Modelska analiza I

Naloga 102

20.10. 2022

?

in

0.5 kg

0.5 L

Modelska analiza I
2022/23

2. naloga – Linearno programiranje

Med tipične primere, ki jih lahko učinkovito rešimo z metodami linearnega programiranja, sodi sestavljanje diet za hujšanje, zdravljenje ali športne aktivnosti. Za dani nabor živil določamo njihove količine, pri čemer moramo zadostiti različnim omejitvam. Med drugim moramo zagotoviti priporočene dnevne odmerke mineralov, vitaminov in hranilnih snovi, omejiti pri vnos maščob, ogljikovih hidratov ter telesu škodljivih snovi, hkrati pa zagotoviti, da energijska vrednost ustreza zahtevam posameznika.

Vnos vsake izmed hranilnih snovi je linearna funkcija količin živil in je natanko določena z njihovo sestavo. Od vrste diete pa je odvisno, katere parametre omejimo in katere minimiziramo.

Datoteka `tabela-zivil.dat`[1] vsebuje podatke o energijski vrednosti ter vsebnosti maščob, ogljikovih hidratov, proteinov, kalcija in železa v nekaj živilih, skupaj z okvirnimi podatki o njihovi ceni.

1. Minimiziraj količino kalorij, če je priporočen minimalni dnevni vnos 70 g maščob, 310 g ogljikovih hidratov, 50 g proteinov, 1000 mg kalcija ter 18 mg železa. Dnevni obroki naj količinsko ne presežejo dveh kilogramov hrane. Upoštevate lahko še minimalne vnose za vitamin C (60 mg), kalij (3500 mg) in sprejemljiv interval za natrij (500 mg – 2400 mg), ki so tudi na voljo v tabeli.
2. Kako se rezultat razlikuje, če zahtevamo minimalno 2000 kcal in namesto energije minimiziramo vnos maščob?
3. Namesto kalorij minimiziraj še ceno. Kako se varčevanje odraža na zdravi prehrani?
4. Ker rešujemo poenostavljen problem z malo parametri na živilo, so lahko rezultati nerealistični. Lahko z omejitvijo količine posameznih živil v obroku izboljšaš uravnovešenost prehrane?

   Poskusiš lahko tudi poiskati podatke o drugih mineralih in hranilih in s tem izboljšati model.

Linearno programiranje: Linearni optimizacijski problem formuliramo kot optimizacijo funkcije

$$f(x_j) = \sum_j a_{0j} x_j = \text{ekstrem}$$

pod pogoji

$$\sum_j a_{ij} x_j \left\{ \begin{matrix} = \\ \leq \\ \geq \end{matrix} \right\} b_i .$$

Iskane spremenljivke x_j so v večini paketov privzeto omejene na pozitivne vrednosti.

Rutine za linearno programiranje so v različnih zbirkah med drugim na voljo pod imeni `simplx` (*Numerical Recipes*), `LinearProgramming` (*Mathematica*), `linprog` (*matlab*), `scipy.optimize.linprog` (*Python*) in v knjižnici *GLPK*, ki pride tudi s samostojnim programom `glpsol`. Slednji sprejema vrsto različnih formatov za deklaracijo linearnih problemov (na primer `CPLEX LP`).

[1] dostopno na strani `http://predmeti.fmf.uni-lj.si/modelska/podatki`

Napotki:

- Grafi vs. tabele
- Lastne ideje, ne izdelovati "kumulativnih" nalog.
- min. vs. max.
- deleži makrohranil vs. mikrohranil v hrani
- Lastne diete (LCHF, beljakovinska dieta, "šef dosti")
- Kaj dati obrok?

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Oddelek za fiziko

Linearno programiranje

Modelska analiza 1,
Fizika, 2. stopnja, 1. letnik

Avtor: Kevin Jaksetič, vpisna številka: 28222050

Mentorja: prof. dr. Simon Širca, doc. dr. Miha Mihovilovič

Študijsko leto 2022/2023

Naloga: Sestava jedilnika z linearnim programiranjem

Opis metode je bil dne 20. 10. 2022 dostopen na spletni strani `https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_programming`, opišimo raje konkretni problem ki ga rešujemo.

V podani tabeli živil `tabela-zivil.dat` imamo hranilne vrednosti 49 živil (tabela je bila 20. 10. 2022 dostopna na povezavi `https://predmeti.fmf.uni-lj.si/modelska/podatki`). To vključuje energijsko vrednost, maščobe, ogljikove hidrate, proteine, kalcij, železo, vitamin C, kalij, natrij. Poleg tega je poznana tudi cena. Naštete količine so normirane na 100 g živila. Iščemo količino posameznih živil, da bomo sestavili jedilnik z želenimi zahtevami. Problem sem reševal v programskem jeziku *Python* s funkcijo `linprog` iz modula *Scipy*.

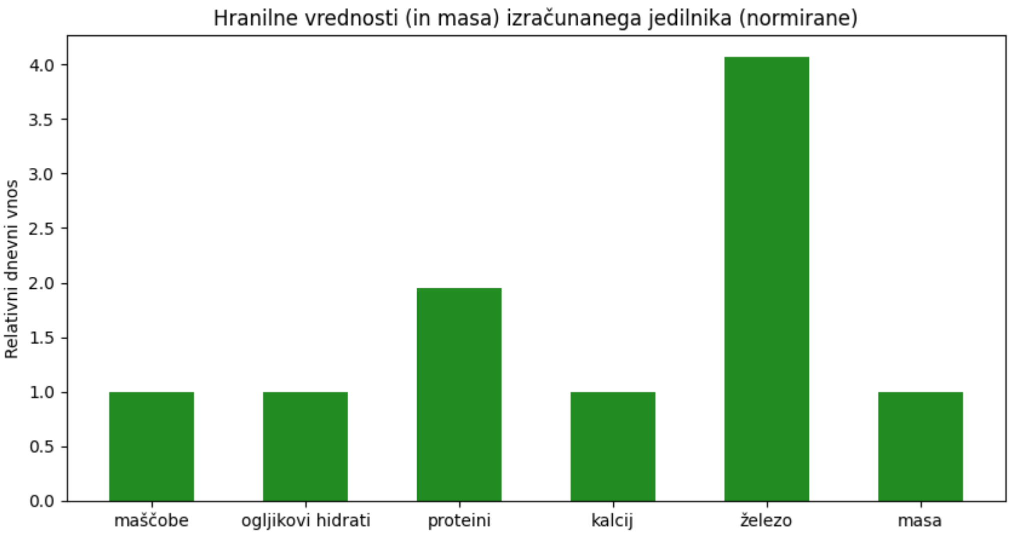
Kazalo

1 Minimizacija kalorij

Minimiziramo količino kalorij, če je priporočen minimalni dnevni vnos 70 g maščob, 310 g ogljikovih hidratov, 50 g proteinov, 1000 mg kalcija ter 18 mg železa. Zahtevamo še, da dnevni obroki količinsko ne presegajo dveh kilogramov hrane.

Živilo	**Masa**	**Energijska vrednost** [kcal]
Sol	1431 g	0
Kakav	496 g	1135
Marmelada	56.2 g	137.7
Pomfri	17.5 g	16.3
Skupno:	2 kg	1289

Tabela 1: Rešitev problema z danimi zahtevami. Človek seveda ne more zaužiti 1.4 kg soli v enem dnevu, zato je dobljeni jedilnik neuporaben. Za primernejši jedilnik bi pri izračunu morali upoštevati več parametrov in omejitev.



Slika 1: Izračunan vnos hranilnih vrednosti (normiran glede na spodnjo mejo za posamezno hranilno vrednost) ter masa dnevnega vnosa (normirana glede na zahtevano maksimalno vrednost). Z izračunom jedilnika smo dosegli maksimalno dovoljeno maso dnevnega vnosa. Dosegli smo ravno dovolj maščobe, ogljikovih hidratov in kalcija, hkrati pa približno dvakratno vrednost zahtevanih proteinov in približno štirikratno vrednost zahtevanega železa.

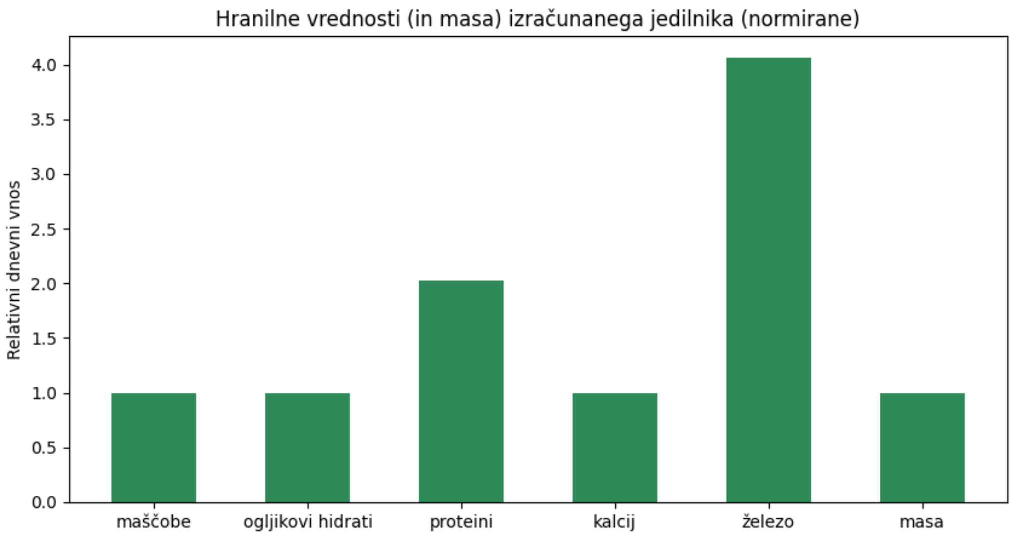
Kljub temu, da je dobljeni jedilnik skrajno čuden (Tabela 1), zadostuje vsem zahtevanim pogojem. Algoritem je izračunal tako ogromno količino soli, ker ta nima energijske vrednosti, cilj tega jedilnika pa je bila minimizacija kalorij. Da bi dobili bolj smiseln jedilnik lahko omejimo vnos soli.

1.1 Omejitev vnosa soli

Odrasli naj bi pojedli največ 6 g soli na dan (NHS). WHO trdi, da je globalno povprečje med 9 in 12 gramov zaužite soli na dan, kar bi bilo potrebno zmanjšati na 5 g. Recimo torej, da povprečna odrasla oseba zaužije maksimalno 12 g soli na dan. Poglejmo kako to vpliva na izračunani jedilnik.

Živilo	**Masa**	**Energijska vrednost** [kcal]
Radenska	1304 g	0
Kakav	509 g	1166
Solata	130.6 g	22.2
Marmelada	44.3 g	108.5
Sol	12 g	0
Skupno:	2 kg	1296

Tabela 2: Rešitev problema z zahtevami iz prejšnje naloge ter z omejitvijo maksimalnega vnosa soli na 12 g. Vidimo, da smo dobili jedilnik z največjo dovoljeno količino soli, ker je ta zelo ugodna za minimizacijo energije. Drugo najbolj ugodno tabelirano živilo za minimizacijo energije je Radenska, ki prav tako kot sol nima energijske vrednosti. Algoritem se je s predpisanjem velike količine Radenske izognil dejanski hrani, ki bi prispevala k kalorijam jedilnika.



Slika 2: Izračunani jedilnik z omejitvijo maksimalnega vnosa soli na 12 g. Zanimivo je, da histogram izgleda popolnoma enako kot pred omejitvijo vnosa soli.

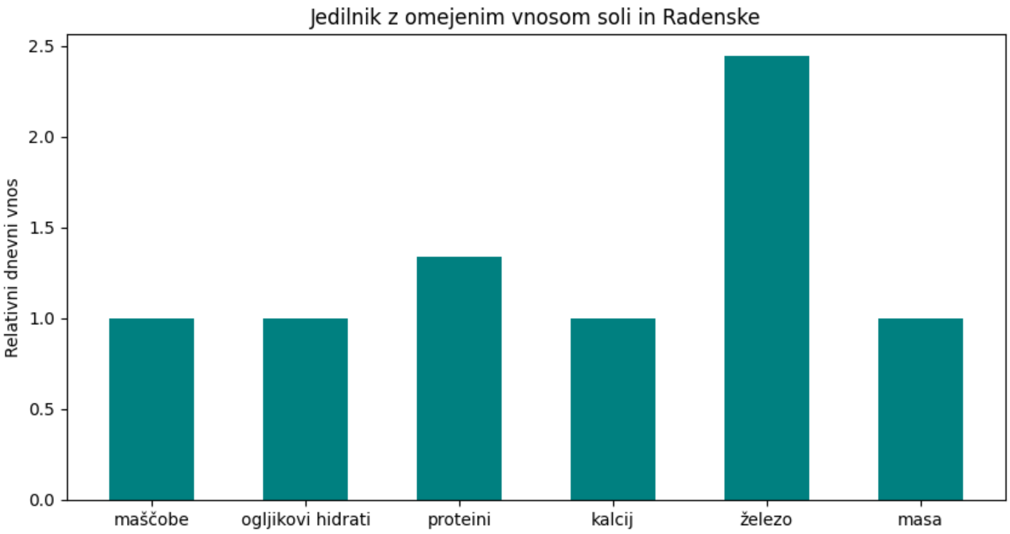
Iz zgornje tabele in stolpičnega diagrama vidimo, da je jedilnik zadostil vsem zahtevam brez bizarno velikega vnosa soli. Kljub temu pa je algoritem 'zlorabil' dejstvo, da Radenska nima energijske vrednosti in jedilnik tako še vedno ne izgleda realističen. Ne vsebuje ničesar kar bi zares premagalo lakoto. Ker je Radenska edino preostalo tabelirano živilo brez energijske vrednosti, poskušajmo omejiti poleg vnosa soli še njen vnos.

1.2 Omejitev vnosa soli in Radenske

Obdržimo omejitev za sol iz prejšnjega podrazdelka in omejimo vnos Radenske na 2 dcl.

Živilo	**Masa**	**Energijska vrednost** [kcal]
Solata	1137 g	193
Pomfri	292 g	272
Kakav	239 g	547
Radenska	200 g	0
Marmelada	120 g	294
Sol	12 g	0
Skupno:	2 kg	1306

Tabela 3: Rešitev problema z omejitvijo maksimalnega vnosa soli na 12 g in maksimalnega vnosa Radenske na 2 dcl.



Slika 3: Izračunani dnevni jedilnik z omejitvijo maksimalnega vnosa soli na 12 g in maksimalnega vnosa Radenske na 2 dcl. Vidimo, da dobimo manj proteinov in železa glede na prejšnja dva jedilnika.

