# Design and Analysis of Algorithms Part III: Greedy Algorithms Lecture 19: Activity Selection

童咏昕

北京航空航天大学 计算机学院

# 贪心策略篇概述



在算法课程第三部分"贪心策略"主题中,我们将主要聚焦于如下 经典问题:

Fractional Knapsack Problem (部分背包问题)

Huffman Coding Problem (赫夫曼编码问题)

Activity Selection Problem (活动选择问题)

# 贪心策略篇概述



在算法课程第三部分"贪心策略"主题中,我们将主要聚焦于如下 经典问题:

Fractional Knapsack Problem (部分背包问题)

Huffman Coding Problem (赫夫曼编码问题)

Activity Selection Problem (活动选择问题)



#### • 会场出租







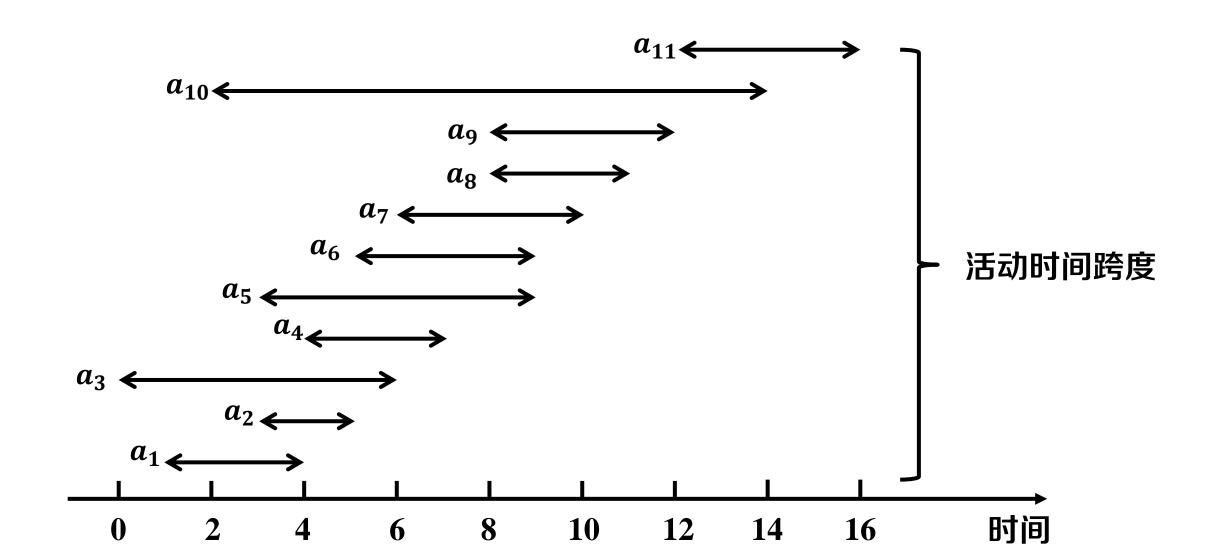
婚礼宴请: 11:00~14:00



学术研讨: 14:00~16:00

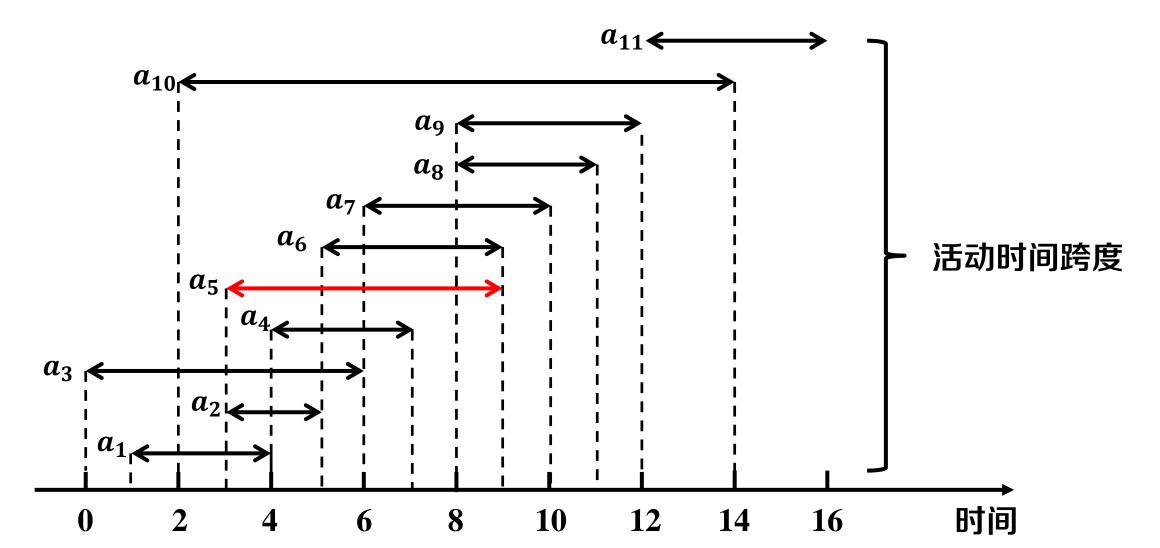


## • 会场出租



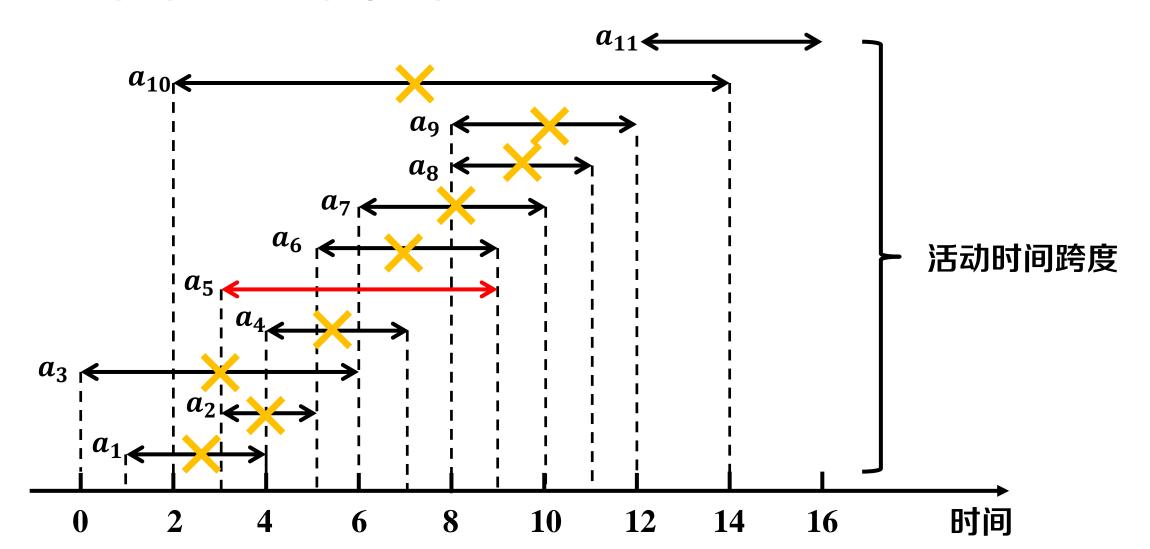


- 会场出租
  - 选择出租的活动时间不能冲突



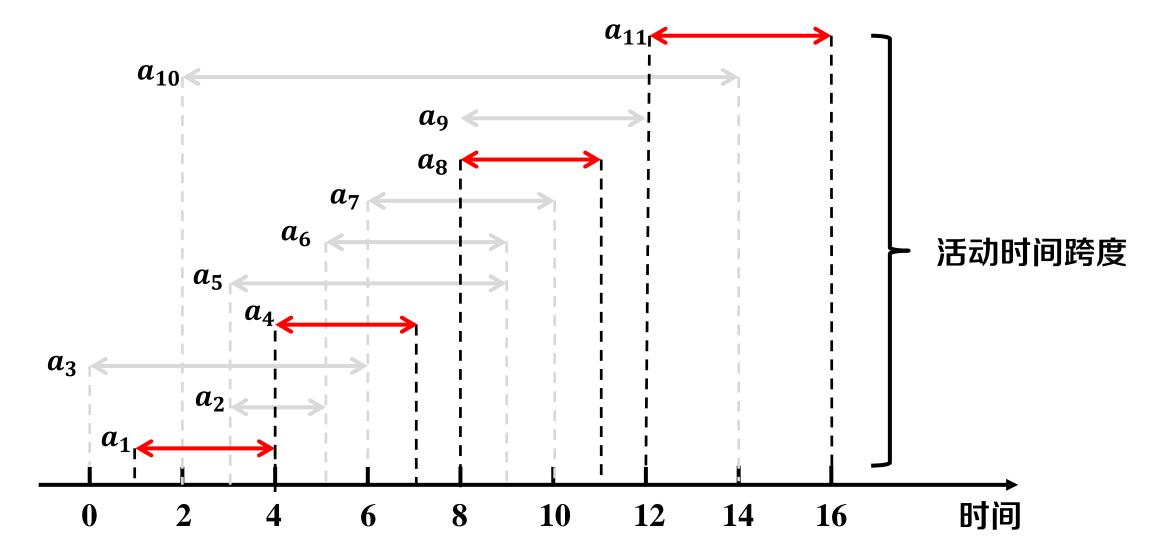


- 会场出租
  - 选择出租的活动时间不能冲突





- 会场出租
  - 选择出租的活动时间不能冲突,怎样选择才能选更多的活动?



## 问题定义



#### 活动选择问题

#### **Activity Selection Problem**

#### 输入

- n个活动组成的集合 $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
- 每个活动 $a_i$ 的开始时间 $s_i$ 和结束时间 $f_i$

#### 输出

• 找出活动集合S的子集S',令

 $\max |S'|$ 

$$s.t. \forall a_i, a_j \in S', s_i \geq f_j$$
或 $s_j \geq f_i$ 

优化目标: 最大化选择活动个数



#### 活动选择问题

#### **Activity Selection Problem**

#### 输入

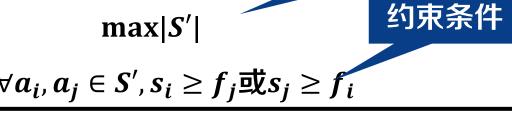
- n个活动组成的集合 $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
- 每个活动 $a_i$ 的开始时间 $s_i$ 和结束时间 $f_i$

