強制法セミナー第 4 回：連続体仮説の独立性証明

Hiromi ISHII (@mr_konn)

2025-XX-XX

目次

本章では、いよいよ連続体仮説（CH）の独立性証明に移る。通常、ZFC + CH の無矛盾性証明には Gödel の L を用い、ZFC + ¬CH の無矛盾性に強制法が用いられることが多いが、ここではどちらも強制法による無矛盾性証明を与える。また、本章では常に AC は仮定する。

1　擬順序の組合せ論的性質と基数の保存

前回までに見たように、基数の概念は必ずしも強制法により保たれるとは限らない。一方、CH は基数に関する言明であるので、強制法によりどの範囲の基数が保たれるのか分析しなければならない。そこで本節では、基数の保存を導くような強制法擬順序の組合せ論的性質について議論しておく。そうした代表的な性質が、κ- 鎖条件と κ- 閉性である：

定義 1.1.　κ を基数とする。

- 擬順序 $\mathbb{P}$ が κ- **鎖条件**（κ-chain condition、κ-c.c.）を持つ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{P}$ の任意の反鎖の濃度が κ 未満。
- 擬順序 $\mathbb{P}$ が κ- **閉**（κ-closed）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{P}$ は任意の長さ κ 未満の下降列の下界を持つ。すなわち：
$$\forall \alpha < \kappa\ \forall \left\langle p_\xi \in \mathbb{P} \,\middle|\, \xi < \alpha \right\rangle \left[\forall \xi < \zeta < \alpha\ \left(p_\zeta \leq p_\xi\right) \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{P}\ \forall \xi < \alpha\ q \leq p_\xi\right].$$
- 擬順序 $\mathbb{P}$ が基数 κ を保つ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “κ : 基数”。

演習 1.1.　擬順序 $\mathbb{P}$ ごとに、$\mathbb{P}$ が κ- 鎖条件を満たす最小の κ は、常に正則基数となることを示せ。

注意 1.1.　定義より、擬順序 $\mathbb{P}$ は常に $\left|\mathbb{P}\right|^+$- 鎖条件を満たす。

閉性・鎖条件と基数の保存の関係を述べたのが、次の二つの補題である：

補題 1.1. κ が正則基数で $\mathbb{P}$ が κ- **鎖条件**を持つならば、$\mathbb{P}$ は κ **以上**の全ての基数を保つ。即ち、任意の基数 $\lambda \geq \kappa$ について $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "λ : 基数"。

補題 1.2. κ が正則基数で $\mathbb{P}$ が κ- **閉**なら、$\mathbb{P}$ は κ **以下**の全ての基数を保つ。即ち、任意の基数 $\lambda \leq \kappa$ について $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "λ : 基数"。

以下、本節ではこの二つの補題の証明を与えてゆく。以下の証明に限らずよく使うのが次の補題である：

補題 1.3. $\mathbb{P}$ を擬順序、$a \in A \in V$ とし、B を $B \cap V = B \cap V[G]$ となるクラスとする。$p \in \mathbb{P}$ および $\dot{f}$ が $p \Vdash \dot{f} : \check{A} \to B$ を満たすなら、$z \in B$ と $q \leq p$ で $q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{z}$ を満たすものが存在し、とくにこのような z は q に対し一意である。

注意 1.2. このような q を「$\dot{f}(a)$ の値を決定するような q」と呼ぶ。

証明 仮定より $p \Vdash \dot{f}(a) \in B$ なので、強制法の章の系 5.13 (3) より次の集合 D が p 以下で稠密となる：

$$D = \left\{ q \in \mathbb{P} \mid \exists z \ q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{z} \right\} : p \text{ 以下で稠密}$$

特に $q \leq p$ で $q \in D$ となるものが取れる。よって D の定義より、$z \in B$ が存在して $q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{z}$ となる。z の q に対する一意性は、Δ_0- 論理式の絶対性から明らか。 □

では、鎖条件の特徴付けを述べ、補題 1.1 が成り立つことを確認しよう。

記法 . 以下、$(V, \mathbb{P})$- 生成的フィルター G が固定されていると思って議論をする。

実は、正則基数 κ について、κ 以上の基数の保存は、特に正則基数が $V[G]$ でも（正則とは限らない）基数になっていることが言えれば十分である：

補題 1.4. 擬順序 $\mathbb{P}$、正則基数 κ について次は同値：
1. $\mathbb{P}$ は κ 以上の基数を保つ。
2. $\mathbb{P}$ は κ 以上の正則基数を基数として保つ。すなわち、$\forall \lambda \geq \kappa$: 正則 $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "λ : 基数"。

証明 任意の特異基数は正則基数の極限として表すことができ、基数の極限は常に基数であり、極限は強制拡大で不変であることから。 □

演習 1.2. 上をちゃんと示せ。

定義 1.2. 擬順序 $\mathbb{P}$ が κ- **大域被覆性質**（κ-**global covering property**）を持つ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $V[G]$ の任意の順序数の（集合サイズの）無限列 $f \in V[G]$ に対して、その値域の候補を高々 κ 未満の集合で捕まえる $F \in V$ が

存在する。つまり：

$$\forall\alpha\ \forall f : {}^{\alpha}\mathrm{On} \cap V[G]\ \exists F : \alpha \to [\mathrm{On}]^{<\kappa}\ [F \in V \land \forall\xi < \alpha\ f(\alpha) \in F(\alpha)].$$

注意 1.3. おもむろに $V[G]$ への言及がでてきているが、 これは幾つかの方法で正当化できることは既に触れた。 具体的にこういうことをするのは初めてなので、 たとえば強制関係を使って V の中だけでちゃんと定義できることを見ておこう。

結論から言えば、$\mathbb{P}$ が κ- 大域被覆性質を持つことは、次の論理式により V の中だけで書き下せる：

$$\forall\alpha\ \forall\dot{f} \in V^{\mathbb{P}}\ \exists F : \alpha \to [\mathrm{On}]^{<\kappa}\ [\ \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{f} : \check{\alpha} \to \mathrm{On}\text{”} \implies\ \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\forall\xi < \alpha\ \dot{f}(\xi) \in \check{F}(\xi)\text{”}].$$

