強制法セミナー第 1 回：数理論理学の初歩

Hiromi ISHII (@mr_konn)

2024-06-23

目次

1 一階述語論理の構文と証明体系

一階述語論理は、予め固定された言語の下で、与えられた集合の元の間の関係を使って記述できるような性質を扱う論理体系である。現代数学は、一階述語論理の下で適切な強さの理論の集合論[1)]を採用すれば全て展開できることが知られている。

ZF 集合論は一階述語論理で記述される理論であり、集合論では一階述語論理に関する数理論理学の結果を縦横無尽に使う。本稿ではその必要最小限の事実を振り返っておく。まずは、一階述語論理の構文と意味論について簡単に見ていこう。一階述語論理では議論したい理論ごとに言語 $\mathcal{L}$ を固定して議論をする。一階述語論理における言語とは、何が項で何が論理式なのかを確定させるのに必要な記号の集まりである。

本節のより踏み込んだ内容については、証明論寄りの内容は古森・小野 [1] や戸次 [2] を参考にされたい。

定義 1.1 (一階述語論理の項と論理式). 一階述語論理の言語 $\mathcal{L}$ は次の構成要素から成る：

- 関数記号 $\boldsymbol{f}_0^{(n_0)}, \boldsymbol{f}_1^{(n_1)}, \boldsymbol{f}_2^{(n_2)}, \ldots$ $(n_i \in \mathbb{N})$
- 述語記号 $\boldsymbol{R}_0^{(m_0)}, \boldsymbol{R}_1^{(m_1)}, \boldsymbol{R}_2^{(m_2)}, \ldots$ $(m_i \in \mathbb{N})$

上添え字の $(n_i), (m_i)$ は記号の一部ではなく、各記号ごとに割り当てられている自然数であり、**項数**（**arity**）と呼ばれ、$\boldsymbol{f}^{(n)}$ は n- 項関数記号、$\boldsymbol{R}^{(m)}$ は m- 項述語記号と呼ばれる。特に、0- 項関数記号は**定数記号**と呼ばれ、メタ変数 $\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{d}_i, \ldots$ などで表す。一般に、記号の集合は有限とは限らず、任意の無限集合であったり、クラスであったりする場合がある。

一階の言語 $\mathcal{L}$ について、$\mathcal{L}$- **項**（$\mathcal{L}$-**term**）を以下のように帰納的に定義する：

1. 定数記号 $\boldsymbol{c}$ は $\mathcal{L}$- 項である。
2. 変数 v は $\mathcal{L}$- 項である。
3. 関数記号 $\boldsymbol{f}^n$ および $\mathcal{L}$- 項 $\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}$ に対し、$\boldsymbol{f}(\tau_0, \ldots, \tau_{n-1})$ は $\mathcal{L}$- 項である。
4. 以上で定まるもののみが $\mathcal{L}$- 項である。

最後の「以上で定まるもののみが～」というのは、計算機科学でいう最小不動点の条件と同じである。以後の帰納的定義では省略する。

一階言語 $\mathcal{L}$ について、$\mathcal{L}$- **原子論理式**（**atomic** $\mathcal{L}$-**formula**）を以下のように帰納的に定義する：

1. $\bot$ は $\mathcal{L}$- 原子論理式である。
2. τ, τ' が $\mathcal{L}$- 項のとき、$\tau = \tau'$ は $\mathcal{L}$- 原子論理式である。
3. $\boldsymbol{R}$ が m- 項述語記号、$\tau_0, \ldots, \tau_{m-1}$ が $\mathcal{L}$- 項のとき、$\boldsymbol{R}(\tau_0, \ldots, \tau_{m-1})$ は $\mathcal{L}$- 原子論理式である。

古典一階述語論理の $\mathcal{L}$- **論理式**（$\mathcal{L}$-formula）を以下のように機能的に定義する：

1. $\mathcal{L}$- 原子論理式は $\mathcal{L}$- 論理式である。
2. φ, ψ が $\mathcal{L}$- 論理式のとき、$\varphi \to \psi$ は $\mathcal{L}$- 論理式である。
3. x が変数記号で φ が $\mathcal{L}$- 論理式のとき、$\exists x \varphi$ は $\mathcal{L}$- 論理式である。

1) ここでの「集合論」は ZF に限らない広い意味でのものである。よく、圏論が「集合論に代わる数学の基礎として採用できる」と説明されることがあるが、これはつよつよ圏であるトポスの内部言語を使うことで集合論を代替できる、という話で、ZF とは違う集合論の「実装」を与えることができる、という話である。

自由変数[2]を持たない論理式を**閉論理式**（closed formula）または**文**（sentence）と呼ぶ。

言語 $\mathcal{L}$ について、$\mathcal{L}$- 論理式の全体のクラスを $\mathcal{L}$ と書くことがある。

$\to$ は右結合とする。つまり、$\varphi \to \psi \to \chi$ は $\varphi \to (\psi \to \chi)$ の略記として解釈される。

注意 1.1. ここでは、オブジェクトレベルの演算・関係と区別するために、関数・述語記号を太字で表している。本節と次節では暫くこの区別を用いるが、慣れてきたら単に両者を混合して普通の字体で書く。

注意 1.2. いま我々は古典論理だけを考えているので、他の論理結合子・量化子は次のような略記法として導入する：

$$\neg\varphi :\equiv \varphi \to \bot, \qquad \varphi \wedge \psi :\equiv \neg(\varphi \to \neg\psi), \qquad \varphi \vee \psi :\equiv (\varphi \to \psi) \to \psi,$$
$$\exists x\varphi :\equiv \neg\forall x\neg\varphi$$
$$\exists! x\varphi :\equiv \exists x \left[\varphi \wedge \forall y \left\{\varphi\left[\tfrac{x}{y}\right] \to y = x\right\}\right]$$

このようにするのは、今後論理式の複雑性に関する帰納法で色々な証明を回していく際に、場合分けの数は少ないほうが楽だからである。

一階の言語の例として、ここではこれからずっと付き合うことになる集合論の言語 $\mathcal{L}_\in$ や環の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$ などを挙げておく：

例 1.1（集合論の言語）. 集合論の言語 $\mathcal{L}_\in$ は、二項述語記号 $\boldsymbol{\in}^{(2)}$ のみを持つ言語である。

え？　他の記号は要らないの？　和集合とか内包表記とか ...... と思うかもしれないが、ZF 理論は十分強力であり、そうした記号を含む論理式があっても、それを含まない形で書き換えることができる。例えば、$x = A \cup B$ は $\forall z\ [z \boldsymbol{\in} x \leftrightarrow z \boldsymbol{\in} A \vee z \boldsymbol{\in} B]$ と書き換えることができる。

例 1.2（環の言語）. 単位的環の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$ は定数記号 $\mathbf{0}, \mathbf{1}$、二項関数号 $\boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot}$ を持つ言語である。

無限言語の例としては、体 K に対して K- 線型空間の言語がある：

例 1.3（K- 線型空間の言語）. K を体とするとき、K- 線型空間の言語は以下から成る：

- 定数記号 $\mathbf{0}$
- 二項関数記号 $\boldsymbol{+}$
- $c \in K$ ごとに、一項関数記号 $\boldsymbol{c\,\cdot}$

以上はあくまで何が式で何が項かという構文を定義しただけである。それらの証明可能性を与えるのが**証明体系**である。一階述語論理には互いに同値な複数の証明体系が知られている。型付き λ- 計算と対応する自然演繹 NK や、コンビネータ論理に近い Hilbert 流の体系 HK、簡潔でわかりやすく証明論などで用いられるシーケント計算 LK が代表的である。

2) 変数が自由とか束縛されているとかはみなさんが知っているやつです。

1.1 Gentzen 流シーケント計算 LK

今回は、証明が扱いやすいシーケント計算 LK を標準的な証明体系として扱うことにする。

定義 1.2.

1. LK の論理公理を以下で定める：

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\ (\textsc{Id}) \qquad \frac{}{\bot \vdash}\ (\textsc{Abs})$$

$$\frac{}{\vdash x = x}\ (\textsc{Refl}) \qquad \frac{}{x = y \vdash y = x}\ (\textsc{Sym}) \qquad \frac{}{x = y, y = z \vdash x = z}\ (\textsc{Trans})$$

$$\frac{}{x_0 = y_0, ..., x_{n-1} = y_{n-1}, \mathbf{R}(\bar{x}) \vdash \mathbf{R}(\bar{y})}\ (\textsc{Subs})$$

$$\frac{}{x_0 = y_0, ..., x_{n-1} = y_{n-1} \vdash \mathbf{f}(\bar{x}) = \mathbf{f}(\bar{y})}\ (\textsc{Cong})$$

(Refl) から (Cong) までの公理を**等号公理**と呼ぶ。以下、$\varGamma, \varDelta, \varXi, \varTheta$ を論理式の有限集合を渡るメタ変数とする。

2. $\varGamma \vdash \varDelta$ の形の式を**シーケント**または**推件式**（**sequent**）と呼ぶ。
3. 閉論理式の集合 T を**理論**または**公理系**と呼ぶ。
4. LK の**証明図**とは、推件式を頂点とする辺ラベルつき根つき木であって、全ての枝が次の**推論規則**のいずれかに従って形成されているものである。根を「**結論**」、葉を「**仮定**」と呼ぶ。

構造規則：

$$\frac{\varGamma \vdash \varDelta, \varphi \qquad \varphi, \varXi \vdash \varTheta}{\varGamma, \varXi \vdash \varDelta, \varTheta}\ (\textsc{Cut}) \qquad \frac{\varGamma \vdash \varDelta}{\varphi, \varGamma \vdash \varDelta}\ (\textsc{Weaken}\mathrm{L}) \qquad \frac{\varGamma \vdash \varDelta}{\varGamma \vdash \varDelta, \varphi}\ (\textsc{Weaken}\mathrm{R})$$

論理規則：t を $\mathcal{L}$- 項とする。

$$\frac{\varGamma \vdash \varDelta, \varphi \qquad \psi, \varXi \vdash \varTheta}{\varphi \to \psi, \varGamma, \varXi \vdash \varDelta, \varTheta}\ (\to\mathrm{L}) \qquad \frac{\varphi, \varGamma \vdash \varDelta, \psi}{\varGamma \vdash \varDelta, \varphi \to \psi}\ (\to R)$$

$$\frac{\varphi, \varGamma \vdash \varDelta}{\exists x \varphi, \varGamma \vdash \varDelta}\ (\exists\mathrm{L}) \qquad \frac{\varGamma \vdash \varDelta, \varphi\begin{bmatrix}x\\t\end{bmatrix}}{\varGamma \vdash \varDelta, \exists x \varphi}\ (\exists\mathrm{R})$$

但し (∃L) において x は $\varGamma, \varDelta$ に自由変数として現れないものとする。こうした変数の出現条件のことを、**固有変数条件**（**eigenvariable condition**）と呼ぶ）

5. 理論 T からの証明図は、結論の左辺が T の有限部分集合であるような証明図である。
6. 理論 T から論理式 φ が**証明可能**（**provable**、記号：$T \vdash_{\mathrm{LK}} \varphi$）とは、$T$ の有限集合 $\varGamma \Subset T$ 存在して、結論が $\varGamma \vdash \varphi$ であるような証明図が存在することである。T から証明可能な閉論理式の全体を、T の**定理**と呼ぶ。
7. φ が LK の**恒真式**（**tautology**、記号 $\vdash_{\mathrm{LK}} \varphi$）とは、$\varphi$ が $\emptyset$ で証明可能であることである。
8. 理論 T が**矛盾している**（**inconsistent**）とは、$T \vdash \emptyset$ が成り立つこと、すなわち T から $\emptyset$ への証明図が存在することである。矛盾していない理論を**無矛盾**（**consistent**）であるといい、理論 T が無矛盾であることを記号 $\mathrm{Con}(T)$ で表す。
9. 理論 T が**完全**であるとは、任意の閉論理式 φ について $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$ のいずれかが成り立つことである。

気持ちとしては、$\Gamma \vdash \Delta$ は「Γ が全部成り立つなら、Δ の少なくとも一つが成り立つ」$\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ の意味である。

注意 1.3. 推件式 $\Gamma \vdash \Delta$ は左右共に空集合が許されている。特に、$\Delta = \emptyset$ の場合は Γ から矛盾が導かれる事を表す。特に、T が矛盾することと、$T \vdash$ が証明できることは同値である。

注意 1.4. モデル理論では、理論といったら専ら完全な理論を指すことが多い（選択公理で拡大すればいいので）。以下では理論の完全性は仮定しない。

次の結果は重要である：

定理 1.1. LK は無矛盾である。つまり、理論 $\emptyset$ は無矛盾である。

推論規則 (Cut) 以外に論理式の数が減るような推論規則が存在しないことから、次の定理に帰着されることがわかる：

定理 1.2 (Cut 除去定理、Gentzen の基本定理). $\Gamma \vdash \varphi$ が LK で証明できるのなら、Cut を使わずに証明できる。

この証明論的な証明は結構たいへんな上に今回の目標である強制法とは絡まないので、証明は省略する。

演習 1.1. おるうぇくんに証明してもらおう！

LK で二重否定除去（**DNE**）$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ は次のように証明できる（ここで $\neg\varphi :\equiv \varphi \to \bot$ という略記を導入していたことに注意）：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,(\textsc{Id})}{\varphi \vdash \varphi, \bot}\,(\textsc{WeakenR})}{\vdash \varphi, \varphi \to \bot}\,(\to\mathrm{R}) \qquad \dfrac{}{\bot \vdash}\,(\textsc{Abs})}{(\varphi \to \bot) \to \bot \vdash \varphi}\,(\to\mathrm{L})$$

演習 1.2. 以下の各推論規則は LK から導かれることを示せ。但し、t は $\mathcal{L}$- 項とし、規則 $(\forall\mathrm{R})$ において x は Γ, Δ に自由変数として現れないものとする：

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\,(\neg\mathrm{L}) \qquad \dfrac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}\,(\neg\mathrm{R})$$

$$\dfrac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \vdash \Delta}\,(\wedge\mathrm{L}_1) \qquad \dfrac{\psi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \vdash \Delta}\,(\wedge\mathrm{L}_2) \qquad \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \vdash \Delta}\,(\wedge\mathrm{L}')$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}\,(\vee\mathrm{R}_1) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}\,(\vee\mathrm{R}_2) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}\,(\vee\mathrm{R}')$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \to \psi}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \psi}\,(\to\mathrm{R}^{-1}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}\,(\vee\mathrm{R}^{-1}) \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \psi, \Gamma \vdash \Delta}\,(\wedge\mathrm{L}^{-1})$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta \qquad \psi, \Xi \vdash \Theta}{\varphi \vee \psi, \Gamma, \Xi \vdash \Delta, \Theta}\ (\vee\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Xi \vdash \Theta, \psi}{\Gamma, \Xi \vdash \Delta, \Theta, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge\mathrm{R})$$

$$\frac{\varphi\left[\begin{smallmatrix}x\\t\end{smallmatrix}\right], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ (\forall\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\ (\forall\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\ (\forall\textsc{Elim})$$

注意 1.5. LK に上記の推論規則を加えた上で、シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ の右辺 Δ を高々一つの論理式までに制限したものを、直観主義論理のシーケント計算 LJ と呼ぶ。

演習 1.3. 以下の式は LK の定理であることを示せ。

$$\frac{}{\vdash \varphi \vee \neg\varphi}\ (\mathrm{LEM}) \qquad \frac{}{\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi}\ (\mathrm{P})$$

出来上がった証明図を眺めてみて、LJ では通らないことを確認せよ。

注意 1.6. P は Peirce の法則と呼ばれるものであり、出現する論理結合子が → だけであるにもかかわらず、直観主義論理と古典論理の差異を完全に特徴づける法則であることが知られている。つまり、LJ に P を付け加えると、それは LK と完全に一致する。

また、直観主義論理の体系は型付き λ- 計算の体系と対応がつくという **Curry–Howard 対応**が知られており、証明が項、型がその証明される命題に対応している。この関係の下で、P は、続きの計算に当る継続を捕獲する `call/cc` と呼ばれる演算子の型に対応していることが知られている。

演習 1.4 (強い等号公理). LK において、次が証明可能であることを示せ：

1. τ を項、$z_0, \ldots, z_{n-1}$ を変数とするとき、
$$\forall x_0 \ldots \forall x_{n-1} \forall y_0 \ldots \forall y_{n-1}\ \left[x_0 = y_0 \to \ldots \to x_{n-1} = y_{n-1} \to \tau\left[\begin{smallmatrix}\bar{z}\\\bar{x}\end{smallmatrix}\right] = \tau\left[\begin{smallmatrix}\bar{z}\\\bar{y}\end{smallmatrix}\right]\right].$$
2. φ を論理式、$z_0, \ldots, z_{n-1}$ を変数とするとき、
$$\forall x_0 \ldots \forall x_{n-1} \forall y_0 \ldots \forall y_{n-1}\ \left[x_0 = y_0 \to \ldots \to x_{n-1} = y_{n-1} \to \varphi\left[\begin{smallmatrix}\bar{z}\\\bar{x}\end{smallmatrix}\right] \to \varphi\left[\begin{smallmatrix}\bar{z}\\\bar{y}\end{smallmatrix}\right]\right].$$

演習 1.5 (酒場の法則). 古典一階述語論理のヘンなトートロジーとして有名なものに、一項述語記号 P をもつ言語で表現できる「酒場の法則」がある：

$$\exists z\ [P(z) \to \forall x P(x)]$$

$P(x)$ を「x が呑んだくれている」と読むと、これが「酒場の法則」と呼ばれている理由がわかる：「どんな酒場にも、そいつが呑んだくれているなら、他の客も全員呑んだくれているような客 z 氏がいる」。LK でこの法則を示せ。出来上がった証明図を眺めてみて、LJ では通らないことを確認せよ。

ヒント：呑んでない人間がいるならそいつを z 氏とし、全員呑んでいるなら適当に取ればよい。

補題 1.3. φ を閉論理式とする。理論 T が無矛盾なら、$T + \varphi$ か $T + \neg\varphi$ の少なくとも一方は無矛盾。

証明 $T + \varphi, T + \neg\varphi$ が共に矛盾するとして、T が矛盾することを示す。このとき、有限の $\Gamma, \Delta \Subset T$ が存在して、

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi, \Gamma \vdash\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \neg\varphi, \Delta \vdash\end{array}$$

となる。ここで、演習 1.2 を使えば、

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi, \Gamma \vdash\end{array}}{\Gamma \vdash \neg\varphi}(\neg\mathrm{R}) \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \neg\varphi, \Delta \vdash\end{array}}{\Gamma, \Delta \vdash}(\textsc{Cut})$$

となり、$\Gamma, \Delta \subseteq T$ が矛盾する。 ∎

補題 1.4. LK において、$T + \neg\varphi$ が矛盾するなら、φ は T の定理。

証明 有限部分 $\Gamma \Subset T$ を取り、$\Gamma + \neg\varphi$ が矛盾していたとして、$\Gamma \vdash \varphi$ を示す。しかるに：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg\varphi, \Gamma \vdash\end{array}}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}(\neg\mathrm{R}) \quad \dfrac{}{\neg\neg\varphi \vdash \varphi}(\mathrm{DNE})}{\Gamma \vdash \varphi}(\textsc{Cut})$$

よって示せた。 ∎

注意 1.7. 実は、この定理は LJ では成立しない。この事を使って、直観主義論理上で「ゼロではなくはない冪零無限小元」を使って解析学を展開する**滑らか無限小解析**（**smooth infinitesimal analysis**）およびその上に構築された**綜合的微分幾何学**（**synthetic diferrential geometry**）という分野がある。

系 1.5. LK において、T から φ が証明できないなら、$T + \neg\varphi$ は無矛盾である。

1.2 定義による拡張

$\mathcal{L}$- 理論 T が与えられたとき、T から存在が証明できる関数があったとしても、$\mathcal{L}$ にそれを指す関数記号があるとは限らない。しかし、我々は日常的に「関数」を定義して変数に束縛し、それを以後自由に使う、というようなことをする。これは、理論の**定義による拡張**と呼ばれる操作として正当化される：

定義 1.3 (定義による拡張). T を $\mathcal{L}$- 理論とする。

1. $\varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ を $\mathcal{L}$- 論理式とする。この時言語 $\mathcal{L}$ に含まれない新たな述語記号 $\boldsymbol{R}^{(n)}$ を追加した言語 $\mathcal{L}'$ を考える。このとき、$\mathcal{L}'$- 理論 T' を、次で定義する：

$$T' := T \cup \{\forall \bar{x}\ [R(\bar{x}) \longleftrightarrow \varphi(\bar{x})]\}$$

これを φ による T の**定義による拡張**（**definitional extension**）と呼ぶ。

2. $\varphi(x_0, ..., x_{n-1}, y)$ を $\mathcal{L}$- 論理式とし、

$$T \vdash \forall \bar{x}\ \exists! y\ \varphi(\bar{x}, y)$$

が成り立つとする。この時言語 $\mathcal{L}$ に含まれない新たな関数記号 $\boldsymbol{f}^{(n)}$ を追加した言語 $\mathcal{L}'$ を考える。このとき、$\mathcal{L}'$- 理論 T' を、次で定義する：

$$T' := T \cup \{\forall \bar{x}\ \forall y\ [f(\bar{x}) = y \longleftrightarrow \varphi(\bar{x}, y)]\}$$

これも φ による T の**定義による拡張**（**definitional extension**）と呼ぶ。

直感的には、この拡張によって証明能力や表現力は変わらないことが期待される。こういった関係を**保存拡大**という：

定義 1.4. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ を言語、T, T' をそれぞれ言語 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ による理論とする。T' が T の**保存拡大**（**conservative extension**）であるとは、任意の $\mathcal{L}$- 論理式 φ について、次が成り立つことである：

$$T \vdash \varphi \iff T' \vdash \varphi.$$

補題 1.6.

