VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

http://fit.vut.cz

Teorie her 2022/2023

# Hry s nepřenositelným užitkem

Bc. Michal Šedý

**Abstrakt**
Tato práce popisuje hry z nepřenositelným užitkem (NTU–games) a mechanizmy popisující jejich řešení, jakými jsou jádro hry a Shapleyho hodnota. Následující text pracuje se superaditivními hrami, pro které platí, že zisk dvou disjunktních koalic je vždy menši, nebo roven ziku, kterého by dosáhla jedna velká koalice sestávající ze členů techto dvou menších koalic. Speciální podmnožinou NTU her jsou hry s přenositelným užitkem (TU–games), kde zatímco TU hry rozdělují mezi hráče libovolně dělitelnou komoditu (bez ztráty na obecnosti si lze tuto komoditu představit jako peníze), tak v případě NTU her si hráči rozdělují množinu nedělitelných komodit. Jedním z příkladu NTU her je směnná ekonomika, ve které hráči utvářejí koalice a redistribuují své počáteční vklady (nejedná se pouze o peníze) za účelem zisku.

**Klíčová slova:** kooperativní hry — hry s přenositelným užitkem — hry s nepřenositelným užitkem — jádro hry — Shapleyho hodnota

xsedym02@stud.fit.vutbr.cz, *Fakulta informačních technologií, Vysoké učení technické v Brně*

## 1. Úvod

Kooperativní teorie her se zabývá hrami se dvěma a více hráči, jejichž spolupráce (dohodnuti vymahatelné strategie) může vést k lepším ziskům hráčů ze hry, než kdyby hra proběhla nekooperativně. Žádný hráč by neměl obdržet menší zisk, než by mu přineslo odmítnutí spolupráce. V takovém případě by se již nejednalo o kooperativní hru.

Cílem této práce je popis kooperativní hry s nepřenositelným užitkem (NTU–game), pro kterou je stanovena množina hráčů, kteří spolu tvoří koalice, a výplatní funkce, která každé koalici přiřazuje množinu možných výplatních vektorů. Budeme pracovat pouze se super–aditivními NTU hrami, pro které platí, že je součet užitků dvou disjunktních koalic menší, nebo roven užitku větší koalice vzniklé sloučením techto dvou menších koalicí. Vyjednávání o utváření koalic lze tedy zanedbat, protože na základě podmínky super–aditivity lze vidět, že hráči budou vždy chtít utvořit koalici složenou se všech přítomných hráčů (velká koalice). Jediným místem vyjednávání v těchto NTU–hrách je volba výplatního vektoru z množiny určeného výplatní funkcí pro velkou koalici. Pokud jsou hráči racionální, pak žádný z nich nepřijme výplatní vektor, který by mu poskytoval menší zisk, než by mohl získat v jiné koalici. Množina všech výplatních vektorů koalice, které jsou ochotni všichni její racionální členové přijmout se nazývá jádro hry. Také je potřeba určit nejspravedlivější výplatní vektor, který bere v úvahu přínos každého člena do koalice, tento vektor udává Shapleyho [3] hodnota.

Mezi dvě nejznámější podtřídy NTU–her patří dvouhráčové kooperativní hry s vyjednávání, pro které existuje Nashovo řešení [2], druhou podtřídou jsou pak kooperativní hry s přenositelným užitkem (TU–games). TU–hry přiřazují každé koalici libovolně dělitelnou komoditu (touto komoditou mohou bít například peníze), která je "spravedlivě" distribuována mezi členy koalice. Oproti tomu NTU–hry simulují situaci, ve které existuje pouze množina nedělitelných komodit (například zboží ve směnné ekonomice), které jsou přerozděleny mezi členy koalice.

Z důvodu vysoké podobnosti mezi TU a NTU hrami jsou v sekci 2 uvedeny základní definice spojené s řešením TU–her.

Sekce 3 obsahuje definici n-hráčové kooperativní hry s nepřenositelným užitkem.

Definice jádra NTU–hry udávajícího pro každou koalici všechny racionální výplatní vektory je uvedena v kapitole 4.

V poslední sekci 5 je uveden postup výpočtu Shapleyho hodnoty, jinak také zvané $\lambda$–přenosová NTU–hodnota.

## 2. TU–hry

Tato kapitola poskytuje základní definice a pojmy spojené TU–hrami. V pozdějších částech práce budou tyto definice využívány při popisu NTU–her a jejich řešení. Text této kapitoly je převzata z [1].

### 2.1 TU–hra

***Hra s přenositelným užitkem*** je dvojice $\Gamma = (Q, v)$, kde $Q$ je množina všech hráčů a $v : 2^Q \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce udávající sílu koalice (množství prostředků k přerozdělení mezi členy koalice). Platí, že $v(\emptyset) = 0$.