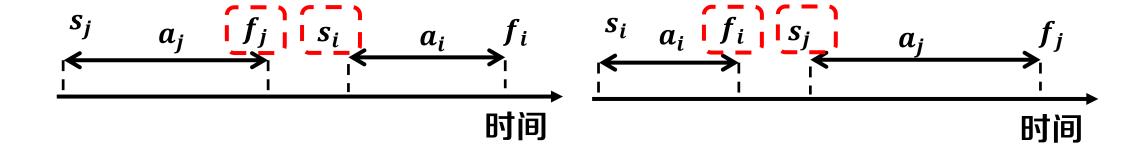
#### 输出

找出活动集合S的子集S',令

$$s.t. \forall a_i, a_j \in S', s_i \geq f_j$$
或 $s_j \geq f_i$ 

优化目标: 最大化选择活动个数





贪心策略:一般步骤



提出贪心策略

观察问题特征,构造贪心选择



证明策略正确

假设最优方案,通过替换证明



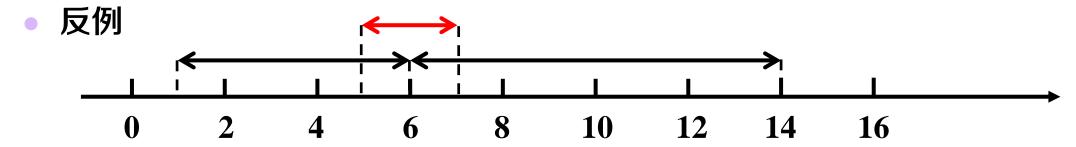
• 策略1: 最短活动优先

• 策略2: 最早开始活动优先

• 策略3: 最早结束活动优先



• 策略1: 最短活动优先

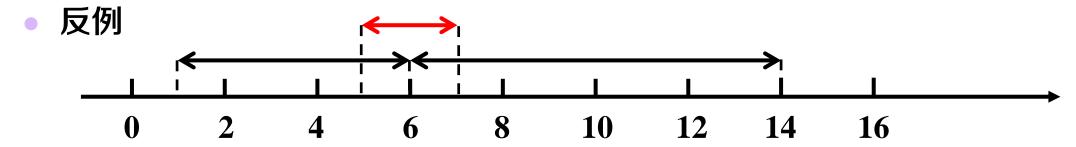


• 策略2: 最早开始活动优先

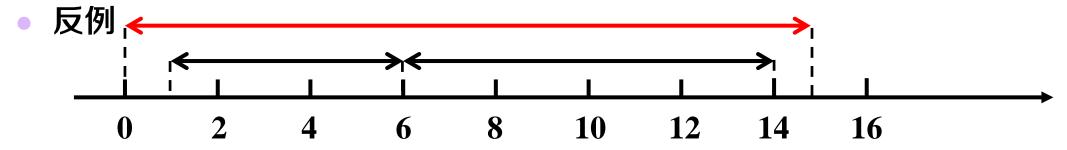
• 策略3: 最早结束活动优先



• 策略1: 最短活动优先



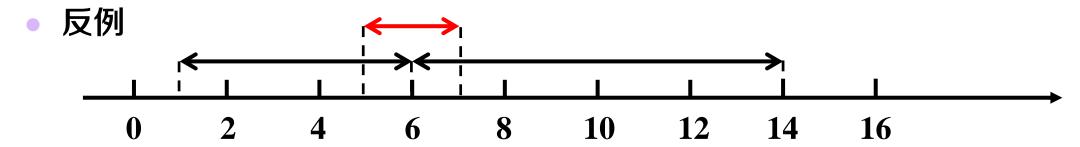
• 策略2: 最早开始活动优先



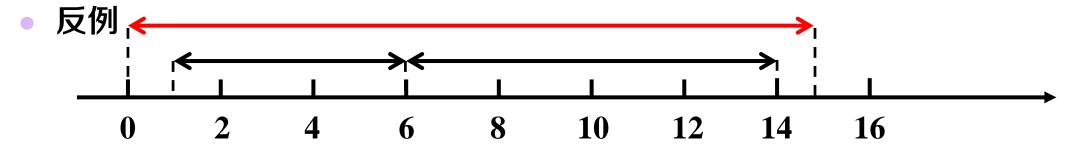
• 策略3: 最早结束活动优先



• 策略1: 最短活动优先



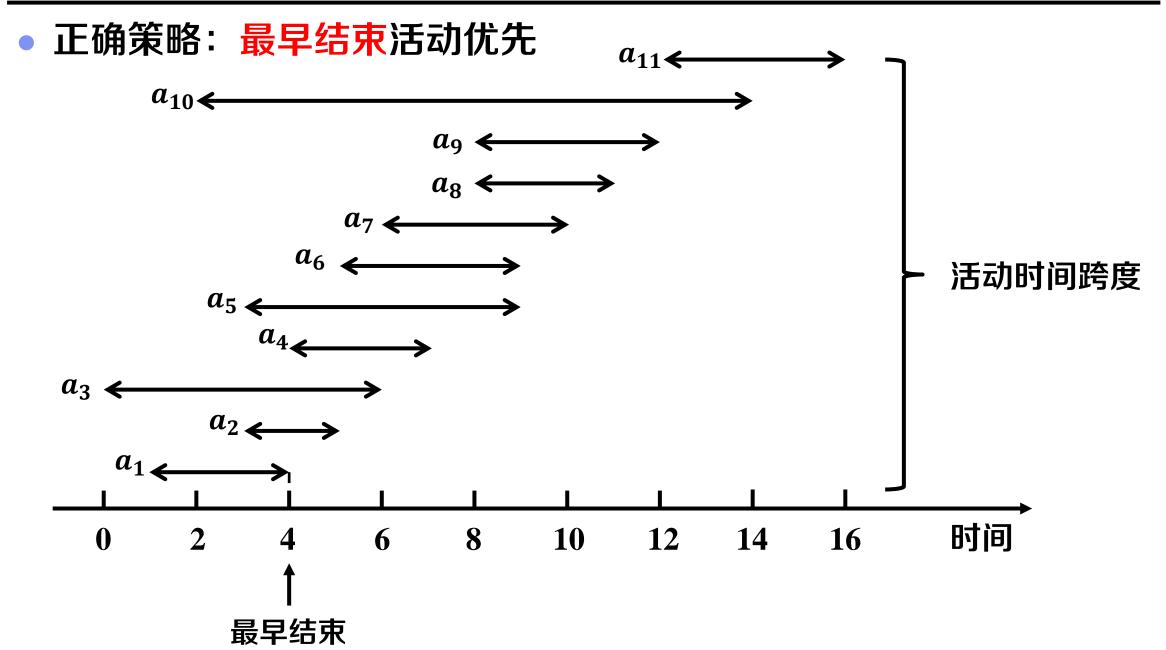
• 策略2: 最早开始活动优先



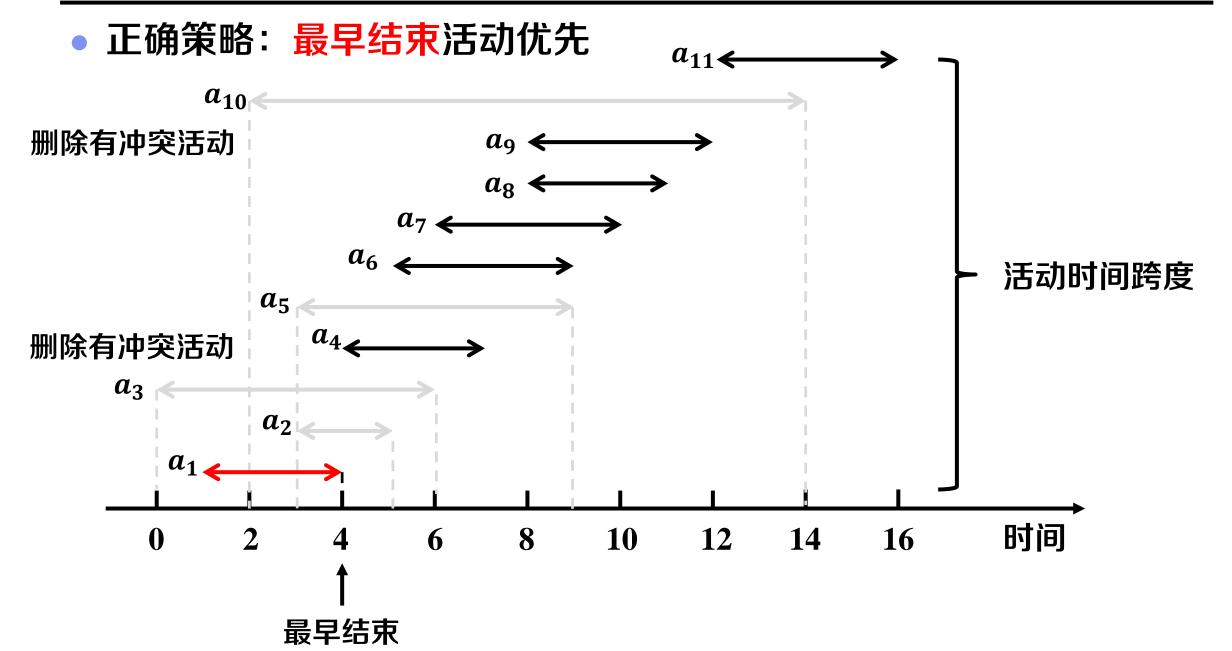
• 策略3: 最早结束活动优先

● 选择最早结束的活动,可以给后面的活动留更大的选择空间

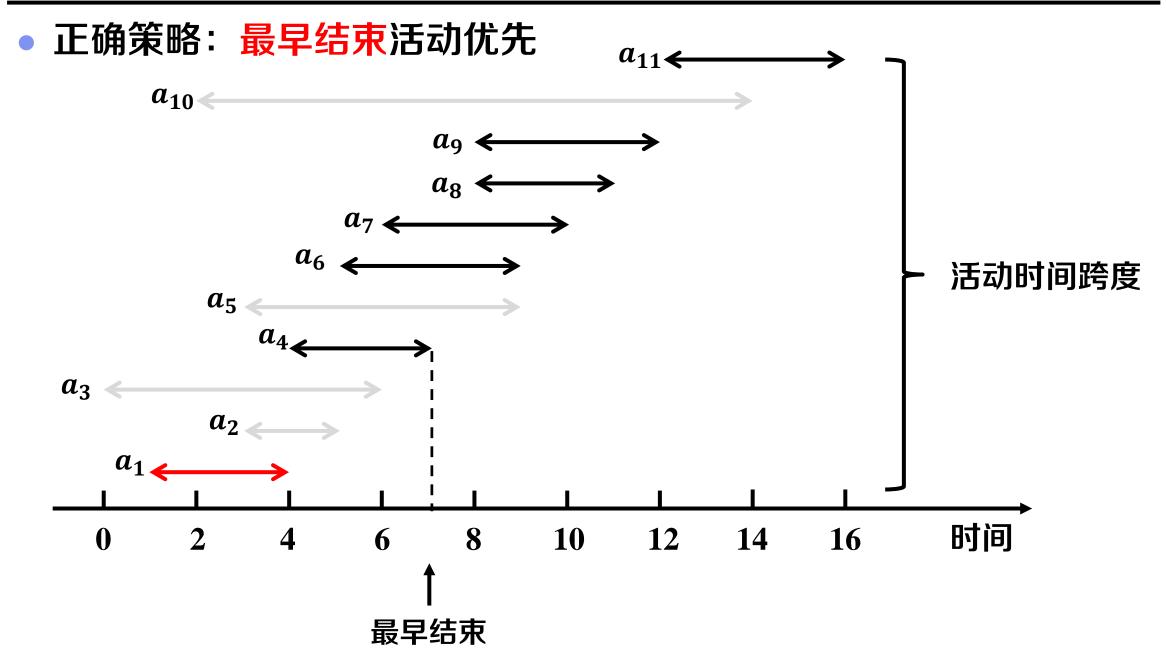




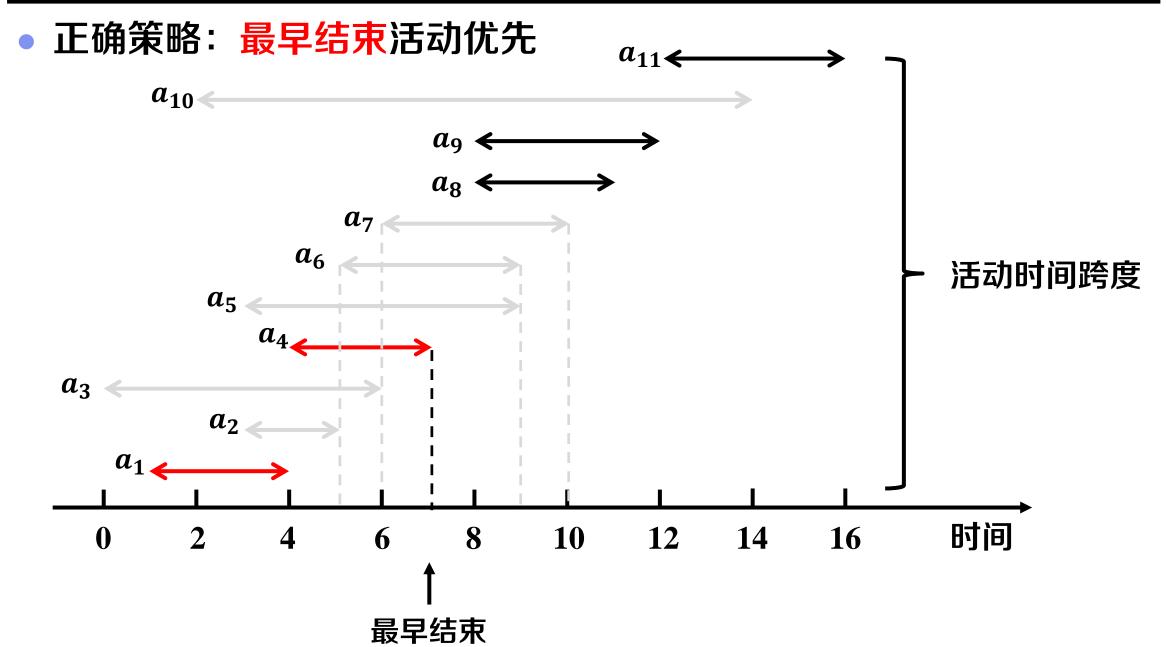




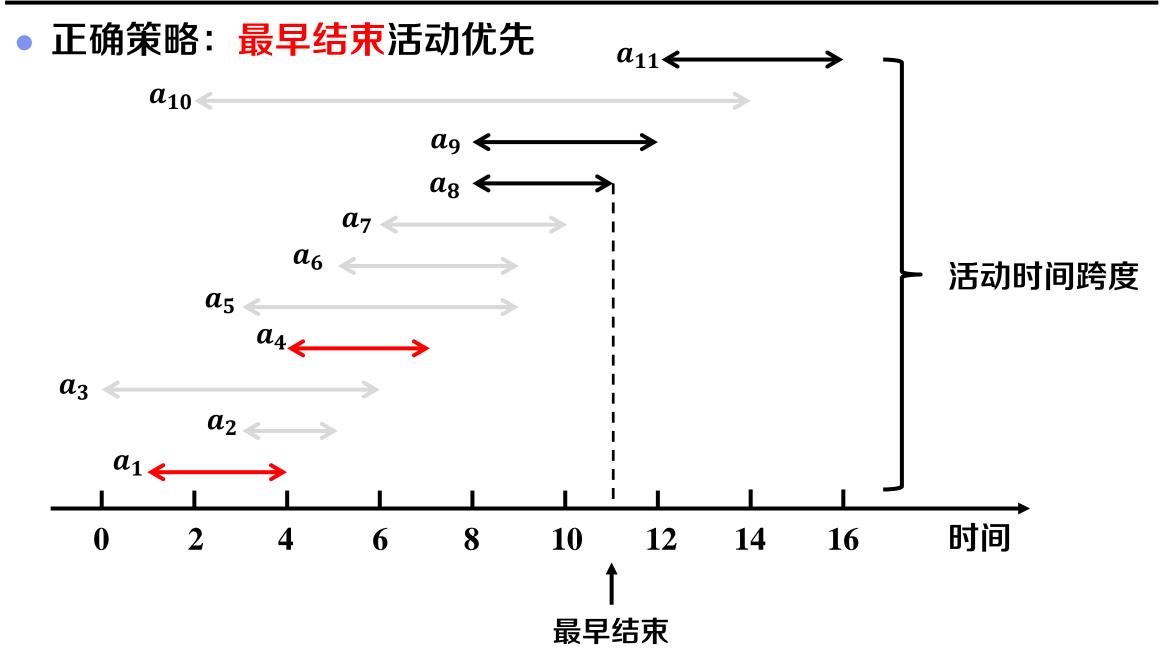




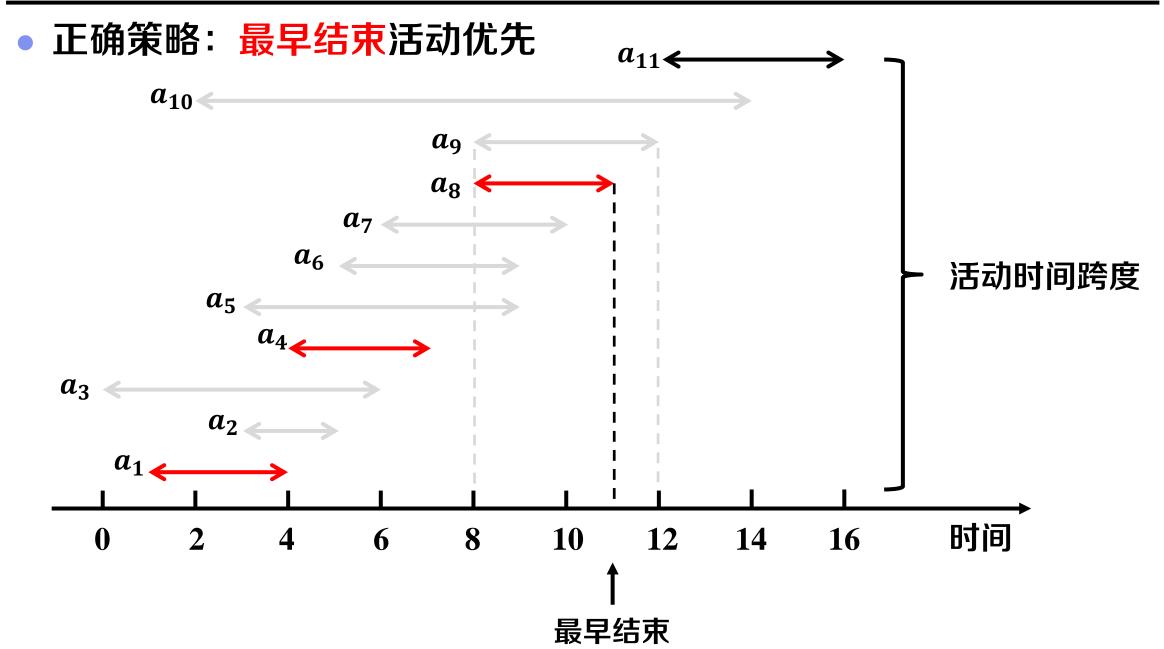




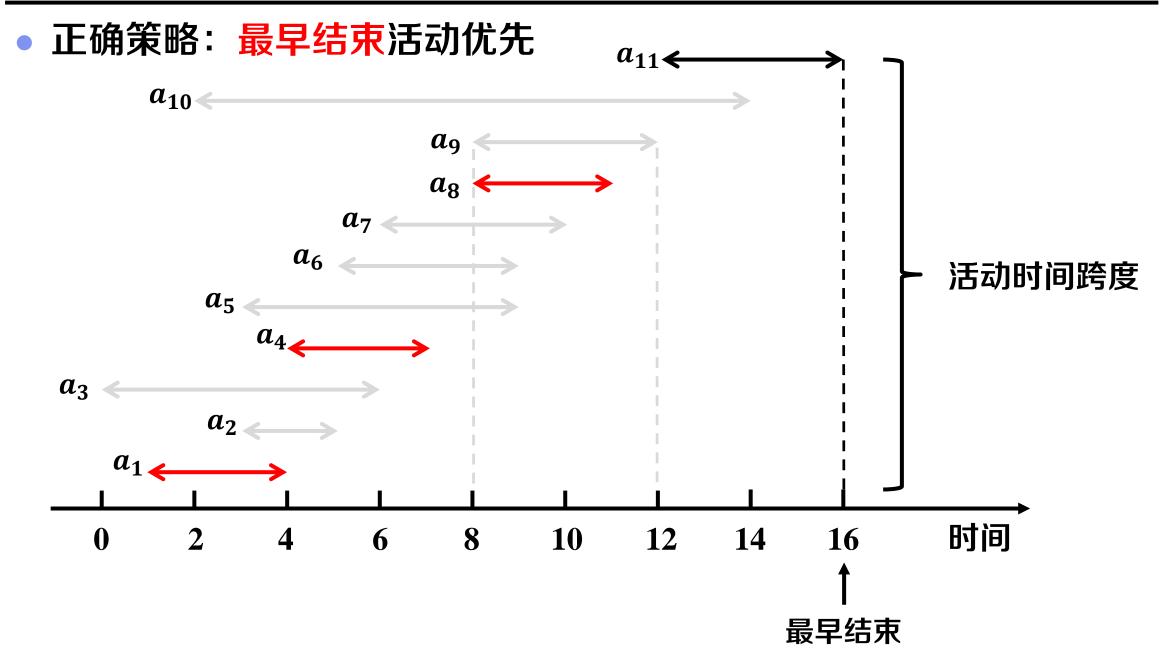




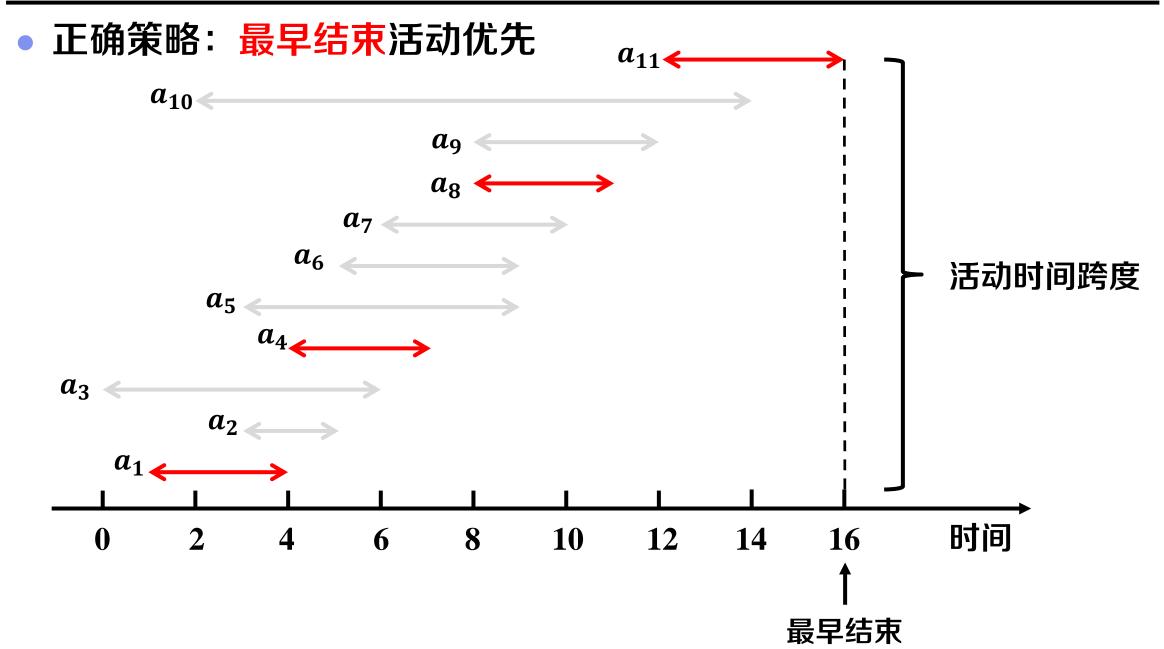






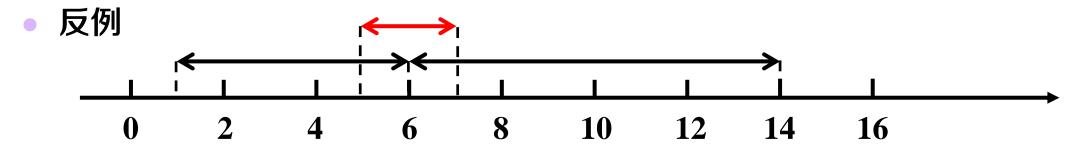




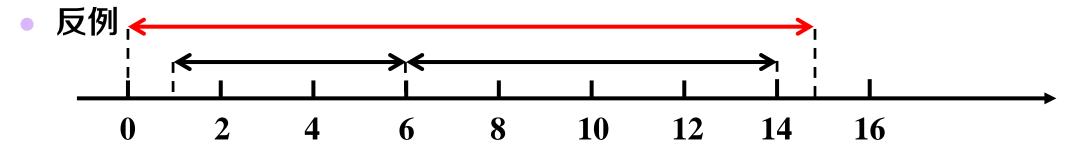




• 策略1: 最短活动优先



• 策略2: 最早开始活动优先



- 策略3: 最早结束活动优先
  - 选择最早结束的活动,可以给后面的活动留更大的选择空间

问题: 策略3是否可以保证最优解?

贪心策略:一般步骤



提出贪心策略

观察问题特征,构造贪心选择



证明策略正确

假设最优方案,通过替换证明

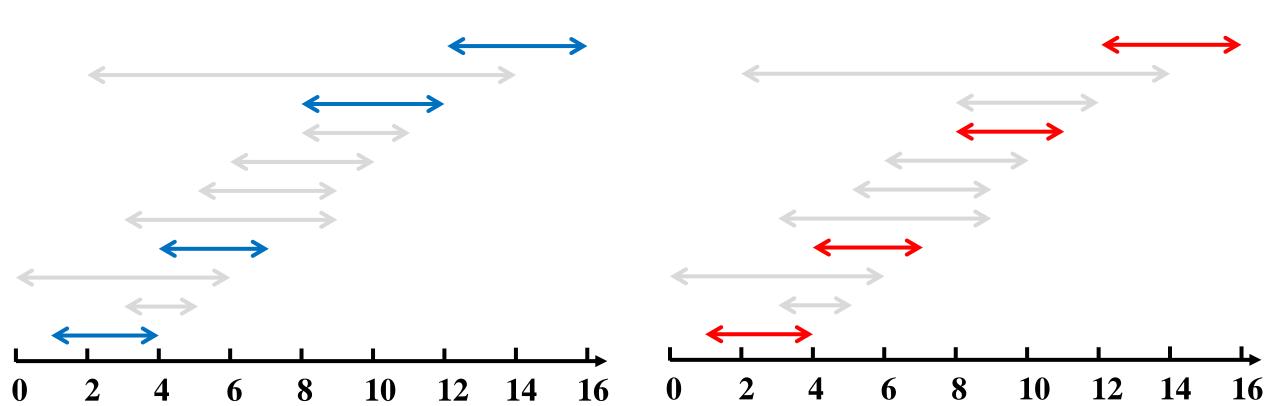


- 正确策略: 最早结束活动优先
- 证明: 贪心解不劣于最优解

任意最优活动集合

依次检查并替换

贪心所得活动集合





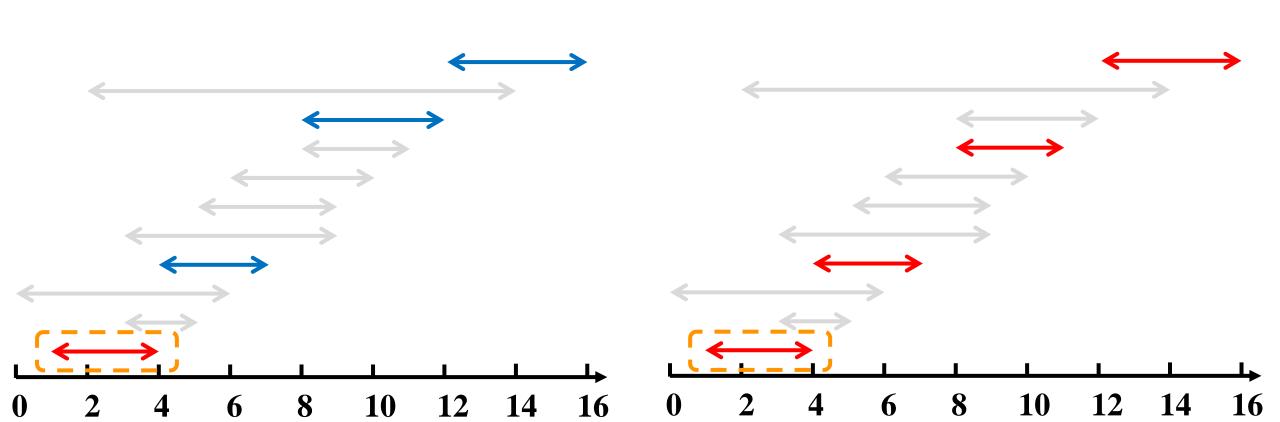
- 正确策略: 最早结束活动优先
- 证明: 贪心解不劣于最优解

任意最优活动集合

依次检查并替换

贪心所得活动集合

活动相同,无需替换





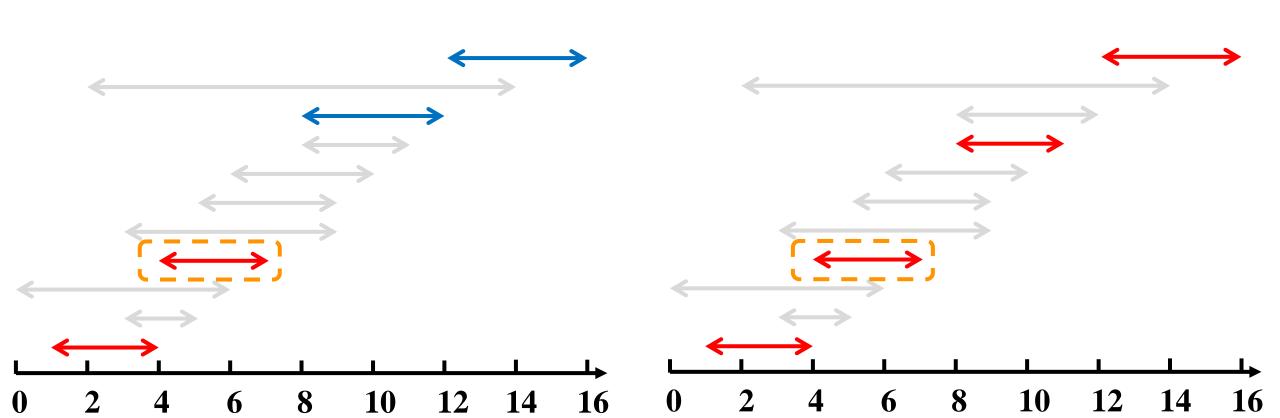
- 正确策略: 最早结束活动优先
- 证明: 贪心解不劣于最优解

任意最优活动集合

依次检查并替换

贪心所得活动集合

活动相同,无需替换





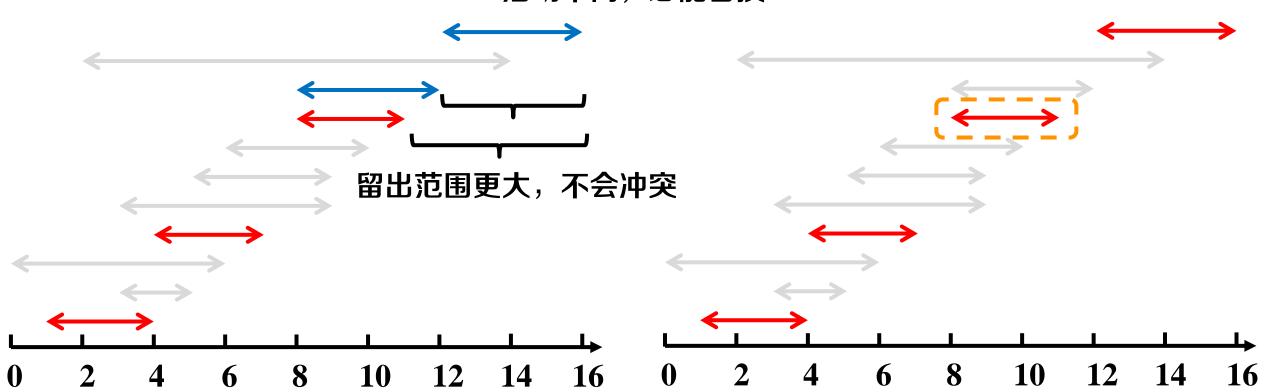
- 正确策略: 最早结束活动优先
- 证明: 贪心解不劣于最优解

## 任意最优活动集合

依次检查并替换

#### 贪心所得活动集合

活动相同,无需替换活动不同,必能替换





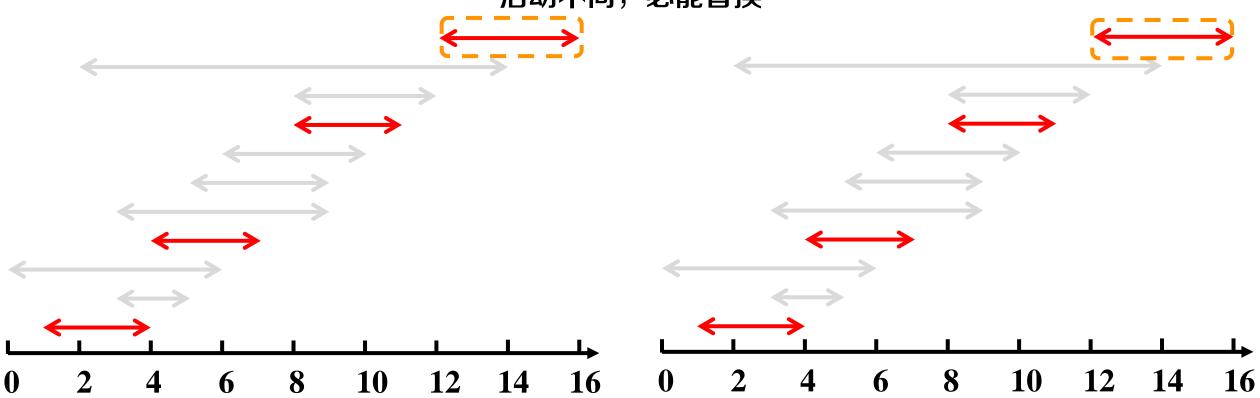
- 正确策略: 最早结束活动优先
- 证明: 贪心解不劣于最优解

## 任意最优活动集合

依次检查并替换

# 贪心所得活动集合

活动相同,无需替换活动不同,必能替换



return S'



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i, f_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
把活动按照结束时间升序排序 🛚
S' \leftarrow \{a_1\}
k \leftarrow 1
for i \leftarrow 2 to n do
   if s_i \geq f_k then
      S' \leftarrow S' \cup \{a_i\}
     k \leftarrow i
    end
end
```

为使用贪心策略作准备

return S'



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i, f_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
把活动按照结束时间升序排序
for i \leftarrow 2 to n do
   if s_i \geq f_k then
     S' \leftarrow S' \cup \{a_i\}
    k \leftarrow i
   end
end
```

把最早结束活动加入到集合



```
输入: 活动集合S=\{a_1,a_2,...,a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i,f_i
```

输出: 不冲突活动的最大子集S'