1. 述語記号に関する定義による拡張は保存拡大である。より詳しく、任意の $\mathcal{L}'$- 論理式 φ に対して $\mathcal{L}$- 論理式 φ^* が存在して、

$$T' \vdash \varphi \longleftrightarrow \varphi^*, \qquad T' \vdash \varphi \iff T \vdash \varphi^*.$$

2. 関数記号に関する定義による拡張は保存拡大である。より詳しく、任意の $\mathcal{L}'$- 論理式 φ に対して $\mathcal{L}$- 論理式 φ^* が存在して、

$$T' \vdash \varphi \longleftrightarrow \varphi^*, \qquad T' \vdash \varphi \iff T \vdash \varphi^*.$$

演習 1.6. 証明せよ。関数版の場合は、入れ子になった項に注意。

2 一階述語論理の Tarski 意味論

前節で、言語 $\mathcal{L}$ の下での一階述語論理の構文と証明体系を導入した。これを具体的な数学の宇宙の対象と結び付け、解釈を考えるのが **Tarski 意味論**あるいは単純に $\mathcal{L}$- 構造や「モデル」と呼ばれるものである。他にも色々なモデルの与え方はある（例えば強制法の Boole 値モデルであるとか、圏論的論理学における函手など）し、意味論といっても結合子の間の調和を考える証明論的意味論など色々なものがあるが、以下ではモデルといったら Tarski モデルを考える。

言語 $\mathcal{L}$ の項・論理式を解釈できる集合を $\mathcal{L}$- 構造と呼ぶ：

定義 2.1 **($\mathcal{L}$- 構造).**　言語 $\mathcal{L} = \left\langle \boldsymbol{R}_i^{(n_i)}, \boldsymbol{f}_j^{(m_j)} \right\rangle_{i \in I, j \in J}$ について、$\mathcal{L}$- **構造**（**$\mathcal{L}$-structure**）とは、$\mathcal{M} = \left\langle M, R_i^{\mathcal{M}}, f_j^{\mathcal{M}} \right\rangle$ であって、次を満たすもの：

1. $\mathcal{M} \neq \emptyset$
2. $R_i^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_i}$ は M 上の n_i- 項関係
3. $f_j^{\mathcal{M}} : M^{m_j} \to M$ は M 上の m_j- 引数関数

台集合上の語彙の解釈がそれぞれ自然な方法で与えられているという訳で、代数系の定義を（公理を除いて）一般化したようなものになっている。

単純な $\mathcal{L}$- 言語だけでは、定数だけを含む論理式しか考えられないが、$\mathcal{L}$- 構造 $\mathcal{M}$ が与えられたら、$\mathcal{M}$ に含まれるような元についてもパラメータとして記述したくなる。そこで、$\mathcal{L}$- 言語を拡大した言語 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ を定義しよう：

定義 2.2.　$\mathcal{L}$ を言語、$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$- 構造とするとき、全ての $a \in \mathcal{M}$ について、$\mathcal{L}$ に含まれない新たな定数記号 $\boldsymbol{c}_a$ を付け加えた言語を、$\mathcal{L}$ の $\mathcal{M}$ による**拡大**（**expansion**）$\mathcal{L}(\mathcal{M})$ と表す。

注意 2.1.　任意の $\mathcal{L}$- 論理式は $\mathcal{L}(\mathcal{M})$- 論理式でもある。

構造が定まると、自然な形で項・論理式の解釈も定まる：

定義 2.3.　以下、$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$- 構造とする。

- $\mathcal{L}(\mathcal{M})$- 項 τ について、以下のように τ の $\mathcal{M}$ における**解釈**（**interpretation**）を、項の構造に関する帰納法で以下のように定める：
  (a) 定数記号 $\boldsymbol{c}_a$ （$a \in \mathcal{M}$）に対し、$\boldsymbol{c}_a^{\mathcal{M}} := a$
  (b) 関数記号 $\boldsymbol{f}^{(m)}$ と項 $t_0, \ldots, t_{m-1}$ に対し：
$$\left(\boldsymbol{f}\left(t_0, \ldots, t_{m-1}\right)\right)^{\mathcal{M}} := f^{\mathcal{M}}(t_0^{\mathcal{M}}, \ldots, t_{m-1}^{\mathcal{M}})$$
- $\mathcal{L}(\mathcal{M})$- 閉論理式 φ について、$\mathcal{M} \vDash \varphi$ を以下のように帰納的に定める：
  (a) $\mathcal{M} \nvDash \bot$
  (b) 項 t_0, t_1 について、$\mathcal{M} \vDash t_0 = t_1 \overset{\text{def}}{\iff} t_0^{\mathcal{M}} = t_1^{\mathcal{M}}$
  (c) 述語記号 $\boldsymbol{R}^{(n)}$ と項 $t_0, \ldots, t_{n-1}$ に対し、$\mathcal{M} \vDash \boldsymbol{R}(t_0, \ldots, t_{n-1}) \overset{\text{def}}{\iff} (t_0^{\mathcal{M}}, \ldots, t_{n-1}^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}}$
  (d) φ, ψ を $\mathcal{L}$- 論理式とするとき、$\mathcal{M} \vDash \varphi \to \psi \overset{\text{def}}{\iff} \mathcal{M} \nvDash \varphi \lor \mathcal{M} \vDash \psi$
  (e) φ を $\mathcal{L}$- 論理式とするとき、$\mathcal{M} \vDash \exists x \varphi \overset{\text{def}}{\iff}$ ある $a \in \mathcal{M}$ があって $\mathcal{M} \vDash \varphi\left[\begin{smallmatrix} x \\ \boldsymbol{c}_a \end{smallmatrix}\right]$

T を $\mathcal{L}$- 理論としたとき、いよいよ T- モデルの定義ができる：

定義 2.4.　T を $\mathcal{L}$- 理論、$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$- 構造、φ を $\mathcal{L}$- 論理式とする。

- $\mathcal{M}$ が T の**モデル**（**model**）である（記号：$\mathcal{M} \vDash T$）$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $\varphi \in T$ について $\mathcal{M} \vDash \varphi$。

- φ が T で**妥当**（valid）である $T \vDash \varphi \overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $\mathcal{L}$- 構造 $\mathcal{M}$ について $\mathcal{M} \vDash T \Longrightarrow \mathcal{M} \vDash \varphi$。

3 モデルの性質：モデルの濃度とモデル間の真理の比較、完全性定理

3.1 初等性と絶対性、Tarski–Vaught の判定条件

前節では $\mathcal{L}$- 構造を定義したが、今回はその複数のモデル同士を比べたり、あるいは新しいモデルを構成する方法について取り扱う。

まず、部分環や部分空間などのように、大きなモデルの部分に相当する部分構造（部分モデル）を定義する：

定義 3.1. $\mathcal{L}$- 構造 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ について、$\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の**部分構造**（substructure）または M が N の**拡大**（extension）$\overset{\text{def}}{\iff}$

1. $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$、
2. 任意の述語記号 $\boldsymbol{R}^{(n)}$ について $R^{\mathcal{N}} = R^{\mathcal{M}} \cap N^n$、
3. 任意の関数記号 $\boldsymbol{f}^{(m)}$ について $f^{\mathcal{N}} = f^{\mathcal{M}} \restriction N^m$。

注意 3.1. 背景となる理論がある程度固定されている場合、「部分モデル」（submodel）とも呼ぶ。

つまり、述語は制限したものになっており、関数の解釈について閉じているような関係である。さらに、論理式の解釈についても閉じているような部分・拡大構造を初等部分モデル・初等拡大とよぶ：

定義 3.2 (絶対性、初等部分構造). $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$- 構造とし、$\mathcal{N}$ は $\mathcal{M}$ の部分構造であるとする。

- $\mathcal{L}(N)$- 論理式 φ が $\mathcal{N}$ と $\mathcal{M}$ の間で**絶対的**（absolute、記号：$\mathcal{N} \prec_{\varphi} \mathcal{M}$）$\overset{\text{def}}{\iff} \mathcal{N} \vDash \varphi$ iff $\mathcal{M} \vDash \varphi$。
- $\mathcal{L}(N)$- 論理式のクラス Γ について、Γ が N と M の間で**絶対的**（$N \prec_{\Gamma} M$）$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $\varphi \in \Gamma$ について $\mathcal{N} \prec_{\varphi} \mathcal{M}$。
- $\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の**初等部分構造**（elementary substructure）または $\mathcal{M}$ が $\mathcal{N}$ の**初等拡大**（elementary extension）である（記号：$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$）とは、$\mathcal{N} \prec_{\mathcal{L}(\mathcal{N})} \mathcal{M}$ のこと。

注意 3.2. 一般に、「初等 ××」という概念の「初等」は、「一階述語論理の」というような意味である。

以上は部分モデル上の初等性だが、良く似た概念に部分モデル関係が成り立つとは限らない構造間の初等同値性がある：

定義 3.3. $\mathcal{L}$- 構造 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ が $\mathcal{L}$- **初等同値**（elementarily equivalent、記号：$\mathcal{M} \equiv_{\mathcal{L}} \mathcal{N}$）$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $\mathcal{L}$- 閉論理式 φ について $\mathcal{M} \vDash \varphi$ iff $\mathcal{N} \vDash \varphi$。

つまり、初等拡大性 $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ は、$\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の部分構造であり、$\mathcal{N} \equiv_{\mathcal{L}(\mathcal{N})} \mathcal{M}$ であるということだ。

演習 3.1. 部分構造だが、初等部分構造ではないような例を挙げよ。

演習 3.2. 言語によって（初等）部分構造であったりなかったりする構造の組の例をそれぞれ挙げよ。

次の **Tarski–Vaught 判定条件**は初等性を判定する上で最頻出の道具であり、初等拡大であるかどうかというのは、解が小さいところから取れるかどうか？ という問題と同値であることを述べている：

補題 3.1 (Tarski–Vaught 判定条件). $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$- 部分構造とするとき、次は同値：

1. $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$
2. $\varphi(x)$ を x のみを変数に持つ $\mathcal{L}(\mathcal{N})$- 論理式とするとき、

$$\mathcal{M} \vDash [\exists x \varphi(x)] \Longrightarrow \exists a \in \mathcal{N} \;\; \mathcal{M} \vDash \varphi(a)$$

注意 3.3. 「解」$a \in \mathcal{N}$ そのものは小さい $\mathcal{N}$ の方から取っているが、その真偽の判定は大きな $\mathcal{M}$ の方で成り立っているかどうかだけ考えればよい、という点に注意しよう。

演習 3.3. 上を証明せよ。（**ヒント：論理式の複雑性に関する帰納法。**）

Tarski–Vaught 判定条件の系である、次の**初等鎖定理**もよく使う：

補題 3.2 (初等鎖定理). $\langle M_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ を $\mathcal{L}$- 構造の列とし、更に任意の $\alpha < \beta$ について $M_\alpha \prec M_\beta$ が成り立つする。このとき、$M := \bigcup_\alpha M_\alpha$ とおけば、$M_\alpha \prec M$ が任意の $\alpha < \gamma$ について成り立つ。

演習 3.4. 示せ。部分構造になることがちゃんと言えれば、あとは簡単。

初等部分構造や初等拡大を取ったりして色々するのは、モデル理論や集合論の基本的な操作である。以下では、そうした構成の道具を見ていく。

3.2 超積と超冪によるモデルの構成と Łoś の定理

超積は添え字づけられたモデルの族が与えられた際に、そこから新たなモデルを構成する方法であり、更に最終的に得られるモデルは「殆んど至るところ」で成り立つ真理を反映したものになっている。更に、**超冪**は超積の特別な場合であり、添え字に依らず同じ構造を使って超積をとったものだが、これは強制法や巨大基数の理論の非常に重要な道具である。

超積は、冪集合の成す Boole 代数上の超フィルターを使って定義される。（超）フィルターの定義は前回やった通りだが、考えている擬順序が冪集合代数のように Boole 代数であるとき、定義がより簡単になる：

補題 3.3. $\mathbb{B}$ を Boole 代数、$\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}$ とするとき、次は同値：

1. $\mathcal{F}$ は $\mathbb{B}$ のフィルター。
2. 以下が成り立つ：
   (a) $\mathbb{0} \notin \mathcal{F}, \mathbb{1} \in \mathcal{F}$

(b) $\mathcal{F} \ni b \leq c \Longrightarrow c \in \mathcal{F}$

(c) $b, c \in \mathcal{F} \Longrightarrow b \cdot c \in \mathcal{F}$

補題 3.4. $\mathbb{B}$ を Boole 代数、$\mathcal{U}$ を $\mathbb{B}$ のフィルターとするとき、次は同値：

1. $\mathcal{U}$ は $\mathbb{B}$ の超フィルター。
2. 任意の $b \in \mathbb{B}$ について、$b \in \mathcal{U}$ または $-b \in \mathcal{U}$ のいずれか一方のみが成り立つ。

定義 3.4. 集合 I 上の（超）フィルター（(ultra-)filter on I） とは、冪集合 Boole 代数 $(\mathcal{P}(I), \emptyset, I, (-)^c, \cup, \cap \subseteq)$ の（超）フィルターのことである。

注意 3.4. 前回のチュートリアルでは、フィルターは貼り合わせ可能な条件の集合であり、超フィルターは極限まで条件を突き詰めたものだという見方をした。一方で、フィルターは「殆んど至るところで成り立つ」ような何らかの性質を表現するのにも使うことができる。

例 3.1.

1. 測度空間上の零集合の集まり null を考える。このとき、$\mathrm{null}^* := \{ A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathrm{null} \}$ はボレル集合族 $\mathcal{B}$ のフィルターである。
2. 完備距離空間 (X, d) を考える。この時、X の稠密開集合全体は開集合代数上のフィルターを成す。別の見方をすれば、X 上でフィルター基になっている。
3. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の近傍系 $\mathcal{U}_x = \{ A \subseteq X \mid x \in X^\circ \}$ は X 上のフィルターを成す。基本近傍系はフィルター基になっている。
4. $\mathcal{F}_{\mathrm{cofin}} := \left\{ S \subseteq X \,\middle|\, |X \setminus S| < \aleph_0 \right\}$ は集合 X 上のフィルターとなる。**補有限フィルター（cofinite filter）**や**Fréchet(フレシェ)フィルター**と呼ぶ。

定義 3.5. I を任意の集合とし、$\langle \mathcal{M}_i \mid i \in I \rangle$ を $\mathcal{L}$- 構造の族、$\mathcal{U}$ を I 上の超フィルターとする。

- $u, v \in \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$ に対して、$u \sim_{\mathcal{U}} v$ を次で定める：

$$u \sim_{\mathcal{U}} v \overset{\text{def}}{\iff} \{ i \in I \mid u(i) = v(i) \} \in \mathcal{U}$$

  このとき、$[u]_{\mathcal{U}}$ を $\sim_{\mathcal{U}}$ に関する $u \in \prod_i \mathcal{M}_i$ の同値類とする。

- $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i \in I}$ の $\mathcal{U}$ による**超積（ultraproduct）**$\mathcal{N} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i \big/ \mathcal{U}$ とは、次で定義される $\mathcal{L}$- 構造である。

  (a) **台集合：**

$$\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i \Big/ \mathcal{U} := \left\{ [u]_{\mathcal{U}} \,\middle|\, u \in \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i \right\}$$

  (b) **述語記号の解釈：** 各 $\boldsymbol{R}^{(n)}$ について、

$$([u_0],\dots,[u_{n-1}]) \in R^{\mathcal{N}} \overset{\text{def}}{\iff} \left\{ i \in I \,\middle|\, (u_0(i),\dots,u_{n-1}(i)) \in R^{\mathcal{M}_i} \right\} \in \mathcal{U}$$

(c) **関数記号の解釈**：各 $\boldsymbol{f}^{(m)}$ について、

$$f^{\mathcal{N}}([u_0],\dots,[u_{m-1}]) := \left[\left\langle f^{\mathcal{M}_i}(u_0(i),\dots,u_{m-1}(i)) \,\middle|\, i \in I \right\rangle\right]_{\mathcal{U}}$$

- $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}$ のとき、$\prod_{i\in I} \mathcal{M} \big/ \mathcal{U}$ を $\mathcal{M}$ の $\mathcal{U}$ による**超冪**（**ultrapower**）と呼び、記号 ${}^{I}\mathcal{M} \big/ \mathcal{U}$ で表す。

演習 3.5. 超積 $\prod_i \mathcal{M}_i \big/ \mathcal{U}$ の定義が well-defined であり、実際に $\mathcal{L}$- 構造となることを示せ。

超積が「殆んど至るところ成立する」ものを集めてきたものだ、といったが、そのことを表現しているのが、次の Łoś（ウロッシュ）[3]の定理である：

定理 3.5 (Łoś の定理). $\mathcal{L}\left(\prod_i \mathcal{M}_i \big/ \mathcal{U}\right)$- 論理式 φ について、次が成立：

$$\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i \big/ \mathcal{U} \vDash \varphi \iff \{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \vDash \varphi \} \in \mathcal{U}$$

証明 超積についてはほとんどの参加者が知らないようなので、ここでは軽く証明の概略を示しておく。

$$\mathcal{M} := \prod_i \mathcal{M}_i \big/ \mathcal{U}$$

とおいて、$\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 論理式 φ の複雑性に関する帰納法を使って示す。

φ が述語記号のときは定義から明らか。

$\varphi \equiv \exists x \psi(x)$ のときを考える。帰納法の仮定は、任意の $[u] \in \mathcal{M}$ について

$$\mathcal{M} \vDash \psi([u]) \iff \left\{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \vDash \psi(u(i)) \right\} \in \mathcal{U}$$

である。しかるに：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \vDash \exists x \psi(x) &\iff \exists [u] \in \mathcal{M} \ \ \mathcal{M} \vDash \varphi([u]) && (\vDash \text{の定義}) \\
&\iff \exists [u] \in \mathcal{M} \ \left\{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \vDash \psi(u(i)) \right\} \in \mathcal{U} && (\text{帰納法の仮定}) \\
&\iff \left\{ i \in I \mid \exists u_i \in \mathcal{M}_i \ \ \mathcal{M}_i \vDash \psi(u_i) \right\} \in \mathcal{U} && (*) \\
&\iff \left\{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \vDash \exists x \psi(x) \right\} \in \mathcal{U} && (\text{各 } M_i \neq \emptyset\text{、}\mathcal{M}_i \vDash \exists \text{ の定義より})
\end{aligned}$$

$(*)$ の部分に詳しい説明が必要だろう。

$(\Longleftarrow)$ の向きは簡単である。$J := \left\{ i \in I \mid \exists u_i \ \ \mathcal{M}_i \vDash \psi(u_i) \right\}$ とおいて、$u \in \prod_i \mathcal{M}_i$ を次で定めよう：

$$u(i) := \begin{cases} u_i & (i \in J\text{のとき、 その証拠となる}u_i) \\ \text{適当な}\mathcal{M}_i\text{の元} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

われわれは選択公理を認めているので、このような u は常に取れる。このとき、$[u]_{\mathcal{U}}$ を考えれば、

3) Łoś はポーランド人の数学者である。Ł は W と L の中間音（そんなのある？）、ś は「シュ」みたいに発音するらしい。

$$\{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \psi(u(i)) \} \supseteq S \in \mathcal{U}$$

