VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

http://fit.vut.cz

Teorie her 2022/2023

Hry s nepřenositelným užitkem

Bc. Michal Šedý

Abstrakt
Tato práce popisuje hry z nepřenositelným užitkem (NTU–games), převody nekooperativních her na NTU–hry a mechanizmy popisující jejich analýzu, jakými jsou jádro hry a Shapleyho NTU–hodnota. Následující text pracuje se superaditivními hrami, pro které platí, že zisk dvou disjunktních koalic je vždy menši, nebo roven ziku, kterého by dosáhla jedna velká koalice sestávající ze členů techto dvou menších koalic. Speciální podmnožinou NTU her jsou hry s přenositelným užitkem (TU–games), kde zatímco TU hry rozdělují mezi hráče libovolně dělitelnou komoditu (bez ztráty na obecnosti si lze tuto komoditu představit jako peníze), tak v případě NTU her si hráči rozdělují množinu nedělitelných komodit. Jedním z příkladu NTU her je směnná ekonomika, ve které hráči utvářejí koalice a redistribuují své počáteční vklady (nejedná se pouze o peníze) za účelem zisku.

Klíčová slova: kooperativní hry — hry s přenositelným užitkem — hry s nepřenositelným užitkem — jádro hry — Shapleyho hodnota

xsedym02@stud.fit.vutbr.cz, *Fakulta informačních technologií, Vysoké učení technické v Brně*

1. Úvod

Kooperativní teorie her se zabývá hrami se dvěma a více hráči, jejichž spolupráce (dohodnuti vymahatelné strategie) může vést k lepším ziskům hráčů ze hry, než kdyby hra proběhla nekooperativně. Žádný hráč by neměl obdržet menší zisk, než by mu přineslo odmítnutí spolupráce. V takovém případě by se již nejednalo o kooperativní hru.

Cílem této práce je popis kooperativní hry s nepřenositelným užitkem (NTU–game) [6, 9, 2], pro kterou je stano-vena množina hráčů, kteří spolu tvoří koalice, a výplatní funkce, která každé koalici přiřazuje množinu možných výplatních vektorů. Budeme pracovat pouze se super–aditivními NTU hrami, pro které platí, že je součet užitků dvou disjunktních koalic menší, nebo roven užitku větší koalice vzniklé sloučením techto dvou menších koalicí. Vyjednávání o utváření koalic lze tedy zanedbat, protože na základě podmínky super–aditivity lze vidět, že hráči budou vždy chtít utvořit koalici složenou se všech přítomných hráčů (velká koalice). Jediným místem vyjednávání v těchto NTU–hrách je volba výplatního vektoru z množiny určeného výplatní funkcí pro velkou koalici. Pokud jsou hráči racionální, pak žádný z nich nepřijme výplatní vektor, který by mu poskytoval menší zisk, než by mohl získat v jiné koalici. Množina všech výplatních vektorů koalice, které jsou ochotni všichni její racionální členové přijmout se nazývá jádro hry. Také je potřeba určit nejspravedlivější výplatní vektor, který bere v úvahu přínos každého člena do koalice, tento vektor udává Shapleyho [8] hodnota.

Mezi dvě nejznámější podtřídy NTU–her patří dvouhráčové kooperativní hry s vyjednávání [9], pro které existuje Nashovo řešení [5], druhou podtřídou jsou pak kooperativní hry s přenositelným užitkem (TU–games) [9, 2]. TU–hry přiřazují každé koalici libovolně dělitelnou komoditu (touto komoditou mohou být například peníze), která je "spravedlivě" distribuována mezi členy koalice. Oproti tomu NTU–hry simulují situaci, ve které existuje pouze množina nedělitelných komodit (například zboží ve směnné ekonomice), které jsou přerozděleny mezi členy koalice.

Z důvodu vysoké podobnosti mezi TU a NTU hrami jsou v sekci 2 uvedeny základní definice spojené s řešením TU–her.

Sekce 3 obsahuje definici n-hráčové kooperativní hry s nepřenositelným užitkem, dále sekce uvádí principy převodu nekooperativních strategických her v normální formě [4], dvouhráčové kooperativní hry s vyjednávání, TU–hru a veřejnou volbu na NTU–hru.

Současně je také uveden opačný převod NTU–hry na nekooperativních strategickou hru v normální formě.

Definice jádra NTU–hry udávajícího pro každou koalici všechny racionální výplatní vektory je uvedena v kapitole 4.

