

Modelska analiza I

Naloga 112

12. 1. 2023



12. naloga – Metoda maksimalne entropije in linearna napoved

1. Določi frekvenčni spekter signalov iz datotek `val2.dat`, `val3.dat` in `co2.dat` z metodo maksimalne entropije. V slednji datoteki s koncentracijo CO₂ v zraku upoštevaj splošen (linearen) letni trend. Preizkus delovanje metode v odvisnosti od števila polov in od gostote prikaza. Pri CO₂ si oglej še njihovo lego. Primerjaj natančnost metode z rezultati, ki jih da FFT ob uporabi filtrov. Sestavi tudi testni signal iz vsote sinusnih členov z bližnjimi frekvencami ter razširi ločljivost metode.
2. Koeficiente metode maksimalne entropije na signalih iz prve naloge uporabi za linearno napoved: koeficiente določi iz prve polovice zapisa signala, drugo polovico pa uporabi za primerjavo z napovedjo. Priporočljivo je majhno število polov. Ugotovi, kako vpliva na napoved šum! Podobno preuči datoteko `borza.dat` in podatke za lunine efemeride v `luna.dat`, oziroma sončni cikel `Wolf_number.dat`.
Preveri, ali so vsi korenji preslikavne funkcije znotraj enotnega kroga, in jih po potrebi preslikaj vanj!

Uporabne funkcije iz *Numerical Recipes*: `memcof`, `evlmem`, `zroots`, `fixrts` in `predic`.

Določanje koeficientov linearne napovedi se imenuje tudi *avtoregresija*, eden izmed načinov izračuna pa je reševanje Yule-Walkerjevega sistema enačb. V nekaterih programskih paketih najdete funkcijo pod tem imenom, na primer `aryule` iz Pythonovega modula `spectrum`.

Naložba 1:

- analizirati testnega odnosnega signala in študirja lastnosti metode v odnosnosteni od steklenih polov.
- analizirati danih signalov: Vizualni učinkov, FWTM od polov
- CO₂, linearni trend, kvadratni trend
- Redenje podatkov
- Prikaz javni ~ FFT.
- Udej. p) preved polov?

MODELSKA ANALIZA I

12. naloga – Metoda maksimalne entropije in linearna napoved

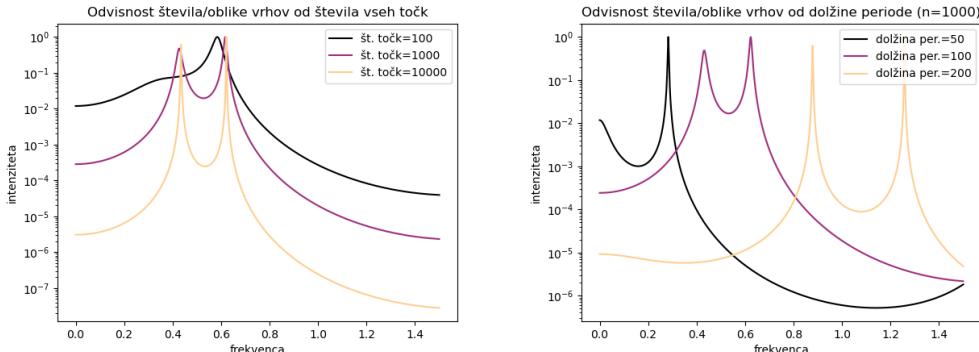
Ema Mlinar, vpisna št.: 28222071

10. januar 2023

Cilj naloge je določi frekvenčni spekter signalov različnih podatkov z metodo maksimalne entropije ter s pomočjo le te napovedati nadaljnje dogajanje sistema. Najprej pa si poglejmo, kako je z ločljivostjo metode.

1 Ločljivost

Ločljivost najlaže določimo tako, da generiramo seštevek dveh sinusnih motenj in gledamo, kdaj naša metoda še najde dva vrhova in kdaj ne. Najprej se zavedajmo, da je ločljivost odvisna že od same sinusne motnje. Slika 1 prikazuje, kakšna je odvisnost od celotnega števila točk, ki jih uporabimo pri generiranju in od števila točk v posamezni periodi.

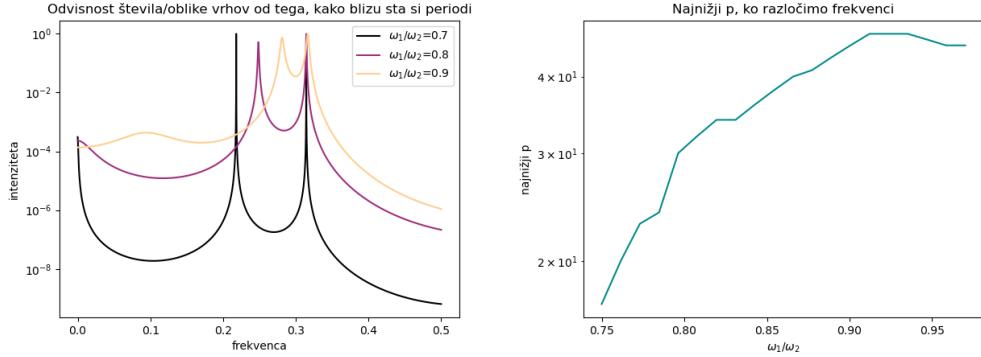


Slika 1: Leva slika prikazuje, kakšna je odvisnost od celotnega števila točk, ki jih uporabimo pri generiranju. Tu ohranjamo število točk v periodi konstantno. Desna slika prikazuje, kakšna je odvisnost od števila točk v posamezni periodi pri konstantnem številu vseh točk.

Vidimo, da nam manjše število točk da manjšo ločljivost, kar je logično. Vidimo pa tudi, da precej vpliva število točk v posamezni periodi. Kot pričakovano tudi tukaj dobimo z manj točkami v periodi manjšo ločljivost (kljub temu, da je potem period več, ker celotno št. točk ostaja enako!).

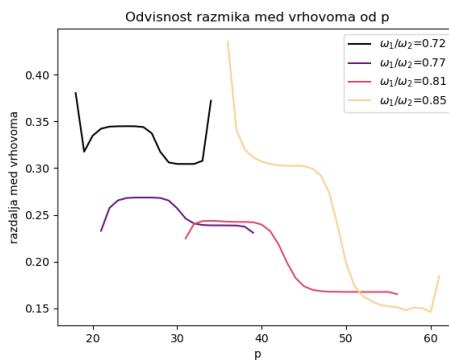
Sedaj pa si lahko ogledamo še dejansko ločljivost, če ohranimo zgoraj omenjene faktorje konstantne. Zanima nas torej, kolikšen p potrebujemo, da lahko razločimo dve frekvenci ω_1 in ω_2 . Tu si lahko pomagamo z metodo `scipy.signal.findpeaks`, ki nam prešteje vrhove, za ločljivost proglašimo torej tisti p , ki leži na meji med 1 in 2 vrhovoma. Odvisnost od razlike med frekvencama je prikazana na sliki 2.

Na levi sliki vidimo, da določen p razloči bolj oddaljene frekvence, tiste bližje skupaj pa zazna kot en sam vrh. Poskusila sem torej določiti ta mejni p , kjer se to zgodi. Na desni sliki vidimo, da kot



Slika 2: Desna slika: prikaz nekaj razmerij frekvenc pri istem p . Leva slika: odvisnost mejnega p (ločljivost) od razlike med frekvencama.

pričakovano potrebni p raste, ko gremo proti frekvencam, ki so blizu skupaj. Opazimo pa tudi, da vrednost 50 zadošča za praktično vse, tudi zelo nizke razlike med frekvencama. Dobimo torej neko limito, potrebni p ne narašča v neskončnost.



Slika 3: Prikaz razmika med vrhovi, ki prikazuje postopno lezenje levega vrha proti levi, ko se bližamo mejnemu p . Ko se razlika med vrhovoma ustali, sem končala vzorčenje, saj ob prevelikem p začnejo motiti dodatni vrhovi.

To nam je mogoče lahko rahlo čudno in mogoče podvomimo v to, da gledamo res prave vrhove. Vendar sem preverila, vrhovi so pravi in dejansko dobimo pri $p = 50$ razločena oba vrhova ne glede na to, kakšna je razlika frekvenc. Ampak se pojavi dodatna značilnost, Preden dva vrhova preideta v enega prvi vrh začne lesti proti levi, vrhova se torej bolj in bolj razmikata. To torej pomeni, da kljub temu, da pri $p = 50$ razločimo dva vrhova, pa je levi zelo razpotegnjen in ima vrh preveč levo. Ko torej večamo p se pomakneta v svoje prave pozicije. Slika 3 prikazuje točno to.

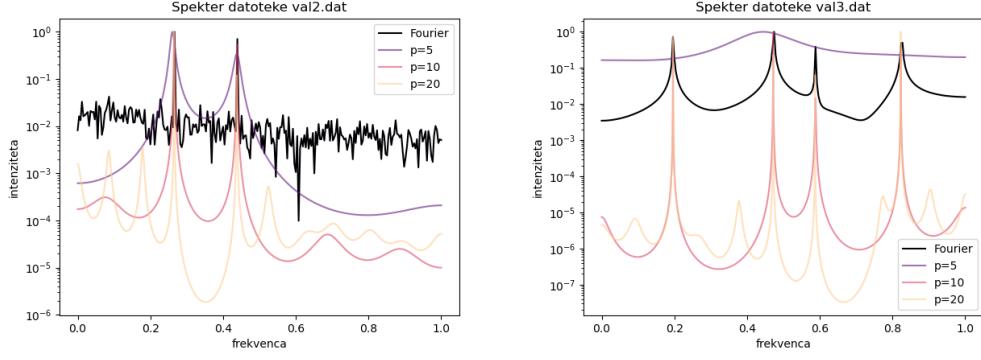
2 Frekvenčni spekter signalov - val2.dat & val3.dat

Uporabimo sedaj našo metodo na podatkih. Najprej si poglejmo datoteki *val2.dat* in *val3.dat*, glej sliko 4.

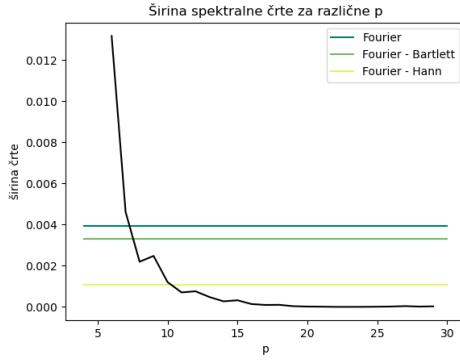
Vidimo, da vrhovi zelo lepo sovpadajo z vrhovi, ki so določeni z Fourierjevo transformacijo, ko povečujemo p se vrhovi vidno zožajo, a tudi dobijo majhne nepotrebne fluktuacije.

Metoda maksimalne entropije je torej zelo uporabna, če želimo zelo tanke vrhove, to lahko še bolje vidimo na sliki 5, ki prikazuje ožanje vrhov s p .

Vidimo lahko, da kljub oknom pri Fourierjevi transformaciji še vedno dobimo precej tanjše vrhove že



Slika 4: Spekter signalov iz datotek *val2.dat* in *val3.dat* za različne vrednosti p .

