強制法セミナー第 3 回：強制法の基礎理論

Hiromi ISHII (@mr_konn)

2024-01-19

目次

1 Boole 代数の基本性質と擬順序の Boole 完備化

強制法の定式化には幾つかの（同値な）流儀があるが、本セミナーでは**完備 Boole 代数**による Boole 値モデルの理論を構築し、そこから一般の擬順序による強制法の理論を導出する順番をとる。そこで本節では、その前提となる完備 Boole 代数の基本性質と、一般の擬順序の Boole 完備化についてまずは扱うことにする。

1.1 Boole 代数の基本性質

まずは（完備）Boole 代数の概念を定義しよう。

定義 1.1. 以下を満たす $\mathbb{B} = (\mathbb{B}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, -, +, \cdot, \leq)$ を Boole 代数と呼ぶ：

1. $\leq$ は B 上の半順序である。

2. $\mathbb{0}, \mathbb{1}$ はそれぞれ $\leq$ に関する最小・最大元であり、$\mathbb{0} \neq \mathbb{1}$。
3. 任意の二元 $p, q \in \mathbb{B}$ に対して、$p+q, p \cdot q$ はそれぞれ二元の上限・下限を与える。
   (a) つまり $p, q \leq p \cdot q$ かつ $\forall r\ [p, q \leq r \implies p \cdot q \leq r]$ が成り立つ。$+$ についてはこの双対を取った性質が成り立つ。
4. $p \in \mathbb{B}$ に対し、p の**補元**（**complement**）$-p$ は、$p + (-p) = \mathbb{1}$ および $p \cdot (-p) = \mathbb{0}$ を満たす。

更に $\mathbb{B}$ の濃度 κ- 未満の任意の部分集合 $A \subseteq \mathbb{B}$ に上限 $\sum A$・下限 $\prod A$ が存在するとき、$\mathbb{B}$ を κ- **完備 Boole 代数**と呼び、濃度の制限なく上限・下限が存在する Boole 代数を**完備 Boole 代数**（cBa）と呼ぶ。

（完備とは限らない）一般の Boole 代数について、以下の代数法則が成り立つ：

補題 1.1. $\mathbb{B}$ を Boole 代数とし、$a, b, c, d \in \mathbb{B}$ とすると以下が成立：
1. 結合律：$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
2. 交換律：$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$
3. 両方向の分配律：$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c), \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot b)$
4. 吸収律：$a + (a \cdot b) = a, \quad a \cdot (a + b) = a$
5. 補元：$-a + a = \mathbb{1}, \quad (-a) \cdot a = \mathbb{0}$
6. 単位律：$a + \mathbb{0} = a = \mathbb{0} + a, \quad a \cdot \mathbb{1} = a = \mathbb{1} \cdot a$
7. $a \cdot b = a \iff a \leq b \iff a + b = b$

実は、上の公理は Boole 代数を代数的に特徴づける：

演習 1.1. B を集合、$\mathbb{0}, \mathbb{1} \in B, \quad - : B \to B, \quad +, \cdot : B \times B \to B$ とする。
1. 補題 1.1 を示せ。
2. 代数系 $(B, -, +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ が 補題 1.1 の (1) から (5) の法則を満たすなら、(6) も成り立つことを示せ。また $a + b = b \iff a \cdot b = a$ が成り立つことも示せ。
3. 上の状況の下で、(7) のいずれか一方の条件によって $\leq$ を定義すると B 上の半順序となり、この順序について 定義 1.1 の意味での Boole 代数なることを示せ。

以下、Boole 値モデルを扱う上で頻出となる Boole 代数の基本性質を列挙しておく：

補題 1.2. $\mathbb{B}$ を Boole 代数とし、$a, b, c \in \mathbb{B}, A, B \subseteq \mathbb{B}$ とする。以下の略記法を用いる：

$$a \multimap b := -a + b, \quad a \cdot A = \{\, a \cdot b \mid b \in A \,\}$$
$$a + A := \{\, a + b \mid b \in A \,\}, \quad -A = \{\, -b \mid b \in A \,\}$$

このとき以下が成立：
1. $a \cdot b \leq a \leq a + b$
2. $a \leq (a \cdot b) + (-b)$
3. 二項 de Morgan 則：$-(a + b) = (-a) \cdot (-b), \quad -(a \cdot b) = (-a) + (-b)$
4. 単調性：$a \leq b \implies a + c \leq b + c \mathbin{\&} a \cdot c \leq b \cdot c$
5. 反変性：$a \leq b \iff -b \leq -a$

6. 冪等律： $a \cdot a = a = a + a$
7. 随伴律： $a \cdot b \leq c \iff a \leq b \multimap c$
8. 対合律： $-(-a) = a$
9. $a \not\leq b \iff a \cdot (-b) > \mathbb{0}$
10. $a \leq (b \multimap c) \cdot (c \multimap b) \iff a \cdot b = a \cdot c$
11. 無限項対二項分配律（和）： A が下限を持つなら $a + A$ も下限を持ち、$\prod(a + A) = a + \prod A$。
12. 無限項対二項分配律（積）： A が上限を持つなら $a \cdot A$ も上限を持ち、$\sum(a \cdot A) = a \cdot \sum A$。
13. 多項 de Morgan 則（和積）： A が上限 $\sum A$ を持つ $\iff -A$ が下限を持つ。さらに、このどちらか（よって両方）が存在するとき、$-\sum A = \prod(-A)$, $\sum A = -\prod(-A)$。
14. 多項 de Morgan 則（積和）：上で $\prod, \sum$ を入れかえた双対。

演習 1.2. 上を示せ。

注意 1.1. 分配律を無限項対無限項にしたものは成り立つとは限らない。これは、対応する強制法が基数を保つ条件と密接に関連がある。

例 1.1（（非）完備 Boole 代数の例).