であり、$\mathcal{U}$ が上に閉じていることから $\{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \psi(u(i)) \} \in \mathcal{U}$ である。

($\Longrightarrow$) の向き：ここで超フィルターであることを使う。対偶を示そう。そこで、

$$\{ i \in I \mid \exists u_i \in \mathcal{M}_i \ \ \mathcal{M}_i \models \psi(u(i)) \} \notin \mathcal{U} \tag{1}$$

であったとする。示したいのは次である：

$$\forall [u] \in \mathcal{M} \ \ \{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \psi(u(i)) \} \notin \mathcal{U}$$

更に、$\mathcal{U}$ の極大性から、これは次を示すことと同値である：

$$\forall [u] \in \mathcal{M} \ \ \{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \not\models \psi(u(i)) \} \in \mathcal{U} \tag{2}$$

そこで(1)を仮定すると、超フィルターの極大性から、この補集合は $\mathcal{U}$ に属する：

$$S := \{ i \in I \mid \forall u_i \in \mathcal{M}_i \ \ \mathcal{M}_i \not\models \psi(u_i) \} \in \mathcal{U}$$

特に、どのように $u \in \prod_i \mathcal{M}_i$ をとっても、任意の $i \in S$ について $\mathcal{M}_i \not\models \psi(u(i))$ である。よって、

$$\{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \not\models \psi(u(i)) \} \supseteq S \in \mathcal{U}$$

である。$u \in \prod_i \mathcal{M}_i$ の取り方は任意であったので、(2)が示された。 □

演習 3.6. $\to, \bot$ などの場合を補い、上の証明を完成させよ。

系 3.6. $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}(\mathcal{M})$- 構造と思って超冪を取ると、

$$\mathcal{M} \prec {}^I\mathcal{M} \big/ \mathcal{U} .$$

証明 φ を $\mathcal{L}(\mathcal{M})$- 論理式とすると、任意の i につき $M_i = M$ なので、

$$\{ i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi \} = \begin{cases} I & (\mathcal{M} \models \varphi) \\ \emptyset & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

よって $\mathcal{M} \models \varphi \iff \{ i \in I \mid \mathcal{M} \models \varphi \} = X \in \mathcal{U} \overset{mt-sub}{\underset{}{mt}} {}^I\mathcal{M} \big/ \mathcal{U} \models \varphi$ を得る。 □

Łoś の定理を使うには、超フィルターを取る必要がある。我々は AC を仮定しているので、どんな集合上にも必ず超フィルターが取れる：

補題 3.7 (Boolean Prime Ideal Theorem, BPI**).** $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}$ を Boole 代数のフィルターとするとき、それを拡張する超フィルターが少なくとも一つ存在する。

演習 3.7. これを証明せよ（**ヒント：フィルターを一歩一歩拡張していけばいいだけ**）

注意 3.5. 実は、BPI + Łoś は選択公理と同値である。

フィルターのうち上閉性を外したものをフィルター基というのであった。フィルター基が与えられたとき、その元以上のものを全て集めてくればフィルターになるので、次の系が得られる：

系 3.8. $A \subseteq \mathbb{B}$ を Boole 代数のフィルター基とするとき、それを拡張する超フィルターが少なくとも一つ存在する。

3.3 超積の応用 1：コンパクト性定理

超積なんて何に使うのか？　と思うかもしれない。しかし、これは非常に強力な道具であり、例えばモデル理論の最も基本的な定理である、コンパクト性定理や完全性定理の証明に使うことができる。

定理 3.9 (コンパクト性定理[4]). 理論 T がモデルを持つことと、T の任意の有限部分集合がモデルを持つことは同値である。

Proof of Compactness Theorem T がモデルを持つなら、当然それは T の有限部分のモデルになっている。逆を示そう。

そこで、T の任意の有限部分集合 $s \Subset T$ がモデルを持つとし、それぞれに対して $M_s \vDash s$ となるモデルを固定する。添え字集合は T の有限部分集合なので、$I := [T]^{<\aleph_0} := \left\{ x \subset T \,\middle|\, |T| < \aleph_0 \right\}$ とおいて、I 上の超フィルターでいいものを取りたい。

注意 3.6. I じたいも有限集合の族だが、取るのは I 上の超フィルター $\mathcal{U}$、いいかえれば $\mathcal{P}(I)$ の部分集合である。つまり、**$\mathcal{U}$ の各元 $S \in \mathcal{U}$ は T の有限集合ではなく**、T の有限部分集合を元にもつ無限集合である。ここを混同すると、どこの話をしているのかわからなくなる。

各 s について、集合 $V_s \subseteq I$ を以下で定める：

$$V_s := \left\{ X \in I \,\middle|\, s \subseteq X \right\}$$

このとき、$\mathcal{B} := \left\{ V_s \,\middle|\, s \in I \right\}$ はフィルター基となる。なぜなら、$V_s \neq \emptyset$ であり、また $V_s \cap V_t = V_{s \cup t} \in \mathcal{B}$ となるからである。そこで、BPI により $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ なる I 上の超フィルターを取り、$M := \prod_{i \in I} M_i \big/ \mathcal{U}$ と定めよう。

Claim. $M \vDash T$ である。

そこで、任意に $\varphi \in T$ を取り、$M \vDash \varphi$ を示す。Łoś の定理から、次を示せばよい：

$$S := \left\{ s \in I \,\middle|\, M_s \vDash \varphi \right\} \in \mathcal{U}.$$

まず、構成法より $V_{\{\varphi\}} \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ である。ここで、任意に $s \in V_{\{\varphi\}} \subseteq [T]^{<\aleph_0}$ を取る。s は T の有限部分集合であり、更に φ を元にもつ。よって $M_s \vDash \varphi$ がなりたつ。以上から、

$$S = \left\{ s \in I \,\middle|\, M_s \vDash \varphi \right\} \supseteq V_{\{\varphi\}} \in \mathcal{U}$$

いま $\mathcal{U}$ はフィルターで上に閉じているから、結局 $S \in \mathcal{U}$ となる。 □

4) 名前の通り、この定理はモデルの空間にしかるべき位相を入れたときに、その空間がコンパクトであることと同値である。

3.4 完全性定理：証明体系と意味論を繋ぐもの

さて、前節では、$\mathcal{L}$- 構造や理論 T のモデルについて定義をし、「全ての T のモデルで成り立つ」という意味論的な妥当性を定義した：

$$T \vDash \varphi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \mathcal{M} \vDash T\ \mathcal{M} \vDash \varphi$$

一方で、我々は証明体系 HK における証明可能性、

$$T \vdash \varphi$$

も既に扱っていた。この二つの概念が一致することを示すのが**完全性定理（Completeness Theorem）**である：

定理 3.10 (一階述語論理の完全性定理、Gödel (1929) の学位論文). $T \vDash \varphi \Longrightarrow T \vdash \varphi$

この逆向き、つまり「証明可能なら、妥当である」の方向については**健全性定理（Soundness Theorem）**と呼ばれることも多い。「成り立たないような命題が証明されてしまうようなヘンな証明体系ではない」 という意味で「健全」ということである。

演習 3.8. 健全性定理 $T \vdash \varphi \Longrightarrow T \vDash \varphi$ を証明せよ。

ヒント：証明図の深さに関する帰納法。固有変数条件が効いてくる。

健全性は地道にやればできるが、完全性 $T \vDash \varphi \Longrightarrow T \vdash \varphi$ は非自明である。完全性が「完全性」と呼ばれるのは、「全部のモデルで成り立つような命題を完全に取り尽せている」という気持ちが背景にある。これは一般に対偶を示すのが常套手段である。つまり、φ が T から証明できないとして、$M \vDash \neg\varphi$ なる T- モデル M を構成するのだ。 この証明には、 一般的には **Henkin 構成**と呼ばれる手法が使われるが、 実は可算言語に関する完全性さえ示せれば、後は上記のコンパクト性定理を使って証明できてしまう。

アンケートの結果を見るに、Henkin 構成による完全性定理の証明については、 参加者は雰囲気くらいは知っていると思ってよさそうなので、一旦可算言語の完全性定理を認めて、一般の濃度の言語に関する完全性定理を示すことにしよう。可算言語の完全性定理については、無限組合せ論パートでおるうぇくんが面白い証明をやってくれる予定である。

一般濃度の言語に関する完全性定理の証明　宣言通り、可算言語に対する完全性定理を認める。$\mathcal{L}$ を任意の濃度の言語とし、T を $\mathcal{L}$- 理論として、$T + \neg\varphi$ が無矛盾であるとして、$M \vDash T + \neg\varphi$ を満たす $\mathcal{L}$- 構造 M の存在を証明したい。

それには、 コンパクト性定理より、$T + \neg\varphi$ の有限部分集合がモデルを持つことが示せればよい。 そこで、任意に有限集合 $S \Subset T$ を固定して、$S + \neg\varphi$ のモデルが取れることを示せればよい。 だが、$S + \neg\varphi$ は有限集合であるため、 この理論に現れる関数・有限記号は有限個である。 そこで、$\mathcal{L}$ の語彙をこの有限個に制限した小さな言語 $\mathcal{L}'$ を考えれば $S + \neg\varphi$ は $\mathcal{L}'$- 理論と見做せる。仮定より $S + \neg\varphi$ は無矛盾なので、可算言語に対する完全性定理によりモデルは常に存在する。

このモデル自体は $\mathcal{L}'$- 構造であり $\mathcal{L}$- 構造ではない。 しかし、 論理式に現れない述語記号・関数記号の解釈は $\mathcal{L}'$ 部分に影響しないので、$\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ の部分については述語記号は空（恒偽)、 関数記号は適当な定数関数として定めれば $\mathcal{L}$- 構造に拡張できる。 □

我々の主目的は種々の命題の独立性の証明であった。この文脈では、専ら完全性定理は以下の系の形で使う：

系 3.11 (完全性定理). 理論 T について次は同値：

1. T は無矛盾
2. T はモデルを持つ

つまり、ある体系の無矛盾性を示したければそのモデルを構成すればよいし、モデルが構成できないのならその体系は矛盾していると思ってよい、ということである。強制法はモデルの構成法であり、無矛盾性証明の道具としての有用性はこの系に立脚している。

3.5 超積の応用 2：超準解析

超積・超冪はモデル理論・集合論を中心に重要な役割を果す道具であるが、他分野への応用もある。ここでは、その例として A. Robinson[5]によって創始された**超準解析**（**nonstandard analysis**）を紹介する。

超準解析の特徴は、**外から見ると無限大・無限小に見える実数・整数を使って解析学を展開する**という点であり、しかも**得られる結果は ε-δ 論法による通常の解析学と完全に一致する**という点である。

記法． 本節では以下の記号を用いる：

1. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を Fréchet フィルター（補有限フィルター）を拡張する $\mathbb{N}$ 上の超フィルターとする。
2. 暫く言語 $\mathcal{L} := \langle 0, 1, \pi, e, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \leq, +, \cdot, \sin, \cos, \tan \rangle$ を考え、実数体 $\mathbb{R}$ は自然な $\mathcal{L}$- 構造が入っているものと見做す。ただし、$\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ はそれぞれ「自然数である」「有理数である」ことを表す単項述語記号である。

以上の仮定の下で、**超実数体** $\mathbb{R}^*$ を以下のように定義する：

1. $\mathbb{R}^* := {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} / \mathcal{U}$ を超実数体と呼び、$\mathbb{R}^*$ の元を**超実数**（**hyperreal**）と呼ぶ。通常の概念に「超」がついたら、それは $\mathbb{R}^*$ での解釈であるとする。
2. $x \in \mathbb{R}$ を定数関数の $\mathcal{U}$- 同値類 $[\_ \mapsto x]_{\mathcal{U}}$ と同一視し、$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^*$ と見做す。
3. $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ の元を**超準元**（**nonstandard element**）と呼ぶ。
4. $\mathbb{R}$ の元を**標準**元とよぶ。
5. $\omega := [\mathrm{id}]_{\mathcal{U}}$ とおく。

注意 3.7. ω は集合論においては最小の無限順序数を指すが、超準解析の分野では別の意味になる。本セミナーでは上の定義は本節においてのみ用い、他の文脈では常に最小の無限順序数を指すものとする。

Łoś の定理から直ちに次が従う：

定理 3.12（移行原理（transfer principle））. 任意の $\mathcal{L}(\mathbb{R})$- 論理式 φ について、以下が成り立つ：

5) 実は、数理論理学分野の黎明期に深い貢献のある Robinson は三人いる。順不同で採り上げると、一人は今回採り上げる超準解析の創始者でもある Abraham Robinson である。二人目は、計算可能性理論などに貢献があり、Hilbert 第 10 問題の解決に大きな貢献をした Julia Robinson である。三人目は、Julia Robinson の夫であり、不完全性定理が成立するには PA から帰納法図式を除いた Robinson 算術 Q で十分なことを示した Raphael M. Robinson である。

$$\mathbb{R} \models \varphi \iff \mathbb{R}^* \models \varphi.$$

系 3.13. $\mathbb{R}^*$ は順序体を成す。

このような構成をして何が嬉しいのか？　まず上でおもむろに定めた ω は、実はどんな「実数」よりも大きな「**無限大**」の実数となっている：

補題 3.14. 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ について、$x < \omega$。

証明　実数 x を任意に固定する。Łoś の定理より次が示せればよい：

$$\left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, [x]_i < \omega_i \right\} \in \mathcal{U}.$$

しかし、ここで $[x]_i$ は定数関数 x であり、$\omega = \mathrm{id}$ であったから、上は次を示せということである：

$$\{ i \in \mathbb{N} \mid x < i \} \in \mathcal{U}.$$

ある実数以下の自然数は有限個しかないので、明らかに左辺の集合の補集合は有限集合である。$\mathcal{U}$ は補有限フィルターの拡張であったから、当然これは $\mathcal{U}$ の元であり、証明が完了した。 □

$\mathbb{R}^*$ は体を成すので、ω の逆元も存在する。期待される通り、これはある意味で「無限小」になっている：

系 3.15. $\varepsilon := \omega^{-1} \in \mathbb{R}^*$ は任意の正実数 $0 < x \in \mathbb{R}$ に対して $\varepsilon < x$ を満たす。

演習 3.9. これを示せ。

これはかなり無限大っぽいので、そう名付けることにして、併せて無限小についても定める。

定義 3.7.

1. 任意の実数 $r \in \mathbb{R}$ について $|x| > r$ となる超実数 $x \in \mathbb{R}^*$ を**無限大超実数**（**infinite hyperreal**）と呼ぶ。
2. 無限大でない超実数のことを**有限超実数**と呼び、その全体を $\bar{\mathbb{R}}$ と表す。
3. 任意の正の実数 $x \in \mathbb{R}$ について $|z| < x$ となる $z \in \mathbb{R}^*$ を**無限小超実数**（**infinitesimal hyperreal**）と呼ぶ。
4. 超実数 $x, y \in \mathbb{R}^*$ が**無限に近い**（記号：$x \approx y$）とは、$x - y$ が無限小であることをいう。

$\mathbb{R}^*$ は体を成すので、ω の逆元も存在する。これは無限小になっている：

系 3.16. $\varepsilon := \omega^{-1} \in \mathbb{R}^*$ は無限小超実数である。

演習 3.10. これを示せ。

補題 3.17. $\approx$ は $\mathbb{R}^*$ 上の同値関係である

演習 3.11. 示せ。

さて、今後実数に関する論理式を書いたときに、いちいち $\mathbb{R} \vDash$ とか $\mathbb{R}^* \vDash$ とか書くのは面倒である。そこで、以下の略記法を導入する：

記法 .

1. f が $\mathbb{R}$ 上 $\mathcal{L}$- 論理式で定義可能な関数の時、f の $\mathbb{R}^*$ 上での解釈を f^* と書く。
2. P が $\mathbb{R}$ 上 $\mathcal{L}$- 論理式で定義可能な述語の時、P の $\mathbb{R}^*$ 上での解釈を P^* と書く。
3. φ を $\mathcal{L}(\mathbb{R})$- 論理式とするとき、φ に現れる関数・述語記号をそれぞれ $\mathbb{R}^*$ 上での $*$- 付きの解釈に置き換えた論理式を φ^* と書く。
4. $*$- つきでない記号は $\mathbb{R}$ 上での解釈と見做す。

この略記法を使えば、移行原理は次のように書き直せる：

定理 3.18 (移行原理). φ を $\mathcal{L}(\mathbb{R})$- 論理式とすると次が成立：

$$\varphi \iff \varphi^*$$

本当に記号を書き換えただけだが、この重要な帰結として、連続性や微分可能性などの命題を示す際に、いったん φ^* に持ち上げて無限大・無限小の超実数を使って議論をする、といったことができるようになる。

例として、次の特徴付けが成り立つ：

補題 3.19 (連続性の超準的特徴付け). 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と実数 $x \in \mathbb{R}$ について次は同値：

1. f は x で連続
2. $\forall y \in \mathbb{R}^* \; x \approx y \implies f^*(x) \approx f^*(y)$.

入力が無限に近いなら出力も無限に近い、というのが連続性の気持ちだったことを思うと、これはかなり直感的である。

連続性の超準的特徴付けの証明 ($\implies$): $x \approx y$ となる y を固定する。示すべきことは、$f(x) \approx f(y)$ であり、特に任意の標準正実数 $\varepsilon > 0$ について $\left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$ となることが示せればよい。そこで、任意に標準正実数 $\varepsilon > 0$ をとる。すると、連続性から以下を満たす標準正実数 $\delta > 0$ が存在する：

$$\forall z \in \mathbb{R} \; \left[\left|x - z\right| < \delta \implies \left|f(x) - f(z)\right| < \varepsilon\right].$$

すると移行原理より：

$$\forall z \in \mathbb{R}^* \; \left[\left|x - z\right| < \delta \implies \left|f(x) - f(z)\right| < \varepsilon\right].$$

$d = \left|x - y\right|$ とおけば、δ が標準実数であることと $x \approx y$ より $d < \delta$ なので、$\left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$ が従う。

($\impliedby$): 対偶を示す。つまり、f が連続でないとして、$x \approx y$ だが $f(x) \not\approx f(y)$ となる y を探そう。仮定より、$\varepsilon > 0$ がとれて、以下が成立する：

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_{>0} \exists y \in \mathbb{R} \; [\left|x - y\right| < \delta \land \left|f(x) - f(y)\right| \geq \varepsilon].$$

すると移行原理より：

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^*{}_{>0} \exists y \in \mathbb{R}^* \ [|x-y| < \delta \wedge |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon].$$

そこで、今特に上を $\delta := \omega^{-1}$ に適用すれば、$y \in \mathbb{R}^*$ で $|x-y| < \omega^{-1}$ だが、$|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$ となるような y が取れる。このとき、ω^{-1} は無限小なので $x \approx y$ だが、ε は正の標準実数なので $f(x) \not\approx f(y)$ である。 □

演習 3.12. 実数列 $(a_n \in \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$、実数 a について次が同値であることを示せ：

1. $\lim_{n \to \infty} a_n = a$
2. 任意の無限大超自然数 γ について $a^*{}_\gamma \approx a$
3. ある無限大超自然数 γ があって、任意の $N \geq \gamma$ について $a^*{}_N \approx a$

演習 3.13. 実関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について次が同値であることを示せ：

1. f は一様連続
2. 任意の超実数 $x, y \in \mathbb{R}^*$ について $x \approx y$ ならば $f^*(x) \approx f^*(y)$

また、これを 補題 3.19 と比較し、なぜこの条件が**各点**連続ではなく**一様**連続の特徴付けになるのか、差異を考察せよ。

他にも微分可能性や、超有限和を使った積分の定式化なども可能である。

また、今回は言語を実関数などをドンドン増やして拡張する形をとったが、実数と実関数などを含む十分大きな集合論の宇宙の切片 $H(\kappa)$ や V_κ などの超冪をとれば、言語は $\mathcal{L}_\in$ だけで必要なものが全部入っている状況がつくれる。また、実数に限らず興味の対象である位相空間などを含むように取れば、そうした空間の超準的な取り扱いも可能であり、上で定義したモナドなどを一般化して、移行原理が成り立つ形で超準位相空間論を展開することも可能である。