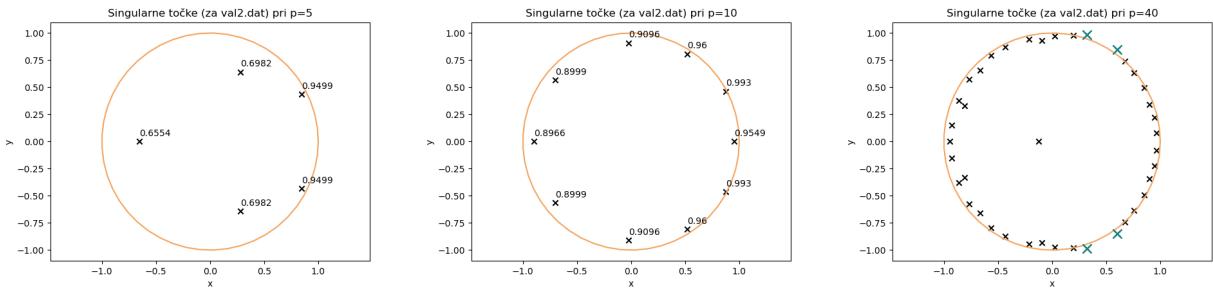


Slika 5: Ožanje vrhov v signalu *val2.dat*, ko povečujemo p . Za širino sem vzela FWHM. Prikazana je tudi primerjava s širino vrhov pri Fourierjevi transformaciji brez oken, s Hannovim oknom ter s Bartlettovim oknom.

z zelo nizkimi p .

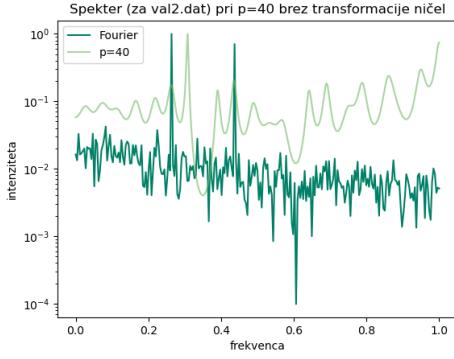
2.1 Ničle oz. singularne točke

Ko večamo parameter p , večamo tudi število ničel oz. singularnih točk. In ko pridemo do dovolj velikega p nam ničle uidejo iz enotske krogle, glej sliko 6.



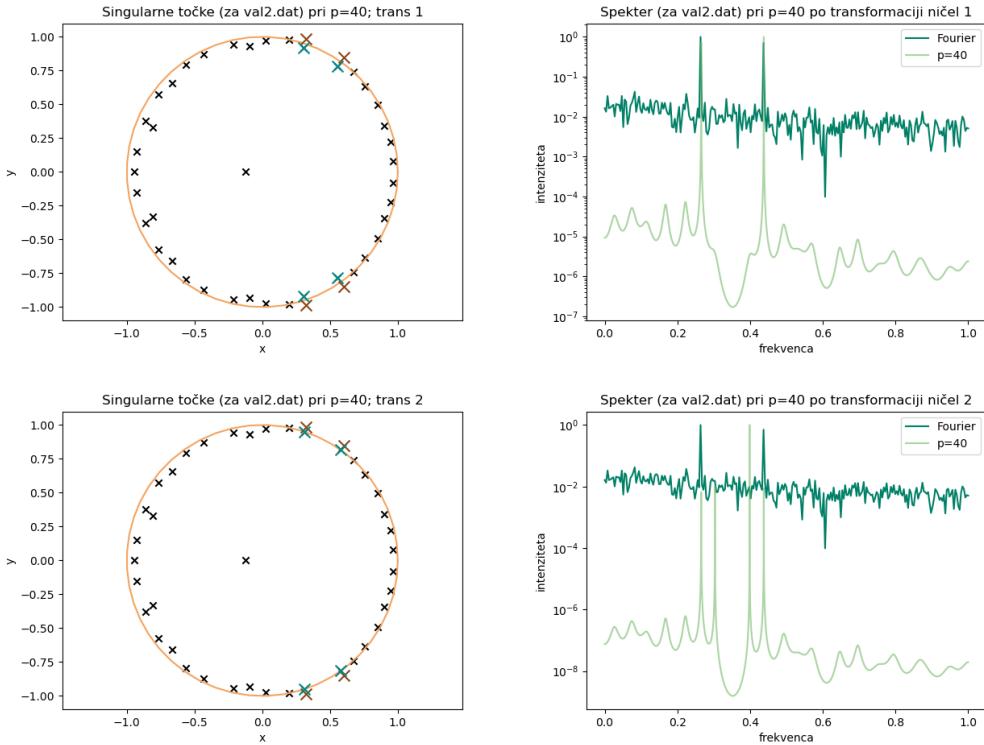
Slika 6: Prikaz pozicije ničel oz. singularnih točk za različne p . Ničle, ki ležijo izven enotske krožnice so označene z turkizno. Številke povejo absolutno vrednost točk.

Vidimo, da so pri $p = 5$ ničle globoko v enotski krogi, pri $p = 40$ pa 4 točke padejo iz krogle. Teorija nam narekuje, da model z ničlami izven enotske krogle divergira, poglejmo. Slika 7 prikazuje spekter s singularnimi točkami izven enotske krogle.



Slika 7: Spekter po naši metodi, če imamo singularne točke izven enotske krožnice.

Vidimo, da se spekter zelo slabo ujema s Fourierjevim. Poleg tega pa na koncu brez razloga začne naraščati. Skratka, vrhovi se ne ločijo prav dobro od šuma in je tak spekter neuporaben. Vendar pa lahko to izboljšamo s tem, da ničle izven enotske krogle prestavimo ali na njen rob ali znotraj le te, glej sliko 8.

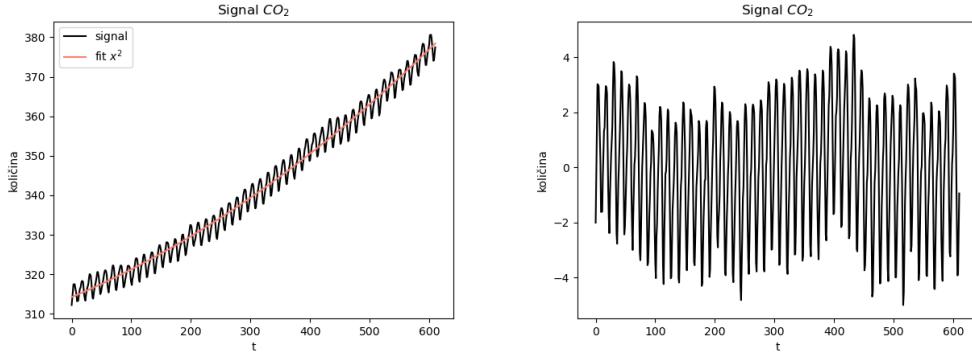


Slika 8: Spekter s premaknjenimi poli na dva različna načina (glej levi sliki). Pri prvi uporabimo transformacijo: $x \rightarrow \frac{1}{x}$, pri drugi pa $x \rightarrow \frac{x}{|x|}$. Svetlo rjav križec prikazuje lego ničle pred transformacijo, turkizen pa po njej.

Uporabimo lahko dve različni transformaciji: $x \rightarrow \frac{1}{x}$ ali pa $x \rightarrow \frac{x}{|x|}$. V našem primeru vidimo, da bolje deluje prva transformacija. Če ta spekter primerjamo z začetnim pred transformacijo, je izboljšava očitna.

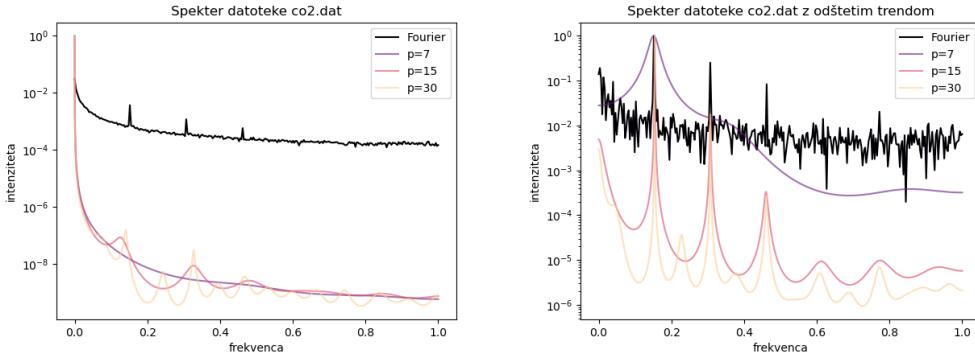
3 Frekvenčni spekter signala *co2.dat*

Sedaj pa se lotimo podatkov za globalno segrevanje, in sicer meritev ogljikovega dioksida. Signal je prikazan na sliki 9 (levo).



Slika 9: Začetni signal in prilagajana parabola ter signal z odštetno parabolo.

Na podlagi začetnega signala lahko narišemo spekter kot je opisano v prejšnjem poglavju in dobimo desni graf na sliki 10. Vendar pa je dobljen graf precej daleč od Fourierjeve ustreznice. Potrebujemo precej večji p kot v prejšnjem poglavju za enako natančnost.



Slika 10: Spekter začetnega signala (levo) in spekter signala z odštetno parabolo (desno).

Vendar pa opazimo v signalu očiten trend, ki je parabolične oblike, glej sliko 9. Ta trend lahko odštejemo in dobimo nov izboljšan spekter (desni graf slike 10).

3.1 Ničle

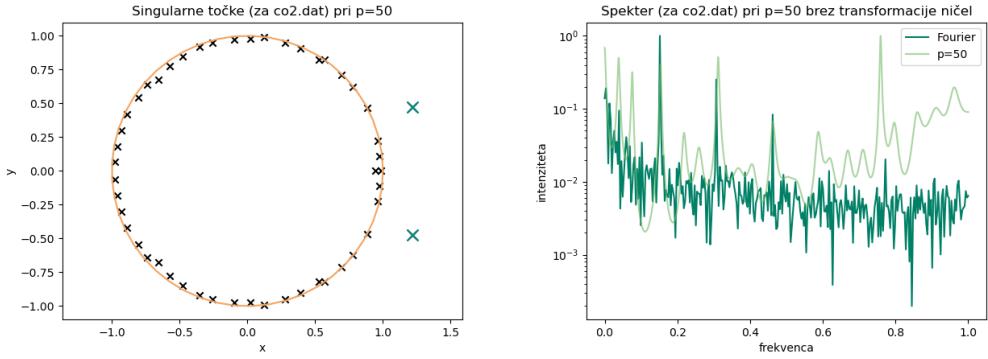
Kot pri datoteki *val2.dat* tudi tu lahko motijo ničle izven enotske krogle, glej sliko 11.

Tu so ničle še dlje stran od enotske krožnice kot prej. Vendar pa vidimo, da so tukaj z razliko od prej precej razpoznavni vrhovi. Še vedno pa je precej zašumljeno in precej moti trend navzgor proti koncu, zato spet naredimo transformaciji kot prej in dobimo sliko 12.