1. 任意の有限 Boole 代数は完備 Boole 代数である。
2. 任意の集合 X について、その冪集合 $\mathcal{P}(X)$ は包含関係について完備 Boole 代数を成す。
3. $\mathcal{B}$ を実数の Borel 集合が成す族とする。このとき、$\mathcal{B}$ は通常の包含関係と和・共通部分・補集合について ω_1- 完備 Boole 代数を成すが、完備 Boole 代数ではない。
4. null を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 零 Borel 集合の全体とする。このとき、零集合の差を除いて一致する Borel 集合同士を同一視した商代数 $\mathcal{B}/\mathsf{null}$ は完備 Boole 代数である。これは、$\mathcal{B}$ が ω_1- 完備であることと、ω_1 個以上の測度正集合の族が与えられると、必ず測度正の交わりを持つ相異なる集合の組が取れること（null が ω_1- 飽和という性質を持つこと）から従う。
5. $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ を、自然数の集合全体を有限集合の差を無視する同値関係で割ったものとする。このとき、$\mathcal{P}(X)/\mathrm{fin}$ は Boole 代数であるが ω_1- 完備ではない。これは、**Hausdorff gap** の存在から従う。Hausdorff gap とは、$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ の上昇列 $\{A_n\}_{n<\omega}$ と下降列 $\{B_n\}_{n<\omega}$ の組であって、
$$[A_0] \leq [A_1] \leq \cdots \leq [A_n] \leq [A_{n+1}] \leq \cdots \leq [B_{n+1}] \leq [B_n] \leq \cdots \leq [B_1] \leq [B_0]$$
を満たすが、$[A_i] \leq [C] \leq [B_j]$ $(\forall i, j)$ を満たすような C が存在しないようなもののことである。

演習 1.3. 上の例の気になった部分を証明してみよ。

1.2 擬順序の Boole 完備化

擬順序による強制法を完備 Boole 代数による強制法に帰着するには、擬順序の **Boole 完備化**と呼ばれる操作

を経ることになる。より詳しく、任意の擬順序 $\mathbb{P}$ に対し、それが埋め込める「素性のよい」完備 Boole 代数が**同型を除いて一意**に存在することを以下では示す。そこで、まずは擬順序と関連する定義をしておく。

定義 1.2.

- $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}})$ が**擬順序**（**pseudo-order** または **preorder**、略して **poset**）あるいは**強制法概念**（**forcing notion**）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\leq_{\mathbb{P}}$ は $\mathbb{P}$ 上の反射的かつ推移的な二項関係であり、$\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ は $\leq_{\mathbb{P}}$ に関する（一意とは限らない）最大元である。強制法概念の各元 $p \in \mathbb{P}$ を「強制条件（forcing condition）」とも呼ぶ。
- $p \leq q$ が成り立つとき、「p は q を**拡張する**」（p **extends** q）と言う。一瞬逆では？と思うかもしれないが、強制概念は $\mathbb{1}$ に近い程自明で、自由度について順序づけられている、と考えている。
- $\mathbb{P}^+ := \{ p \in \mathbb{P} \mid \exists q \in \mathbb{P} \ [p \not\leq q] \}$ の元を $\mathbb{P}$ の**正の元**と呼ぶ。
- $p, q \in \mathbb{P}$ が**両立する**（**compatible**、記号：$p \parallel_{\mathbb{P}} q$）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists r \in \mathbb{P}^+ \ (r \leq p, q)$.
- p, q が両立しないとき、記号 $p \perp_{\mathbb{P}} q$ と書く。

直観としては、擬順序 $\mathbb{P}$ は、新しい宇宙で添加される新しいオブジェクトの近似の全体であり、またその各近似自体が何らかの命題の真偽値に対応している、というイメージを持っておくとよい。$\mathbb{P}$ はその近似の自由度の順に並んでおり、$\mathbb{1}$ が恒真命題に対応し、情報が増えていくほど矛盾 $\mathbb{0}$ に近付いていく、という感覚である。

これを念頭に、一般の擬順序 $\mathbb{P}$ をどうにかして完備 Boole 代数 $\mathbb{P}$ に埋め込む方法を考えよう。一番最初に思い付くのは、$\mathbb{P} \ni p \mapsto \{p\} \in \mathcal{P}(\mathbb{P})$ という埋め込み方だろう。しかし、これは $\mathbb{P}$ の順序の情報が失われてしまうので論外である。では、単調になるように、$p \mapsto p{\downarrow} := \{ q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \}$ という埋め込みを考えればどうだろうか？しかし、たとえば $\mathbb{P}$ が既に Boole 代数だった場合を考えると、$p \cdot (-p) = 0$ だが、この埋め込みの下では $p{\downarrow} \cap (-p){\downarrow} = \{\mathbb{0}\} \supsetneq \emptyset = \mathbb{0}_{\mathcal{P}(\mathbb{P})}$ となるので、完備化の前後で矛盾していた筈の条件が両立することになってしまう。気持ちとして、強制法では各 $p \in \mathbb{P}$ はなんらかの命題の「真偽値」だと思えるので、これは望ましくない。

以上の議論を踏まえれば、$\mathcal{P}(\mathbb{P})$ に埋め込むだけでは不適当なように思われる。少なくとも、その中に $\mathbb{P}$ が順序を保ちつつ埋め込まれていて、なおかつ両立関係については同型になるような完備 Boole 代数 $\mathbb{B}(\mathbb{P})$ を見付ける必要がある。

また、$\mathbb{P}$ による強制拡大と、その完備化による強制拡大で、違うものが足されてしまっていては困る。それぞれ元としては違う近似の集合を持つが、それぞれが互いの中で「幾らでも近く」近似しあえる必要がありそうだ。結論からいえば、それが次で定義される稠密性の概念である。

定義 1.3.

- $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}})$ が**擬順序**（**pseudo-order** または **preorder**、略して **poset**）あるいは**強制法概念**（**forcing notion**）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\leq_{\mathbb{P}}$ は $\mathbb{P}$ 上の反射的かつ推移的な二項関係であり、$\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ は $\leq_{\mathbb{P}}$ に関する（一意とは限らない）最大元である。強制法概念の各元 $p \in \mathbb{P}$ を「強制条件（forcing condition）」とも呼ぶ。
- $p \leq q$ が成り立つとき、「p は q を**拡張する**」（p **extends** q）と言う。一瞬逆では？と思うかもしれないが、強制概念は $\mathbb{1}$ に近い程自明で、自由度について順序づけられている、と考えている。
- $\mathbb{P}^+ := \{ p \in \mathbb{P} \mid \exists q \in \mathbb{P} \ [p \not\leq q] \}$ の元を $\mathbb{P}$ の**正の元**と呼ぶ。
- $p, q \in \mathbb{P}$ が**両立する**（**compatible**、記号：$p \parallel_{\mathbb{P}} q$）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists r \in \mathbb{P}^+ \ (r \leq p, q)$.

