

Fourierova analiza

Rok Mlinar Vahtar - 28211126

November 2023

1 Uvod

Fourierova transformacija je enostavna, ampak izjemno uporabna metoda, z aplikacijami na mnogih področjih fizike in tudi širše. Pri numeričnem izračunavanju Fourierove transformacije

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(2\pi\nu t) dt \quad (1)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \exp(-2\pi\nu t) df \quad (2)$$

je funkcija $f(t)$ običajno predstavljena s tablico diskretnih vrednosti

$$f_k = f(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3)$$

Pravimo, da smo funkcijo vzorčili z vzorčno gostoto (frekvenco) $\nu = 1/\Delta$. Na tem mestu bi se lahko prestrašili, da bomo z prehodom iz zveznega integrala na vsoto po končno mnogo točkah izgubili iskane informacije. Izkaže pa se, da obstaja naravna meja frekvenčnega spektra, ki se imenuje *Nyquistova frekvenca*, $\nu_c = 1/(2\Delta)$: harmonični val s to frekvenco ima v vzorčni gostoti ravno dva vzorca v periodi. Če ima funkcija $f(t)$ frekvenčni spekter omejen na interval $[-\nu_c, \nu_c]$, potem ji z vzorčenjem nismo odvzeli nič informacije, kadar pa se spekter razteza izven intervala, pride do *potujitve (aliasing)*, ko se zunanji del spektra preslika v interval. Frekvenčni spekter vzorčene funkcije (3) računamo samo v N točkah, če hočemo, da se ohrani količina informacije. Vpeljemo vsoto

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \exp(-2\pi i k n / N), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (4)$$

ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija in je povezana s funkcijo v (1) takole:

$$F\left(\frac{n}{N\Delta}\right) \approx \Delta \cdot F_n.$$

Obstaja tudi inverzna transformacija:

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \exp(2\pi i k n / N),$$

V tesni zvezi s frekvenčnim spektrom je tudi moč. *Celotna moč* nekega signala je neodvisna od reprezentacije, Parsevalova enačba pove

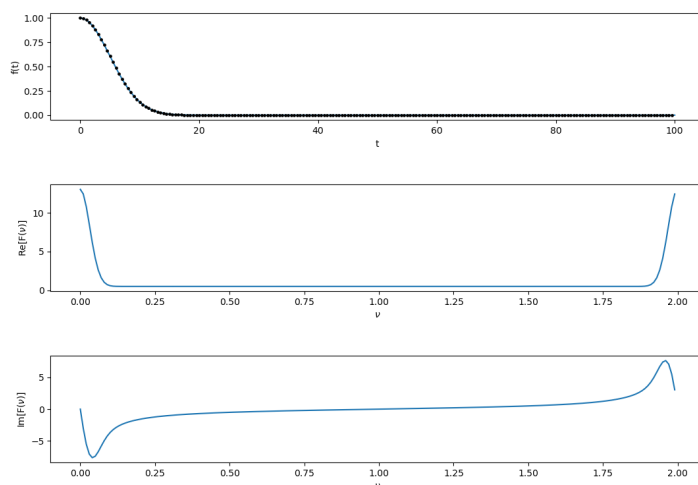
$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2$$

2 Navodilo

1. Izračunaj Fourierov obrat Gaussove porazdelitve in nekaj enostavnih vzorcev, npr. mešanic izbranih frekvenc. Za slednje primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen (kako naredimo Gaussovo porazdelitev ‘periodično’ za FT?). Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco. Napravi še obratno transformacijo (??) in preveri natančnost metode. Poglej, kaj se dogaja z časom računanja - kako je odvisen od števila vzorčenj?
2. Po Fourieru analiziraj 2.3s dolge zapise začetka Bachove partite za violino solo, ki jih najdeš na spletni strani Matematičnofizikalnega praktikuma. Signal iz začetnih taktov partite je bil vzorčen pri 44100Hz, 11025Hz, 5512Hz, 2756Hz, 1378Hz in 882Hz. S poslušanjem zapisov v formatu `.mp3` ugotovi, kaj se dogaja, ko se znižuje frekvenca vzorčenja, nato pa s Fourierovo analizo zapisov v formatu `.txt` to tudi prikaži.
3. **Dodatno:** Napravi Fourierovo analizo signalov, ki jih dobiš pri vaji *Akustični resonator* pri Fizikalnem praktikumu II. Posnetke treh različnih signalov prav tako najdeš na spletni strani.

3 Diskretna Fourierova transformacija

V tem poglavju bom šel skozi različne dele 1. podnaloge. DFT bom v vseh primerih računal z enostavno implementacijo zgornjih formul v pythonu. Znotraj tega poglavja bom uporabljal število točk $N = 200$ in dolžino merilnega intervala $T = 100$. Oboroženi z transformacijo, lahko zdaj enostavno vzamemo Gaussovo porazdelitev, in jo transformiramo.



Slika 1: Naivna uporaba DFT na Gaussovi porazdelitvi

Kot vidimo iz grafa, nekaj ni čisto v redu. Seveda je velik problem to, da smo v predpisanem območju $[0, T]$ dobili le polovico Gaussove porazdelitve, ampak to bomo rešili kasneje. S tem problemom je povezana tudi nepričakovana prisotnost imaginarne komponente v transformiranki. Najprej pa bi se osredotočil na to, da izgleda, da smo dobili Gaussovo porazdelitev v realni komponenti, kot nam narekuje teorija, le da je iz nekega razloga zamaknjena tako, da je leva polovica na desnem robu.

