強制法セミナー第 1 回：数理論理学の初歩

Hiromi ISHII (@mr_konn)

2024-06-23

目次

1　一階述語論理の構文と証明体系

一階述語論理は、予め固定された言語の下で、与えられた集合の元の間の関係を使って記述できるような性質を扱う論理体系である。現代数学は、一階述語論理の下で適切な強さの公理系の集合論[1)]を採用すれば全て展開できることが知られている。

ZF 集合論は一階述語論理で記述される理論であり、集合論では一階述語論理に関する数理論理学の結果を縦横無尽に使う。本稿ではその必要最小限の事実を振り返っておく。まずは、一階述語論理の構文と意味論について簡単に見ていこう。一階述語論理では議論したい理論ごとに言語 $\mathcal{L}$ を固定して議論をする。一階述語論理における言語とは、何が項で何が論理式なのかを確定させるのに必要な記号の集まりである。

本節のより踏み込んだ内容については、証明論寄りの内容は古森・小野 [1] や戸次 [2] を参考にされたい。

定義 1 (一階述語論理の項と論理式).　一階述語論理の言語 $\mathcal{L}$ は次の構成要素から成る：

- 関数記号 $f_0^{(n_0)}, f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots \ (n_i \in \mathbb{N})$
- 関係記号 $R_0^{(m_0)}, R_1^{(m_1)}, R_2^{(m_2)}, \ldots \ (m_i \in \mathbb{N})$

上添え字の $(n_i), (m_i)$ は記号の一部ではなく、各記号ごとに割り当てられている自然数であり、**項数**（**arity**）と呼ばれ、$f^{(n)}$ は n- 項関数記号、$R^{(m)}$ は m- 項関係記号と呼ばれる。特に、0- 項関数記号は**定数記号**と呼ばれ、メタ変数 $c_i, d_i, \ldots$ などで表す。一般に、記号の集合は有限とは限らず、任意の無限集合であったり、クラスであったりする場合がある。

1)　ここでの「集合論」は ZF に限らない広い意味でのものである。よく、圏論が「集合論に代わる数学の基礎として採用できる」と説明されることがあるが、これはつよつよ圏であるトポスの内部言語を使うことで集合論を代替できる、という話で、ZF とは違う集合論の「実装」を与えることができる、という話である。

一階の言語 $\mathcal{L}$ について、$\mathcal{L}$- **項**（$\mathcal{L}$-**term**）を以下のように帰納的に定義する：

1. 定数記号 c は $\mathcal{L}$- 項である。
2. 変数 v は $\mathcal{L}$- 項である。
3. 関数記号 f^n および $\mathcal{L}$- 項 $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ に対し、$f(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$ は $\mathcal{L}$- 項である。
4. 以上で定まるもののみが $\mathcal{L}$- 項である。

最後の「以上で定まるもののみが〜」というのは、計算機科学でいう最小不動点の条件と同じである。以後の帰納的定義では省略する。

一階言語 $\mathcal{L}$ について、$\mathcal{L}$- **原子論理式**（**atomic** $\mathcal{L}$-**formula**）を以下のように帰納的に定義する：

1. $\bot$ は $\mathcal{L}$- 原子論理式である。
2. τ, τ' が $\mathcal{L}$- 項のとき、$\tau = \tau'$ は $\mathcal{L}$- 原子論理式である。
3. R が m- 項関係記号、$\tau_0, \dots, \tau_{m-1}$ が $\mathcal{L}$- 項のとき、$R(\tau_0, \dots, \tau_{m-1})$ は $\mathcal{L}$- 原子論理式である。

古典一階述語論理の $\mathcal{L}$- **論理式**（$\mathcal{L}$-formula）を以下のように機能的に定義する：

1. $\mathcal{L}$- 原子論理式は $\mathcal{L}$- 論理式である。
2. φ, ψ が $\mathcal{L}$- 論理式のとき、$\varphi \to \psi$ は $\mathcal{L}$- 論理式である。
3. x が変数記号で φ が $\mathcal{L}$- 論理式のとき、$\forall x \ \varphi$ は $\mathcal{L}$- 論理式である。