- p, q が両立しないとき、記号 $p \perp_{\mathbb{P}} q$ と書く。
- $D \subseteq \mathbb{P}^+$ が $p \in \mathbb{P}^+$ **以下で前稠密**（**predense below** p）$\overset{\text{def}}{\iff} \forall q \in \mathbb{P}^+ \ \left[q \leq p \Longrightarrow \exists r \in D \ \left(q \parallel_{\mathbb{P}} r\right)\right]$。
- D が**前稠密**（**predense**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ D が $\mathbb{1}$ 以下で前稠密。
- $D \subseteq \mathbb{P}^+$ が $p \in \mathbb{P}^+$ **以下で稠密**（**dense below** p）$\overset{\text{def}}{\iff} \forall q \in \mathbb{P}^+ \ [q \leq_{\mathbb{P}} p \Longrightarrow \exists r \in D \ (r \leq_{\mathbb{P}} q)]$.
- D が**稠密**（**dense**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ D が $\mathbb{1}$ 以下で稠密。
- $d : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ が**稠密埋め込み**（**dense embedding**、ここだけの記号：$d : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{Q}$）$\overset{\text{def}}{\iff}$
  - (a) 単調性：$p \leq_{\mathbb{P}} q \Longrightarrow d(p) \leq_{\mathbb{Q}} d(q)$,
  - (b) $\perp$- 準同型：$p \perp_{\mathbb{P}} q \Longrightarrow d(p) \perp_{\mathbb{Q}} d(q)$,
  - (c) $d[\mathbb{P}^+]$ は $\mathbb{Q}$ で稠密。
- 擬順序 $\mathbb{P}$ の **Boole 完備化**（**Boolean completion**）$\mathbb{B}(\mathbb{P})$ とは、稠密埋め込み $d : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{B}(\mathbb{P})$ が存在するような完備 Boole 代数 $\mathbb{B}(\mathbb{P})$ のことである。

注意 1.2. 擬順序には一般に反対称律 $p \leq q \leq p \Longrightarrow p = q$ は要求しない。

演習 1.4. $d : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{B}(\mathbb{P})$ を Boole 完備化、$b \in \mathbb{B}(\mathbb{P})$ とするとき以下を示せ。

$$b = \sum\left\{ d(p) \,\middle|\, d(p) \leq_{\mathbb{B}(\mathbb{P})} b \right\}$$

演習 1.5. $\mathbb{B}$ を Boole 代数、$p, q, r \in \mathbb{B}$ とする。次を示せ：

1. $\mathbb{B}^+ = \{ p \in \mathbb{B} \mid p > \mathbb{0} \}$
2. $p \parallel q \iff p \cdot q > \mathbb{0}$
3. $D \subseteq \mathbb{B}^+$ が $\mathbb{B}$ に上限を持つとき、

$$D : p \text{ 以下で前稠密} \iff \sum D \geq p$$

Boole 完備化は、存在するのなら一意であることをまずは見る。

補題 1.3 (Boole 完備化の一意性). 擬順序 $\mathbb{P}$ が Boole 完備化を持つなら、同型を除いて一意。

証明 $i : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{B}$ および $j : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{C}$ が共に $\mathbb{P}$ の Boole 完備化だったとする。このとき、以下のようにして $\mathbb{P}$ の元による「下からの近似」を使って $h : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ および $k : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ を定めることができる：

$$h(b) := \sum^{\mathbb{C}} \{ j(p) \mid i(p) \leq_{\mathbb{B}} b \}, \qquad k(c) := \sum^{\mathbb{B}} \{ i(p) \mid j(p) \leq_{\mathbb{C}} c \}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P} \arrow[dl, hook, "i"'] \arrow[dr, hook, "j"] & \\ \mathbb{B} \arrow[rr, shift left, "h"] & & \mathbb{C} \arrow[ll, shift left, "k"] \end{tikzcd}$$

このとき h, k は明らかに単調。あとは h, k が順序同型であること、つまり $h \circ k = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, k \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{B}}$ を地道に確かめればよい。対称性より、$k \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{B}}$ を示せばよい。それには次が示せれば十分：

$$i(p) \leq_{\mathbb{B}} b \iff j(p) \leq_{\mathbb{C}} h(b) \tag{$\star$}$$

実際、これを認めれば、

$$k(h(b)) = \sum \{\, i(p) \mid j(p) \leq_{\mathbb{C}} h(b) \,\} = \sum \{\, i(p) \mid i(p) \leq_{\mathbb{B}} b \,\} = b$$

となり、$k \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{B}}$ を得る。 □

演習 1.6. $(\star)$ を示し、上の証明を完成させよ（**ヒント**：$\leq$ は 演習 1.4 から直ちに従う。$\geq$ は 補題 1.2 の (9) と、$\mathbb{P}$ の像が $\mathbb{B}$ で稠密であること、$\perp$- 同型になっていることを使う）。

演習 1.7. 上の i, j, h, k の図式が可換であること（つまり $k \circ j = i$ および $h \circ i = j$）を示せ。（**ヒント**：一方の順序関係は $\sum$ の性質から従う。反対方向は h, k が順序同型であり特に互いに逆写像な単調写像である事を使う。）

それでは、任意の擬順序 $\mathbb{P}$ に対し、その完備化が存在することを示していこう。一発で構成してもよいが、ここでは後ほど重要な役割を果す「**分離的**擬順序」の概念を経由して構成する。具体的には、擬順序 $\mathbb{P}$ に対して、その商で分離的となる擬順序 $\tilde{\mathbb{P}}$ を取り、そこから更に完備 Boole 代数を構成する、という段階を踏む。

定義 1.4.