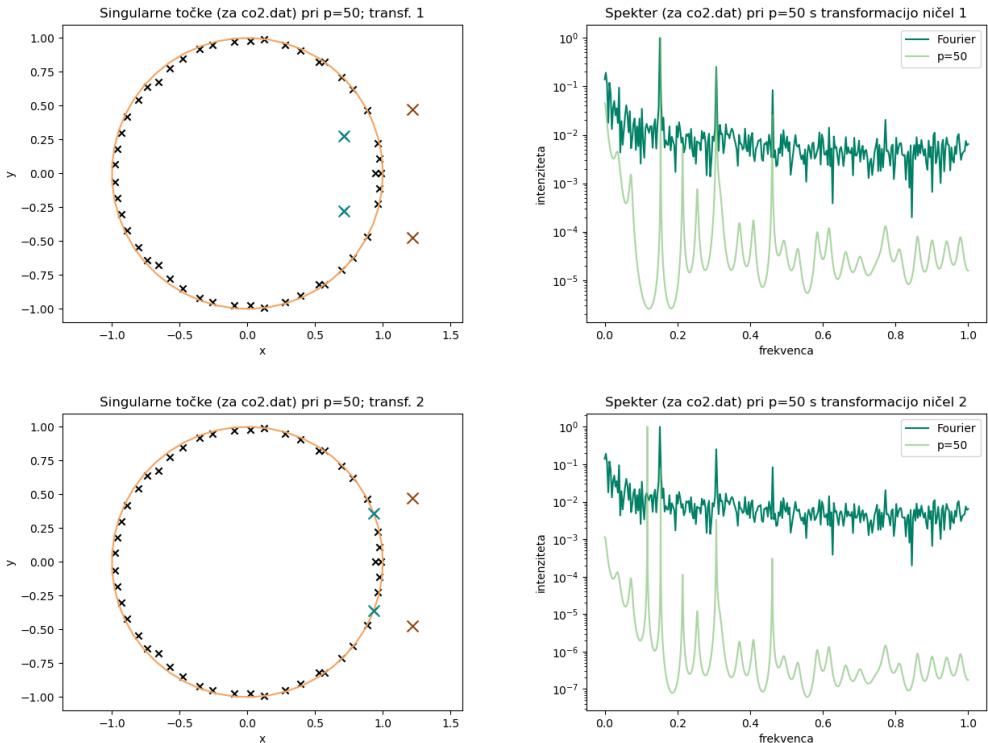
Tukaj obe transformaciji dasta zadovoljivo rekonstrukcijo, mogoče je boljša transformacija 1.

3.2 Redčenje podatkov

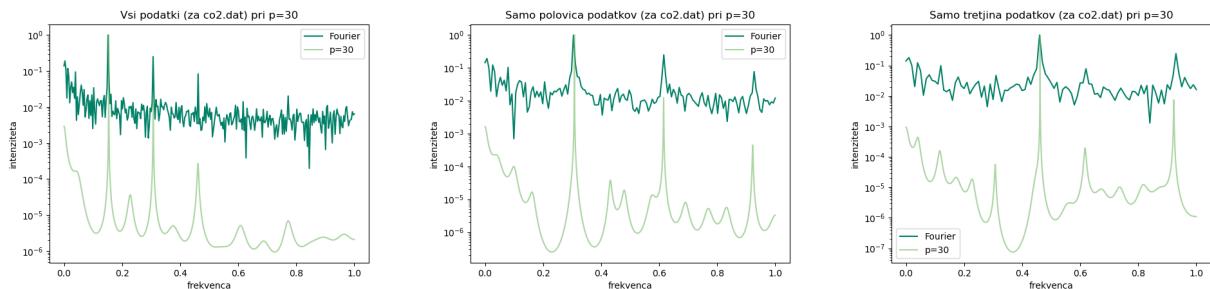
Poglejmo sedaj, kaj se zgodi, če vzamemo manj podatkov kot jih imamo na voljo, na primer le vsak drugi ali vsak tretji podatek. Spekter z redkejšim vzorčenjem je prikazan na sliki 13.



Slika 11: Spekter signala *co2.dat*, če imamo ničle zunaj enotske krožnice.



Slika 12: Spekter s premaknjenimi poli na dva različna načina (glej levi sliki) kot je opisano v prejšnjem poglavju. Svetlo rjav križec prikazuje lego ničle pred transformacijo, turkizen pa po njej.



Slika 13: Spekter signala z razredčenimi podatki za $p = 30$. Grafi so narisani: če vzamemo vsako točko, če vzamemo vsako drugo točko ter če vzamemo vsako tretjo točko.

112 - Metoda maksimalne entropije in linearna napoved

Blaž Levpušček, 28212007

30. 11. 2022

Uvod

Iz časovne vrste signala s_n lahko napovemo nov signal kot

$$\hat{s}_n = - \sum_{k=1}^p a_k s_{n-k},$$

kjer nam p pove število parametrov sistema, koeficiente a_k pa določimo z minimizacijo napake in reševanjem Yule-Walkerjevih enačb. Iz parametrov a_k lahko določimo tudi frekvenčni spekter signala kot

$$P(\omega) = |H(e^{i\omega})|^2 = \frac{G^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-i\omega k}|^2},$$

kjer je G^2 minimum napake

$$G^2 = R(0) + \sum_{k=1}^p a_k R(k),$$

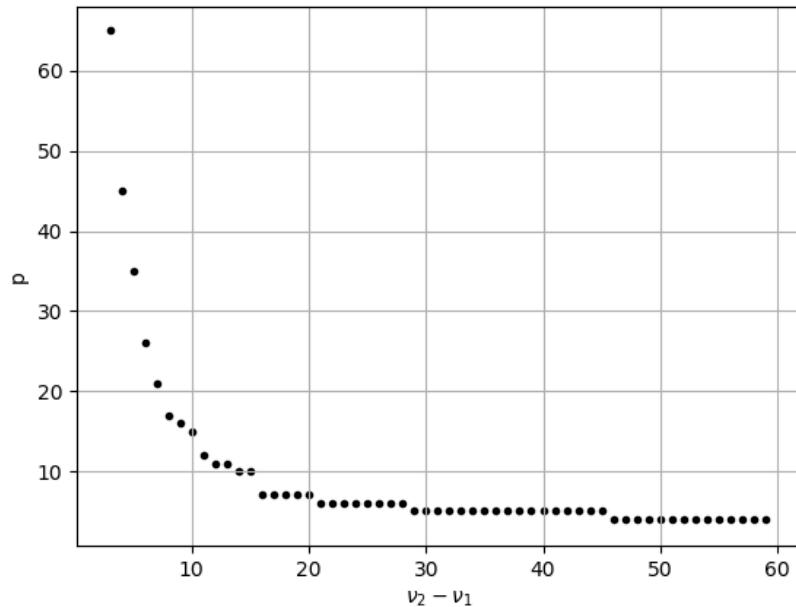
$R(k)$ pa avtokorelacijska funkcija signala

$$R(k) = \sum_n s_n s_{n-k}.$$

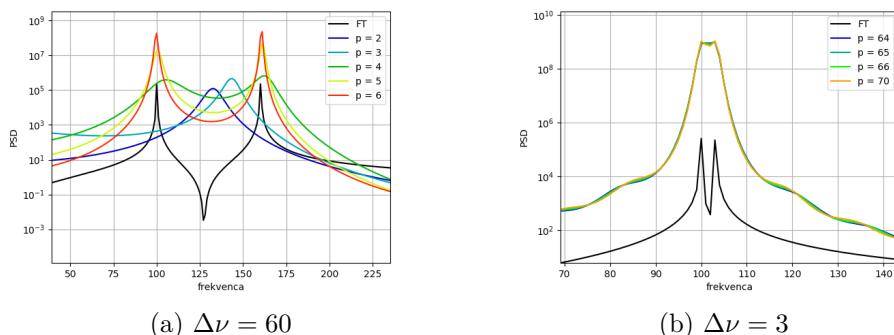
1 Frekvenčna ločljivost

Najprej sem s testnim signalom, sestavljenim iz dveh sinusov z različnima frekvencama preveril, koliko poliv potrebuje naš filter za določeno frekvenčno ločljivost. Na sliki 1 vidimo, da bolj kot sta si frekvenci blizu, večje število polov rabimo, da ju ločimo. Na sliki 2 vidimo testni signal v frekvenčem

spektru ter nekaj spektrov, izračunani z metodo minimalne entropije. Vidimo, da ko je razlika v frekvencah velika, zadošča majhno število polov, da razločimo frekvenci. Del grafa 1, kjer je $\nu_2 - \nu_1$ majhna po mojem podcenji število potrebnih polov, saj na sliki 2 vidimo, da kljub visokemu številu polov ne moremo jasno videti, da imamo dva različna vrhova.



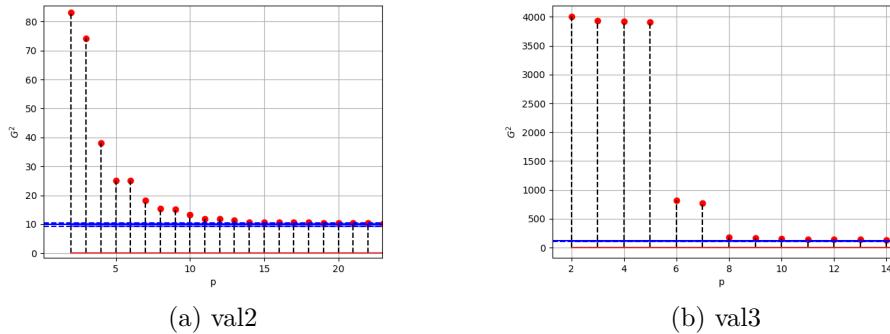
Slika 1: Minimalno potrebno število polov p za določitev dveh frekvenčnih vrhov $\nu_1 - \nu_2$ narazen.



Slika 2: Na grafih je prikazan testni signal v frekvenčnem spektru.

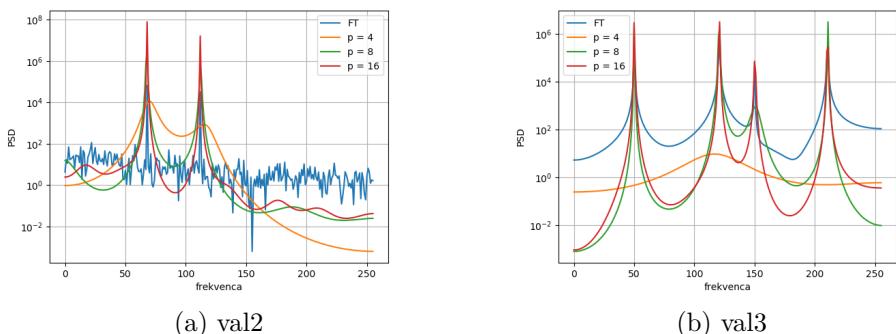
2 Analiza signalov

Sedaj sem v frekvenčem spektru analiziral signale iz naloge 110. Najprej sem z izračunom G^2 ugotovil, približno koliko polov potrebujem, da dobro ujamem frekvenčni spekter signala. Na sliki 3 vidimo, da se po določenem p vrednost G^2 neha zmanjševati, tako da je brez pomena dodatno povečevanje števila p . Z modro je označena vrednost $G^2(p = 100)(1 \pm 0.05)$, ki sem jo uporabil kot nekakšno limitno vrednost, da sem lahko ocenil, kateri p je potrebno vzeti. Približno velja zveza, da potrebujemo vsaj dvakrat več polov kot je pričakovano število frekvenc v signalu. Ker se signal val2 bolj zašumljen jih v praksi potrebujemo nekoliko več.



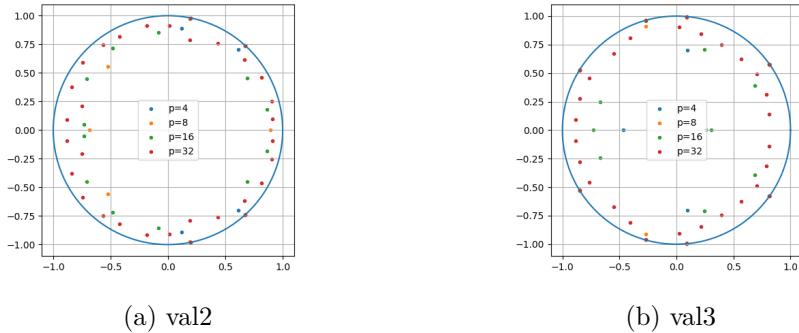
Slika 3: Na grafih je prikazana odvisnost $G^2(p)$ za signala val2 in val3.