把活动按照结束时间升序排序

$$S' \leftarrow \{a_1\}$$

$$k \leftarrow 1$$

$$\text{for } i \leftarrow 2 \text{ to } n \text{ do}$$

#### 记录当前选择的活动

```
egin{aligned} \mathbf{for} \ i \leftarrow 2 \ to \ n \ \mathbf{do} \ & \ & \mathbf{if} \ s_i \geq f_k \ \mathbf{then} \ & \ & S' \leftarrow S' \cup \{a_i\} \ & k \leftarrow i \ & \mathbf{end} \ \end{aligned}
```

return S'



```
输入: 活动集合S=\{a_1,a_2,...,a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i,f_i输出: 不冲突活动的最大子集S'
```

把活动按照结束时间升序排序

$$S' \leftarrow \{a_1\}$$
 $k \leftarrow 1$ 
 $\mathbf{for} \ i \leftarrow 2 \ to \ n \ \mathbf{do}$ 

检查每个活动

```
egin{array}{c|c} \mathbf{if} \ s_i \geq f_k \ \mathbf{then} \ S' \leftarrow S' \cup \{a_i\} \ k \leftarrow i \ \mathbf{end} \ \end{array}
```



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i, f_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
把活动按照结束时间升序排序
S' \leftarrow \{a_1\}
k \leftarrow 1
for i \leftarrow 2 to n do
if s_i \geq f_k then
                                没有冲突,则加入子集
k \leftarrow i
   end
end
return S'
```

return S'



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i, f_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
把活动按照结束时间升序排序
S' \leftarrow \{a_1\}
k \leftarrow 1
for i \leftarrow 2 to n do
   if s_i \geq f_k then
     S' \leftarrow S' \cup \{a_i\}
                                        更新当前选择的活动
end
```