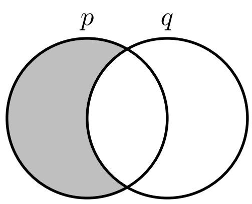
- **このセミナーでは**以後 $p \trianglelefteq_{\mathbb{P}} q \overset{\text{def}}{\iff} \forall r \leq_{\mathbb{P}} p \ \big(r \parallel_{\mathbb{P}} q\big)$ と書き、これを「p は q を弱く拡張する（**p weakly extends q**）」と読むことにする。$p \leq q$ ならば $p \trianglelefteq q$ であるが、逆は一般には成り立たない。
- 擬順序 $\mathbb{P}$ が**分離的**（**separative**）$\overset{\text{def}}{\iff} \forall p, q \in \mathbb{P} \ [p \leq q \iff p \trianglelefteq q]$。

演習 1.8. Boole 代数は分離的であることを示せ。

演習 1.9. 一般の擬順序 $\mathbb{P}$ において、$\trianglelefteq$ は $\leq$ を拡張する（つまり $x \leq y \implies x \trianglelefteq y$ となるような）$\mathbb{P}$ 上の擬順序となることを示せ。

分離性の気持ちは、強制法について学んだあとだとより明確になる。それ以前の順序論的な直観としては、対偶をとってみるとわかる。上の演習から、$p \leq q \implies p \trianglelefteq q$ は直ちに従うので、擬順序が分離的であるというのは結局 $p \trianglelefteq q \implies p \leq q$ ということである。この対偶をとって、$\trianglelefteq$ の定義を展開すれば、$\mathbb{P}$ が分離的である、というのは次が成り立っているということである：

$$p \not\leq q \implies \exists r \in \mathbb{P}^{+} \ [r \leq p \wedge r \perp q]$$



分離的な擬順序とは「**$p \not\leq q$ の根拠が Venn 図で描けるような擬順序**」という風に見ることができる。$p \not\leq q$ というのは、例えば右図のような状況である。集合の場合は、右図の灰色部分のように「証拠」となる $p \setminus q \neq \emptyset$ が取れるが、一般の擬順序で必ずこうしたものが取れるとは限らない。擬順序が分離的であるというこ

とは、それが具体的な演算で書けるかはともかく、このような $p \setminus q \in \mathbb{P}^+$ に当る
ような元がとれる、という要請である。

例 1.2.

1. 任意の Boole 代数は分離的である。
2. Cohen 強制法 $\mathbf{C} = \langle {}^{<\omega}2, \supseteq, \emptyset \rangle$ を考える。長さが自然数であるような $\{0,1\}$ の無限列を逆向きの包含関係で並べたものである。このとき、$\mathbf{C}$ は Boole 代数ではないが、分離的擬順序である。これは、Cohen 強制法が $p \parallel q \iff (p \leq q \vee q \leq p)$ という強い性質を満たすからである。
3. 実数直線 $\mathbb{R}$ の開集合系 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ に包含関係で順序を入れたものを考える。このとき、$U := (0,2) \cup (2,3)$, $V := (0,1) \cup (1,3)$ とおけば、$U \not\leq V$だが、1 の開近傍は決して U に包含されない。よって、$\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ は分離的でない。

では、一般の擬順序から分離的擬順序を構成する方法を見てみよう。

補題 1.4 (分離商). 任意の擬順序 $\mathbb{P}$ に対して、分離的な擬順序 $\tilde{\mathbb{P}}$ と全射 $h : \mathbb{P} \to \tilde{\mathbb{P}}$ で次を満たすようなものが存在する：

1. $h[\mathbb{P}^+] \subseteq \tilde{\mathbb{P}}^+$,
2. $p \leq q \implies h(p) \leq h(q)$,
3. $p \perp_{\mathbb{P}} q \iff h(p) \perp_{\tilde{\mathbb{P}}} h(q)$.

また、このような $\tilde{\mathbb{P}}$ は同型を除いて一意であり、$\mathbb{P}$ の**分離商**（**separative quotient**）と呼ぶ。

注意 1.3. 全射性から、このような h は稠密埋め込みになっていることに注意。

証明 $p \sim q \overset{\text{def}}{\iff} \forall r \in \mathbb{P} \left[r \parallel_{\mathbb{P}} p \iff r \parallel_{\mathbb{P}} q \right]$ は $\mathbb{P}$ 上の同値関係を定めるので、$\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}/\sim$ とすればよい。順序は代表元上で $\trianglelefteq$ で定めてやれば、これは $\sim$ の定義から well-defined となり、しかもこれは分離的である。

一意性：分離性と条件 (2) および全射性から従う。 □

分離的擬順序からは、簡単に完備 Boole 代数を構成できる。最初の例では $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ に埋め込もうとして失敗したが、どのような完備 Boole 代数に埋め込むべきだろうか？それは、**正則開集合代数** $\mathrm{RO}(X)$ である：

定義 1.5 (正則開集合). $X = (X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする。$U \subseteq X$ が**正則開集合**（**regular open**）である $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathrm{int}\,\mathrm{cl}(U) = U$ ただし、int, cl はそれぞれ内部・閉包演算子である。X の正則開集合全体を $\mathrm{RO}(X)$ と書く。

$\mathrm{RO}(X)$ は常に完備 Boole 代数となる。この証明には、次の補題を使う：

補題 1.5. Boole 代数 $\mathbb{B}$ が任意の集合 A に対し、次は同値：

1. $\mathbb{B}$ は完備 Boole 代数
2. 任意の集合 $A \subseteq \mathbb{B}$ が上限 $\sum A$ を持つ。

3. 任意の集合 $A \subseteq \mathbb{B}$ が下限 $\prod A$ を持つ。

また、いずれの場合も $\sum A = -\prod(-A), \quad \prod A = -\sum(-A)$ が成り立つ。

演習 1.10. 上を示せ。

補題 1.6. 任意の位相空間 X に対して、以下の演算により $\mathrm{RO}(X)$ には完備 Boole 代数の構造が入る：

$$\mathbb{0} := \emptyset, \quad \mathbb{1} := X$$
$$U \cdot V := U \cap V, \quad U + V := \operatorname{int}\operatorname{cl}(U \cup V), \quad -U := \operatorname{int}(X \setminus U),$$

また、以下により $A \subseteq \mathrm{RO}(X)$ に対する下限が定まる：

$$\prod \mathcal{A} := \operatorname{int}\operatorname{cl}\left(\bigcap_{U \in A} U\right).$$

よって 補題 1.5 から、$\mathrm{RO}(X)$ は完備 Boole 代数である。

演習 1.11. 上を示せ。

以上から、$\mathbb{P}$ に適切な位相を入れ $\mathrm{RO}(\mathbb{P})$ に埋め込めれば良い。我々が考えるのは Alexandrov 位相である：

定義 1.6.

1. $\mathbb{P}$ 上の **Alexandrov 位相**とは、$p{\downarrow} := \{ q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \}$ を開基とする $\mathbb{P}$ 上の位相のことである。
2. $U \subseteq \mathbb{P}$ が**開集合**（**open**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ Alexandrov 位相について開集合。
3. $U \subseteq \mathbb{P}$ が**正則開集合**（**regular open**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ U が Alexandrov 位相について正則開集合。すなわち、閉包の内部は元の集合に一致する： $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(U)) = U$.

