Używamy "weak form", bo w MES szukamy rozwiązania przybliżonego, składającego się z f. liniowych, które nie mają drugiej pochodnej. Równanie nie będzie spełnione idealnie, ale "średnio".

$$-k(x)\,u''(x) = 0 \qquad k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \langle 0, 1\rangle \\ 1, & x \in (1, 3\rangle \end{cases}$$

$u(3) = 3 \qquad \Omega = \langle 0, 3\rangle$, pręt o długości 3

$u'(0) - u(0) = 1 \Rightarrow u(0) = u'(0) - 1$

Warunek Dirichleta

$-k(x)u''(x) = 0 \quad | \cdot v(x), \quad v \in V, \quad V = \{f \in H^1 : v(3) = 0\}$

funkcja testowa. Dzięki niej można całkować przez części

$$-k(x)u''(x)\,v(x) = 0$$

$$-\int_0^3 k(x)\,u''(x)\,v(x) = \left\{ \begin{matrix} dv = u''k' & v = u'k \\ t = v & dt = v' \end{matrix} \right\} = -\left[k(x)u'(x)v(x)\right]_0^3 +$$

$$+\int_0^3 k(x)u'(x)v'(x)\,dx = 0$$

więc
$$-\underset{0}{\underbrace{k(3)u'(3)v(3)}} + \underset{\frac{1}{2}}{\underbrace{k(0)}}\,\underset{u(0)+1}{\underbrace{u'(0)}}\,v(0) + \int_0^3 k(x)u'(x)v'(x)\,dx = 0$$

$$k(0)u'(0)v(0) + \int_0^3 k(x)u'(x)v'(x)\,dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\left[u(0)+1\right]v(0) + \int_0^3 k(x)u'(x)v'(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^3 k(x)u'(x)v'(x)\,dx + \frac{1}{2}u(0)v(0) = -\frac{1}{2}v(0)$$

Szukamy rozwiązania w przestrzeni Sobolewa, bo sformułowanie słabe wymaga, aby funkcja i jej pierwsza pochodna były całkowalne z kwadratem. Wtedy możemy użyć kawałkami liniowych funkcji bazowych, które nie mają drugiej pochodnej, ale mają dobrze zdefiniowaną pierwszą pochodną.