3.1 Ekvivalenca $[-\nu_c, \nu_c]$ in $[0, 2\nu_c]$

Izkaže se, da do prej omenjenega zamika pride zato, ker sem, tako kot se večinoma dela v praksi, uporabil pri transformaciji frekvence z intervala $[0, 2\nu_c]$ in ne $[-\nu_c, \nu_c]$, kot zahteva formula, saj si v resničnem svetu težko predstavljamo negativno frekvenco. Da vidimo, kako bi rekonstruirali sliko Gaussove porazdelitve, ki jo iščemo, si zato najprej oglejmo kaj v resnici pomeni negativna frekvenca. V originalni formuli uporabljamo zvezo

$$e^{2\pi i k n / N} = \cos(2\pi k n / N) + i \sin(2\pi k n / N) \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$$

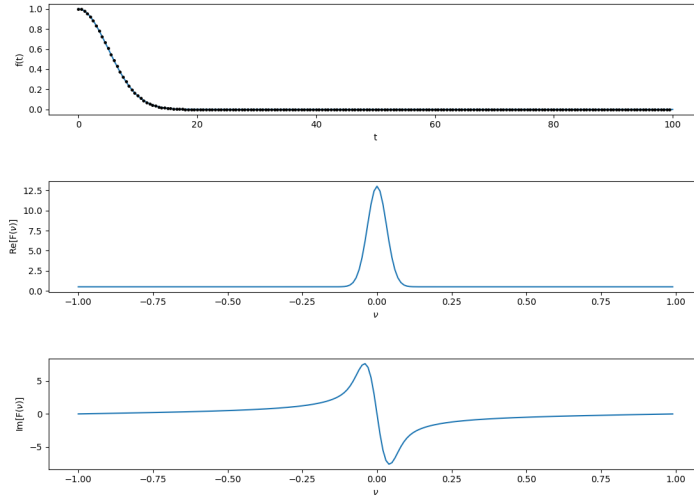
Kaj se zgodi pri $n = 0, \dots, N$? Za $n = 0, \dots, \frac{N}{2}$ imamo seveda ujemanje, vzemimo $m = 0, \dots, \frac{N}{2}$, za ostale tedaj pa velja

$$\begin{aligned} e^{2\pi i k (\frac{N}{2} + m) / N} &= \cos(2\pi k (1/2 + m/N)) + i \sin(2\pi k (1/2 + m/N)) = \\ &= (-1)^k \cos(2\pi k m / N) + i(-1)^k \sin(2\pi k m / N) \end{aligned}$$

Če na podoben način pogledamo člene $n = -\frac{N}{2}, \dots, 0$, dobimo

$$\begin{aligned} e^{2\pi i k (-\frac{N}{2} + m) / N} &= \cos(2\pi k (-1/2 + m/N)) + i \sin(2\pi k (-1/2 + m/N)) = \\ &= (-1)^k \cos(2\pi k m / N) + i(-1)^k \sin(2\pi k m / N) \end{aligned}$$

Tako vidimo, da so členi $n = -\frac{N}{2}, \dots, 0$ in $n = \frac{N}{2}, \dots, N$ popolnoma enaki. Sliko Gaussove porazdelitve lahko zato rekonstruiramo, če štejemo $n = \frac{N}{2}, \dots, N, 0, \dots, \frac{N-1}{2}$.



Slika 2: Reindeksiran DFT na Gaussovi porazdelitvi

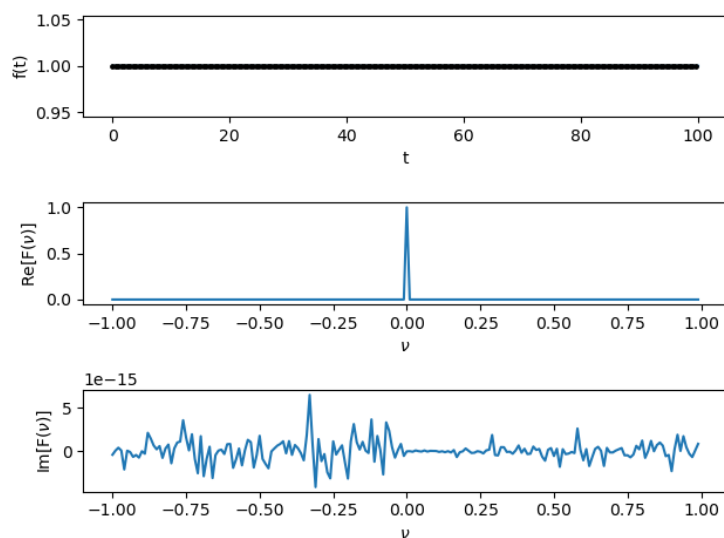
S tem smo rešili zamaknjenost Fourierove transformiranke, ampak problem z neničelno imaginarno komponento ostaja.

3.2 DFT periodičnih funkcij

Nerešen problem z Gaussovo porazdelitvijo za zdaj pozabimo in se osredotočimo na periodične funkcije. Ker je DFT omejena na N točk, deluje namreč z predpostavko, da je zunaj teh N točk periodična.

3.2.1 Konstantna funkcija

Prva periodična funkcija, ki si jo lahko ogledamo je kar konstanta $f(t) = 1$.