# 贪心算法:复杂度分析



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i, f_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
把活动按照结束时间升序排序
                                             ---- O(n \log n)
S' \leftarrow \{a_1\}
k \leftarrow 1
for i \leftarrow 2 to n do
   if s_i \geq f_k then
   \begin{vmatrix} S' \leftarrow S' \cup \{a_i\} \\ k \leftarrow i \end{vmatrix}
                                         O(n)
    end
end
                                                      时间复杂度: O(n \log n)
return S'
```

# 问题拓展



### • 会场出租

# 收益很大



公司年会: 10:00~19:00

### 收益较多







婚礼宴请: 11:00~14:00

#### 收益较少

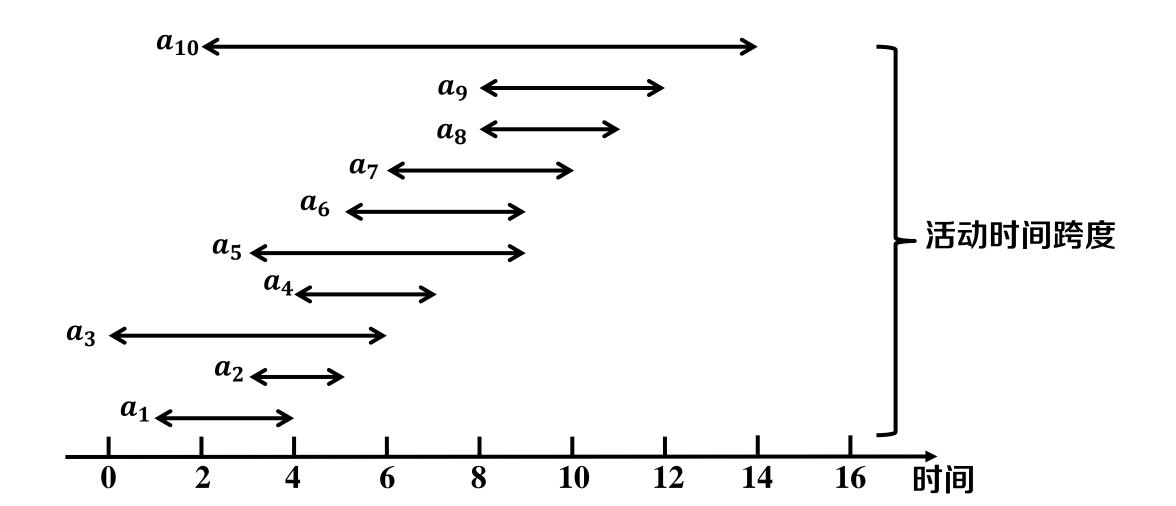


学术研讨: 14:00~16:00

# 问题拓展



- 会场出租
  - 选择出租的活动时间不能冲突

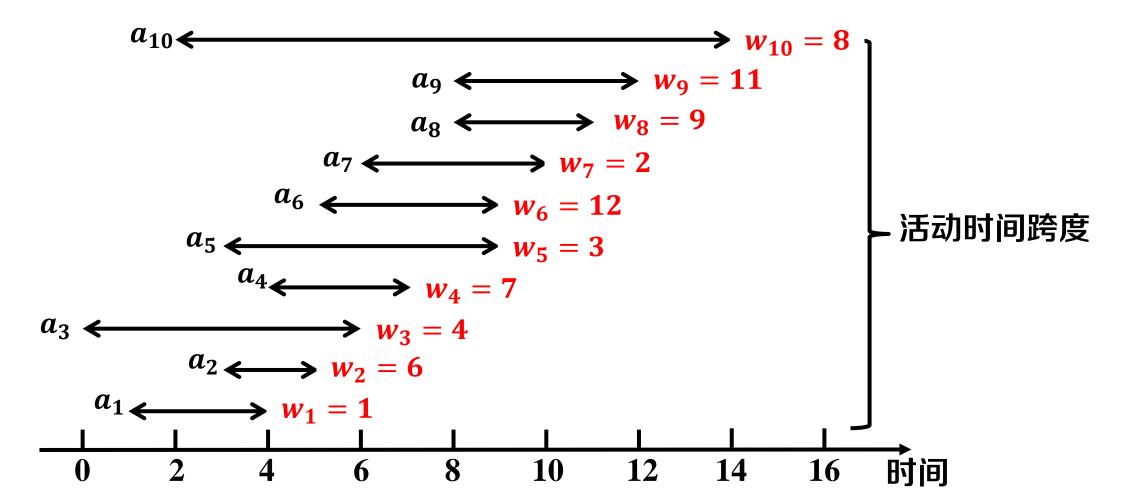


## 问题拓展



### • 会场出租

- 选择出租的活动时间不能冲突,活动出租收益各不相同
- 怎样选让收益总和最大?





#### 带权活动选择问题

#### **Weighted Activity Selection Problem**

#### 输入

- n个活动组成的集合 $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
- 每个活动 $a_i$ 的开始时间 $s_i$ ,结束时间 $f_i$ 和权重 $w_i$

#### 输出

• 找出活动集合S的子集S',令

优化目标: 最大化权重之和

$$\max \sum_{a_i \in S'} w_i$$

 $s.t. \forall a_i, a_j \in S', s_i \geq f_j$ 或 $s_j \geq f_i$ 

约束条件

# 问题比较



### 带权活动选择问题

$$\max \sum_{a_i \in S'} w_i$$

权重均为1

### 活动选择问题

 $\max |S'|$ 



### 带权活动选择问题

$$\max \sum_{a_i \in S'} w_i$$

权重均为1

#### 活动选择问题

 $\max |S'|$ 

$$a_3 \longleftrightarrow w_3 = 1$$
  $a_2 \longleftrightarrow w_2 = 10000$   $a_2 \longleftrightarrow w_2 = 1$   $a_1 \longleftrightarrow w_1 = 1$  时间



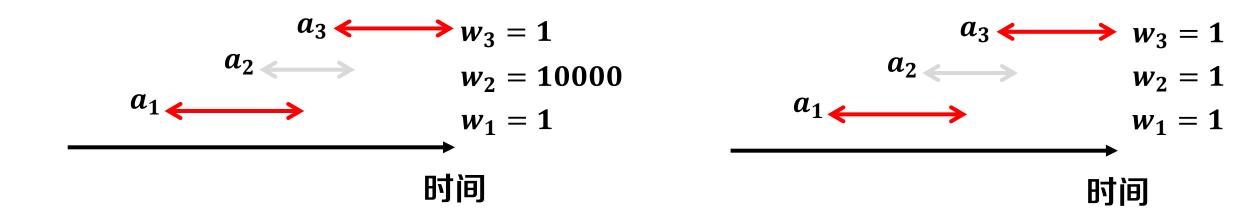


$$\max \sum_{a_i \in S'} w_i$$

权重均为1

### 活动选择问题

 $\max |S'|$ 



# 问题比较



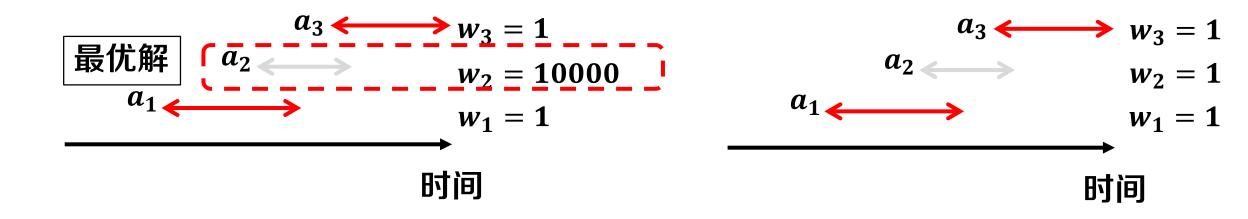


$$\max \sum_{a_i \in S'} w_i$$

权重均为1

#### 活动选择问题

 $\max |S'|$ 

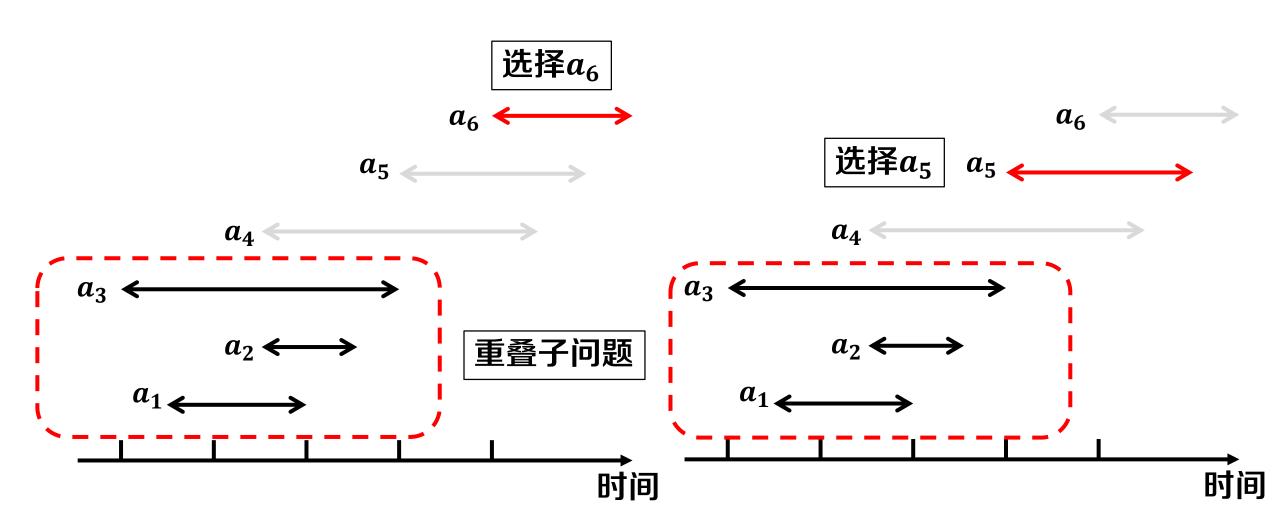


贪心策略不正确

贪心策略正确

# 从贪心策略到动态规划

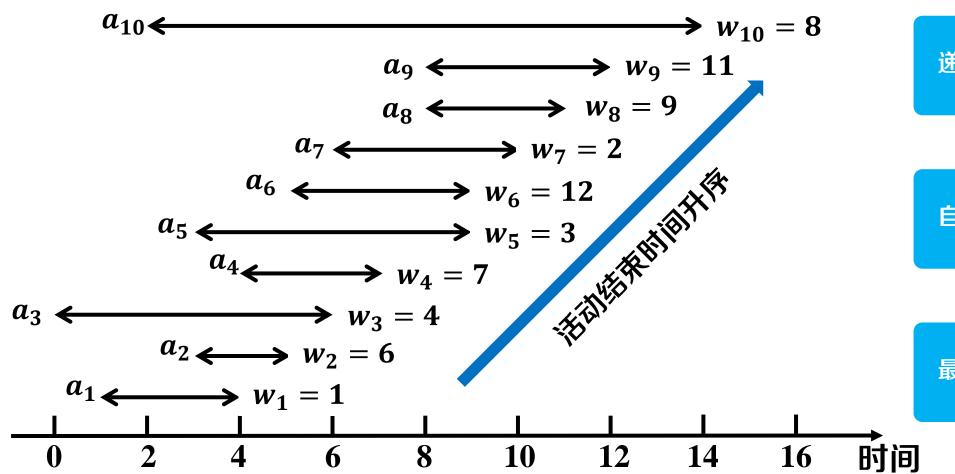




存在重叠子问题,使用动态规划求解



- 预处理
  - 排序: 按活动结束时间升序



问题结构分析



递推关系建立



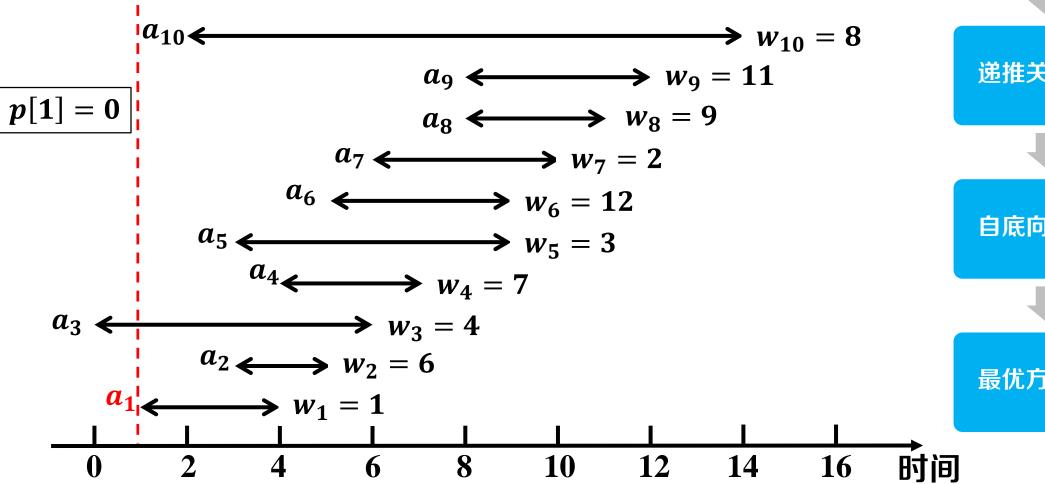
自底向上计算





### 预处理

- 排序: 按活动结束时间升序
- 求p[i]: 在 $a_i$ 开始前最后结束的活动



问题结构分析



递推关系建立



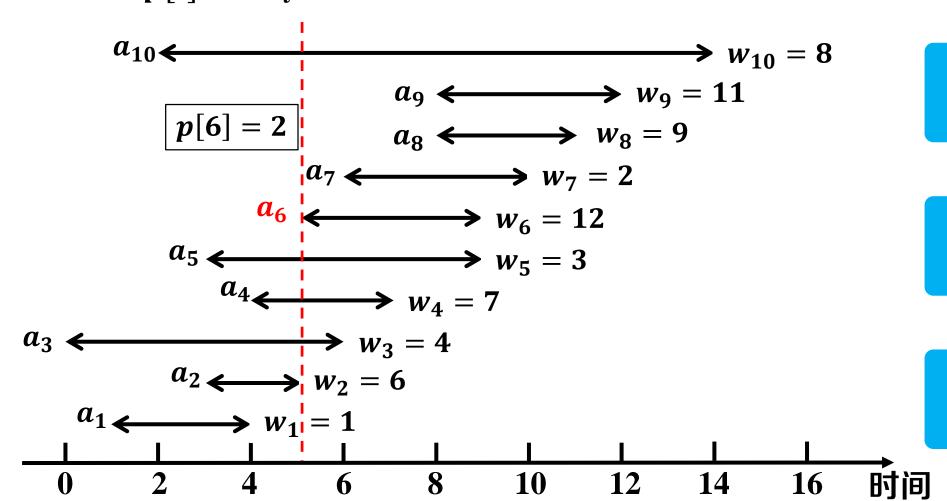
自底向上计算





### 预处理

- 排序: 按活动结束时间升序
- 求p[i]: 在 $a_i$ 开始前最后结束的活动



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算





- 预处理
  - 排序: 按活动结束时间升序
  - 求p[i]: 在 $a_i$ 开始前最后结束的活动
    - 如何求解p[i]?
    - 。 排序后使用二分查找

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算





- 预处理
  - 排序: 按活动结束时间升序
  - 求p[i]: 在 $a_i$ 开始前最后结束的活动
- 给出问题表示
  - D[i]: 集合 $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_i\}$ 中不冲突活动最大权重和

- 明确原始问题
  - D[n]: 集合 $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ 中不冲突活动最大权重和

问题结构分析



递推关系建立



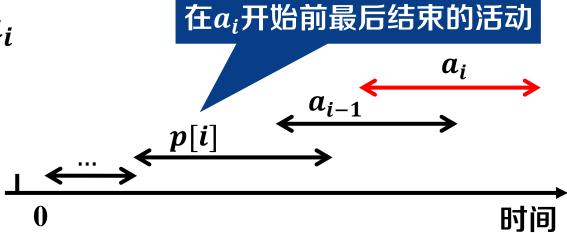
自底向上计算





• 考察活动 $a_i$ 

• 选择 $a_i$ 



问题结构分析



递推关系建立



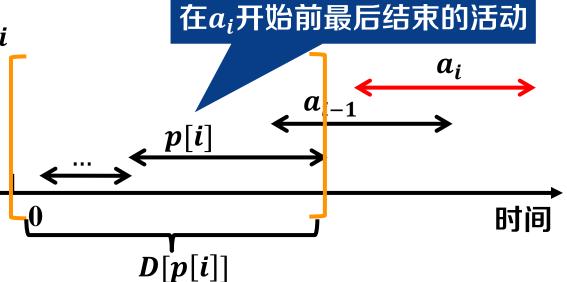
自底向上计算





• 考察活动 $a_i$ 

• 选择 $a_i$ 



问题结构分析



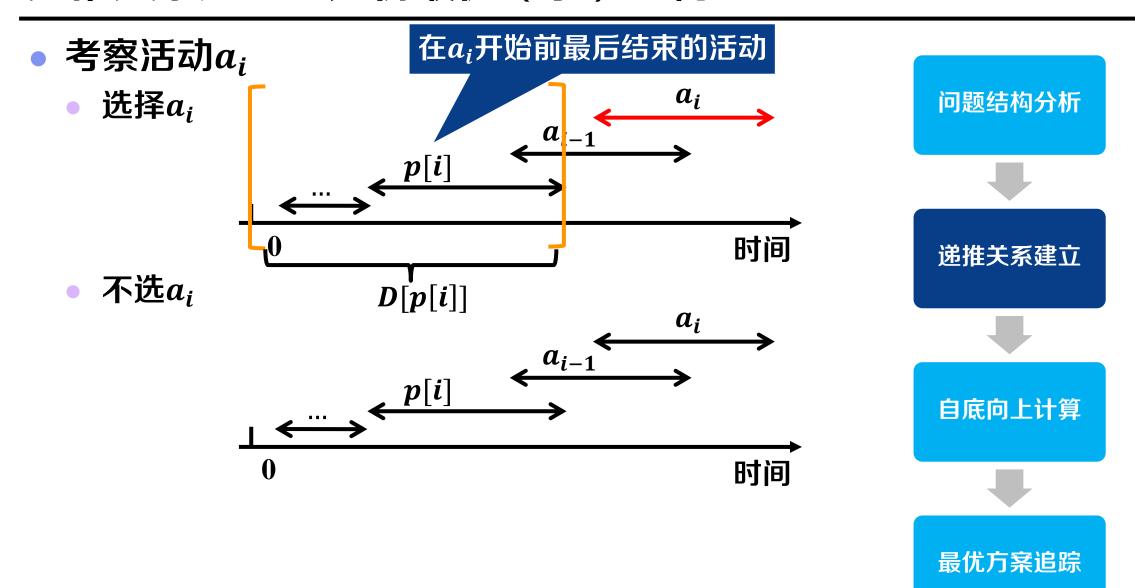
递推关系建立



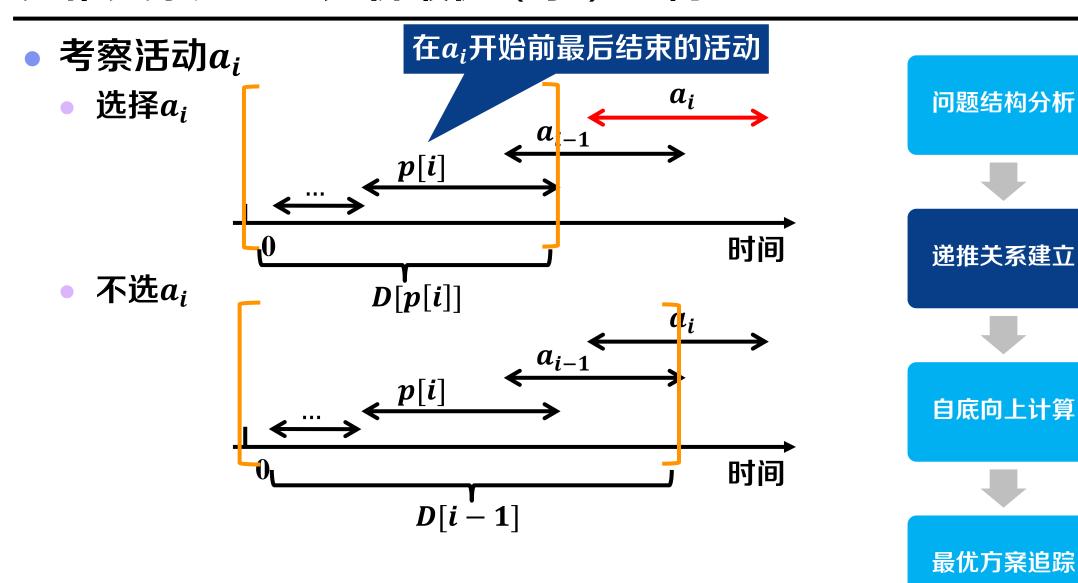
自底向上计算











# 递推关系建立: 构造递推公式

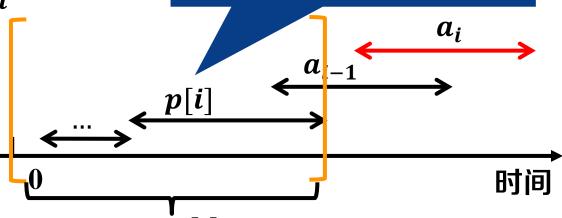


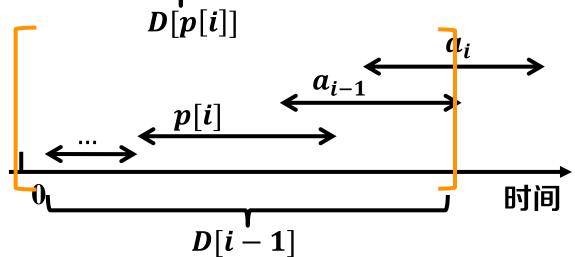


选择 $a_i$ 

• 不选 $a_i$ 

在 $a_i$ 开始前最后结束的活动





- 递推公式
  - $D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



# 递推关系建立: 构造递推公式

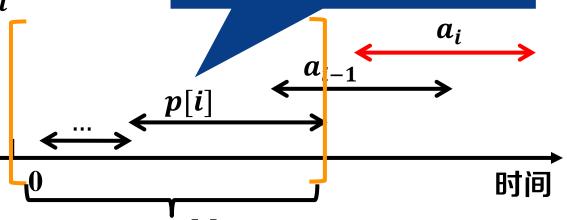


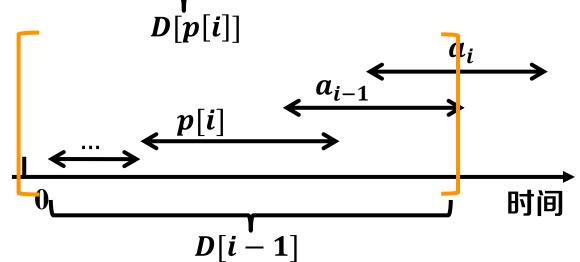


选择 $a_i$ 

▼ 不选a<sub>i</sub>







递推公式

 $D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$ 

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



# 自底向上计算:确定计算顺序



- 初始化
  - D[0] = 0: 空活动集最大权重和为0

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算

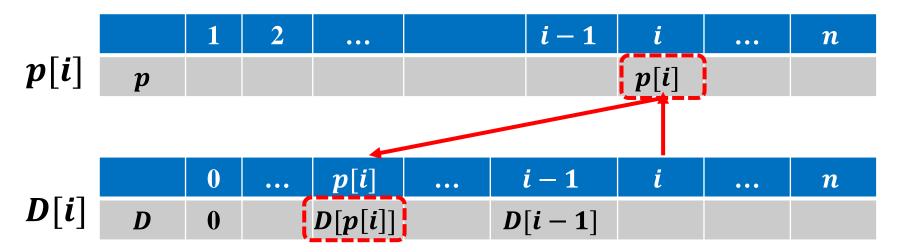


# 自底向上计算:确定计算顺序



- 初始化
  - D[0] = 0: 空活动集最大权重和为0
- 递推公式
  - $D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$

		1	2	•••	i-1	i	•••	n
识知	W					$w_i$		



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



# 自底向上计算:确定计算顺序



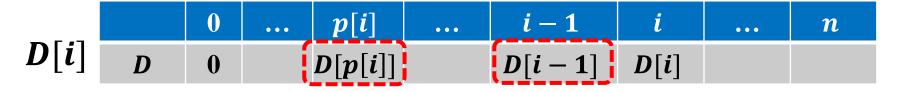
- 初始化
  - D[0] = 0: 空活动集最大权重和为0
- 递推公式

已知

•  $D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$ 

	1	2	•••	i-1	i	•••	n
W					$w_i$		

		1	2	•••	i-1	i	•••	$\boldsymbol{n}$
p[i]	p					p[i]		



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



# 自底向上计算: 依次求解问题



- 初始化
  - D[0] = 0: 空活动集最大权重和为0
- 递推公式
  - $D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$

		1	2	•••	i-1	i	•••	n
已知	W					$w_i$		



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



# 最优方案追踪



• 记录决策过程

• 
$$Rec[i] = \begin{cases} 1, & \text{选择活动}a_i \\ 0, & \text{不选活动}a_i \end{cases}$$

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



## 最优方案追踪



### • 记录决策过程

• 
$$Rec[i] = \begin{cases} 1, & \text{选择活动}a_i \\ 0, & \text{不选活动}a_i \end{cases}$$

### • 输出最优方案

- Rec[i] = 1时,选择活动 $a_i$ ,考察子问题D[p[i]]
- Rec[i] = 0时,不选活动 $a_i$ ,考察子问题D[i-1]

问题结构分析



递推关系建立



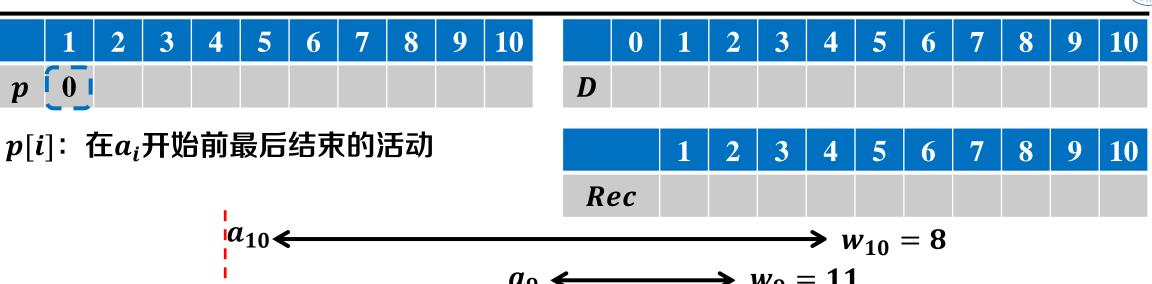
自底向上计算

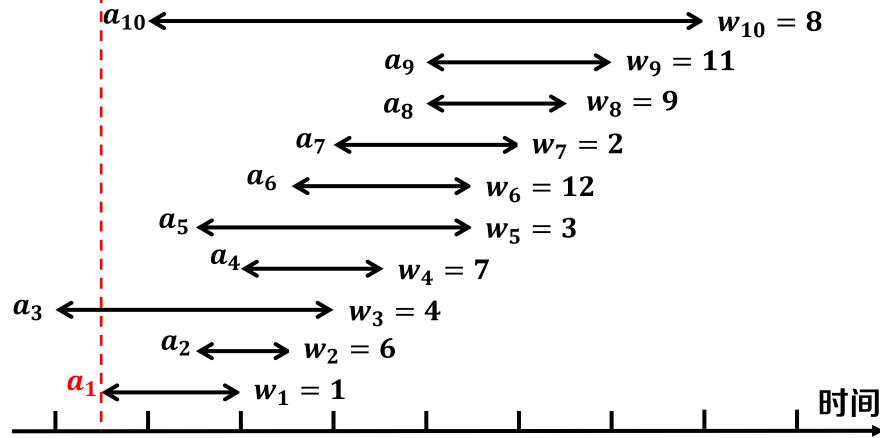


	1	2	•••	i-1	i	•••	n-1	n
p					p[i]		i	

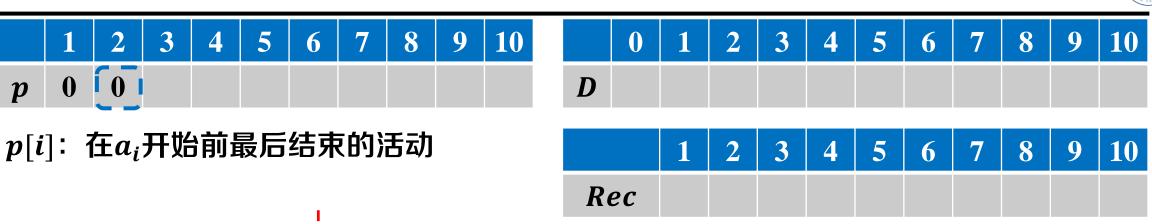
	1	•••	p[i]	•••	i	•••	n-1 n	
Rec	1	0	0	0	1	0	$1 \leftarrow 0$	

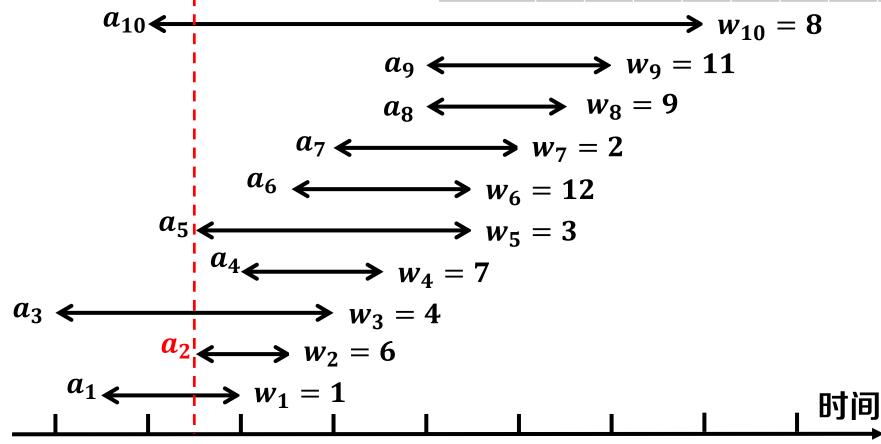




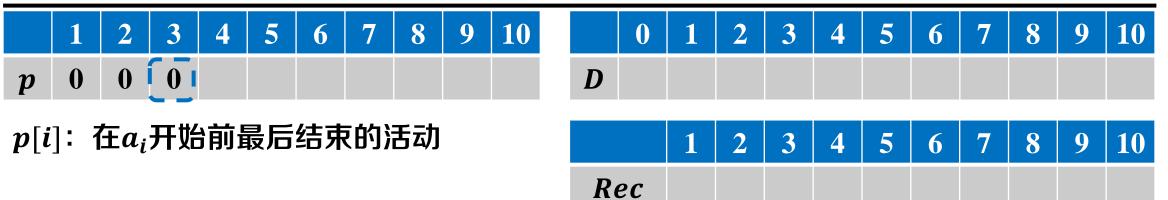


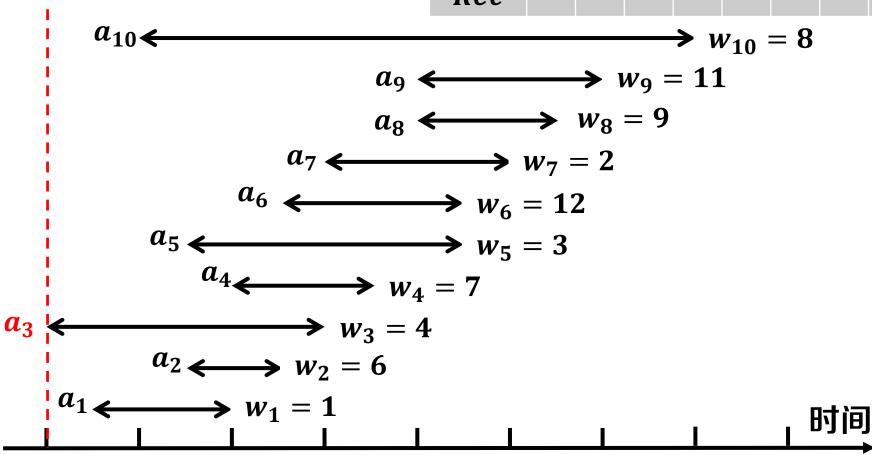










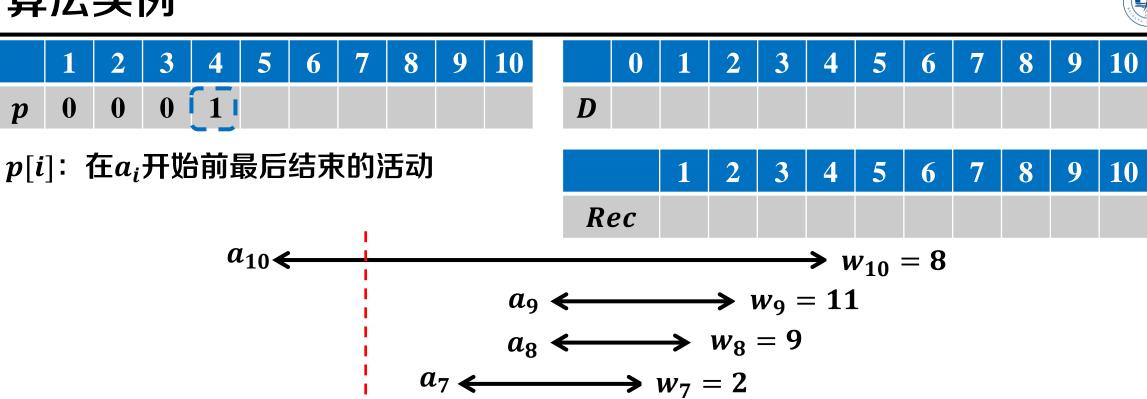


 $a_5 \blacktriangleleft$ 

 $a_3 \leftarrow$ 



时间



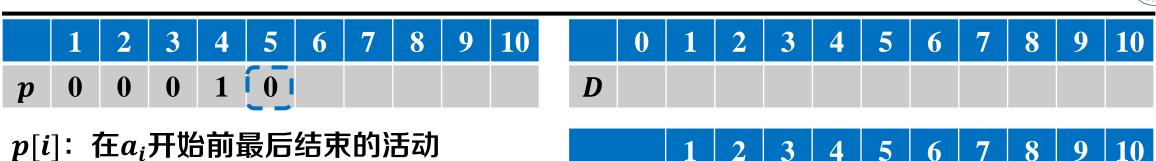
→  $w_4 = 7$ 

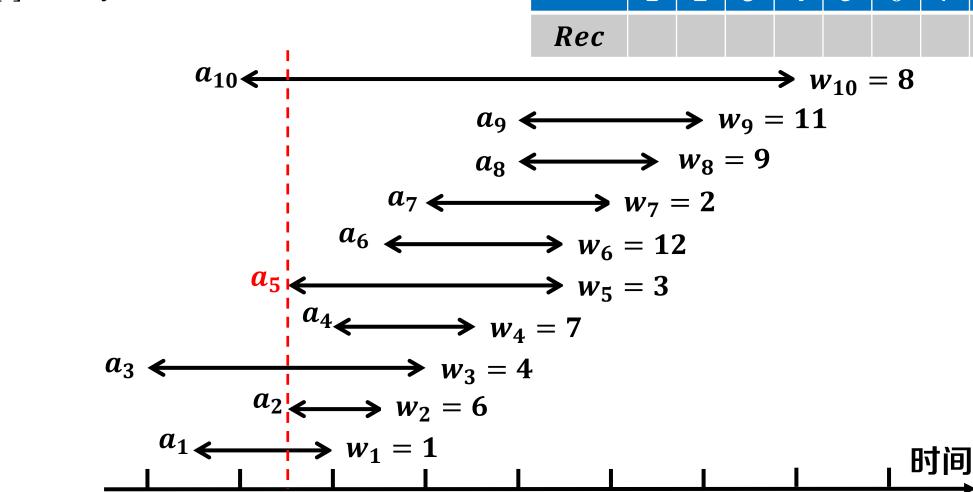