注意 1.4.

1. U が開集合 $\iff$ U は下に閉： $q \leq p \in U \implies q \in U$。
2. U が正則開集合 $\iff$ U は $\trianglelefteq_{\mathbb{P}}$ について下に閉： $q \trianglelefteq p \in U \implies q \in U$。
3. $\mathbb{P}$ が分離的 $\iff$ 開基 $p{\downarrow}$ は正則開集合。

補題 1.7（分離的擬順序の Boole 完備化）. 任意の分離的擬順序 $\mathbb{P}$ に対し、Boole 完備化は一意に存在し、特にその埋め込みは稠密となる。

証明 以下、$\mathbb{P}$ を Alexandrov 位相により位相空間と見做す。このとき、補題 1.6 より $\mathrm{RO}(\mathbb{P})$ は完備 Boole 代数である。あとは、$\mathbb{P}$ が $\mathrm{RO}(\mathbb{P})$ に稠密に埋め込めることが言えればよい。

いま、$\mathbb{P}$ が分離的で、特に開基 $p{\downarrow}$ が正則開であることから、P から $\mathrm{RO}(\mathbb{P})$ への埋め込みは、単純に $p \mapsto p{\downarrow}$ によって定めればよい。単射性についても分離性から従う。一意性は Boole 完備化の一意性より直ちに従う。 □

以上の結果の系として、一般の擬順序の Boole 完備化の存在が言える：

定理 1.8.　任意の擬順序 $\mathbb{P}$ に対し、Boole 完備化が一意に存在する。

演習 1.12.　$\mathbb{B}(\mathbb{P})$ が（順序）単射であることと、$\mathbb{P}$ が分離的であることの同値性を示せ。

2 集合の Boole 値モデル

定義 2.1.　$\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数とするとき、$\mathbb{B}$- **名称**の全体 $V^{\mathbb{B}}$ を次のように超限帰納法で定める：

$$\begin{aligned} V_0^{\mathbb{B}} &:= \emptyset \\ V_{\alpha+1}^{\mathbb{B}} &:= \mathcal{P}\left(V_\alpha^{\mathbb{B}} \times \mathbb{B}\right) \\ V_\gamma^{\mathbb{B}} &:= \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha^{\mathbb{B}} \qquad\qquad (\gamma : \mathrm{limit}) \end{aligned}$$

$V^{\mathbb{B}}$ の元を渡るメタ変数としてドットつきの文字 $\dot{a}, \dot{b}, ..., \dot{A}, \dot{B}, ...$ を使う。 また、 基礎理論を作るときだけ、$\sigma, \tau, \varpi, \vartheta$ も使う。

$\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}$ の $\mathbb{B}$- **階数**（$\mathbb{B}$-**rank**）$\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{x})$ を、$\dot{x} \in V_{\alpha+1}^{\mathbb{B}}$ なる最小の α として定める。

注意 2.1.　第 0 回では、集合の特性関数の多値化という点を強調するため、$V^{\mathbb{B}}$- 名称はランクの低い $\mathbb{B}$-名称から $\mathbb{B}$ への**関数**として定めていた。一方、上の定義はあくまでも $\mathbb{B}$- 名称は $\mathbb{B}$- 集合と $\mathbb{B}$ の元の対からなる任意の集合として定めており、初回の定義よりも広いものになっている。$\mathbb{B}$ が完備 Boole 代数であるときは、上の定義による $\mathbb{B}$- 名称 $\dot{x}$ が与えられたとき、以下のように関数となるように $\mathbb{B}$- 名称 $\dot{x}'$ を取り直すことができる：

$$\dot{x}'(\dot{y}) := \sum_{(\dot{y},b)\in\dot{x}} b.$$

わざわざ上限を取らずに、ここでより広い定義を取っているのは、一般の擬順序による強制法を考える場合、 そうした上限が常に存在するとは限らず、 今回の定式化の方を使う必要があるためである。 もちろん、 擬順序の場合になってから名称の定義を変更してもよいが、 そうするよりは最初からより一般的な定義を採用する形にした。

もとの宇宙 V の元を $V^{\mathbb{B}}$ に埋め込むために、$x \in V$ に対する **check-name** $\check{x}$ を次のように再帰的に定義する：

定義 2.2.　集合 x の **check-name** $\check{x}$ を、$\in$- 関係に関する超限帰納法により次のように定める：

$$\check{x} := \left\{ (\check{y}, \mathbb{1}) \mid y \in x \right\}$$

以下、check-name の全体を $\check{V} := \left\{ \check{x} \mid x \in V \right\}$ により表す。

さて、$V^{\mathbb{B}}$ は V を拡張するような $\mathbb{B}$- 値集合の宇宙として振る舞うことが期待されるのだった。 このために、$V^{\mathbb{B}}$ の性質を記述するための強制法の言語 $\mathcal{FL}$ を定義しよう。

定義 2.3. **強制法の言語** $\mathscr{FL}$ は、二項述語記号 $\in$、単項述語記号 $\check{V}$ を持つ言語である。

以後、$x \in \check{V}$ は $\check{V}(x)$ の略記とする。

記号から類推できるように、$\in$ は所属関係を、$\check{V}$ は基礎モデルの元であることを表す述語記号として想定されている。

注意 2.2. 実は、$\check{V}$ は $V^{\mathbb{B}}$ で定義可能クラスとなっていることが知られている（Bukovský の定理）。この証明は擬順序の反鎖条件という組合せ論的性質と強制拡大の基礎モデルに対する被覆性質の関連を使うもので興味深いが、基礎理論を終えてから立ち戻ることにする。

さて、強制法で用いる言語が定まったので、$V^{\mathbb{B}}$ における $\mathscr{FL}$- 論理式の真偽値を定義しよう。

定義 2.4. $\mathscr{FL}$- 原子論理式の真偽値 $[\![-]\!]_{\mathbb{B}}$ を $\mathbb{B}$- 階数に関する帰納法で以下のように定める：

$$[\![\dot{x} \in \dot{y}]\!]_{\mathbb{B}} := \sum_{(\dot{z},b)\in\dot{y}} b \cdot [\![\dot{x} = \dot{z}]\!]_{\mathbb{B}}, \quad [\![\dot{x} = \dot{y}]\!]_{\mathbb{B}} := [\![\dot{x} \subseteq \dot{y}]\!]_{\mathbb{B}} \cdot [\![\dot{y} \subseteq \dot{x}]\!]_{\mathbb{B}}, \quad [\![\dot{x} \in \check{V}]\!]_{\mathbb{B}} := \sum_{z\in V} [\![\dot{x} = \check{z}]\!]_{\mathbb{B}}$$

$$[\![\dot{x} \subseteq \dot{y}]\!]_{\mathbb{B}} := \prod_{\dot{z}\in\mathrm{dom}(\dot{x})} \left(-[\![\dot{z} \in \dot{x}]\!]_{\mathbb{B}} + [\![\dot{z} \in \dot{y}]\!]_{\mathbb{B}}\right).$$