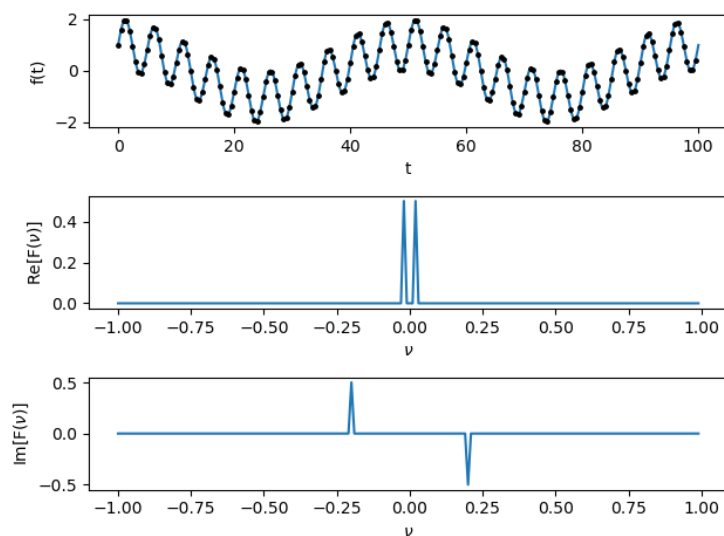


Slika 3: DFT konstantne funkcije

Vidimo, da transformacija vsaj tu res deluje kot zaželeno, saj dobimo diskretni ekvivalent delta funkcije pri $\nu = 0$. Imaginarni del je prav tako približno enak 0, saj je funkcija soda.

3.2.2 Sinusni in kosinusni val

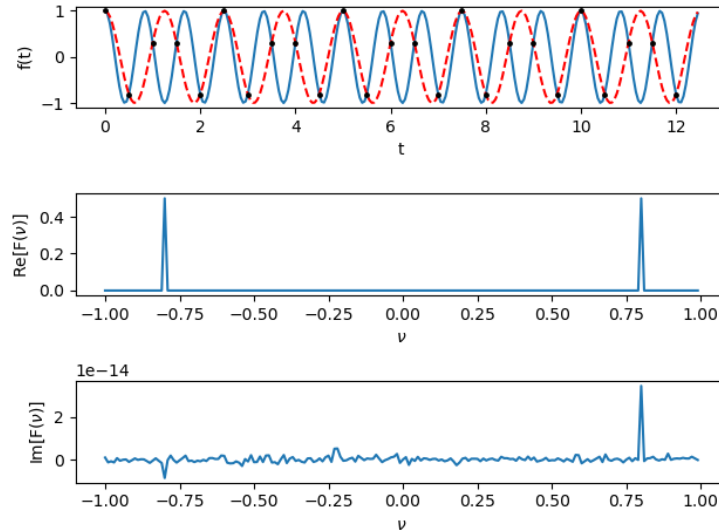
Začnimo z idealnim primerom. Vzemimo $f(t) = \sin(2\pi \frac{n_1}{T} t) + \cos(2\pi \frac{n_2}{T} t)$, kjer sta n_1 in n_2 naravni števili, T pa dolžina intervala meritve, takšni, da sta frekvenci $\frac{n_1}{T}$ in $\frac{n_2}{T}$ manjši od kritične frekvence, ki je v tem primeru $\frac{N}{2T} = 1$. Tako je funkcija periodična na celem območju in tudi omejena na frekvence pod kritično, kar pomeni, da nebi smeli z DFT izgubiti kakršnekoli informacije.



Slika 4: DFT sinusno-kosinusnega vala z $n_1 = 20$ in $n_2 = 2$

In kot vidimo je temu res tako, saj smo dobili pričakovane špice, v imaginarnem delu za sinus $z \pm \nu_1 = \pm \frac{20}{100} = \pm 0.2$ in v realnem za kosinus $z \pm \nu_2 = \pm \frac{2}{100} = \pm 0.02$.

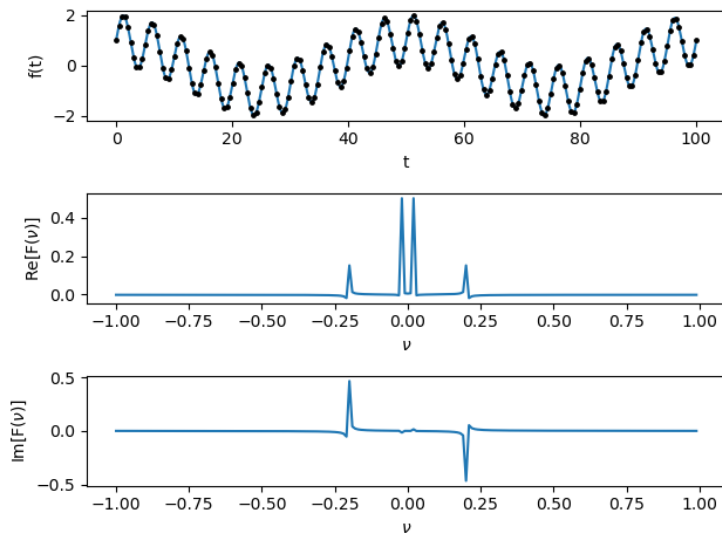
Zdaj pa lahko pogledamo še neidealne primere. Kot prvo si oglejmo tako imenovan pojav potujitve, oziroma aliasing po angleško, kjer signal vsebuje frekvence višje od kritične. Vzemimo spet idealno periodičen signal $f(t) = \cos(2\pi \frac{n_2}{T} t)$, kjer bo n_2 tokrat dovolj velik, da frekvenca pade nad kritično. Na grafu $f(t)$ bom risal le del časa zaradi boljše preglednosti, N in T sta še vedno ista.



Slika 5: Primer potujitve z $n_2 = 120$

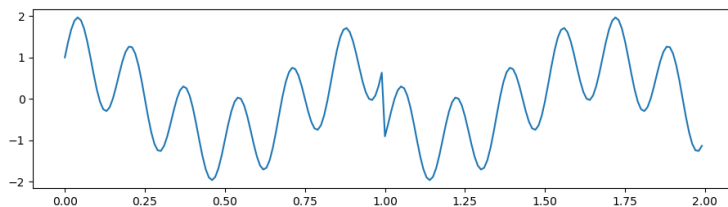
Če frekvenca signala sega čez kritično vidimo, da je vzorčenje prepočasno, da bi dobro otipalo celo periodo višjefrekvenčnega signala. Transformacija nam tako prepozna kosinus, z frekvenco pod kritično, ki je označen z rdečo črtkasto črto, namesto modrega signala. Drugače rečeno, se nam frekvence zunaj $[-\nu_c, \nu_c]$ preslikajo nazaj na interval.