また、更に $\mathcal{U}$ がよい組合せ論的な性質を持つように取った上で、コンパクト性定理をつかってこうした V の切片で成り立つ公理系を貼り合わせて、公理的に超準解析を行うアプローチも存在する。Keisler の教科書 [3] などは前半にこのアプローチを取り、後半でモデル論をしている。こうした公理系で最も有名なのは Edward Nelson[6]の定式化した**内的集合論**（Internal Set Theory; IST） [5] である。これは ZFC の保存拡大になっているが、超準的な集合と標準的な集合が共存する理論で、「標準元である」ことを表す述語記号「st」を語彙として持ち、形式化された移行原理や他の飽和原理などを公理として持つ。

3.6 Löwenheim–Skolem の定理

上では超積やコンパクト性定理によって、初等拡大モデルが取れることを見た。しかし、こうした方法で得られるモデルがどのような濃度を持つのかは一般にはよくわからない。というか実は、一般に超冪の濃度が何にな

6) Nelson は不思議な人で、数理論理学、とくに超準解析と算術の部分体系の研究で大きな仕事がある一方、数学の哲学者としてはペアノ算術 PA は矛盾するということを強く信じていた**厳格有限主義**（**ultrafinitism**）の主要な論客の一人でもあった。厳格有限主義というのは数学の哲学の一つの立場であり、たとえば、自然数上の冪関数の停止性は、その停止ステップ数の見積りにどうしても冪関数じたいが現れるため循環論法で、実は自然数上全域で定義されないかもしれない、という主張などがある。数学の哲学は数理論理学的な手法を用いて数学の在り方を論じる哲学の一分野であり、数理論理学と密接に関係はするし、Nelson のように両方をバリバリに研究している研究者もいるが基本的に別分野である。こうした立場からか、超準解析の超有限性を使うことで無限の対象を回避して確率論を展開する、Radically Elementary Probability Theory [4] なども提唱している。超準解析に必要な公理系の強さは PA の比ではないと思うのだが、どう折り合いをつけていたのかはよくわからない。学問的には誠実な人で、一度 PA の矛盾を証明したと発表したが、Terence Tao に証明のギャップを指摘され撤回している。

り得るのかというのは、巨大基数なども絡んでくる独立命題である。

では、狙った濃度になるように初等部分モデルや初等拡大を取る方法はないのだろうか？　できる、というのが**Löwenheim（レーヴェンハイム）–Skolem（スコーレム）の定理**である。これを述べるために、言語の濃度の概念を定義する：

定義 3.8.　言語 $\mathcal{L} = \left\langle \boldsymbol{R}_i^{(n_i)}, \boldsymbol{f}_j^{(m_j)} \right\rangle_{i \in I, j \in J}$ の**濃度** $\left|\mathcal{L}\right|$ を $\left|\mathcal{L}\right| := \left|I\right| + \left|J\right| + \aleph_0$ と定める。

注意 3.8.　基数の和・積は単純に max と一致する。論理式は任意有限長あり得るので、記号の数が有限でも最低 $\aleph_0$ 個は論理式があるということに注意しよう。

演習 3.14.　$\left|\mathcal{L}\right|$ は $\mathcal{L}$- 論理式全体の濃度および $\mathcal{L}$- 項全体の濃度と一致することを証明せよ。（**ヒント：無限基数** κ **について** $\kappa^{<\omega} = \kappa$）

定理 3.20 (Löwenheim–Skolem (–Tarski) の定理).　$\mathcal{M}$ を無限 $\mathcal{L}$- 構造とする。

1. **上方 Löwenheim–Skolem**：任意の $\kappa \geq \left|\mathcal{M}\right|$ に対し $\left|N\right| = \kappa$ なる初等拡大 $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ が存在する。
2. **下方 Löwenheim–Skolem**：$\left|\mathcal{L}\right| \leq \kappa \leq \left|\mathcal{M}\right|$ とし、$S \subseteq \mathcal{M}$ を濃度 κ 以下の $\mathcal{M}$ の部分集合とする。このとき、$S \subseteq \mathcal{N}$ かつ $\left|\mathcal{N}\right| = \kappa$ となる $\mathcal{M}$ の初等部分構造 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ が存在する。

証明に無限組合せ論で重要な概念を含むので、ここでは下方 Löwenheim–Skolem の定理の証明の概略を以下で紹介する。上方の方は演習問題とする。

演習 3.15 (上方 Löwenheim–Skolem).　上方 Löwenheim–Skolem の定理を証明せよ。
ヒント：コンパクト性定理をつかう。κ **個の新しい定数記号** $\left\langle c_\xi \middle| \xi < \kappa \right\rangle$ **を導入し、それらが「pair-wise に全て異なる」という公理を足した理論を考え、最後に下方 Löwenheim–Skolem を使えばよい。**

下方の基本的な考え方は、存在論理式の「証拠」があれば持ってくるような関数を考えて、それらについて閉じているような部分集合を取ってくるというものである。まず、一般に次の補題が成り立つ：

補題 3.21 (閉包の存在と濃度).　集合 A と A 上の λ 個の有限引数関数の族 $\left\langle f_\xi : A^{n_i} \to V \middle| \xi < \lambda \right\rangle$ について、次で定義される $\bar{f}$ による A の**閉包** $\mathrm{Cl}_{\bar{f}}(A)$ を考える：

$$
\begin{aligned}
C_0 &:= A \\
C_{i+1} &:= \bigcup_{\xi < \lambda} f_k[C_i^{n_k}] = \left\{ f_k(\bar{a}) \middle| k < \omega, a_0, \ldots, a_{n_k - 1} \in C_i^{n_k} \right\} \\
\mathrm{Cl}_{\bar{f}}(A) &:= \bigcup_{i < \omega} C_i
\end{aligned}
$$

このとき、$\left|\mathrm{Cl}_{\bar{f}}(A)\right| \leq \left|A\right| + \lambda + \aleph_0$ であり、更に $\mathrm{Cl}_{\bar{f}}(A)$ は A を含み全ての $\bar{f}$ について閉じているような（i.e. $f_k[\mathrm{Cl}_{\bar{f}}(A)] = \mathrm{Cl}_{\bar{f}}(A)$ となるような）最小の集合である。

証明　$\kappa := \left|A\right|$、$C := \mathrm{Cl}_{\bar{f}}(A)$ とおく。κ, λ は無限として $\left|C\right| = \lambda + \kappa$ を示せば十分である。

まず濃度を評価する。各ステップでは、λ 個の有限引数の関数を適用しているので、$\lambda \cdot \kappa^{<\aleph_0} = \lambda + \kappa$ 個ずつしか増えない。それを $\aleph_0$ 回繰り返しているので、結局全体として濃度は $|C| \leq \aleph_0 \cdot \lambda \cdot \kappa = \lambda + \kappa$ となる。よって OK。

C が $\bar{f}$ について閉じている事を見る。そこで、$f_\xi : M^n \to V$ と $a_0, ..., a_{n-1} \in C$ を取る。C は可算鎖の和なので、ある $N < \omega$ があって、$a_i \in C_N$ となる。すると、$f_\xi(a_0, ..., a_{n-1}) \in C_{N+1} \subseteq C$ となる。

最小性は明らか。 □

定義 3.9 (Skolem 関数、Skolem 包). $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$- 構造とする。

1. 自由変数として $x_0, ..., x_{n-1}, y$ のみを持つ論理式 $\varphi(\bar{x}, y)$ を考える。$\mathcal{M}$ における φ の **Skolem 関数**（**Skolem function**）$f : \mathcal{M}^n \to \mathcal{M}$ とは、以下を満たすものである：
$$f(a_0, ..., a_{n-1}) = \begin{cases} b \text{ s.t. } \mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}, b) & (\text{if } \mathcal{M} \vDash \exists \varphi(\bar{a}, y)) \\ \text{適当な } \mathcal{M} \text{ の元} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$
2. 各 $\mathcal{L}$- 論理式 φ に対し、$\mathcal{M}$ における Skolem 関数 f_φ を固定する。部分集合 $A \subseteq \mathcal{M}$ の $\mathcal{L}$ についての $\mathcal{M}$ での **Skolem 包**（**Skolem hull**）$\mathrm{Sk}^{\mathcal{M}}(A)$ を、この $\mathcal{F} = \left\{ f_\varphi \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{L} \right\}$ に関する閉包で定める：$\mathrm{Sk}^{\mathcal{M}}(A) := \mathrm{Cl}_{\mathcal{F}}(A)$。

補題 3.22. $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$- 構造とする。

1. $\mathrm{Sk}^{\mathcal{M}}(A)$ は A を含む $\mathcal{M}$ の部分構造である。
2. $\mathrm{Sk}^{\mathcal{M}}(A) \prec \mathcal{M}$。

証明 $N := \mathrm{Sk}^{\mathcal{M}}(A)$ とおく。

1. 述語の解釈は自然に入るので、関数について閉じていることが言えればいい。ここで、各関数記号 $\boldsymbol{f}^{(n)}$ について、$\mathcal{M} \vDash \forall \bar{x} \exists y \ \boldsymbol{f}(\bar{x}) = y$ が成り立つので、特に Skolem 関数 $f_{\boldsymbol{f}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = y}$ は f と全く同じになっている。よって 補題 3.21 より、$f(\bar{a}) \in \mathrm{Sk}^{\mathcal{M}}(A)$ となる。よって部分構造である。
2. 補題 3.1 を使う。$\bar{a} \in N$ と $\mathcal{L}$- 論理式 $\varphi(\bar{a}, y)$ を任意に取り、$\mathcal{M} \vDash \exists y \varphi(\bar{a}, y)$ として、$\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}, b)$ となる $b \in N$ が取れればよい。Skolem 関数 f_φ を考えると N は f_φ について閉じているので、$f_\varphi(\bar{a}) \in N$ となる。また、Skolem 関数の定義より $\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}, f_\varphi(\bar{a}))$ である。よって、$b := f_\varphi(\bar{a})$ とすればよい。

□

Proof of Downward Löwenheim–Skolem 補題 3.22 および 補題 3.21 から、$A \subseteq \mathrm{Sk}^{\mathcal{M}}(A) \prec \mathcal{M}$ であり、言語の濃度と論理式の濃度は一致し（演習 3.14）仮定より $|L| \leq |A|$ なので、ふたたび補題 補題 3.21 より

$$\left|\mathrm{Sk}^{\mathcal{M}}(A)\right| \leq |\mathcal{L}| + |A| + \aleph_0 = |A| \leq \kappa$$

となる。κ に足りなければ、予め $|A| = \kappa$ になるように Sk を取る前に増やしておけばよい。 □

注意 3.9 (実数体の一意性と一階述語論理の表現力について). ところで、「完備な順序体は同型を除いて

一意に存在する」というのは実数の構成をやった際に必ず習う有名な定理であり、実数体はこの意味で「同型を除いて一意」であることは良く知られている。しかし一方で、下方 Löwenheim–Skolem の定理から、実数順序体の初等部分モデル $M \prec (\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ で可算なものが取れる。特に初等性より、M は $\mathbb{R}$ と全く同じ順序体の公理を満たしているはずである。しかし、Cantor の定理から、$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$ より、M は実数体 $\mathbb{R}$ よりも真に小さな濃度を持つため、絶対に $\mathbb{R}$ と同型になり得ない。これはどういうことだろうか？

「全く同じ順序体の公理」というのが、実は曖昧なところである。厳密には、M と $\mathbb{R}$ は**一階の述語論理式で書ける範囲で全く同じ真理を持つ**のである。一階述語論理というのは、モデルの元についての関係を記述するものであった。

一方で、順序完備性というのは、「任意の上に有界な部分集合は上限を持つ」という形で定式化されるのだった。ここでポイントなのは、完備性が**部分集合に対する量化を含んでいる**ことである。一階の対象は元であったが、部分集合は二階の対象であり、一階述語論理では直接扱うことができないのだ。逆に言えば、Löwenheim–Skolem の定理から実数体を同型を除いて一意に定義づけるには、一階述語論理だけでは不十分であり、少なくとも二階述語論理が必要なことがわかる。

しかし、我々が一階の理論である筈の集合論上で数学をする上では、自然数や実数体の一意性は示せていたはずである。これは、集合論においては全てが「集合」であり、特定の集合の部分集合もまた同じ一階の対象として扱うことができるため、対象の階数の区別が意味を成さなくなるためである。この意味で、Quine は二階以上の高階論理を「変装した集合論だ」とクソミソに貶している。とはいえ、逆に言えば集合論が高階論理を織り込んだ体系になっていると言えなくもない。また、逆数学などで算術など個別の理論を分析する上では、二階述語論理上の算術が基本的な対象として採用されている。

4 集合論の公理系と集合論による超数学

本節では、ZFC をはじめとした集合論の諸公理系を導入し、それらから従う基本的な定理について簡単に述べる。また、ZFC（の部分理論）内部でどのようにして数理論理学の定式化を行うかについても採り上げておく。

4.1 集合論の諸公理

それでは、まず議論の基本となる ZFC 公理系やその部分体系を構成する諸公理を見ていこう。

記法． 以下、集合論の言語 $\mathcal{L}_{\in} = \langle \in^{(2)} \rangle$ でかかれた論理式のみを考える。これだけだと不便なので、以下の略記法を用いる：

$$x \subseteq y :\equiv \forall z \ (z \in x \to z \in y).$$

定義 4.1 (集合論の諸公理). 言語 $\mathcal{L}_{\in}$ について種々の公理および公理図式を以下で定義する。また、束縛されていない自由変数は全て外側で暗黙裡に $\forall$ で全称量化されているものとする：

- **外延性公理（Axiom of Extensionality）**：$\forall x \forall y \ [\forall z \ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y]$。

- **空集合公理**（**Axiom of Empty Set**）：$\exists x \forall y \ y \notin x$。

外延性公理より、空集合公理が存在を保証する集合（**空集合**）は一意に存在することがわかる。そこで、定義による拡張（定義 1.3）により、以下 $\emptyset$ によりその空集合を表す。これに限らず、「$\longleftrightarrow$」を使って定義された集合は、存在するのなら外延性公理により一意となる。なので、同値条件を満たすような集合の存在公理が与えられたとき、このように定義による拡張を使ってどんどん語彙を拡張していくことにする。

- **対の公理**（**Axiom of Pairing**）：$\forall x \forall y \exists z \forall w \ [w \in z \longleftrightarrow (w = x \vee w = y)]$。$x, y$ についてこのような性質を満たす集合 z を x, y からなる**非順序対**（**unordered pair**）とよび、以下 $\{x, y\}$ と表す。
- **和集合公理**（**Axiom of Union**）：$\forall x \exists y \forall z \ [z \in y \longleftrightarrow \exists w \in x \ z \in w]$。$x$ についてこのような性質を満たす集合 y を x の**和集合**（**union**）と呼び、以下 $\bigcup x$ と表す。
- **内包公理（図式）**（**Axiom (schema) of Comprehension**）または**分出公理（図式）**（**Axiom (schema) of Separation**）：S を自由変数に持たない論理式 $\varphi(x)$ について、

$$\forall A \exists S \forall x \ [x \in S \longleftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(x))].$$

  $A, \varphi(x)$ についてこのような性質を満たす集合 S を $\{ z \in A \mid \varphi(z) \}$ と表す。
- **冪集合公理**（**Axiom of Powerset**, Power）：$\forall x \exists y \forall z \ [z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x]$。このような集合を x の**冪集合**（**powerset**）と呼び、以下 $\mathcal{P}x$ や $\mathcal{P}(x)$ などと表す。

集合論の基本的な公理はまだあるが、一旦以上の公理の下で定義可能な集合演算について用語と記法を用意しておく。

- x, y の**順序対**（**ordered pair**）を $\langle x, y \rangle := \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$ により定義する。このとき、

$$\forall x \forall y \forall z \forall w \ [\langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle \longleftrightarrow (x = z \wedge y = w)]$$

  が成り立つことがわかる。
- $\{x\} := \{x, x\}$ として x の**一点集合**を定義すると、$\forall z \ [z \in \{x\} \iff z = x]$ となることがわかる。
- 和の公理と対の公理により $x \cup y = \bigcup \{x, y\}$ が存在し、$z \in x \cup y \longleftrightarrow (z \in x \vee z \in y)$ が成り立つ。これが普段我々が使っている**二項の和集合**である。
- 内包公理により $x \cap y = \{ z \in x \mid z \in y \}$ が存在し、$z \in x \cap y \longleftrightarrow (z \in x \wedge z \in y)$ が成り立つ。これは普段我々が使っている**二項の共通部分集合**である。
- 冪集合、和、対、内包公理から、X と Y の**直積** $X \times Y := \{ w \in \mathcal{P}\mathcal{P}(X \cup Y) \mid \exists x \in X \exists y \in Y \ w = \langle x, y \rangle \}$ が定義できる。これは普段我々が使っている二項直積となることがわかる。

以上の略記法を踏まえつつ、他の公理（図式）の定義に戻ろう。

- **基礎の公理**（**Axiom of Foundation**）または**正則性の公理**（**Axiom of Regularity**）：

$$\forall x [x \neq \emptyset \to \exists y \in x \ (y \cap x = \emptyset)].$$

- **無限公理**（**Axiom of Infinity**）：$\exists x \ [\emptyset \in x \wedge \forall y \in x \ (y \cup \{y\} \in x)]$。
- **置換公理（図式）**（**Axiom (schema) of Replacement**, $\mathrm{Replace}$）：A を自由変数に持たない論理式 $\varphi(x, y)$ について、

$$\forall A\ [(\forall x \in A\ \exists! y\ \varphi(x,y)) \to \exists z \forall y\ [y \in z \leftrightarrow \exists x \in A\ \varphi(x,y)]]$$

このような z を $\{\, y \mid x \in A, \varphi(x,y) \,\}$ と表し、また F が関数であるとき

$$F[A] := F\text{''}\, A := \{\, F(x) \mid x \in A \,\}$$

と書く。

- **選択公理（Axiom of Choice, AC）**：任意の空でない集合に整列順序が入る。即ち：

$$\begin{aligned}
&\forall X \neq \emptyset\ \exists R \subseteq X \times X \\
&\quad \forall xyz\ [x\ R\ x \wedge (x\ R\ y \to y\ R\ x \to y = x) \wedge (x\ R\ y \vee y\ R\ x) \wedge (x\ R\ y\ R\ z \to x\ R\ z)] \\
&\quad \wedge \forall S \subseteq X [S \neq \emptyset \to \exists x \in S\ \forall y \in S\ (x\ R\ y)]
\end{aligned}$$

- **Zermelo 公理系**（Z）とは、外延性、空集合、基礎、対、和、冪集合、内包、無限公理から成る公理系である。Z + AC を ZC と書く。
- **Zermelo–Fraenkel 公理系**（ZF）とは、Zermelo 公理系に置換公理を加えた公理系である。ZF + AC を ZFC と書く。

演習 4.1. 有限個の集合 $x_0, \ldots, x_{n-1}$ について、それらのみを元に持つ集合 $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ が存在することを**置換公理を使わずに**示せ。

置換公理および内包公理は論理式 φ ごとに個別の具体的な公理を与える**公理図式**であり、無矛盾である限り ZF の枠組みでは単一の論理式で表すことはできない。このことは、無限組合せ論パートで触れる**反映原理**（**Reflection Principle**）からわかる。

注意 4.1. 空集合公理は公理系に含めない流儀が多い。というのも、少なくとも一つ集合が存在すれば、内包公理から空集合の存在が言えるからである。= つきの一階述語論理ではモデルが空ではないことが論理的に従うし、モデルも空でないものだけを考えるので、空集合公理は不要なのである。

注意 4.2（「内包公理」という呼称について）. 歴史的には、単純に「内包公理」(Axiom of Comprehension）といった場合、次の公理を指していた：

任意の論理式 $\varphi(x)$ について、集合 $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ が存在する。

これは、Frege が『算術の基礎』で導入した最初期の公理的集合論の根幹を成す公理であり、今日では「無制限の内包公理」と呼ばれるものである。上で導入した内包公理に比べて、元 x のわたる範囲が無制限であるためにこう呼ばれる。

Frege は外延性公理とこの公理を用いて数学の『基礎』を構築できることを示そうとした。しかし、Russel によって $\varphi(x) :\equiv x \notin x$ に上の公理図式を適用すると矛盾が生じることがわかった。これが今日では良く知られている **Russel のパラドックス**である。$S = \{\, x \mid x \notin x \,\}$ が集合として存在するとすると、$S \in S \leftrightarrow S \notin S$ が成り立ち矛盾する、というものである。

Cantor–Dedekind による集合論を用いた数学が強力であったのは、内包公理と外延性公理によって、「ある性質 $P(x)$」と「性質 $P(x)$ を満たす対象 x の全体」を同一視して扱うことができた為である（倍

