

Porovnání algoritmů hledání cyklů v grafech

Bc. Jan Bíl
Bc. Michal Šedý

13. listopadu 2022

Obsah

1	Úvod	2
2	Prerekvizity	3
2.1	Orientovaný graf	3
2.2	Prohledávání do hloubky	4
2.3	Topologické uspořádání	5
2.4	Zanedbání stavů	5
3	Algoritmus 1	7
4	Herbert Weinbalttův algoritmus	9
4.1	Popis algoritmu	9
4.2	Časová složitost	11
4.3	Prostorová složitost	12
5	Algoritmus 3	13
6	Návrh programu	15
7	Použití programu	17
8	Experimenty	19
9	Závěr	21
	Literatura	22

Kapitola 1

Úvod

Orientovaný graf je struktura popisující množinu bodů (uzlů), jenž jsou mezi sebou propojeny orientovanými hranami. Cyklus v orientovaném grafu představuje takovou spojitou posloupnost uzlů, že se žádný uzel s výjimkou prvního a posledního v sekvenci neopakuje a zároveň pro dvojici sousedících uzlů v posloupnosti $\dots u_m u_n \dots$ platí, že existuje orientovaná hrana vedoucí z uzlu u_m do uzlu u_n . Tato práce se zabývá popisem algoritmů pro získání seznamu všech existujících cyklů v zadaném grafu.

Vyhledávání všech (výčet) cyklů v grafu je využíváno v mnoha odvětvích teorie grafů. Tato informace je používána k optimalizaci počítačových programů [1], při analýze booleovských sítí využívaných pro modelování biologických sítí nebo sítí genových regulátorů [7], při návrhu, vývoji [6] nebo ověření spolehlivosti a fault-tolerance komunikačních systémů [5], atd.

Tato práce porovnávající tři algoritmy pro výčet všech cyklů v grafu byla vytvořena v rámci projektu "Porovnání - Hledání cyklů" do předmětu GAL (grafové algoritmy). Text na úvod definuje potřebné pojmy dále využívané v algoritmech. V následujících kapitolách jsou uvedeny jednotlivé implementované algoritmy. Kapitola 3 popisuje přímočarý algoritmus [2, str. 287], který postupně generuje různé kandidáty cest, a ti jsou následně ověřováni. Algoritmus, který navrhl Herbert Weinblatt využívající zpětné navrácení [9] je uveden v kapitole 4. Kapitola 5 popisuje algoritmus Hongbo Liu a Jiaxin Wangův algoritmus využívající frontu [4]. Tyto algoritmy byly implementovány v jazyce Python3. Popis návrhu implementace aplikace a její používání jsou uvedeny v kapitolách 6 a 7. Experimenty porovnávající efektivitu jednotlivých postupů výčtu všech cyklů včetně grafové knihovny Networkx¹ jsou uvedeny v kapitole 8.

¹Dostupné z <https://networkx.org/>

Kapitola 2

Prerekvizity

Tato kapitola poskytuje základní definice pro orientované grafy, jakými jsou základní definice grafu, sledu, cesty a cyklů. Dále jsou popsány základní algoritmy pro práci s grafy, kterými jsou prohledávání do hloubky (DFS) a topologické uspořádání, které jsou využívány pro zjednodušení výčtu cyklů grafů. Tato kapitola je převzata z [3].

2.1 Orientovaný graf

Definice 2.1.1 ***Orientovaný graf** je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina uzlů grafu a $E \subseteq V \times V$ je množina orientovaných hran, kde hrana $(u, v) \in E$ znamená, že v grafu G vede hrana z uzlu u do uzlu v (uzly u, v jsou incidentní).*

Orientovaný graf $G = (V, E)$ je možno v algoritmech reprezentovat dvěma způsoby. Nechť $u, v \in V$. 1) jako pole Adj seznamů sousedů, pro které platí $v \in Adj[u] \iff (u, v) \in E$. 2) jako matici souslednosti Adj_M , kde $Adj_M[u][v] = 1 \iff (u, v) \in E \wedge Adj_M[u][v] = 0 \iff (u, v) \notin E$. Pro účely této práce byl zvolen první přístup, kterým je pole seznamů sousedů.

