Содержание

1 <Введение в анализ>

1.1 <Понятие функции>

1°. Действительные числа. Числа рациональные и иррациональные носят название *действительных* или *вещественных* чисел. *Под абсолютной величиной* действительного числа a понимается неотрицательное число $|a|$, определяемое условиями: $|a| = a$, если $a \geq 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Для любых вещественных чисел a и b справедливо неравенство

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

2°. Определение функции. Если каждому значению переменной величины x, принадлежащему некоторой совокупности (множеству) E, соответствует одно и только одно конечное значение величины y, то y называется *функцией* (однозначной) от x или *зависимой переменной*, определенной на множестве E; x называется *аргументом* или *независимой переменной*. То обстоятельство, что y есть функция от x, кратко выражают записью: $y = f(x)$ или $y = F(x)$ и т.п.

Если каждому значению x, принадлежащему некоторому множеству E, соответствует одно или несколько значений переменной величины y, то y называется *многозначной функцией* от x, определенной на множестве E. В дальнейшем под словом "функция"мы будем понимать только *однозначные* функции, если явно не оговорено противное.

3°. Область существования функции. Совокупность значения x, для которых данная функция определена, называется *областью существования* или *областью определения* этой функции.

В простейших случаях область существования функции представляет собой: или *отрезок* (*сегмент*) $[a; b]$, т.е. множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$; или *промежуток* (*интервал*) (a, b), т.е. множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$. Но возможна и более сложная структура области существования функции.

Пример 1. Определите область существования функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Решение. Функция определена, если

$$x^2 - 1 > 0$$

т.е. если $|x| > 1$. Таким образом, область существования функции представляет собой совокупность двух интервалов: $-\infty < x < -1$ и $1 < x < +\infty$.

4°. Обратные функции. Если уравнение $y = f(x)$ может быть однозначно разрешено относительно переменной x, т.е. существует функция $x = g(y)$ такая, что $y = f[g(y)]$, то функция $x = g(y)$, или в стандартных обозначениях $y = g(x)$, называется *обратной* по отношению к $y = f(x)$. Очевидно, что $g[f(x)] \equiv x$, т.е. функции $f(x)$ и $g(x)$ являются *взаимно обратными*.

В общем случае уравнение $y = f(x)$ определяет многозначную обратную функцию $x = f^{-1}(y)$ такую, что $y \equiv f(f^{-1}(y))$ для всех y, являющихся значениями функции $f(x)$.

Пример 2. Для функции

$$y = 1 - 2^{-x} \tag{1}$$

определите обратную.

Решение. Решив уравнение (1) относительно x, будем иметь

$$2^{-x} = 1 - y \quad \text{и} \quad x = -\frac{\lg(1-y)}{\lg 2}. \tag{2}$$

Область определения функции (2), очевидно, следующая: $-\infty < y < 1$.

5°. **Сложные и неявные функции.** Функция y от x, заданная цепью неравенств $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ и т.п., называется *сложной* или *функцией от функции.*

Функция, заданная уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной, называется *неявной*. Например, уравнение $x^3 + y^3 = 1$ определяет y как неявную функцию от x.

6°. **Графическое изображение функции.** Множество точек (x, y) плоскости XOY, координаты которых связаны уравнением $y = f(x)$, называется графиком данной функции.

Модуль вещественного числа и его свойства

Определение. Модуль вещественного числа a - это само число a, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

---

1. Доказать, что если a и b - действительные числа, то

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

Решение. Рассмотрим первую часть неравенства

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

Возведем обе части в квадрат

$$(|a| - |b|)^2 = (|a|)^2 - 2|a| \cdot |b| + (|b|)^2 = a^2 - 2|ab| + b^2$$

$$(|a - b|)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Сравним обе части

$$\begin{aligned} \cancel{a^2} - 2|ab| + \cancel{b^2} \ &\leq \ \cancel{a^2} - 2ab + \cancel{b^2} \\ -2|ab| \ &\leq -2ab \\ ab \ &\leq \ |ab| \end{aligned}$$

Доказано.