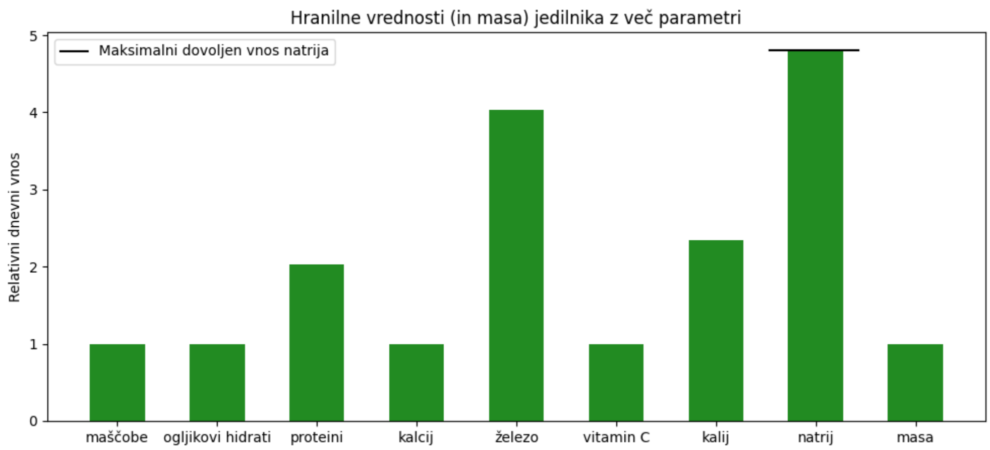
Iz Tabele 3 opazimo, da smo dobili veganski meni. Na prvem mestu po masi je solata, sledi ji pomfri. Še vedno je prisoten dokaj velik vnos kakava ter marmelade. V skladu s pričakovanji opazimo, da je algoritem ponovno izbral jedilnik z največjim dovoljenim vnosom soli ter tokrat tudi Radenske. Vnos proteinov in železa je manjši kot pri prejšnjih dveh jedilnikih.

1.3 Minimizacija kalorij z več parametri

Poleg minimalnih vnosov (napisanih na začetku poglavja) lahko upoštevamo še minimalne vnose za vitamin C (60 mg), kalij (3500 mg) in sprejemljiv interval za natrij (500 mg – 2400 mg), ki so tudi na voljo v tabeli.

Živilo	**Masa**	**Energijska vrednost** [kcal]
Radenska	1281 g	0
Kakav	509 g	1166
Pomaranča	96.6 g	45.4
Solata	79.7 g	13.5
Marmelada	29.7 g	72.8
Sol	4.4 g	0
Skupno:	2 kg	1297

Tabela 4: Izračunani dnevni jedilnik z upoštevanjem minimalnega vnosa za vitamin C in kalij, ter sprejemljivega intervala za natrij.



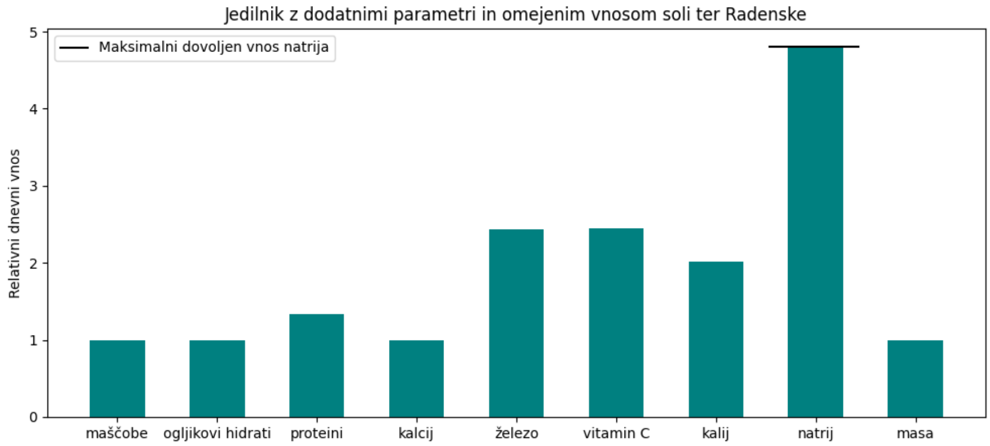
Slika 4: Izračunani dnevni jedilnik z upoštevanjem minimalnega vnosa za vitamin C in kalij, ter sprejemljivega intervala za natrij. Z njim smo dosegli zgornjo mejo za vnos natrija.

Jedilnik je podoben kot tisti iz Tabele 1. Gromozansko količino soli je zaradi omejitve vnosa natrija nadomestila Radenska. V jedilniku sta se pojavili še solata in pomaranča, slednja poskrbi za zadosten vnos vitamina C.

1.3.1 Omejitev vnosa soli in Radenske

Živilo	**Masa**	**Energijska vrednost** [kcal]
Solata	1145 g	195
Pomfri	294 g	273
Kakav	237 g	543
Radenska	200 g	0
Marmelada	121 g	296
Sol	3 g	0
Skupno:	2 kg	1306

Tabela 5: Izračunani dnevni jedilnik z upoštevanjem minimalnega vnosa za vitamin C in kalij, sprejemljivega intervala za natrij, ter omejitev za vnos soli in Radenske.



Slika 5: Izračunani dnevni jedilnik z upoštevanjem minimalnega vnosa za vitamin C in kalij, ter sprejemljivega intervala za natrij. Poleg tega smo omejili tudi vnos soli in Radenske na enak način kot prej. Z jedilnikom smo ponovno dosegli zgornjo mejo za vnos natrija.

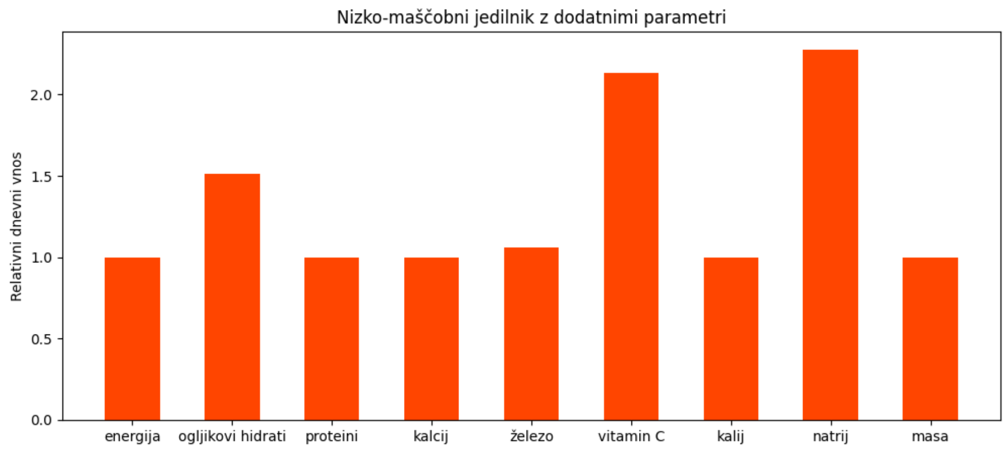
Izračunani jedilnik je podoben tistemu iz podpoglavja 2.2, torej tistemu z omejitvami soli in Radenske, vendar z manj upoštevanimi parametri kot trenutno obravnavani. Ta prav tako vsebuje največjo dovoljeno količino natrija in Radenske.

2 Minimizacija maščob

Zahtevajmo minimalno 2000 kcal na dan in sestavimo jedilnik s čim manj maščobami. Osredotočimo se na jedilnike, ki upoštevajo minimalen dnevni vnos za vitamin C in kalij, ter sprejemljiv interval za natrij.

Živilo	**Masa**	**Maščobe** [g]
Solata	1157 g	2.31
Marmelada	491 g	0
Fižol	245 g	1.32
Bel kruh	102 g	3.71
Puran	5 g	0.08
Skupno:	2 kg	7.44

Tabela 6: Izračunani nizko-maščobni jedilnik.



Slika 6: Nizko-maščobni jedilnik s predpisano minimalno energijsko vrednostjo.

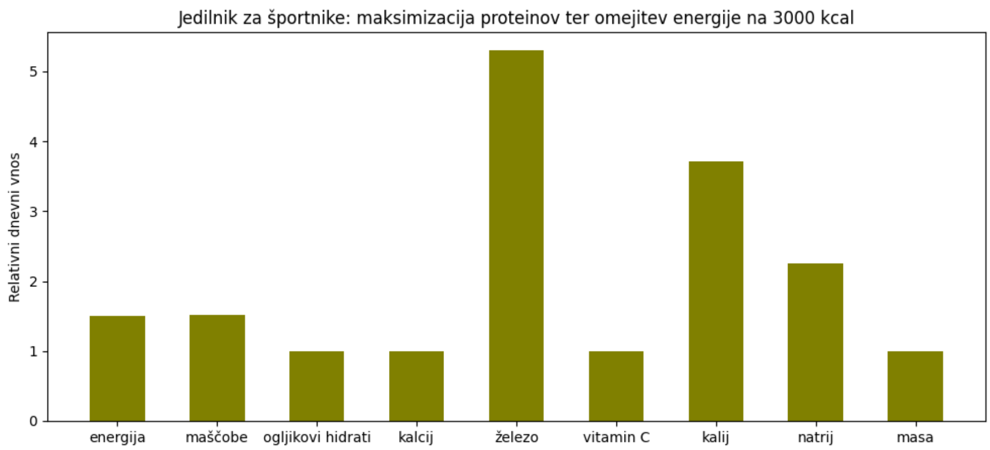
Zanimivo je, da ima dobljeni jedilnik tudi najmanjšo dovoljeno energijsko vrednost. Mogoče je to delni slučaj, pa vseeno lahko sklepamo (in vemo), da maščobe vsebujejo veliko kalorij (več o tem v poglavju 5).

3 Maksimizacija proteinov: jedilnik za športnike

Športniki potrebujejo veliko beljakovin, zato tukaj maksimiziramo proteine. Funkcijo, ki jo želimo maksimizirati, pomnožimo z -1 in jo minimiziramo z istim algoritmom kot smo ga uporabljali do sedaj. Tako ni kaj dosti za razmišljati. Poleg maksimizacije beljakovin sem nastavil tudi največji dovoljeni vnos energije na 3000 kcal.

Živilo	**Masa**	**Proteini** [g]
Puran	1317 g	310
Kakav	567 g	111
Tuna	69 g	21
Paprika	32.7 g	0.33
Sir edamec	14.5 g	3.6
Skupno:	2 kg	446

Tabela 7: Izračunani visoko-proteinski jedilnik. Dosegli smo skoraj 9-kratni priporočen minimalni dnevni vnos proteinov.



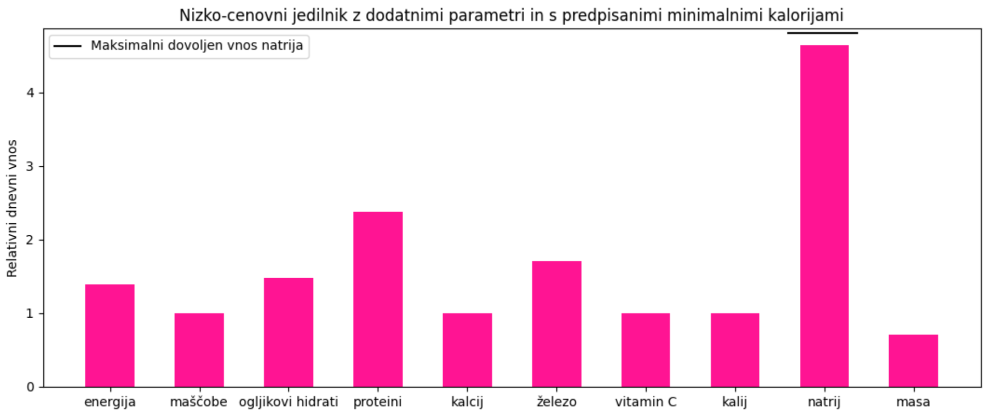
Slika 7: Visoko-proteinski jedilnik.

4 Minimizacija cene

Tokrat minimiziramo ceno dnevnega jedilnika. Izkaže se, da je s podano tabelo podatkov rešitev ista, če dodatno zahtevamo minimalno 2000 kcal/dan ali pa ne.

Živilo	**Masa**	**Cena** [€]
Ovseni kosmiči	629 g	0.69
Mleko	536 g	0.54
Zelje	123 g	0.09
Pomfri	118 g	0.12
Skupno:	1.4 kg	1.43

Tabela 8: Izračunani nizko-cenovni jedilnik z dodatnimi parametri (in s predpisano minimalno energijsko vrednostjo).

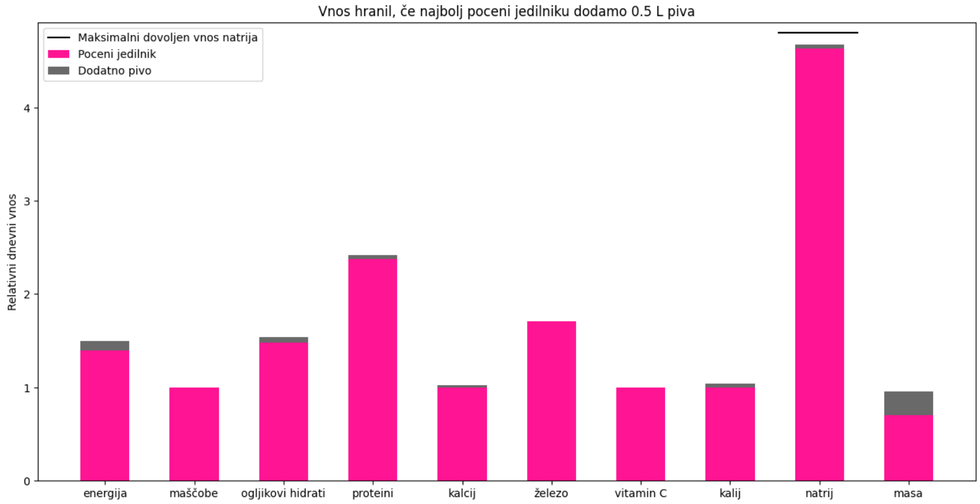


Slika 8: Vsebnost nizko-cenovnega jedilnika z dodatnimi parametri (in s predpisano minimalno energijsko vrednostjo).

Glavna jed izračunanega nizko-cenovnega jedilnika so ovseni kosmiči z mlekom. S tem jedilnikom dobimo celo več energije kot smo jo zahtevali, 2800 kcal je tudi za odraslega moškega veliko energije. Hkrati je to prvi jedilnik, ki ni dosegel največje možne mase hrane (2 kg). Zelje je priskrbelo glavni del vitamina C (nekje 3/4). Hkrati vidimo, da dobimo veliko proteinov in železa, ter ravno dovolj maščob.

4.1 Študentski jedilnik in model neenakosti pijače in hrane

Študenti seveda želijo jedilnik, ki je čim bolj cenovno ugoden. Osredotočimo se na študente brez študentskega statusa, ker oni nimajo subvencionirane prehrane in si morajo hrano priskrbeti v trgovini. Nekega dne si takšen študent poleg izračunanega optimalnega jedilnika privošči še 0.5 L piva. Poglejmo kako dodatna hranila vplivajo na jedilnik.



Slika 9: Vsebnost nizko-cenovnega jedilnika iz prejšnje strani, če mu dodamo še 0.5 L piva.

Z dodatnim pivom smo dobili še 215 kcal s čimer smo prišli na ogromno energijsko vrednost jedilnika: 3000 kcal. Poleg tega smo dobili znatno povečanje ogljikovih hidratov, ostala hranila pa so ostala na približno istih nivojih. Sedaj je dober trenutek, da razmislimo o neenakovrednosti hrane in pijače. Pol litra piva predstavlja nekje 1/4 dovoljenega dnevnega vnosa mase hrane, kar pa ni v redu, saj lahko v celem dnevu gotovo spijemo več kot 4 velika piva (2 L). Podobno nas je že prej zmotilo, ko je več kot polovico hrane predstavljala Radenska. To težavo lahko poskusimo odpraviti z modelom, ki loči pijačo od hrane.

