Úkol 2

Příklad 1

Mějme problém $MOD - SUMBSETSUM$ definovaný následovně: Vstupem je konečná množina položek S, váhová funkce $v : S \to \mathbb{N}$ a přirozená čísla $k, m \in \mathbb{N}$ taková, že $k < m$. Problém se ptá, zda existuje množina $A \subseteq S$ taková, že:

$$\left(\sum_{i \in A} v(i)\right) \; mod \; m = k$$

Dokažte, že $MOD - SUMBSETSUM$ je $\mathbf{NP}$–úplný problém.
Nezapomeňte, že důkaz NP–úplnosti se skládá ze dvou částí.

Řešení 1

Důkaz. Definice $\mathbf{NP}$–úplného problému říká: L je $\mathbf{NP}$–úplný, pokud $L \in \mathbf{NP}$ a zároveň existuje známý $\mathbf{NP}$–úplný problém L' ($MOD - SUMBSETSUM$), pro který platí $L' \leq_p L$. Proto rozdělíme důkaz na dvě části. V první ukážeme, že $MOD - SUMBSETSUM \in \mathbf{NP}$ a v druhé, že $SUMBSETSUM$ lze polynomiálně redukovat na $MOD - SUMBSETSUM$.

Důkaz náležitosti do $\mathbf{NP}$:

Uvažujme vícepáskový nedeterministický turingův stroj M, který rozhoduje $MOD - SUMBSETSUM$ v polynomiálním čase. Vstupní páska stroje má tvar $\triangle\langle S\rangle\#\langle v\rangle\#\langle m\rangle\#\langle k\rangle\triangle\triangle^{\omega}$, kde $\langle S\rangle$ je kód množiny S, $\langle v\rangle$ je kód funkce v, $\langle m\rangle$ a $\langle k\rangle$ jsou kódy čísel $m, k \in \mathbb{N}$. Nejprve M zkontroluje validitu vstupní pásky, to dokáže v čase $\mathcal{O}(n)$. Pokud je obsah pásky nevalidní, zamítne, jinak pokračuje. Dále M nedeterministicky vygeneruje množinu $S' \subseteq S$ na druhou pásku, to lze provést v čase $\mathcal{O}(n)$. Na třetí zapíše číselné hodnoty prvků z druhé pásky na základě váhové funkce v, tento přepis lze uskutečnit v čase $\mathcal{O}(n^2)$ (pro každý prvek z S' je potřeba vyhledat jeho cenu v první pásce). M sečte celou třetí pásku a výsledek zapíše na čtvrtou pásku, sčítání provede v čase $\mathcal{O}(n)$. Na pátou pásku zapíše hodnotu uloženou na čtvrté pásce *modulo* m, operaci modulo provede v čase $\mathcal{O}(n^2)$. Pokud se číslo uložené na páté pásce shoduje s k, pak příjme, jinak odmítne. Je vidět, že časová složitost nedeterministického vícepáskového stroje je $\mathcal{O}(n^2)$, tedy $MOD - SUMBSETSUM \in \mathbf{NP}$.

Důkaz $\mathbf{NP}$–těžkosti:

Pro důkaz $\mathbf{NP}$–těžkosti využijeme polynomiální redukci z problému $SUMBSETSUM$, který je $\mathbf{NP}$–úplný. Problém $SUMBSETSUM$ je trojice (S, v, k), kde S je množina položek, $v : S \to \mathbb{N}$ váhová funkce a $k \in \mathbb{N}$. Problém se ptá, zda existuje množina $A \subseteq S$ taková, že:

$$\left(\sum_{i \in A} v(i)\right) = k$$

Polynomiální redukční funkci f definujeme takto:

$$f(\langle S\rangle\#\langle v\rangle\#\langle k\rangle) = \langle S'\rangle\#\langle v'\rangle\#\langle m'\rangle\#\langle k'\rangle$$

Pokud není $\langle S\rangle\#\langle v\rangle\#\langle k\rangle$ korektní instancí $SUMBSETSUM$, pak funkce f vrací řetězec, pro který $S' = \emptyset$, $v' = \emptyset$ $m' = 2$, $k' = 1$. Určitě neexistuje vhodná kombinace elementů (žádné neexistují), aby jejich celková hodnota *mod* 2 byla 1.

Pokud je $\langle S\rangle\#\langle v\rangle\#\langle k\rangle$ korektní instancí $SUMBSETSUM$, funkce f vrací řetězec, pro který:

- $S' = S$
- $v' = v$
- $m' = \left(\sum_{i\in S} v(i)\right) + 1$
- $k' = k$

Víme (z předchozího kroku), že výpočet m' má časovou složitost $\mathcal{O}(n^2)$, tedy funkce f je polynomiální redukční funkcí.

Protože $MOD - SUMBSETSUM \in \mathbf{NP}$ a $SUMBSETSUM \leq_p MOD - SUMBSETSUM$, pak je $MOD- SUMBSETSUM$ $\mathbf{NP}$–úplný. □

Příklad 2

Mějme jazyk $L_t = \{0\}$ nad abecedou $\{0, 1\}$.