Рассмотрим вторую часть неравенства

$$|a-b| \le |a|+|b|$$

Возведем обе часть неравенства

$$(|a-b|)^2 = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(|a|+|b|)^2 = (|a|)^2 + 2|a|\cdot|b| + (|b|)^2 = a^2 + 2|ab| + b^2$$

Сравним обе части

$$\begin{aligned} \cancel{a^2} - 2ab + \cancel{b^2} &\le \cancel{a^2} + 2|ab| + \cancel{b^2} \\ -2ab &\le 2|ab| \\ -ab &\le |ab| \end{aligned}$$

Доказано.

Соединяя два этих неравенства получаем верное двойное неравенство.

2. Доказать следующие неравенства:

$$a)|ab| = |a|\cdot|b| \qquad c)\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$b)|a|^2 = a^2 \qquad d)\sqrt{a^2} = |a|$$

`Доказательство 2(a).` Рассмотрим несколько случаев. Первый случай: $a,b \ge 0$

$|a\cdot b| = a\cdot b, \quad |a|\cdot|b| = a\cdot b \Longrightarrow |a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

Второй случай: $a,b < 0$

$|a\cdot b| = (-a)\cdot(-b) = ab, \quad |a|\cdot|b| = (-a)\cdot(-b) = ab \Longrightarrow |a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

Третий случай: $a \ge 0,, b < 0$

$|a\cdot b| = a\cdot(-b) = -ab, \quad |a|\cdot|b| = a\cdot(-b) = -ab \Longrightarrow |a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

Доказано.

3. Решить неравенства:

$$a)|x-1| < 3 \qquad c)|2x+1| < 1$$

$$b)|x+1| > 2 \qquad d)|x-1| < |x+1|$$

`Доказательство 2(a).` Возведем обе части в квадрат

$$(x-1)^2 < 3^2 \implies (x-1-3)(x-1+3) < 0 \implies (x-4)(x+2) < 0$$

Ответ: $x \in (-2;4)$

Доказательство 2(b). Возведем обе части в квадрат

$$(x+1)^2 > 2^2 \implies (x+1-2)(x+1+2) > 0 \implies (x-1)(x+3) > 0$$

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

Доказательство 2(c). Возведем обе части в квадрат

$$(2x+1)^2 < 1^2 \implies (2x+1-1)(2x+1+1) < 0 \implies 2x(2x+2) < 0 \implies x(x+1) < 0$$

Ответ: $x \in (-1; 0)$

Доказательство 2(d). Возведем обе части в квадрат

$$(x-1)^2 < (x+1)^2 \implies (x-1-x-1)(x-1+x+1) < 0 \implies -2(2x) < 0 \implies x > 0$$

Ответ: $x \in (0; +\infty)$

4. Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, если $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Решение

$f(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 11(-1) - 6 = -1 - 6 - 11 - 6 = -24$

$f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 11(0) - 6 = -6$

$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$

$f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$

$f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 11(3) - 6 = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$

$f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 11(4) - 6 = 64 - 96 + 44 - 6 = 6$

5. $f(0)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, если $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Решение

$f(0) = \sqrt{1+0^2} = 1$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = \sqrt{1+x^2} = f(x)$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} = \frac{f(x)}{|x|}$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

6. Пусть $f(x) = \arccos(\lg x)$. Найти $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$.

Решение.

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \arccos(\lg \frac{1}{10}) = \arccos(\lg(10^{-1})) = \arccos(-1) = \pi$$

$f(1) = \arccos(\lg(1)) = \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$

$f(10) = \arccos(\lg(10)) = \arccos(1) = 0$

7. Функция $f(x)$ - линейная. Найти эту функцию, если $f(-1) = 2$ и $f(2) = -3$.

`Решение.` Так как функция $y = f(x)$ линейна, то она принимает вид $y = kx + b$

$$\begin{cases} 2 = (-1)k + b \\ -3 = 2k + b \end{cases} (-) = 2 - (-3) \Longrightarrow -k - 2k + b - b \Longrightarrow 5 = -3k \Longrightarrow k = -\frac{5}{3}$$

$2 = -k + b = -(-\dfrac{5}{3}) + b = \dfrac{5}{3} + b \quad \Longrightarrow \quad b = 2 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{3}$

Ответ: $f(x) = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{1}{3}$

8. Найти целую рациональную функцию $f(x)$ второй степени, если $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(3) = 5$