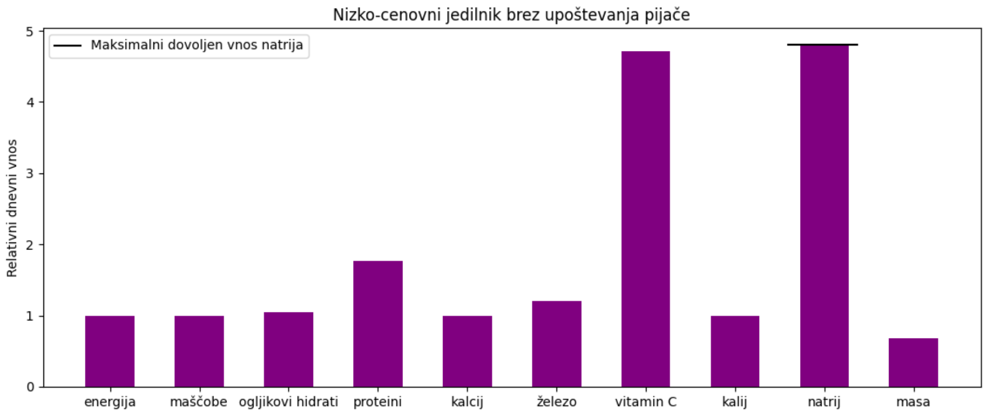
Na začetku sem postopal tako, da sem spreminjal pomen mase pijače proti masi hrane. S tem nisem prišel do kakšnih pametnih jedilnikov, saj je to zares pomembno samo v primerih, ko se je algoritem ravno zaradi omejitve mase odločil za nekoliko drugačno izbiro živil.

Nato sem iz tabele živil izbrisal vse pijače razen piva. V novem jedilniku torej ni bilo več mleka, pojavil pa se je sir edamec (72 g). Odkril nisem nič posebnega, vsebnost izračunanega jedilnika je bila podobna tistemu s Slike 9. V naslednjem razdelku obravnavajmo še primer, ko sploh ne upoštevamo hranil iz pijače.

4.2 Neupoštevanje hranil iz pijače

Živilo	**Masa**	**Cena** [€]
Zelje	694 g	0.49
Ovseni kosmiči	370 g	0.41
Pomfri	225 g	0.23
Sir edamec	70 g	0.49
Olivno olje	0.3 g	~ 0
Skupno:	1.36 kg	1.61

Tabela 9: Izračunani nizko-cenovni jedilnik brez upoštevanja hranil pridobljenih iz pijače.



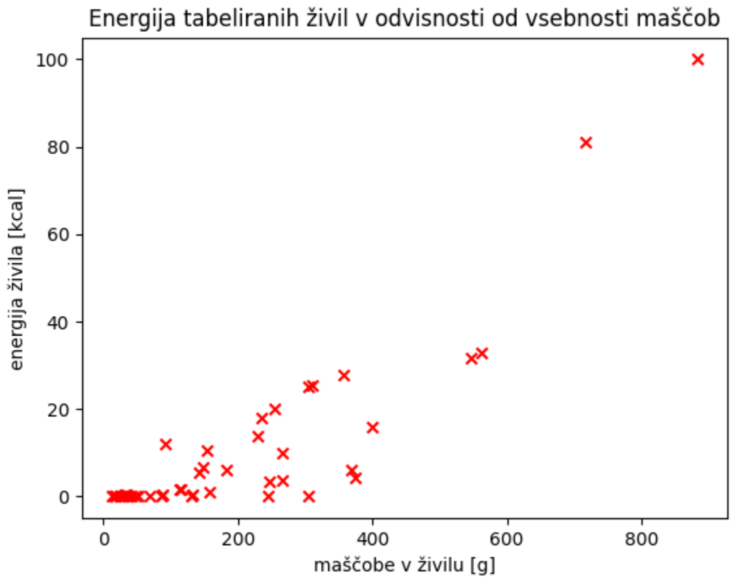
Slika 10: Vsebnost nizko-cenovnega jedilnika, če pri izračunu ne upoštevamo pijače.

Zanimivo je, da smo z izračunanim jedilnikom dosegli tudi najmanjši dovoljen vnos maščob. Z natrijem gremo ravno do zgornje meje, vitamina C pa imamo na pretek. Zanimivo bi bilo pogledati tudi, kako bi se spremenili jedilniki kakšnih drugih minimizacij, če pri njih ne bi upošteval hranil pijače. Tega žal nisem storil v tem poročilu.

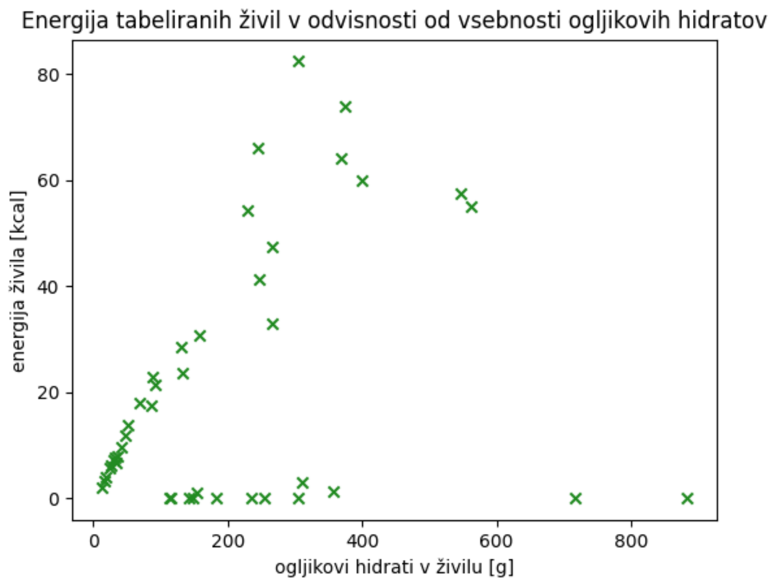
5 Energijska vrednost nutrientov

Glede na to, da imamo podatke za kar nekaj živil (49), bi lahko preučili energijsko vrednost maščob, ogljikovih hidratov in beljakovin. Iz podatkov sem izvrgel vse pijače ter sol. Tako obravnavamo podatke 43-ih živil.

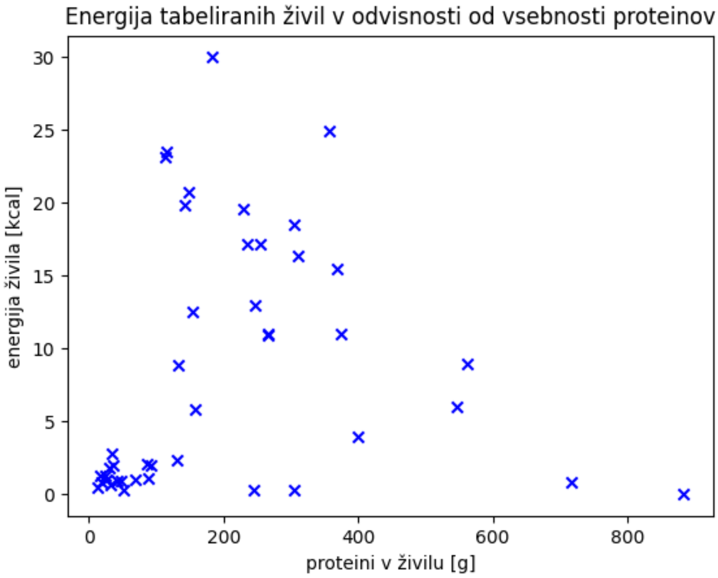
Za začetek si poglejmo odvisnost energije živila od vsebnosti omenjenih hranil.



Slika 11: Energija tabeliranih živil v odvisnosti od vsebnosti maščob. Opazimo, da obstaja neka korelacija.



Slika 12: Energija tabeliranih živil v odvisnosti od vsebnosti ogljikovih hidratov. Razvidna je nekakšna linearna odvisnost pri majhni vsebnosti ogljikovih hidratov.



Slika 13: Energija tabeliranih živil v odvisnosti od vsebnosti proteinov. Raztresenost je velika in ne vidimo nobene korelacije.

Zgornji prikazi niso dobro predstavljivi, saj ima vsako živilo poleg opazovanega hranila še druga hranila, od katerih je odvisna njegova energija. Gremo raje kar na izračun energijske vrednosti maščob, ogljikovih hidratov in proteinov. Energijska vrednost živila je linearna kombinacija teh treh hranil,

$$E(M, C, P) = \alpha M + \beta C + \gamma P \ .$$

Tukaj je M masa maščob, C masa ogljikovih hidratov (angl. *carbohydrates*) in P masa proteinov. Opravka imamo s sistemom linearnih enačb

$$E_i(M_i, C_i, P_i) = \alpha M_i + \beta C_i + \gamma P_i \ ,$$

kjer indeks i teče po vseh obravnavanih živilih. Sistem lahko napišemo kot

$$A\mathbf{x} = \mathbf{E} \ , \tag{1}$$

kjer je A matrika velikosti $N \times 3$ z vrsticami (M_i, C_i, P_i), $\mathbf{E}$ vektor energijskih vrednosti živil ter $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, \gamma)$ vektor koeficientov, ki ga iščemo. Ker določamo samo 3 neznane koeficiente in imamo podatke za 43 živil, je naš sistem predoločen.

Problem sem reševal z metodo najmanjših kvadratov v programskem jeziku *Python* s funkcijo `numpy.linalg.lstsq`. Enačbo (1) sem pred uporabo algoritma pomnožil z leve strani z A^T,

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{E} = A'\mathbf{x} = \mathbf{E}' \ .$$

Algoritem je izračunal vrednosti

$$\alpha = 7.13 \text{ kcal/g} \ ,$$
$$\beta = 3.36 \text{ kcal/g} \ ,$$
$$\gamma = 4.68 \text{ kcal/g} \ .$$

Napake izračunanega nisem ocenil.

Dne 20. 10. 2022 sem na spletu na več različnih virih dobil podatke

$$
\begin{aligned}
\alpha_{\text{splet}} &= 9\ \text{kcal/g}\ , \\
\beta_{\text{splet}} &= 4\ \text{kcal/g}\ , \\
\gamma_{\text{splet}} &= 4\ \text{kcal/g}\ .
\end{aligned}
$$

Naše izračunane vrednosti se kar dobro ujemajo z resničnostjo, saj podatki na spletu niso zapisani niti na eno decimalno mesto natančno. Najbolj smo se zmotili pri energiji maščob. Za točnejši račun bi bilo verjetno potrebno upoštevati bistveno več parametrov.

Modelska analiza 1

2. naloga - Linearno programiranje

Martin Horvat, 28191017

19. oktober 2022

---

1 Uvod

Pri problemih linearnega programiranja imamo opravka z minimizacijo linearne funkcije

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_N x_N = min, \tag{1}$$

ob vezeh

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1N}x_N &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2N}x_N &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nN}x_N &\leq b_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Pri tem mora veljati $x_i \geq 0$, $\forall i = 1, ..., N$. Zgornje lahko zapišemo v strnjeni obliki

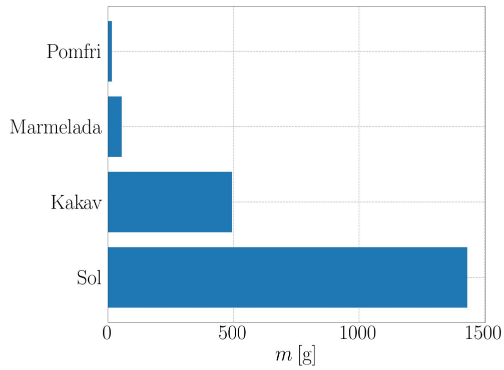
$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= min \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{3}$$

Pri naši nalogi je cilj minimizirati določen aspekt prehrane (npr. cena, kalorije, maščobe,...), ob določenih priporočenih vrednostih makro oz. mikrohranil.

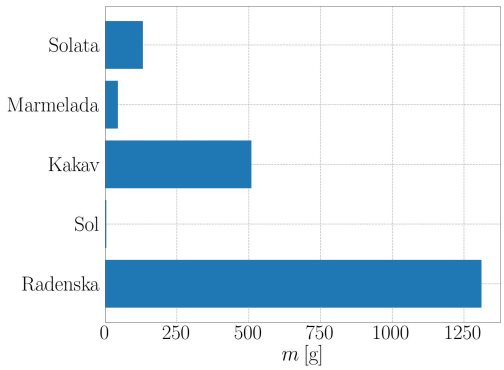
2 Minimizacija kalorij

Zaradi konsistence med rezultati z ostalimi kolegi, za začetek uporabimo hrano iz seznama `tabela-zivil.dat`, katerega imamo vsi enakega. Cilj prvega dela naloge je torej poiskati optimalno količino vsakega od živil s seznama, tako da minimiziramo vnos kalorij, ter zadostimo

1. vnos maščob vsaj 70 g,
2. vnos ogljikovih hidratov vsaj 310 g,
3. vnos beljakovin vsaj 50 g,
4. vnos kalcija vsaj 1000 mg,
5. vnos železa vsaj 18 mg in
6. masa hrane naj ne preseže 2 kg.



Slika 1: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim šestim pogojem



Slika 2: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim sedmim pogojem

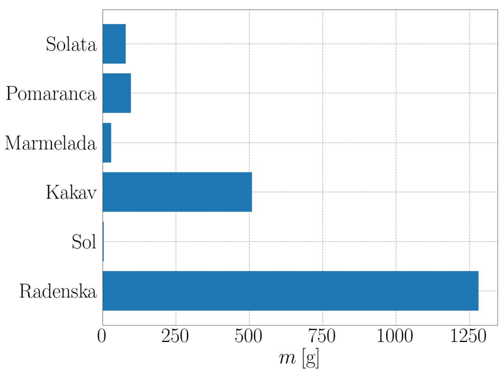
Optimalen jedilnik pri zgornjih pogojih je prikazan na sliki 1. Opazimo, da le ta vseeno ni najboljši za nas, saj naj bi pojedli kilo in pol soli na dan. Zato pogoje malo popravimo tako, da dodamo omejitev za natrij

7. vnos natrija naj bo med 500 in 2400 mg

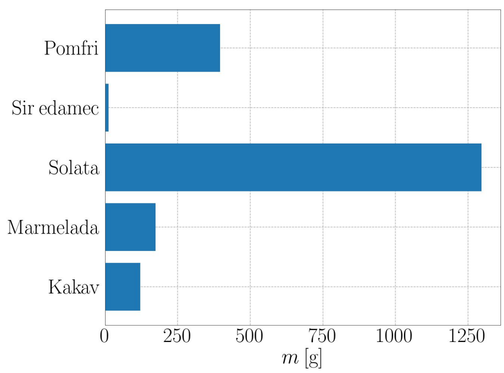
To se na našem jedilniku pozna tako (slika 2), da sedaj namesto ogromne količine soli, popijemo na kupe Radenske... V obeh primerih je zanimivo videti količino kakava, kar pa je posledica visoke vsebnosti kalcija glede na kalorije, te pa minimiziramo.