補題 1.5 (κ- 鎖条件の特徴付け). 擬順序 $\mathbb{P}$ について、次は同値：

1. $\mathbb{P}$ が κ- 鎖条件を持つ。
2. $\mathbb{P}$ が κ- 大域被覆性質を持つ。

証明 $(\mathbf{1}) \implies (\mathbf{2})$： $\mathbb{P}$ が κ- 鎖条件を持つとし、順序数 α を固定して $\dot{f} \in V^{\mathbb{P}}$ を $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\dot{f} : \check{\alpha} \to \mathrm{On}$” を満たす $\mathbb{P}$-名称とする。 目標は、$F : \alpha \to [\mathrm{On}]^{<\kappa}$ であって各 $\xi < \alpha$ ごとに、$\{\, p \in \mathbb{P} \mid p \Vdash \dot{f}(\xi) \in \check{F}(\xi) \,\}$ が $\mathbb{P}$ で稠密となるようなものを見付けることである。
まず、D_ξ $(\xi < \alpha)$ を次のように定める：

$$D_\xi = \{\, p \in \mathbb{P} \mid \exists\beta\ p \Vdash \dot{f}(\check{\xi}) = \check{\beta} \,\}.$$

すると、 補題 1.3 より各 D_ξ は $\mathbb{P}$ で稠密である。 また、 強制関係は下に遺伝するので、D_ξ は特に開集合でもある。 そこで、 各 ξ について D_ξ に含まれる中で極大な反鎖 $\mathcal{A}_\xi$ をとっておく。 すると、$\mathbb{P}$ の κ- 鎖条件から、$\left|\mathcal{A}_\xi\right| < \kappa$ となる。ここで、各 $p \in D_\xi$ に対し、$p \Vdash \dot{f}(\xi) = \beta$ となる β は一意に定まるので、それを β_p とおき、$F(\xi) \coloneqq \left\{ \beta_p \,\middle|\, p \in \mathcal{A}_\xi \right\}$ により $F : \alpha \to \mathcal{P}(\mathrm{On})$ を定める。すると $\left|\mathcal{A}_\xi\right| < \kappa$ より $\left|F(\xi)\right| \leq \left|\mathcal{A}_\xi\right| < \kappa$ となるので、特に $F : \alpha \to [\mathrm{On}]^{<\kappa}$ である。
また、$\mathcal{A}_\xi$ の極大性から、 任意の $p \in D_\xi$ に対して $q \in \mathcal{A}_\xi$ で $p \parallel q$ となるものがとれるが、$r \leq p, q$ を取れば $r \Vdash \check{\beta}_p = \dot{f}(\check{\xi}) = \check{\beta}_q$ となり、Δ_0- 絶対性から $\beta_p = \beta_q$ を得、$p \Vdash \dot{f}(\xi) \in \check{F}(\xi)$ となる。よって、特に D_ξ 上で $\dot{f}(\xi) \in \check{F}(\xi)$ が強制されているので、目標が達成された。

$(\mathbf{2}) \implies (\mathbf{1})$：対偶を示す。$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$ を濃度 κ の $\mathbb{P}$ の反鎖とする。 また、$\dot{f}$ をつくる代わりに、 順序数の $\mathbb{P}$-名称 $\dot{\alpha}$ であって、 その取り得る値の範囲が κ 以上となるものを作る（つまり、$\alpha = 1$ としている)。 ここで、$\mathcal{A} = \left\{ p_\xi \,\middle|\, \xi < \kappa \right\}$ として数え挙げ、$\dot{f} \in V^{\mathbb{P}}$ を次で定める：

$$\dot{\alpha} \coloneqq \left\{ (\check{\xi}, p_\xi) \,\middle|\, \xi < \kappa \right\}.$$

すると定義より $p_\xi \Vdash \dot{\alpha} = \check{\xi}$ となるので、明らかに $\dot{\alpha}$ の値の取り得る範囲は κ である。 □

注意 1.4. 実は、κ- 極大被覆性質は擬順序に対してだけではなく、 任意の推移的クラス $V \subseteq W$ について同様に定義できる。 この場合、**特に $\mathbb{P}$ に対する言及がなくても**、V, W がともに AC を満たすなら、

(V, W) が κ- 被覆性質を持つことと、W がなんらかの κ- 鎖条件擬順序 $\mathbb{P}$ による V の生成拡大であることとは同値であることが知られている。この特徴付けは、V の基礎モデルを数え上げる**集合論の地質学**で重要な役割を果す。

Proof of 補題 1.1 $\mathbb{P}$ を κ- 鎖条件を満たす強制法とする。補題 1.4 を念頭に $\mathbb{P}$ が κ 以上の正則基数を基数として保つことを示そう。証明は背理法である。つまり、V の正則基数 $\lambda \geq \kappa$ で $V[G]$ で基数でなくなるようなものがあったとして矛盾を導く。特に、そのような λ が特異基数になってしまうことが言えればよい。

そこで、V の正則基数 $\lambda \geq \kappa$ で、$V[G]$ で基数でなくなっているものがあったとする。ここで $\theta := |\lambda|^{V[G]} < \lambda$ とおけば、$V[G]$ で全射 $f : \theta \twoheadrightarrow \lambda$ が取れる。すると、補題 1.5 より V に属する関数 $F : \theta \to [\lambda]^{<\kappa}$ で $f(\xi) \in F(\xi) \ (\forall \xi < \theta)$ を満たすものがとれる。そこで、以下によって $g : \theta \to \lambda$ を定める：

$$g(\xi) := \sup F(\xi).$$

ここで、$\lambda \geq \kappa$ かつ λ が正則であることから、$\sup F(\xi) < \lambda$ となるので、$g : \theta \to \lambda$ である。しかし、f が全射であることから、$\sup_{\xi<\theta} f(\xi) = \lambda$ となるので、$\mathrm{cf}^V(\lambda) \leq \theta < \lambda$ となる。これは λ が V で正則であることに反する。 □

系 1.6. 任意の擬順序 $\mathbb{P}$ は $|\mathbb{P}|^+$ 以上の基数を保つ。

最後に閉性の帰結を述べ、これにより下方向の基数の保存が導かれることを示す：

補題 1.7. 擬順序 $\mathbb{P}$ が κ- 閉なら、$\mathbb{P}$ による強制拡大は長さ κ 未満の順序数列について閉じている。即ち、${}^{<\kappa}\mathrm{On} \cap V[G] = {}^{<\kappa}\mathrm{On} \cap V$。

演習 1.3. 上の主張を厳密化せよ。

これを認めれば、次のようにして 補題 1.2 は一瞬である：

Proof of 補題 1.2 対偶を示す。$\alpha \leq \kappa$ を順序数とする。$V[G]$ で α が基数でなかったとすると、$\beta < \alpha$ と $V[G]$ に属する全射 $f : \beta \twoheadrightarrow \alpha$ が取れる。今、$\mathbb{P}$ は κ- 未満の順序数列について閉じているので、この f は V に属しており、特に V においても $\beta < \alpha$ から α への全射となっている。よって α は V でも基数ではない。 □