 $\rightarrow w_3 = 4$ 

→  $w_6 = 12$ 

 $\rightarrow w_5 = 3$ 

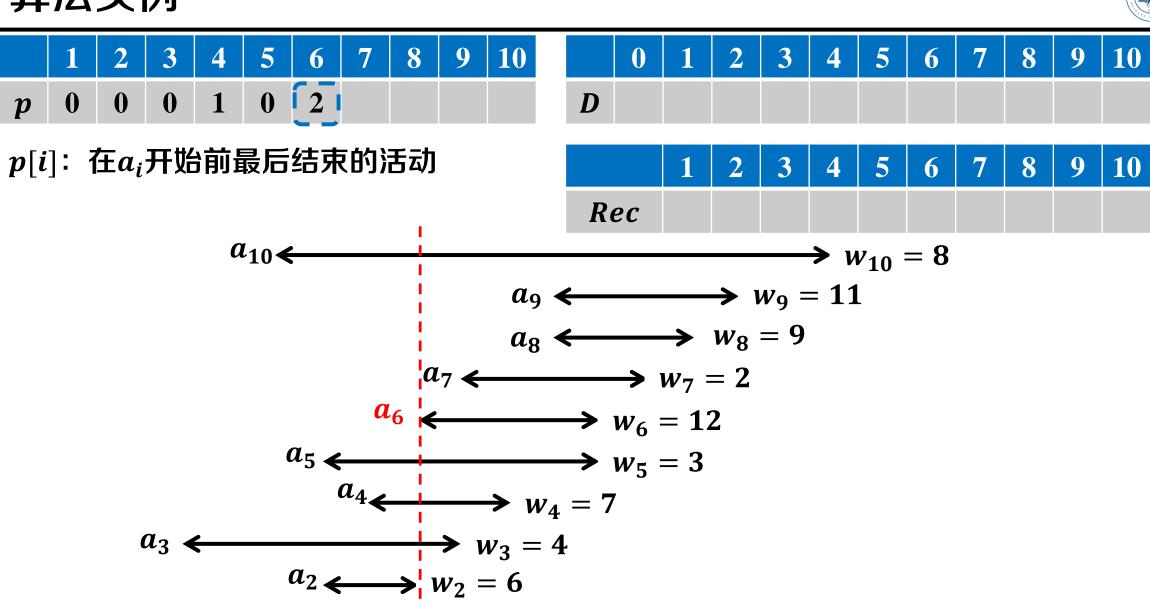






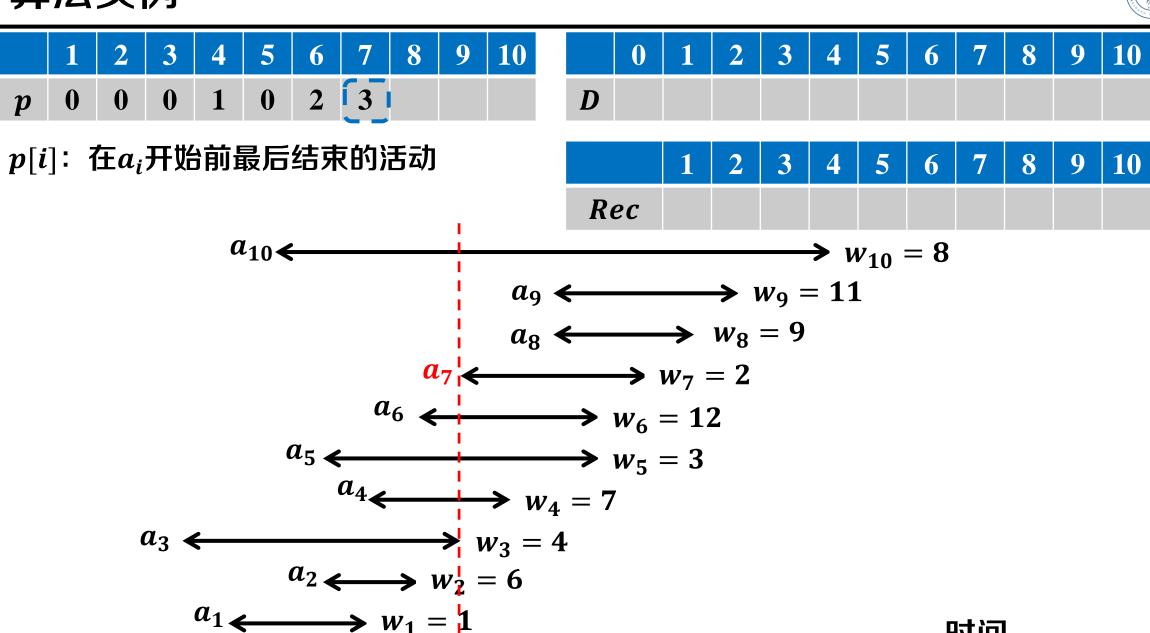


时间

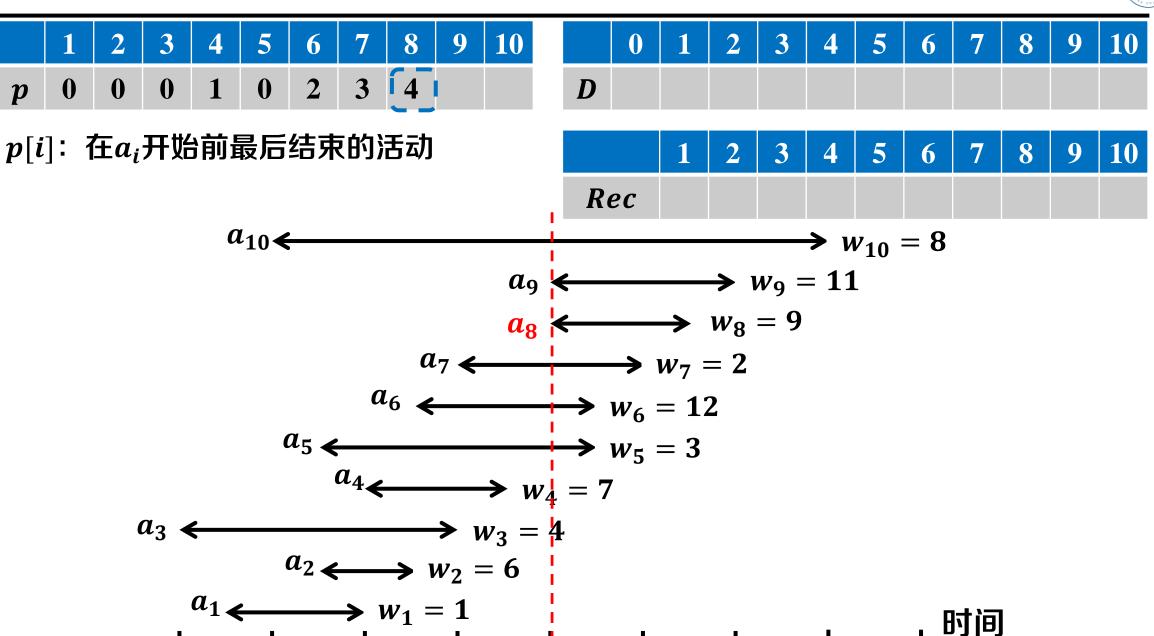




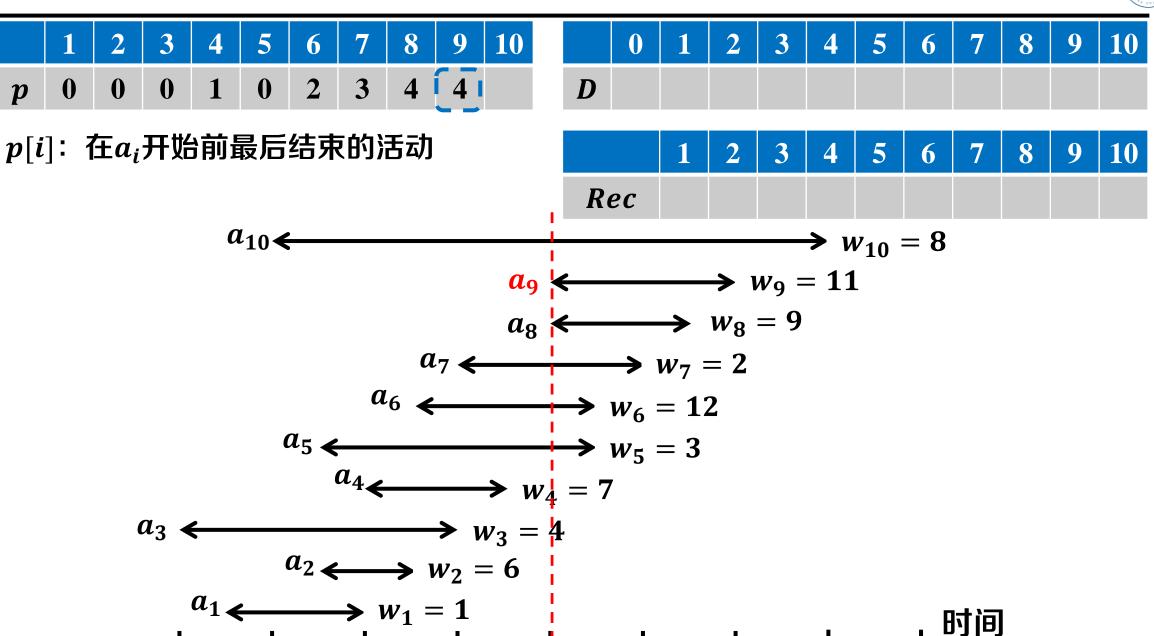
时间







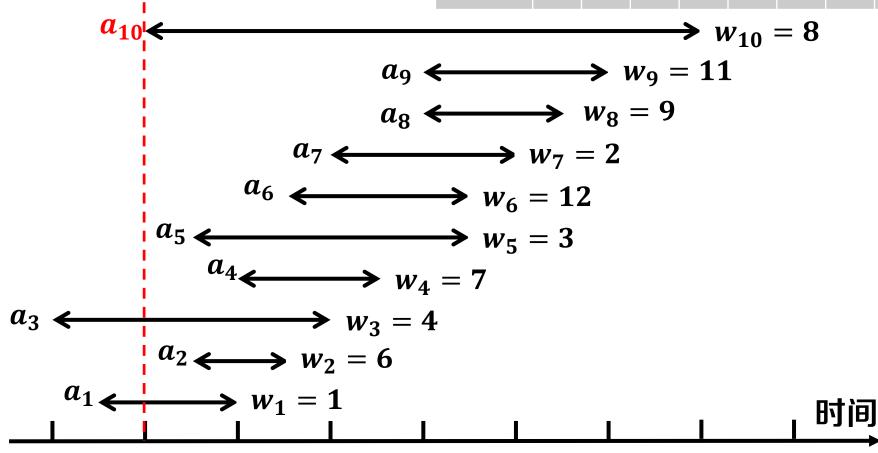




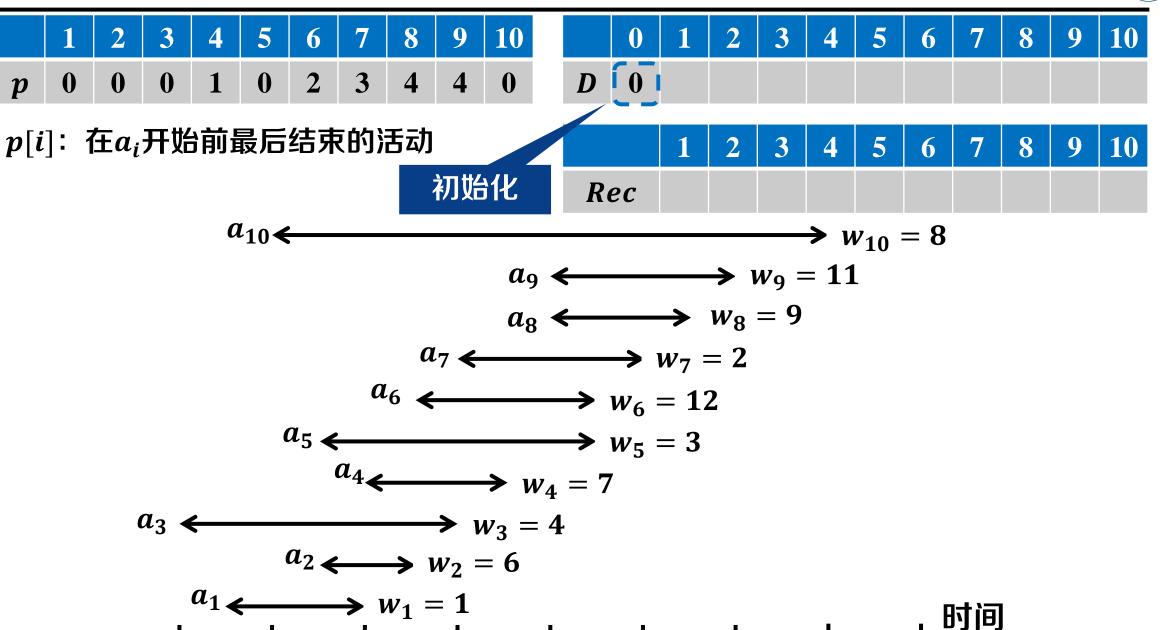


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D											

p[i]: 在 $a_i$ 开始前最后结束的活动









<del></del>	74		<i>/</i>																				1952 19 NO UN	1,5
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0											
$p[i]$ : 在 $a_i$ 开始前最后结束的活动															10									
				a	<sup>1</sup> 10 <b>≺</b>	•											<b>→</b> ν	$v_{10}$	= 8					
										$a_{9}$	<b>•</b>				<b>→</b> 1	W9 =	= <b>1</b> 1	1						
										~	_	•			347	_ 0								

$$a_{10}$$
  $a_{10}$   $a_{10}$ 



71	-/4		<u> </u>																				1952 1952 1952 1952	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0											
$p[i]$ : 在 $a_i$ 开始前最后结束的活动															10									
D[i]	$i \rfloor =$	ma	$\mathbf{x}\{\boldsymbol{D}$	p i	<u> </u>	$w_i$ ,	D[i]	<b>– 1</b>	]}			R	e <b>c</b>											
				a	<sup>l</sup> 10 <b>≺</b>	•											→ v	v <sub>10</sub>	= 8					
										$a_9$	<b>«</b>				<b>→</b> 1	W9 =	<b>= 1</b> 1	L						
										$a_8$	<b>«</b>			<b>→</b>	$w_8$	= 9								

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{5} = 3$$

$$a_{4} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

$$a_{3} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$

$$\exists \forall w_{1} = 1$$

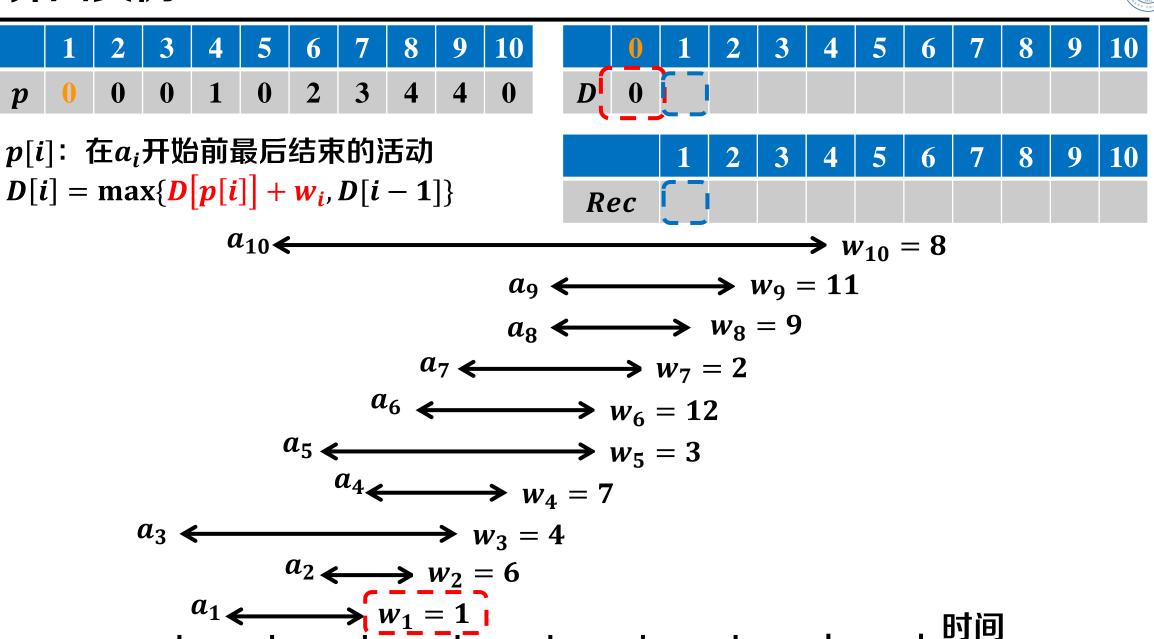


时间

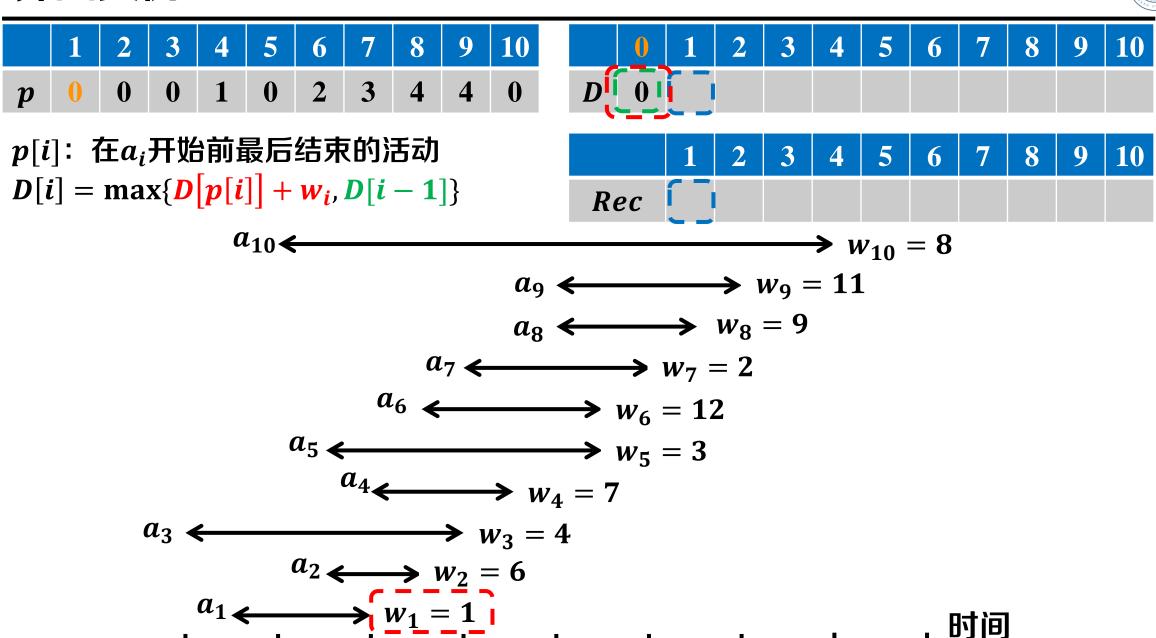
开/A大/N	2 193 2 193 2 193													
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10													
p 0 0 0 1 0 2 3 4 4 0														
$p[i]$ : 在 $a_i$ 开始前最后结束的活动														
$D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$ $a_{10} \leftarrow \longrightarrow w_{10} = 8$														
$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$														
$a_7 \leftarrow$														
$a_6 \leftarrow$	$ \longrightarrow w_7 = 2 $ $ \longrightarrow w_6 = 12 $													
$a_5 \leftarrow$	$\longrightarrow w_5 = 3$													
$a_4 \longleftrightarrow w_4$ $a_3 \longleftrightarrow w_3 =$	$r_4 = 7$													
$a_2 \longleftrightarrow w_2 = 6$	<b>T</b>													

 $\longrightarrow w_1 = 1$ 











时间

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	0 1 2 3 4 5	5 6 7 8 9 10												
p         0         0         0         1         0         2         3         4         4         0														
$p[i]$ : 在 $a_i$ 开始前最后结束的活动	1 2 3 4 5	5 6 7 8 9 10												
$D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$ $a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$														
$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$														
$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$														
$a_9 \longleftrightarrow w_9 = 11$ $a_8 \longleftrightarrow w_8 = 9$														
$a_7 \leftarrow$	$\longrightarrow$ $w_7=2$													
	$\rightarrow w_6 = 12$													
$a_5 \underset{a_4}{\longleftarrow} w$	$\longrightarrow w_5 = 3$													
	-													
$a_3 \longleftrightarrow w_3 = $ $a_2 \longleftrightarrow w_2 = 6$	4													
$a_1 \longleftrightarrow w_1 = 1$		,时间												



<del></del>	-/-		<i>/</i>																				1952 1 NO UKINE
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6								
	$p[i]$ : 在 $a_i$ 开始前最后结束的活动															10							
	$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$																						
	$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$																						
	$a_9 \longleftrightarrow w_9 = 11$																						
							a	<sup>1</sup> 6 <b>←</b>						$w_7 = 1$									
					(	<sup>α</sup> 5 <b>←</b>	a <sub>4</sub> ←						•	= 3									
		(	a <sub>3</sub> ∢	<del></del>						$\rightarrow v_3 =$	_												
				a.		a <sub>2</sub> <b>←</b>		*		= 6	I												
			ı	$a_1$	<del></del>		→ \ '	$w_1$ =	= 1 		ı		ı		ı		ı		, 8	时间	]		



_异	冱	大	נילו																				1992 A R G IN N V
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6							
$p[i]$ : 在 $a_i$ 开始前最后结束的活动															10								
$D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$ Rec 1 1 0																							
				a	<sup>1</sup> 10 <b>≺</b>	•												v <sub>10</sub>	= 8				
										$a_{9}$	<b>→</b>				<b>→</b>	W9 =	<b>= 1</b> 1	1					
										$a_8$	<b>*</b>			<b>→</b>	$w_8$	= 9							
								a	<sup>2</sup> 7 <b>←</b>				$\rightarrow$	$w_7$	= 2								
							a	6 €				<b>→</b>	$w_6$	= 1	2								
						$a_5$	•					_	147_	<b>– 3</b>									



																							NO DRIVE
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8						
	]: 1	•												1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[i]	[] =	ma	$\mathbf{x}\{\mathbf{D}$	p[i]	]] +	$w_i$ ,	D[i]	<b>-1</b>	]}			R	ec	1	1	0	1						
	$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$																						
	$a_9 \longleftrightarrow w_9 = 11$																						
	$a_8 \longleftrightarrow w_8 = 9$																						
							a	6 €				<b>→</b>	$w_6$	= 1	2								
					(	a <sub>5</sub> €						<b>→</b>	$w_5$	= 3									
							<i>a</i> <sub>4</sub> ←			<b>→</b> [и	V <sub>4</sub>	= 7	ì										