V tabeli imamo še podatke za kalij in vitamin C, zato za izboljšanje modela dodamo še pogoja

8. vnos kalija vsaj 3500 mg
9. vnos vitamina C naj bo nad 60 mg.



Slika 3: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim devetim pogojem

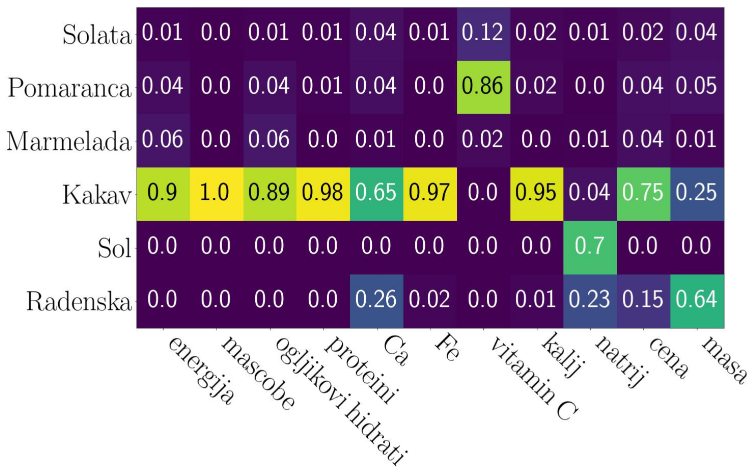


Slika 4: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim devetim pogojem, s spremenjenim osmim

Skupaj še z zahtevama 8 in 9, dobimo jedilnik na sliki 3. Opazimo dodatno pomarančo, ki poskrbi za naš vitamin C, kalija pa smo imeli dovolj že kot posledico prejšnjih pogojev - 7757 mg v prvem, 8135 mg v drugem in 8199 mg v trenutnem primeru. To mi da misliti, da je morda takšna količina že previsoka za človeško telo. Izkaže se (glede na skrajno zaupljivi prvi zadetek na Google-u), da je nevarna doza nad 6000 mg. Zato torej popravimo pogoj 8 na

8. vnos kalija naj bo med 3500 in 6000 mg.

Tedaj Radenska popolnoma izgine iz jedilnika, nadomesti pa jo solata z divjimi 1250 g. Tako drastična sprememba me je malo presenetila, saj se seznam hrane čisto spremeni, kljub omejitvi samo kalija. Da bi malce bolje preučil sestavo jedilnikov, sem izrisal diagrame deleža hranila v pozameznem živilu iz seznama glede na količino (sliki 5 in 6). Opazimo da s tem ko omejimo kalij, prepovemo tako visoke količine kakava, kar posledično zmanjša vse ostale minerale, ki pa jih nato namesto z Radensko, kompenziramo s solato. Zanimivo je tudi videti na sliki 5, kako hranljiv je kakav, saj zagotavlja v veliki meri večino zahtevanih hranil (seveda v absurdnih količinah samega kakava). Na koncu so še v tabeli 1 zbrane skupne hranilne vrednosti vsakega od obravnavanih jedilnikov.

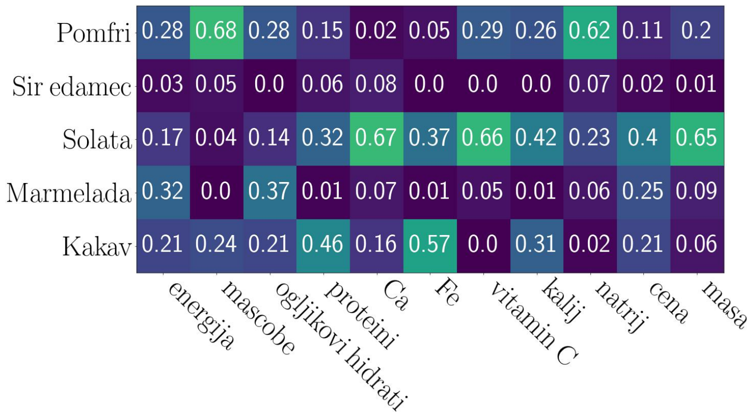


Slika 5: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim pogojem

	energija [kcal]	maščobe [g]	ogljikovi hidrati [g]	proteini [g]	Ca [mg]
0	1289	70	310	98	1000
1	1296	70	310	102	1000
2	1297	70	310	102	1000
3	1335	70	310	51	1000

	Fe [mg]	vitamin C [mg]	kalij [mg]	natrij [mg]	cena [EUR]
0	73	5	7757	554673	4.95
1	73	14	8134	2400	4.18
2	73	60	8199	2400	4.21
3	29	176	6000	1553	3.53

Tabela 1: Tabela hranilnih snovi za jedilnike (po vrsti kot v besedilu) pri minimizaciji kalorij

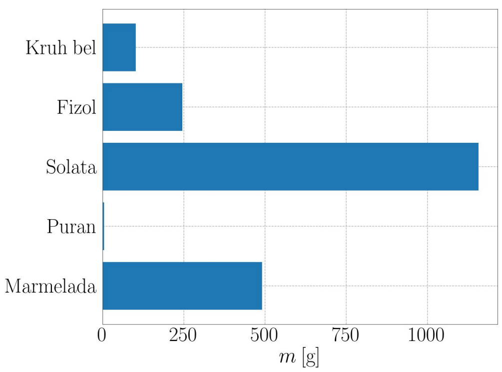


Slika 6: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim pogojem

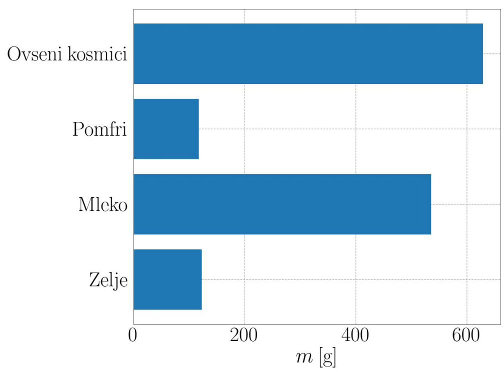
3 Minimizacija maščob

Energijska vrednost jedilnikov iz prejšnjega poglavja, je za povprečnega človeka dosti prenizka. Zato raje kot da jo minimiziramo, le to omejimo in iščemo najmanjši možen vnos maščob. Za začetek zopet obravnavajmo primer, ko kalij ni omejen navzgor. Torej se pogoji spremenijo v

1. ~~vnos maščob vsaj 70 g,~~
1. vnos energije vsaj 2000 kcal,
8. ~~vnos kalija naj bo med 3500 in 6000 mg~~
8. vnos kalija naj bo nad 3500 mg.



Slika 7: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim osmim pogojem, ob minimizaiji maščob



Slika 8: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim desetim pogojem, ob minimizaciji cene

To rezultira v jedilnik na sliki 7. Le ta pa se ne spremeni ob izboljšanem pogoju za kalij, saj doseže minimalno vrednost že pri nepopravljenem. S tem smo, kot se vidi na tabeli 2 dosegli vnos maščob le 7 g na dan. V primerjavi s prejšnimi jedilniki je cena malo višja, kar pa je dokaj smiselno, saj je tudi vnos kalorij večji.

	energija [kcal]	maščobe [g]	ogljikovi hidrati [g]	proteini [g]	Ca [mg]
0	2000	7	469	50	1000

	Fe [mg]	vitamin C [mg]	kalij [mg]	natrij [mg]	cena [EUR]
0	19	128	3500	1137	4.81

Tabela 2: Tabela hranilnih snovi za jedilnike (po vrsti kot v besedilu) pri minimizaciji maščob

4 Minimizacija cene

Še najuporabnejša, je minimizacija cene, tako da omejimo vsako od hranil v jedilniku. Tako imamo zdaj dodatni pogoj na tiste iz 1. dela

10. vnos energije vsaj 2000 kcal.

Jedilnik za ta primer je prikazan na sliki 8. Cena je tedaj bistveno nižja kot v prejšnjih primerih, vendar je vnos kalorij previsok. To je zanimivo, saj v najcenejšem načinu zaužijemo preveč. Zato se odločimo, da omejimo navzgor tudi kalorije

10. ~~vnos energije vsaj 2000 kcal.~~
10. vnos energije med 2000 in 2200 kcal.

To nam da bolj zdrav jedilnik (slika 9), vendar so količine vsakega posameznega živila še vedno dokaj visoke (npr. 400 g ovsenih kosmičev na dan). Zato navzgor omejimo še to

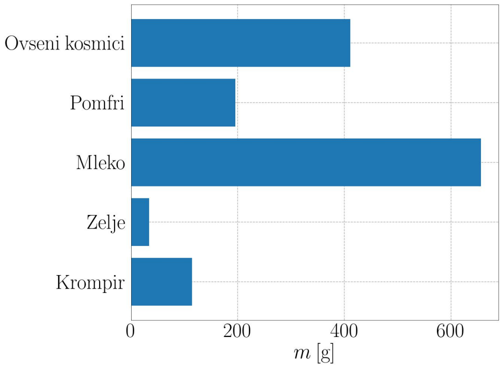
11. vsakega posameznega živila naj bo maksimalno 150 g.

Zdaj lahko prvič rečemo, da smo dobili neke vrste smiselen jedilnik (slika 10). Če pogledamo še graf deležev (slika 11), opazimo, da je slika dosti bolj homogena kot v prejšnjih primerih.

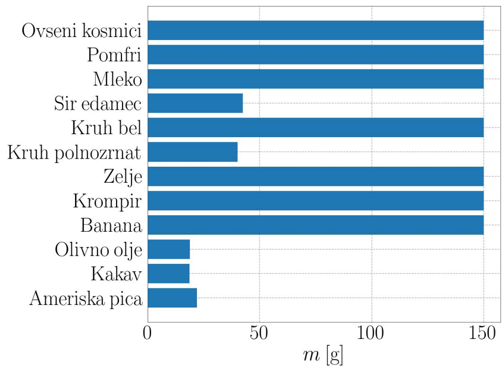
Na sliki 10 me je zmotilo, da je v primerjavi z ovsenimi kosmiči tako malo mleka. Osebno mi ustreza razmerje cca 3:1 v prid slednjemu. Zato sem dodal to vez, plus pogoja ki štejeta pomfri in krompir ter oba kruha pod isto kategorijo, ko omejujemo maso posameznega izdelka. Tak še dodatno optimiziran jedilnik je prikazan na sliki 12. Nazadnje sem želel še preveriti, kakšen je optimalen jedilnik, če minimiziramo ceno, samo ob pogojih

1. vsebuje naj vsaj 2000 kcal,
2. posameznega izdelka naj ne bo več kot 150g.

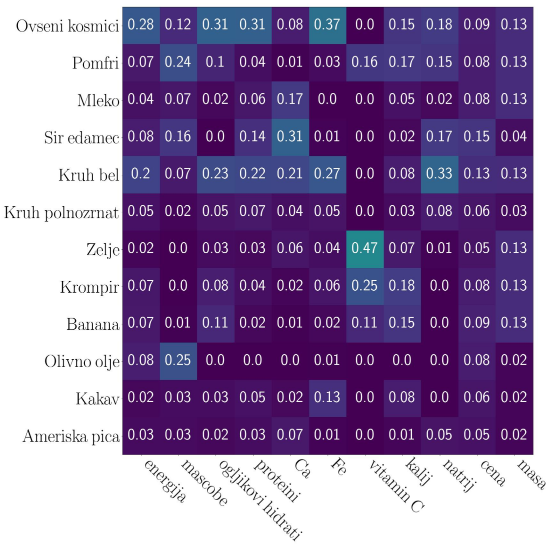
Ta je prikazan na sliki 13. Po pričakovanjih nima ravno veliko izdelkov, glede zdravja je po pričakovanjih katastrofalen (100+ g olivnega olja, vitamini, minearli). Je pa bistveno cenejši kot en jedilnik pred njim. Podrobnosti o hranilnosti jedilnikov iz poglavja so prikazane na tabeli 3



Slika 9: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim desetim pogojem, s spremenjenim 10., ob minimizaciji cene



Slika 10: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim enajstim pogojem, ob minimizaciji cene



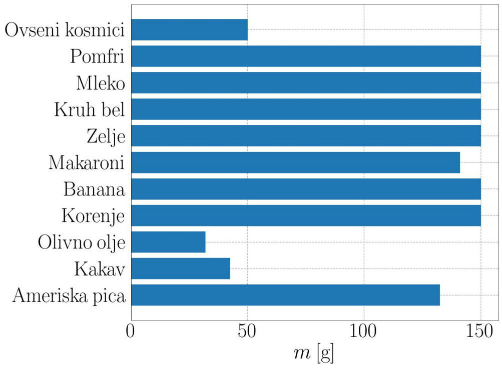
Slika 11: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim pogojem

5 Ekonomična "športna"prehrana

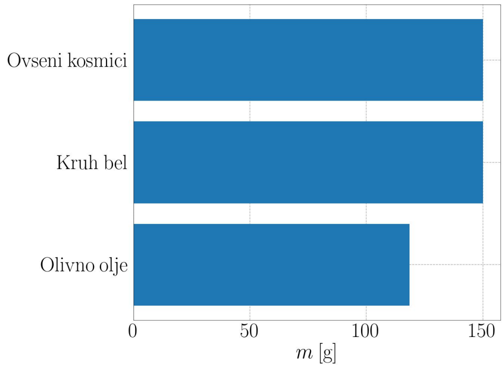
V nobenem od prej obravnavanih jedilnikih ni bilo opaziti mesnih izdelkov. Zato jih poskusimo "izsilitiž zahtevo po večji vsebnosti beljakovin.

3. vnos beljakovin vsaj 120 g,
10. vnos energije vsaj 2500 kcal.

Minimiziramo pa še vedno ceno, saj želimo čim bolj ekonomičen jedilnik. Zanimivo je videti, da je kljub zahtevi 120 g beljakovin, še vedno optimalnejše, če na jedilniku nimamo mesa (slika ??).