Proof of 補題 1.7 $\mathbb{P}$ が κ- 閉であるとする。$\alpha < \kappa$ を適当に固定し、$\dot{f}$ を $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{f} : \check{\alpha} \to \mathrm{On}$" を満たす $\mathbb{P}$- 名称とする。以下が稠密であることが示せればよい：

$$D := \left\{ q \in \mathbb{P} \mid \exists g : \alpha \to \mathrm{On} \ \forall \xi < \alpha \ q \Vdash \dot{f}(\check{\xi}) = \widecheck{g(\xi)} \right\}.$$

つまり、$p \in \mathbb{P}$ を適当に固定し、$q \leq p$ と $g : \alpha \to \mathrm{On}$ で、任意の $\xi < \alpha$ について $q \Vdash \dot{f}(\check{\xi}) = \widecheck{g(\xi)}$ を満たすものが取れればよい。そこで、以下のようにして $\left\langle (p_\xi, \gamma_\xi) \,\middle|\, \xi \leq \alpha \right\rangle$ を帰納的に取っていく：

1. $p_0 = p$,
2. $\xi < \zeta \Longrightarrow p_\zeta \leq p_\xi$,

3. $p_{\xi+1} \Vdash \dot{f}(\xi) = \check{\gamma}_\xi$.

このようなものが取れたとする。$q := p_\alpha$ とおけば、$\forall \xi < \alpha\ p_\xi \geq q \Vdash \dot{f}(\xi) = \gamma_\xi$ となるので、$g(\xi) := \gamma_\xi$ とおけば、これが所望のものである。そこで、以下、(p_ξ, γ_ξ) を構成していく。

後続ケース： p_ξ まで取れたとして、$p_{\xi+1}$ を取る。これは簡単で、 補題 1.3 により、$p_{\xi+1} \leq p_\xi$ で $\dot{f}(\xi)$ の値を決定するような条件を取り、その値を γ_ξ とすればよい。

極限ケース：閉性を使う。$\xi \leq \alpha$ が極限順序数で、任意の $\zeta < \xi$ について p_ζ, γ_ζ が条件を満たすように取れているとする。$p_\xi \leq p_\zeta$ $(\forall \zeta < \xi)$ となるものが常に取れる、というのが $\mathbb{P}$ の κ- 閉性が保証するところなので、有り難く下界を取ればよい。 □

2 Cohen 強制法の基本性質

CH やその否定の無矛盾性証明では、κ-**Cohen 強制法**と呼ばれる強制概念が重要な役割を果す。そこで、本節ではその基本的な性質を採り上げておく。

定義 2.1. κ を無限基数とする。

1. 以下で定まる $\mathsf{Add}(\kappa)$ を、κ の部分集合を付け加える κ-**Cohen 強制法**と呼ぶ：

$$\mathsf{Add}(\kappa) := \left\{ f : A \to 2 \mid A \in [\kappa]^{\kappa} \right\},$$

$$p \leq q \overset{\text{def}}{\iff} p \supseteq q \iff \mathrm{dom}(p) \supseteq \mathrm{dom}(q) \wedge p \restriction \mathrm{dom}(q) = q.$$

$\mathsf{Add}(\omega)$ を単に実数を付け加える **Cohen 強制法**と呼ぶ。

2. 集合 I で添え字づけられた擬順序の族 $\left\langle (\mathbb{P}_i, \mathbb{1}_i, \leq_i) \mid i \in I \right\rangle$ にの κ- **台直積** $\prod_{i \in I}^{<\kappa} \mathbb{P}_i$ を次で定める：

$$\prod_{i \in I}^{<\kappa} \mathbb{P}_i := \left\{ p : \text{関数} \mid \mathrm{dom}(p) \in [I]^{<\kappa} \wedge \forall i \in \mathrm{dom}(p)\ \left[p(i) \in \mathbb{P}_i\right] \right\},$$

$$\mathbb{1} = \emptyset,$$

$$p \leq q \overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{dom}(p) \supseteq \mathrm{dom}(q) \wedge \forall i \in \mathrm{dom}(q)\ \left[p(i) \leq_i q(i)\right].$$

3. $\mathsf{Add}(\kappa)$ の γ 個の κ- 台直積 $\mathsf{Add}(\kappa, \gamma) := \prod_{\alpha < \gamma}^{<\kappa} \mathsf{Add}(\kappa)$ のことを、γ 個の κ の部分集合を付け加える κ-**Cohen 強制法**と呼ぶ。$\mathsf{Add}(\omega, \gamma)$ を単に γ 個の実数を付け加える **Cohen 強制法**と呼ぶ。

注意 2.1. $\mathbb{B}(\mathsf{Add}(\kappa)) \cong \mathbb{B}(\mathsf{Add}(\kappa, 1))$ である。

「κ の部分集合を付け加える」といっているので、本当に付け加えられているのか確認していこう。実のところ、$\mathsf{Add}(\kappa)$ は κ の新しい部分集合 x の特性関数 χ_x を近似している：

演習 2.1. F を関数から成る $\supseteq$ に関するフィルターとするとき、$\bigcup F$ は F の任意の元を拡張する関数となることを示せ。

ヒント：関数 f, g が両立するなら、$f \subseteq g$ か $g \subseteq f$ が成り立ち、$f \cup g \supseteq f, g$ が f, g を拡張する。

補題 2.1. G を $(V, \mathsf{Add}(\kappa))$- 生成的フィルターとし、$f_G := \bigcup G$ とおく。このとき次が成立する：

1. $f_G : \kappa \to 2$,
2. $f_G \notin V$.