`Решение.` Так как функция $y = f(x)$ второй степени, то она принимает вид $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} 1 = 0 \cdot a + 0 \cdot b + c \\ 0 = 1 \cdot a + 1 \cdot b + c \\ 5 = 3^2 \cdot a + 3 \cdot b + c \end{cases} \equiv \begin{cases} 1 = c \\ 0 = a + b + c \\ 5 = 9a + 3b + c \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 = a + b + 1 \\ 5 = 9a + 3b + 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} b = -a - 1 \\ 4 = 9a + 3b \end{cases}$$

$4 = 9a + 3(-a - 1) = 9a - 3a - 3 \quad \Longrightarrow \quad 7 = 6a \quad \Longrightarrow \quad a = \dfrac{7}{6}$

$b = -a - 1 = -\dfrac{7}{6} - 1 = \dfrac{-13}{6}$

Ответ: $f(x) = \dfrac{7}{6}x^2 - \dfrac{13}{6}x + 1$

9. Известно, что $f(4) = -2$, $f(5) = 6$. Найти приближенное значение $f(4{,}3)$, считая функцию $f(x)$ на участке $4 \le x \le 5$ линейной (*линейная интерполяция функции*).

`Решение.` Так как функция $y = f(x)$ линейна на отрезке [4;5], то

$$\begin{cases} -2 = 4k + b \\ 6 = 5k + b \end{cases} \quad (-) \quad \equiv \quad 8 = k \quad \Longrightarrow \quad k = 8$$

$b = -2 - 4k = -2 - 4 \cdot 8 = -2 - 32 = -34$

$f(4.3) = kx + b = 8 \cdot 4.3 - 34 = 34.4 - 34 = 0.4$

Ответ: $f(4.3) = 0.4$

10. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \\ x, \text{ если } x > 0, \end{cases}$$

записать при помощи одной формулы, пользуясь знаком абсолютной величины.

Ответ: $\dfrac{1}{2}|x| + \dfrac{1}{2}x$

`Определить области существования функций(11-21):`

11. a) $y = \sqrt{1+x}$ b) $y = \sqrt[3]{1+x}$

`Решение.` a) Функция определена, если

$$1 + x \geq 0 \quad \text{т.е.} \quad x \geq -1$$

Таким образом, область существования функции представляет собой $D(y) = [-1; +\infty)$

b) Функция определена при любом x. $D(y) = (-\infty; \infty)$

12. $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$

`Решение` Функция определена, если

$$4 - x^2 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad |x| \neq 2$$

Ответ: $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$

13. a) $y = \sqrt{x^2 - 2}$ b) $y = x\sqrt{x^2 - 2}$

`Решение.` a) Функция определена, если

$$x^2 - 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad |x| \geq \sqrt{2}$$

Таким образом, область существования функции равна $D(y) = (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$

b) Функция определена, если

$$x^2 - 2 \geq 0 \text{ ,а также } x = 0$$

Ответ: $D(y) = (-\infty; \sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}; +\infty)$

14. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$

`Решение.` Функция определена, если

$$2 + x - x^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x - 2 \leq 0$$

$D = 1 + 2 \cdot 4 = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{D}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = 2; -1$

Область существования функции $D(y) = [-1; 2]$

15. $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 + x}}$

`Решение.` Функция определена, если

$$-x \geq 0 \quad \text{и} \quad 2 + x > 0$$

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 2+x > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x \leq 0 \\ x > -2 \end{cases} \equiv \quad x \in [-2;0]$$

Ответ: $D(y) = [-2; 0]$

16. $y = \sqrt{x - x^3}$

Решение. Функция определена, если

$$x - x^3 = x(1-x^2) = x(1-x)(1+x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)x(x-1) \leq 0$$

Ответ: $D(y) = (-\infty; -1] \cup [0; 1]$

17. $y = \lg \dfrac{2+x}{2-x}$

Решение. Функция определена, если

$$\frac{2+x}{2-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x-2} < 0$$

Ответ: $D(y) = (-2; 2)$

18. $y = \lg \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x+1}$

Решение.

$$\frac{x^3-3x+2}{x+1} = \frac{x^3-x-2(x-1)}{x+1} = \frac{x(x-1)(x+1)-2(x-1)}{x+1} = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{x+1} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1} > 0$$

Ответ: $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

19. $y = \arccos \dfrac{2x}{1+x}$

Решение.