V poslední sekci 5 je popsána Shapleyho NTU–hodnota (jinak také zvané λ–přenosová NTU–hodnota), která specifikuje spravedlivý výplatní vektor.

2. TU–hry

Tato sekce poskytuje základní definice a pojmy spojené TU–hrami. V pozdějších částech práce budou tyto definice využívány při popisu NTU–her a jejich řešení. Text této kapitoly je převzata z [3].

2.1 Hra s přenositelným užitkem

Hra s přenositelným užitkem je dvojice $\Gamma = (Q, v)$, kde Q je množina všech hráčů a $v : 2^Q \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce udávající sílu koalice (množství prostředků k přerozdělení mezi členy koalice). Platí, že $v(\emptyset) = 0$.

Množinu všech TU–her budeme označovat G^Q. Koalici $K = Q$ budeme nazývat *velkou koalicí*.

Jak bylo již dříve zmíněno, budeme uvažovat pouze hry se super–aditivitou. Hra $\Gamma \in G^Q$ je *super–aditivní*, pokud pro každé dvě disjunktní koalice K a L platí $v(K \cup L) \geq v(K) + v(L)$.

Pro vyjádření rozdělení zisku $v(K)$ v koalici K zavedeme *výplatní vektor* a, kde $a(K) = \sum_{i \in K} a_i$. Ve hrách budeme pracovat pouze s *prostorem efektivních zisků* $X^*(v) = \{a \in \mathbb{R}^{|Q|} \,|\, a(Q) = v(Q)\}$.

2.2 Imputace v TU–hře

Výplatní vektor $a \in X^*(v)$ je ***individuálně racio-nální***, pokud pro všechny hráče $i \in Q$ platí $a_i \geq v(i)$. Tedy žádný hráč nesmí v koalici dostat méně, než, kdyby byl v jednočlenné koalici (sám).

Výplatní vektor $a \in X^*(v)$ je ***kolektivně racionální***, pokud $\sum_{i \in Q} a_i = v(Q)$. Tedy každá koalice musí rozdat všechny "zdroje".

Nechť $\Gamma = (Q, v)$ je TU–hra, kde $N = |Q|$, potom je N-tice $a \in X^*$ ***imputace***, pokud jsou pro a splněny podmínky individuální a kolektivní racionality. Prostor všech imputací hry budeme značit $X(v)$.

Mějme TU–hru $\Gamma = (Q, v)$, koalici $K \subseteq Q$ a dvě imputace a, b. Řekneme, že a ***dominuje*** b pro koalici K (značíme $a \succ_K b$), pokud platí $\forall i \in K : a_i > b_i$ a zároveň $\sum_{i \in K} a_i \leq v(K)$.

2.3 Jádro TU–hry

Jádro hry $\Gamma = (Q, v) \in G^Q$ je tvořeno množinou imputací $C(v) = \{a \in X(v) \,|\, \sum_{i \in S} \geq v(S); \forall S \in 2^Q \setminus \emptyset\}$. Jedná se o takovou množinu imputací, že každá případná koalice S obdrží alespoň $v(S)$. Pro každou imputaci v jádře platí, že není domnivana žádnou jinou imputací.

Pokud je jádro prázdní, pak neexistuje stabilní kooperativní řešení, které by ustanovilo velkou koalici.

2.4 Shapleyho hodnota v TU–hře

Shapleyho hodnota [7] H_i modeluje přínos hráče $i \in Q$ do velké koalice Q. Na základě velikosti přínosu jednotlivých hráčů volí takovou imputaci, která spravedlivě přiděluje zisky jednotlivým hráčům z K.

Při neúčasti hráče i v koalici K je ztráta způsobena koalici K rovna $\delta(i, K) = v(K) - v(K \setminus \{i\})$.

Přínos hráče i do všech k-členných koalic je:

$$h_i(k) = \sum_{K \subset Q, k=|K|, i \in K} \frac{\delta(i, K)}{\binom{N-1}{k-1}}$$

Průměrný přínos hráče i do všech možných koalic velikosti 1 až $|Q|$ je:

$$H_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{h_i(k)}{N}$$

Mějme hru N hráčů $\Gamma = (Q, v)$, pak je ***Shapleyho vektor*** této hry definován jako $\phi(Q, v) = \mathbb{H} = (H_1, H_2, \ldots, H_N)$. Pro Shapleyho vektor platí, že je imputací hry.

