

Równania Różniczkowe i Różnicowe

Zadanie domowe – grupa 12

1 Zadanie

Proszę rozwiązać metodą elementów skończonych następujące równanie różniczkowe

$$(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad (1)$$

Dokładne równanie do policzenia jest podane poniżej.

Rozwiązanie składa się z następujących etapów:

1. Proszę wyprowadzić sformułowanie wariacyjne dla przedstawionego układu równań liniowych
2. Proszę napisać procedurę generującą układ równań liniowych, rozwiązującą wygenerowany układ równań liniowych oraz rysujący wykres rozwiązania

2 Wymagania funkcjonalne

Proszę przyjąć zmienną n (ilość elementów) jako parametr uruchomieniowy aplikacji (nie dotyczy studentów wybierających opcję na ocenę 3.0). Dodatkowo proszę rysować wykres wyliczonego przybliżenia funkcji u - dopuszczalne jest rysowanie przez zewnętrzną aplikację - np. gnuplot, Excel. Programy napisane w języku Python będą ocenione na 0 punktów.

3 Sposób oceny

Maksymalną oceną za zadanie domowe jest 50 pkt. Zaplanowane są 3 poziomy trudności oddawanego zadania domowego:

- **50 pkt.** - dowolne n , dowolny język programowania różny od Python. Całki liczone numerycznie.
- **39 pkt.** - dowolne n , dowolny język programowania różny od Python. Całki mogą być wcześniej wyliczone na kartce papieru.
- **29 pkt.** - stałe $n = 3$, dowolny język programowania różny od Python. Wszystkie ręczne wyliczenia całek muszą zostać dołączone do zadania domowego.

Dozwolone jest używanie dowolnych bibliotek. Za błędy będą odbierane punkty od maksymalnej oceny proporcjonalnie do istotności błędu bądź braku zrozumienia własnego programu.

Proszę umieścić w systemie UPeL kod programu oraz wyliczenia sformułowania wariacyjnego.

4 Problemy obliczeniowe

4.1 Równanie transportu ciepła

$$\begin{aligned} -k(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= 0 \\ u(3) &= 3 \\ \frac{du(0)}{dx} - u(0) &= 1 \\ k(x) &= \begin{cases} 0.5 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{dla } x \in (1, 3] \end{cases} \end{aligned}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0, 3] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

4.2 Wibracje akustyczne warstwy materiału

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + u &= \cos x \\ u(0) &= 1 \\ \frac{du(2)}{dx} - u(2) &= 4 \end{aligned}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

4.3 Odkształcenie sprężyste

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{du(x)}{dx} \right) &= 0 \\ u(2) &= 1 \\ \frac{du(0)}{dx} - u(0) &= 9 \\ E(x) &= \begin{cases} 0.5 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 3 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases} \end{aligned}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

4.4 Potencjał grawitacyjny

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dx^2} &= 4\pi G \rho(x) \\ \Phi(0) &= 6 \\ \Phi(3) &= 4 \\ \rho(x) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0.5 & \text{dla } x \in (1, 2] \\ 0 & \text{dla } x \in (2, 3] \end{cases} \end{aligned}$$

4.5 Potencjał elektromagnetyczny

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} \\ \phi'(0) - \phi(0) &= 2 \\ \phi(4) &= 1 \\ \rho &= 2 \\ \epsilon_r(x) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1, 2] \\ 5 & \text{dla } x \in (2, 4] \end{cases} \end{aligned}$$

5 Algorytm wyboru problemu

Każdy student ma przypisany swój problem obliczeniowy według następującego algorytmu.

1. Problem determinuje pierwsza litera nazwiska
2. Polskie znaki takie jak A, Ł itp. są rzutowane na podobne znaki z alfabetu łacińskiego (odpowiednio A, E, itp.)
3. Litera rzutowana jest na liczbę, A-0, B-1, C-2, D-3, itd.
4. Finalnie uzyskana wcześniej liczba dzielona jest modulo ilość problemów a następnie dodawana jest liczba 1.

Przykład:

Edward Łącki

Pierwsza litera nazwiska → Ł → A → 0 → 0 mod 5 = 0 → 0 + 1 = 1

Damian Ćwikła

Pierwsza litera nazwiska → Ć → C → 2 → 2 mod 5 = 2 → 2 + 1 = 3

6 Termin oddania

Terminem umieszczenia zadania w systemie UPeL jest w nim oznaczony i wynosi 4 tygodnie od czasu ogłoszenia zadania. Zadanie posiada również ostateczny termin oddania, po którym zadanie nie będzie oceniane. Za każdy dzień opóźnienia w terminie oddawania (umieszczenia w systemie UPeL) zadania domowego odejmowane jest 1.5 pkt. Obowiązkowe jest indywidualne zaliczenie zadania.

7 Całkowanie numeryczne

Preferowaną metodą całkowania numerycznego są kwadratury Gaussa-Legendre'a https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature. Dla celów zadania obliczeniowego wystarczą dwa punkty kwadratury - punkty i wagi do odczytania z angielskiej wersji Wikipedii. **UWAGA** kwadratura domyślnie działa na przedziale $[-1, 1]$. **UWAGA2** kwadratura działa poprawnie dla wielomianów. **UWAGA3** należy pamiętać o względnie niewielkich przedziałach, gdzie funkcja jest niezerowa. Alternatywnie, można użyć zewnętrznej funkcji liczącej kwadraturę Gaussa-Legendre'a - należy jednak rozumieć jej działanie.