$V^{\mathbb{B}}$ の元をパラメータに持つ $\mathscr{FL}$- 論理式 φ の真偽値 $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}}$ を、論理式の構成に関するメタレベルの帰納法で以下のように定める：

$$[\![\bot]\!] := \mathbb{0}, \qquad [\![\varphi \to \psi]\!] := -[\![\varphi]\!] + [\![\psi]\!], \qquad [\![\exists x \varphi(x)]\!] := \sum_{\dot{x}\in V^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(\dot{x})]\!]_{\mathbb{B}}.$$

$p \in \mathbb{B}$ と $\mathscr{FL}$- 論理式 φ について、$p \leq [\![\varphi]\!]$ が成り立つとき、**p が φ を強制する**といい、記号 $p \Vdash \varphi$ で表す。また、$\mathbb{1} \Vdash \varphi$ が成り立つとき（つまり $[\![\varphi]\!] = \mathbb{1}$ となるとき）、$V^{\mathbb{B}} \vDash \varphi$ または $\Vdash \varphi$ と書く。

注意 2.3. 完備 Boole 代数は、任意の**部分集合**が上限・下限を持つような Boole 代数であった。ところで、上の定義では $\dot{x} \in \check{V}$ や $\exists x\varphi$ の定義で、上限は**クラス**を渡っているように見える。これはちゃんと定義になっているだろうか？　と心配になるかもしれない。

簡単に言えば、パラメータ自体は真クラスを渡っているが、$\mathbb{B}$ 自体はあくまでも集合であり、**集合の部分クラスは集合だから大丈夫**、というのが答えである。より詳しく言えば、ZFC（というか、Z）の**分出公理（内包公理）**のおかげで我々は安心してこの操作が出来ている。たとえば、$\dot{x} \in \check{V}$ の真偽値の定義を（上限記号以外は）略記せずに書くと次のようになる：

$$[\![\dot{x} \in \check{V}]\!]_{\mathbb{B}} := \sum_{z\in V} [\![\dot{x} = \check{z}]\!]_{\mathbb{B}} = \sum\left\{ b \in \mathbb{B} \,\middle|\, \exists z \in V\ b = [\![\dot{x} = \check{z}]\!]_{\mathbb{B}} \right\}.$$

上限の渡る範囲が $\mathbb{B}$ の部分であることが明確になっている。$\exists x\varphi$ の場合も同様なので、自分で書き下して納得してみるとよいだろう。

このように $V^{\mathbb{B}}$ に「真偽値」によるそれらしい意味論を与えたが、前回までに導入した証明体系が健全であることを見ておこう。我々は公式の証明体系としてシーケント計算を導入したが、直観としては、$\psi \vdash \psi$ が LK で証明可能なら、$[\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!]$ が成り立つということを示したい。

補題 2.1. Γ, Δ を自由変数が $x_0, ..., x_{n-1}$ しか含まない $\mathscr{FL}$- 論理式の有限集合とする。 このとき、$\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能なら、任意の $\sigma_0, ..., \sigma_{n-1} \in V^{\mathbb{B}}$ について $\displaystyle\prod_{\varphi(\bar{x}) \in \Gamma} [\![\varphi(\bar{\sigma})]\!]_{\mathbb{B}} \leq \sum_{\psi(\bar{x}) \in \Delta} [\![\psi(\bar{\sigma})]\!]_{\mathbb{B}}$ が成り立つ。

証明　証明図の段数に関する帰納法により示す。論理公理のうち $A \vdash A$ および $\bot \vdash \emptyset$ が $V^{\mathbb{B}}$ で成り立つことは明らか。等号公理は $V^{\mathbb{B}}$- 階数に関する帰納法で示せる。

一般の場合について示す。最後に使われた規則について場合分けする。以下、Γ を論理式の有限集合とするとき、$\prod[\![\Gamma]\!] := \prod\{\, [\![\varphi]\!] \mid \varphi \in \Gamma \}$, $\sum[\![\Gamma]\!] := \sum\{\, [\![\varphi]\!] \mid \varphi \in \Gamma \}$ と略記する。弱化規則は明らか。

(Cut)：以下の形の推論図である：

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Theta \vdash \Xi}{\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Xi}\ (\textsc{Cut})$$

帰納法の仮定は次の通り：

$$\prod[\![\Gamma]\!] \leq \sum[\![\Delta]\!] + [\![\varphi]\!], \qquad [\![\varphi]\!] \cdot \prod[\![\Theta]\!] \leq \sum[\![\Xi]\!]$$

しかるに：

$$\begin{aligned}
\prod[\![\Gamma]\!] \cdot \prod[\![\Theta]\!] &\leq \left(\sum[\![\Delta]\!] + [\![\varphi]\!]\right) \cdot \prod[\![\Theta]\!] && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \sum[\![\Delta]\!] \cdot [\![\Theta]\!] + [\![\varphi]\!] \cdot \prod[\![\Theta]\!] && \text{(和・積の分配法則)} \\
&\leq \sum[\![\Delta]\!] \cdot \prod[\![\Theta]\!] + \sum[\![\Xi]\!] && \text{(帰納法の仮定)} \\
&\leq \sum[\![\Delta]\!] + \sum[\![\Xi]\!] && \text{(+ の単調性)}
\end{aligned}$$

($\to$L):

$$\dfrac{\Gamma, \vdash \Delta, \varphi \qquad \psi, \Theta \vdash \Xi}{\varphi \to \psi, \Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Xi}\ (\to\mathrm{L})$$

Cut をちょっと変えればできる。

($\to$R):

$$\dfrac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \to \psi}\ (\to\mathrm{R})$$