		(	$a_3 \blacktriangleleft$	<del></del>					→ 1	$v_3 =$	<b>4</b>												
						$a_2 \leftarrow$	) )	<b>→</b> 1	$w_2$ =	<b>= 6</b>													
			_	$a_1$			<b>→</b> 1	<i>v</i> <sub>1</sub> =	<b>= 1</b>		_		_		_		_		. F	可证	1		
		(						<b>→</b> 1	<i>w</i> <sub>2</sub> =	v <sub>3</sub> = 6			-·				ı		, 6	对间	]		



																							0 0 811
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8					
	_	•			最后									1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[i]	[] =	ma	<b>x</b> { <b>D</b>	p[i]	]]+	$w_i$ ,	D[i	<b>- 1</b>	]}			R	ec	1	1	0	1	0					
	$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$																						
	$a_9 \longleftrightarrow w_9 = 11$																						
	$a_8 \longleftrightarrow w_8 = 9$																						
									<sup>1</sup> 7 <b>←</b>				$\rightarrow$	$w_7$	= 2								
							a	6 €				→_	$w_6$	= 1	2								
					(	<i>a</i> <sub>5</sub> €						→;	$w_5$	= 3	_i _								
							a <sub>4</sub> ←			<b>→</b> ν	<b>V</b> <sub>4</sub>	= 7	•										
		(	$a_3 \blacktriangleleft$	<del></del>						$v_3 =$	<b>4</b>												
						<i>a</i> <sub>2</sub> <b>←</b>		<b>→</b> 1	$w_2 =$	= 6													
				<i>a</i> <sub>1</sub> ∢			<b>→</b> 1	$v_1$ =	= 1				ı		ı				, ε	时间	]		



			., –																				4 NO DELVE
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8	18				
	-	•			最后									1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[i]		ma	x{D	p i	]]+	$w_i$ ,	D[i	<b>-1</b>	]}			R	ec	1	1	0	1	0					
	$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$																						
	$a_9 \longleftrightarrow w_9 = 11$																						
	$a_8 \longleftrightarrow w_8 = 9$																						
									<sup>1</sup> 7 <b>←</b>				<b>→</b> `	w <sub>7</sub> :	<b>= 2</b>								
						_		6				•	<i>w</i> <sub>6</sub>		2								
					(	<sup>1</sup> 5 <b>←</b>							$w_5$	= 3									
						•	a <sub>4</sub> ←			→ v	_		7										
		(	$a_3 \blacktriangleleft$	<del></del>		~				$w_3 =$	<b>· 4</b>												
				a		<sup>a</sup> 2 <b>←</b>				= 6													
			•	$a_1$			→ \	$v_1$ =	= 1				ı				ı		, Ε	时间	]		



<del></del>	-/-		<i>/</i>																				1952 1952 1952
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{p}$	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	18	8	18	18			
	_	•			最后 ]] +									1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D_{L}$	<i>ı</i> 」 —	IIIa.	AįD	$[P[\iota]]$	1] T	w <sub>i</sub> ,	$D[\iota$	_ 1	]}			R	ec	1	1	0	1	0	1	0			
	$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$																						
	$a_9 \longleftrightarrow w_9 = 11$																						
	$a_9 \longleftrightarrow w_9 = 11$ $a_8 \longleftrightarrow w_8 = 9$																						
							a	6				_				-'							
					•	η	,		•				_	= 1	<b>L</b>								
					•	<sup>1</sup> 5 <b>←</b>	<u>α</u> .						$w_5$	= 3									
							a <sub>4</sub> ←			→ v	<i>V</i> <sub>4</sub>	= 7	7										
		(	$a_3 \blacktriangleleft$	$\leftarrow$					<b>→</b> 1	$v_3 =$	<b>4</b>												
					(	$a_2 \leftarrow$		<b>→</b> 1	$w_2$ =	= 6													
				$a_1$			<b>→</b> 1	<i>N</i> <sub>1</sub> =	= 1											0; 1; 1; 1	1		
			1	Ì			Ī	•	ı		ı		1		1		ı		1	时间	J		



																							PANOUNLY EN
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8	18	18	18		
	]: 1	•												1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[i]	i] =	ma	$\mathbf{x}\{\mathbf{D}$	p[i	]] +	$w_i$ ,	D[i]	<b>- 1</b>	]}			R	ec	1	1	0	1	0	1	0	0	ı	
	$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$																						
	$a_9 \longleftrightarrow w_9 = 11$																						
	$a_8 \longleftrightarrow w_8 = 9$																						
									<sup>1</sup> 7 <b>←</b>				$\rightarrow$	$w_7$	= 2								
								6				<b>→</b>	$w_6$	= 1	2								
					(	a <sub>5</sub> €	•					<b>→</b>	$w_5$	= 3									
						(	<i>a</i> <sub>4</sub> ←			<b>→</b> и	<b>7</b> 4	= 7	7										
		(	$a_3 \blacktriangleleft$	$\leftarrow$					<b>→</b> 1	$v_3 =$	4	•											
						$a_2 \leftarrow$	)	<b>→</b> 1	$w_2$ =	= 6													
			-	$a_1$	<del>-</del>		<b>→</b> 1	$w_1 =$	= 1				_		_				. 6	时间	]		
											1										_		



<del>71</del>	-/-		I/ J																				4 N Q UNINE
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	
	_	_	开始 x{ <b>D</b>									D		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
_ [.	J		(-	_	ן. 10 <b>∢</b>		_ L		J )			K	ec	1	1	0	1 → เ	$v_{10}$	1   8	0	0	1	
										$a_{0}$	<b>,  ←</b>				<b>→</b> [1		= 1	_					
											3 ◀			<b>→</b>		= 9							
							а	6 <b>€</b>	7 ←					W <sub>7</sub> : _ 1:									
					(	a <sub>5</sub>							$oldsymbol{w_6}{w_5}$	= 13 $= 3$	<b>Z</b>								
						(	a <sub>4</sub> ←			→ v			Ŭ										
			$a_3 \blacktriangleleft$	<del></del>		a a				$v_3 =$	<b>- 4</b>												
				$a_1$		a <sub>2</sub> <b>∢</b>				= 6													
			ı	T <b>《</b>	ı		<del>フ</del> り	<i>v</i> <sub>1</sub> =	- Т		ı		ı		ı		ı		ι Ε	时间			



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
p[i	]: 1	$\Xi a_i$	开览	前員	最后	结束	的流	舌动					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[i]	[] =	ma	$\mathbf{x}\{\mathbf{D}$	p[i]	]]+	$w_i$ ,	D[i	<b>- 1</b>	]}		R	ec	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
				a	<sup>1</sup> 10 <b>⋖</b>	•										<b>→</b> [v	V <sub>10</sub>	= 8	ì			
										$a_9$	<del></del>			<b>→</b> 1	W9 =	= 11						