Nazadnje si lahko pogledamo še, kaj se zgodi, če ne izberemo za interval polne periode. Vzemimo spet isto kombinacijo sinusa in kosinusa kot prej, le da bomo na koncu dodali le eno točko iz naslednje periode.



Slika 6: DFT sinusno-kosinusnega vala z $n_1 = 20$ in $n_2 = 2$ z eno dosatno točko izven periode

Kar naenkrat imamo dodatne vrhove pri čisto novih frekvencah. To je zato ker smo z tem, da smo zgrešili periodo, transformaciji podali funkcijo, ki bi v bolj ekstremnem primeru izgledala nekako tako

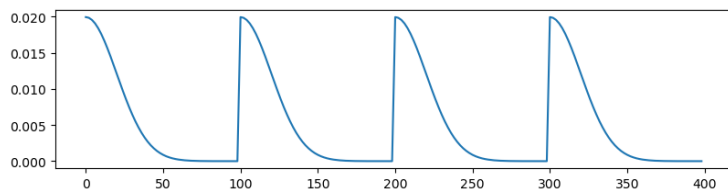


Slika 7: Ekstremen primer zgrešene periode

Iz tega se lahko naučimo, da je dokaj pomembno, da razmislimo, kako izgleda funkcija ki jo podajamo DFT, z perspektive DFT-ja.

3.3 Fourierova transformacija Gaussove porazdelitve

Zdaj, ko se zavedamo, da DFT kot argument sprejme le periodične funkcije, vidimo kaj je bil problem prej. V resnici smo transformirali funkcijo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(|t| \bmod T)^2)$

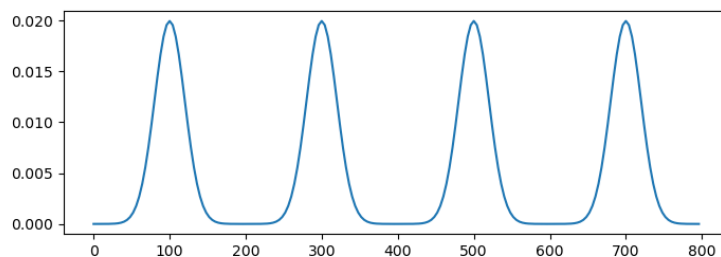


Slika 8: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(|t| \bmod T)^2)$

To lahko zdaj popravimo na dva načina.

3.3.1 Premik Gaussove porazdelitve

Če Gaussovo porazdelitev transliramo, tako da ima vrh pri $t = \frac{T}{2}$, bomo v DFT res dobili pravo periodično razširitev.

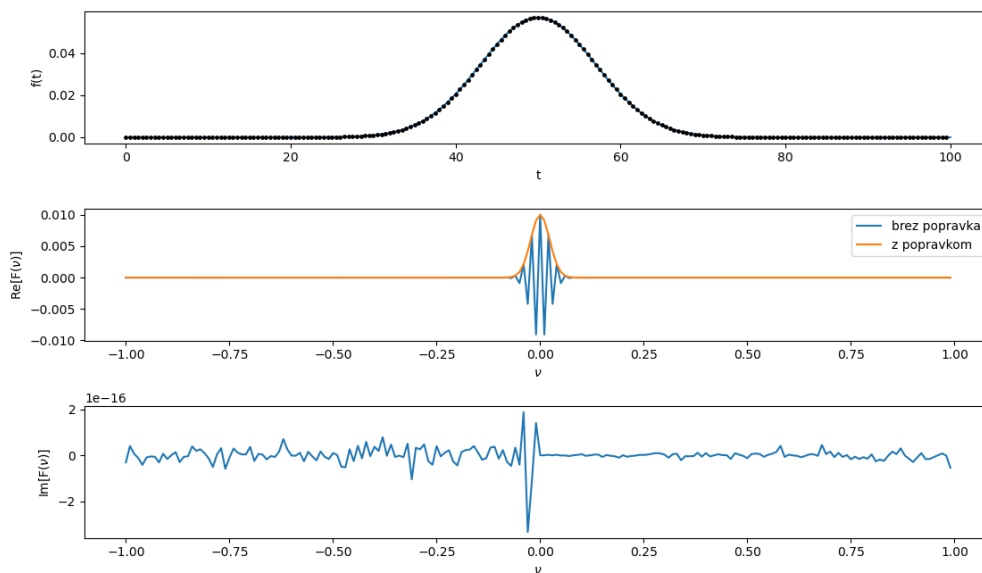


Slika 9: Periodična razširitev Gaussove porazdelitve

Edini problem je zdaj jo, da je Fourierova transformacija Gaussove porazdelitve Gaussova porazdelitev le, če je ta centrirana na 0. Drugače pa Fourierova transformacija v splošnem dobi modulacijski faktor:

$$g(t) = f(t + \tau) \quad G(\nu) = F(\nu) \cdot e^{2\pi i \nu \tau} \quad (5)$$

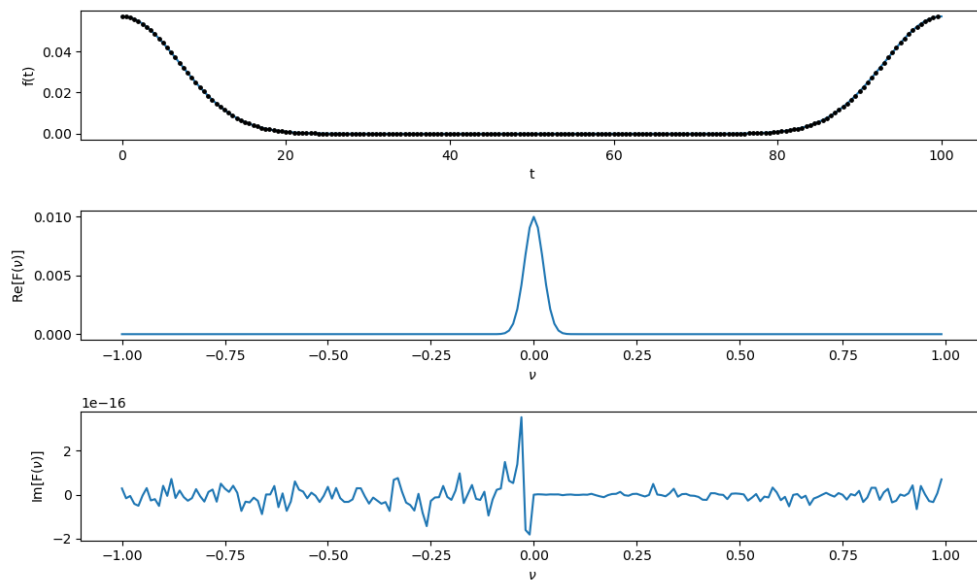
to pomeni, da lahko rezultat z translirano funkcijo popravimo, če ga pomnožimo z $e^{-2\pi i \nu \tau}$, oziroma v našem primeru $e^{2\pi i \nu \frac{T}{2}}$.



Slika 10: DFT translirane Gaussove porazdelitve

3.3.2 Zrcaljenje Gaussove porazdelitve

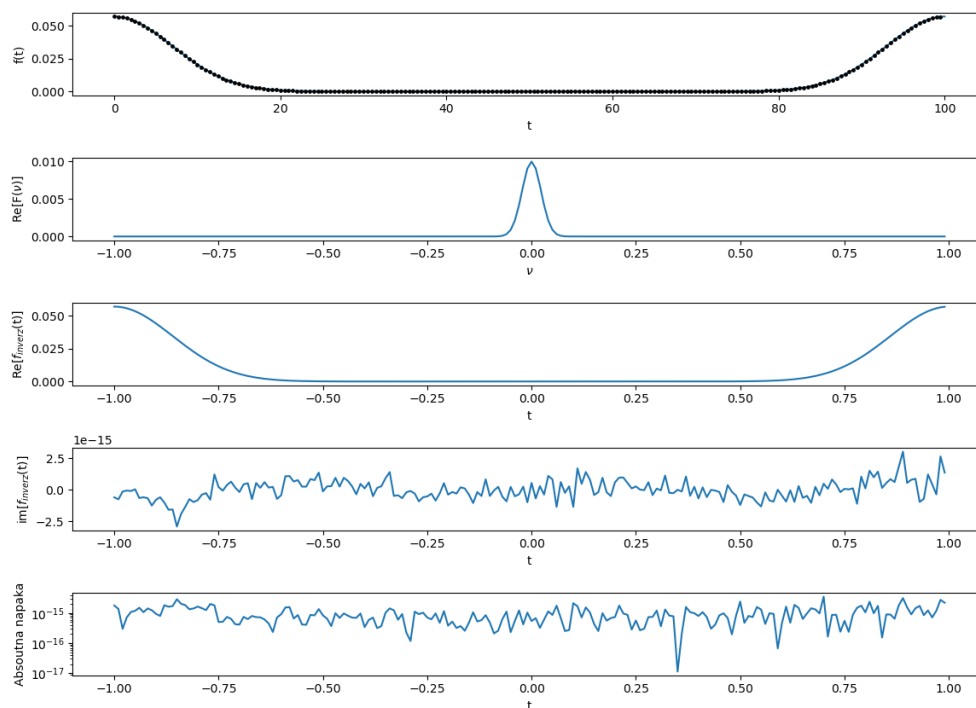
Še en način, s katerim lahko dosežemo simetrično razširitev Gaussove porazdelitve, je da jo z leve strani intervala prezrcalimo še na desno.



Slika 11: DFT zrcaljene Gaussove porazdelitve

3.4 Inverzna Fourierova transformacija

Spisal sem tudi inverzno Fourierovo transformacijo, ta nam z zelo dobro natančnostjo rekonstruira začetni funkcijo.

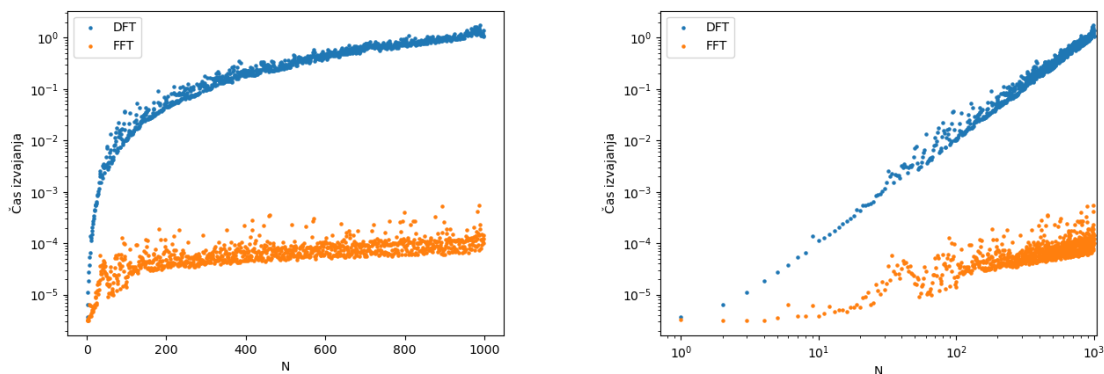


Slika 12: Dobro delovanje inverzne transformacije

Dobra natančnost seveda velja le, če je večina frekvenc pod mejo kritične frekvence. Inverzna transformacija bo še vedno natančno določila točke, v katerih smo opravili vzorčenja, ne bo pa pustvarila originalnega signala, saj za to nima dovolj informacij.