数概念とイデアルの同一視などを思い起こそう)。こうした操作に外延性は必要不可欠でなので、数学の基礎として見る限りにおいては、無制限の内包公理を採用することはできない[7)]。一方で、内包公理については既に与えられている集合から $\varphi(x)$ を満たす元だけ集めてくることができれば十分である。こうした歴史的経緯から、数学の哲学や数学史の文脈以外では、もっぱら「内包公理」と言えば制限された形の内包公理を指すことが暗黙の了解になっている。

演習 4.2. よくある Russel のパラドックスの説明は次のようになされる:「$S = \{x \mid x \notin x\}$ とする。$S \in S$ かどうかで場合分けする。$S \in S$ とすると定義から $S \notin S$ となり矛盾。一方で、$S \notin S$ とすると、再び定義から $S \in S$ となり矛盾。いずれにせよ矛盾!」

この証明は排中律を使っているように見えるが、実は使わずとも証明できる。その証明を考えてみよ。

4.2 集合論における「クラス」について

しばしば「群の全体/圏の全体は真のクラスを成す」というような議論をするし、集合論でも「真クラス個のほげほげが存在して ……」というような議論をよくする。しかし、上の公理系を見てわかるように、すくなくとも ZFC(とその部分体系)には**公式にはクラスという概念は登場しない**。ZFC を基礎理論として採用する限りにおいて、クラスはあくまでもインフォーマルな用語であり、便利なので使われているジャーゴンであると理解すべきである。

では ZFC における「クラス」をどう正当化・理解すればいいのだろうか?大事な仮定は、**クラスは決して $\in$ の左辺に登場しない**ことと、**クラスに対する量化は基本的に許容されない**ということである。この仮定のものとでは、「**クラスとは論理式で定義される集合の集まりである**」と考えればだいたいにおいて問題ない。たとえば、宇宙 $V = \{x \mid x = x\}$ は集合全体の成すクラスだが、これは単純に $\varphi(x) :\equiv x = x$ という論理式の話をしていると思えばよい。また、Gödel の構成可能宇宙 L について、「ZF を仮定すると、L で選択公理が成り立つ」というような話をすることがあるが、この L もある論理式 $\Delta(x)$ があり、$x \in L \iff \Delta(x)$ と読み替えた上で、量化子 $\exists x$ を $\exists x\ \Delta(x) \land \cdots$ と書き換えたものが ZF で証明できる、ということの略記である。このように、論理式 $\Phi(x)$ で定義されるクラス C ごとに $x \in C$ は $\Phi(x)$ の略記だと思えば、集合の集まりとして見たときの個別のクラスの扱いは問題ない。

また、この解釈のもとで、任意の集合 a は論理式 $\varphi(x) :\equiv x \in a$ と同一視することでクラスとなる。標語的に書くのなら、**任意の集合はクラスである**。区別のため、集合ではないようなクラスを**真(の)クラス**(**proper class**)と呼ぶ。つまり、C が真のクラスであるというのは、対応する論理式 $\Phi(x)$ が $\nexists c \forall x\ [x \in c \iff \Phi(x)]$ を満たすということである。

また、「$\varphi(x)$ なる x は真クラス個存在する」というような命題については、「どんな集合 A についても、それに含まれない $x \notin A$ で $\varphi(x)$ となるものが存在する」というような形で理解すればよい。

また、クラスに対する量化については、それが命題の一番外側に集中しているときに限り、次のような形でメタレベルでの言明と解釈して正当化できる。たとえば、「任意のクラス A について ×× がなりたつ」というのは、

---

7) 実は、外延性公理を諦めると無制限の内包公理は矛盾しないことが知られている。具体的には、λ- 計算の体系で関数適用 (LM) を $M \in L$ と捉えることでこのような体系のモデルが構築できる

A が $\in$ の左辺に登場しない限りにおいて、どんな論理式 $\varPhi(x)$ についても「××」の中の「$x \in A$」を「$\varPhi(x)$」で置き換えたものが成り立つ、と解釈できる。また、「クラス A, B, C が与えあられたとき、×× を満たすようなクラス D が存在する」というような「言明」は、A,B,C それぞれに対応する論理式が与えられたときに、それらから D に対応する論理式を具体的に構成することができる、というメタレベルでの主張として解釈することで正当化できる。

このように、クラスと論理式を同一視する立場に立てば、置換公理や内包公理は「クラス関数 F による集合 x の像は集合である」「集合とクラスの共通部分は集合である」と言い換えることができる。

これらを越えるようなクラスの扱いがないように気をつける限りにおいて（特に量化を外側でするようにし、外側での量化もすべて具体的な論理式の書き換えとして解釈するように気を付ければ）、基本的には ZFC では自由にクラスを扱うことができると思ってよい。

一方で、**von Neumann–Bernays–Gödel の集合論**（NBG）では、**集合を渡る変数とクラスを渡る変数の二種類を許容**し、クラスを対象として扱うことができる。集合変数に限った論理式を考えると、NBG は ZFC の保存拡大であり、この意味で上のクラスのインフォーマルな扱いも正当化できる。これは、正に集合部分は ZFC の集合を、クラス部分は論理式を与えてやれば自然と NBG のクラスと見做せることによる。NBG のよいところは、**クラス変数を使うことで有限公理化可能である**ことである。しかし、クラスは他のものの元になれないといった制約などを満たすために、量化子は集合変数上しか渡れないといった制限など何らかのトリックが必要になり、強制法の定式化も煩雑になる。そして結局、上で述べたような「読み替え」を採用すれば、結局 NBG で議論をしているのとほとんどかわらない体験が得られる。こうした都合から、集合論の理論としては NBG ではなく ZFC が広く使われている[8]。

4.3 集合論の公理系は何を規定しているのか？

群の公理系も、集合論の公理系も、論理式の集合という意味では同じ形式的な公理系である。しかし、群の公理系は個別の群が満たすべき性質を定めているのに対して、集合論の公理系は**集合の宇宙**（＝集合全体のあつまり）の性質を述べている。

これは、集合論が**数学の基礎**として利用されることが想定されているからである。つまり、個別の群や空間だけではなく、それらの公理系を内部で解釈することができ、複数の（種別が異なるかもしれない）**対象を互いに関連づけ**、その間の射などを考えることが出来る場として想定されているからである。こうした観点から、ZFC の各公理がどう正当化され得るかを見ていこう。

必要最小限のものは欲しいよね、ということで**空集合公理**や**無限公理**が $\emptyset$ や ω の存在を保証している。**内包・和・対**の公理などは、あり物から欲しい部分だけを集めてきたり、基本的な演算を使って切り貼りして新しい対象を構成できる、という要請である。**冪集合**は対象上の関数など対象の部分や写像を議論するのに必要となる。初等的なところでは、たとえば自然数から実数を作ろうと思ったら、冪集合が必要になる。**選択公理**も、超越的ではあるがとりあえず代表元を取ったり、何らかの意味で極大な対象をとりたいというような要請を満たすためにある。

---

8) 一方で、NBG からこうした制限を取っ払い、クラスも集合と同様に扱うことのできる Morse–Kelley 集合論というものがある。これは ZFC よりも真に強く、ZFC に到達不能基数の存在と無矛盾性の意味で等価になる。クラスによる強制法を考えるときなどは、こうした理論を使った方が分析がしやすいため、NBG や MK での強制法を考えている研究者も存在する

置換公理は、**写像による像が必ず集合となる**ことを要請する。ここで、写像は集合として存在するものだけではなく、写像かのように振る舞う論理式によって定義されるものも含む。実は、以下で触れるように $V_{\omega+\omega}$ は Z のモデルとなる。この世界には $\omega+\omega$ は順序数としては存在せず、特に、「奇数のあとに偶数を数える」ような整列順序の順序型は取れない。つまり、順序数が全然足りないようなモデルでも、置換公理がない Z のモデルになってしまうのだ。言い換えれば、置換公理は「宇宙の背が十分高い」ことを要請していると見ることができる。「通常の数学」の範囲では $V_{\omega+\omega}$ 程度でも十分かもしれない（実関数、実関数からの実関数 ...... などはある）が、圏論などより高次の構成を必要とする数学ではこれでは不十分である。また、「Borel 集合が可測性や Baire の性質など任意のよい性質を持つ」（Borel 決定性）ためには、置換公理が本質的に必要であることが知られている。

基礎の公理は、実は「数学の基礎」としての集合論の観点からはあってもなくてもよい。しかし、基礎の公理が成り立たないような宇宙であっても、**必ず基礎の公理が成り立つ部分が存在**するので、**無矛盾性の意味ではあってもなくても特に問題はない**[9]。また、数学的対象を「公理系を満たす何らかの集合」として定義するのであれば、**非整礎な宇宙に存在する構造に対しそれと同型な構造が必ず整礎部分にも存在する**ことが言え、この意味で**基礎の公理の有無が「通常の数学」に及ぼす影響はない**といえる。一方で集合論の理論を展開する上では基礎の公理があった方がよく、実りの多い理論が得られるので仮定されているものである[10]。ちょっとだけ「普通の数学」と関連する話題を書くと、たとえば**「選択公理」と「線型空間の基底の存在」は同値**であることは比較的よく知られているが、**基礎の公理がなくても同値かどうかは未解決**の問題である。

4.4 集合論の基本的な結果

以下、集合論内部で超数学を展開するのに必要な基本的な概念について触れておく。また、上述のように基礎の公理が「整礎な集合だけを考える」という言明と同値であることも見ていく。

定義 4.2.

- 二項関係 R が**集合的**（**set-like**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の x について、$y{\downarrow} := \{\, y \mid y \ R \ x \,\}$ が集合を成す。
- 二項関係 R が A 上で**整礎**（**well-founded**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $\emptyset \neq B \subseteq A$ は R- 極小元を持つ。
- 二項関係 R が A 上で**整列順序**（**well-order**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ A 上で R は整礎な全順序。
- クラス A が**推移的**（**transitive**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ $x \in y \in A \to x \in A$。つまり、$\in$ が A 上で推移的関係となる。
- 整列順序 $\prec$、$a \in A$ について、$\{\, x \mid a \prec x \,\} \neq \emptyset$ のとき、$\{\, x \mid a \prec x \,\}$ の最小元を $\prec$ に関する a の**後者**（**successor**）と呼ぶ。
- 集合 α が**順序数**（**ordinal**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ α は推移的集合であり、$\in$ により全順序が入る。順序数の全体を On により表す。また、On に制限した $\in$ を単に $<$ と書く。

注意 4.3. 基礎の公理は、関係 $\in$ が整礎であることを述べており、von Neumann により導入された。

---

9) よく、Russel のパラドックスを避けるために基礎の公理が導入されたという勘違いがあるが、公理をつけたしたところで矛盾の証明図がなくなるわけではない（新公理を無視しても証明はなりたつ）ので、この理解は大きな間違いである。

10) 一方で、情報学への応用や哲学的興味から、基礎の公理を積極的に破る「任意の（循環を含む）グラフを実現する集合が存在する」という反基礎の公理（AFA）を研究している人もいる。これはいわゆる「集合論」の文脈からははみでた研究と見做されがちである。

注意 4.4. ここでは、選択公理をそれと同値な整列可能定理により定義している。Cantor は整列可能定理を証明しようとしたができず未解決予想とし、Zermelo は必要最小限の公理系から整列可能定理を証明しようとして Z を定式化した（数学の基礎付けのために提唱したとする俗説は誤りである）。しかし、Zermelo は Z に陽には含まれていない選択公理 AC を暗に仮定して証明してしまっており、後に Z 上で AC と整列可能定理が同値であることが明らかになった。実際に Z から AC が証明できないことは、Gödel の L と、Fraenkel および Mostwski による集合論の置換モデル（または Cohen の強制法による対称モデル）によって確定する。

以下当面の目標は、**順序数が整列集合の順序型**として振る舞うことを示すことである。そのために、まずは整列関係やひいてはその一般化である整礎関係の基本性質について見ていこう。

集合的な整礎関係に沿った超限帰納法は、今後あらゆる対象を定義する際に縦横無尽に用いられる：

補題 4.1 (超限帰納法の原理). A, D をクラス、クラス関係 $\prec$ を A 上で集合的な整礎関係、$G : D \times A \times V \to V$ をクラス関数とする。このとき、クラス関数 $F : D \times A \to V$ で次を満たすものが存在する：

$$\forall d \in D \ \ \forall a \in A \ \ F(d, a) = G(d, a, F \restriction a{\downarrow})$$

また、このようなクラス関数 F は $F(d, x) = y \iff F'(d, x) = y$ を満たすという意味で一意である。

系 4.2. A をクラス、クラス関係 $\prec$ を A 上で集合的整礎関係、$\varphi(x, y)$ を論理式とする。このとき、次を満たすようなクラス $\mathrm{W}(\varphi, \prec) \subseteq A$ が一意に存在する：

$$\forall a \in A \ \ [x \in W(\varphi, \prec) \iff \varphi(a, W(\varphi, \prec) \cap a{\downarrow})]$$

以上を使えば、特に順序数について次のような基本性質が証明できる：

補題 4.3.

1. On は推移的クラスである。
2. $\in$ は On 上の集合的な整列順序である。
3. $\alpha \in \mathrm{On}$ について、$\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ は α の後者である。
4. $\alpha = \{\, \beta \in \mathrm{On} \mid \beta < \alpha \,\}$
5. On は真のクラスである (Burali-Forti)。

定義 4.3.

1. α が**後続順序数**（**successor ordinal**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\alpha = \beta + 1$ となる $\beta \in \mathrm{On}$ が存在する。
2. $\alpha > 0$ が**極限順序数**（**limit ordinal**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ α は後続順序数でない。

以上の準備のもとで、整礎関係に沿った「**ランク**（**rank**）」の概念が定義できる：

定義 4.4. $\prec$ を A 上の集合的整礎関係とする。

1. $\prec$ が整列順序で $S \subseteq A$ とするとき、S の**上限**を以下で定める：

$$\sup S := \{ a \in A \mid \forall x \in S\ x \preccurlyeq a \}$$

2. R の**ランク関数** $\rho = \rho_{(A,\prec)} : A \to \mathrm{On}$ を次のように超限帰納法で定める：

$$\rho(a) := \sup\{ \rho(b) + 1 \mid b \prec a \}$$

整礎帰納法を用いれば、次の基本的な性質が成り立つことがわかる：

補題 4.4. $\prec$ を A 上の集合的整礎関係とするとき、$a \prec b \implies \rho_{\prec}(a) < \rho_{\prec}(b)$。

補題 4.5. 任意の A 上の集合的な二項関係 R について、次は同値：

1. R は A 上整礎。
2. 関数 $\rho : A \to \mathrm{On}$ が存在して、$a \mathrel{R} b \implies \rho(a) < \rho(b)$ を満たす。

定理 4.6. $(A, \prec_A), (B, \prec_B)$ を共に集合的整列順序つきクラスとする。

1. $i : A \to B$ が整列順序の同型なら、$i(a) = \sup\{ i(b) \mid b \prec_A a \}$。
2. 整列クラス間の同型は一意である。すなわち、$i, j : (A, \prec_A) \cong (B, \prec_B)$ がともに順序同型なら $\forall x \in A\ i(x) = j(x)$。

定理 4.7. 任意の整列集合 $(X, <)$ に対し、$(X, <) \cong (\alpha, \in)$ となる順序数 α が一意に存在する。このような α を $(X, <)$ の**順序型（order-type）**と呼び、$\mathrm{otp}(X, <)$ で表す。

証明 $(X, <)$ のランク関数を考えると、これが同型を与える。 □

更に、On はある意味で「集合的な整列順序が入る真のクラス」の「順序型」であり、特に集合的整列クラスは同型を除いて一意に定まることがわかる：

補題 4.8. A が真のクラス、$\prec$ が A 上の集合的整列順序とすると、ランク関数は整列順序の同型

$$\rho : (A, \prec) \cong (\mathrm{On}, \in)$$

を与える。

これらの応用として、基礎の公理は「集合の宇宙 V は空集合から冪集合を超限回繰り返して得られる」という主張と同値であることがわかる：

定義 4.5. $\alpha \in \mathrm{On}$ による帰納法により V_α を定める：

$$V_0 := \emptyset, \qquad V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha), \qquad V_\gamma := \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha \quad (\gamma : \mathrm{limit}).$$

補題 4.9. ZFC − Foundation 上次は同値：

1. 基礎の公理

2. $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$

注意 4.5. 基礎の公理は選択公理以上にあって当然なものという立場を取るので、以下は $V = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$ は当然なりたつものと思って作業する。

定義 4.6.

1. 集合 x の**ランク**（**rank**）を $\mathrm{rank}(x) := \min\left\{ \alpha \in \mathrm{On} \mid x \in V_{\alpha+1} \right\}$ と定める。
2. 集合 x の**推移閉包**（**transitive closure**）$\mathrm{trcl}(x)$ を次のように帰納的に定める：

$$\bigcup^{(0)} x := x, \qquad \bigcup^{(n+1)} x := \bigcup \bigcup^{(n)} x, \qquad \mathrm{trcl}(x) := \bigcup_{n<\omega} \bigcup^{(n)} x$$

演習 4.3. $\mathrm{rank}(x)$ が $\in$- 関係を集合的整礎関係と見做したときのランク関数と一致することを示せ。

補題 4.10. $\mathrm{trcl}(x)$ は x を含む最小の推移的集合である。

4.5 ZFC 内でのロジックの実装：またはメタとオブジェクト二つの論理式・二つの ZFC

我々はこれまでに「論理式」や「モデル」といった概念を定義して扱ってきた。特に、論理式は我々が実際に書き下せるものを念頭において、外の世界の素朴な帰納法で操作してきた。一方、不完全性定理や真理定義不可能性定理では、こうした概念を更に ZFC や PA の中で再定式化して、個別のモデルの中で解釈して扱うことになる。こうした概念を扱う上では、**必ずしも我々の世界に存在しない論理式や証明図**などが存在し得る。

そこで本節では ZFC の中でこれまでの議論がどう形式化され、そうしたものを扱う上での注意点について触れておく。

まずは、論理式をどう ZF で定式化するかを考えておこう。ZF では、無限公理から自然数全体の集合 ω が存在する。また、任意の集合の元からなる有限集合・有限列などの存在も保証されている。これらを使えば、論理式をうまいこと表現できそうである。まず、言語の定義は簡単だ：

定義 4.7 (ZF **での言語の定義**)**.**

1. 言語 $\mathcal{L}$ とは、四つ組 $\mathcal{L} = \left\langle \mathrm{Rel}_\mathcal{L}, \mathrm{Fun}_\mathcal{L}, \mathrm{Arity}_{\mathrm{Rel}_\mathcal{L}}, : \mathrm{Rel}_\mathcal{L} \to \omega, \mathrm{Arity}_{\mathrm{Fun}_\mathcal{L}} : \mathrm{Fun}_\mathcal{L} \to \omega \right\rangle$ である。$R_\mathcal{L}, F_\mathcal{L}$ の元はそれぞれ**述語記号**、**関数記号**とよばれる。$\mathrm{Arity}_{\mathrm{Rel}_\mathcal{L}}(R) = n$ のとき述語記号 $R \in \mathrm{Rel}_\mathcal{L}$ は n- 項述語記号、$\mathrm{Arity}_{\mathrm{Fun}_\mathcal{L}}(f) = n$ のとき関数記号 $f \in \mathrm{Fun}_\mathcal{L}$ は n- 変数関数記号と呼ばれる。曖昧性がないとき、$\#R := \mathrm{Arity}_{\mathrm{Rel}_\mathcal{L}}(R)$ や $\#f := \mathrm{Arity}_{\mathrm{Fun}_\mathcal{L}}(f)$ などと書く。ZF で「x が言語である」を表す論理式 $\mathrm{Lang}(x)$ を明示的に書けば：

$$\mathrm{Lang}(x) :\equiv \exists R\ \exists F\ \exists f\ \exists g\ [x = \langle R, F, f, g \rangle \land f : R \to \omega \land g : F \to \omega]$$

2. $\mathcal{L}$- 構造とは三つ組 $M = \langle M, \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ で次を満たすものである：
   (a) M は集合である。

(b) $\mathcal{R} \in \prod_{R \in \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}} M^{\# R}$

(c) $\mathcal{F} \in \prod_{f \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}}} {}^{M^{\# f}}M$

演習 4.4. 気が向いたら、上の定義を基に「M が $\mathcal{L}$- 構造である」ことを表す論理式 $\mathrm{Str}_{\mathcal{L}}(M)$ を書き下してみよ。

項や論理式の定義も同様 ...... といきたいところだが、これらの定義は**帰納的な定義**であり、上のようにわかりやすく一発で書き下すことはできない[11]。

しかし、系 4.2 より我々は超限帰納法が使えるので、W を使って定義してやればよい。ちなみに、定義による拡張を解してみると、$x \in \mathrm{W}(\varphi, \prec)$ は次のように表せる：

$$x \in \mathrm{W}(\varphi, \prec) :\equiv \exists W \subseteq X \ [\forall z \in X \ \{z \in X \longleftrightarrow \varphi(x, \{\, y \in X \mid y \prec z \,\})\} \wedge x \in W]$$

さて、これを使えばたとえば $\mathcal{L}$- 項を次のように定義できる：

定義 4.8. x が $\mathcal{L}$- 項であることを表す述語 $\mathrm{Term}(x)$ は次のように定義する：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Term}_0(x, A) &:\equiv \exists n < \omega[x = \langle 1, n\rangle] \vee \exists f \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}} \ \exists y \in {}^{\mathrm{Arity}(R)}A \ [x = \langle 0, f\rangle^\frown y] \\
\mathrm{Term}(x) &:\equiv x \in \mathrm{W}(\mathrm{Term}_0, \subsetneq) \\
&\equiv \exists W \ [x \in W \wedge \forall z \ (z \in W \longleftrightarrow \mathrm{Term}_0(z, \{\, y \in \mathcal{L} \mid y \subsetneq z \,\}))].
\end{aligned}$$

ただし、ここで $x \subsetneq y$ は列 x が y の真の始切片である（つまり $x = y \restriction n$ となるような $n < \mathrm{lh}(y)$ が存在する）ことを表す関係である。

ここで、気持ちとしては $0, f$ で始まっているものは複合項、$1, n$ は変数 x_n を表すものである。項の場合は引数の数が決まっているので、このように記号と項の連接で表現できる。これは、わかる人向けにいってしまえば（逆ではない）ポーランド記法を採用している、ということである。

演習 4.5. 上を拡張して、集合 A にパラメータを持つ $\mathcal{L}$- 項を定義してみよ。また、$\mathcal{L}$- 論理式であることを表す論理式 $\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}}(x)$ を定義してみよ。パラメータ付きも考えよ。

演習 4.6.