Definice 2.1.2 *Nechť $G = (V, E)$. **Transponovaný graf** $G^T = (V, E^T)$, kde $E^T = \{(v, u) \mid (u, v) \in E\}$.*

Definice 2.1.3 ***Vstupní stupeň uzlu** je dán funkcí $d_+ : V \rightarrow \mathbb{N}_0$, která udává počet přechodu vstupujících do uzlu.*

Definice 2.1.4 ***Vstupní stupeň uzlu** je dán funkcí $d_- : V \rightarrow \mathbb{N}_0$, která udává počet přechodu vstupujících do uzlu.*

Lze snadno ukázat, že pokud má uzel $u \in V$ hodnotu $d_-(u) = 0$ nebo $d_+(u) = 0$, pak nemůže být součástí žádného cyklu, pro každý stav obsažený v cyklu musí platit, že jeho vstupní i výstupní stupeň je nenulový. Tyto uzly s nulovým stupněm mohou být v části přípravy algoritmů pro výčet cyklů zanedbány (odstraněny). Toto zanedbání uzlu může snížit hodnotu vstupních nebo výstupních stupňů uzlů incidentních s uzlem u na nulu. V takovém případě jsou dále rekurzivně zanedbány také tyto uzly.

Definice 2.1.5 ***Sled** je posloupnost vrcholů $\langle v_0 \dots v_n \rangle$, kde $n \in \mathbb{N}$, $v_i \in V$ pro $0 \leq i \leq n$, a $(v_{j-1}, v_j) \in E$ pro $1 \leq j \leq n$.*

Definice 2.1.6 *Cesta (otevřený cesta) je sled, ve kterém se neopakují uzly.*

Definice 2.1.7 *Cyklus je cesta, ve které shodují první a poslední uzel.*

2.2 Prohledávání do hloubky

Algoritmus prohledávání do hloubky (DFS) je základním algoritmem pro práci s grafy. DFS postupně prochází všechny uzly grafu $G = (V, E)$ a vytváří strom prohledávání do hloubky.

Definice 2.2.1 *Nechť $G = (V, E)$ a π pole předchůdců, kde $u \in \pi[v] \implies (u, v) \in E$. Strom prohledávání do hloubky je $G_\pi = (V, E_\pi)$, kde $E_\pi = \{(u, v) \in E \mid u = \pi[v]\}$.*

Během výpočtu se vytváří pole barev uzlů $color[u] \in \{WHITE, GRAY, BLACK\}$, pole časů prvního prozkoumání $d[u] \in \mathbb{N}$, pole časů dokončení prozkoumávání seznamu sousedů $f[u] \in \mathbb{N}$ a pole předchůdců $\pi[u] \subseteq V$.

Algorithm 1: DFS

Input: $G := (V, E)$

Output: π, d, f

```

1 Procedure DFS-VISIT( $v$ )
2    $color[v] \leftarrow GRAY$ 
3    $d[v] \leftarrow time \leftarrow time + 1$ 
4   for  $v \in Adj$  do
5     if  $color[v] = WHITE$  then
6       DFS-VISIT( $v$ )
7     end
8   end
9 end

10 for  $u \in V$  do
11    $color[u] \leftarrow WHITE$ 
12    $\pi[u] \leftarrow NIL$ 
13 end

14  $time \leftarrow 0$ 
15 for  $u \in V$  do
16   if  $color[u] = WHITE$  then
17     DFS-VISIT( $u$ )
18   end
19 end

20 return  $\pi, d, f$ 
```

Teorém 2.2.2 *Časová složitost algoritmu DFS je $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.*

Důkaz. Inicializační část 10–13 má časovou obtížnost $\mathcal{O}(|V|)$. Hlavní cyklus 15–19 je prováděn maximálně $|V|$ -krát, tedy časová obtížnost je $\mathcal{O}(|V|)$. Funkce DFS-VISIT je spouště na pouze pro bílé uzly, tedy $|V|$ -krát a cyklus v proceduře 4–8 je proveden maximálně $|Adj[v]|$ -krát. Protože $\sum_{v \in V} |Adj[v]| = |E|$ je časová obtížnost cyklu 4–8 $\mathcal{O}(|E|)$. Celková složitost je tedy $\mathcal{O}(|V| + |E|)$. \square

2.3 Topologické uspořádání

Definice 2.3.1 *Topologické uspořádání orientovaného grafu $G = (V, E)$ je lineární uspořádání všech uzlů tak, že pokud $(u, v) \in E$, pak u předchází v v daném uspořádání.*

Pokud graf G obsahuje cykly, poté není možné určit topologické uspořádání. Nicméně algoritmus lze spustit. Výsledkem bude *pseudo-topologické uspořádání*, ve kterém bude platit, že pokud $(u, v) \in E$ a zároveň se u nenachází v žádném cyklu, pak u předchází v v daném uspořádání.