Na sliki 4 sta prikazana signala val2 in val3 v frekvenčnem spektru. Vidimo, da z metodo minimalne entropije lepo zadanemo frekvence, ki so v signalu. Vrhovi so za primer signala2 nekoliko širši, kot če uporabimo FT, ampak imamo pa bistveno manj "šumečih frekvenc".



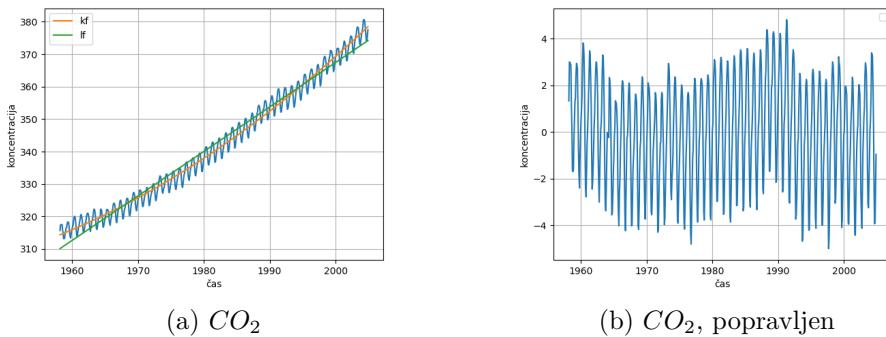
Slika 4: Na grafih je prikazana odvisnost $G^2(p)$ za signala val2 in val3.

Poglejmo si še, če sta uporabljeni filtra stabilna. Da je filter stabilen morajo ležati vsi poli p znotraj enotske krožnice. To je prikazano na sliki 5. Za izbrane p ležijo za oba signala vsi znotraj krožnice. Nekateri so sicer zelo blizu roba, ampak ti ne povzročajo težav.



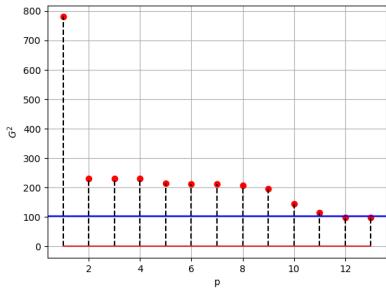
Slika 5: Na grafih so prikazani poli p v kompleksni ravnini.

Podobno analizo sem naredil še za signal, ki spreminja koncentracijo CO_2 v ozračju. Prikazan je na sliki 6. Na grafu a) vidimo, da imajo podatki nek očiten trend, zato sem na njih poizkusil prilagoditi linearno (lf) in kvadratno (kf) funkcijo. Slednja se bolje prilega, zato sem od vseh podatkov odštel ta trend in za analizo uporabljal podatke na grafu b).

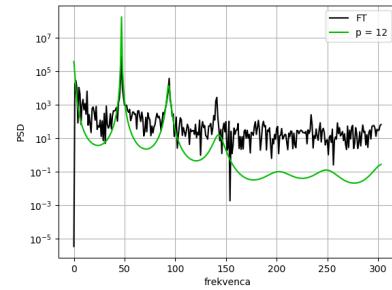


Slika 6: Na grafih so prikazani poli p v kompleksni ravnini.

Na sliki 7 lahko vidimo analizo odvisnosti $G^2(p)$ ter sliko v frekvenčnem spektru, kjer sta primerjana FT in metoda najmanjše entropije z ustrezno izbranim p . Vidimo, da imamo 3-4 dominantne frekvence v odvisnosti CO_2 v ozračju.



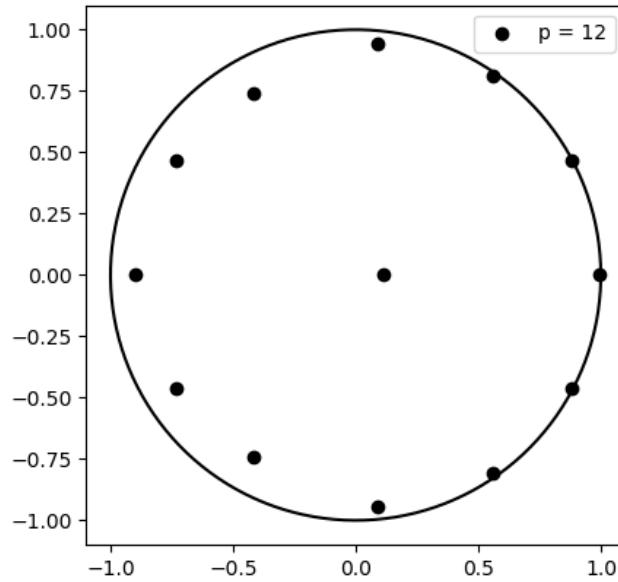
(a) $G^2(p)$



(b) Frekvenčni prostor

Slika 7: Na grafu je prikazana odvisnost $G^2(p)$ (a) ter signal v frekvenčnem prostoru (b) za signal koncentracije CO_2 .

Zopet sem preveril, ali je filter stabilen (slika 8). Kljub omejitvam prikaza, so vsi poli znotraj enotske krožnice.



Slika 8: Pozicije polov za signal CO_2 in $p = 12$.

Naloga 2:

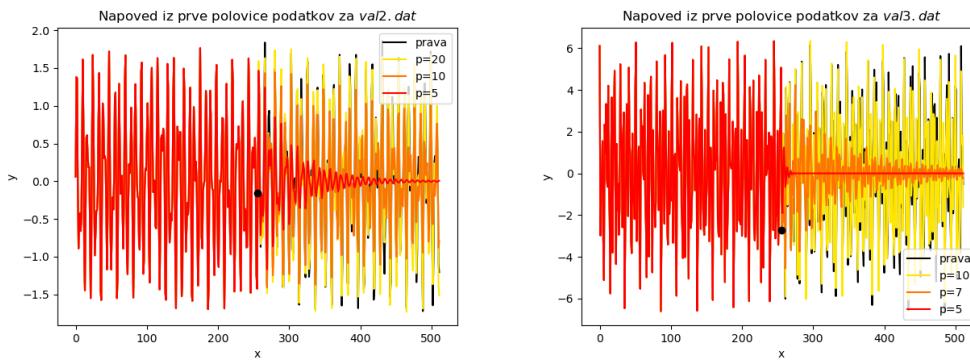
- Napoved v ordinaciji od števila polov. Primerjava
s poljavnim signalom.
- Barza: ordinacija vseh določenih uporabljajočih možnosti.
- Frekvenca secundnega akta?

Vidimo, da klub zelo redkim podatkom še vedno uspemo presenetljivo dobro določiti spekter tako z Fourierjevo transformacijo kot tudi z metodo maksimalne entropije. Določeni vrhovi sicer pridejo ven iz našega območja, saj so preredki, da bi jih zaznali. Tu se verjetno za rahlo boljšo izkaže metoda maksimalne entropije, saj so vrhovi zadosti ozki, da tudi, če je nekaj šuma še vedno izstopajo.

4 Napovedovanje

4.1 Datoteki *val2.dat* in *val3.dat*

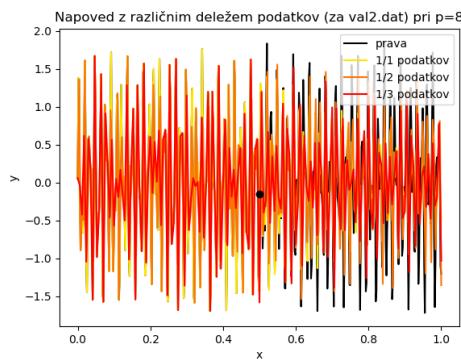
Metodo, ki jo obravnavamo v tej nalogi pa lahko uporabimo tudi za napovedovanje podatkov. Tu bomo vzeli prvo polovico podatkov za model, nato pa bomo poskusili napovedati drugo polovico podatkov. Na koncu bomo primerjali našo napoved z resnično drugo polovico. Slika 14 prikazuje napoved za datoteki *val2.dat* in *val3.dat* za različne velikosti parametra p .



Slika 14: Napoved za drugo polovico podatkov na podlagi prve polovice podatkov za datoteki *val2.dat* in *val3.dat*. Točka od katere naprej napovedujemo je označena s črno pikom.

Vidimo, da nam kar dobro uspe napovedati že za zelo majhne p , še posebej pri datoteki *val3.dat*. Če pa damo p prevelik pa začne divergirati.

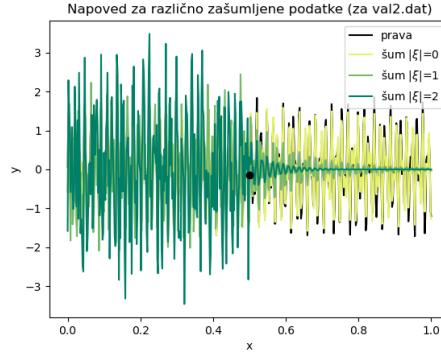
Nadalje nas zanima, kako dobro napoved dobimo, če uporabimo le del podatkov, to prikazuje slika 15.



Slika 15: Napoved za drugo polovico podatkov na podlagi prve polovice podatkov za celoten set podatkov, za polovico ter tretjino podatkov.

Najprej smo vzeli vse podatke, nato pa le del - polovico oz. tretjino. Vidimo lahko, da kljub pomanjkanju podatkov ne izgubimo prav nič na napovedi. To je posledica periodične narave pojava.

Na drugi strani pa ima šum v podatkih precej velik vpliv. Poglejmo. Slika 16 prikazuje napoved, ki jo dobimo z dodanim šumom z različno amplitudo.

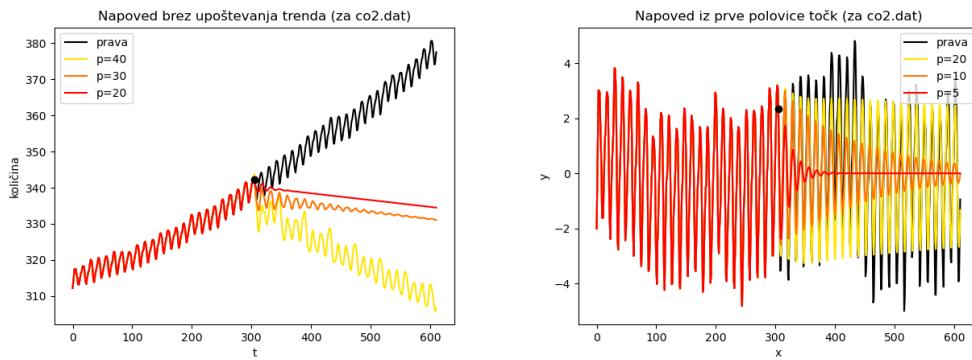


Slika 16: Napoved za drugo polovico podatkov na podlagi prve polovice podatkov za različne amplitudne šume.

Kot že omenjeno šum zelo spremeni napoved. Že malo šuma precej uniči zmožnosti modela. Vendar pa prvih nekaj period še vedno precej dobro ujamemo. Tudi naprej pa je zelo dobro ujeta faza periode.

4.2 Datoteka *co2.dat*

Poglejmo, kako je z napovedjo pri globalnem segregovanju. Spet lahko napovedujemo iz osnovnega signala ali pa parabolični/linearni trend najprej odštejemo, glej sliko 17.



Slika 17: Napoved za drugo polovico podatkov na podlagi prve polovice podatkov za datoteko *co2.dat* brez in z odštetim paraboličnim trendom.