3. NTU–hra

Hry s nepřenositelným užitkem [6, 9, 2] (NTU–games) neumožňují hráčům v koalici libovolně přerozdělit zisk určený pro celou koalici, jak je tomu u TU–her. Namísto toho je charakteristickou funkcí určena množina výplatních vektorů pro koalici. Účastnici koalice si tedy mohou volit pouze s poskytnutých výplatních vektoru.

Protože se v následujících sekcích bude hojně pracovat s výplatními vektory, připomeneme definice základních vektorových operací, které budou používány. Pro porovnávání dvou vektorů $x, y \in \mathbb{R}^n$ používáme binární operátory $\geqslant, \leqslant, \ll, \gg$, kde $x \leqslant y \iff \forall 1 \leq i \leq n : x_i \leq y_i$. Ostatní operátory jsou definovány obdobně. Skalární součin dvou vektorů $x, y \in \mathbb{R}^n$ je značen $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$. Výsledkem vektorového součinu dvou vektorů $x, y \in \mathbb{R}^n$ je opět vektor stejné dimenze a je značen $xy = (x_i \cdot y_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$.

3.1 Hra s nepřenositelným užitkem

Hra s nepřenositelným užitkem je dvojice $\Gamma = (Q, V)$, kde Q je množina hráčů, který tvoří koalice $K \in Q$ a V je charakteristická funkce tvaru $V : 2^Q \to \mathbb{R}^{|Q|}$. Pro libovolnou kalici $K \in Q$ odpovídá množina $V(K)$ následujícím axiomům:

(A1) $V(K) \neq \emptyset \iff K \neq \emptyset$,
(A2) uzavřená,
(A3) konvexní,
(A4) pokud pro $x \in V(K)$ a $y \in \mathbb{R}^{|Q|}$ platí $x \geqslant y$, pak $y \in V(K)$,
(A5) shora omezená (pro každé $a \in \mathbb{R}^{|Q|}$ je množina $\{a \in V(K) \,|\, y \geqslant x\}$ kompaktní),
(A6) v každém bodě z hranice $\partial V(K)$ podpornou rovinu,
(A7) $\forall x, y \in \partial V(K) : x \geqslant y \implies x = y$.

V této práci se zabýváme pouze super–aditivními hrami. NTU–hra $\Gamma = (Q, V)$ je *super–aditivní*, pokud pro každou dvojici koalic $K, L \in 2^Q \setminus \{\emptyset\}$, kde $K \cap L = \emptyset$, platí $V(K) \times V(L) \subset V(K \cup L)$.

3.2 Převod jiných her na NTU–hru

Tato část práce ukazuje postupy, jak lze převést vyjednávají hry dvou hráčů, TU–hry nebo veřejnou volbu na NTU–hru NTU–hru.

Strategická hra n hráčů

Strategická hra n hráčů [4] N hráčů je trojice $\Gamma_S = (Q, (S_i)_{i \in Q}, (U_i)_{i \in Q})$, kde:

- $Q = 1, \ldots, N$ je množina hráčů,
- S_i je množina strategií hráče $i \in Q$,
- $U_i : \prod_{j \in Q} S_j \to \mathbb{R}$ je výplatní funkce hráče $i \in Q$.

Pro množinu hráčů $P \supseteq Q$ budeme S_P označovat $\prod_{i \in Q} S_i$. Doplněk S_P budeme označovat $S_{-P} = S_{Q \setminus P}$.

Nechť $\alpha(K \subseteq Q) = \{x \in \mathbb{R}^{|Q|} \,|\, \exists a \in K : x \leqslant a\}$.

Mějme strategickou hru $\Gamma_S = (Q, (S_i)_{i \in Q}, (U_i)_{i \in Q})$. Tuto hru lze převést na ekvivalentní NTU–hru $\Gamma_N = (P, V)$, kde:

- $P = Q$,
- $$V(K) = \begin{cases} \alpha(\{(U_i(s))_{i \in P} \,|\, s \in S_P\}) & K = P \\ \emptyset & K = \emptyset \\ \{a \in \mathbb{R}^{|P|} \,|\, \exists s_K \in S_K \forall s_{-K} \in S_{-K} \\ \qquad \forall i \in K : U_i(s_K, s_{-K}) \geq a_i\} & \\ & \textit{jinak} \end{cases}$$

Kooperativní hry s vyjednáváním

Kooperativní hra dvou hráčů A a B s vyjednáváním [3] je dvojice $\Gamma_B = (\Omega, c)$, kde Ω je množina všech dosažitelných výsledků a $c = (c_A, c_B)$ je výsledek, kterého by hráči dosáhli, pokud by se hra odehrala nekooperativně. Existuje funkce F modelující Nashovo vyjednávací řešení. Je definována tak, že: $F(\Omega, c) = argmax_{u_A, u_B}\{(u_A - c_A)(u_B - c_B \,|\, (u_A, u_B) \in \Omega \wedge u_A \geq c_A \wedge u_B \geq c_B)\}$.