Algorithm 2: Topological-sort

Input: $G := (V, E)$

Output: L

- 1 zavolej DFS(G) pro výpočet hodnot $f[v]$
 - 2 každý dokončený uzel zařaď na začátek seznamu uzlů L
 - 3 return L
-

Teorém 2.3.2 *Protože výpočet topologického uspořádání využívá pouze DFS v časovou složitost $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ a operaci vložení na začátek seznamu, která má konstantní časovou složitost, je časová složitost topologického uspořádání $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.*

2.4 Zanedbání stavů

Algorithm 3: Zanedbání stavů

Input: $G := (V, E)$

Output: G_{simply}

```
1 Procedure Pruning( $G_p := (V_p, E_p)$ )
2   for  $u \in \text{Topological-sort}(G_p)$  do
3     if  $d_{p+}[u] = 0$  then
4       for  $v \in \text{Adj}_p[u]$  do
5          $d_{p+}[v] \leftarrow d_{p+}[v] - 1$ 
6       end
7        $V_p.\text{remove}(u)$ 
8     end
9   end
10 end

11  $G_t \leftarrow G^T$  // Transponujeme graf  $G$ .
12 Pruning( $G_t$ ) // Smažeme zanedbatelné stavy v grafu  $G_t$ 
13  $G_{\text{simply}} \leftarrow G_t^T$  // Transponujeme graf  $G_t$ 
14 Pruning( $G_{\text{simply}}$ ) // Smažeme zanedbatelné stavy v grafu  $G_{\text{simply}}$ 
15 return  $G_{\text{simply}}$ 
```

Jak již bylo dříve řečeno, stavy, jejichž vstupní, nebo výstupní stupeň je nulový nemohou být součástí žádného cyklu, a proto mohou být při výčtu všech cyklů grafu zanedbány (odstraněny). Při zanedbání těchto uzlů se ale mohou změnit hodnoty funkcí d_- a d_+ tak, že budou objeveny nové stavy s nulovým vstupním nebo výstupním stupněm. K jejich kompletní eliminaci slouží následující algoritmus.

Teorém 2.4.1 *Časová složitost algoritmu zanedbání stavů je $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.*

Důkaz. Transponování grafu má časovou složitost $\mathcal{O}(|V| + |E|)$. Topologické uspořádání má časovou složitost $\mathcal{O}(|V| + |E|)$. V proceduře Pruning se hlavní cyklus 2–9 prochází $|V|$ -krát a vnitřní cyklus 4–6 se prochází $|Adj[u]|$ -krát. Časová složitost procedury Pruning je tedy $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, z čehož plyne, že časová složitost algoritmu zanedbání stavů je $\mathcal{O}(|V| + |E|)$. \square

Kapitola 3

Algoritmus 1

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget

felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Kapitola 4

Herbert Weinbalttův algoritmus

Tento algoritmus byl publikován v roce 1972 Herbertem Weinblattem [9]. Jeho základem je Tiernanův algoritmus [8] publikovaný o dva roky dříve, který vyhodnocuje každý cyklus pouze jednou, jednalo se tedy o teoreticky nejefektivnější algoritmus, ovšem za cenu vyšších paměťových nároků. Sam Tiernan ale naznačil, že pro průměrně husté grafy s více než 100 hranami by bylo použití tohoto algoritmus neprakticky pomalé. Herbert Weinblatt ve svém článku popisuje nový přístup, který stejně jako Tiernanův vyhodnocuje každý cyklus pouze jedno, ale nově také minimalizuje množství prozkoumaných hran nutných k objevení cyklu. V důsledku toho dokázal algoritmus implementovaný v experimentálním jazyce Snobol3 na počítači IBM 7094 objevit všech 44 cyklů v grafu s 194 uzly a 294 hranami za méně než sedm sekund.

4.1 Popis algoritmu

Před samotným popisem algoritmu se potřeba definovat pomocné funkce *END* a *TAIL*.

Definice 4.1.1 *END* je unární funkce, které pro cestu $\langle v_0 v_1 \dots v_n \rangle$, vrací poslední uzel cesty v_n .

Definice 4.1.2 *TAIL* je binární funkce, která pro dvojici uzlu v_k a otevřenou cestu $\langle v_0 v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n \rangle$, respektive cyklus $\langle v_0 v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_0 \rangle$ vrací podcestu $\langle v_{k+1} \dots v_n \rangle$, respektive $\langle v_{k+1} \dots v_0 \rangle$ s ohledem k uzlu v_k . V případě cyklu $\langle v_k v_{k+1} \dots v_k \rangle$ vrací prázdnou cestu $\langle \rangle$ délky 0.