1. 「P は理論 T から φ への証明図である」ことを表す述語 $\mathrm{IsPr}_T(P, \varphi)$ を書き下してみよ。
2. 上を使って、「理論 T から φ が証明可能である」ことを表す述語 $\mathrm{Pr}_T(\varphi)$ を書き下してみよ。

以上のようにして、「論理式である」「証明図である」などの概念が定義できる。ところで、以上は ZFC 上での論理式の定義だが、我々のメタレベルの世界にも論理式はある。ZFC での論理式の定義はメタレベルの論理式を真似て定式化したので、メタの我々が知っている論理式 φ が与えられれば、ZFC の中で φ に対応する

11) 厳密な話をするのなら、上に出て来る順序対 $\langle a, b, c, d\rangle$ や関数であることを表す $f : R \to \omega$ などのような記号は本来集合論の言語にはない。しかし、これらの概念は ZF の公理系から容易に定義できるので、定義による拡張（補題 1.6）で直ちに正当化できる。

論理式を表現する項をアルゴリズミックに構成できる。両者は曖昧性のない範囲では議論の過程でしばしば混同して扱うことになるが、メタの論理式を ZFC の項として表した対応物を表すための（メタ）記号を導入しておくことにする：

記法． メタレベルの論理式 φ に対応する ZFC の項として表現された論理式を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書く。

この記号は、PA などより弱い体系の文脈でも用いられるもので、φ の**コード**などと呼ばれる。これを使えば、「理論 T は無矛盾である」ことを表す論理式 $\mathrm{Con}(T)$ は次のように書ける：

$$\mathrm{Con}(T) :\equiv \neg\mathrm{Pr}_T(\perp).$$

以上のように、証明可能性や無矛盾性は T の中で表現できる。また、超限帰納法を使うことで「M が論理式 φ を満たす」ことを表す論理式 $M \vDash T$ も ZFC の中で定式化できる。

演習 4.7. 自分で選んだ「論理式」の定義を使って、ZFC において、パラメータ M, T を持つ論理式として $M \vDash T$ を適当な粒度で書き下してみよ。

さて、特に理論としての ZFC を考えると、この理論に属する公理の形は完全に決まっている。もっと言えば、論理式が与えられたときに、それが ZFC の公理であるかどうかを判定するためのプログラムを書いて、計算機に実行させることができる。

演習 4.8. そんなプログラムを書け。

そのプログラムの判定手続きを翻訳してやれば、「φ は ZFC の公理である」を表す論理式 $\varphi \in \mathrm{ZFC}$ も一本の論理式で書くことができる。これを使えば、$M \vDash \mathrm{ZFC}$ を表す論理式も次のように一本の論理式で書くことができる：

$$M \vDash \mathrm{ZFC} :\equiv \forall\varphi \in \mathrm{ZFC}\ \ M \vDash \varphi.$$

このようにして、ZFC の内部で理論 T の無矛盾性 $\mathrm{Con}(T)$ や、「T がモデルを持つ」$\exists M\ \ M \vDash T$ といったことを定式化することができる。また、論理式に対してやったように、証明図 P に対して ZFC 内部の対応するコード $\ulcorner P\urcorner$ なども考えてやることができるし、このコード化はメタ世界での「証明図である」「独立である」といった関係を保つようになっている（そのように定式化できる）。

特に、ZFC のモデル M が与えられたとき、論理式や証明図のコードを M で解釈してやれば、**我々の世界における証明可能性の世界のうつし身が、そのまま M の中でも再現される**ことになる。しかし、逆に **M における個別の論理式や証明図に対応するものがメタレベルに必ず存在するとは限らない**。

どういうことだろうか？ まず、可算言語の論理式の全体は可算個である（定義 3.8）。特に、ZFC の言語は $\in$ のみを持つ言語であり、その論理式は可算個で、特に ω との間に全単射が存在する。一方で、超準解析の節 ? で見たように、超冪などをとってやることで「超準的な」「無限大の」自然数が存在するようなモデルがとれる。このようなモデルの ω は、我々の知っているものとは異なる自然数をも含んでいるわけである。すると、ω と論理式の間の全単射から、この世界にはメタ世界に存在しない論理式が存在することになる。

特に、ZFC の公理系は有限公理化不可能であり、可算無限個の公理を持つ。とくに置換公理は任意の ZF- 論理式に対してその像が集合である、ということを主張している。そのため、超準自然数を持つような ZFC のモデルは、**「その内側でみた ZFC」は我々の知らない論理式についての置換公理を無数に持つ**。もちろん、その公

理系の中には「標準的」なメタレベルの公理は全て含まれているので、M の中で ZFC のモデル $m \in M$ を更に見付けてきた場合、個別のメタ公理 φ について $M \vDash (m \vDash \ulcorner\varphi\urcorner)$ が成り立つことはわかる。しかし、この m は他にも無数の我々の知らない公理を満たしているのである。

別の例を挙げる。以下 ZFC が無矛盾だとする。すると不完全性定理によれば、ZFC から $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ は証明ができない。特に、系 1.5 より ZFC $+ \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ は無矛盾である。このとき、完全性定理より ZFC $+ \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ のモデル M が存在することになる。つまり、M は「自分は ZFC のモデルだが、ZFC は矛盾しているよ」と信じ込んでいる（！！！）モデルである。いいかえれば、この M の中には ZFC **の公理から出発して $\perp$ に至る「証明図」が存在**する。しかし、今仮定から ZFC は無矛盾なので、この「証明図」は M **の中で見ると有限的だが、外の我々から見ると超有限的な対象**になっているヘンな証明図であり、対応する有限的な対象が我々の世界にはない超準元である。

このように、モデルの取り方によってはその世界には「変な自然数」「変な論理式」「変な証明図」が含まれており、有限概念は一致するとは限らない。特に、$M \vDash$ ZFC や $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ と書いたとき、その**解釈する場所によって実際に公理と見做される範囲は異なる**ことに注意が必要である。我々はメタレバルの世界にある一本の論理式を使ってこうした概念を表現するが、その渡る範囲はモデルによって異なるのである。また、こうした「変な自然数」「変な論理式」「変な証明図」は、我々から見れば「変」であるが、その**モデル自身の中では我々の知っている標準的な対象と全く区別がつかない**ことに注意しよう。不完全性定理を理解したり、集合論的なモデルを往き来する際には、こうした区別を常に意識することが大切である。

4.6 集合論の集合モデルについて

集合論的な議論では、集合論やその部分体系のモデルを頻繁に使う。特に、V_α や $H(\kappa)$ という形の集合が頻繁に使われる：

定義 4.9.

- κ が**基数**（**cardinal**）である $\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ κ は順序数で、任意の $\alpha < \kappa$ について κ から α への単射が存在しない。以下、基数はメタ変数 $\kappa, \lambda, \theta, \ldots$ などで表す。
- 基数 κ が有限 $\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ ある自然数 n が存在し、$\kappa = n$。
- 基数 κ が無限 $\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ κ は有限でない。無限基数の全体を Cd で表す。
- $\mathrm{Cd} \subseteq \mathrm{On}$ であり、特に Cd は $< = \in$ により整列されているので、補題 4.8 により $(\mathrm{Cd}, <) \cong (\mathrm{On}, <)$ となる。補題 4.8 よりこの同型は一意なので、この同型を $\omega_{(-)} = \aleph_{(-)} : \mathrm{On} \to \mathrm{Cd}$ により表す。$\aleph_0 = \omega$ であり、$\aleph_\alpha$ は α 番目の無限基数である。順序数としての性質を強調したかったり、単純にダルかったりする場合 $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$ と書く。
- 順序数 α に対して、α の**後続基数** α^+ を α への単射が存在しない最小の順序数とする。
- 基数 κ が**後続基数**（**successor cardinal**）$\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ $\kappa = \lambda^+$ となるような λ が存在する。
- 無限基数 κ が**極限基数**（**limit cardinal**）$\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ κ は後続順序数でない。
- 無限基数 κ が**強極限基数**（**strongly limit cardinal**）$\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ $\forall \lambda < \kappa\ 2^\lambda < \kappa$.
- 集合 A に入る整列順序の順序型の中で最小の順序数を $|A|$ により表し、A の**基数**とか**濃度**とか呼ぶ。

整列可能定理により、このような $|A|$ は常に存在する。

- 基数 κ の**冪**（**power**）2^κ を次で定める： $2^\kappa := |\mathcal{P}(\kappa)|$。
- Cantor の対角線論法より基数 κ について $\kappa < 2^\kappa$ である。そこで、$\beth$（ベート）- 数を以下で定義する：

$$\beth_0 := \aleph_0, \qquad \beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha}, \qquad \beth_\gamma = \sup_{\alpha<\gamma} \beth_\alpha.$$

- 基数 κ について、x が**遺伝的** κ- **未満集合**（**hereditarily** $< \kappa$）$\overset{\text{def}}{\iff} |\mathrm{trcl}(x)| < \kappa$. 遺伝的 κ- 未満集合の全体を $H(\kappa)$ で表す。特に、$\mathrm{HF} = H(\omega)$ と書き、HF の元を**遺伝的有限集合**と呼ぶ。

注意 4.6.

1. 任意の順序数 α について、その後者 α^+ は基数である。
2. 任意の集合 A について、$|A|$ は基数である。
3. 無限基数 κ が後続基数 $\iff \exists\alpha\ \ \kappa = \aleph_{\alpha+1}$.
4. 無限基数 κ が極限基数 $\iff \exists\gamma$: limit ordinal $\ \kappa = \aleph_\gamma$.
5. $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$ であり、内包公理より $H(\kappa)$ は集合である。
6. 基数 κ が強極限 $\iff H(\kappa) = V_\kappa$.

基数の性質として大変重要なのが、次の共終数と正則性である：

定義 4.10.

1. 順序数 α の**共終数**（**cofinality**）$\mathrm{cf}\,\alpha$ を次で定める：

$$\mathrm{cf}\,\alpha := \min\{\, \mathrm{otp}(X) \mid X \subseteq \alpha \wedge \sup X = \alpha \,\}.$$

   直感的には、$\mathrm{cf}\,\alpha$ は α を近似できるような最短の単調増大列の長さである。

2. 無限基数 κ が**正則** $\overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{cf}\,\kappa = \kappa$.
3. 無限基数 κ が**特異** $\overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{cf}\,\kappa < \kappa$.
4. 無限基数 $\kappa > \omega$ が**弱到達不能**（**weakly inaccessible**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ κ は正則かつ極限基数。
5. 無限基数 $\kappa > \omega$ が**（強）到達不能**（**(strongly) inaccessible**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ κ は正則かつ**強**極限基数。

注意 4.7.

1. 任意の順序数 α について、$\mathrm{cf}\,\alpha \le \alpha$.
2. 任意の順序数 α について、$\mathrm{cf}\,\alpha$ は基数。

以上の準備の下で、宇宙の切片が ZFC の部分体系の集合モデルとなることがいえる。

例 4.1. ZFC を仮定する。このとき、宇宙の途中の階層は様々な弱い（あるいは十分強い）集合論のモデルとなる：

1. $V_\omega = \mathrm{HF} = H(\omega) \vDash \mathrm{ZFC} - \mathrm{Infinity}$
2. $\gamma > \omega$ が極限順序数のとき、$V_\gamma \vDash \mathrm{ZC}$。とくに、$V_{\omega+\omega} \vDash \mathrm{ZC}$

3. κ が正則基数のとき、$H(\kappa) \models \mathrm{ZFC} - \mathrm{Power}$
4. κ が強極限基数のとき、$H(\kappa) = V_\kappa \models \mathrm{ZFC} - \mathrm{Replace}$
5. 特に κ が到達不能基数のとき、$H(\kappa) = V_\kappa \models \mathrm{ZFC}.$
6. また、κ が弱到達不能 $\Longrightarrow L_\kappa \models \mathrm{ZFC}.$

$H(\kappa)$ を集合論のモデルと見做したとき、だいたいにおいて冪集合公理と置換公理は交換条件の関係にあると思えばよい。

演習 4.9. κ が到達不能基数であることは、$V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$ となる κ の存在よりも遥かに強い性質である。この事を見るために、次を示せ：

1. κ が到達不能基数であるとき、$V_\lambda \models \mathrm{ZFC}$ となるような基数 λ は非有界に存在することを示せ。つまり、κ 未満で ZFC のモデルとなるような基数が大量に存在するということである。
2. 基数 κ が到達不能基数である $\iff V_\kappa = H(\kappa)$ かつ $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$ が成り立つことを示せ。

4.7 論理式の相対化による相対無矛盾性証明、クラスモデルと集合モデル

本セミナーの目的は、強制法による相対無矛盾性証明の手法を学ぶことであった。ここでは、無矛盾性証明に関連する構文的・意味論的な概念を議論する。また、集合論のジャーゴンで「クラスモデル」と呼ばれるものが厳密には何であるのかも併せて説明する。

まずは構文的な相対的無矛盾性を定義しておく。

定義 4.11. 以下、T を $\mathcal{L}$- 理論、S を $\mathcal{L}'$- 理論とする。

1. S が T に対して**相対的に無矛盾**（**consistent relative to** T、ここだけの記号：$S \leq_{\mathrm{Con}} T$）$\overset{\mathrm{def}}{\iff}$「$S$ から矛盾に至る証明図」が与えられたときに、「T から矛盾に至る証明図」へと書き換える計算可能な手続きが存在する。
2. S と T が**無矛盾性等価**（**equiconsistent**、ここだけの記号 $S \sim T$）$\overset{\mathrm{def}}{\iff} S \leq_{\mathrm{Con}} T$ かつ $T \leq_{\mathrm{Con}} S$。
3. T が S よりも**無矛盾性の意味で真に強い**（記号：$S < T$）$\overset{\mathrm{def}}{\iff} S \leq_{\mathrm{Con}} T$ かつ $T \not\leq_{\mathrm{Con}} S$。

気持ちとしては、T が無矛盾であるのなら S も無矛盾であるとき、S は T に対して相対的に無矛盾である、と思っている。

注意 4.8. ここで、「$\leq_{\mathrm{Con}}$」の定義は「計算可能」をどういう意味で取るかの任意性があり、実はややインフォーマルである。大事なことは、そうした証明図の変形が、ZF や PA のような**超越的な操作を許す強い理論を仮定せず**に、計算機や人間の手で（時間を気にしなければ）**具体的・機械的に計算可能**である程度の十分弱い仮定の下で行えることである。さもなくば、たとえば ZFC から PA の無矛盾性を証明したいのに、その証明で ZFC を仮定するので全部自明になってしまう、というようなことが起きる。わかるひと向けに書いておくと、だいたい原始再帰性（ループの長さに制限のある再帰関数）程度の強さがあれば十分である。

定義から $\leq_{\mathrm{Con}}$ は擬順序である：

補題 4.11. $\leq_{\text{Con}}$ は擬順序である。つまり、$\leq_{\text{Con}}$ は反射律と推移律を満たす。反対称律は成り立たない。

さて、これまで見てきたように、Peano 算術や集合論のように、十分強い体系の内部では「形式的証明」などといった概念が定義でき、特に「理論 T は無矛盾である」ことを表す論理式 $\mathrm{Con}(T)$ を書き下すことができるのであった。そこで、次のような無矛盾性の「強さ」を考えることもできる：

定義 4.12. 理論 T が理論 S よりも**証明論的に真に強い**（ここだけの記号：$S \prec_{\text{Con}} T$）$\overset{\text{def}}{\iff} T \vdash \mathrm{Con}(S)$。

相対無矛盾性 $S \leq_{\text{Con}} T$ は T の表現力が強くなくとも、証明図のレベルで議論することができたが、証明論的強さ $S \prec_{\text{Con}} T$ は T の表現力が十分強くないと意味を成さないことに注意しよう。さて、$\leq_{\text{Con}}$ と $\prec_{\text{Con}}$ という二つの強さが定義されたが、これらの関係はどうだろうか？ $\prec_{\text{Con}}$ から $\leq_{\text{Con}}$ が出ることはすぐにわかる：

補題 4.12. $S \prec_{\text{Con}} T$ ならば $S \leq_{\text{Con}} T$ である。

証明 $S \prec_{\text{Con}} T$ とし、$S \vdash \bot$ の証明図が存在したとする。T は十分強いので、この証明図を T の中で解釈でき、特に $T \vdash \neg\mathrm{Con}(S)$ が成り立つ。よって $T \vdash \mathrm{Con}(S)$ かつ $T \vdash \neg\mathrm{Con}(S)$ となり、結局 $T \vdash \bot$ となる。 □

逆にまた、後に扱う Gödel の不完全性定理は T から $\mathrm{Con}(T)$ は証明できないということを主張している。これを認めれば、次が言える：

補題 4.13. 以下、T, T' を十分強い理論とする。

1. $\prec_{\text{Con}}$ は非反射的：$T \not\prec_{\text{Con}} T$。以下、$S \preccurlyeq_{\text{Con}} T \overset{\text{def}}{\iff} S = T \vee S \prec_{\text{Con}} T$ と書く。
2. $S \leq_{\text{Con}} T$ だが $S \not\preccurlyeq_{\text{Con}} T$ となる例が存在する。
3. $S \leq_{\text{Con}} T \prec_{\text{Con}} T' \Longrightarrow S \prec_{\text{Con}} T'$
4. $S \prec_{\text{Con}} T \Longrightarrow T \not\leq_{\text{Con}} S$。とくに $S \prec_{\text{Con}} T \Longrightarrow S <_{\text{Con}} T$。

証明

1. Gödel の不完全性定理そのもの。
2. $S = \mathrm{ZFC}, T = \mathrm{ZF}$ とすると、そもそも $S \sim T$ であるが、$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ なら当然 $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZF})$ となってしまい、不完全性定理に反する。
3. T' は十分強いので、$S \leq_{\text{Con}} T$ の証拠となる、「S の矛盾を T の矛盾に変換する」手続きが T' の中で定式化できる。こいつを使ってやれば、$\mathrm{Con}(T)$ の証明から $\mathrm{Con}(S)$ の証明を作ることができるので、結局 $T' \vdash \mathrm{Con}(S)$ となる。
4. $T \leq_{\text{Con}} S \prec_{\text{Con}} T$ とすると、(3) より $T \prec_{\text{Con}} T$ となり (1) に反する。

□

さて、完全性定理をもういちど ZFC の中で解釈をしてやれば、$\mathrm{Con}(T)$ であることと、$M \vDash T$ となる集合 M が存在することは同値であった。よって、特に $T \prec_{\text{Con}} \mathrm{ZFC}$ を示す際には、T の集合モデル M の存在が

ZFC で証明できればよい[12]。また、 補題 4.13 より T を ZFC を含むような理論とするとき、$T \vdash \exists M \vDash S$ が言えれば、T は S よりも無矛盾性の意味で真に強いこと（$S < T$）がわかる。

例 4.2.