自由変数[2)]を持たない論理式を**閉論理式**（**closed formula**）または**文**（**sentence**）と呼ぶ。

$\to$ は右結合とする。つまり、$\varphi \to \psi \to \chi$ は $\varphi \to (\psi \to \chi)$ の略記として解釈される。

注意 1. いま我々は古典論理だけを考えているので、他の論理結合子・量化子は次のような略記法として導入する：

$$\neg\varphi :\equiv \varphi \to \bot, \qquad \varphi \wedge \psi :\equiv \neg(\varphi \to \neg\psi), \qquad \varphi \vee \psi :\equiv (\varphi \to \psi) \to \psi,$$
$$\exists x\varphi :\equiv \neg\forall x\neg\varphi$$

このようにするのは、今後論理式の複雑性に関する帰納法で色々な証明を回していく際に、場合分けの数は少ないほうが楽だからである。

一階の言語の例として、ここではこれからずっと付き合うことになる集合論の言語 $\mathcal{L}_\in$ や環の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$ などを挙げておく：

例 1 (集合論の言語). 集合論の言語 $\mathcal{L}_\in$ は、二項述語記号 $\in^{(2)}$ のみを持つ言語である。

え？他の記号は要らないの？和集合とか内包表記とか …… と思うかもしれないが、ZF 公理系は十分強力であり、そうした記号を含む論理式があっても、それを含まない形で書き換えることができる。例えば、$x = A \cup B$ は $\forall z \ [z \in x \leftrightarrow z \in A \vee z \in B]$ と書き換えることができる。

例 2 (環の言語). 単位的環の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$ は定数記号 $0, 1$、二項関係記号 $+, \cdot$ を持つ言語である。

無限言語の例としては、体 K に対して K- 線型空間の言語がある：

---

2) 変数が自由とか束縛されているとかはみなさんが知っているやつです。

例 3 (K- 線型空間の言語). K を体とするとき、K- 線型空間の言語は以下から成る：

- 定数記号 0
- 二項関数記号 $+$
- $c \in K$ ごとに、一項関数記号 $c\cdot$

以上はあくまで何が式で何が項かという構文を定義しただけである。それらの証明可能性を与えるのが**証明体系**である。一階述語論理には互いに同値な複数の証明体系が知られている。型付き λ- 計算に近い自然演繹 NK や、コンビネータ論理に近いヒルベルト流の体系 HK、簡潔でわかりやすく証明論などで用いられるシーケント計算 LK が代表的である。

分析の対象としては LK が洗練されているのだが、導入が簡単であり、強制法で扱う上でも楽なのでここではヒルベルト流の体系 HK を証明体系として採用することにする。

定義 2 (古典一階述語論理の証明体系 HK). 定数記号の集合 $A, B, C, \ldots$ と変数記号の集合 $x, y, z, \ldots$ が与えられた時、これらから定まる CL- **項**（CL-**term**）を以下で定める：

1. 特別な定数 K, S は CL- 項である。
2. 定数 $A, B, C, \ldots$ および変数は $x, y, z, \ldots$ は CL- 項である。
3. L, M を CL- 項とするとき、(LM) は CL- 項である。

変数を含まない CL- 項を**閉** CL- **項**と呼び、定数 K, S のみから成る閉項を**結合子**または**コンビネータ**（**combinator**）と呼ぶ。CL- 項の括弧は左結合とし、一番外側のものは省略する。つまり、$LM(NO)P$ は $(((LM)(NO))P)$ の略記である。CL- 項を渡るメタ変数として、$L, M, N, \ldots$ などを用いる。

古典一階述語論理のヒルベルト流証明体系 HK を定義する。HK- 式は $\mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{P}, \mathsf{G}, \mathsf{F}, \mathsf{J}$ を定数として持つ CL- 項 L と一階述語論理式 φ に対して、$L : \varphi$ の形のものである。L を主部または証明項、φ を述部または型と呼ぶ。HK は以下の公理図式を持つ：

- **公理図式**：
  - $\mathsf{K} : P \to Q \to P$
  - $\mathsf{S} : (P \to Q \to R) \to (P \to Q) \to P \to R$
  - $\mathsf{A} : \bot \to P$
  - $\mathsf{P} : ((P \to Q) \to P) \to P$
  - $\mathsf{F} : (\forall x P) \to P\left[\begin{smallmatrix} x \\ \tau \end{smallmatrix}\right]$（ただし τ は $\mathcal{L}$- 項）
  - $\mathsf{G} : \forall x(P \to Q) \to (P \to \forall x Q)$（ただし変数 x は P に自由に現れない）

これで HK の公理は定まった。続いて HK における「公理系」「証明」の概念を形式化しよう：

定義 3 (HK の証明図).