3.5 Odvisnost časa računanja od N

Zadnja stvar, ki nas morda zanima, je koliko časa rabimo, da izračunamo diskretno Fourierovo transformacijo na ta način. Svoj algoritem, označen kot DFT, sem primerjal z `np.fft.fft`, metodo ki deluje na osnovi hitre Fourierove transformacije, ki je ni implementacija iste metode kot DFT ampak je vseeno najpogostejše uporabljena metoda.



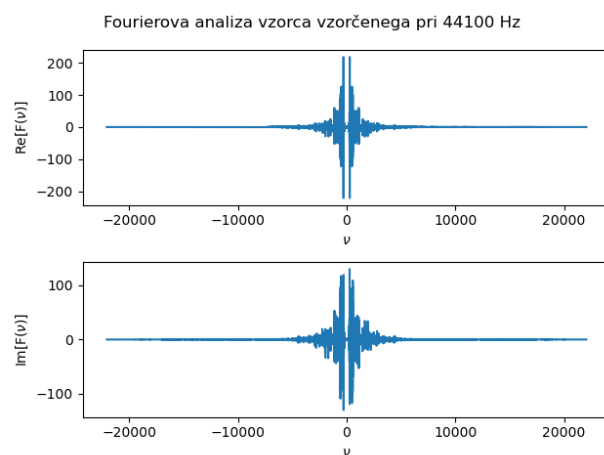
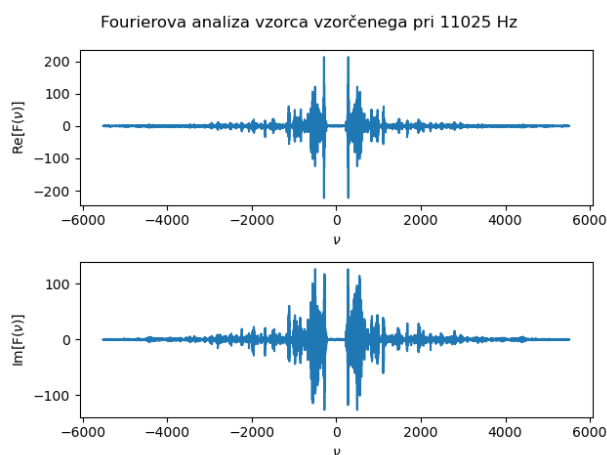
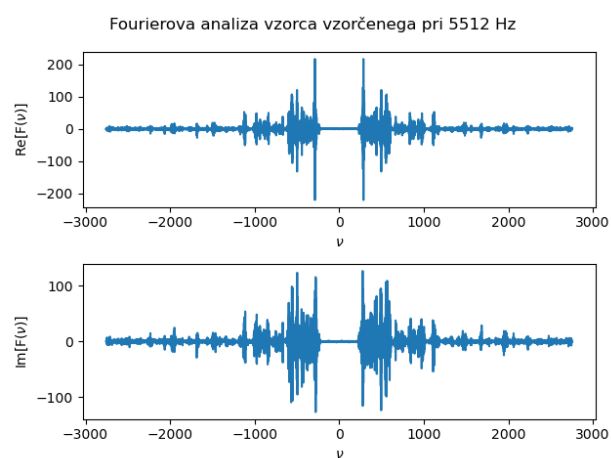
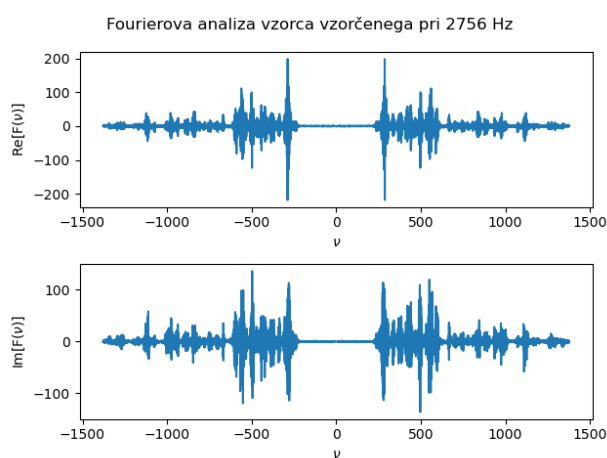
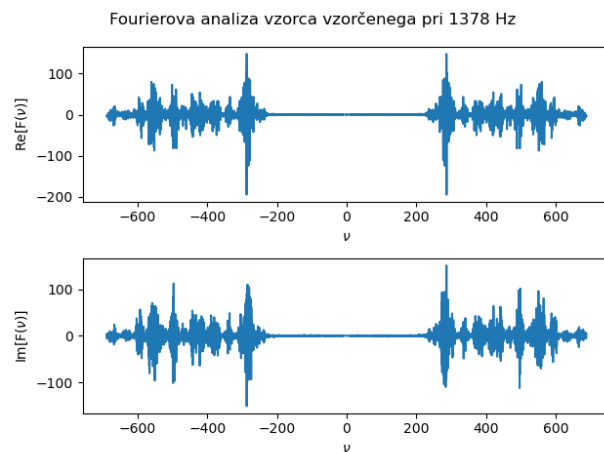
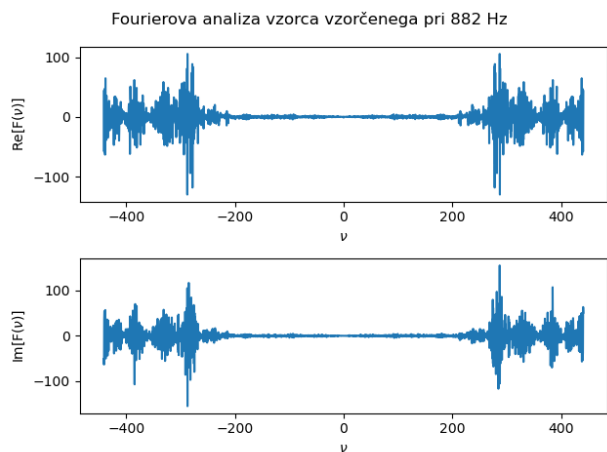
Čas izvajanja v odvisnosti od števila točk