このとき、$x_G := \left\{ \alpha < \kappa \,\middle|\, f_G(\alpha) = 1 \right\}$ を κ-**Cohen 集合**と呼ぶ。特に、$\kappa = \omega$ のとき、x_G は **Cohen 実数**と呼ばれる。

証明 Vで議論する。各 $\alpha < \kappa$ および $g : \kappa \to 2$ に対し、以下の集合 D_α, E_f を考える：

$$
\begin{gathered}
D_\alpha = \left\{ p \in \mathsf{Add}(\kappa) \mid \alpha \in \mathrm{dom}(p) \right\}, \\
E_g = \left\{ p \in \mathsf{Add}(\kappa) \mid \exists \alpha \in \mathrm{dom}(p) \ [g(\alpha) \neq p(\alpha)] \right\}.
\end{gathered}
$$

このとき、D_α, E_g は明らかに $\mathsf{Add}(\kappa)$ で稠密であり、Vの元である。

そこで $(V, \mathsf{Add}(\kappa))$- 生成的フィルター G を取る。このとき、演習 2.1 より、$f_G := \bigcup G$ は G の各元を拡張する関数である。また、生成的フィルターの定義より、任意の $g \in V$, $\alpha < \kappa$ に対して $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ かつ $G \cap E_g \neq \emptyset$ が成り立つ。特に、$D_\alpha \cap G \neq$ より $\alpha \in \mathrm{dom}(F)$ が出るので、$\mathrm{dom}(f_G) = \kappa$ である。また、$f \in V$をとれば、$E_f \cap G \neq \emptyset$ よりある $\alpha < \kappa, p \in G$ があって、$f_G(\alpha) = p(\alpha) \neq f(\alpha)$ となる。よって $f_G \notin V$である。 □

よって $\mathsf{Add}(\kappa)$ は新しい κ の部分集合を付け足していることがわかった。つづいて $\mathsf{Add}(\kappa, \gamma)$ が「γ 個以上」の新しい集合を足している事を見ていこう。

まず、前章の補題 5.16 より、次の補題から直積は各直積成分の生成的フィルターを足すことがわかる：

補題 2.2. $\langle \mathbb{P}_i \mid i \in I \rangle$ を擬順序の族、κ を無限基数、$\mathbb{Q} := \prod_{i \in I}^{<\kappa} \mathbb{P}_i$ とする。このとき、$e_i : \mathbb{P}_i \to \mathbb{Q}$ を $e_i(p) = \left\{ (i, p) \right\}$ により定めると、e_i は $\mathbb{P}_i$ から $\mathbb{Q}$ への完備埋め込みとなる。

証明 順序や $\perp$ を保つことは直ちに従う。あとは $\mathcal{A}$ が $\mathbb{P}_i$ の極大反鎖なら、$e_i[\mathcal{A}]$ も $\mathbb{Q}$ で極大反鎖となることを示せばよい。

そこで、適当に $p \in \mathbb{Q}$ をとったとき、$p^* \in \mathcal{A}$ で $e(p^*) \parallel p$ となるものが取れることを示せばよい。いま、$\mathcal{A}$ の $\mathbb{P}_i$ での極大性から、$q \in \mathcal{A}$ で $p(i) \parallel q$ となるものが存在する。そこで $r \leq_i p(i), q$ となるような $r \in \mathbb{P}_i$ を取り、$p^* := e(q)$ とおけば、$p^* \in e[\mathcal{A}]$ である。あとは p と p^* が $\mathbb{Q}$ で下界を持つことを示せばよい。

実際、次のように定義すればよい：

$$
r^*(j) := \begin{cases} r & (j = i) \\ p(j) & (\text{otherwise}) \end{cases}
$$

すると、定義より $r^* \leq p, p^*$ となる。これが示したかった事である。 □

系 2.3. G を $(V, \prod_i^{<\kappa} \mathbb{P}_i)$- 生成的とするとき、$G_i := \{\, p(i) \mid p \in G, i \in \mathrm{dom}(p) \,\}$ は $(V, \mathbb{P}_i)$- 生成的。

これにより、特に $\mathsf{Add}(\kappa, \gamma)$ は $\mathsf{Add}(\kappa)$ の生成的フィルターを足すことがわかった。特に γ 個足されている訳だが、これらの間に重複はないだろうか？つまり、γ 個足されているように見えても、実際には同じ生成的フィルターになっていたりはしないだろうか？

ちゃんと**この γ 個が互いに相異なる**ことを保証するのが、Cohen 強制法の**無原子性**である：

補題 2.4. $\mathsf{Add}(\kappa)$ は原子を持たない。すなわち、任意の $p \in \mathsf{Add}(\kappa)$ に対し、$q, r \leq p$ で $q \perp r$ となるものが存在する。

証明 $p \in \mathsf{Add}(\kappa)$ を任意に取る。このとき、$\mathrm{dom}(p) < \kappa$ なので $\alpha \in \kappa \setminus \mathrm{dom}(p)$ が取れる。ここれ $q := p \cup \{(\alpha, 0)\},\ r := p \cup \{(\alpha, 1)\}$ とおけば、$q, r \leq p$ で $q \perp r$ となる。 □

補題 2.5. 補題 2.2 、系 2.3 の状況で、更に各 $\mathbb{P}_i$ が原子を持たないとする。このとき、$i \neq j$ なら $p \in G_i, q \in G_j$ で $e_i(p) \perp_{\mathbb{Q}} e_j(q)$ となるものが存在する。

特に、$\mathbb{P}_i = \mathbb{P}$ が原子を持たないなら、各 G_i は互いに両立しない元を持つ生成的フィルターとなる。

証明 面倒なので「特に」の $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}$ の場合だけ示す。$i \neq j$ として、$D_{ij} \subseteq \mathbb{Q}$ を次で定める：

$$D_{ij} := \{\, p \in \mathbb{Q} \mid i, j \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(i) \perp p(j) \,\}.$$

$D_{ij} \in V$ なので、D_{ij} が $\mathbb{Q}$ で稠密であることが示せれば、$p \in G \cap D_{ij}$ が取れ、定義より $p(i) \in G_i, p(j) \in G_j$ である。D_{ij} の定義より $p(i) \perp p(j)$ となるので、これが示したかった事である。

では D_{ij} の稠密性を示していく。$p \in \mathbb{Q}$ を任意に取り、$p^* \leq p$ で $p^*(i) \perp p^*(j)$ となるものを探せばよい。$i \notin \mathrm{dom}(p)$ または $j \notin \mathrm{dom}(p)$ の少なくとも一方が成り立っていれば、$\mathbb{P}$ の無原子性から p をしかるべく延長できるのでよい。そこで、$i, j \in \mathrm{dom}(p)$ とする。もし $p(i) \perp p(j)$ なら既に $p \in D_{ij}$ となっているので、以下 $p(i) \parallel p(j)$ とする。そこで $q \leq p(i), p(j)$ をとる。このとき、$\mathbb{P}$ の無原子性から、$r, s \leq q$ で $r \perp s$ となるものが取れる。そこで、次により p^* を定める：

$$p^*(k) := \begin{cases} r & (k = i) \\ s & (k = j) \\ p(k) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