										$a_8$	<del></del>		$\rightarrow$	<i>w</i> <sub>8</sub>	= 9							
									<sup>2</sup> 7 <b>←</b>			$\rightarrow$	$w_7$	= 2								
								6			$\rightarrow$	$w_6$	= 1	2								
						a <sub>5</sub> <b>←</b>					$\rightarrow$	$w_5$	= 3									
							α <sub>4</sub> ←			→ w.	<sub>4</sub> = '	7										
		(	$a_3 \blacktriangleleft$	<del></del>					→ v	$v_3 =$	4											
						<i>a</i> <sub>2</sub> <b>←</b>		<b>→</b> 1	$w_2 =$	= 6												
			•	$a_1$			→ <i>v</i>	$v_1$ =	= <b>1</b>		ı					ı		, 8	时间			



																							4 NO DELA
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
														1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
												R	ec	1	1	0	1	0	1	0	0	F	0
				a	<sup>l</sup> 10 <b>≺</b>	•											<b>→</b> ν	V <sub>10</sub>	= 8		3 /4º 6	27)	_
										$a_{i}$	9 <	<del></del>			<b>→</b> 1					耳	提优的	纤	
											3 ◀				$w_8$	= 9							
														-									
						~		6 €					$w_6$		2								
						a <sub>5</sub> <b>∢</b>						$\rightarrow$		= 3									
						•	<i>a</i> <sub>4</sub> ←			→ v	-		7										
			$a_3 \blacktriangleleft$	<del></del>		<i>a</i> -				<i>w</i> <sub>3</sub> =	= <b>4</b>	•											
				<b>a</b> 4				<b>→</b> 1		= 6													
			I	$a_1$	_		_	$w_1$ =	= 1				ı		ı				, Β	时间			



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
; <b>=</b> =	:h <i>4</i> =	<b>△</b> c	,	$\circ$																		1.0

活动集合 $S' = \{\}$ 

 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10

 Rec
 1
 1
 0
 1
 0
 1
 0
 1
 0

$$a_{10}$$
  $w_{10} = 8$ 

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{5} = 3$$

$$a_{4} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

$$a_{3} \longleftrightarrow w_{3} = 4$$

$$a_{2} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$

时间



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活	动集	合S	′ = {	$\{a_9\}$	•								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
											R	ec	1	1	0	1	0	1	0	0	$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$	0

$$a_{10}$$
  $w_{10} = 8$ 

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{5} = 3$$

$$a_{4} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

$$a_{3} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$

时间



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活	动集	合S	′ =	$\{a_9\}$	•								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
											R	ec	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0

$$a_{10}$$
  $w_{10} = 8$ 

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{5} = 3$$

$$a_{4} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

$$a_{3} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$

时间



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活z	动集	合S	′ =	$\{a_4,$	$a_9\}$								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
											R	e <b>c</b>	1	1	0	$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$	0	1	0	0	1	0

$$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$$

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{5} = 3$$

$$a_{4} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

$$a_{3} \longleftrightarrow w_{3} = 4$$

$$a_{2} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$
时间



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活	动集	合S	′ =	$\{a_4,$	$a_9\}$								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
											R	ec	1	1	0	$1^{-1}$	0	1	0	0	1	0

$$a_{10}$$
  $w_{10} = 8$ 

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{5} = 3$$

$$a_{4} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

$$a_{3} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$

时间



时间

<del></del>		ス i	ניו																				1952 A O UNIVE
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活表	力集	合S	′ = {	$\{a_1,$	$a_4$ ,	<b>a</b> 9}								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_{10} \leftarrow \qquad \qquad \longrightarrow w_{10} = 8$															0								
	Rec 1 1 0 1 0 1 0 1 0																						
	$a_{10} \leftarrow \longrightarrow w_{10} = 8$																						
										_				<b>→</b>	$w_8$	= 9							
							~						<b>→</b>	w <sub>7</sub> =	<b>= 2</b>								
								6 €	•				_	= 12	2								
						<i>a</i> <sub>5</sub> <b>←</b>							$W_5$	= 3									
						•	a <sub>4</sub> ←			<b>→</b> и			7										
			$a_3 \blacktriangleleft$			<i>a</i> .				$v_3 =$	<b>· 4</b>												
					(	$a_2 \leftarrow$	)	<b>→</b> 1	$w_2 =$	= 6													

 $a_1 \longleftrightarrow w_1 = 1$ 



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{p}$	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活	动集	合 <b>S</b>	' = ·	$\{a_1,$	$a_4$ ,	<b>a</b> 9}							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
											R	e <b>c</b>	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0

$$a_{10}$$
  $w_{10} = 8$ 

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

$$a_{3} \longleftrightarrow w_{3} = 4$$

$$a_{2} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$

时间



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\},
    每个活动a_i的起止时间s_i, f_i和权重w_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
//预处理
把活动按照结束时间升序排序
                             预处理
for i \leftarrow 1 to n do
  二分查找求解p[i]
end
//初始化
新建数组D[0..n], Rec[1..n]
D[0] \leftarrow 0
```