帰納法の仮定は次の通りである：

$$\varphi \cdot \prod[\![\Gamma]\!] \leq \sum[\![\Delta]\!] + [\![\psi]\!]$$

から次を示せばよい：

$$[\![\Gamma]\!] \leq \sum[\![\Delta]\!] + [\![\varphi \to \psi]\!]$$

しかるに、

$$\begin{aligned}
\prod[\![\Gamma]\!] &= [\![\varphi]\!] \cdot \prod[\![\Gamma]\!] + (-[\![\varphi]\!]) \cdot \prod[\![\Gamma]\!] && \text{(Boole 代数の基本法則)} \\
&\leq [\![\varphi]\!] \cdot \prod[\![\Gamma]\!] + (-[\![\varphi]\!]) && \text{(+ の単調性)}
\end{aligned}$$

$$\leq \prod [\![\Delta]\!] + [\![\psi]\!] + (-[\![\varphi]\!]) \qquad \text{(帰納法の仮定)}$$
$$= \sum [\![\Delta]\!] + [\![\varphi \to \psi]\!] \qquad \text{($[\![\varphi \to \psi]\!]$ の定義)}$$

よって OK。

(∃L): $x \notin \mathrm{FV}(\Gamma) \cup \mathrm{FV}(\Delta)$ とする。

$$\frac{\varphi(x), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x \varphi(x), \Gamma \vdash \Delta} \ (\exists \mathrm{L})$$

ここで帰納法の仮定が非自明になる。任意の $\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}$ について以下が成り立つ、というのが帰納法の仮定である：

$$\varphi(\dot{x}) \cdot \prod [\![\Gamma]\!] \leq \sum [\![\Delta]\!]$$

$\sum$ は単調なので、両辺を $\dot{x}$ を渡って上限を取れば：

$$\sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \left\{ \varphi(\dot{x}) \cdot \prod [\![\Gamma]\!] \right\} \leq \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \sum [\![\Delta]\!]$$

しかし、仮定より変数 x は Γ, Δ に自由に現れないので結局次を得る：

$$[\![\exists x \varphi(x)]\!] \cdot \prod [\![\Gamma]\!] = \left\{ \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \varphi(\dot{x}) \right\} \cdot \prod [\![\Gamma]\!] = \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \left\{ \varphi(\dot{x}) \cdot \prod [\![\Gamma]\!] \right\} \leq \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \sum [\![\Delta]\!] = \sum [\![\Delta]\!].$$

(∃R): アタリマエ。 □

演習 2.1. 省略したケースを補い、上の証明を完成させよ。

補題 2.2. 以下が成り立つ：

1. $(\dot{x}, b) \in \dot{A} \implies b \leq [\![\dot{x} \in \dot{A}]\!]$.
2. $[\![\exists x \in \dot{A} \ \varphi(x)]\!] = \sum_{(\dot{x}, b) \in \dot{A}} b \cdot [\![\varphi(\dot{x})]\!]$.
3. $[\![\forall x \in \dot{A} \ \varphi(x)]\!] = \prod_{(\dot{x}, b) \in \dot{A}} (-b + [\![\varphi(\dot{x})]\!])$.

証明 (1): $[\![\dot{x} = \dot{x}]\!] = \mathbb{1}$ なので明らか。

(2) が言えれば (3) は補元を取れば明らかなので、(2) を示す。しかるに、

$$[\![\exists x \in \dot{A} \ \varphi(x)]\!] = \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} [\![\dot{x} \in \dot{A}]\!] \cdot [\![\varphi(\dot{x})]\!] \qquad \text{(by definition)}$$
$$= \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{A}} b \cdot [\![\dot{x} = \dot{z}]\!] \cdot [\![\varphi(\dot{x})]\!] \qquad \text{(定義、分配則)}$$
$$\leq \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{A}} b \cdot [\![\varphi(\dot{z})]\!] \qquad \text{(等号公理)}$$
$$= \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{A}} b \cdot [\![\varphi(\dot{z})]\!]$$

$$\leq \sum_{(\dot{z},b)\in\dot{A}} [\![\dot{z} \in \dot{A}]\!] \cdot [\![\varphi(\dot{z})]\!] \qquad (1)$$

$$\leq \sum_{\dot{z}\in V^{\mathbb{B}}} [\![\dot{z} \in \dot{A}]\!] \cdot [\![\varphi(\dot{z})]\!] \qquad (\text{上限の範囲が広がっただけ})$$

よって示せた。 □

系 2.3.

1. $[\![\check{x} \in \check{V}]\!] = \mathbb{1}$
2. $[\![\exists x \in \check{V}\ \varphi(x)]\!] = \sum_{x\in V} [\![\varphi(\check{x})]\!]$
3. $[\![\forall x \in \check{V}\ \varphi(x)]\!] = \prod_{x\in V} [\![\varphi(\check{x})]\!]$

以上から、$V^{\mathbb{B}}$ は少なくとも演繹について閉じていることがわかり、特に三段論法（というか Modus Ponens）を自由に使ってよいことがわかった。

我々の目標は、強制法により ZFC の新しいモデルをつくることであった。なので、V で ZFC が成り立つなら、$V^{\mathbb{B}}$ の中でも ZFC が成り立つことを示すのが当面の目標である。

結論から言えば、ZF や ZFC の公理は、基礎モデル $\check{V}$ で成り立つのなら $V^{\mathbb{B}}$ でも成り立つ。逆に言えば、$V^{\mathbb{B}}$ で成り立つ公理は、$\check{V}$ の性質に依存する。この事を念頭に、$V^{\mathbb{B}}$ の中で $\check{V}$ がどう見えているかを調べてみよう。まず、$\check{V}$ は V と「全く同じ命題を満たす」ことがわかる：

定理 2.4. ZF- 論理式 $\varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ と $a_0, ..., a_{n-1} \in V$ について、以下が成り立つ：

1. $[\![\varphi(\check{a}_0, ..., \check{a}_{n-1})]\!]_{\mathbb{B}} \in \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$.
2. $V \vDash \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \iff V^{\mathbb{B}} \vDash \varphi^{\check{V}}(\check{a}_0, ..., \check{a}_{n-1})$.