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1 \quad \text{и} \quad 1 + x \neq 0$$

$$\frac{2x}{1+x} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{2x+1+x}{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$$

$$\frac{2x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x-x-1}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1]$$

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty) \\ x \in (-1; 1] \end{cases} \equiv \quad x \in (-\frac{1}{3}; 1]$$

20. $y = \arcsin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$

Решение.

$$-1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1$$

Рассмотрим первую часть неравенства:

$$\begin{cases} \lg\dfrac{x}{10} \geq -1 \\ \dfrac{x}{10} > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \lg(x) - \lg(10) \geq -1 \\ x > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \lg(x) \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \equiv \quad x \geq 1$$

Рассмотрим вторую часть неравенства:

$$\begin{cases} \lg\dfrac{x}{10} \leq 1 \\ \dfrac{x}{10} > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \lg x - 1 \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \lg x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x \leq 100 \\ x > 0 \end{cases} \equiv \quad x \in (0; 100]$$

Соединим эти два неравенства и получим

Ответ: $x \in [1; 100]$

21. $y = \sqrt{\sin 2x}$

`Решение.` Функция определена, если

$$\sin 2x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k]$$

Ответ: $x \in [\pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k]$ $(k \in Z)$

22. Пусть $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$. Найти

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ и } \psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)$$

`Решение.`

$\varphi(x) = \dfrac{1}{2}[2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10 + 2(-x)^4 - 3(-x)^3 - 5(-x)^2 + 6(-x) - 10] = \dfrac{1}{2}(2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10 + 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 10) = \dfrac{1}{2}(4x^4 - 10x^2 - 20) = 2x^4 - 5x^2 - 10$

$\psi(x) = \dfrac{1}{2}[2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10 - 2(-x)^4 + 3(-x)^3 + 5(-x)^2 - 6(-x) + 10] = \dfrac{1}{2}(2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10 - 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x + 10) = \dfrac{1}{2}(-6x^3 + 12x) = -3x^3 + 6x$

Ответ: $\varphi(x) = 2x^4 - 5x^2 - 10$, $\psi(x) = -3x^3 + 6x$

23. Функция $f(x)$, определенная в симметричной области $-l < x < l$, называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$

`Выяснить, какие из данных функций являются четными и какие нечетными:`

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$

`Решение:` $f(-x) = \dfrac{1}{2}(a^{-x} + a^{-(-x)}) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x}) = f(x)$

Ответ: *Четная.*

b) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$

Решение: $f(-x)=\sqrt{1+(-x)+(-x)^2}-\sqrt{1-(-x)+(-x)^2}=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}=-f(x)$

Ответ: *Нечетная.*

c) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$

Решение: $f(-x)=\sqrt[3]{(-x+1)^2}+\sqrt[3]{(-x-1)^2}=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=f(x)$

Ответ: *Четная.*

d) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$

Решение: $f(-x)=\lg\dfrac{1-x}{1-(-x)}=\lg\dfrac{1-x}{1+x}=-\lg\dfrac{1+x}{1-x}=-f(x)$

Ответ: *Нечетная.*

e) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$

Решение: $f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)=\lg\dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lg\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=$ $-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$

Ответ: *Нечетная.*

24. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в интервале $-l<x<l$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функции.

Решение. Рассмотрим две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\varphi(-x)$$

$$\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-\frac{f(-x)-f(x)}{2}=\psi(-x)$$

Как видим, $\varphi(x)$ четная, а $\psi(x)$ нечетная.

Получаем, что

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x)$$

Доказано.

25. Доказать, что произведение двух четных функций или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная.

Решение. Докажем, что произведение двух четных функций есть четная функция. $f(x)$, $g(x)$ - две четные функции. Произведение этих функций есть функция $h(x)$

$$h(x)=f(x)\cdot g(x)=f(-x)\cdot g(-x)=h(-x)$$

А теперь функции $f(x)$ и $g(x)$ нечетные, а $h(x)$ - произведение этих функций.

$$h(x)=f(x)\cdot g(x)=(-f(x))\cdot(-g(x))=f(-x)\cdot g(-x)=h(-x)$$

Докажем, что произведение четной и нечетной функций есть нечетная функция. $f(x)$ - это четная функция, а $g(x)$ - это нечетная. Функция $h(x)$ - это произведение двух функций.

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot (-g(-x)) = -f(-x) \cdot g(-x) = -h(-x)$$

Доказано.

26. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T (*перид функции*) такое, что $f(x+T) \equiv f(x)$ для всех значений x, принадлежащий области существования функции $f(x)$.

Определить, какие из перечисленных ниже функций являются периодическими функций найти наименьший их период T.

a) $f(x) = 10\sin 3x$

`Решение.` $\sin(x) = \sin(x + 2\pi k)$

$$f(x) = 10\sin(3x + 2\pi k) = 10\sin(3(x + \frac{2\pi k}{3})) = f(x + \frac{2\pi}{3})$$

Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}$

b) $f(x) = a\sin\alpha x + b\cos\alpha x$

`Решение.`

$$f(x) = a\sin(\alpha x) + b\cos(\alpha x) = a\sin(\alpha x + 2\pi) + b\cos(\alpha x + 2\pi) = a\sin(\alpha(x + \frac{2\pi}{\alpha})) + b\cos(\alpha(x + \frac{2\pi}{\alpha})) = f(x + \frac{2\pi}{\alpha})$$

Ответ: $\dfrac{2\pi}{\alpha}$

c) $f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}(x)}$

`Решение.`

$$\mathrm{tg}(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$$

$$f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}(x)} = \sqrt{\mathrm{tg}(x + \pi)} = f(x + \pi)$$

Ответ: π

d) $f(x) = \sin^2 x$

`Решение.`

$$f(x) = \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1 - \cos(2x + 2\pi)}{2} = \frac{1 - \cos(2(x + \pi))}{2} = f(x + \pi)$$

Ответ: π

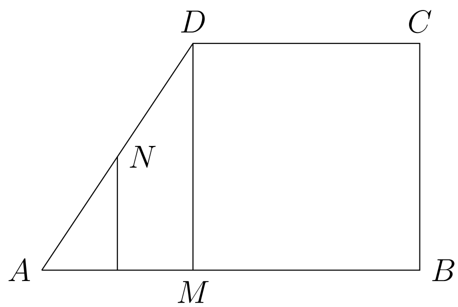
e) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

`Решение.`

$$f(x) = \sin(\sqrt{x}) = \sin(\sqrt{x} + \pi)$$

Ответ: Непериодическая.

27. Выразить длину отрезка y=MN и площадь S фигуры AMN как функции от $x = AM$. Построить графики этих функций.



29. Найти $\varphi(\psi(x))$ и $\psi(\varphi(x))$, если $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = 2^x$.

`Решение.` $\varphi(\psi(x)) = (\psi(x))^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$

$\psi(\varphi(x)) = 2^{\varphi(x)} = 2^{x^2}$

Ответ: 2^{2x}, 2^{x^2}

30. Найти $f\{f[f(x)]\}$, если $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

`Решение.` $f\{f[f(x)]\} = \dfrac{1}{1-f[f(x)]} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{1-f(x)}} = \dfrac{1-f(x)}{1-f(x)-1} = \dfrac{f(x)-1}{f(x)} = \dfrac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{1-1+x}{1} = x$

Ответ: x

31. Найти $f(x+1)$, если $f(x-1) = x^2$

`Решение:` $f(x+1) = f(x+2-1) = (x+2)^2$

Ответ: $(x+2)^2$

32. Пусть $f(n)$ есть сумма n членов арифметической прогрессии. Показать что

$$f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0$$

`Решение.`

$f(n+3) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+3}$

$f(n+2) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+2}$

$f(n+1) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}$

$f(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$$f(n+3)-f(n)+3(f(n+1)-f(n+2) = a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+3(-a_{n+2}) = a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}-3a_{n+2} = a_{n+1}-2a_{n+2}+a_{n+3}$$

$a_{n+1} = a_n + d$

$a_{n+2} = a_n + 2d \quad \Leftrightarrow a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_{n+3}}{2}$

$a_{n+3} = a_n + 3d$

Отсюда следует, что $a_{n+1} - 2a_{n+2} + a_{n+3} = a_{n+1} - a_{n+1} - a_{n+3} + a_{n+3} = 0$

33. Показать, что если

$$f(x) = kx + b$$

и числа x_1,x_2,x_3 образуют арифметическую прогрессию, то числа $f(x_1)$,$f(x_2)$, $f(x_3)$ также образуют арифметическую прогрессию.

