Complexity / Složitost (SLOa) – 2021/2022
Homework assignment 2

1. Let the problem $MOD-SUBSETSUM$ is defined as follows: The input is a finite set of items S, a weight function $v : S \to \mathbb{N}$, and a numbers $k, m \in \mathbb{N}$ such that $k < m$. The problem asks whether there exists a set A such that:

   $$\left(\sum_{i \in A} v(i)\right) mod\ m = k$$

   Prove that $MOD - SUBSETSUM$ is $\mathbf{NP}$-complete.
   Do not forget that proof of NP completeness consists from two parts.

   3.5 points

2. Let $L_t = \{0\}$ be a languages over the alphabet $\{0, 1\}$.

   Prove (provide a ground ideas of the proof) the following statement: $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \implies L_t$ is $\mathbf{NP}$-complete.
   Hint: realize how the reduction and NP-completeness is defined.

   2 points

3. Give reason why from statement in point 3 follows: $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \implies$ each language $L \in \mathbf{NP}$ is $\mathbf{NP}$-complete[1].

   1 point

4. Let us consider the $GRAPH\_COLORING$ problem defined in slides (serie no. 5).

   Let us define optimization problem $OPT\_GRAPH\_COLORING$ as follows: For a graph $G = (V, E)$ and a finite set of colors C, a feasible solution is any mapping set $A : V \to C$. The cost of the solution is defined as $c(A) = |\{(v_1, v_2) \in E \mid A(v_1) = A(v_2)\}|$—i.e. the number of edges with adjacent vertices colored by an equal color. The optimal solution is the one with a minimal cost. Prove that if $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ then there is no absolute approximation algorithm for $OPT\_GRAPH\_COLORING$.

   3.5 points

The homework can be worked out in English or in Czech.

[1] With an exception of empty and universal language.

Complexity / Složitost (SLOa) – 2021/2022
Domácí úloha 2

1. Mějme problém $MOD - SUBSETSUM$ definovaný následovně: Vstupem je konečná množina položek S, váhová funkce $v : S \to \mathbb{N}$ a přirozená čísla $k, m \in \mathbb{N}$ taková, že $k < m$. Problém se ptá, zda existuje množina A taková, že:
$$\left(\sum_{i \in A} v(i)\right) mod\, m = k$$
Dokažte, že $MOD - SUBSETSUM$ je $\mathbf{NP}$-úplný problém.
Nezapoměňte, že důkaz NP úplnosti se skládá ze dvou částí.

3.5 bodů

2. Mějme jazyk $L_t = \{0\}$ nad abecedou $\{0, 1\}$.
Dokažte (popište základní myšlenky důkazu) následující tvrzení: $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \Longrightarrow L_t$ je $\mathbf{NP}$-úplný.
Nápověda: uvědomte si, jakým způsobem je definován pojem redukce a pojem NP-úplnosti.

2 bodu

3. Zdůvodněte, proč z tvrzení v bodu 3 plyne, že: $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \Longrightarrow$ každý jazyk $L \in \mathbf{NP}$ je $\mathbf{NP}$-úplný[2].

1 bodu

4. Uvažujme problém $GRAPH\_COLORING$ definovaný ve slidech (série č. 5).
Dále defunujme optimalizační problém $OPT\_GRAPH\_COLORING$ následovně: Pro graf $G = (V, E)$ a konečnou množinu barev C, přípustné řešení je libovolná funkce $A : V \to C$. Cena tohoto řešení je definována jako $c(A) = |\{(v_1, v_2) \in E \mid A(v_1) = A(v_2)\}|$—tedy počet hran, jejihž oba vrcholy jsou obarvené stejnou barvou. Optimální řešení je to s minimální cenou. Dokažte, že pokud $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, tak neexistuje absolutní aproximační algoritmus pro problém $OPT\_GRAPH\_COLORING$.

3.5 points

Domácí úlohu můžete vypracovat v Češtině, nebo v Angličtině.

[2] Toto tvrzení neplatí pro prázdný a universální jazyk.