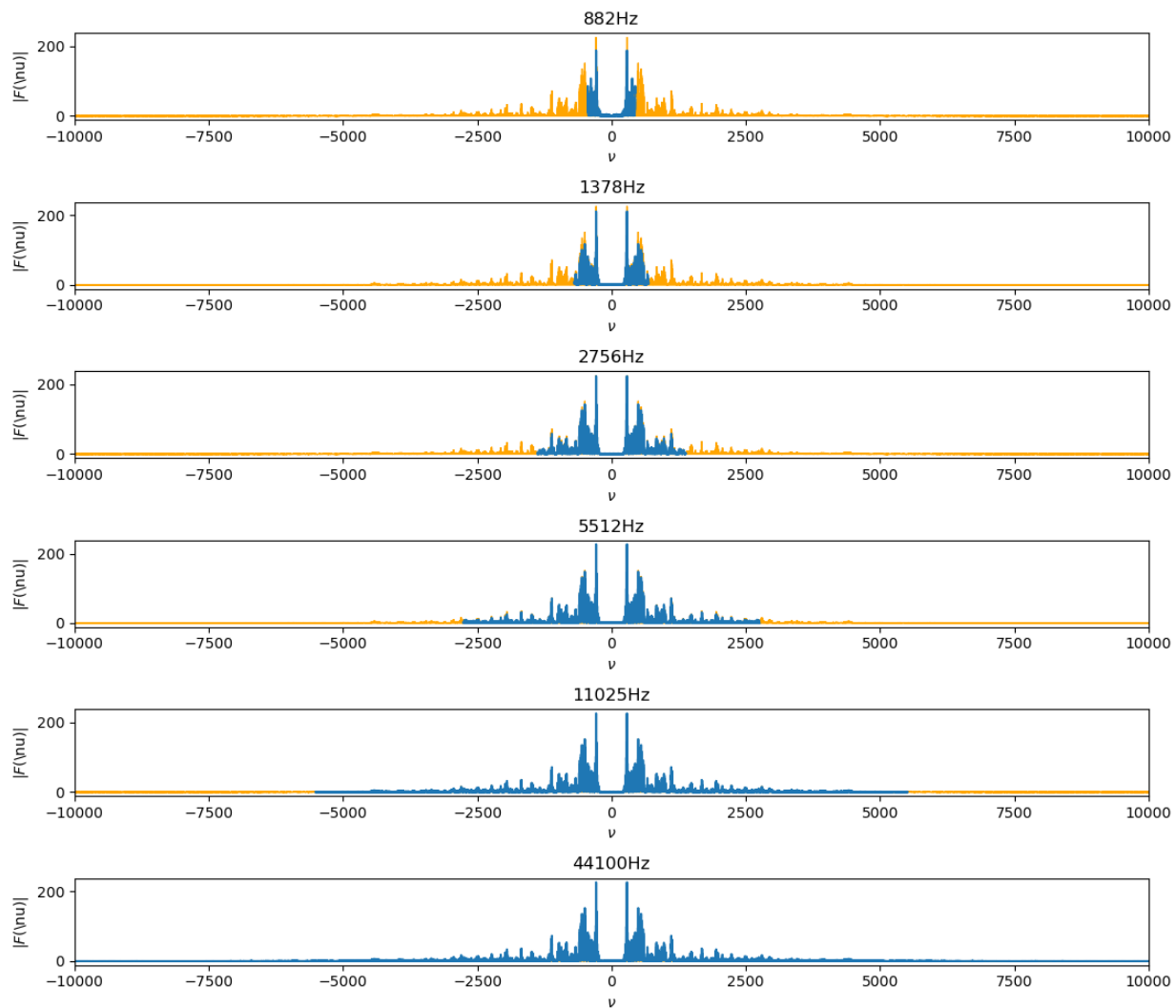
Iz naklona premice DFT na desnem grafu lahko ocenim, da časovna kompleksnost DFT raste kot približno $\mathcal{O}(N^2)$. Iz analize, ki sem jo opravljal v naslednjem poglavju, imam še nekaj posameznih časov za nekaj večjih N.

| N | Čas izvajanja |
|--------|---------------|
| 2293 | 6s |
| 3583 | 15s |
| 7166 | 1min 3s |
| 14332 | 6min 52s |
| 28665 | 27min 8s |
| 114600 | 5h 18min 6s |

4 Analiza Bachove partite

Analizirati moramo 6 različnih posnetkov istih dveh sekund Bachove partite, ki so bile vzorčene pri različnih frekvencah. Z poslušanjem posnetkov v mp3 obliki lahko opazimo, da posnetki postajajo opazno tišji in manj ostri. Iz tega kar smo odkrili o potujitvi, lahko sklepamo, da je to posledica preslikave višjih frekvenc pod kritično. Če posnetke analiziramo z fourierjevo transformacijo, dobimo pri različnih frekvencah vzorčenja naslednje transformiranke