Slika 12: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim enajstim pogojem, z dodanimi omejitvami na količino, ob minimizaciji cene



Slika 13: Optimalen jedilnik, ki zadošča samo pogojema za kalorije in maso posameznega izdelka ob minimizaciji cene

	energija [kcal]	maščobe [g]	ogljikovi hidrati [g]	proteini [g]	Ca [mg]
0	2782	70	459	119	1000
1	2200	70	357	91	1000
2	2000	75	310	76	1000
3	2000	85	310	68	1000
4	2000	133	167	40	295

	Fe [mg]	vitamin C [mg]	kalij [mg]	natrij [mg]	cena [EUR]
0	31	60	3500	2318	1.43
1	21	60	3500	1922	1.44
2	19	117	3500	2400	1.93
3	19	99	3500	2260	2.43
4	13	0	808	1213	1.37

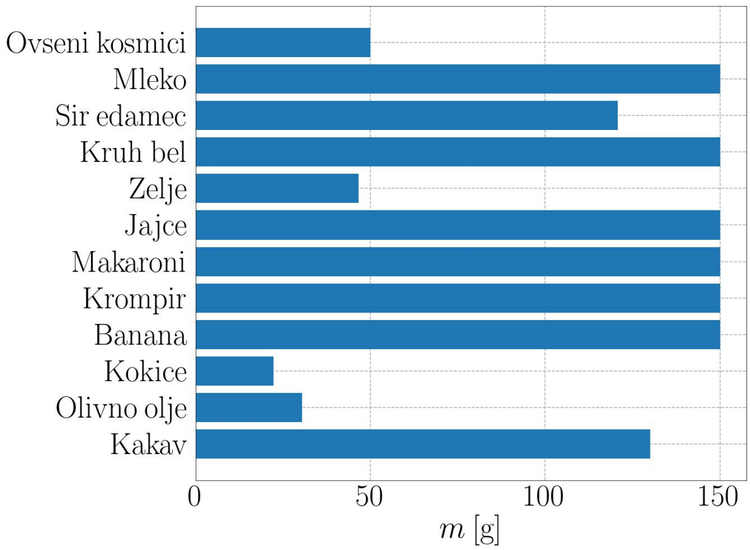
Tabela 3: Tabela hranilnih snovi za jedilnike (po vrsti kot v besedilu) pri minimizaciji cene

Na diagramu deleža (slika 15) pa opazimo, da sta vendarle poleg kakava, izdelka ki največ pripomoreta k skupni količini beljakovin jajca in sir. Pozna pa se (tabela 4), da je taka prehrana opazno dražja kot najoptimalnejša iz prejšnega poglavja.

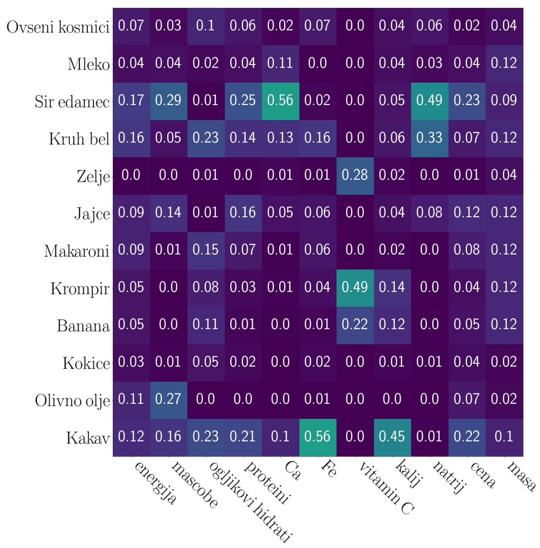
	energija [kcal]	maščobe [g]	ogljikovi hidrati [g]	proteini [g]	Ca [mg]
0	2500	114	310	120	1588

	Fe [mg]	vitamin C [mg]	kalij [mg]	natrij [mg]	cena [EUR]
0	32	60	4396	2400	3.6

Tabela 4: Tabela hranilnih snovi za jedilnike (po vrsti kot v besedilu) pri minimizaciji cene športne prehrane



Slika 14: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim desetim pogojem pri športni prehrani



Slika 15: Optimalen jedilnik, ki zadošča prvim pogojem

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

MODELSKA ANALIZA I

2. naloga: Linearno programiranje

Žiga Šinigoj, 28222025

Ljubljana, oktober 2022

1 Uvod

Pri linearnem programiranju oziroma optimizaciji iščemo ekstremno vrednosti t.i stroškovne funkcije, ob različnih linearnih pogojih. Ti so predstavljeni v obliki enačb ali neenačb. Stroškovno funkcijo lahko zapišemo kot

$$\zeta = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_i c_i x_i = ekstrem, \tag{1}$$

kjer so x_i iskane vrednosti. Pogoje oziroma vezi zapišemo kot

$$\mathrm{A}\mathbf{x} \left\{ \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} \right\} \mathbf{b}, \tag{2}$$

kjer je A matrika koeficientov. Pri linearnem programiranju mora še veljati

$$x_i \geq 0, \quad \forall i. \tag{3}$$

Za iskanje ekstrema stroškovne funkcije sem uprabil metodo *scipy.optimize.linprog* (*Python*). Pri metodi je potrebno zapisati vse pogoje v obliki $a_i x_i \leq b_i$, zato vse enačbe, ki imajo obraten neenačaj pomnožimo z -1. Pri izračunih jedilnikov sem uporabil vsa živila iz podanega seznama. Matriko podatkov sem normiral na gram.

2 Minimizacija kalorij

Najprej nas zanima jedilnik, ki bo minimiziral kalorije obroka. Stroškovno funkcijo lahko zapišemo po enačbi 1

$$\zeta = \sum_i c_{i,kal} x_i = ekstrem$$

, kjer vsota teče po $i \in \{0, ..., 48\}$, x_i predstavlja maso i-tega živila in $c_{i,kal}$ količino kalorij i-tega živila. Najprej sem uporabil naslednje vezi

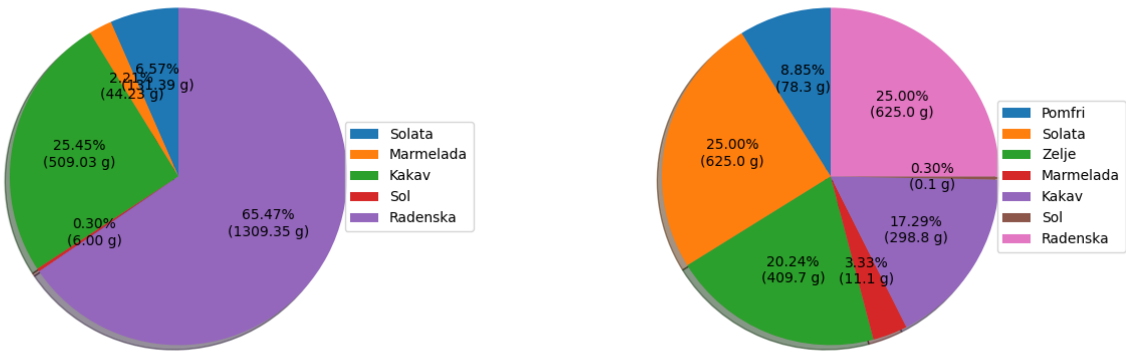
$$\begin{aligned} \sum_i x_i a_{i,fat} &\geq 70 \text{ g}, \\ \sum_i x_i a_{i,OH} &\geq 310 \text{ g}, \\ \sum_i x_i a_{i,prot} &\geq 50 \text{ g}, \\ \sum_i x_i a_{i,Ca} &\geq 1 \text{ g}, \\ \sum_i x_i a_{i,Fe} &\geq 18 \text{ mg}, \\ \sum_i x_i &\leq 2 \text{ kg}, \end{aligned}$$

kjer so $a_{i,j}$ deleži hranil j v i-tem živilu. Pri izračunu obroka dobim nesmiselen rezultat, saj bi morali v tem primeru pojesti več kot pol kilograma soli. V ta namen sem se odločil najprej omejiti količino soli

$$x_{sol} \leq 6 \text{ g}, \tag{4}$$

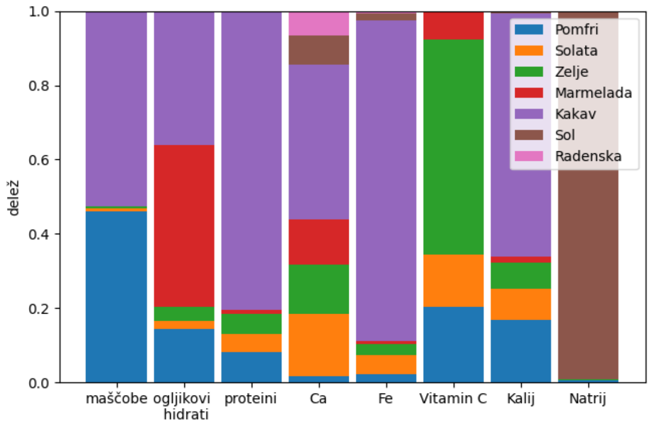
iz česar sem dobil obrok, ki je prikazano na sliki 1(a). V tem primeru moramo popiti več kot 1 liter radenske, kar mogoče ni tako problematično, kot pojesti 1 kg ene vrste hrane. V ta namen sem se odločil omejiti velikost ene sestavine obroka na pol kilograma

$$x_i \leq 0.5 \text{ kg}, \ \forall i. \tag{5}$$



(a) (b)

Slika 1: Prikaz deleža posameznih živil, ki jih moramo dnevno zaužiti. a) Dodatna omejitev soli na 6 g. b)Dodatna omejitev soli in največje mase posameznega živila.



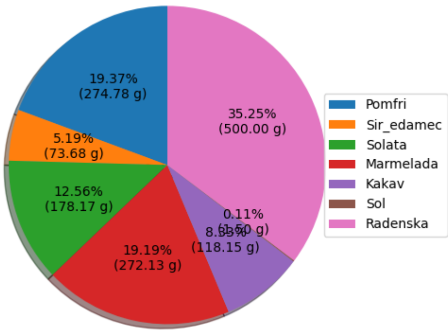
(a)

Slika 2: Hranilni prispevki posameznih živil k celotnemu obroku.

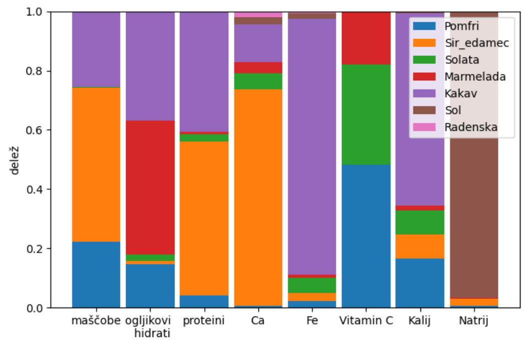
Dobljeni obrok prikazuje slika 1(b). Vidim lahko, da je obrok vsebuje več živil in je bolj uravnotežen. Zanimivo je tudi pogledati kako hranila v posameznih živilih prispevajo k upoštevanju željenih zahtev (slika 2). Vidim lahko, da kakav predstavlja velik delež v skoraj vseh hranilih. Pričakovano dobim večino natrija iz soli. Sedaj lahko upoštevam še dodatne zahteve

$$\begin{aligned}
\sum_i x_i a_{i,vitamin\ C} &\leq 60 \text{ mg}, \\
\sum_i x_i a_{i,K} &\leq 3.5 \text{ g}, \\
\sum_i x_i a_{i,Na} &\leq 2.4 \text{ g}, \\
\sum_i x_i a_{i,Na} &\geq 0.5 \text{ g}.
\end{aligned}$$

Dobljeni dnevni obrok (slika 3) je precej podoben obroku na sliki 1(b). V obroku je namesto zelja sir Edamec, ki veliko prispeva k dnevni dozi kalcija, proteinov in maščob (3(b)).



(a)



(b)

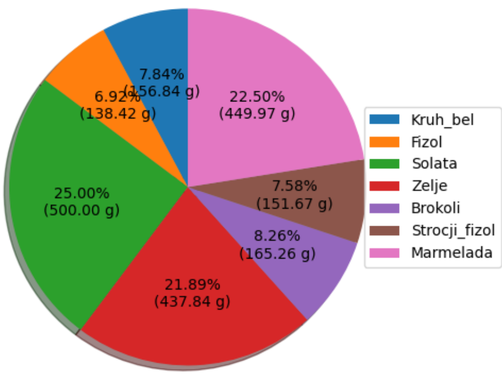
Slika 3: a)Prikaz deleža posameznih živil, ki jih moramo dnevno zaužiti. b)Hranilni prispevki posameznih živil k celotnemu obroku.

3 Minimizacija maščob

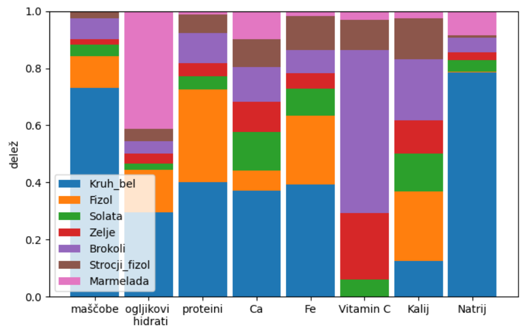
Dnevni jedilnik v primeru, da želimo minimizirati maščobe, dobim tako, da omejim dnevne kalorije in opustim pogoj o maščobah. Stroškovna funkcija in vez, namesto vezi o maščobah, sta tako

$$\zeta = \sum_i c_{i,fat} x_i = ekstrem, \qquad \sum_i x_i a_{i,kcal} \geq 2000 \text{ kcal}. \tag{6}$$

Dnevni jedilnik je v tem primeru (slika 4(a)) sestavljen iz veliko zelenjave (solata, zelje, brokoli, stročji fižol, fižol), ki predstavlja približno 65 % mase dnevnega jedilnika. Čeprav je dnevna količina kruha relativno majhna (približno 7 % mase celotnega jedilnika) lahko vidim (slika 4(b)), da veliko prispeva k zagotavljanju dnevne količine maščob, kalcija, železa, proteinov in natrija. Večinski prispevek vitamina C je od brokolija.



(a)



(b)

Slika 4: a)Prikaz deleža posameznih živil, ki jih moramo dnevno zaužiti. b)Hranilni prispevki posameznih živil k celotnemu obroku.