すると定め方より明らかに $p^* \leq p$ かつ $p^* \in D_{ij}$ である。 □

演習 2.2. 一般のケースを示せ。

系 2.6. $\mathsf{Add}(\kappa, \gamma)$ は相異なる $|\gamma|$ 個の κ の部分集合を足す。

以上から、κ-Cohen 強制法により、望んだ数の κ の部分集合を付け加えられることがわかった。一方で、$\mathsf{Add}(\kappa,\gamma)$ たちがどのような基数を保つのかについては、まだよくわかっていない。特に、仮に γ 個新しい実数や集合を足したとしても、γ **が強制法の前後で基数ではなくなっているかも**しれず、そうした場合、$\mathcal{P}(\kappa)$ の濃度を狙ったように増やせているかはわからない。

そこで、以下では $\mathsf{Add}(\kappa)$ や $\mathsf{Add}(\kappa,\gamma)$ がどのような基数を保つのかを議論する。まず、$\mathsf{Add}(\kappa)$ は $\mathrm{cf}(\kappa)$ 以下の基数を保つことを見ていこう。

補題 2.7. I を集合、κ、$\lambda \leq \mathrm{cf}(\kappa)$ を無限基数とし、$\langle \mathbb{P}_i \mid i \in I \rangle$ を λ- 閉擬順序の族とする。このとき $\prod_{i\in I}^{<\kappa} \mathbb{P}_i$ も λ- 閉である。

演習 2.3. 稠密性をちゃんと示せ。

証明 成分ごとに閉性をつかって下界を取ればよい。定義域が κ 未満となることに、$\lambda \leq \mathrm{cf}(\kappa)$ を使う。 □

演習 2.4. ちゃんと示せ。

補題 2.8. $\mathsf{Add}(\kappa,\gamma)$ や $\mathsf{Add}(\kappa)$ は $\mathrm{cf}(\kappa)$- 閉。特に、κ が正則なら κ-Cohen 強制法は κ- 閉。

証明 補題 2.7 より $\mathsf{Add}(\kappa)$ の場合についてだけ証明すればよい。面倒なので κ が正則な場合のみ示す。$\gamma < \kappa$ とし、$\left\langle p_\alpha \,\middle|\, \alpha < \gamma \right\rangle$ を $\mathsf{Add}(\kappa,\gamma)$ の下降列とする。このとき、$p_\gamma := \bigcup_{\alpha<\gamma} p_\alpha$ とおけば、少なくとも $p_\gamma \supseteq p_\alpha \ (\forall \alpha < \gamma)$ が成り立つ。あとは $\left|p_\gamma\right| < \kappa$ が言えればよいが、これは κ が正則で、$\gamma < \kappa$ かつ $\forall \alpha < \gamma \ \left|p_\alpha\right| < \kappa$ であることから従う。 □

演習 2.5. ちゃんと証明せよ。

系 2.9. κ-Cohen 強制法 $\mathsf{Add}(\kappa)$ および $\mathsf{Add}(\kappa,\gamma)$ はいずれも $\mathrm{cf}(\kappa)$- 以下の無限基数を全て保ち、更に長さ $\mathrm{cf}(\kappa)$ 未満の無限列を足さない。

系 2.10. κ が正則、G が $(V,\mathsf{Add}(\kappa))$- 生成的なら、$({}^{<\kappa}2)^{V[G]} = ({}^{<\kappa}2)^V$。

続いて鎖条件について議論する。一個足す強制法 $\mathsf{Add}(\kappa)$ については、濃度を数えるだけで直ちにわかる：

補題 2.11. $\mathsf{Add}(\kappa)$ は $(2^{<\kappa})^+$- 鎖条件を満たし、従って $(2^{<\kappa})^+$ 以上の基数を保つ。

証明 $\left|\mathsf{Add}(\kappa)\right| = \left|{}^{<\kappa}[\kappa]\right| = 2^{<\kappa}$ なので明らか。 □

では、複数個足す強制法 $\mathsf{Add}(\kappa,\gamma)$ についてはどうだろうか？閉性の場合と同様に直積によって鎖条件が保た

れてくれればよいが、実は**二項直積が可算鎖条件を保つかどうかすら** ZFC **から独立**であることが知られている。これについては、次の Δ- システム補題を使って示す：

定義 2.2. 集合族 $\mathcal{A}$ が r を根とする Δ- **システム** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の相異なる $A, B \in \mathcal{A}$ について、$A \cap B = r$。

補題 2.12 (Delta System Lemma). $\kappa < \mu$ をそれぞれ無限正則基数とし、$\forall \theta < \mu \left[\theta^{<\kappa} < \mu\right]$ が成り立つとする。集合族 $\mathcal{A}$ が $\left|\mathcal{A}\right| = \mu$ かつ $\left|A\right| < \kappa$ $(\forall A \in \mathcal{A})$ を満たすなら、$\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^\mu$ で Δ- システムとなるものが存在する。

これを認めれば、$\mathsf{Add}(\kappa, \gamma)$ の鎖条件は次のように示せる：

補題 2.13. $\mathsf{Add}(\kappa, \gamma)$ は $(2^{<\kappa})^+$- 鎖条件を満たし、従って $(2^{<\kappa})^+$ 以上の基数を保つ。

証明 $\mu := (2^{<\kappa})^+$ とおく。濃度 μ の部分集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{Add}(\kappa, \gamma)$ が与えられたら、必ず互いに両立する相異なる元が含まれることが示せればよい。より強く、そんな $\mathcal{F}$ のの部分集合 $\mathcal{G} \in [\mathcal{F}]^\mu$ で、任意の二元が両立するようなものを取ろう。

ここで、略記法として、$p \in \mathsf{Add}(\kappa, \gamma)$ に対して p の「定義域」を $\Delta(p) := \{\, (\xi, \gamma) \mid \xi \in \mathrm{dom}(p) \wedge \gamma \in \mathrm{dom}(p(\xi)) \,\}$ で表すことにし、$\mathcal{A} \subseteq [\kappa \times \kappa]^{<\kappa}$ を次のように定める：

$$\mathcal{A} = \Delta[\mathcal{F}] = \{\, \Delta(p) \mid p \in \mathcal{F} \,\}.$$

つまり、$\mathcal{A}$ は $\mathcal{F}$ に含まれる関数の「定義域」の集合である。構成から $\left|\mathcal{A}\right| = \left|\mathcal{F}\right| = \mu$ であり、また各 $A \in \mathcal{A}$ は $\left|A\right| < \kappa$ を満たしている。