Dvouhráčovou hru s vyjednáváním $\Gamma_B = (\Omega, c)$ s funkcí F modelující Nashovo vyjednávací řešení lze převést na NTU–hru $\Gamma_N = (Q, V)$, kde:

- $Q = \{A, B\}$,
- $$V(K) = \begin{cases} (-\infty, c_A\rangle & K = \{A\} \\ (-\infty, c_B\rangle) & K = \{B\} \\ F & K = \{A, B\} \end{cases}$$

Veřejná volba

Převod veřejné volby na NTU–hru uvedeme na příkladě [9, str. 120]. Mejme veřejnou volbu hráčů $1, 2, 3$ mezi alternativami a_1, a_2. Jejich váhy jejich preferenci se různí a jsou určeny tabulkou:

	a_1	a_2
1	5	1
2	2	3
3	4	3

Nechť $\alpha(K \subseteq Q) = \{x \in \mathbb{R}^{|Q|} \,|\, \exists a \in K : x \leqslant a\}$. Tento příklad veřejné volby odpovídá tříhráčové NTU–hře $\Gamma = (Q, V)$, kde:

- $Q = \{1, 2, 3\}$
- $$V(K) = \begin{cases} (-\infty, 1\rangle & K = \{1\} \\ (-\infty, 2\rangle & K = \{2\} \\ (-\infty, 3\rangle & K = \{2\} \\ \alpha(\{(5,2),(1,3)\}) & K = \{1,2\} \\ \alpha(\{(5,4),(1,3)\}) & K = \{1,3\} \\ \alpha(\{(2,4),(3,3)\}) & K = \{2,3\} \\ \alpha(\{(5,2,4),(1,3,3)\}) & K = \{1,2,3\} \end{cases}$$

TU–hry

Jak již bylo dříve řečeno, tak TU–hry jsou pouhou podmnožinou NTU–her, tedy lze každou TU–hru převést na ekvivalentní NTU–hru.

Ke každé TU–hře $\Gamma_T = (Q_T, v_T)$ existuje ekvivalentní NTU–hra $\Gamma_N = (Q_N, V_N)$, kde:

- $Q_N = Q_T$
- $$V_N(S) = \begin{cases} \emptyset, & S = \emptyset \\ \{a \in \mathbb{R}^{|Q|} \,|\, \sum_{i \in S} x_i \leq v_T(S)\}, & \textit{jinak} \end{cases}$$

Platí, že pokud je TU–hra super–aditivní, pak je i její ekvivalentní NTU–hra super–aditivní.

3.3 Převod NTU–her na strategické hry

V předchozí části jsme ukázali způsob převodu nekooperativní strategické hry v normální formě na ekvivalentní NTU–hru. V této podsekci je popisován opačný převod [1], kterým je převod NTU–hry na strategickou.

Mějme danou NTU–hru $\Gamma_N = (Q,V)$. Tuto hru lze převést na ekvivalentní strategickou hru (*claim game*) $\Gamma_S = (Q,(S_i)_{i\in Q},(U_i)_{i\in Q})$. Pro každého hráče $i \in Q$ je množina strategií $S_i = P_i \times \mathbb{R}$, pro $P_i = \{K \in 2^Q \,|\, i \in K\}$. Výplatní funkce U_i je definována následovně: $U_i((K_1,t_1),\dots,(K_n,t_n)) = t_i$ pokud $(t_j)_{j\in K_i} \in V(K_i) \wedge \forall j \in K_i : K_i = K_j$, v opačném případě je $U_i((K_1,t_1),\dots,(K_n,t_n)) = min\{t_i, v(i) := max\{V(\{i\})\}\}$.

