

# 计算机学院《算法设计与分析》

## (2020 年秋季学期)

### 第一次作业

作业提交截止时间：2020 年 10 月 9 日 23 : 55

- 1 请给出  $T(n)$  尽可能紧凑的渐进上界并予以说明，可以假定  $n$  是 2 的整数次幂。(每小题 3 分，共 21 分)

1.

$$\begin{aligned} T(1) &= T(2) = 1 \\ T(n) &= T(n-2) + 1 \quad \text{if } n > 2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n/2) + n \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 4T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n/2) + \log n \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 3T(n/2) + n^2 \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

## 2 寻找中位数问题 (19 分)

一组数据  $x = (x_1, \dots, x_n)$  从小到大排序后的序列为  $x'_1, \dots, x'_n$ , 则这组数据的中位数  $M$  为

$$M = \begin{cases} x'_{\frac{n+1}{2}} & \text{若 } n \text{ 为奇数;} \\ \frac{1}{2}(x'_{\frac{n}{2}} + x'_{\frac{n}{2}+1}) & \text{若 } n \text{ 为偶数。} \end{cases}$$

给定两个长度分别为  $n$ 、 $m$  的有序数组  $A[1..n], B[1..m]$  ( $A$  与  $B$  均已按从小到大排序)。请设计尽可能高效的算法, 求出这两个数组中所有数据的中位数, 并分析其时间复杂度。

## 3 局部最小值问题 (20 分)

给定一个由  $n(n \geq 3)$  个互不相同的整数组成的数组  $A[1..n]$ , 其满足  $A[1] > A[2]$  并且  $A[n-1] < A[n]$ 。我们定义数组的**局部最小值**为比它的两个相邻元素 (如果存在) 都小的整数。换言之,  $A[x]$  是局部最小值当且仅当它满足  $A[x] < A[x-1]$  并且  $A[x] < A[x+1]$  ( $1 < x < n$ )。例如, 下图所示数组中包含两个局部最小值, 分别为 3 和 1。

9	3	7	2	1	4	5
---	---	---	---	---	---	---

求局部最小值显然有一个  $O(n)$  的做法, 仅需要扫描一遍整个数组就可以找到所有的局部最小值。请给出一个算法可以在  $O(\log n)$  的时间复杂度内找出一个数组的局部最小值。如果局部最小值有多个, 仅需要找出任意一个局部最小值即可。(提示: 我们给出的限制条件保证数组至少有一个局部最小值。)

## 4 字符串等价关系判定问题 (20 分)

给定两个长度为  $n$  的字符串  $A$  和  $B$ , 若称  $A$  与  $B$  是**等价的**, 当且仅当它们满足如下关系之一:

1.  $A$  和  $B$  完全相同;
2. 若将把  $A$  分成长度相等的两段  $A_1$  和  $A_2$ , 也将  $B$  分成长度相等的两段  $B_1$  和  $B_2$ 。且他们之间满足如下两种关系之一:
  - a.  $A_1$  和  $B_1$  等价且  $A_2$  和  $B_2$  等价;
  - b.  $A_1$  和  $B_2$  等价且  $A_2$  和  $B_1$  等价。

请你设计一个高效的算法来判断两个字符串是否等价并分析你的算法的时间复杂度。

例如, 假设  $A$  字符串为  $aaba$ ,  $B$  字符串为  $abaa$ 。  $A$  字符串首先分裂为  $A_1 = aa$ ,  $A_2 = ba$ 。  $B$  字符串分裂为  $B_1 = ab$ ,  $B_2 = aa$ 。  $A_2$  字符串再分裂为  $A_{21} = b$ ,  $A_{22} = a$ 。  $B_1$  字符串再分裂为  $B_{11} = a$ ,  $B_{12} = b$ 。此时  $A_{21}$  和  $B_{12}$  相等,  $A_{22}$  和  $B_{11}$  相等, 因此根据等价关系的判断条件 2.b 可知,  $A_2$  和  $B_1$  等价。又因为  $A_1$  和  $B_2$  完全相同, 根据等价关系的判断条件 1 可知,  $A_1$  和  $B_2$  等价。再次利用等价关系的判断条件 2.b, 可以得出结论, 字符串  $A$  和  $B$  等价。

## 5 数字消失问题 (20 分)

给定一长度为  $n$  的数组  $A[1..n]$ , 其包含  $[0, n]$  闭区间内除某一特定数 (记做消失的数) 以外的所有数字 (例如  $n = 3$  时,  $A = [1, 3, 0]$ , 则消失的数是 2)。这里假定  $n = 2^k - 1$ 。

1. 请设计一个尽可能高效的算法找到消失的数, 并分析其时间复杂度。(8 分)
2. 若假定数组  $A$  用  $k$  位二进制方式存储 (例如  $k = 2$ ,  $A = [01, 11, 00]$  则消失的数是 10), 且不可以直接访存。目前**唯一**可以使用的操作是 `bit-lookup( $i, j$ )`, 其作用是用一个单位时间去查询  $A[i]$  的第  $j$  个二进制位。请利用此操作设计一个尽可能高效的算法找到消失的数, 并分析其时间复杂度。(12 分)