1. HK における言語 $\mathcal{L}$ の公理系 Γ とは、証明項がただ一つの定数のみからなる CL- 項で、述部が $\mathcal{L}$- 論理式であるような HK- 項の集合である。
2. HK の**証明図**とは、HK- 項を頂点とする根つき木であって、全ての枝が葉から根に向かって次の**推論規則**のいずれかに従って形成されているものである。根を「**結論**」、葉を「**仮定**」と呼ぶ：

(a) **三段論法**[3]（**modus ponens**、MP）：

$$\frac{L : P \to Q \qquad M : P}{(LM) : Q}\,\mathrm{MP}$$

(b) **汎化**（**generalization**）：

$$\frac{M : \varphi}{\mathsf{J}M : \forall x P}\,\mathrm{Gen} \qquad \text{（ただし仮定の述部に } x \text{ は自由に現れない）}$$

3. 公理系 Γ からの証明図は、仮定がすべて HK の公理または Γ の公理である証明図のことである。
4. HK で公理系 Γ から論理式 φ が**証明可能**（**provable**、記号：$\Gamma \vdash_{\mathrm{HK}} \varphi$）とは、結論が φ であるような Γ からの証明図が存在することである。
5. φ が HK の**恒真式**（**tautology**、記号 $\vdash_{\mathrm{HK}} \varphi$）とは、$\varphi$ が $\emptyset$ で証明可能であることである。

注意 2. 面倒なので、特に使わない場合は HK の証明項を省略することがある。

例 4 (二重否定除去). 述語論理に立ち入る前に、この公理系から二重否定除去 $\neg\neg P \to P$ が証明可能であることを見てみよう（幅を取るので、$\neg P :\equiv P \to \bot$ の略記法を使う）。以下がその証明図である：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathsf{S} : \gamma} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathsf{K} : \xi} \qquad \dfrac{}{\mathsf{P} : (\neg P \to P) \to P}}{\mathsf{KP} : \neg\neg P \to (\neg P \to P) \to P}\,\mathrm{MP}}{\mathsf{S(KP)} : (\neg\neg P \to (\neg P \to P) \to P) \to (\neg\neg P \to \neg P \to P) \to \neg\neg P \to P}\,\mathrm{MP} \qquad \dfrac{\dfrac{}{S : \zeta} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathsf{K} : \delta} \qquad \dfrac{}{\mathsf{A} : \bot \to P}}{\mathsf{KA} : \neg P \to \bot \to P}\,\mathrm{MP}}{\mathsf{S(KA)} : \neg\neg P \to \neg P \to P}\,\mathrm{MP}}{\mathsf{S(KP)(S(KA))} : \neg\neg P \to P}\,\mathrm{MP}$$

但し、

$$\begin{aligned}
\gamma &:\equiv (\neg\neg P \to (\neg P \to P) \to P) \to (\neg\neg P \to \neg P \to P) \to \neg\neg P \to P \\
\xi &:\equiv ((\neg P \to P) \to P) \to \neg\neg P \to (\neg P \to P) \to P \\
\zeta &:\equiv (\neg P \to \bot \to P) \to (\neg P \to \bot) \to \neg P \to P \\
\delta &:\equiv (\bot \to P) \to \neg P \to \bot \to P
\end{aligned}$$

このように、ちょっとした証明でも結構たいへんである。次の演繹定理を使うとある程度証明を楽できる：

定理 1 (HK の演繹定理). Γ を公理系、φ, ψ を論理式としたとき、$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{HK}} \psi$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathrm{HK}} \varphi \to \psi$。

この証明には、次の λ- 抽象を使う：

定義 4. M を CL- 項、x を変数としたとき、x を含まない CL- 項 $(\lambda x.M)$ を M の構成による帰納法で次のように定義する：