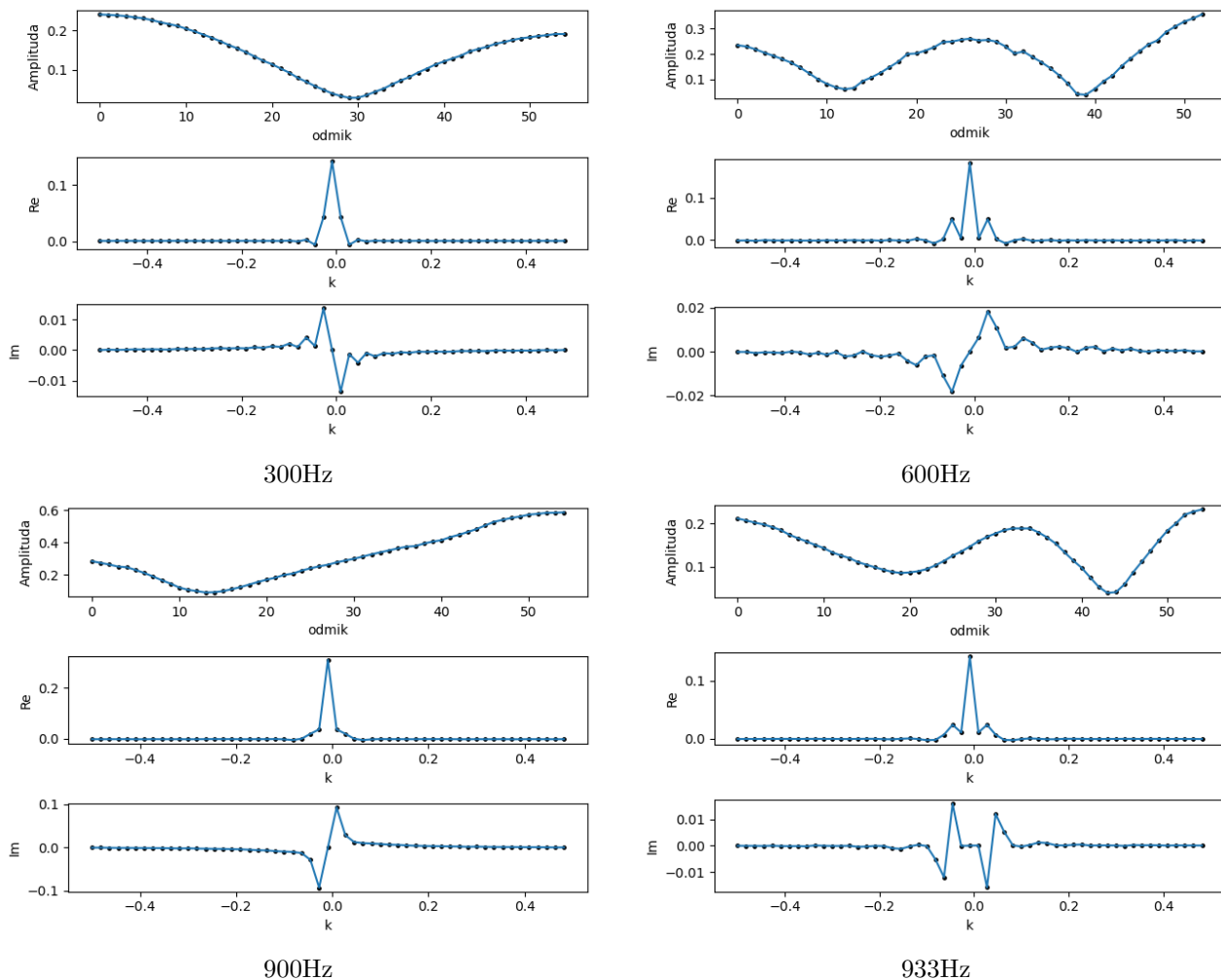


Primerjava absolutnih vrednosti Fourierovih transformirank z najnatančnejšo

Vidimo, da z nižjo frekvenco vzorčenja izgubimo velik del visokih frekvenc. Te visoke frekvence človeško uho zazna kot glasnejše pri isti amplitudi, kar pomeni, da glasnost zvoka pade. Ožji razpon frekvenc pomeni tudi, da zvok zveni bolj monotono.

5 Dodatna naloga

Za dodatno nalogo sem Fourierovo analiziral še svoje stare meritve iz Fizikanega praktikuma III iz vaje Akustični resonator. Podatki predstavljajo zvočni profil stoječega valovanja v leseni škatli pri različnih frekvencah.



Če ignoriramo realno komponento pri $k = 0$, ki predstavlja premik v y smeri, lahko vidimo, da je stoječe valovanje v dobrem približku sinusne oblike pri eni frekvenci, saj se poleg prej omenjene $k = 0$, vrhovi realne in imaginarne komponente ujemajo.

6 Zaključek

V nalogi sem se spoznal uporabo diskretne Fourierove transformacije, ki se mi je na začetku zdela izjemno neintuitivna. Veliko časa sem si zato vzel za to, da sem počasi šel skozi celo izpeljavo, ki smo jo na hitro pogledali na predavanju. Upal bi, da bi to pomenilo, da ne bom delal neumnih napak, ampak temu ni bilo tako. Največ časa sem namreč izgubil, ko sem 6 ur generiral Fourierove transformacije za Bachovo partito in na koncu ugotovil, da sem rezultat pozabil deliti z N in zavrteti z np.roll. V prihodnosti vsaj vem, da je podatke verjetno dobro shraniti v datoteko, če jih že računaš dober del dneva.