Strategii $(K_i,t_i) \in P_i \times \mathbb{R}$ hráče $i \in Q$ leze chápat jako přání na zformování koalice K_i se ziskem t_i. Pokud takové přání mají všichni ostatní členové $j \in K_i$ s výplatami $(t_j)_{j\in K_i}$, pak hráči zformují koalici K_i a hráč $i \in Q$ získá t_i. V opačném případě dosáhne hráč i při koalici K_i na zisk $v(i)$, nebo t_i, pokud je $t_i < v(i)$.

4. Jádro v NTU–hře

Tato sekce uvádí definici a základní vlastnosti jádra NTU–her, které ze zobecněním jádra TU–her. Jádro NTU–her je pochopitelně z důvodu nepřenositelnosti užitku obtížnější pro analýzu.

4.1 Pareto optimalita a Individuální racionalita

Nechť je $\Gamma = (Q,V)$ NTU–hra, $K \subseteq Q : K \neq \emptyset$ koalice a $x,y \in \mathbb{R}^{|Q|}$ dva výplatní vektory. Říkáme, že y *dominuje nad* x *pro koalici* K pokud $y \in V(S)$ a $y \gg x$. Výplatní vektor y *dominuje nad* x, pokud existuje koalice $L \subseteq Q : L \neq \emptyset$, taková, že y dominuje nad x pro koalici L.

Mějme NTU–hru $\Gamma = (Q,V)$, potom je ***množina Pareto efektivních*** výplatních vektorů pro koalici $N \in Q$ dána množinou $V(N)_e = \{a \in V(N) \,|\, \forall x \in V(N) \exists i \in Q : a_i \geq x_i\}$. Připomeňme, že množina $V(N)_e$ tvoří hranici množiny $V(N)$. Tato vlastnost vyplývá z axiomů A2 a A4.

Maximální individuální zisk hráče $i \in Q$ je maximum ze všech jeho zisků, kterých dosáhne, pokud se nezúčastní žádné koalice. Toto maximum budeme označovat v^i a je definováno jako $v^i = max\{a_i \,|\, a \in V(i)\}$.

Pro hru $\Gamma = (Q,V)$ je výplatní vektor a *Individuálně racionální*, pokud $x_i \geq v^i$ pro všechny hráče $i \in Q$. ***Množina Individuálně racionálních*** výplatních vektorů pro koalici $N \in Q$ je pak dán množinou $V_{ir}(N) = \{a \in V(N) \,|\, a \text{ je individuálně racionální}\}$.

4.2 Jádro hry

Jednou s hlavních důležitých otázek při analýze her s nepřenositelným užitkem je neprázdnost jádra. Pokud je jádro hry prázdné, pak neexistuje kooperativní řešení.

Nechť je $\Gamma = (Q,V)$ NTU–hra a $A \subseteq \mathbb{R}^{|Q|}$ podmnožina výplatních vektorů. ***Jádro hry*** Γ ***s ohledem na*** A je taková množina $C(Q,V,A) \subseteq A$, že pro každý výplatní vektor $a \in C(Q,V,A)$ platí, že není dominován žádným jiným vektorem z A.

Jádro hry $\Gamma = (Q,V)$ je množina výplatních vektorů $C(Q,V) \subseteq V(Q)$, pro které platí, že nejsou dominovány žádným jiným výplatním vektorem.

Pro každou super–aditivní NTU–hru $\Gamma = (Q,V)$ platí, že $C(Q,V) = C(Q,V,V_e(Q)) = C(Q,V,V_ir(Q)) = C(Q,V,V_e(Q) \cap C_{ir}(Q))$.

Následující příklad popisuje jádro v tří hráčové NTU–hře $\Gamma = (Q,V)$, kde:

- $Q = 1,2,3$
- $V(K) = \begin{cases} \{a \in \mathbb{R}^{|Q|} \,|\, a \leqslant (0.5,0.5,0)\} & K = Q \\ \{a \in \mathbb{R}^{|Q|} \,|\, a_1 + a_2 \leq 1\} & K = \{1,2\} \\ \{a \in \mathbb{R}^{|Q|} \,|\, \forall i \in K : x_i \leq 0\} & K \subset Q \end{cases}$

Pro výše uvedený příklad tří hráčové NTU–hry je jádro $C(Q,V) = \{(0.5,0.5,0)\}$.