4 Minimizacija cene

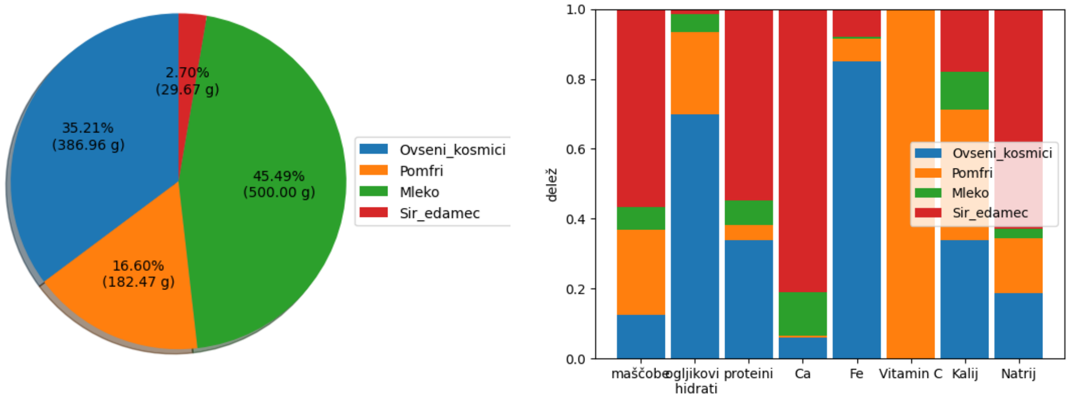
Pri nakupu živil igra pomembno vlogo tudi cena. Če želimo minimizirati ceno, potem k vezem v poglavju 2 dodamo vez

$$\sum_i x_i a_{i,kcal} \geq 2000, \tag{7}$$

stroškovna funkcija je v tem primeru

$$\zeta = \sum_i c_{i,cena} x_i = ekstrem, \tag{8}$$

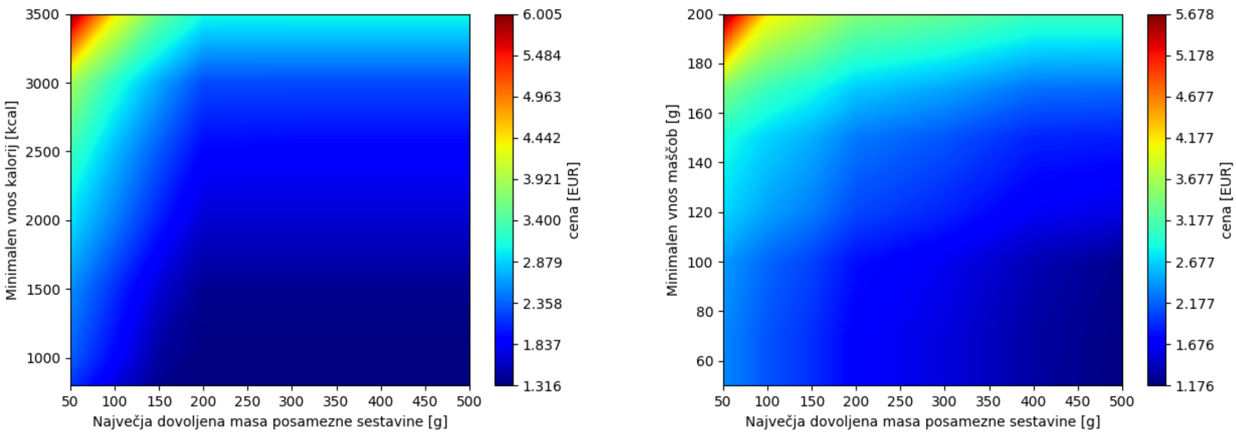
kjer je $c_{i,cena}$ cena i-tega živila na gram in x_i masa i-tega živila. Najcenejši jedilnik (slika 5(a)), ki izpolnjuje željene zahteve, je večinoma sestavljen iz ovsenih kosmičev in mleka. Težava teh dveh sestavin je, da ne vsebujeta vitamina C in vsebujeta malo kalcija (5(b)). V ta namen potrebujemo še pomfri, ki nam da vitamin C. Večinski del maščob in kalcija dobimo iz Edamca, čeprav predstavlja samo 2.7 % mase celotnega jedilnika. Cena jedilnika je 1.32 €.



(a) (b)

Slika 5: a)Prikaz deleža posameznih živil, ki jih moramo dnevno zaužiti. b)Hranilni prispevki posameznih živil k celotnemu obroku.

Zanimivo je pogledati tudi kako se spreminja cena jedilnika, če spreminjamo največjo dovoljeno maso posamezne sestavine, minimalno vrednost kalorij in maščob. Cena jedilnika se veča z večanjem minimalnega vnosa kalorij in maščob, kar je pričakovano (slika 6). Večja kot je zahtevana količina, več hrane potrebujem. Pričakovano se tudi cena veča z nižanjem največje dovoljene mase posamezne sestavine. Nižja kot je največja dovoljena masa, več jedi potrebujem, da sestavim jedilnik, kar pomeni vključevanje dražjih jedi v jedilnik. Iz grafov je razvidno, da se cena, pri manjšanju največje dovoljene mase, manj spreminja v primeru, ko spreminjamo vnos kalorij. V večjem delu prostora se spremeni za okrog 1 €, potem pa strmo narase.



(a) (b)

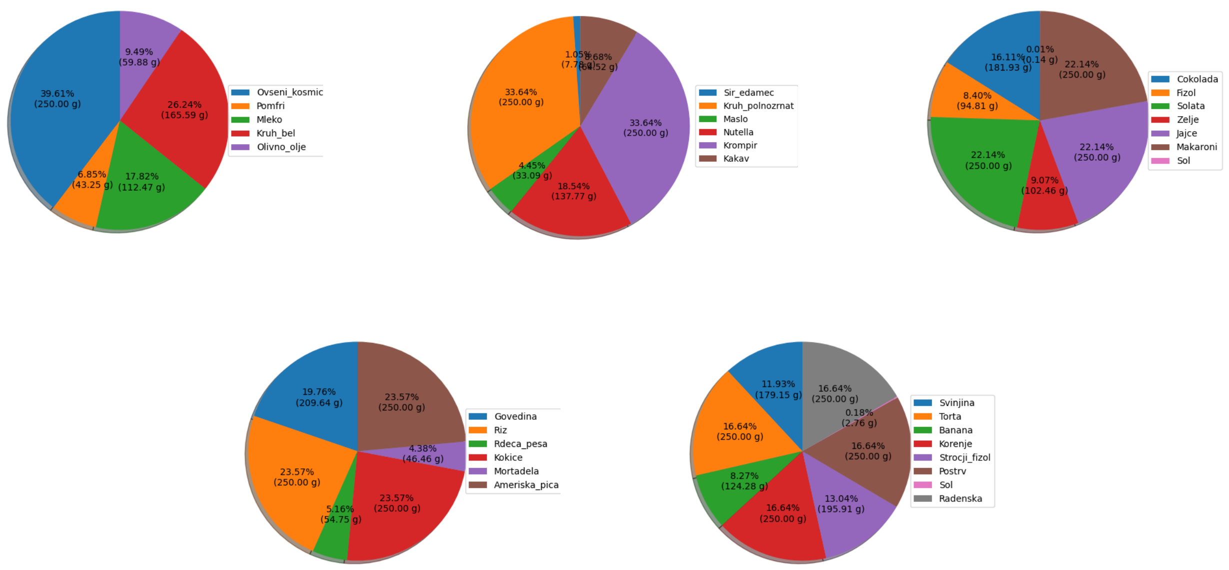
Slika 6: a)Minimizirana cena jedilnika. a)V odvisnosti od minimalnega vnosa hranil in največje dovoljene mase posamezne sestavine. b)V odvisnosti od minimalnega vnosa maščob in največje dovoljene mase posamezne sestavine.

5 Pet dnevni jedilnik

Sestavil sem pet dnevni jedilnik, pri katerem želim minimizirati ceno. Ideja je, da ne jemo vsak dan enake hrane. Hrana se lahko ponovi na 5 dni. Hrano, ki je v dnevnem jedilniku, sem izločil iz možnega nabora do konca pet dnevnega intervala. Ker se je izkazalo, da z vsemi pogoji (vezmi) ne obstaja pet dnevni jedilnik, sem malo omilil pogoje oziroma vezi (razen pri maščobah)

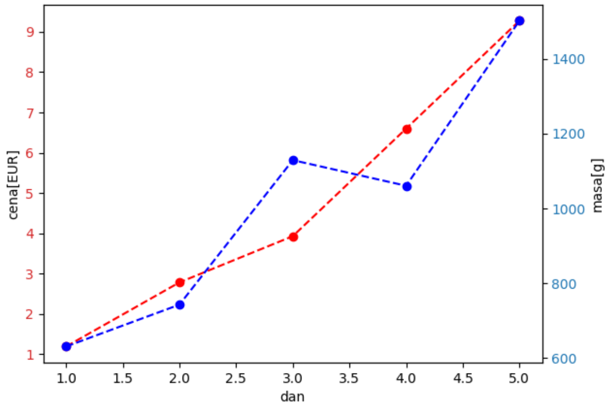
$$\begin{aligned}
\sum_i x_i a_{i,fat} &\geq 90 \text{ g}, \\
\sum_i x_i a_{i,OH} &\geq 200 \text{ g}, \\
\sum_i x_i a_{i,prot} &\geq 20 \text{ g}, \\
\sum_i x_i a_{i,Ca} &\geq 0.5 \text{ g}, \\
\sum_i x_i a_{i,Fe} &\geq 18 \text{ mg}, \\
\sum_i x_i &\leq 2 \text{ kg}, \\
x_{sol} &\leq 6 \text{ g}, \\
x_i &\leq 250 \text{ g}, \ \forall i.
\end{aligned}$$

Pri pet dnevnem jedilniku (slika (7)) v prvem dnevu ustvarim najcenejši jedilnik. Ker so potem te sestavine izločene iz izbora bo naslednji jedilnik vedno dražji. V kasnejših dneh se potem pojavljajo tudi dražje jedi. S časom se veča tudi raznolikost jedilnika. Ker jedi, ki ostajajo niso optimalne za kreacijo jedilnika pod takimi pogoji, jih potrebujem več, da zadostim pogojem (vezem).



Slika 7: Pet dnevni jedilnik. Dnevni jedilniki so bili ustvarjeni od leve proti desni.

Zanimivo je pogledati tudi evolucijo cene in maso jedilnika s časom (slika (8)). Cena pričakovano narašča s časom, saj najcenejše jedi vedno izločim iz možnega izbora za naslenji jedilnik. Zanimivo je, da se prav tako veča masa celotnega dnevnega jedilnika. V petih dneh se cena jedilnika poveča za približno 9 krat prav tako moramo zadnji dan pojesti skoraj 1 kg več hrane, da dobimo potrebne snovi.



(a)

Slika 8: Evolucija cene in mase dnevnega jedilnika, če minimiziram ceno in izločim že uporabljene jedi.

6 Zaključek

Linearno programiranje je relativno preprost koncept, ki pa je zelo uporaben. Z njim lahko minimiziramo ali maksimiziramo željene količine ob danih pogojih. Pri tem je potrebno paziti, da ne omejimo sistema preveč, saj se lahko zgodi, da za dane zahteve ni rešitve.

Modelska analiza 1

2. naloga: Linearno programiranje

David Lajevec - 28201135

20. oktober 2022

1 Uvod

Linearno programiranje se ukvarja z minimizacijo določene linearne funkije spremenljivk, ob izpolnjenem setu linearnih neenačb in enačb v istih spremenljivkah. Če spremenljivke $x_0, x_1, ..., x_n$ zapišemo v vektor $\mathbf{x}$ se problem glasi:

$$f = \sum_{j=0}^{n} c_j x_j \qquad = \qquad \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \text{min.} \tag{1}$$

$$\text{A}\mathbf{x} \quad \begin{Bmatrix} \leq \\ = \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b}\,, \tag{2}$$

kjer je (c) vektor uteži iz katerih se izračuna minimiziacijska funckija, matrika A hrani uteži a_{ij}, ki nastopajo v enačbah in neenačbah, vektor $\mathbf{b}$ pa predstavlja desno stran teh enačb oz. neenačb. Takšne probleme rešujejo specializirane metode za reševanje problemov linearnega programiranja, v njihovo delovanje se ne bom spuščal. Za lažjo predstavo velja le omeniti, da ponavadi za korektno določenem problem v n dimenzionalnem prostoru set neenačb predstavlja obsekanec visoke dimenzije, v njegovi notranjosti pa so točke, ki zadostijo vsem neenačbam. To drži, saj vsaka neenačba predstavlja polprostor ločen z hiperravnino. Po enakem zgledu so tudi ploskve konstante vrednosti minimizacijske funckije kar hiperravnine v tem visoko dimenzionalnem vektorskem prostoru. Iščemo torej takšno točko na robu tega hiperobsekanca (simplex-a), v kateri bo vrednost minimizacijske funckije minimalna, po kratkem razmisleku pa vidimo, da v pohlevnih primerih, takšna točka leži na robni ploskvi hiperobsekanca - še več - ponavadi se nahaja prav v enem izmed oglišč hiperobsekanca.

Za reševanje problema sem uporabil funkcijo scipy.optimize.linprog, ki sama rešuje problem iz linearnega programiranja, v kolikor ji ga pravilno zastavimo. Zahteva matriko A in vektorja $\mathbf{c}$ ter $\mathbf{b}$.

cijo te omejitve pa se pojavijo makaroni, stročji fižol, maslo in sol.

Hrana	**Količina**
Mleko	300 g
Sir edamec	24.43 g
Maslo	4.93 g
Čokolada	100 g
Solata	300 g
Makaroni	430.86 g
Stročji fižol	131.2 g
Pomaranča	300 g
Med	10.38 g
Kakav	82.72 g
Sol	0.01 g

Atribut	**Količina**
Energija	2000 kcal
Mascobe	70 g
Ogljikovi hidrati	310 g
Proteini	75 g
Kalcij (Ca)	1200 mg
Železo (Fe)	25.38 mg
Kalij (K)	3800 mg
Natrij (Na)	500 mg
Vitamin C	208.04 mg
Alkohol	0 g
Skupna masa	1684.5 g
Skupna cena	4.61 €

Tabela 6: Podobna dieta kot v tabeli 5, le da smo odstranili pogoj za alkohol, in dodali nekatere omejitve na količine posameznih živil.

1.6 Povečan seznam živil

Naloga 4 od nas sprašuje, kako bi se dalo izboljšati metodo da nam vrne čim bolj uravnoteženo prehrano. Imamo dve možnosti. Prvotnemu seznamu živil lahko dodajamo dodatne parametre, kot so na primer vsebnost magnezija, fosforja, vitaminov A, B, E, prehranskih vlaknin in drugih hranil. Na podlagi teh dodatnih informacij lahko nato postavimo nove zahteve in skoraj zagotovo dobimo bolj realisičen jedilnik. Problem je v tem, da je število živil vseeno zelo majhno, zato sem šel na internet iskat bolj obširen seznam živil z vsemi njihovimi znanimi hranilnimi vrednostmi. Na spletni strani USDA (United States Department of Agriculture - Ministrstvo Združenih držav za agrikulturo) sem pridobil njihovo državno podatkovno bazo za standardno referenco o hranilih. Datoteka vsebuje približno 8500 živil, vsako živilo pa je opisano z kataloško številko, kratkim opisom in 51 lastnostmi, kot so vsebnost energije, vode, vlaknin, proteinov, maščob, ogljikovih hidratov, vitaminov, mineralov in še mnogo več. Uporabil sem skrajšano obliko podatkovne baze, ki vsebuje vsa živila, ne pa vseh hranil. Nato sem še sam filtriral in izbral meni najbolj pomembnih 12 parametrov: energijska vrednost, vsebnost ogljikovh hidratov, maščob, proteinov, vode, vlaknin, sladkorja, kalcija, železa, natrija, kalija in vitamina C. Poglejmo kaj priporoča program, če mu predstavimo tako obširen nabor hrane. Najprej je na tabeli 7 zelo zanimivo opaziti izbiro hrane. Na meniju se znajdejo kot najboljša izbira hrana za dojenčke, goveji loj, dve vrsti pecilnega praška in več kot dva decilitra 40% žganja. Po masnem vnosu so hrane sicer primerno razporejene, z izjemo morda dnevnega vnosa alkohola, za katerega v tem primeru žal nimamo nobenih parametrov, ki bi jih lahko spreminjali. Če sicer pogledamo hranila, ki smo jih zaužili, vidimo, da smo zadostili res vsem nastavljenim potrebam, je pa vnos alkohola malo prevelik.