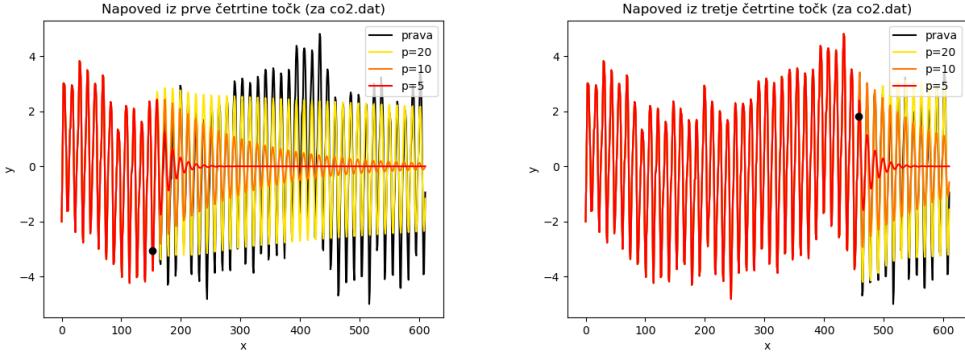
Ko ne upoštevamo potrebujemo precej višje vrednosti p . S temi p precej dobro ujamemo periodo, ne ujamemo pa dobro trenda. Taka napoved bi sicer bila všeč gospodarstvenikom, ker napoveduje konec globalnega segreganja, ampak kot vidimo, je žal napačna.

Na drugi strani pa precej dobro zadenemo dinamiko sistema, če odštejemo trend na začetku. Že za majhne p dobimo zelo dobre rezultate.

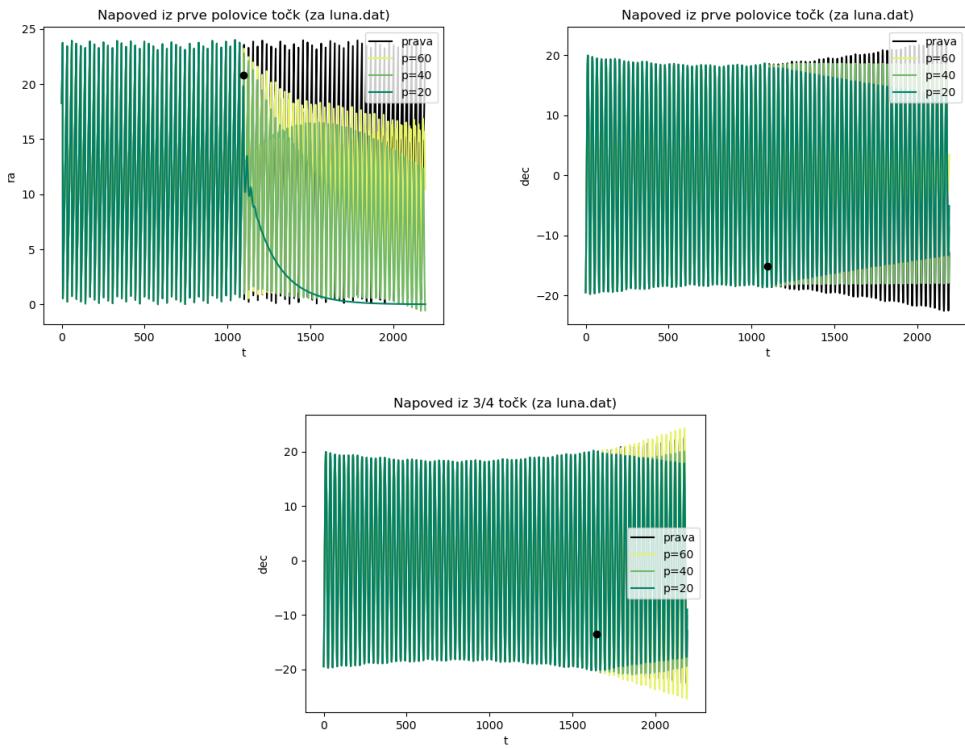
Poglejmo še, kako je, če namesto prve polovice vzamemo prvo četrtino ali prve tri četrtine, glej sliko 18. Zaradi razmeroma majhnih p to, kolikšen del podatkov vzamemo, spremeni le mesto na katerem začnemo napovedovati, količina podatkov je pa tako ali tako zadostna in ne vpliva ali poznamo četrtino ali polovico podatkov. Vidimo, da na vseh mestih, kjer začnemo napovedovati, napovemo zelo dobro.

4.3 Gibanje Lune

Sedaj bomo poskusili napovedati lego Lune na nebu v nebesnih koordinatah *ra* in *dec*. Najprej poglejmo vsako koordinato posebej, glej sliko 19.



Slika 18: Napoved za na podlagi prve in tretje četrtine za datoteko *co2.dat*.

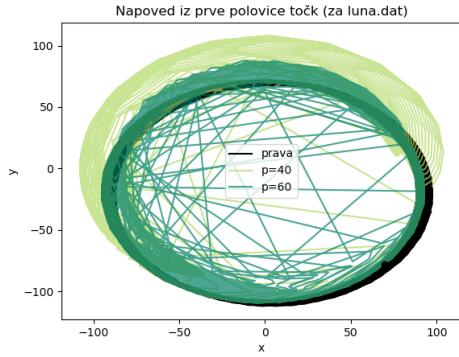


Slika 19: Napoved za rektascenzijo in deklinacijo gibanja Lune na nebu za datoteko *luna.dat*.

Napoved rektascenzije je nekoliko slabša od napovedi deklinacije, a če dovolj povečamo p precej dobro zadane. Napoved deklinacije je skoraj popolna, zgredi le povečevanje amplitudne na koncu. Če si ne izberemo za začetno mesto napovedovanja ravno nesrečno polovico, kjer se trend amplitudne spremeni, nam uspe ujeti še trend amplitudne (skrajno desni graf).

Kljub temu, da izgledata napovedi za rektascenzijo in deklinacijo posebej precej ok, pa nas v realnosti zares zanima gibanje Lune po nebu, glej sliko 20.

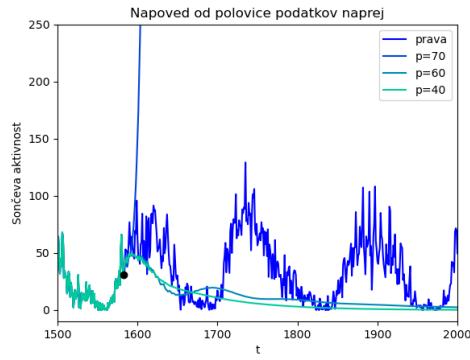
Vidimo, da je napoved gibanja po nebu precej dobra napoved realnosti na začetku, nato pa začne kar nekako čudno sekati pot. Na koncu dobimo katastrofalne orbite, ki sploh več niso podobne pravim, kljub temu, da rektascenzija in deklinacija vsaka posebej izgleda ok na sliki 19. Dobimo nefizikalno obnašanje, ker napovedujemo rektascenzijo in deklinacijo kot dve ločeni količini, zares sta pa zelo povezani.



Slika 20: Napoved za gibanje Lune na nebu za datoteko *luna.dat*. Graf prikazuje projekcijo sfere na ravnino, oddaljenost

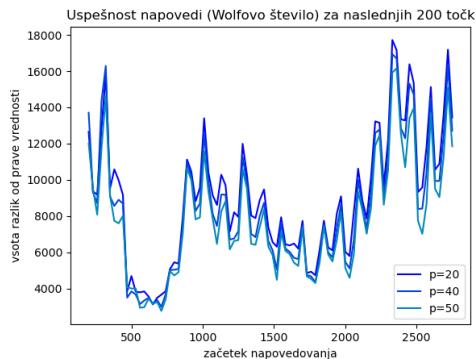
4.4 Wolfovo število

Imamo tudi podatke za Wolfovo število oz. aktivnost Sončevega površja. Tu so podatki zelo zašumljeni. Slika 21 prikazuje našo napoved.



Slika 21: Napoved Sončeve aktivnosti za datoteko *wolf_number.dat*. Dogajanje na začetku napovedi je močno približano.

Kot smo že prej spoznali, šum zelo vpliva na sposobnost napovedi. To vidimo tudi tukaj. Ne zadenemo niti prve periode, če pa še bolj povečamo p pa nam začne divje divergirati. Tukaj z razliko od prej ne zadenemo niti faze. Poglejmo, če obstajajo deli podatkov, kjer je napoved boljša, to prikazuje slika 22.

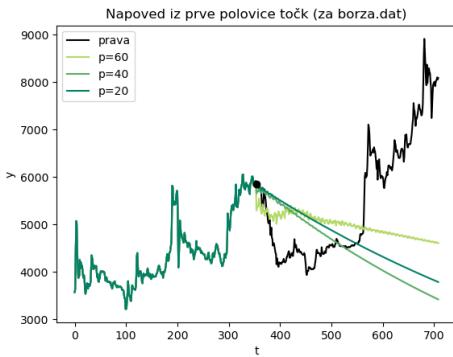


Slika 22: Odstopanje od prvi 200 točk napovedi za različna mesta, kjer začnemo napovedovati za datoteko *wolf_number.dat*.

Napoved je povsod precej slaba, vendar obstaja področje okoli 500. meritve, kjer nam uspe malo boljše napovedati. Hkrati pa je na sliki tudi zelo lepo vidno, da se z večanjem p natančnost izboljšuje (seveda do določene mere, kjer začne divergirati).

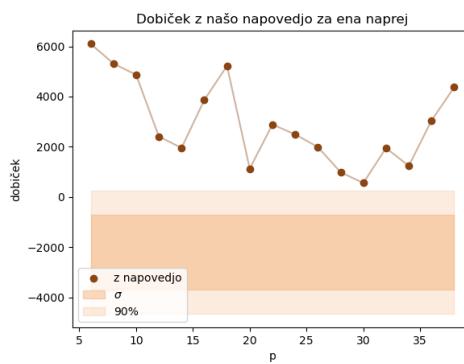
4.5 Zaslužek na borzi?

Za konec nas še zanima, če lahko kaj napovemo za dogajanje na borzi. Naša napoved je prikazana na sliki 23.



Slika 23: Napoved za vrednosti delnic iz datoteke *borza.dat*.

Vidimo, da je napoved precej slaba, za nizke vrednosti praktično popolnoma zgreši, za večje pa začne divje divergirati. Vendar pa vseeno zadenemo prvih nekaj točk, če nastavimo pravi p . Res se ne spoznam na delnice, ampak kakor razumem sta pri vlaganju v delnice v grobem dve taktiki: (i) vložiš v nekaj kar se ti zdi perspektivno in čakaš; (ii) poskušaš loviti mini trende in prodajaš in kupuješ na krajsih časovnih skalah. Pri prvi taktiki naša napoved propade na celi črti, vendar pa lahko preizkusimo drugo, tu nam je treba napovedati le za naslednjo točko. Oblikujmo našo preprosto taktiko: če model napoveduje rast delnic, vložimo vanj 1 €, sicer ne vložimo nič. Naš zaslužek v odvisnosti od parametra p prikazuje slika 24.