5. Shapleyho hodnota v NTU–hře

V TU–hrách umožňuje Shapleyho hodnota [7] určit takové rozdělení zisku (výplatní vektor) koalice pro její jednotlivé účastníky tak, aby zisk pro každého hráče odrážel jeho přínos do koalice. Tento přístup zobecnil Shapley také pro NTU–hry [8]. V NTU–hrách je na základě Shapleyho NTU–hodnoty (známá také jako λ–přenosová NTU–hodnota) pro koalici K zvolen "spravedlivý" výplatní vektor z množiny $V(K)$.

5.1 Shapleyho NTU–hodnota

Mějme danou NTU–hru (Q,V) a nechť $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{R}^{|Q|} \,|\, \sum_{i\in Q} \lambda_i = 1\}$ je *množina váhových vektorů*. Pro každé $\lambda \in \Delta$ je definována mapovací funkce $v_\lambda : 2^Q \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ následovně: $v_\lambda(K) = \{\lambda^K \cdot x^K \,|\, x \in V(S)\}$ pro $K \subseteq 2^Q \setminus \{\emptyset\}$ a $v(\emptyset) = 0$. Váhový vektor $\lambda \in \Delta$ je *proveditelný*, pokud pro každou koalici $K \subseteq Q$ platí $v_\lambda(K) \in \mathbb{R}$.

Pro hru $\Gamma = (Q,V)$ je ***Shapleyho NTU–hodnota*** vektor $a_{SH} \in V(Q)$, pokud existuje proveditelný váhový vektor $\lambda \in \Delta$ takový, že $\phi(Q,v_\lambda) = \lambda a_{SH}$. Množina všech Shapleyho NTU–hodnot je $SH(Q,V)$ (hra může mít více Shapleyho NTU–hodnot).

Spravedlivým výplatním vektorem a pro koalici Q je takový, jehož vektorový součin s proveditelným váhovým vektorem se rovná Shapleyho hodnotě pro TU–hru, specifikovanou charakteristickou funkcí v_λ.

Mějme kooperativní vyjednávací hru $\Gamma_B = (\Omega, c)$ a ji odpovídající NTU–hru $\Gamma_N = (Q,V)$, pak platí, že $HS(Q,V) = \{F(\Gamma,c)\}$.

Nechť je $\Gamma_T = (Q,v_T)$ TU–hra a $\Gamma_N = (Q,V_N)$ ji odpovídající NTU–hra, pak platí, že $HS(Q,V_N) = \{\phi(Q,v_T)\}$.

Pokud hra (Q,V) má následující vlastnosti: Pro každou koalici $L \in 2^Q \setminus \{\emptyset\}$ existuje konvexní kompaktní množina $C(L) \in \mathbb{R}^{|Q|}$ a konvexní kužel $K(L) \in \mathbb{R}^{|Q|}$ takový, že:

- $V(L) = C(L) + K(L)$,
- $K(Q) \supseteq K(L) \times \{0^{Q \setminus L}\}$,
- $\forall x, y \in \partial V(Q) : x \geqslant y \implies x = y$,

pak pro hru Γ existuje Shapleyho NTU–hodnota.

5.2 Axiomy Shapleyho NTU–hodnoty

Mějme NTU–hry $\Gamma_U = (Q,U), \Gamma_V = (Q,V)$ a $\Gamma_W = (Q,W)$. Pro Shapleyho NTU–hodnoty platí následující axiomy.

A8: Pareto efektivita

Platí $SH(Q,V) \subseteq \partial V$. Tedy každý výplatní vektor $a \in SH(Q,V)$ splňuje Pareto efektivitu pro všechny $S \subseteq Q$ podle A4.

A9: Měřítková kovariance

Platí $SH(Q,\lambda V) = \lambda SH(Q,V)$ pro všechny vektory $\lambda \in \mathbb{R}_+^{|Q|}$. Tedy výsledek hry s výplatními vektory vynásobenými libovolným vektorem λ jsou totožné s výsledky původní hry vynásobenými tímto vektorem.

A10: Podmíněná aditivita

Pokud $U = V + W$, potom platí $SH(U) \supseteq (SH(V) + SH(W)) \cap \partial U$. Tedy nechť jsou $x \in SH(V)$ a $y \in SH(V)$ řešením her Γ_V a Γ_W, potom pokud je $z = x + y$ pareto efektivní pro U, pak je z řešením hry Γ_U ($z \in SH(U)$).