Hrana	**Količina**
Sušeni jajčni beljak v prahu	34.18 g
Sušen timijan	13.18 g
Hrana za dojenčke	0.76 g
Goveja maščoba	66.67 g
Vitaminska voda	516.84 g
Alkohol (40%(vol))	221.70 g
Dvojno delujoči pecilni prašek	0.40 g
Pecilni prašek	21.79 g
Koruzni zdrob	246.47 g
Herbalni ekstrakt iz listov Stevie	78.02 g

Atribut	**Količina**
Voda	657.42
Energija	2000 kcal
Proteini	50 g
Mascobe	70 g
Ogljikovi h.	310 g
Vlaknine	200 g
Sladkor	0.29 g
Kalcij (Ca)	120 mg
Železo (Fe)	25 mg
Kalij (K)	3800 mg
Natrij (Na)	500 mg
Vitamin C	80 mg
Skupna masa	1200 g

Tabela 7: Priporočen dnevni vnos hrane, kjer minimiziramo vnos maščob, ostali pogoji pa ostanejo enaki kot pri začetni dieti v prejšnjem poglavju,

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Naloga 2: Linearno programiranje

Modelska analiza 1

Dana Kocijančič
Vpisna številka: 28222068

Predavatelj: prof. dr. Simon Širca
Asistent: doc. dr. Miha Mihovilovič

Uvod

Tokrat je naša naloga sestava optimalne diete glede na izbran kriterij. Pri izračun količine posameznega živila si pomagamo z linearnim programiranjem. Optimiziramo funkcijo

$$f(x_j) = \sum_j a_0 j x_j = \text{ekstrem}$$

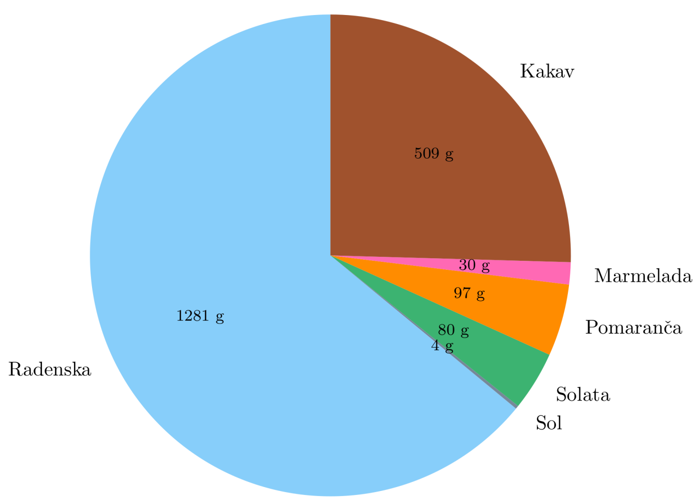
pod pogoji

$$\sum_j a_{ij} x_j \left\{ \begin{matrix} = \\ \geq \\ \leq \end{matrix} \right\} b_i .$$

Za izračun bomo uporabili *Python-ovo* rutino `scipy.optimize.linprog` in podatke o živilih iz datoteke `tabela-zivil.dat`.

Minimizacija količine kalorij

Sestaviti želimo jedilnik tako, da bomo zaužili dovolj maščob, ogljikovih hidratov, beljakovin, kalcija, železa, vitamina C, kalija in natrija, pri čemer bo vnos kalorij kar se da majhen. V tabelah v poročilu so prikazani le podatki za ogljikove hidrate, maščobe in beljakovine, vsak od jedilnikov pa zadosti tudi potrebam po mineralih in vitaminu C. Zahteve po hranilih zapišemo kot vezi z matriko a, katere elementi so a_{ij}, in vektor b z elementi b_i. Optimalni jedilnik za minimalen vnos kalorij je prikazan na sliki 1, rezultate pa najdemo v tabeli 1. Čeprav dobljen jedilnik ni raznolik, menim, da bi se ga dalo s pravim marketingom prodati kot neko novo eksotično shujševalno kuro.

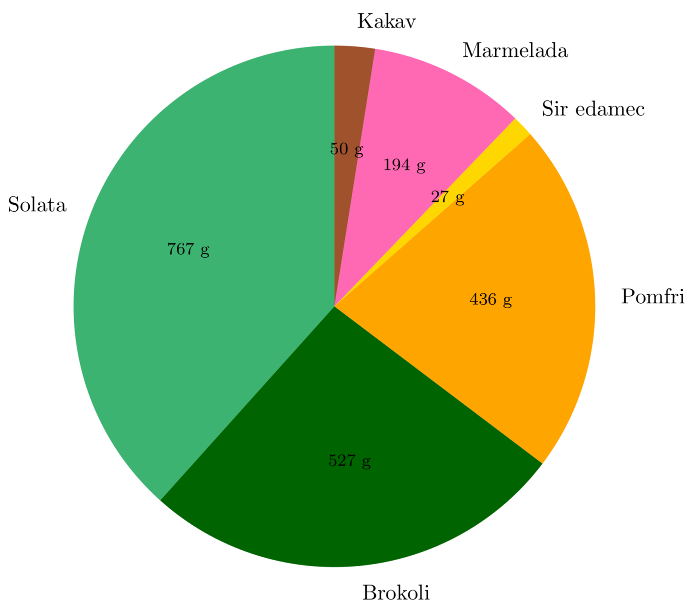


Slika 1: Tortni diagram predstavlja optimalni delež in količino živil, s katerimi bomo prejeli vsa potrebna hranila in minimalno število kalorij. Takšna dieta ni preveč raznolika, od nas pa zahteva predvsem pitje radenske, saj ta vsebuje precej kalcija, kalija in natrija ter nima veliko kalorij. Zaužili bi naj tudi dobrega pol kilograma kakava.

Količina	Zahteva	Rezultat
m [kg]	≤ 2	2.0
Kalorije [kcal]	min.	**1297**
Maščobe [g]	≥ 70	70
Ogljikovi hidrati [g]	≥ 310	310
Beljakovine [g]	≥ 50	102
Znesek [EUR]	/	4.21

Tabela 1: V tabeli opazimo, da smo uspeli zadostiti vsem zahtevam, število kalorij pa smo zminimizirali na 1297 kcal.

Pojesti pol kilograma kakava v enem dnevu se mi je zdelo veliko preveč, zato sem modelu dodala vez, ki količino zaužitega kakava navzgor omeji s 50 g. Nov jedilnik je prikazan na sliki 2, rezultati pa so zbrani v tabeli 2. Ker smo dodali še en pogoj, je bila naša minimizacija kalorij manj uspešna. Če smo prej uspeli doseči številko 1297 kcal, je ta zdaj nekoliko večja in znaša 1399 kcal.



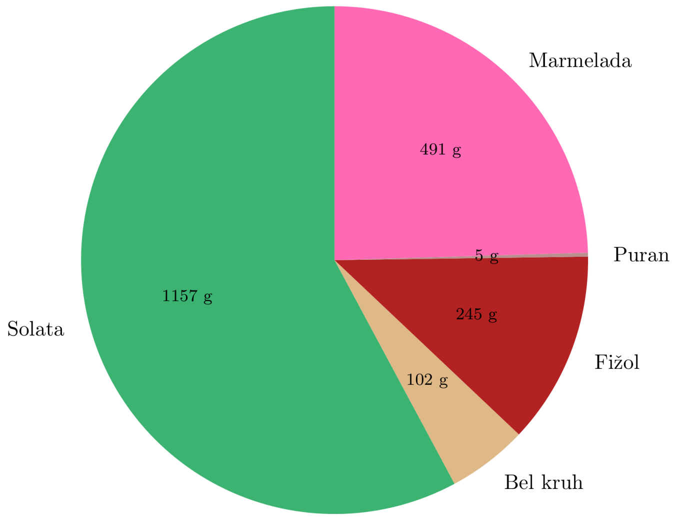
Slika 2: Kakav smo omejili na 50 g, pojesti pa je treba približno 3/4 kg solate, 1/2 kg brokolija in 436 g pomfrija. Jedilnik še zmeraj ni zelo raznolik.

Količina	Zahteva	Rezultat
m [kg]	≤ 2	2.0
Kalorije [kcal]	min.	**1399**
Maščobe [g]	≥ 70	70
Ogljikovi hidrati [g]	≥ 310	310
Beljakovine [g]	≥ 50	50
Znesek [EUR]	/	4.32

Tabela 2: Jedilnik ustreza danim zahtevam, saj pojemo dovolj maščob, ogljikovih hidratov in beljakovin. Količina zaužitih kalorij, ki smo jo poskušali kar se da zmanjšati, znaša 1399 kcal.

Minimizacija količine maščob

V naslednjem primeru se osredotočimo na minimizacijo količine maščob. Tokrat se na našem jedilniku, ki je prikazan na sliki 3, znajde veliko solate, marmelade in fižola. Da dosežemo spodnjo mejo, ki smo jo določili za vnos kalorij, moramo pojesti 469 g ogljikovih hidratov. S predlagano prehrano bi na dan zaužili le 7 g maščob. Omenjeni rezulatati so zapisani v tabeli 3.



Slika 3: Jedilnik veleva, da je treba pojesti 1157 g solate, 491 g marmelade, 245 g fižola, 102 g kruha in 5 g purana.

Količina	Zahteva	Rezultat
m [kg]	≤ 2	2.0
Kalorije [kcal]	≥ 2000	2000
Maščobe [g]	min.	7
Ogljikovi hidrati [g]	≥ 310	469
Beljakovine [g]	≥ 50	50
Znesek [EUR]	/	4.81

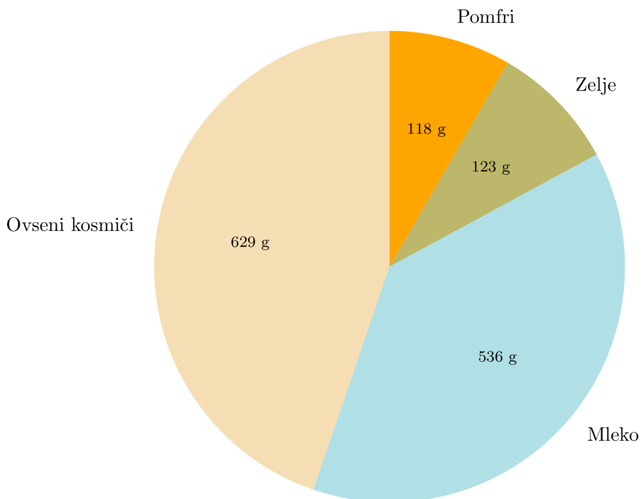
Tabela 3: Dosegli smo zgornjo mejo količine hrane in spodnjo mejo vnosa kalorij. Sklepamo lahko, da je zahtevo po minimizaciji maščob, vnosom vseh hranil in dovoljšnjo količino kalorij najlažje doseči z veliko količino nemasne hrane, ki vsebuje veliko ogljikovih hidratov. Količina maščob, ki jo v enem dnevu zaužijemo s tako prehrano je zgolj 7 g.

Minimizacija cene

Poglejmo, kako na sestavo jedilnika vpliva minimizacija cene. Jedilnik je prikazan na sliki 4. Opazimo da je ta še posebej neraznovrsten, saj je sestavljen le iz štirih živil. Glede na ceno se nam za zadovoljitev naših potreb po ogljikovih hidratih najbolj splača jesti ovsene kosmiče, za beljakovine pa piti mleko. V tabeli 4 lahko vidimo, da je bila mejni kriterij količina maščob, saj je to edina vrednost, ki je na spodnji meji. Za hrano, ki bi nam zadoščala za cel dan, bi leta 2018 porabili zgolj 1.43 EUR, danes pa bi ta cena zaradi inflacije verjetno bila nekoliko večja.

Količina	Zahteva	Rezultat
m [kg]	≤ 2	1.4
Kalorije [kcal]	≥ 2000	2782
Maščobe [g]	≥ 70	70
Ogljikovi hidrati [g]	≥ 310	459
Beljakovine [g]	≥ 50	119
Znesek [EUR]	min.	1.43

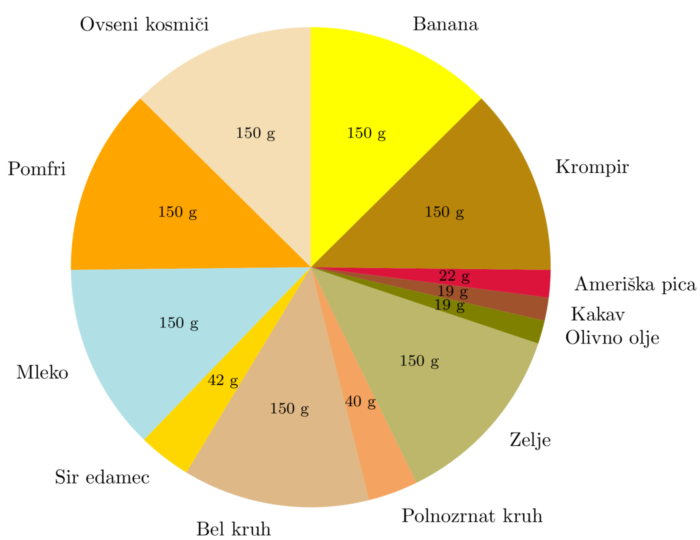
Tabela 4: Z jedilnikom izpolnimo vse pogoje. Opazimo, da je na mejni vrednosti le količina maščob, iz česar lahko sklepamo, da je bila to zahteva, ki je najbolj vplivala na ceno. Z minimizacijo smo dosegli ceno 1.43 EUR.



Slika 4: Jedilnik sestavlja 629 g ovsenih kosmičev, 536 g mleka, 123 g zelja in 118 g pomrija.

Uravnotežena prehrana

Skupno dosedanjim jedilnikom je, da je bila njihova pestrost zelo majhna. To želimo izboljšati, zato omejimo količino posameznega živila na 150 g. Ponovno minimiziramo ceno. Na sliki 5 vidimo, da je nabor živil res postal bolj pester. Glede na to, da kar nekaj živil zavzema vrednost 150 g, bi pestrost z zmanjšanjem največje količine posameznega živila še povečali. V tabeli 5 lahko preberemo, da cena tokrat znaša 1.93 EUR. Tokrat je bila omejitven faktor količina ogljikovih hidratov, saj smo potrebe po vseh ostalih hranilih zadostili prej.



Slika 5: Ovsenih kosmičev, pomfrija, mleka, belega kruha, zelja, krompirja in banan naj bi zaužili 150 g, kar je tudi največja dovoljena meja za posamezno živilo.

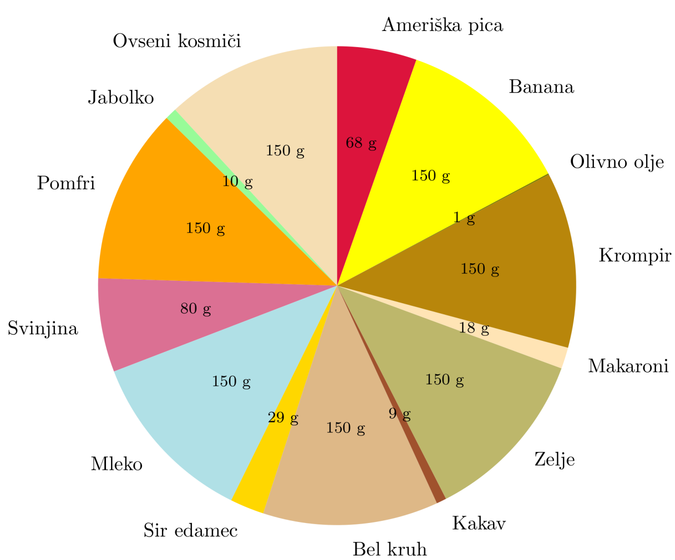
Količina	Zahteva	Rezultat
m [kg]	≤ 2	1.2
Kalorije [kcal]	≥ 2000	2000
Maščobe [g]	≥ 70	75
Ogljikovi hidrati [g]	≥ 310	310
Beljakovine [g]	≥ 50	76
Znesek [EUR]	min.	1.93

Tabela 5: Z jedilnikom ustrežemo vsem zahtevam, ceno pa uspemo minimizirati na 1.93 EUR, kar je le 50 centov več kot v primeru 4, ko nismo upoštevali dodatne vezi, ki omejuje količino posameznega živila.