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\},
    每个活动a_i的起止时间s_i, f_i和权重w_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
//预处理
把活动按照结束时间升序排序
for i \leftarrow 1 to n do
  二分查找求解p[i]
end
//初始化
新建数组D[0..n], Rec[1..n]
                            初始化
D[0] \leftarrow 0
```



```
//动态规划
for j \leftarrow 1 to n do
                                               对每个子问题
  if D[p[j]] + w_j > D[j-1] then
       D[j] \leftarrow D[p[j]] + w_j
        Rec[j] \leftarrow 1
    end
    else
       D[j] \leftarrow D[j-1]
        Rec[j] \leftarrow 0
    end
end
```



#### //动态规划

```
for j \leftarrow 1 to n do
   (if D[p[j]] + w_j > D[j-1] then
      D[j] \leftarrow D[p[j]] + w_j
   Rec[j] \leftarrow 1
   end
    else
       D[j] \leftarrow D[j-1]
       Rec[j] \leftarrow 0
    end
end
```

选择活动 $a_i$ 



```
//动态规划
for j \leftarrow 1 to n do
   if D[p[j]] + w_j > D[j-1] then
       D[j] \leftarrow D[p[j]] + w_j
       Rec[j] \leftarrow 1
    end
   else
                                                        不选活动a_i
   | D[j] \leftarrow D[j-1]
   Rec[j] \leftarrow 0
    \mathbf{end}
end
```



```
//输出方案
k \leftarrow n
while k > \theta do
 if Rec[k] = 1 then
                                                 选择活动a_k
   」 print 选择a[k]
    k \leftarrow p[k]
   end
   else
    k \leftarrow k-1
   \mathbf{end}
end
return D[n]
```



```
//输出方案
k \leftarrow n
while k > \theta do
    if Rec[k] = 1 then
      | print 选择 a[k]   k \leftarrow p[k] 
                                                          回溯子问题
    end
    else
     k \leftarrow k-1
    \mathbf{end}
end
return D[n]
```



```
//输出方案
k \leftarrow n
while k > \theta do
    if Rec[k] = 1 then
         \operatorname{print} 选择a[k]
         k \leftarrow p[k]
     \mathbf{end}
    \mathbf{else}
                                                                 不选活动a_k
      | k \leftarrow k-1
    \mathbf{end}
end
return D[n]
```

#### 动态规划:复杂度分析



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\},
     每个活动a_i的起止时间s_i, f_i和权重w_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
//预处理和初始化
把活动按照结束时间升序排序 ---O(n\log n)
for i \leftarrow 1 to n do
                                      O(n \log n)
   二分查找求解p[i]
end
新建数组D[0..n], Rec[1..n]
D[0] \leftarrow 0
//动态规划
for j \leftarrow 1 to n do
   if D[p[j]] + w_j > D[j-1] then
      D[j] \leftarrow D[p[j]] + w_j
     Rec[j] \leftarrow 1
   end
                                       O(n)
   else
     D[j] \leftarrow D[j-1]
     Rec[j] \leftarrow 0
   \mathbf{end}
\mathbf{end}
//输出方案
k \leftarrow n
while k > \theta do
   if Rec[k] = 1 then
      print 选择a[k]
      k \leftarrow p[k]
                                       O(n)
   end
   _{
m else}
   k \leftarrow k-1
   end
                                                                         时间复杂度: O(n \log n)
end
return D[n]
```

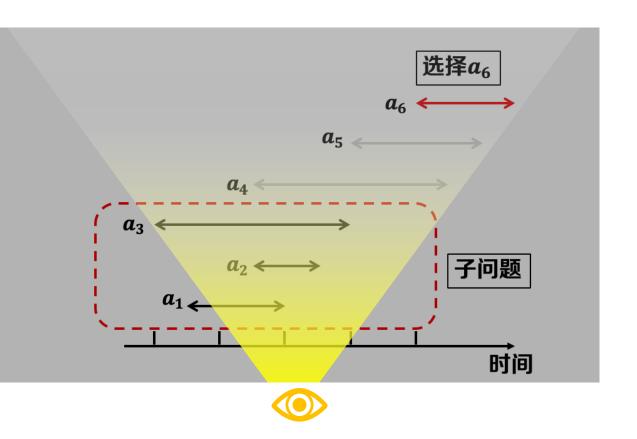
### 活动选择问题: 动态规划 vs. 贪心策略



带权活动选择问题

权重均为1 性质更好

活动选择问题



 $a_3 \leftarrow$ 时间

求解子问题,组合最优解

动态规划:考察全局

直接做决策,构造最优解

贪心策略:考察局部

### 算法策略总结



分而治之

动态规划

贪心策略

分解原问题

问题结构分析

提出贪心策略



-

₹

解决子问题

递推关系建立

证明策略正确



合并问题解

自底向上计算



最优方案追踪

#### 算法策略总结