A11: Nezávislost na irelevantních alternativách

Pokud $V(Q) \subseteq W(Q)$ a $V(K) = W(K)$ pro všechny $K \subsetneqq Q$, potom $HS(V) \supseteq HS(V) \cap V(Q)$. Tedy pokud je $a \in HS(W)$ řešením ve hře Γ_W a hra Γ_W je podhrou Γ_V, pak je a také řešením pro Γ_V

A12: Unanimity–hra

Pro každou koalici $K \in 2^Q \setminus \{\emptyset\}$ a každé reálné číslo $c \in \mathbb{R}$ je definována NTU unanimity–hra na koalici K jako $\Gamma_{UN}^K = (Q_{UN}, V_{UN})$, kde:

- $Q_{UN} = Q$
- $V_{UN}(L) = \begin{cases} \{a \in \mathbb{R}^{|Q_{UN}|} \mid a(L) \leq 1\}, Q \supseteq L \supseteq K \\ \{a \in \mathbb{R}^{|Q_{UN}|} \mid a(L) \leq 1\}, Q \neq L \nsubseteq K \end{cases}$

Mějme výplatní vektor $z \in \mathbb{R}^{|Q|}$, kde $z_i = c/|K|$, pokud $i \in K$, jinak $z_i = 0$. Potom platí, že $SH(\Gamma_{UN}^K) = \{z\}$.

6. Závěr

V této práci byly popsána struktura kooperativní hry s nepřenositelným užitkem, která je tvořena množinou hráčů a charakteristickou funkcí, která pro každou koalici poskytuje množinu možných výplatních vektorů.

Hra s přenositelným užitkem je speciální podtřídou NTU–her, proto ji lze na NTU–hru převést. Tento převod společně s převody ostatních her na NTU–hru byl uveden v sekci 3.

Podstatnou vlastností NUT–hry je její jádro, které obsahuje pareto efektivní a individuálně racionální výplatní vektory. Právě analýzou jádra lze určit, zda zadaná hra má kooperativní řešení (jádro je neprazdne), nebo žádné takové řešení neexistuje (jádro je prázdné) a hra se odehraje nekooperativně.

Posledním popisovaným konceptem pro analýzu NTU–her byla Shapleyho NTU–hodnota, která určuje "spravedlivé" výplatní vektory pro koalici, s ohledem na hráčův přínos koalici (respektive ztrátu způsobenou při vystoupení hráče z koalice).

Literatura

[1] BORM, P. a TIJS, S. Strategic claim games corresponding to an NTU-game. *Games and Economic Behavior*. 1992, roč. 4, č. 1, s. 58–71. Dostupné z: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/089982569290005D. ISSN 0899-8256.

[2] DERIGS, U. *OPTIMIZATION AND OPERATIONS RESEARCH – Volume III*. EOLSS Publications, 2009. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=82J8DAAAQBAJ. ISBN 9781905839506.

[3] HRUBÝ, M. *Teorie her: Kooperativní hry a vyjednávání*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií, Nov 2022. Dostupné z: http://www.fit.vutbr.cz/~hrubym/THE/6-kooperativni-hry-bargaining.pdf.

[4] HRUBÝ, M. *Teorie her: Nekooperativní hry v normální formě*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií, Nov 2022. Dostupné z: http://www.fit.vutbr.cz/~hrubym/THE/2-normal-form-games.pdf.

[5] NASH, J. F. The Bargaining Problem. *Econometrica*. [Wiley, Econometric Society]. 1950, roč. 18, č. 2, s. 155–162. Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/1907266. ISSN 00129682, 14680262.

[6] PELEG, B. a SUDHÖLTER, P. *Introduction to the Theory of Cooperative Games*. Springer, December 2007. Theory and Decision Library C, 978-3-540-72945-7. ISBN ARRAY(0x3b9de710).

[7] SHAPLEY, L. S. 17. A Value for n-Person Games. In: KUHN, H. W. a TUCKER, A. W., ed. *Contributions to the Theory of Games (AM-28), Volume II*. Princeton: Princeton University Press, 1953, s. 307–318. Dostupné z: https://doi.org/10.1515/9781400881970-018. ISBN 9781400881970.

[8] SHAPLEY, L. (1969). Utility comparison and the theory of games. *La Decision: Aggregation et Dynamique des Ordres de Preference*. 1969.

[9] TIJS, S. *Introduction to Game Theory*. Hindustan Book Agency, 2011. Texts and readings in mathematics. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=6-zZnQEACAAJ. ISBN 9789380250243.