`Решение.`

$f(x_1) = kx_1 + b$

$f(x_2) = kx_2 + b = kx_1 + b + kd$

$f(x_3) = kx_3 + b = kx_2 + b + kd = kx_1 + b + kd + kd = kx_1 + b + 2kd$

$b_1 = f(x_1)$

$b_2 = f(x_2) = f(x_1) + kd = b_1 + kd$

$b_3 = f(x_3) = f(x_2) + kd = f(x_1) + 2kd = b_1 + 2kd$

Доказано

34. Доказать, что если $f(x)$ есть показательная функция, т.е. $f(x) = a^x$ (a>0), и числа x_1,x_2,x_3 образуют арифметическую прогрессию, то числа $f(x_1)$,$f(x_2)$,$f(x_3)$ образуют геометрическую прогрессию.

`Решение.`

$f(x_1) = a^{x_1}$

$f(x_2) = a^{x_2} = a^{d+x_1} = a^{x_1} \cdot a^d$

$f(x_3) = a^{x_3} = a^{2d+x_1} = a^{x_1} \cdot a^{2d} = a^{x_1} \cdot (a^d)^2$

Доказано.

35. Пусть

$$f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$$

Показать, что

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

`Решение.`

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \lg \frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}} = \lg \frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y} = \lg \frac{(1+x)(1+y)}{(1-y)(1-x)} = \lg \frac{1+x}{1-x} + \lg \frac{1+y}{1-y} = f(x) + f(y)$$

Доказано.

36. Пусть $\varphi(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ и $\psi(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$. Показать, что

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) + \psi(x)\psi(y)$$

и

$$\psi(x+y) = \varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x)$$

`Решение.`

$$\varphi(x)\varphi(y)+\psi(x)\psi(y) = \frac{1}{4}(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})+\frac{1}{4}(a^x-a^{-x})(a^y-a^{-y}) = \frac{1}{4}(2a^{x+y}+a^{x-y}+a^{y-x}+2a^{-x-y}-a^{x-y}-a^{y-x}) =$$

$$\frac{1}{4}(2a^{x+y} + 2a^{-x-y}) = \frac{1}{2}a^{x+y} + \frac{1}{2}a^{-x-y} = \varphi(x+y)$$

$$\varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x) = \frac{1}{4}(a^x + a^{-x})(a^y - a^{-y}) + \frac{1}{4}(a^y + a^{-y})(a^x - a^{-x}) = \frac{1}{4}(2a^{x+y} - 2a^{-x-y}) = \psi(x+y)$$

37. Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, если

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin x \text{ при } -1 \le x \le 0 \\ \arctan x \text{ при } 0 < x < +\infty \end{cases}$$

Решение.

$f(-1) = \arcsin(-1) = -\arcsin 1 = -\dfrac{\pi}{2}$

$f(0) = \arcsin 0 = 0$

$f(1) = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$

38. Определить корни (нули) области положительности и области отрицательности функции y, если

Решение: а) $y = 1 + x$

$y = 0$ при $x = -1$. $y > 0$ при $x > -1$. $y < 0$ при $x < -1$

б) $y = 2 + x - x^2$

$y = 0$ при $2 + x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$D = b^2 - 4a \cdot c = 1^2 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$x_{1,2} = \dfrac{b \pm \sqrt{D}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \{2; -1\}$

Поэтому $y = 2 + x - x^2 = -(x-2)(x+1)$

$y = 0$ при $x = 2$ и $x = -1$. $y > 0$ при $x \in (-1, 2)$. $y < 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

в) $y = x^2 - x + 1$

$y = 0$ при $x^2 - x + 1 = 0$

$D = b^2 - 4a \cdot c = 1 - 4 = -3 < 0$

Поэтому $x^2 - x + 1 > 0$

Из этого следует, что $y \neq 0$ и $y > 0$ при всех x.

г) $y = x^3 - 3x$

$y = 0$ при $x^3 - 3x = 0$

$0 = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

$y = 0$ при $x = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$. $y > 0$ при $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

$y < 0$ при $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

д) $y = \lg \dfrac{2x}{x+1}$

$y = 0$ при $\lg \dfrac{2x}{x+1} = 0$

$\lg \dfrac{2x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x - x - 1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1} = 0$

$y = 0$ при $x = 1$. $y > 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. $y < 0$ при $x \in (0, 1)$

39. Для функции y найти обратную, если:

Решение: а) $y = 2x + 3$

$f(x) = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{f(x) - 3}{2} \Leftrightarrow g(y) = \dfrac{y - 3}{2}$

Обратная функция $g(y) = \dfrac{y-3}{2}$ при всех y.

