 比较的次数

- $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}]$

- $E[X_{ij}] = \frac{2}{j-i+1}$

- $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} O(\log n) = \mathbf{O(n \log n)} \end{aligned}$$

期望时间复杂度: $O(n \log n)$

排序算法比较



约翰·冯·诺伊曼
John von Neumann

1945年提出



算法名称	时间复杂度
选择排序	$O(n^2)$
插入排序	$O(n^2)$
归并排序	$O(n \log n)$
快速排序	最差: $O(n^2)$
	期望: $O(n \log n)$



托尼·霍尔
Tony Hoare

1961年提出

排序算法比较



约翰·冯·诺伊曼
John von Neumann

1945年提出

算法名称	时间复杂度
选择排序	$O(n^2)$
插入排序	$O(n^2)$
归并排序	$O(n \log n)$
快速排序	最差: $O(n^2)$
	期望: $O(n \log n)$

问题：能否突破 $O(n \log n)$?



托尼·霍尔
Tony Hoare

1961年提出

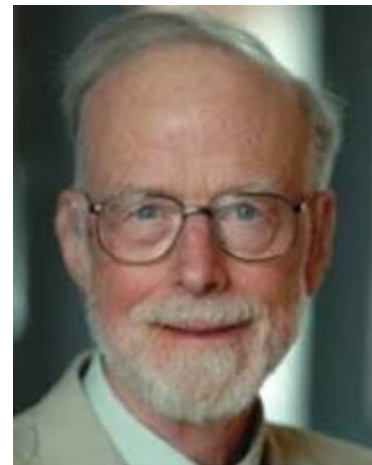
排序算法比较



约翰·冯·诺伊曼
John von Neumann

1945年提出

算法名称	时间复杂度
选择排序	$O(n^2)$
插入排序	$O(n^2)$
归并排序	$O(n \log n)$
快速排序	最差: $O(n^2)$
	期望: $O(n \log n)$



托尼·霍尔
Tony Hoare

1961年提出

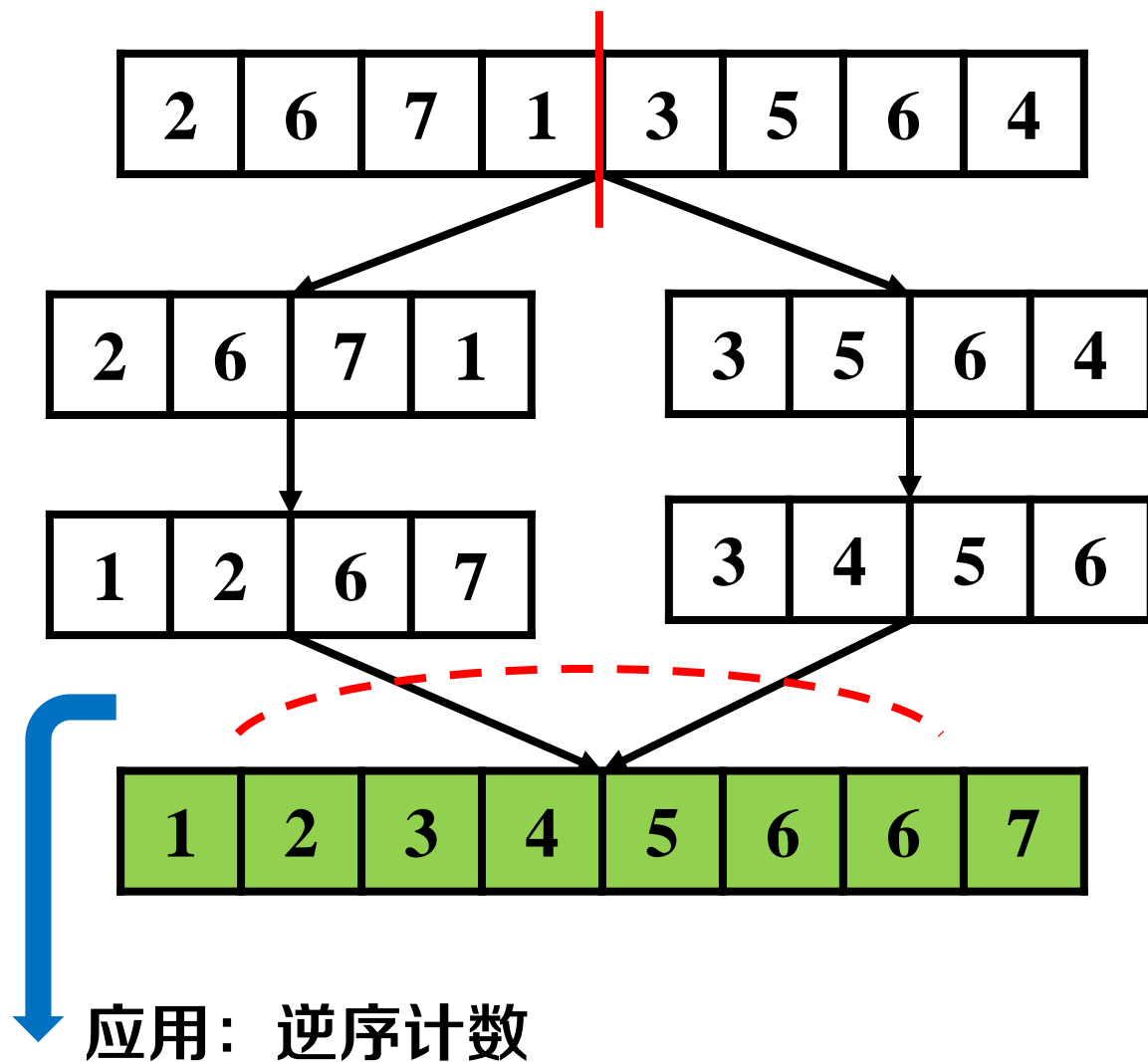
问题：能否突破 $O(n \log n)$?