Dokažte (popište základní myšlenky důkazu) následující tvrzení $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \implies L_t$ je $\mathbf{NP}$–úplný.
Nápověda: uvědomte si, jakým způsobem je definován pojem redukce a pojem NP–úplnosti.

Řešení 2

Důkaz. Jazyk $L_t \in \mathbf{P}$, protože pro jazyk L_t můžeme sestrojit deterministický turingův stroj, který jej rozhoduje v $\mathcal{O}(1)$. Dále mějme předpoklad $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, pak tedy $L_t \in \mathbf{NP}$. Tímto je splněna jedna ze dvou podmínek pro $\mathbf{NP}$–úplné jazyky. Nyní zbývá dokázat, že každý jazyk $L' \in \mathbf{NP}$ lze na L_t redukovat polynomiální redukcí. Díky předpokladu $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ víme, že pro každý jazyk $L' \in \mathbf{NP}$ platí $L' \in \mathbf{P}$. Polynomiální redukci libovolného jazyka L' provádí funkce f následovně:

$$f(\langle w\rangle) = \begin{cases} \langle 0\rangle & w \in L' \\ \langle 1\rangle & \text{jinak} \end{cases}$$

Lze vidět, že funkce je vyčíslitelná v polynomiálním čase, protože pro každý L' platí $L' \in \mathbf{P}$. Bylo tedy dokázáno, že $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \implies L_t$ je $\mathbf{NP}$–úplný.

□

Příklad 3

Zdůvodněte, proč z tvrzení v bodu 3 plyne, že: $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \implies$ každý jazyk $L \in \mathbf{NP}$ je $\mathbf{NP}$–úplný[1].

Řešení 3

Důkaz. V důkazu nebudeme brát v úvahu prázdný a univerzální jazyk. Pro ně tvrzení neplatí. Mějme předpoklad $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, pak víme, že pro každý jazyk $L \in \mathbf{NP}$ platí, $L \in \mathbf{P}$. Z toho vyplývá, že pro každý jazyk $L \in \mathbf{NP}$ existuje deterministický turingův stroj M, který jej rozhoduje v polynomiálním čase. A proto je možné pro každou dvojici jazyků $L, L' \in \mathbf{NP}$ provést polynomiální redukci $L' \leq_p L$. Mějme následující řetězce $y \in L$ a $r \notin L$. Polynomiální redukce je definována funkci f následovně:

$$f(\langle w\rangle) = \begin{cases} \langle y\rangle & w \in L' \\ \langle r\rangle & \text{jinak} \end{cases}$$

[1] Toto tvrzení neplatí pro prázdný a universální jazyk.

Lze vidět, že funkce je vyčíslitelná v polynomiálním čase, protože platí $L' \in \mathbf{P}$. Bylo tedy dokázáno, že: $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \implies$ každý jazyk $L \in \mathbf{NP}$ je $\mathbf{NP}$–úplný[1]. $\square$

Příklad 4

Uvažujme problém $GRAPH\_COLORING$ definovaný ve slidech (série č. 5).

Dále definujme optimalizační problém $OPT\_GRAPH\_COLORING$ následovně: Pro graf $G(V, E)$ a konečnou množinu barev C, přípustné řešení je libovolná funkce $A : V \to C$. Cena tohoto řešení je definována jako $c(A) = |\{(v_1, v_2) \in E \,|\, A(v_1) = A(v_2)\}|$, tedy počet hran, jejichž oba vrcholy jsou obarvené stejnou barvou. Optimální řešení je to s minimální cenou. Dokažte, že pokud $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, tak neexistuje absolutní aproximační algoritmus pro problém $OPT\_GRAPH\_COLORING$.

Řešení 4

Důkaz. Důkaz neexistence absolutního aproximačního algoritmu povedeme sporem. Nejprvé definujeme m–tou mocninu graph G, značenou G^m. Takovýto graf získáme, pokud vezmeme m kopií grafu G a hranou spojíme každou dvojici vrcholů, které nenáleží stejné kopii. Lehce lze ověřit, že pokud je k obarvení grafu G zapotřebí i barev, pak pro obarvení grafu G^m bude zapotřebí im barev, protože žádná dvojice vrcholů z různých kopií grafu G nemůže mít stejnou barvu.
Předpokládejme, že pro problém $OPT\_GRAPH\_COLORING$ existuje absolutní aproximační algoritmus P, jehož výstupem je funkce $A : V \to C$, s absolutní chybou $k \in \mathbb{N}$. Potom optimální řešení problému $OPT\_GRAPH\_COLORING$ lze získat simulací P na vstupu G^{k+1}. Tedy platí:

$$|c(P(G^{k+1})) - OPT(G^{k+i})| \leq k$$

Lze vidět, že pokud dokážeme obarvit graf G^m za pomocí i barev, pak graf G dokážeme obarvit $\frac{i}{m}$ barvami v polynomiálním čase, to ale znamená, že dokážeme obarvit graf G tak, že:

$$|c(P(G)) - OPT(G)| \leq \frac{k}{k+1}$$

Protože jsou hodnoty $c(P(G))$ a $OPT(G)$ celočíselné, pak musí být $k = 0$, což je ale spor s $k \in \mathbb{N}$, tedy pro $OPT\_GRAPH\_COLORING$ neexistuje absolutní aproximační algoritmus.

$\square$