1. PA $\prec_{\mathrm{Con}}$ ZF ($\mathbb{N} \vDash$ PA なので)
2. ZFC $\prec_{\mathrm{Con}}$ ZFC $+ \exists\kappa$：到達不能基数

さて、 それでは集合モデルを構成する以外に $S \leq_{\mathrm{Con}} T$ を示す方法はあるだろうか？そのための道具が**相対化**と呼ばれる構文論的な書き換えの手法である：

定義 4.13（論理式の相対化). A をクラス、E を A 上の二項関係、φ を $\mathcal{L}_{\in}(A)$- 論理式とする。 このとき、新たな論理式 $\varphi^{(A,E)}$ を以下のようにメタレベルの帰納法で定める：

$$(x = y)^{(A,E)} :\equiv x = y, \qquad (x \in y)^{(A,E)} :\equiv x \; E \; y$$
$$\bot^{(A,E)} :\equiv \bot, \qquad (\varphi \to \psi)^{(A,E)} :\equiv \varphi^{(A,E)} \to \psi^{(A,E)}$$
$$(\exists x \;\; \varphi)^{(A,E)} :\equiv \exists x \left[x \in A \wedge \varphi^{(A,E)}\right]$$

特に、E が通常の所属関係 $\in$ のとき、$\varphi^{A} :\equiv \varphi^{(A,\in)}$ と書く。

この相対化の操作は、より一般の**論理式の翻訳**および**理論の解釈**の特別な場合である：

定義 4.14（言語の翻訳). $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ をそれぞれ関数・定数記号を持たない言語とする。$\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}'$ への**翻訳**（**translation of $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}'$**）t は、次から成るものである：

1. 定義域を定める 1 変数論理式 $\delta^{t}(x)$。
2. $\mathcal{L}$ の述語記号 $R^{(k)}$ について、k- 変数論理式 $\varphi^{t}_{R}(x_0, \ldots, x_k)$。

このとき、$\mathcal{L}$- 論理式 φ の t による翻訳 φ^{t} を、次のように帰納法により定める：

$$(x = y)^{t} :\equiv x = y, \qquad R^{t}(x_0, \ldots, x_{n-1}) :\equiv \varphi^{t}_{R}(x_0, \ldots, x_{n-1})$$
$$\bot^{t} :\equiv \bot, \qquad (\varphi \to \psi)^{t} :\equiv \varphi^{t} \to \psi^{t}$$
$$(\exists x \;\; \varphi)^{t} :\equiv \exists x \left[\delta^{t}(x) \wedge \varphi^{t}\right]$$

Γ が論理式の集合であるとき、$\Gamma^{t} := \left\{ \varphi^{t} \mid \varphi \in \Gamma \right\}$ と略記する。

クラスというのは一変数論理式を指すジャーゴンであったことを思い出せば、δ がクラスの定義論理式に、$(x, y) \in E$ が $\varphi^{t}_{\in}(x, y)$ に対応するとそれぞれ思えば、確かにこれは翻訳の特別な場合であることがわかる。

演習 4.10. t を $\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}'$ への翻訳とするとき、以下を示せ：

1. $\vdash (\neg\varphi)^{t} \longleftrightarrow \neg(\varphi^{t})$
2. $\vdash (\varphi \wedge \psi)^{t} \longleftrightarrow \left(\varphi^{t} \wedge \psi^{t}\right)$

---

12) 選択公理を認めれば両者は同値であるが、ZF ではどうなのか気になるかもしれない。 これは、Gödel の L では AC が成り立ち特に完全性定理が成り立っていることと、V と L とで $M \vDash T$ の真偽が一致することを利用すれば、ZF でも同値であることがわかる。

3. $\vdash (\varphi \vee \psi)^t \leftrightarrow \left(\varphi^t \vee \psi^t\right)$
4. $\vdash (\forall x\ \varphi)^t \leftrightarrow \forall x \left[\delta^t(x) \to \varphi^t\right]$

定義 4.15 (理論の解釈). T, T' をそれぞれ $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$- 理論とする。

以下を満たす $\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}'$ への翻訳 t を、T の T' での**解釈**（**interpretation in** T'）であるという：

1. 領域の非空性：$T' \vdash \exists x \delta^t(x)$.
2. T の任意の公理 φ について、$T' \vdash \varphi^t$.

注意 4.9. 後に相対無矛盾性と関連づける必要があるので、実際には、条件 (2)「$S \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \varphi^t$」は、この事実が十分弱い体系で証明できる（我々の立場であれば原始再帰でこの S と T の間の証明の対応を具体的に計算できる）必要がある。相対化などででてくる翻訳はあきらかにこうした具体的な変形になっているので、特に問題になることはない。

上の条件 (2) では T の公理が保たれることしか要請していないが、実は (1) で「定義域」δ^t の非空性が保証されていることを使うと、T の任意の帰結が T' でも成り立ち、特に T が T' に対して相対的に無矛盾であることが言える：

定理 4.14 (解釈の演繹定理). t を理論 T の T' への解釈、φ を $\mathcal{L}$- 閉論理式とするとき、

$$T \vdash \varphi \Longrightarrow T' \vdash \varphi^t.$$

系 4.15. 理論 T の T' での解釈が存在するなら、$T \leq_{\mathrm{Con}} T'$。

証明 定理 4.14 で特に $\varphi :\equiv \bot$ とせよ。 □

定理 4.14 の証明には、次の「健全性補題」を使う：

補題 4.16 (翻訳の健全性補題). t を言語 $\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}'$ への翻訳、Γ, Δ を $\mathcal{L}$- 論理式の有限集合で、自由変数が $\bar{u}$ に含まれるもの（つまり $\mathrm{FV}(\Gamma) \cup \mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \bar{u} = \left\{u_0, \ldots, u_{n-1}\right\}$）とする。このとき、次が成立：

$$\Gamma \vdash \Delta \qquad \Longrightarrow \qquad \exists x\ \delta^t(x) \vdash \forall \bar{u}\left[\delta^t(\bar{u}) \to \Gamma^t \to \bigvee \Delta^t\right].$$

ただし、ここで $\delta^t(\bar{u})$ は $\delta^t(u_0) \wedge \cdots \wedge \delta^t(u_{n-1})$ の略記であり、論理式の有限集合 $\Gamma = \left\{\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}\right\}$ について $\Gamma \to \varphi$ は $\psi_0 \to (\psi_1 \to \cdots \to (\psi_{n-1} \to \varphi) \cdots)$ の略記である。

直感的には、自由変数を含む証明図は仮定や結論の枝もふくめて全称化した命題の証明に等しい、という気持ちであり、それが翻訳の定義域 δ^t 上でちゃんと成り立っている、ということである。

一旦 補題 4.16 を認めれば、定理 4.14 は次のように示せる：

定理 4.14 の証明　$T \vdash \varphi$ とする。すると、定義より有限集合 $\varGamma \subseteq T$ が存在し、$\varGamma \vdash \varphi$ となる。また、φ は仮定より閉論理式であり、また T は閉論理式の集合であることから $\varGamma$ もそうである。よって、$\mathrm{FV}(\varGamma) \cup \mathrm{FV}(\varphi) = \emptyset$ となるので、 補題 4.16 で $\bar{u} = \emptyset$ とすれば、次が成り立つ：

$$\exists x\ \ \delta^t(x) \vdash \varGamma^t \to \varphi^t.$$

ここで、 演習 1.2 の規則 $(\to\mathrm{R}^{-1})$ を使えば、

$$\varGamma^t, \exists x\ \ \delta^t(x) \vdash \varphi^t.$$

となる。いま、仮定より $T' \vdash \varGamma^t$ かつ $T' \vdash \exists x\ \ \delta^t(x)$ なので、結局 $T' \vdash \varphi^t$ を得る。 □

残るは 補題 4.16 の証明である。一番非自明なのは、∃R- 規則である。 気持ちとしては、$\varGamma \vdash\ \varDelta, \exists v\varphi$ から一段戻って $\varGamma \vdash\ \varDelta, \varphi\left[\begin{smallmatrix} v \\ x \end{smallmatrix}\right]$ を考えると、定義域の条件 $\delta^t(x)$ を仮定にもった全称命題が生えてくるので、翻訳の定義域の非空性条件 $\exists x\ \ \delta^t(x)$ の証拠となるような x を食わせてやればよい、 というものである。 出現条件を考えるともうちょっと複雑になるが、それを形式的に書き下したのが以下の証明である：

補題 4.16 の証明　$\bar{u}$ に対する全称量化を保ったまま、証明図の段数に関する帰納法で示す。最後に使われた推論規則について場合分けしていく。

公理についてはやるだけ。$(\to\mathrm{L}, \mathrm{R})$ も翻訳が含意と可換であることから明らかである。$(\exists\mathrm{L})$ については、固有変数条件がついていることに注意すれば、あとは純粋に論理的な同値変形で示せる。

トリッキーなのは $(\exists\mathrm{R})$ の場合である。 ここで、 述語記号のみを持つ言語だけを叶えているので、 ありうる L- 項は単独の変数のみであることに注意すれば、以下のような T での証明図だけ考慮すればよい：

$$\frac{\varGamma \vdash\ \varDelta, \varphi\left[\begin{smallmatrix} v \\ x \end{smallmatrix}\right]}{\varGamma \vdash\ \varDelta, \exists v\varphi}\ (\exists\mathrm{R})$$

一般の言語の場合は x ではなく項 τ を考える必要がある。 目標は、$\mathrm{FV}(\varGamma, \varDelta, \exists v\varphi)\ \subseteq\ \bar{u}_0$ として、 以下を示すことである：

$$\exists x\ \ \delta^t(x) \vdash \forall \bar{u}_0 \Big[\delta^t(\bar{u}_0) \to \varGamma^t \to \bigvee \varDelta^t \vee \exists v\big(\delta^t(v) \wedge \varphi^t\big)\Big].$$

そこで、$\bar{u} \coloneqq \bar{u}_0 \cup \{x\}$ とおいて、帰納法の仮定を上段の導出 $\varGamma \vdash\ \varDelta, \varphi^t\left[\begin{smallmatrix} v \\ x \end{smallmatrix}\right]$ に適用すれば：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\delta^t(x) \vdash \delta^t(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x\ \ \delta^t(x) \vdash \forall \bar{u}\Big[\delta^t(\bar{u}) \to \varGamma^t \to \bigvee \varDelta^t \vee \varphi^t\left[\begin{smallmatrix} v \\ x \end{smallmatrix}\right]\Big]}{\exists x\ \ \delta^t(x) \vdash \delta^t(\bar{u}) \to \varGamma^t \to \bigvee \varDelta^t \vee \varphi^t\left[\begin{smallmatrix} v \\ x \end{smallmatrix}\right]}\ (\forall\textsc{Elim})}{\varGamma^t, \delta^t(\bar{u}), \exists x\ \ \delta^t(x) \vdash \varDelta^t, \varphi^t\left[\begin{smallmatrix} v \\ x \end{smallmatrix}\right]}\ (\to\mathrm{R}^{-1}, \vee\mathrm{R}^{-1})}{}}{\dfrac{\dfrac{\varGamma^t, \delta^t(\bar{u}), \exists x\ \ \delta^t(x) \vdash \varDelta^t, \big(\delta^t(v) \wedge \varphi^t\big)\left[\begin{smallmatrix} v \\ x \end{smallmatrix}\right]}{\varGamma^t, \delta^t(\bar{u}), \exists x\ \ \delta^t(x) \vdash \varDelta^t, \exists v\ \big(\delta^t(v) \wedge \varphi^t\big)}\ (\exists\mathrm{R})}{\delta^t(\bar{u}), \exists x\ \ \delta^t(x) \vdash \varGamma^t \to \bigvee \varDelta^t \vee \exists v\ \big(\delta^t(v) \wedge \varphi^t\big)}\ (\to\mathrm{R}, \vee\mathrm{R}')}\ (\wedge\ \mathrm{R}, x \in \bar{u})$$

$$\dfrac{\delta^t(\bar{u}), \exists x\ \ \delta^t(x) \vdash \varGamma^t \to \bigvee \varDelta^t \vee \exists v\ \big(\delta^t(v) \wedge \varphi^t\big)}{\delta^t(\bar{u} \setminus \bar{u}_0), \exists x\ \ \delta^t(x) \vdash \forall \bar{u}_0\Big[\delta^t(\bar{u}_0) \to \varGamma^t \to \bigvee \varDelta^t \vee \exists v\ \big(\delta^t(v) \wedge \varphi^t\big)\Big]}\ (\bar{u} = \bar{u}_0 \cup \{v\};\ \to\mathrm{R};\ \forall\mathrm{R})$$

最後の変形は $\bar{u}_0$ が右辺に一切現れず、 固有変数条件が満たされていることに注意する。 ここで、$\bar{u}_0\ =\ \bar{u}$ ならば $\delta^t(\bar{u} \setminus \bar{u}_0)$ の 節は空となるから、証明は完了している。そうでない場合、定義より $\bar{u}_0 \setminus \bar{u} = \{x\}$ である。

このとき、上の証明図の最下段で x は $\delta^t(x)$ 以外の論理式に自由に現れないので、

$$\dfrac{\dfrac{\delta^t(x), \exists x\ \delta^t(x) \vdash \forall \bar{u}_0 \left[\delta^t(\bar{u}_0) \to \Gamma^t \to \bigvee \Delta^t \vee \exists v\ \left(\delta^t(v) \wedge \varphi^t\right)\right]}{\exists x\ \delta^t(x), \exists x\ \delta^t(x) \vdash \forall \bar{u}_0 \left[\delta^t(\bar{u}_0) \to \Gamma^t \to \bigvee \Delta^t \vee \exists v\ \left(\delta^t(v) \wedge \varphi^t\right)\right]}\,(\exists \mathrm{L})}{\exists x\ \delta^t(x) \vdash \forall \bar{u}_0 \left[\delta^t(\bar{u}_0) \to \Gamma^t \to \bigvee \Delta^t \vee \exists v\ \left(\delta^t(v) \wedge \varphi^t\right)\right]}$$

よって示された。 □

演習 4.11. 欠けている証明を補い、 補題 4.16 の証明を完成させよ。

演習 4.12. 集合論の相対無矛盾性証明では、上の議論で十分である。一方で、Peano 算術で整数や有理数の理論を解釈しようと思うと、これだけでは足りない。そこで以下の場合を考えてみよ。

1. 言語が関数記号・定数記号を持つ場合の翻訳・解釈の定義も考えてみよ（ヒント：関数記号 f について「$x = f(\bar{u})$」に対応する論理式 $\psi_f^t(x, \bar{u})$ を要求し、論理式の解釈については、「定義による拡張」と似た手続きを踏む)。
2. 関数記号・定数記号を持つ場合の 補題 4.16 を証明せよ（ヒント：上で解釈を定義する際に、項 t について $\delta^t(\mathrm{FV}(t)) \implies \delta^t(t)$ となるようにしておく)。
3. δ が 2- 変数以上の変数を持つ場合も考えてみよ。

以上から、T を ZFC を含む理論としたとき、別の理論 Γ の T に対する相対無矛盾性を示すには、M への相対化が Γ から T への翻訳となるような空でないクラス M を見付ければよいことになる。典型的には、Gödel の L による AC の ZF に対する相対無矛盾性や、強制法がこの例にあたる。

例 4.3.

1. ZF $\sim$ ZF $-$ Foundation (補題 4.9)
2. ZF + AC $\leq_{\mathrm{Con}}$ ZF (Gödel の L)
3. ZF + $\neg$AC $\leq_{\mathrm{Con}}$ ZF + AC (置換モデル、対称モデル)
4. ZF + DC + 任意の実数の集合が Lebesgue 可測 $\sim$ ZFC + $\exists\kappa$：到達不能基数 (Solovay, Shelah)

さて、L などの相対化による無矛盾性証明は、 第一義的には論理式の機械的な書き換えによって得られるものであった。 しかし、L などの中では十分強い集合論が成り立っているので、 クラスを渡るような変数の量化ができないということさえ気をつければ、 クラスもモデルだと思って扱うことが集合論では慣習として行われている。こうした状況を表すジャーゴンの定義は次のようになる：

定義 4.16. 以下、φ をメタレベルの $\mathcal{L}_\in$- 論理式、Γ, T をメタレベルの公理系、M をクラスとする。

1. Γ の下で (M, E) が論理式 φ の**クラスモデル**である $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\Gamma \vdash \varphi^{(M,E)}$.
2. Γ の下で (M, E) が理論 T の**クラスモデル**である $\overset{\text{def}}{\iff}$ T の任意の公理 φ について $\Gamma \vdash \varphi^{(M,E)}$.

$\Gamma =$ ZFC の場合など、文脈から明らかな場合「Γ の下で」はしばしば省略される。

注意 4.10. 上述の通り、あくまでも「クラスモデル」は証明体系を外から眺めたときに判断できることである。たとえば、ZF の下で Gödel の L というクラスは ZF + AC のモデルとなるが、これはあくまで我々の知っている ZF + AC の個別の公理の相対化が ZF で証明できる、という状況であり、いわば論理式の書き換えを通して見ると V の内側にあたかも ZFC が成り立っているようなスノードームができているかのように見える、という状態である。この状態は議論をしている個別の ZF のモデル自身では自覚できない。

また、論理式に関する「クラスモデル」関係は個別の一個の論理式の相対化を扱っているのでまだわかりやすいが、**公理系に関する**「クラスモデル」については注意を要する。というのも、上で注意したように、我々の知っている ZFC の公理と、個別の集合論のモデルで定式化された ZFC の公理の全体は必ずしも一致するとは限らないからである。特に、超準自然数を含むような ZFC のモデルを考えれば、この世界には我々から見ると「無限」に見えるような超有限の論理式 φ があり、特にこのモデルでの ZFC の公理系はそんな我々の知らない φ についての置換公理や内包公理を含んでいる。上の「定義」での「クラスモデル」はあくまでも我々の知る ZFC の公理の相対化だけを考えているものであり、クラス M が ZFC のクラスモデルであるからといって、その M が外側のモデルが ZFC の公理だと思っているもの全てを満たしている保証はないのである。

さて、クラスというのは論理式によって定義できる集まりであり、特に集合もクラスと見做せるのであった。この場合、個別の論理式 φ については「$\vDash$」関係を ZFC 内で再定式化したものと、ZFC で φ^M が証明できることは同値であり、この意味で相対化による読み替えはある意味で「モデル」の一般化と見做すことができる：

補題 4.17. φ を $\mathcal{L}_\in$- 論理式とするとき、

$$\mathrm{ZFC} \vdash \forall (M, E)\ \left[\varphi^{(M,E)} \longleftrightarrow (M, E) \vDash \ulcorner \varphi \urcorner\right]$$

注意 4.11. ここで、上の補題は単一の補題ではなく、φ を決めるごとに個別の代入例が定まる補題図式とでもいうべきものである。置換公理や分出公理が単一の公理ではないのと同様である。特に、$\varphi^{(M,E)}$ や $\ulcorner \varphi \urcorner$ の部分は φ ごとにメタレベルで具体的に書き下されたものが入る、という主張であり、これらの変形がオブジェクトレベルでなされているのではないことに注意が必要である。

演習 4.13. 上を示せ。

注意 4.12. M が集合であったとしても、公理系に関する $\vDash$ と相対化の真偽は必ずしも一致するとは限らないことに注意せよ。

5 不完全性定理と Tarski の真理定義不可能性定理

本節では、数理論理学の基本定理の一つであり、強制法による独立性証明の拠って立つところともいえる **Gödel の第二不完全性定理**と、第零不完全性定理とも呼ばれることのある **Tarski の真理定義不可能性定理**を扱

う。Tarski の定理については強制法の基礎理論というよりは、強制法の理論を構築し使っていく上で、メタレベルとオブジェクトレベルの区別が重要であることを示唆する定理として理解できる。