基于比较的排序，时间复杂度下界为 $\Omega(n \log n)$

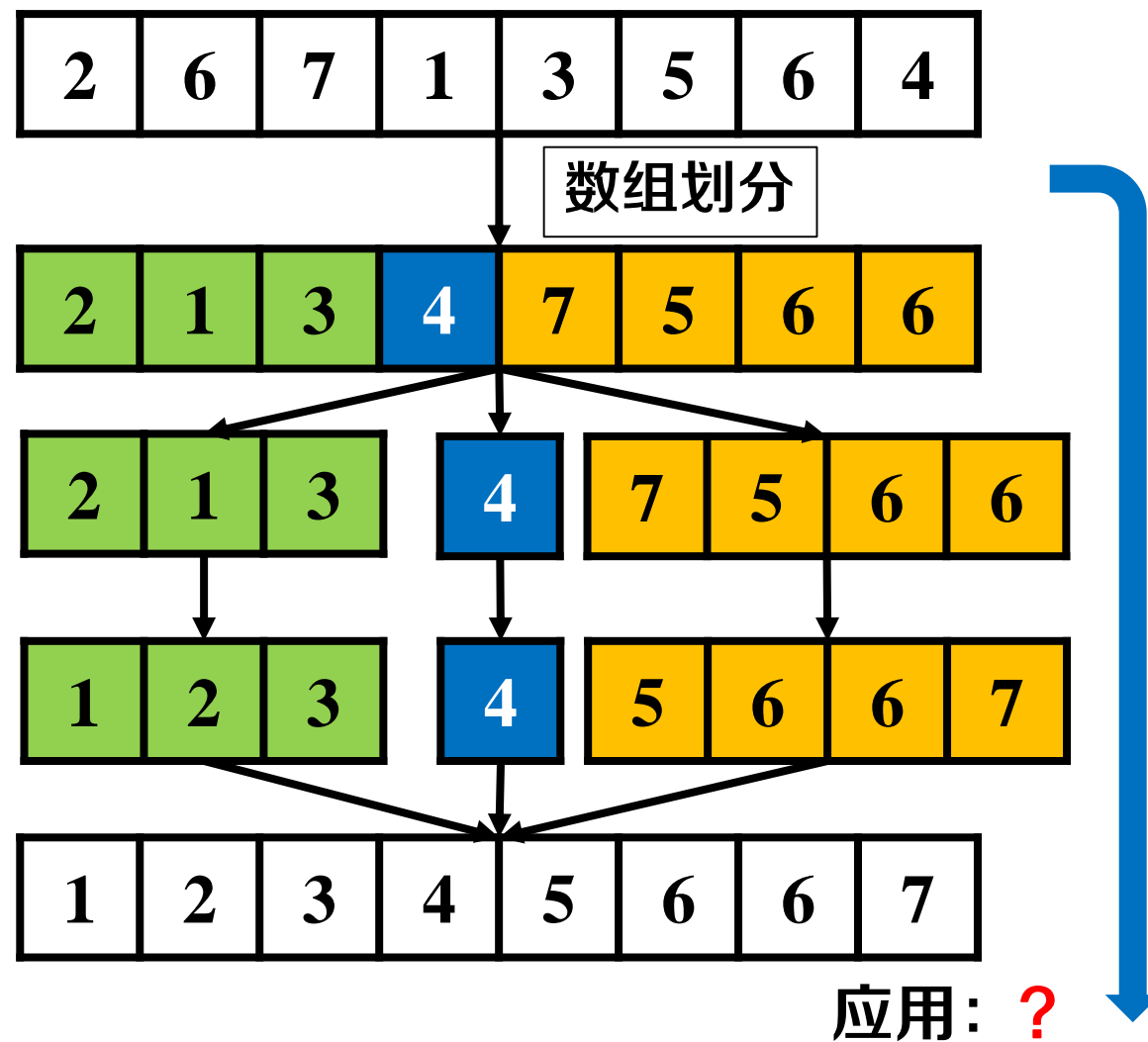
小结



• 归并排序



• 快速排序



谢谢