V naslednjem koraku določimo tudi minimalno količino živil iz posamezne skupine. Dodatne zahteve so:

- $m_{\text{zelenjava}} \geq 160$ g,
- $m_{\text{sadje}} \geq 160$ g,
- $m_{\text{meso}} \geq 80$ g,
- $m_{\text{mlečni izdelki}} \geq 80$ g.

Ob dodatnih pogojih se med živili prvič pojavi tudi meso. Končna cena jedilnika je 2.64 EUR in je večja od cene menija 5, saj smo dodali dodatne pogoje.



Slika 6: Največji del jedilnika sestavljajo ovseni kosmiči, pomfri, mleko, bel kruh, zelje, krompir in banane. Vsakega od teh živil je treba pojesti 150 g. Z 80 g svinjine zadostimo potrebam po mesu. Pojemo tudi 68 g pice, 29 g sira, 18 g makaronov, 10 g jabolka, 9 g kakava in 1 g olivnega olja.

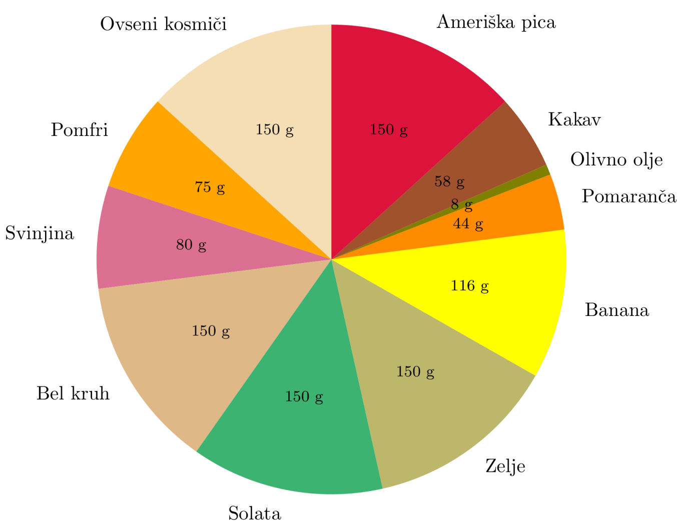
Količina	Zahteva	Rezultat
m [kg]	≤ 2	1.3
Kalorije [kcal]	≥ 2000	2020
Maščobe [g]	≥ 70	70
Ogljikovi hidrati [g]	≥ 310	310
Beljakovine [g]	≥ 50	85
Znesek [EUR]	min.	2.64

Tabela 6: Jedilnik 6 izpolnjuje vse pogoje, ki se nanašajo na hranila. Opazimo, da zaužijemo 85 g beljakovin, kar je 35 g več od zahtevanih 50 g. Za jedilnik je treba odšteti 2.64 EUR.

Prehrana brez laktoze

Za konec nas zanima še, kako se spremeni zastopanost posameznega živila, če izločimo mlečne izdelke, ker se želimo izogniti laktozi. Za izdelke z laktozo smatramo živila, ki so izključno iz mleka (npr. mleko, sir, maslo...), za izdelke kot so npr. kakav, pica in čokolada pa predpostavimo, da smo izbrali verzijo brez laktoze. Nov pogoj je $m_{\text{mlečni izdelki}} = 0$, poleg tega pa obdržimo ostale zahteve, ki prispevajo k raznovrstnosti prehrane:

- $m_{\text{zelenjava}} \geq 160$ g,
- $m_{\text{sadje}} \geq 160$ g,
- $m_{\text{meso}} \geq 80$ g,
- $m_{\text{posamezno živilo}} \leq 150$ g.



Slika 7: V največjem deležu so zastopani ovseni kosmiči, bel kruh, solata, zelje in pica. Vsakega od njih moramo pojesti 150 g. Sledijo banane s 116 g, svinjina z 80 g in pomfri s 75 g. Jedilnik vsebuje še 44 g pomaranč in 8 g olivnega olja.

Količina	Zahteva	Rezultat
m [kg]	≤ 2	1.1
Kalorije [kcal]	≥ 2000	2002
Maščobe [g]	≥ 70	70
Ogljikovi hidrati [g]	≥ 310	310
Beljakovine [g]	≥ 50	88
Znesek [EUR]	min.	2.91

Tabela 7: Po hranilih je sestava tega jedilnika podobna jedilniku v prejšnjem primeru (slika 6). Znesek, ki smo ga minimizirali, znaša 2.91 EUR, kar je približno 10 % dražje od cene jedilnika 6.

Semafor

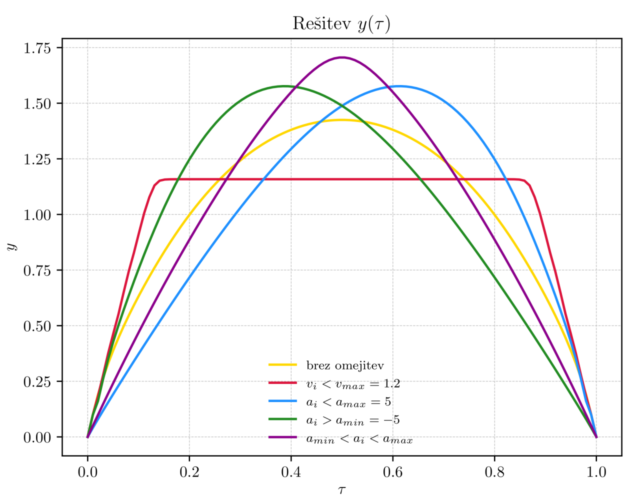
Poskušajmo repruducirati rezultate naloge iz prejšnjega tedna z metodo linearnega programiranja. Za implemetacijo funkcije `linprog` izberemo primer:

- $\int_0^1 y(\tau)\mathrm{d}\tau = l = 1$
- začetna in končna hitrost sta enaki nič: $y_0 = y_k = 0$,

minimizirati pa želimo hitrost. V bistvu smo zdaj problem zastavili tako, da se do prižiga zelene luči želimo pripeljati do semaforja in se tam ustaviti. To nima smisla, a vseeno poglejmo, kakšne so rešitve. Problem prepišemo v diskretno obliko:

- $\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + ... + y_{N-1} + \frac{1}{2}y_N\right)\Delta t = 1$,
- $\sum_{j=0}^{N} y_j = \text{min.}$,
- $y_0 = y_N = 0$,
- $a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t}$.

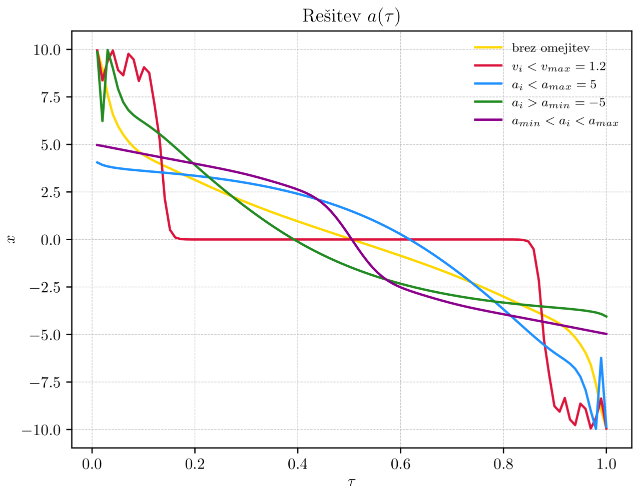
Prednost te metode pri izračunu je, da nas tokrat za negativne hitrosti ne rabi skrbeti, saj funkcija `linprog` že po privzetih nastavitvah išče le nenegativne rešitve. Ker smo hitrost diskretizirali, moramo posebej zahtevati še zveznost, $y_{i+1} - y_i < \epsilon$, s čimer v bistvu omejimo velikost pospeška. Rešitve za nekaj različnih pogojev so prikazane na sliki 8, pospešek pa je prikazan na sliki 9. Na tak način pa funkcije hitrosti v bistvu ne moremo minimizirati, saj bo ta vedno morala ustrezati pogoju o prevoženi poti, torej bo morala vedno imeti enako vsoto. S tem izračunom smo zlorabili funkcijo `linprog` za reševanje sistema linearnih enačb, saj je vsota hitrosti zmeraj konstantna in je v bistvu ne minimiziramo.



Slika 8: Prikazana je hitrost za nekaj različnih pogojev. Najprej je naša edina zahteva "minimizacija hitrosti", potem omejimo hitrost z v_{max}, sledi pa še omejitev pospeška (v bistvu je to dodatna omejitev, saj pogoj o zveznosti hitrosti že omejuje pospešek). Če pospešek omejimo le navgor ali navzdol, je rešitev nesimetrična, kar prikazujeta modra in zelena rešitev.

Zares zanimiva pa stvar postane, ko poskušamo minimizirati pospešek. Pri 1. nalogi nam je težave z integriranjem delala absolutna vrednost pospeška, zato smo namesto tega raje minimizirali kumulativno vrednost kvadrata. Kot smo omenili že prej, pa funkcija `linprog` išče le nenegativne rešitve. Direktna minimizacija pospeška, zato več ne predstavlja težave. Naš cilj je torej minimizirati vsoto:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i = \text{min.}$$



Slika 9: Izračunan pospešek za pripradajoče rešitve hitrosti na sliki 8.

Podobno kot smo prej zahtevali zveznost hitrosti, zdaj zahtevamo zveznost pospeška, kar v bistvu omeji maksimalno vrednost le-tega. To je fizikalno smiselno, saj pospeški avtomobilov niso neskončni. Rešitev za tak primer je prikazana z modro na sliki 10 in 11, z rdečo pa je prikazana rešitev iz prejšnjega tedna (ponovno opomnimo, da je šlo takrat za minimizacijo kvadrata pospeška). Z zeleno je prikazana rešitev, kjer ne upoštevamo zveznosti oz. pospešek ni omejen. Ta rešitev ni fizikalna (omogočala bi $a \to \infty$), lahko pa jo poskusimo pojasniti z analitično rešitvijo za poljuben p iz 1. naloge:

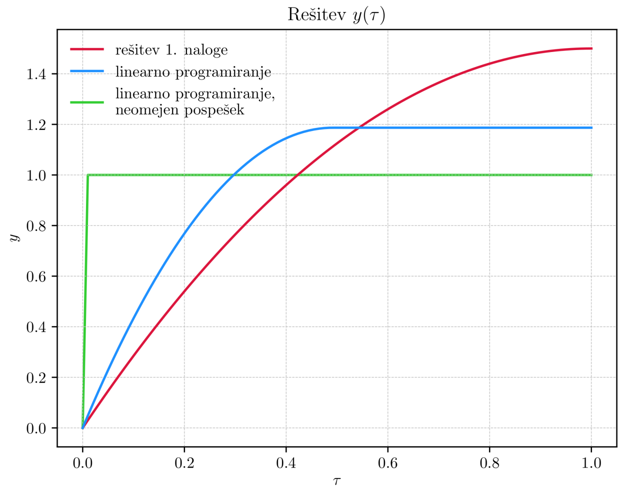
$$y(\tau) = y_0 + \frac{(1-y_0)(2p-1)}{p}\left(1-(1-\tau)^{\frac{p}{p-1}}\right) \tag{1}$$

Parameter p želimo nadomestiti z 1. Zaradi potence $\frac{p}{p-1}$, kjer bi dobili deljenje z nič, moramo izračunati limito. Ker je $0 \le \tau \le 1$, ne bomo imeli težav. Ločimo dva primera:

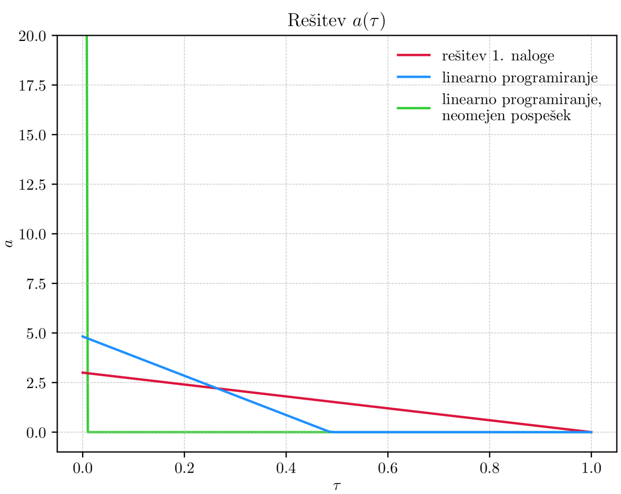
$$\lim_{p\to 1, \tau=0} y(\tau) = y_0, \quad \lim_{p\to 1, \tau>0} y(\tau) = 1.$$

Na začetku je hitrost torej enaka začetni hitrosti y_0, potem pa takoj skoči na povprečno hitrost, ki je zaradi brezdimenzijske oblike enaka ravno 1. Dobljena rešitev je enaka tisti, ki jo prikazuje zelena črta. Hitrost je Heavisideova funkcija, pospešek pa δ-funkcija. Najbolj optimalno je torej pospešiti v hipu, nato pa se do semaforja peljati s konstantno hitrostjo. To seveda ni fizikalna rešitev, saj tako velikih pospeškov ne moremo dosegati pa tudi vožnja ob takem pospeševanju ni udobna, zato je smiselno da smo pospešek omejili.

Za konec odgovorimo še na vprašanje, zakaj rešitvi za minimizacijo kumulativnega absolutnega pospeška in kumulativnega kvadrata pospeška nista enaki. Če minimiziramo kvadrat, so zelo kaznovani veliki pospeški, zato se bolj splača pospeševati dlje časa z manjšim pospeškom. Če minimiziramo absolutno vrednost pa se bolj splača na začetku bolj pospešiti in se čim prej približati končni hitrosti. Da je minimizacija absolutne vrednosti pospeška boljša, bi lahko sklepali tudi iz dejstva, da je končna hitrost manjša kot pri minimizaciji kvadrata.



Slika 10: Rešitev za hitrost v odvisnosti od časa. Rdeča črta prikazuje rešitev 1. naloge, kjer smo minimizirali kvadrat pospeška, modra in zelena pa rešitvi, ki smo ju izračunali z linearnim programiranjem.



Slika 11: Rešitev za pospešek v odvisnosti od časa. Vidimo, da zelena črta res prikazuje nekakšno δ-funkcijo.

Zaključek

V nalogi smo sestavili nekaj jedilnikov za različne zahteve. Ugotovili smo, da je smiselno omejiti količino posameznega živila, saj to prispeva k pestrosti diete, čeprav nekoliko pokvari rezultat minimizirane funkcije.

V drugem delu smo nekaj pozornosti posvetili še problemu semaforjev iz prejšnjega tedna in prišli do zanimivih zaključkov. Bolj optimlano je minimizirati absolutno vrednost pospeška kot pa njegov kvadrat, saj bo končna hitrost manjša.