1. $\lambda x.M :\equiv \mathsf{K}M$, ただし $x \notin \mathrm{FV}(M)$
2. $\lambda x.x :\equiv \mathsf{SKK}$

3) 厳密には、ギリシアのアリストテレス論理学における「三段論法」とは「大前提・小前提・結論」からなる（正しいとは限らない）論法の総称であり、モーダス・ポネンスはその中の妥当な典型例の一つである。だから、本来日本語訳として「三段論法」と呼ぶのは若干間違っており、厳密を期すのなら「前件肯定」と呼ぶべきだといえばそうなのだが、もう習慣として定着しているのでここでもそれに倣う。

3. $\lambda x.\mathsf{J}M :\equiv \mathsf{G}(\mathsf{J}(\lambda x.M))$
4. $\lambda x.MN :\equiv \mathsf{S}(\lambda x.M)(\lambda x.N)$

演繹定理はより詳しく次のように言い換えられる：

定理 2 (HK の演繹定理). x を Γ に現れない CL- 変数、としたとき、

$$x : \varphi, \Gamma \vdash_{\mathrm{HK}} M : \psi \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \vdash_{\mathrm{HK}} (\lambda x.M) : \varphi \to \psi$$

この λ- 抽象は、理論計算機科学で **λ- 計算の項をコンビネータ論理にコンパイルする際に用いられる変換と同じもの**である。S, K といった項も、コンビネータ論理の基本的な項である。実は、上の二重否定除去の証明図は、最初に Haskell で同じ型を持つプログラムをでっちあげて、コンパイラに部分項の型推論をさせて復元して書いたものである。HK- 項の定義の際に「型」という言葉を使ったように、実は直観主義論理の証明項・主部と、型付き λ- 計算の項・型との間には対応関係があり、これを **Curry–Howard 対応**とよぶ。我々は**古典**論理を考えているが、これは λ- 計算に続きの計算を表す**継続**を入れたものに対応しており、実は継続オペレータに型を付けようとすると、古典命題論理のトートロジーである Peirce の法則 $((P \to Q) \to P) \to P)$ と一致し、これこそが上の公理系の P である。Peirce の法則は直観主義論理に付け加えると、ちょうど古典論理と一致する。

演習 1. 上で導入した HK から排中律 $P \lor \neg P$ が証明可能であることを示せ。また、逆に HK から P を除いた体系に排中律・二重否定除去の一方だけを追加すると、P が証明できることを示せ。

例 5 (酒場の法則). 古典一階述語論理のヘンなトートロジーとして有名なものに、一項関係記号 P をもつ言語で表現できる「酒場の法則」がある：

$$\exists z \ [P(z) \to \forall x P(x)]$$

$P(x)$ を「x が呑んだくれている」と読むと、これが「酒場の法則」と呼ばれている理由がわかる：「どんな酒場にも、そいつが呑んだくれているなら、他の客も全員呑んだくれているような特別な客 z 氏がいる」。これは、呑んでない人間がいるならそいつを z 氏とし、全員呑んでいるなら適当に取ればよい。

演習 2. 演繹定理を駆使して、酒場の法則を示せ。

2 一階述語論理の Tarski 意味論と完全性定理

前節で、言語 $\mathcal{L}$ の下での一階述語論理の構文と証明体系を導入した。これを具体的な数学の宇宙の対象と結び付け、解釈を考えるのが **Tarski 意味論**あるいは単純に $\mathcal{L}$- 構造や「モデル」と呼ばれるものである。他にも色々なモデルの与え方はある（例えば強制法の Boole 値モデルであるとか、圏論的論理学における函手など）し、意味論といっても結合子の間の調和を考える証明論的意味論など色々なものがあるが、以下ではモデルといったら Tarski モデルを考える。

3 初等拡大、超積、コンパクト性定理

4 不完全性定理と Tarski の真理定義不可能性定理

5 参考文献

[1] 古森 雄一 and 小野寛晰 , “現代数理論理学序説 ,” 日本評論社 , 6 2010, ISBN: 978-4-535-78556-4.

[2] 戸次大介 , “数理論理学 ,” 東京大学出版会 , 2012, ISBN: 978-4-13-062915-7.