б) $y = x^2 - 1$

$f(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow g(y) = \pm\sqrt{y+1}$

Обратная функция $g(y) = \pm\sqrt{y+1}$ при $y \geq -1$

в) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$

$f(x) = \sqrt[3]{1-x^3} \Leftrightarrow (f(x))^3 = 1 - x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1-(f(x))^3} \Leftrightarrow g(y) = \sqrt[3]{1-y^3}$

Обратная функция $g(y) = \sqrt[3]{1-y^3}$ при всех y

г) $y = \lg \dfrac{x}{2}$

$f(x) = \lg \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow 10^{f(x)} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \cdot 10^{f(x)}$

Обратная функция $g(y) = 2 \cdot 10^y$ при всех y

д) $y = \arctan(3x)$

$f(x) = \arctan(3x) \Leftrightarrow 3x = \tan(f(x)) \Leftrightarrow x = \dfrac{\tan(f(x))}{3}$

Обратная функция $g(y) = \dfrac{\tan(y)}{3}$ при $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

40. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \leq 0 \\ x^2, \text{ если } x > 0 \end{cases}$$

найти обратную.

`Решение:`

$f(x) = x$ при $x \leq 0 \Rightarrow g(y) = y$ при $y \leq 0$

$f(x) = x^2$ при $x = \sqrt{f(x)} \Rightarrow g(y) = \sqrt{y}$ при $y > 0$.

41. Данные функции записать в виде цепи равенства, каждое звено которой содержит простейшую элементарную функцию (степенную, показательную, тригонометрическую и т.п.):

`Решение:` а) $y = (2x-5)^{10}$

$y = u^{10} \Rightarrow u = 2x - 5$

б) $y = 2^{\cos(x)}$

$y = 2^k \Rightarrow k = \cos(x)$

в) $y = \lg \tan \dfrac{x}{2}$

$y = \lg k \Rightarrow k = \tan u \Rightarrow u = \dfrac{x}{2}$

г) $y = \arcsin(3^{-x^2})$

$y = \arcsin(k) \Rightarrow k = 3^u \Rightarrow u = -l \Rightarrow l = x^2$

42. Сложные функции, заданные цепью равенств, записать в виде одного равенства:

`Решение:` а) $y = u^2$, $u = \sin(x) \Leftrightarrow y = \sin^2 x$

б) $y = \arctan u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \lg(x) \Leftrightarrow y = \arctan\sqrt{\lg(x)}$

в) $y = \begin{cases} 2u, \text{ если } u \leq 0 \\ 0, \text{ если } u > 0 \end{cases} \qquad u = x^2 - 1$

$$y = \begin{cases} 2(x^2-1), \text{ если } x^2-1 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1{,}1] \\ 0, \text{ если } x^2-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \end{cases}$$

43. Записать в явном виде функции y, заданные уравнениями:

`Решение:` а) $x^2 - \arccos y = \pi$

$\arccos y = x^2 - \pi \Leftrightarrow y = \cos(x^2-\pi) = -\cos(x^2)$,

при $0 \le x^2 - \pi \le \pi \Leftrightarrow \pi \le x^2 \le 2\pi \Leftrightarrow \sqrt{\pi} \le |x| \le \sqrt{2\pi}$

`Ответ:` $y = -\cos(x^2)$ при $|x| \in [\sqrt{\pi},\sqrt{2\pi}]$

б) $10^x + 10^y = 10$

$10^x + 10^y = 10 \Leftrightarrow 10^y = 10 - 10^x \Leftrightarrow y = \lg(10-10^x)$

$10 - 10^x > 0 \Leftrightarrow 10^x < 10^1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$

`Ответ:` $y = \lg(10-10^x)$ при $x \in (-\infty, 1)$

в) $x + |y| = 2y$

$$y = \begin{cases} 2y - x, \text{ при } y \ge 0 \\ x - 2y, \text{ при } y < 0 \end{cases}$$

$y = x$ при $x \in (0,+\infty)$ $\quad y = \dfrac{x}{3}$ при $x \in (-\infty, 0)$