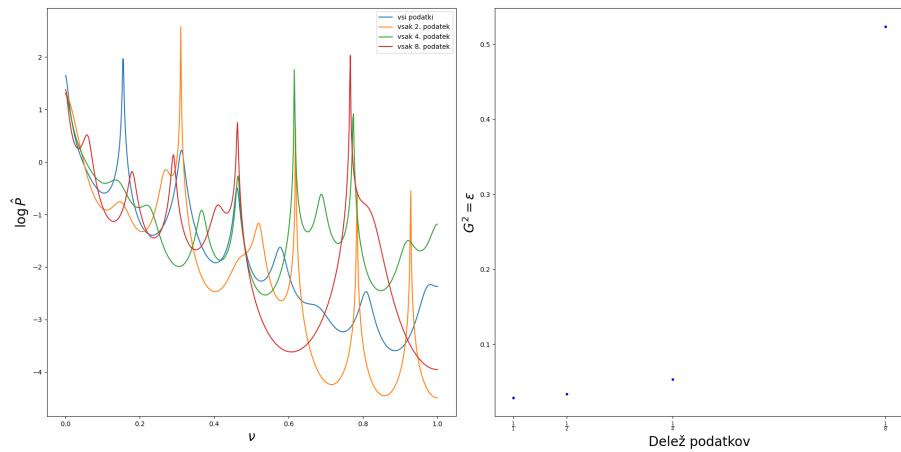


Slika 24: Zaslužek v odvisnosti od p , če vložimo 1 €, če model napoveduje rast delnic in nič sicer. Po vsakem podatku spet na novo napovemo. Rjavi območji prikazujeta območji v katerih z 68% oz. 90% verjetnostjo leži zaslužek, če vlagamo naključno.

Vidimo, da kljub temu, da delnice v povprečju padajo, mi s pomočjo našega modela zanesljivo služimo. Naša napoved je zelo očitno izven intervala, kjer se nahajajo vrednosti zaslužka, če vlagamo naključno. Kljub odlični priložnosti za služenje mastnih vsot na borzi pa mi fizika pomeni preveč, da bi se ji odpovedala. :)

Crtanje in Prikaz

Slika 4 prikazuje kako se spekter spremeni, če zmanjšamo število vhodnih podatkov.



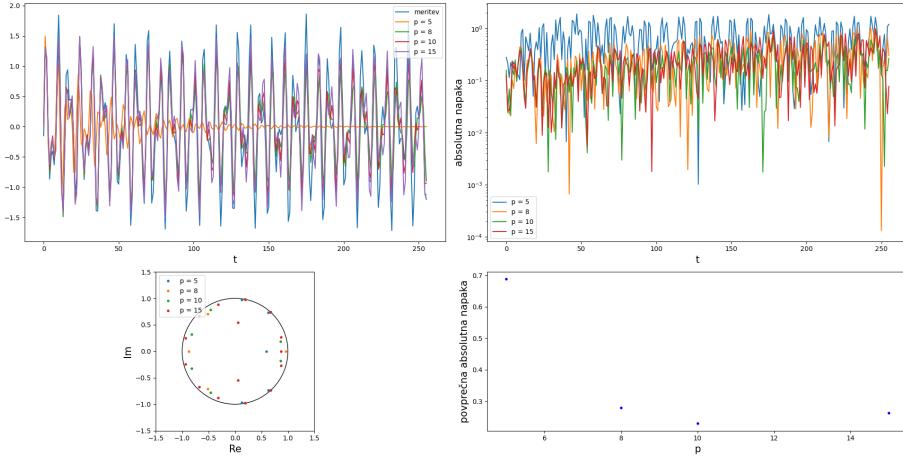
Slika 4: Prikaz frekvenčnih spektrov za datoteko `co2.dat` (levo) in napaka (desno) za $p = 20$ v odvisnosti od različnega števila vhodnih podatkov.

3 Linearna napoved

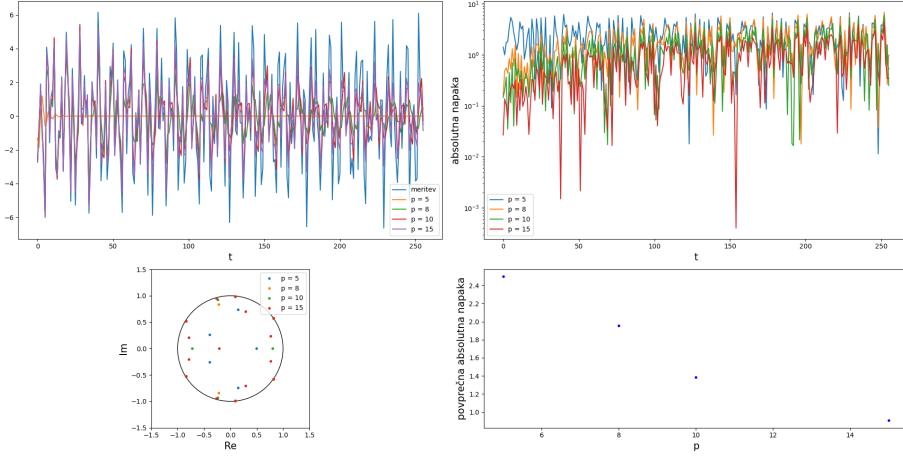
Sedaj uporabimo koeficiente metode maksimalne entropije določene na prvi polovici zapisa signala, za napoved druge polovice signala.

3.1 `val2.dat` in `val3.dat`

Linearno napoved za prva dva signala prikazujeta sliki 5 in 7.



Slika 5: Napoved druge polovice signala `val2.dat` in absolutna napaka (zgoraj) ter poli in povprečna napaka v odvisnosti od velikosti p (spodaj).

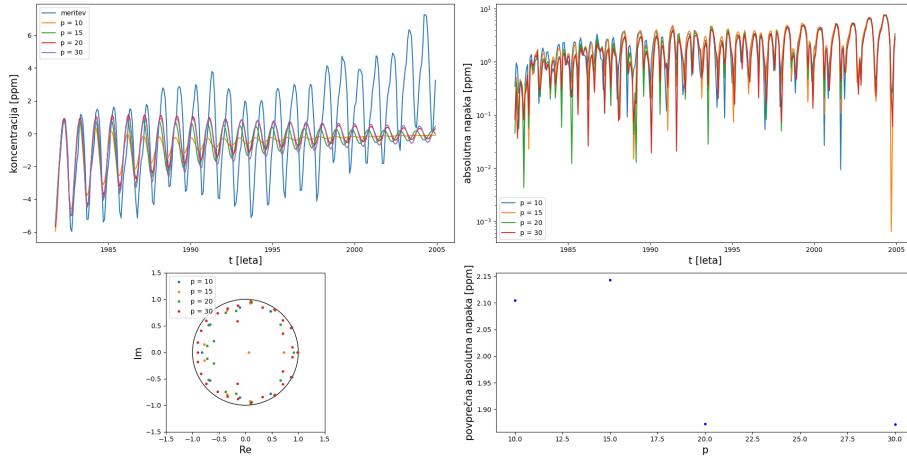


Slika 6: Napoved druge polovice signala `val3.dat` in absolutna napaka (zgoraj) ter poli in povprečna napaka v odvisnosti od velikosti p (spodaj).

Opazimo, da za dana signala večja vrednost parametra p ponovno izboljša napoved signala. Napaka se spet relativno hitro ustali. Opazimo tudi, da ima napoved težavo z amplitudami. Te namreč ne napove najbolje, čeprav zna relativno dobro določiti frekvenco signala. Zato dobimo pri 2. signalu večja odstopanja, saj so tudi amplitude večje.

3.2 Koncentracija CO₂ v zraku

Enako storimo še s koncentracijo CO₂ v zraku (slika ??).

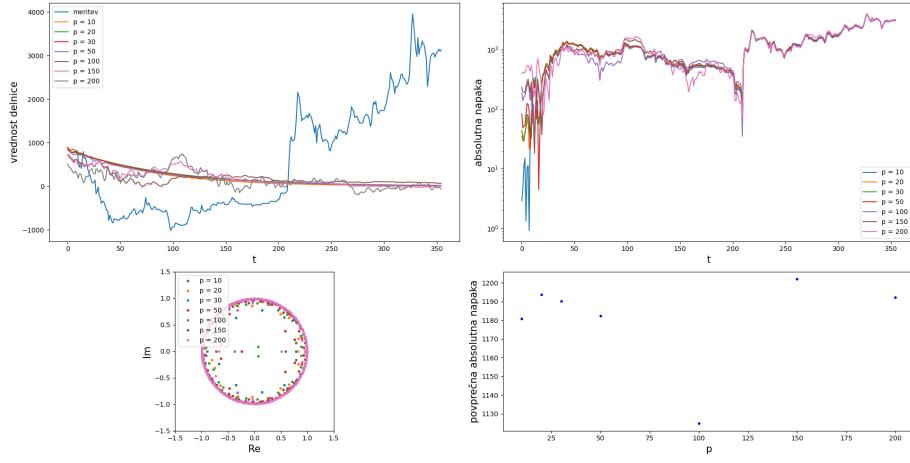


Slika 7: Napoved druge polovice signalov co2.dat in absolutna napaka (zgoraj) ter poli in povprečna napaka v odvisnosti od velikosti p (spodaj).

Ponovno opazimo težavo v napovedovanju amplitud, kar je verjetno posledica preslabe ocene trenda koncentracije.

3.3 Borza

Na voljo imamo še nekaj drugih signalov, ki jim želimo napovedati časovno evolucijo. Slika 8 prikazuje linearno napoved časovnega spremnjanja borze.

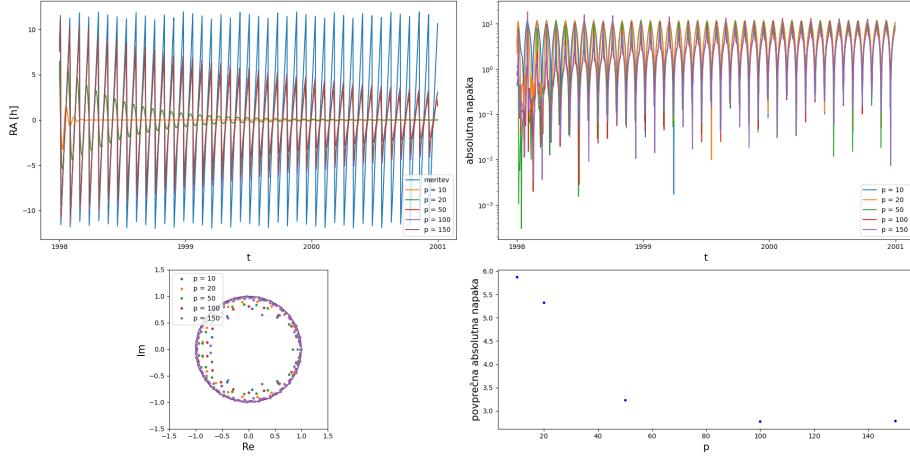


Slika 8: Napoved druge polovice signala `borza.dat` in absolutna napaka (zgoraj) ter poli in povprečna napaka v odvisnosti od velikosti p (spodaj).

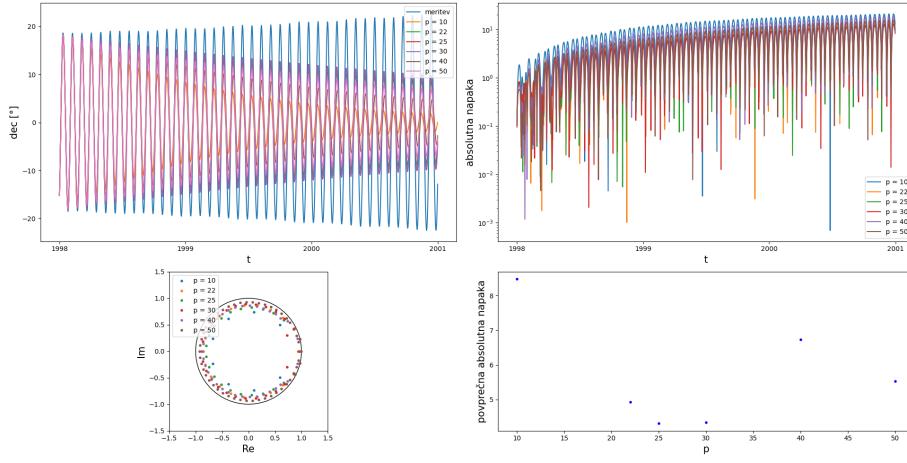
Opazimo, da ne dobimo niti približno prave časovne napovedi, kar je razumljivo, saj ne opazimo nikakršnih ponavljajočih se vzorcev v signalu. Napake so zato zelo velike, parameter p pa ne vpliva na izboljšanje napovedi.