V průběhu výpočtu využívá algoritmus seznam *TT*, který reprezentuje aktuální zkoumanou cestu. Dále jsou udržovány dvě pomocné struktury S_v a S_e . Kde S_v je pomocné pole udržující informaci, zda již byl uzel $v \in V$ v seznamu *TT*. $S_v[v]$ může nabývat hodnot 0, 1, nebo 2, což indikuje, že uzel v ještě nabyt v seznamu *TT*, uzel v se momentálně nachází v seznamu *TT*, nebo že se uzel v již nenachází v *TT*. Obdobná informace je udržována pro hrany. S_e je matice informující, zda již byla hrana $(u, v) \in E$ v seznamu *TT*. $S_e[u][v]$ může nabývat pouze dvou hodnot, a to 0, respektive 2, což indikuje, že hrana (u, v) ještě nebyla v *TT*, respektive že hrana (u, v) již byla v *TT* a stále může být.

Algorithm 4: Herbert Weinbaltův algoritmus

Input: $G := (V, E), n := |V|$ **Output:** L_{cycles}

```
1 Procedure CONCAT(isRecursion, Path)
  // Inicializace lokálních proměnných
2  cycleTails  $\leftarrow$  EmptyList
3  toAddSave  $\leftarrow$  EmptyList
4  toAddToControl  $\leftarrow$  EmptyList
5  added  $\leftarrow$  EmptyList
6   $v \leftarrow \text{END}(\text{Path})$ 
7  for  $\text{cycle} \in L_{cycles}$  do
8     $\text{tail} \leftarrow \text{TAIL}(v, \text{cycle})$ 
9    if  $\text{tail} = \emptyset \vee \text{tail} \in L_{cycles}$  then
10     | continue
11   end
12   cycleTails.append(tail)
13   if  $\exists v_k \in \text{tail} : v_k \in \text{Path}$  then
14    | continue
15   end
16    $\text{cycleEnd} \leftarrow \text{END}(\text{cycle})$ 
17   if  $S_v[\text{cycleEnd}] = 2$  then
18    | toAddToControl.extend(CONCAT(True,  $\text{Path} + \text{tail}$ ))
19    | continue
20   else
21      $\text{newCycle} \leftarrow [\text{cycleEnd}] + \text{TAIL}(\text{cycleEnd}, \text{TT}) +$ 
22        $\text{Path} + \text{TAIL}(\text{END}(\text{Path}), \text{cycle})$ 
23     if isRecursion then
24       | toAddToControl.append(newCycle)
25     else
26       | toAddSave.append(newCycle)
27     end
28   end
29 if isResursion then
30 | return toAddToControl
31 else
32 | Lcycles.extend(toAddSave)
33 | added.extedn(toAddSave)
34 for  $\text{cycle} \in \text{toAddToControl}$  do
35 | if  $\text{cycle} \notin \text{added}$  then
36 | | Lcycles.append(cycle)
37 | | added.append(cycle)
38 | end
39 end
40 end
41 end
```

```

42 Procedure EXAMINE( $v$ )
43   if  $S_v[v] = 0$  then
44      $S_v[v] \leftarrow 1$ 
45      $TT.append(v)$ 
46   else if  $S_v[v] = 1$  then
47      $L_{cycles}.append([v] + TAIL(v, TT) + [v])$ 
48   else
49      $CONCAT(\mathbf{False}, [v])$ 
50 end

51 Procedure EXTEND
52   while  $TT \neq \emptyset$  do
53      $u \leftarrow END(TT)$ 
54      $possible\_v \leftarrow \{v \in V \mid (u, v) \in E \wedge S_e[u][v] = 0\}$ 
55     if  $possible\_v = \emptyset$  then
56        $S_v[u] \leftarrow 2$ 
57        $TT.removeLast()$ 
58     else
59        $v \leftarrow PickOne(possible\_v)$ 
60        $S_e[u][v] \leftarrow 2$ 
61       EXAMINE( $v$ )
62     end
63   end
64 end

  // Inicializace globálních proměnných
65  $TT \leftarrow EmptyList$ 
66  $S_e[0 \dots n-1][0 \dots n-1] \leftarrow 0$  // nulová matice  $n \times n$ 
67  $S_v[0 \dots n-1] \leftarrow 0$ 

68 for  $v \in V$  do
69   if  $S_v[v] = 0$  then
70      $S_v[v] \leftarrow 1$ 
71      $TT.append(v)$ 
72     EXTEND()
73   end
74 end
75 return  $L_{cycles}$ 

```

Slovní popis algoritmu TODO.