いま、$\theta \leq 2^{<\kappa}$ なら、

$$\theta^{<\kappa} \leq (2^{<\kappa})^{<\kappa} = \sup_{\lambda < \kappa} (2^{<\kappa})^\lambda = 2^{<\kappa} < \mu.$$

そこで Δ-System 補題 2.12 を $\kappa < \mu = (2^{<\kappa})^+$ および $\mathcal{A}$ に適用すれば、$\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^\mu$ で Δ- システムとなるものが存在する。その根を r とし、適当に相異なる $p, q \in \mathcal{B}$ を取れば、定義より $p \cap q = r$ である。

そこで、$\mathcal{F}' := \Delta^{-1}[\mathcal{F}] = \left\{ p \in \mathcal{F} \mid \Delta(p) \in \mathcal{B} \right\}$ とけば、$\left|\mathcal{F}'\right| = \left|\mathcal{B}\right| = \mu$ である。また、相異なる $p, q \in \mathcal{F}'$ を取れば、$\mathcal{B}$ の取り方から $\Delta(p) \cap \Delta(q) = r$ となる。よって、$\Delta(p) \triangle \Delta(q)$ については単純に和を取ればよいので、あとは r 部分が一致するような $p \neq q \in \mathcal{F}'$ が取れることが示せればよい。

しかるに、r 部分の選び方は $2^{|r|}$ 通りしかないが、$\left|r\right| < \kappa$ より $2^{|r|} \leq 2^{<\kappa} < \mu$ となるので、鳩ノ巣原理よりある $s \in {}^r 2$ があって、$\mathcal{G} := \left\{ p \in \mathcal{F}' \,\middle|\, p \restriction r = s \right\}$ の濃度が μ となる。特に $\mathcal{G}$ は互いに両立する相異なる μ 個の元からなる $\mathcal{F}$ の部分集合であり、目標が示せた。 □

系 2.14. $\mathsf{Add}(\kappa, \gamma)$ は κ 以下および $(2^{<\kappa})^+$ 以上の基数を保つ。特に、$\mathsf{Add}(\omega)$ は任意の基数を保つ。

3 ZFC + CH の無矛盾性の証明

まずは比較的簡単な ZFC + CH の無矛盾性証明を行う。鍵となるのは、次の補題である：

補題 3.1. κ が正則で G が $(V, \mathsf{Add}(\kappa))$- 生成的なら、$\kappa$ は $V[G]$ でも基数であり、$(2^{<\kappa})^{V[G]} = \kappa$。

特に、系として $\mathsf{Add}(\omega_1)$ が CH を強制することがわかる。

系 3.2. $\mathsf{Add}(\omega_1)$ は実数を付加せず CH を強制し、ω_1 以下と $(2^\omega)^+$ 以上の基数を全て保つ。

証明 補題 3.1 より $V[G] \vDash 2^\omega = 2^{<\omega_1} = \omega_1$ を得る。 □

あとは 補題 3.1 を示せばよい。$\mathsf{Add}(\kappa)$ が κ- 閉であることから、特に V と $V[G]$ で ${}^{<\kappa}2$ が一致することを利用すれば、$\mathsf{Add}(\kappa)$ が κ から ${}^{<\kappa}2$ への全射を付け加えることが示せればよい。

ある集合への全射を付け足す強制法としては、**Levy 崩壊**が標準的な手法である：

定義 3.1. 基数 κ について、A の濃度を κ 以下に潰す **Levy 崩壊強制法** $\mathsf{Col}(\kappa, A)$ を以下で定める：

$$\mathsf{Col}(\kappa, A) := \{\, p : \alpha \to A \mid \alpha < \kappa \,\},$$
$$p \le q \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{dom}(p) \supseteq \operatorname{dom}(q) \wedge p \restriction \operatorname{dom}(q) = q.$$

Cohen 強制法の場合と同様の論法により、Levy 崩壊は κ- 閉である：

補題 3.3. κ が正則基数なら、$\mathsf{Col}(\kappa, A)$ は κ- 閉であり、特に κ 以下の基数を保つ。

演習 3.1. 上を示せ。

実際に Levy 崩壊により A の濃度が κ 以下になることが以下の補題によりわかる：

補題 3.4. κ：正則、G： $(V, \mathsf{Col}(\kappa, A))$- 生成的なら、$\bigcup G$ は κ から A への全射で、従って $|A|^{V[G]} \le \kappa$。

証明 G を $(V, \mathsf{Col}(\kappa, A))$- 生成的とするとき、$f_G := \bigcup G : \kappa \to A$ となることは Cohen 強制法の場合と同様に示せる。全射性を示す。

各 $a \in A$ に対し、以下の $D_a \subseteq \mathsf{Col}(\kappa, A)$ は $\mathsf{Col}(\kappa, A)$ で稠密である：

$$D_a := \{\, p \in \mathsf{Col}(\kappa, A) \mid \exists \xi < \kappa \ p(\xi) = a \,\}.$$

なぜなら、$p \in \mathsf{Col}(\kappa, A)$ と $a \in A$ に対し、$q := p \cup \{(\operatorname{dom}(p), a)\}$ とすれば $q \in D_a$ かつ $q \le p$ となるからである。よって、任意の $a \in A$ に対し、$G \cap D_a \ne \emptyset$ が成り立つ。特に、$f_G(\xi) = a$ となるような $\xi < \kappa$ が存在する。したがって、f_G は A への全射である。 □

よって、後は $\mathsf{Col}(\kappa, {}^{<\kappa}2)$ が $\mathsf{Add}(\kappa)$ に完備に埋め込めることが示せればよい：

補題 3.5. $\mathsf{Col}(\kappa, {}^{<\kappa}2)$ は $\mathsf{Add}(\kappa)$ に完備に埋め込まれる。

証明 $\langle -, - \rangle : \kappa \times \kappa \xrightarrow{\sim} \kappa$ を標準的な全単射として、写像 $e : \mathsf{Col}(\kappa, {}^{<\kappa}2) \to \mathsf{Add}(\kappa)$ を次で定める：

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(e(p)) &:= \{ \langle \xi, \eta \rangle \mid \xi \in \mathrm{dom}(p) \wedge \eta < \mathrm{dom}(p(\xi)) \}, \\ e(p)(\langle \xi, \eta \rangle) &:= p(\xi)(\eta). \end{aligned}$$