不完全性定理については、そのキャッチーさからさまざまな良書がおおいが、一般形を示すには非常に慎重な証明が要されるため、分量が長くなりがちである。そこで本章では、対象を ZF を含むような理論のみに限定し、完全性定理を適用して意味論的な議論を経由することで簡潔な証明を与えることを目標とする。強制法を用いる上では、これがあれば十分である。

5.1 Tarski の真理定義不可能性定理

不完全性定理の証明を見る前に、そのエッセンスを感じることのできる次の Tarski による**真理定義不可能性定理**について見てゆく。Tarski の定理はしばしば**第零不完全性定理**と呼ばれることもある重要な結果である：

定理 5.1 (Tarski の真理定義不可能性定理). T をペアノ算術 PA を含む再帰的で無矛盾な理論とする。このとき、T からは T 自身の真理述語 $\mathrm{Tr}_T(x)$ を定義できない。即ち、任意の φ について次を満たすような単一の論理式 $\mathrm{Tr}_T(x)$ は存在しない：

$$T \vdash \mathrm{Tr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \longleftrightarrow \varphi.$$

不完全性定理と同様、この定理の証明にはつぎの**対角化定理**が本質的な役割を果す：

補題 5.2 (対角化定理または不動点定理). T を PA を含む理論とする。このとき、任意の $\mathit{\Phi}$- 論理式 $\mathit{\Phi}$ に対して、閉論理式 δ で以下が成り立つものが存在する：

$$T \vdash \delta \longleftrightarrow \mathit{\Phi}(\ulcorner \delta \urcorner)$$

本来、フルの不完全性定理や Tarski の定理に使おうと思う場合、途中で現れる関数などの原始再帰性（弱い計算可能性）などについて大きな注意を払わなければならない。しかし、我々は専ら ZF を拡張するような理論のみについて考えれば十分なため、PA ではなく ZF **を含む理論に限定し諸々の確認をサボって証明する**ことにする。証明のエッセンス自体は変わらないので、詳細を知りたい場合は参考文献 [6–8] などをあたられたい。

対角化定理の証明　関数 $s : V \times V \to V$を「論理式への変数の代入」に相当するような関数とする：

$$s(a, b) := \begin{cases} \ulcorner \psi(b) \urcorner & (\text{if } a = \ulcorner \psi(x) \urcorner \ \text{ for some unary } \psi(x)) \\ \emptyset & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

a が自由変数を一つだけ持つ論理式のとき、その変数に b を代入するわけである。

そこで、新たに一変数の論理式 $\gamma(x) :\equiv \mathit{\Phi}(s(x, x))$ を考える。s は言語に関数記号が入っているわけではないが、ZF で定義できる関数であり Tでも定義できる。特に $z = s(x, y)$ に相当する論理式が書けるので、定義による拡張（補題 1.6）により以下のように同値な書き換えができることに注意しよう：

$$\gamma(x) :\equiv \forall z \ [z = s(x, x) \to \mathit{\Phi}(z)]$$

ここで、更に $d := \ulcorner \gamma(x) \urcorner$ と置くと、s の定義から $s(d, d) = \ulcorner \gamma(d) \urcorner$ となる。これらの論理式は全て書き下せるので ZF の定理であり、$\mathrm{ZFC} \vdash s(d, d) = \ulcorner \gamma(d) \urcorner$ である。よって、これを $\mathit{\Phi}$ に代入すれば（等号公理）：

$$\mathrm{ZF} \vdash \mathit{\Phi}(s(d, d)) \longleftrightarrow \mathit{\Phi}(\ulcorner \gamma(d) \urcorner)$$

を得る。いま、$\gamma(x) \equiv \Phi(s(x,x))$ としていたので、$\delta :\equiv \gamma(d)$ とおけば：

$$T \vdash \delta \longleftrightarrow \Phi(\ulcorner\delta\urcorner)$$

となり、これが求める δ である。 □

これさえ示せれば、Tarski の定理の証明は簡単である：

定理 5.1 の証明 どのように論理式 $\Phi(x)$ をとっても、それは真理述語になりえないことを示す。そこで、$\neg\Phi(x)$ に対角化定理を適用すると、次を満たす論理式 δ が存在する：

$$T \vdash \delta \longleftrightarrow \neg\Phi(\ulcorner\delta\urcorner).$$

今 T は無矛盾だとしていたので、δ については $T \nvdash \Phi(\ulcorner\delta\urcorner) \longleftrightarrow \delta$ でなくてはならず、真理述語にならない。 □

予告したように、強制法では様々な拡張モデル上での「真偽値」$[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}}$ を定義する。この「真偽値」は**メタレベルでの帰納法**で構成される。特に、V**内部で** φ **の関数として存在するのではなく**、φ ごとに別々の関数として定義され、それを**メタレベルから眺めて同じ記号を使って表している**にすぎない。

これは V で定義する方法が見付かっていないのではなく、**原理的に** V **の中で斉一的に定義はできない**というのが、真理定義不可能性定理の教えるところである。なぜなら、$\mathbb{B} = 2$ と二値 Boole 代数をとると、$V^2 \cong V$ となるので、$[\![\varphi]\!]_2 = 1 \iff V \vDash \varphi$ となる。よって、もし $[\![-]\!]_{\mathbb{B}}$ が一般に関数として定義できてしまうと、これを使って ZFC の真理述語が定義できてしまうことになり、Tarski の真理定義不可能性 定理 5.1 に矛盾する。

このように、強制法を使う上では、定義がオブジェクトレベルなのかメタレベルなのかを明確に区別しないと、容易に矛盾に陥っ（たような気分になっ）てしまうので注意が必要である。

5.2 ZFC に対する不完全性定理

本節の主題は、次の Gödel の第二不完全性定理である：

定理 5.3 (Gödel の第二不完全性定理). T をペアノ算術 PA を含む再帰的で無矛盾な理論とする。このとき、T からは $\mathrm{Con}(T)$ を証明できない。

注意 5.1. よく通俗的理解では不完全性定理は「理性の限界」を示したという解説のされかたをするが、これは現代の数理論理学を研究する者から見ると些か的外れな理解である。Gödel の不完全性定理が教えるのは、十分に強い理論は無矛盾性の強さによって階層を成す、という事である。階層を成すのであれば、それを分類したくなるのが数学者の性である。Gödel の不完全性定理は、「理性の限界」などというネガティヴな事項を示したのではなく、理論たちの成す豊穣な階層が存在するということを示したポジティヴな定理なのである [要出典]。

通常、第二不完全性定理は次の第一不完全性定理を T の中で再度定式化することで得られる：

定理 5.4 (Gödel の第一不完全性定理). T をペアノ算術 PA を含む再帰的で無矛盾な理論とすると、T からは否定も肯定も証明できない独立命題が存在する。

これらの定理の偉いところは、メタ理論として十分弱い理論を採用しても証明できるところである。

しかし、強制法による集合論的な命題の無矛盾性証明においては ZF の無矛盾性は仮定され、完全性定理から無矛盾性について考える上ではモデルの存在のみを考えればよい。特に、第二不完全性定理を証明するのに、第一不完全性定理の再形式化を考える必要はなく、 意味論的な議論により簡略に証明することができる。 また、十分強い ZF 以上の集合論を考えているため、Gödel 数化などの技術的な道具を使ったり、 対応の原始再帰性のような細かい条件を気にする必要もなくなる。 議論は概ね Woodin によるもの（の渕野 [6] による説明）に従う。我々が目標とするのは、次の定理である：

定理 5.5 (不完全性定理、ZF 版). T が ZF を拡張する無矛盾な理論とすると、$T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ である。

以下、簡単のため $T = \mathrm{ZFC}$ とするが、以下では本質的には選択公理を使っておらず、また同じ議論が ZF を含む理論にも適用できる。

PA の場合の証明よりは簡潔だが、 三重くらいにメタとオブジェクトを往き来するので細部を追っていると迷ってしまう。なので最初に証明の気持ちを標語的に示しておく：

1. **$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ を仮定するとどこからはじめても極小な ZFC のモデル M に辿りつく。**
2. **極小性よりそんな M の中には ZFC のモデルは一個もいない。**
3. **すると完全性定理から $M \models \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ となる。**
4. **$M \models \mathrm{ZFC}$ なので、$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ としてしまうと矛盾！**

では証明に入ろう。ZFC 版不完全性定理は、次の補題の系として得られる：

補題 5.6. $\mathrm{ZFC} \vdash [\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \exists M \models \mathrm{ZFC}\ \ M \models \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})]$

Proof of Incompleteness Theorem ZFC で作業する。$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ とする。 すると、 上の補題より $\mathrm{ZFC} \vdash [\exists M \models \mathrm{ZFC}\ \ M \models \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})]$ となる。そこで、そのようなモデル $M \models \mathrm{ZFC} \land \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ を取る。このとき、メタレベルで ZFC からの $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ 証明 P を考えると、M は ZFC のモデルであることから、$M \models [\ulcorner P \urcorner$は $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ の証明$]$ となる。よって $M \models \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ となるが、これは矛盾である。 □

以下、Vで作業をする。$(M, E) \models \mathrm{ZFC}$ となるようなモデル (M, E) を一個固定する。このとき、M の中で更に $\mathcal{L}_\in$- 構造に見えているような (m, e) を取る操作を考える。$m, e \in M$ ではあるが、(M, E) は $\mathcal{L}_\in$- 構造であることだけしかわかっておらず、E と $\in$ は一般に一致しないので、 この m, e をそのまま使っても、Vでそのまま $\mathcal{L}_\in$- 構造になっているとは限らない。

そこで、「モデルの中のモデル」を外側で扱うための道具を考える。

定義 5.1. $m, e \in M$ が $(M, E) \models [(m, e) : \mathcal{L}_\in$- 構造$]$ となっているとする。この時、(m^*, e^*) を次で定める：

$$m^* := \{\, x \in M \mid x\ E\ m \,\}, \qquad e^* := \{\, (x, y) \in m^* \times m^* \mid (M, E) \models x\ e\ y \,\}$$

これは明らかに $\mathcal{L}_\in$- 構造である。更に、Vで見た (m^*, e^*) の真偽と M で見た (m, e) の真偽が一致することがいえる。特に、このことが ZFC から証明できる：

補題 5.7. 次が成り立つ：

$$\mathrm{ZFC} \vdash \forall \langle M,E\rangle \vDash \mathrm{ZFC}\ \forall m,e \in M\ \forall \varphi(\bar{x}) \in \mathrm{Fml}\ \forall \bar{a} \in M$$
$$[(\langle M,E\rangle \vDash \bar{a} \in m) \to \{[\langle M,E\rangle \vDash (\langle m,e\rangle \vDash \varphi(\bar{a}))] \longleftrightarrow \langle m^*,e^*\rangle \vDash \varphi(\bar{a})\}].$$

演習 5.1. 上の補題を論理式の複雑性に関する帰納法で示せ。

上の補題により、入れ子構造になったモデルから外側にモデルを持ってくることができるようになる。

次に重要な概念は、ホンモノの一階論理式 $\Phi(x)$ の**遺伝性**である。$\Phi(x)$ が遺伝的であるとは、$\Phi(x)$ を満たすような構造は（その解釈されている宇宙でみた）ZFC のモデルとなり、$\Phi(M)$ を満たす M の中で見て $\Phi(m)$ を満たす $m \in M$ があれば、それを V に引き戻してきた m^* も $\Phi(m^*)$ を満たす、ということである。

定義 5.2. メタレベルの $\mathcal{L}_\in$- 論理式 $\Phi(x)$ が**遺伝的（hereditary）**であるとは、次を満たすときである：

$$\mathrm{ZFC} \vdash \forall M\ [\Phi(M) \to M \vDash \mathrm{ZFC}]$$
$$\wedge\ \forall M\ \forall m \in M\ [\Phi(M) \to (M \vDash \Phi(m)) \to \Phi(m^*)].$$

定義と 補題 5.7 より、$M \vDash$ ZFC を含意するような任意の一階の性質 $\varphi(x)$ は遺伝的であることがわかる。特に、$M \vDash$ ZFC 自身は遺伝的である。次の補題は、**遺伝的な性質は内側に潜っていくうちにどこかでずっと偽になるものが見付かる**、換言すれば「**遺伝的な性質を満たすモデルがあれば、その性質について極小なモデルがとれる**」ということ（が個別の φ ごとに ZFC で証明できること）を述べており、 補題 5.6 を示す鍵となる。証明には対角化定理を使う。

補題 5.8 (Woodin). 遺伝的な論理式 $\Phi(x)$ に対して、次が成り立つ：

$$\mathrm{ZFC} \vdash \forall M[\Phi(M) \to \{(\forall m \in M\ \neg\Phi(m)) \vee \exists m \in M\ (\Phi(m^*) \wedge m^* \vDash \forall n \neg\Phi(n))\}].$$

証明 以下、遺伝的な論理式 $\Phi(x)$ を一つ固定し、Th_Φ を以下で定める：

$$\mathrm{Th}_\Phi := \{\, \varphi \in \mathrm{Sent} \mid \forall N\ [\Phi(N) \to N \vDash \varphi] \,\}.$$

対角化定理を使い、以下を満たす閉論理式 η_Φ を取っておく：

$$\mathrm{ZFC} \vdash \left[\eta_\Phi \longleftrightarrow \ulcorner \neg\eta_\Phi \urcorner \in \mathrm{Th}_\Phi\right]. \tag{3}$$

Claim 1. $\mathrm{ZFC} \vdash \exists N\ [\Phi(N)] \to \exists N\ \left[\Phi(N) \wedge N \vDash \eta_\Phi\right]$.

つまり、$\Phi(N)$ を満たすようなモデルがあるなら、η_Φ も満たすように取り直せる、ということである。このことを見よう。$\Phi(N)$ なる N を取っておく。$N \vDash \eta_\Phi$ となっていればよい。そこで、$N \vDash \neg\eta_\Phi$ としよう。すると、$N \vDash$ ZFC と(3)より $N \vDash \ulcorner \neg\eta_\Phi \urcorner \notin \mathrm{Th}_\Phi$ となる。よって、Th_Φ の定義から $N \vDash \exists n\ [\Phi(n) \wedge n \vDash \eta_\Phi]$ となる。n に対して 補題 5.7 を使えば $n^* \vDash \eta_\Phi$ であり、更に Φ の遺伝性から $\Phi(n^*)$ が成り立つので、これを改めて $N = n^*$ とおけば求めるものである。

更に、主張のような N の中では「至るところ Φ が破れている」あるいは標語的に言えば「Φ について極小である」こともわかる：

Claim 2. $\mathrm{ZFC} \vdash \forall N \left[\Phi(N) \to \left(N \vDash \eta_\Phi\right) \to N \vDash \forall n\ \neg\Phi(n)\right]$

これを見よう。$\Phi(N)$ より $N \vDash \mathrm{ZFC}$ なので、$N \vDash \eta_\Phi$ および(3)から $N \vDash \ulcorner\neg\eta_\Phi\urcorner \in \mathrm{Th}_\Phi$ となる。すると Th_Φ の定義から $N \vDash \forall n\ (\Phi(n) \to n \vDash \neg\eta_\Phi)$ となる。上の Claim 1 より、ここで $\Phi(n)$ なる n があると $n \vDash \eta_\Phi$ となってしまうので、そのような n は存在しない。よって Claim 2 も成立する。

以上で 補題 5.8 の証明の準備は整った。示すべきことは、$\Phi(N)$ なる N をとったときに、$N \vDash \forall n\ \neg\Phi(n)$ が成り立つか、さもなくばさらに内側の $m \in N$ について m^* が Φ について極小なものがとれる、ということである。

$N \vDash \forall n\ \neg\Phi(n)$ ならよいので、$N \vDash \exists n\ \Phi(n)$ とする。このとき、Claim 2 の対偶から、$N \nvDash \eta_\Phi$ となるので、(3)より $N \vDash \ulcorner\neg\eta_\Phi\urcorner \notin \mathrm{Th}_\Phi$ となる。すると、Th_Φ の定義から、$m \in N$ で $N \vDash \Phi(m) \wedge m \vDash \eta_\Phi$ となるものが取れる。すると Φ の遺伝性と 補題 5.7 より、$m^* \vDash \eta_\Phi$ かつ $\Phi(m^*)$ となる。よって Claim 2 より $m^* \vDash \forall n \neg\Phi(n)$ となり、これが示したかったことである。 □

さて、残るは 補題 5.6 、つまり次の証明である：

$$\mathrm{ZFC} \vdash [\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \exists M \vDash \mathrm{ZFC}\ \ M \vDash \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})]$$

証明　完全性定理は ZFC の定理なので、Con(ZFC) とモデル $M \vDash \mathrm{ZFC}$ の存在は同値であることに注意する。特に、$M \vDash \mathrm{ZFC}$ について $M \vDash \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \iff M \vDash \forall n\ \ n \nvDash \mathrm{ZFC}$ である。

補題を示すため $M \vDash \mathrm{ZFC}$ を取り、$\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ のモデルを得たい。ここで $\Phi(x) :\equiv (x \vDash \mathrm{ZFC})$ とおいて 補題 5.8 を適用すると、以下のどちらかが成り立つことがわかる：

1. $M \vDash \forall n (n \nvDash \mathrm{ZFC})$
2. $m \in M$ で $m^* \vDash \mathrm{ZFC}$ かつ $m^* \vDash \forall n\ \ (n \nvDash \mathrm{ZFC})$ となるものが存在する。

上の注意から (1) の場合は M 自身が、(2) の場合は m^* が $\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ を満たすモデルとなる。 □

6 参考文献

第 1 節で触れた証明論的な話題については、 [1–2] を参考にした。 第 2 、 3 節で紹介した意味論的な話題は [9–11] に基づいている。また、コンパクト性定理からの任意濃度の理論に対する完全性定理の証明については Mathoverflow の Kukieła の回答 [12] を直接的に参考にした。 超準解析については、 モデル論的なアプローチは [10] に簡単な概要があり、Keisler [3] は公理論的なアプローチの踏み込んだ教科書である。 また、 執筆にあたって @functional_yy 氏の非公開のノート [13] も参考にした。 第 5 節の不完全性定理や真理定義不可能性定理については、 [6–8, 15, 14, 16] が詳しい。特に、今回紹介した Woodin による第二不完全性定理の意味論的な証明は渕野 [6, 14] を参考にしている。

[1] 古森 雄一 and 小野寛晰 , “現代数理論理学序説 ,” 日本評論社 , 6 2010, ISBN: 978-4-535-78556-4.

[2] 戸次大介 , “数理論理学 ,” 東京大学出版会 , 2012, ISBN: 978-4-13-062915-7.

[3] H. Jerome Keisler, “Foundations of Infinitesimal Caculus”, 2007, URL: `http://www.math.wisc.edu/~keisler/foundations.html`

[4] E. Nelson, “Radically Elementary Probability Theory,” Princeton University Press, 1987, vol. 117, ISBN: 0-691-08474-2.

[5] E. Nelson, “Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, pp. 1165–1165, vol. 83, no. 6, 1977.

[6] 渕野昌 , “Woodin の不完全性定理の証明”. `https://fuchino.ddo.jp/notes/woodin-incmpl.pdf`

[7] 菊池誠 , “不完全性定理 ,” 共立出版 , 2014, ISBN: 978-4-320-11096-0.

[8] 照井一成 , “コンピュータは数学者になれるのか？　数学基礎論から証明とプログラムの理論へ ,” 青土社 , 2015, ISBN: 978-4-7917-6851-6.

[9] 新井敏康 , “数学基礎論 ,” 岩波書店 , 2011, ISBN: 978-4-00-005536-9.

[10] 江田勝哉 , “数理論理学 使い方と考え方：超準解析の入口まで ,” 内田老鶴圃 , 2010, ISBN: 978-4-7536-0151-6.

[11] 青山広 and 愛知非古典論理研究会 , “論理体系と代数モデル ,” 八千代出版 , 2007, ISBN: 978-4-8429-1433-6.

[12] Michał Kukieła, an answer to “In model theory, does compactness easily imply completeness?”, 2010. `https://mathoverflow.net/a/12908`

[13] functional_yy, “超準解析”, 2018, unpublished.

[14] リヒャルト・デデキント and 渕野昌＝訳・解説 , “数とは何か そして何であるべきか ,” 筑摩書房 , 2013, ISBN: 978-4-480-09547-3.

[15] 林晋 and 八杉満利子 , “ゲーデル不完全性定理 ,” 岩波書店 , 2006, ISBN: 4-00-339441-0.

[16] トルケル・フランセーン and 田中一之＝著 , “ゲーデルの定理 利用と誤用の不完全ガイド ,” みすず書房 , 2011, ISBN: 978-4622075691. 原題： Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Use and Abuse..