4.2 Časová složitost

Teorém 4.2.1 Časová složitost Herbert Weinblattova algoritmu pro výčet všech cyklů v orientovaném grafu je $\mathcal{O}((|V| + |E|) * (c + 1))$, kde c je počet cyklů v grafu.

Důkaz. TODO. □

4.3 Prostorová složitost

Teorém 4.3.1 *Prostorová složitost Herbert Weinblattova algoritmu pro výčet všech cyklů v orientovaném grafu je $\mathcal{O}(c * |V| + |V|^2)$, kde c je počet cyklů v grafu.*

Důkaz. Algoritmus využívá tři globální pomocné struktury. Prostorová složitost TT je $\mathcal{O}(|V|)$ protože maximální délka cyklu je shora omezena na $|V| + 1$. Prostorová složitost matice S_e je $\mathcal{O}(|V|^2)$. A prostorová složitost pole S_v je $\mathcal{O}(|V|)$. Prostorovou složitost lokálních pomocných proměnných $added$, $cycleTails$, $toAddSave$ a $toAddToControl$ můžeme zanedbat, protože jejich data jsou obsažena v listu všech detekovaných cyklů L_{cycles} . Prostorová složitost listu L_{cycles} je $\mathcal{O}(c * |V|)$, protože obsahuje c cyklů¹, kde délka každého cyklu může být až $|V| + 1 \simeq |V|$.

Pokud by prohledávaný graf neobsahoval žádný cyklus, potom budou vždy inicializovány globální pomocné struktury s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(|V|^2)$.

Bylo dokázáno, že prostorová složitost Herbert Weinblattova algoritmu pro výčet všech cyklů v orientovaném grafu je $\mathcal{O}(c * |V| + |V|^2)$, kde c je počet cyklů v grafu. \square

¹V případě úplného grafu je počet cyklů rovem mohutnosti symetrické grupy $|S_{|V|}| = |V|!$.

Kapitola 5

Algoritmus 3

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget

felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Kapitola 6

Návrh programu

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget

felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Kapitola 7

Použití programu

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget

felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Kapitola 8

Experimenty

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget

felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Kapitola 9

Závěr

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Literatura

- [1] ALLEN, F. E. Program optimization. *Research Report RC-1959*. IBM Watson Research Center, Yorktown Heights, N.Y. april 1966.
- [2] DEO, N. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Dover Publications, 2017. ISBN 9780486820811. Dostupné z: <https://books.google.cz/books?id=DSBMDgAAQBAJ>.
- [3] KŘIVKA, Z. a MASOPUST, T. *Grafové algoritmy*. VUT Brno, Fakulta informačních technologií, 2018. Dostupné z: <http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/GAL/public/gal-slides.pdf>.
- [4] LIU, H. a WANG, J. A new way to enumerate cycles in graph. In: *Advanced Int'l Conference on Telecommunications and Int'l Conference on Internet and Web Applications and Services (AICT-ICIW'06)*. 2006, s. 57–57. DOI: 10.1109/AICT-ICIW.2006.22.
- [5] MÉDARD, M. a LUMETTA, S. Network Reliability and Fault Tolerance. In: Duben 2003. DOI: 10.1002/0471219282.eot281. ISBN 9780471219286.
- [6] ROZENFELD, H. D., KIRK, J. E., BOLLT, E. M. a AVRAHAM, D. ben. Statistics of cycles: how loopy is your network? *Journal of Physics A: Mathematical and General*. IOP Publishing. may 2005, sv. 38, č. 21, s. 4589–4595. DOI: 10.1088/0305-4470/38/21/005. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088%2F0305-4470%2F38%2F21%2F005>.
- [7] RUSHDI, A. a ALSOGATI, A. Matrix Analysis of Synchronous Boolean Networks. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*. Duben 2021, sv. 6, s. 598–610. DOI: 10.33889/IJMEMS.2021.6.2.036.
- [8] TIERNAN, J. C. An Efficient Search Algorithm to Find the Elementary Circuits of a Graph. *Commun. ACM*. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery. dec 1970, sv. 13, č. 12, s. 722–726. DOI: 10.1145/362814.362819. ISSN 0001-0782. Dostupné z: <https://doi.org/10.1145/362814.362819>.
- [9] WEINBLATT, H. A New Search Algorithm for Finding the Simple Cycles of a Finite Directed Graph. *J. ACM*. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery. jan 1972, sv. 19, č. 1, s. 43–56. DOI: 10.1145/321679.321684. ISSN 0004-5411. Dostupné z: <https://doi.org/10.1145/321679.321684>.