すると、e は明らかに順序単射である。

前章の補題 5.1 より、あとは任意の $r \in \mathsf{Add}(\kappa)$ に対して、その簡約 $r^* \in \mathsf{Col}(\kappa, {}^{<\kappa}2)$ で次を満たすものが存在することを示せばよい：

$$\forall p \in \mathsf{Add}(\kappa) \ \ [p \parallel r^* \implies e(p) \parallel r]. \tag{$\star$}$$

そこで $r \in \mathsf{Add}(\kappa)$ を固定し、$r^* \in \mathsf{Col}(\kappa, {}^{<\kappa}2)$ を次で定める：

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(r^*(\xi)) &:= \sup\{ \eta + 1 \mid \langle \xi, \eta \rangle \in \mathrm{dom}(r) \} < \kappa, \\ r^*(\xi)(\eta) &:= \begin{cases} r(\langle \xi, \eta \rangle) & (\langle \xi, \eta \rangle \in \mathrm{dom}(r)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

すると、$p \parallel r^*$ としたとき、$s := p \cup r^*$ とおけば、$e(s) \leq e(p), r$ となり、$e(p) \parallel r$ を得る。 □

演習 3.2. ここでは Levy 崩壊を完備に埋め込む事で $\mathsf{Add}(\kappa)$ が κ から ${}^{<\kappa}2$ への全射を付加することを見た。一方で、単純に $\mathsf{Add}(\kappa)$ の稠密集合を ${}^{<\kappa}2$ の各元に対して作ってやり、$\mathsf{Add}(\kappa)$- 生成的な G から細工して全射を創り出すこともできる。
この方法で CH の無矛盾性を証明してみよ。また、今回した議論との対応関係を考察してみよ。

4 ZFC + ¬CH の無矛盾性の証明

それでは、¬CH の無矛盾性に入っていこう。 第 2 節の結果（ 系 2.6 および 系 2.14 ）をまとめれば、 以下の結果が得られていた：

補題 4.1. κ を正則基数、$\lambda > 2^\kappa$ を基数とし、G を $(V, \mathsf{Add}(\kappa, \lambda))$- 生成的とする。このとき、$\mathsf{Add}(\kappa, \lambda)$ は κ 以下の基数と $(2^{<\kappa})^+$ 以上の基数を保ち、$(2^\kappa)^{V[G]} \geq \lambda$。

これにより「少なくとも λ 個の」実数を付加しており、この意味で $\mathsf{Add}(\kappa, \lambda)$ を使えば、どんな状況からでも適当な位置の κ で CH を自由に破ることができている。では、「厳密に $(2^\kappa)^{V[G]} = \lambda$」となるようにできるだろうか？ κ が正則で $\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$ ならできる、というのが次の定理である：

定理 4.2. κ を正則基数、$\lambda > 2^\kappa$ を基数とし、$\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$ とする。このとき、κ 以下 λ 以上の基数を保ちながら、$2^\kappa = \lambda$ が成り立つ強制拡大が存在する。

このために、そもそも $\mathsf{Add}(\kappa, \gamma)$ による拡大でどれくらい κ の部分集合が足され得るのか、その上界を見積っ

てみよう。こういう場合によく使われるのが、**部分集合の nice name** である。

定義 4.1. κ を順序数、$\mathbb{P}$ を擬順序とする。$\dot{x}$ が κ の元の check 名称と $\mathbb{P}$ の反鎖の直積の和でかけるとき、つまり次を満たすとき $\dot{x}$ は κ の部分集合の **nice $\mathbb{P}$-name** であるという：

$$\exists\left\langle \mathcal{A}_\xi : \mathbb{P}\text{ の反鎖} \,\middle|\, \xi < \kappa \right\rangle \left[\dot{x} = \bigcup_{\xi<\kappa} \{\check{\xi}\} \times \mathcal{A}_\xi\right]$$

反鎖というのは（部分的な）排他的な場合分けであったことを思えば、自然な概念に見える。実際、任意の κ の部分集合の名称は、「同値」な nice name を持つ：

補題 4.3. $p \Vdash \dot{x} \subseteq \check{\kappa}$ を満たす任意の $\mathbb{P}$- 名称 $\dot{x}$ に対し、κ の部分集合の nice $\mathbb{P}$-name $\dot{y}$ で $p \Vdash \dot{x} = \dot{y}$ を満たすものが存在する。

証明 以下、$p = \mathbb{1}$ として一般性を失わない。$\dot{x}$ を κ の部分集合の $\mathbb{P}$-name とする。このとき、$\alpha < \kappa$ に対し D_α を次で定める：

$$D_\alpha := \left\{ p \in \mathbb{P} \,\middle|\, p \Vdash \check{\alpha} \in \dot{x} \right\}.$$

そこで、$\mathcal{A}_\alpha \subseteq D_\alpha$ に含まれる反鎖の中で極大な反鎖とし、$\dot{y}$ を次で定める：

$$\dot{y} := \bigcup_{\alpha<\kappa} \{\check{\alpha}\} \times \mathcal{A}_\alpha.$$

このとき $\Vdash \dot{x} = \dot{y}$ が成り立つことを示す。特に、G を $(V, \mathbb{P})$- 生成的フィルターをとり、$\dot{x}_G = \dot{y}_G$ が成り立つことを示していこう。

$\dot{y}_G \subseteq \dot{x}_G$ は簡単である。なぜなら $\alpha \in \dot{y} \iff \exists p \in G \ (\check{\alpha}, p) \in \dot{y}$ であり、$\dot{y}$ の定義から $p \Vdash \check{\alpha} \in \dot{x}$ となるので、真理補題（系 5.8）より $\alpha \in \dot{x}_G$ を得る。

$\dot{x}_G \subseteq \dot{x}_G$ を示そう。$\alpha \in \dot{x}_G$ とすると、同様に $p \in G$ で $(\check{\alpha}, p) \in \dot{x}$ を満たすものが取れる。特に、$p \Vdash \check{\alpha} \in \dot{x}$ より p 以下で $\mathcal{A}_\alpha$ が前稠密になっているので、前章の補題 4.6 より $q \in \mathcal{A}_\alpha \cap G$ が取れる。すると作り方より $(\check{\alpha}, q) \in \dot{y}$ なので、結局 $\alpha \in \dot{y}_G$ を得る。 □

演習 4.1. ここでは κ について定義したが、一般の $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ に対して「τ の部分集合の nice name」の概念を定義できる。余力があればこれを定義して、対応する補題を示してみよ。