3.4 Lunine efemeride

Nekoliko boljše lahko napovemo lunine efemeride, saj imajo te značilen periodičen potek (slike 9 in 10).



Slika 9: Napoved druge polovice rektascenzije in absolutna napaka (zgoraj) ter poli in povprečna napaka v odvisnosti od velikosti p (spodaj).

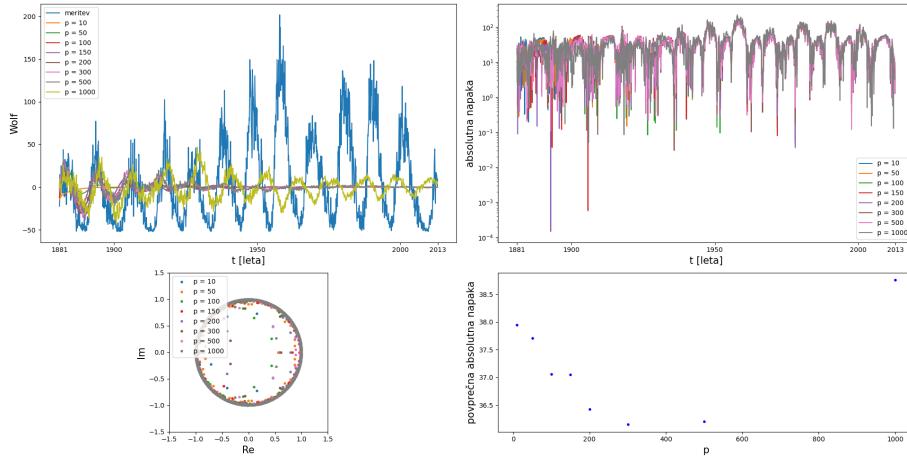


Slika 10: Napoved druge polovice deklinacije in absolutna napaka (zgoraj) ter poli in povprečna napaka v odvisnosti od velikosti p (spodaj).

Opazimo, da je napoved najboljša do sedaj, čeprav amplitudo še vedno slabše napove. Hkrati opazimo zanimivost, da večja vrednost p ne nujno izboljša napoved. Na grafu na sliki 10 je namreč najboljšo napoved podal model s $p = 25$.

3.5 Sončni cikel

Kot zadnji signal si oglejmo še sončni cikel oz. sprememjanje Wolfovega števila (slika 11).

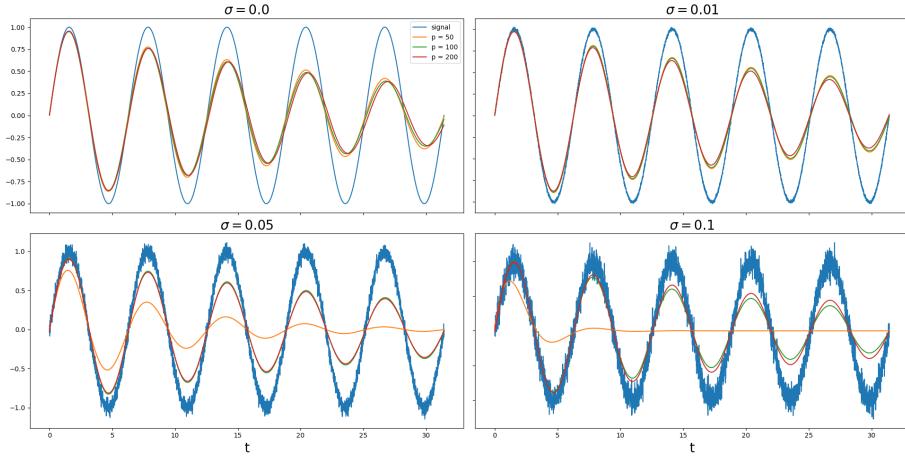


Slika 11: Napoved druge polovice signala sončevega cikla (zgoraj) ter poli in povprečna napaka v odvisnosti od velikosti p (spodaj).

Ker je signal zelo zašumljen, potrebujemo zares visoke vrednosti parametra p , da sploh pravilno napovemo frekvenco vsaj za prvi del opazovanja. Zanimivo opazimo, da nižje amplitude tokrat precej dobro zadanemo.

3.6 Vpliv šuma

Za konec si oglejmo še vpliv šuma na linearno napoved. Obravnavamo testen sinusni signal, ki mu primešamo različno količino Gaussovskega šuma kot prikazuje slika 12.



Slika 12: Vpliv šuma na linearno napoved za različne vrednosti parametra p .

Opazimo, da ne glede na velikost šuma dobro napovemo frekvenco signala, če le vzamemo dovolj veliko vrednost parametra p .

Zahájení malby

Zaključne naloge

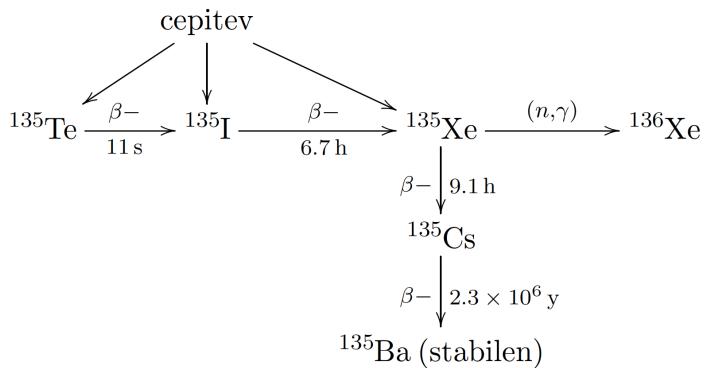
1. Letalska družba želi prepeljati potnike med več mest, med katerimi so različne razdalje in povpraševanja potnikov, tako da ima čim večji dobiček. Na voljo ima različno velika letala z različnimi stroški goriva in vzdrževanja. Letala imajo lahko tudi različne konfiguracije (različno število sedežev, ločen poslovni razred). Poišči optimalni razpored letov.
2. Imamo N vagonov z enako lastno maso, povezanih z $N - 1$ vezmi, te pa imajo naključno porazdeljene natezne trdnosti. Kako je treba razporediti fiksno količino peska po vagonih, če želimo doseči maksimalen pospešek, ne da bi pri tem potrgali vezi med vagoni? Koliko tovora lahko naložimo na vlak, če je pospešek vlaka predpisani? Preveri dve možnosti: v prvi različici vlak vleče motor v prvem vagonu, v drugi različici pa ima vsak vagon svoj motor, pri čemer vsi vlečejo z enako vlečno silo.
3. Kroglice z nezanemarljivim polmerom postavimo v oglisča enostavnih poliedrov in jih povežemo s togimi prečkami z zanemarljivo maso in prostornino. Z numerično minimizacijo poišči vse metastabilne lege teh teles v vodi pri različnih gostotah kroglic. Rezultate prikaži tudi v obliki diagrama $h(\rho)$.
4. Razišči Isingov model na mreži s trikotnimi osnovnimi celicami. Spremljaj opazljivke v odvisnosti od temperature in od velikosti mreže ter identificiraj morebitne fazne prehode. Kakšno je obnašanje sistema v antiferomagnetnem režimu?
5. Enako kot prejšnja naloga, vendar na heksagonalni mreži.
6. Isingov model na kartezični mreži, toda v treh dimenzijah.
7. Isingov model z interakcijo dolgega dosega, pri kateri sklopitveni člen med dvema spinoma eksponentno pada z razdaljo med njima.
8. Plastična kocka, v kateri se nevroni lahko tako sipljejo kot tudi absorbirajo, je premazana s tanko plastjo, ki seva nevronne. Določi porazdelitev absorbiranih nevronov po volumnu kocke pri različnih vrednostih absorpcijskih parametrov.
9. Simuliraj mavrico! Upoštevaj, da Sonce seva kot črno telo.
10. Izrabljene gorivne palice jedrskih reaktorjev so shranjene v bazenu z vodo, ki ji je dodan bor ^{10}B za absorpcijo nevronov. Opazuj količino nevronov, izsevanih iz bazena, in porazdelitev absorbiranih nevronov po prostornini bazena.
11. Rast tumorja lahko obravnavamo s populacijskim modelom

$$\dot{N} = -\lambda N \log \frac{N}{K}, \quad (1)$$

$$\dot{K} = -\alpha c(t)K + \omega N - \gamma N^{2/3}K, \quad (2)$$

kjer je N število celic v tumorju, K pa največja velikost tumorja, pogojena z omejeno prekravavljenostjo. Zaradi te omejitve rast ni eksponentna, ampak jo logaritemski člen v prvi enačbi zaustavi pri končni velikosti. Razišči dinamiko rasti tumorja pri konstantni in pri spremenljivi dozi antiangiogenskega zdravila $c(t)$.

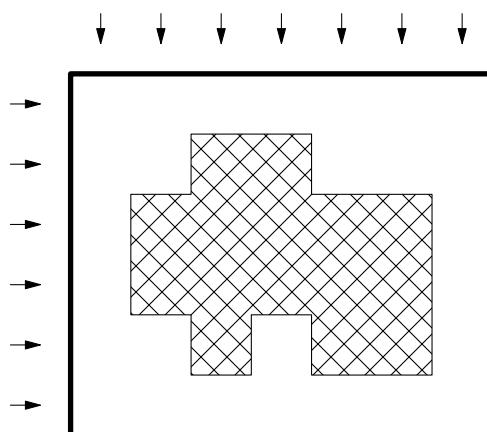
12. Linearna napoved s poli **in** ničlami. Uporabi dve povezani časovno odvisni spremenljivki, tako da je ena odvisna od druge. Primerjaj, ali dodatek ničel izboljša napoved. Nabor primernih podatkov lahko najdeš na <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.php?type=ts>.
13. Preizkus, ali lahko konkretne podatke uporabiš kot vir naključnih števil. Uporabiš lahko fizikalne meritve, geografske podatke (velikost mest, jezer, rek), zadnje objave na Twitterju ipd. Številske podatke moraš verjetno najprej transformirati, da dobiš bolj enakomerno porazdelitev. Namig: fizikalne meritve imajo običajno normalno porazdeljen šum. Če se podatki raztezajo čez več velikostnih redov, Benfordov zakon (https://en.wikipedia.org/wiki/Benford%27s_law) trdi, da je običajno enakomerno porazdeljen logaritem vrednosti oz. vsaj njegov neceli del.
14. V jedrski elektrarni med obratovanjem reaktorja v gorivu nastaja plin ksenon ^{135}Xe , ki je najpomembnejši nevronski "strup" med cepitvenimi produkti. Potek reakcij prikazuje diagram:



- Opazuj koncentraciji joda ^{135}I in ksenona ^{135}Xe pri konstantnem delovanju reaktorja ter pri časovno odvisnem nevronskem fluksu (prizig ali zaustavljanje reaktorja, stopničasta odvisnost).
15. Trikotno mrežo tlakujemo s ploščicami, katerih trije robovi imajo prirejen "naboj" $(-1, 0, 1)$ v treh možnih orientacijah in dveh različno sučnih različicah (v smeri urnega kazalca ali obratno). Interakcijska energija med sosedji naj bo zmnožek nabojev sovpadajočih robov. Razišči fazni diagram te snovi v odvisnosti od temperature za oba predznaka sklopitve. Predpostavi, da so vse ploščice sučne v istem smislu. Lahko dodaš zunanje polje v eni izmed glavnih smeri mreže.
16. Razporejanje prenosa podatkov po omrežju. Za model omrežja vzemi $N \times N$ kvadratno mrežo, vsak rob pa ima naključno maksimalno hitrost povezave med 0 in 1. Vozlišča na zgornjem robu so internetni odjemalci, spodnji rob so pa strežniki. V notranjih vozliščih velja 1. Kirchhoffov zakon. S pomočjo linearne programiranja določi, kolikšne hitrosti prenosa imajo strežniki in odjemalci, ko je skupna hitrost prenosa največja. Ker gre za naključna omrežja, si oglej tudi statistično porazdelitev zanimivih količin.
17. Po absorpcijsko-sipalnem modelu razišči učinek raznobarvnih slojev polprosojnih pigmentov različnih debelin na barvo odbite svetlobe. Za simulacijo izberi emisijski spekter svetila, absorpcijske spektre materialov in uporabi fiziološke odzivne funkcije očesa za določitev RGB vrednosti barv. Simuliraj barvo krogle absorpcijsko-sipalnega materiala v odvisnosti od kota med smerjo opazovanja in smerjo osvetlitve.
18. Zajce in lisice postavi v enodimensionalno sosesko šibko sklopljenih ekosistemov. Velja klasični model Lotka-Volterra, le da izbrani delež rodnostnega prispevka preselimo v sosednja ekosistema. Se kaj spremeni, če tudi lisice lahko žrejo zajce iz sosednjega ekosistema?
19. Koeficienti linearne napovedi podajajo diferenčno prenosno funkcijo procesa in predstavijo fizikalni pojav kot sistem sklopljenih dušenih oscilatorjev. Naš signal je partikularna rešitev diferenčne enačbe kot odziva na specifično realizacijo belega šuma na vhodu.
- Poisci posnetke različnih resonančnih pojavov, npr. zavijanje vetra, žuborenje potoka, zvok strune, zvok udarca po rezonatorju kitare, en ton človeškega glasu. Poisci koeficiente linearne

napovedi in generiraj ter poslušaj odziv sistema na beli šum in na delta funkcijo, lahko pa tudi na kak drug signal: tako pridobljene modele resonatorjev lahko tudi zaporedno sestavljaš.

20. Razišči transformacije koeficientov linearne napovedi pri generiranju zvoka. Izberi nekaj vzorčnih signalov, pridobi njihove koeficiente linearne napovedi, ter skozi predvajaj delta funkcijo, bel šum in še kakšen drug model šuma. Na koeficientih izvajaj naslednje transformacije: skaliranje dušenja (radialna komponenta) ter frekvence (polarna komponenta) ničel karakterističnega polinoma: $z \rightarrow |z|^\alpha e^{i\beta \arg z}$. Ali zvok pri tem ohranja svojo "barvo"? Lahko prenosno funkcijo spreminjaš zvezno?
21. Podobno kot zgoraj pridobi koeficiente linearne napovedi za različne pojave, predvsem pojave z nekaj jasno določenimi frekvencami (instrumenti), in glej njihov odziv na bel šum na vhodu. Kaj se zgodi, če linearno interpoliraš koeficiente napovedi dveh različnih signalov? Kaj se dogaja z ničlami v kompleksni ravnini in kako to slišimo na zvoku na izhodu?
22. Z Metropolisovim algoritmom obravnavaj obnašanje periodične 2D mreže kock, kjer so edine dovoljene poteze zasuki dveh sosednjih kock okrog njune zveznice v nasprotnih smereh za 90° . Kocke so pobarvane s tremi različnimi barvami (nasprotne ploskve enake barve). Uvedi različne sklopitvene interakcije med barvami (možnih je 6 sklopitev) in razišči fazno obnašanje sistema pri različnih temperaturah.
23. Zajci, lisice in hrana v 2D: vsaka točka prostora ima vrednost iz intervala $(0, 1)$, ki pove nasičenost s hrano, z katero je sorazmerna rodnost zajcev, sorazmerno z novimi zajci pa hrane tudi zmanjkuje. Vsaka točka sledi Lotka-Volterrovim enačbam z dodatkom majhne verjetnosti za migracijo zajcev in lisic v sosednjo celico. Razišči obnašanje sistema za različne začetne pogoje.
24. Posplošeni Thomsonov problem: poišči stanja z najnižjo energijo za sistem delcev, ki imajo poleg naboja še fazo, tako da je meddelčna energija sorazmerna s $\frac{\cos^2(\psi_1 - \psi_2)}{\|r_{12}\|}$.
25. Postavi klasične elektrostatske dipole na trikotno mrežo in razišči lastnosti lokalnih minimumov elektrostatske potencialne energije. Preizkusi mreže različnih velikosti. Vsak dipol interagira z vsemi ostalimi. Poišči način za simulacijo čim boljšega približka razsežne mreže.
26. Enako kot zgoraj, na heksagonalni mreži (satovje).
27. Thomsonove babuške: razišči primer, ko imamo več kot eno koncentrično kroglo z razporejenimi točkastimi naboji.
28. V radioterapiji je poglaviti problem načrtovanje doze obsevanja. Izvire sevanja je treba razprediti tako, da v predelih tumorja zagotovijo dozo, ki je večja od kritične doze za uničenje tkiva, v zdravem okoliškem tkivu pa naj bo prejeta doza čim manjša. Postavili bomo najpreprostejši 2D model: obsevanje z vzporednim snopom sevanja, ki ga enakomerno pomikamo prek tarče v dveh pravokotnih smereh. Pojemanje žarka v tkivu z globino zanemarimo.



Tumorsko področje smo označili senčeno, ostalo je zdravo tkivo. Puščice pomenijo posamezne diskretizirane snope sevanja. V gornji sliki $6 \times 7 = 42$ celic so neznane količine jakosti $6 + 7 = 13$ curkov. Vsaka celica prejme dozo, ki je vsota jakosti obeh curkov, ki se v njej križata. Za celice tumorja zahtevamo, da je ta vsota večja od kritične (ki jo uporabimo za enoto), za zdrave pa zahtevamo, da je njihova skupna prejeta doza čim manjša. V duhu linearnega programiranja je tudi obratna formulacija (ki pa manj ustreza radiološkim zahtevam): v vsaki od zdravih celic naj bo prejeta doza manjša od enote, skupna doza v tumorskih celicah pa čim večja. Eksperimentiraš lahko še s preprostejšimi obsevalnimi polji ali pa tudi z bolj zahtevnimi, ki terjajo več snopov in s tem več spremenljivk.

29. Preuči Thomsonov problem na površju prevodne kocke in razišči prehod v limito zvezne porazdelitve naboja.
30. Na velikem travniku z detektorjem sevanja isčemo izgubljen radioaktivni vir. Z meritvijo hitrosti doze na nekaj različnih mestih je mogoče ugotoviti lokacijo vira. Koliko merskih točk je potrebnih za določitev vira? Kako je natančnost lege vira odvisna od natančnosti koordinat merilnih mest? Upoštevaj tudi, da je število detektiranih sunkov v izbranem časovnem intervalu porazdeljeno po Poissonovi porazdelitvi.
31. Energijska in kotna porazdelitev elektronov okrog sevalca β (^{90}Sr) s polkrogelno geometrijo (polmer 1 mm).
32. Curek nevronov (monokromatskih ali s hitrostmi, porazdeljenimi maxwellsko) vpada pravokotno na dve tesno staknjeni plasti redkejšega materiala (izolacija) in gostejšega materiala (kovina). Preuči energijsko in kotno porazdelitev (povratno) sipanih nevronov v odvisnosti od sipalnih in absorpcijskih lastnosti obeh snovi. (Metoda za odkrivanje koroziskih poškodb v cevovodih zaradi prisotnosti vode v izolacijskem plašču ali pod njim.)
33. Sledimo gibanju delca, ki izgine za zaslon in se čez čas spet prikaže na drugi strani zaslona. Kako vrsta gibanja (na primer poševni met, nihanje) in jakost šuma (negotovi izmerki lege, preden zaslon zakrije delec) vplivata na uspeh napovedi lege delca z uporabo Kalmanovega filtra?
34. Z raketo zemlja-zrak želimo sestreliti Sovražno letalo, ki enakomerno kroži po nebu. Raketa z vgrajeno radarsko napravo sledi letalu, računa razdaljo in kot do letala ter ustrezeno prilaga smer letenja. Z uporabo Kalmanovega filtra preuči, kaj ključno vpliva na ekstrapolacijo trajektorije rakete in uspešnost zadetka.
35. Prepoznavanje obrazov z uporabo lastnih obrazov in razcepa na singularne vrednosti.
36. "Shazam": Študiraj spektre časovnih izsekov izbrane glasbe in poišči način za *hitro* prepoznavanje glasbe. Od česa je odvisen uspeh prepoznavane glasbe?
37. Izkoristek Geiger-Müllerjeve cevi ima močno energijsko odvisnost, ki jo kompenziramo tako, da števec obdamo z ovojem iz kovin z različnimi absorpcijskimi lastnostmi (energijsko odvisni absorpcijski koeficienti). Poišči ovoj, ki naredi energijski odziv Geiger-Müllerjevega detektorja karseda enakomeren.
38. Poišči model, ki najbolje opiše izmerjene vrednosti nabojnega oblikovnega faktorja protona. v odvisnosti od gibalne količine Q^2 in določi nabojni polmer protona. Meritve so dostopne na: <https://arxiv.org/format/1307.6227>.
39. Sestavi model za opis magnetnega spektrometra, ki iz dveh izmerjenih leg $(x_{\text{Fp}}, y_{\text{Fp}})$ in dveh kotov $(\vartheta_{\text{Fp}}, \varphi_{\text{Fp}})$ kar najbolje rekonstruira relativno gibalno količino delca:

$$(x_{\text{Fp}}, \vartheta_{\text{Fp}}, y_{\text{Fp}}, \varphi_{\text{Fp}}) \rightarrow \delta_{\text{Tg}}$$

40. Skonstruiraj in nauči nevronsko mrežo, ki posnema magnetni spektrometer in iz dveh izmerjenih leg $(x_{\text{Fp}}, y_{\text{Fp}})$ ter dveh kotov $(\vartheta_{\text{Fp}}, \varphi_{\text{Fp}})$ kar najbolje rekonstruira relativno gibalno količino delca:

$$(x_{\text{Fp}}, \vartheta_{\text{Fp}}, y_{\text{Fp}}, \varphi_{\text{Fp}}) \rightarrow \delta_{\text{Tg}}$$

41. Aktivni del visokoločljivega germanijevega spektrometra lahko modeliramo s 5 cm visokim in 5 cm širokim valjem germanija, ki je skrit v 1 mm debel plašč aluminija. Pod detektor (vzdolž osi valja) postavimo različne radioaktivne vzorce, ki vsebujejo radioaktivni ^{137}Cs . Preuči, kako je izkoristek spektrometra za detekcijo žarkov gama iz vzorca odvisen od oddaljenosti, oblike in velikosti vzorca.