Množinu všech TU–her budeme označovat $G^Q$. Koalici $K = Q$ budeme nazývat *velkou koalicí*.

Jak bylo již dříve zmíněno, budeme uvažovat pouze hry se super–aditivitou. Hra $\Gamma \in G^Q$ je *super–aditivní*, pokud pro každé dvě disjunktní koalice $K$ a $L$ platí $v(K \cup L) \geq v(K) + v(L)$.

Pro vyjádření rozdělení zisku $v(K)$ v koalici $K$ zavedeme *výplatní vektor* $a$, kde $a(K) = \sum_{i \in K} a_i$. Ve hrách budeme pracovat pouze s *prostorem efektivních zisků* $X^*(v) = \{a \in \mathbb{R}^{|Q|} \,|\, a(Q) = v(Q)\}$.

### 2.2 Imputace v TU–hře

Výplatní vektor $a \in X^*(v)$ je ***individuálně racio-nální***, pokud pro všechny hráče $i \in Q$ platí $a_i \geq v(i)$. Tedy žádný hráč nesmí v koalici dostat méně, než, kdyby byl v jednočlenné koalici (sám).

Výplatní vektor $a \in X^*(v)$ je ***kolektivně racionální***, pokud $\sum_{i \in Q} a_i = v(Q)$. Tedy každá koalice musí rozdat všechny "zdroje".

Nechť $\Gamma = (Q, v)$ je TU–hra, kde $N = |Q|$, potom je N-tice $a \in X^*$ ***imputace***, pokud jsou pro $a$ splněny podmínky individuální a kolektivní racionality. Prostor všech imputací hry budeme značit $X(v)$.

Mějme TU–hru $\Gamma = (Q, v)$, koalici $K \subseteq Q$ a dvě imputace $a, b$. Řekneme, že $a$ ***dominuje*** $b$ pro koalici $K$ (značíme $a \succ_K b$), pokud platí $\forall i \in K : a_i > b_i$ a zároveň $\sum_{i \in K} a_i \leq v(K)$.

### 2.3 Jádro TU–hry

***Jádro hry*** $\Gamma = (Q, v) \in G^Q$ je tvořeno množinou imputací $C(v) = \{a \in X(v) \,|\, \sum_{i \in S} \geq v(S); \forall S \in 2^Q \setminus \emptyset\}$. Jedná se o takovou množinu imputací, že každá případná koalice $S$ obdrží alespoň $v(S)$. Pro každou imputaci v jádře platí, že není domnivana žádnou jinou imputací.

Pokud je jádro prázdní, pak neexistuje stabilní kooperativní řešení, které by ustanovilo velkou koalici.

### 2.4 Shapleyho hodnota v TU–hře

***Shapleyho hodnota*** [3] $H_i$ modeluje přínos hráče $i \in Q$ do velké koalice $Q$. Na základě velikosti přínosu jednotlivých hráčů volí takovou imputaci, která spravedlivě přiděluje zisky jednotlivým hráčům z $K$.

Při neúčasti hráče $i$ v koalici $K$ je ztráta způsobena koalici $K$ rovna $\delta(i, K) = v(K) - v(K \setminus \{i\})$.

Přínos hráče $i$ do všech $k$-členných koalic je:

$$h_i(k) = \sum_{K \subset Q, k=|K|, i \in K} \frac{\delta(i, K)}{\binom{N-1}{k-1}}$$

Průměrný přínos hráče $i$ do všech možných koalic velikosti 1 až $|Q|$ je:

$$H_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{h_i(k)}{N}$$

Mějme hru $N$ hráčů $\Gamma = (Q, v)$, pak je ***Shapleyho vektor*** této hry definován jako $\mathbb{H} = (H_1, H_2, \ldots, H_N)$. Pro Shapleyho vektor platí, že je imputací hry.

## 3. NTU–hra

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## 4. Jádro v NTU–hře

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## 5. Shapleyho hodnota v NTU–hře

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## 6. Závěr

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## Literatura


[1] HRUBÝ, M. *Teorie her: Kooperativní hry a vyjednávání*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií, Nov 2022. Dostupné z: http://www.fit.vutbr.cz/~hrubym/THE/6-kooperativni-hry-bargaining.pdf.

[2] NASH, J. F. The Bargaining Problem. *Econometrica*. [Wiley, Econometric Society]. 1950, roč. 18, č. 2, s. 155–162. Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/1907266. ISSN 00129682, 14680262.

[3] SHAPLEY, L. (1969). Utility comparison and the theory of games. *La Decision: Aggregation et Dynamique des Ordres de Preference*. 1969.