よって、あとは $\mathsf{Add}(\kappa, \gamma)$ が κ の部分集合の nice name を幾つ持つかを数え上げれば、$\mathsf{Add}(\kappa, \gamma)$- 強制拡大における κ の部分集合の総数の上限を見積もることができる。

補題 4.4. κ を正則基数、$\lambda > \kappa$ を基数とし、$\lambda^\kappa = \lambda$ かつ $2^{<\kappa} = \kappa$ が成り立つとする。このとき $\mathsf{Add}(\kappa, \lambda)$ の κ の部分集合の nice name の総数は高々 λ である。

証明 $2^{<\kappa} = \kappa$ より、$\mathsf{Add}(\kappa, \lambda)$ は $(2^{<\kappa})^+ = \kappa^+$- 鎖条件を持つことに注意する。$\mathsf{Add}(\kappa, \lambda)$ の濃度は、仮定より $\lambda \leq \lambda^{<\kappa} \geq \lambda^\kappa = \lambda$ となることから、

$$\left|\mathsf{Add}(\kappa,\lambda)\right| = \left|[\kappa\times\lambda\times 2]^{<\kappa}\right| = \lambda^{<\kappa} = \lambda$$

である。 また、$\mathsf{Add}(\kappa,\lambda)$ の κ^+- 鎖条件より、$\mathsf{Add}(\kappa,\lambda)$ の反鎖の濃度は高々 $2^{<\kappa}$ なので、 その総数は高々 $[\lambda]^{\kappa} = \lambda^{\kappa} = \lambda$ 個である。

よって、κ の部分集合の nice $\mathsf{Add}(\kappa,\lambda)$-name の総数は高々 $\lambda^{\kappa} = \lambda$ 個である。 □

以上を踏まえれば、次が得られる：

> **定理 4.5.** κ を正則、$\lambda > \kappa$ を基数とし、$2^{<\kappa} = \kappa$ かつ $\lambda^{\kappa} = \lambda$ が成り立つとする。 このとき、$\mathsf{Add}(\kappa,\lambda)$ は κ 以下と λ 以上の基数を保ちながら、$2^{\kappa} = \lambda$ を強制する。

定理 4.5 の「前提」が満たされるのはどういう時だろうか？ König の補題より、$\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} > \lambda$ なので、$\kappa < \mathrm{cf}(\lambda)$ でなければならないことがわかる。 特に、GCH が λ 以下まで成立していれば、$\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$ であれば上の定理の前提は自動的に満たされる。よって次を得る：

> **系 4.6.** GCH が λ 以下まで成立している （つまり $\forall\kappa \leq \lambda\ 2^{\kappa} = \kappa^+$） とする。$\kappa$ が正則基数で $\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$ を満たすなら、$\mathsf{Add}(\kappa,\lambda)$ は κ 以下と λ 以上の基数を保ちながら、$2^{\kappa} = \lambda$ を強制する。

特に、$\mathbf{L} \vDash$ GCH より、Gödel の $\mathbf{L}$ から始めれば、$\mathsf{Add}(\kappa,\lambda)$ により 2^{κ} の値をきっかり λ にできる。

最初から GCH が成り立つとは限らない場合も、 十分大きな基数 ϑ に対し、$\mathsf{Add}(\mu^+)$ を $\mu \leq \vartheta$ に対して下から順次超限的に繰り返して強制していけば、GCH を部分的に強制してやることができる。 このように、 強制法を複数回繰り返す技法を**反復強制法**という。 単純に 「超限回繰り返す」 といったが、 極限ステップでどのように擬順序を定めるかに任意性があり、GCH を強制する際には **Easton 台反復強制法**という種類の反復強制法を使う。 また、 適当な超限回で止めずに On 回繰り返すと、 大域的に GCH を強制することもできるが、これには**クラス強制法**の理論が必要となる。 クラス強制法は必ずしも ZFC を保つとは限らなかったり、 新たな順序数や基数を増やしてしまったり、強制法定理も部分的にしか成り立たなかったりする。

Easton 台のクラス強制法の著しい応用は、「正則基数の冪は ZFC の下では単調性と König の補題以外に如何なる制約も受けない」ことを示した次の定理である：

> **定理 4.7.** Vで GCH が成り立つと仮定し、$G : \mathrm{Reg} \to \mathrm{Cd}$ を次を満たす正則無限基数上で定義されたクラス関数とする：
>
> 1. $\forall\kappa\ G(\kappa) > \kappa$,
> 2. $\forall\kappa \leq \lambda\ G(\kappa) \leq G(\lambda)$, and
> 3. $\forall\kappa \in \mathrm{Reg}\ G(\kappa) > \mathrm{cf}(\kappa)$.
>
> このとき、Vの**クラス**強制拡大 $V[G]$ で、Vと同じ基数および順序数を持ち $V[G] \vDash \forall\kappa \in \mathrm{Reg}\ 2^{\kappa} = G(\kappa)$ を満たすものが存在する。

反復強制法はそれだけで一本ブ厚い教科書ができるくらいの話題なので、 ここではこれ以上立ち入ることは控えておく。Easton 強制法に関しては、Kunen [1] や Jech [2] などを参考にされたい。また可算鎖条件やそれを一般化した強制法の分類である**適正**（proper）強制法とその反復について扱った Shelah [3] もある。クラス強制法はこれまでは職人芸で進められてきたところがあるが、近年になってクラスを扱う NBG や MK 集合論の言

葉を使って、クラスに対する超限帰納法原理と関連づけて体系的な研究がはじまったところのようである（[4–5]）。

5 参考文献

[1] K. Kunen, "Set Theory," ser. Mathematical Logic and Foundations. College Publications, 2011, vol. 34, ISBN: 978-1-84890-050-9.

[2] T. Jech, "Set Theory: The Third Millennium Edition, Revised and Expanded," 3rd ed., ser. Springer monographs in mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2012, ISBN: 978-3-540-44761-0.

[3] S. Shelah, "Proper and Improper Forcing," ser. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1998, URL: https://projecteuclid.org/eBooks/perspectives-in-logic/Proper-and-Improper-Forcing/toc/pl/1235419814.

[4] V. Gitman et al., "The exact strength of the class forcing theorem," *Journal of Symbolic Logic*, pp. 869–869, vol. 85, 2020, URL: https://arxiv.org/abs/1707.03700.

[5] C. Antos and V. Gitman, "Modern class forcing," *Research Trends in Contemporary Logic (to appear)*, pp. –, 2021, URL: https://victoriagitman.github.io/publications/2019/11/13/modern-class-forcing.html.