証明 論理式の複雑性に関する帰納法。非自明なので $\exists x\varphi(x)$ の場合だけ示す。

$V \vDash \exists x\varphi(x)$ とすると、V は普通の二値モデルなので $x \in V$ で $V \vDash \varphi(x)$ を満たすものがとれる。すると、帰納法の仮定より $V^{\mathbb{B}} \vDash \varphi^{\check{V}}(\check{x})$ が成り立つ。よって $\check{x} \in \check{V} \subseteq V^{\mathbb{B}}$ より

$$\mathbb{1} = \left[\!\!\left[\varphi^{\check{V}}(\check{x})\right]\!\!\right] = [\![\check{x} \in \check{V}]\!] \cdot \left[\!\!\left[\varphi^{\check{V}}(\check{x})\right]\!\!\right] \leq \sum_{\dot{x}} \left\{[\![\dot{x} \in \check{V}]\!] \cdot \left[\!\!\left[\varphi^{\check{V}}(\dot{x})\right]\!\!\right]_{\mathbb{B}}\right\} = [\![\exists x \in \check{V}\ \varphi(x)]\!]$$

となるのでよい。

逆向きを示す：$[\![\exists x\ \ [x \in \check{V} \land \varphi(x)]]\!] = \mathbb{1}$ とする。この時 系 2.3 から：

$$\mathbb{1} = [\![\exists x \in \check{V}\ \varphi(x)]\!] = \sum_{x\in V} [\![\varphi(\check{x})]\!]$$

よって、ある $x \in V$ が存在し、$\left[\!\!\left[\varphi^{\check{V}}(x)\right]\!\!\right] > \mathbb{0}$ となる。すると、帰納法の仮定より $\left[\!\!\left[\varphi^{V}(\check{x})\right]\!\!\right] = \mathbb{1}$ となり、再び帰納法の仮定から $V \vDash \varphi(x)$ が成り立つ。よって $V \vDash \exists x\varphi(x)$ を得る。 □

演習 2.2. 残りのケースを補い、証明を完成させよ。

系 2.5. $V \models \mathrm{ZF} \iff \check{V} \models \mathrm{ZF}$。また、$V \models \mathrm{AC} \iff \check{V} \models \mathrm{AC}$。

定理 2.6. $V^{\mathbb{B}} \models [\check{V}:$ 推移的クラス$]$.

証明 $\dot{x}, \dot{y}$ を任意に取れば、

$$\begin{aligned}
[\![\dot{x} \in \dot{y} \in \check{V}]\!] &= [\![\dot{x} \in \dot{y}]\!] \cdot \sum_{w \in V} [\![\dot{y} = \check{w}]\!] && (\text{系 2.3 より}) \\
&= \sum_{w \in V} [\![\dot{x} \in \dot{y}]\!] \cdot [\![\dot{y} = \check{w}]\!] && (\text{分配則}) \\
&\leq \sum_{w \in V} [\![\dot{x} \in \check{w}]\!] && (\text{等号公理}) \\
&= [\![\dot{x} \in \check{V}]\!] && (\text{系 2.3 より})
\end{aligned}$$

よって $V^{\mathbb{B}} \models [\check{V}:$ 推移的クラス$]$ が示せた。 □

2.1 V と $V^{\mathbb{B}}$ で何が一致するのか：推移的クラスと Δ_1- 絶対性

さて、 以上で $V^{\mathbb{B}}$ の中には $\check{V}$ という V の現し身があり、V と $\check{V}$ で真偽は一致することがわかった。 特に、$V^{\mathbb{B}}$ も $\check{V}$ も ZF のモデルになっているようだが、両者の間でどんな概念が常に一致するのだろうか？

大事なのは、 前節最後の定理が示したように $V^{\mathbb{B}}$ が $\check{V}$ の推移的クラスになっていることである。十分に強い ZF の推移的モデルの間では、色々な概念が一致する（絶対的である）ことがわかる。本節では、主に Δ_1 と呼ばれる論理式のクラスで表現できる概念が、V と $V^{\mathbb{B}}$ の間で一致することを見る。特に、自然数や有限性、順序数、整礎性、「対であること」「関数であること」などといった基本的な概念が V と $V^{\mathbb{B}}$ で一致することを確認する。

定義 2.5 (Levy 階層). 論理式の階層 $\Delta_0 = \Pi_0 = \Sigma_0 \subsetneq \Delta_1 \subsetneq \Pi_1, \Sigma_1 \subsetneq \Delta_2 \subsetneq \ldots$ を次のように定める：

- $\exists x \in t$ の形の量化子を有界であるという。
- 全ての量化子が有界な論理式を Δ_0- 論理式と呼ぶ。$\Pi_0 = \Sigma_0 = \Delta_0$ とする（が、あまりこの記号は用いられない）。
- Π_n- 論理式 φ について、$\exists \bar{x} \varphi$ の形の論理式を Σ_{n+1}- 論理式と呼ぶ。
- Σ_n- 論理式 ψ について、$\forall \bar{x} \psi$ の形の論理式を Π_{n+1}- 論理式と呼ぶ。
- 論理式 χ が理論 T 上 Δ_n であるとは、Σ_n- 論理式 φ と Π_n- 論理式 φ が存在して、$T \vdash \varphi \longleftrightarrow \chi \longleftrightarrow \psi$ が成り立つこと。

Γ を論理式のクラスとするとき、 集合 x が Γ- 概念であるとは、x が Γ- 論理式で定義できることである。

論理式 $\varphi(x,y)$ が関数 f を定めるとき、つまり $\forall x \exists ! y \varphi(x,y)$ が成り立つとき、関数 f がモデル $M \subseteq N$ の間で絶対的であるとは、f は M, N どちらで見ても関数であり、$\mathrm{dom}^M(f) \subseteq \mathrm{dom}^N(f)$ かつ任意の $x \in M$ について $f^M(x) = f^N(x)$ が成り立つことである。

注意 2.4. Δ_0- 論理式で定義できる概念は、つまり与えられたパラメータの範囲だけ調べれば真偽が決定できるような局所的な性質である。なので、与えられた二つの集合論のモデル $M \subseteq N$ の $\in$- 関係が小さい方のモデルの範囲で見たときに完全に一致するのなら、Δ_0- 論理式の真偽（そして任意の Δ_0- 概念）は M と N の間で一致してくれそうである。この「$\in$- 関係が小さいモデルで一致する」というのを精緻化したのが、次の「推移的モデル」の概念である：

定義 2.6. クラス M が**推移的**（**transitive**）であるとは、$x \in y \in M \implies x \in M$ を満たすことである。M が特に集合論のモデルであるとき、そのような M を**推移的モデル**（**transitive model**）と呼ぶ。

定理 2.7. $M \subseteq N$ を集合論の推移的モデルとする。このとき、任意の Δ_0- 概念は M, N の間で絶対的である。

証明 論理式の複雑性に関する帰納法。 □

Δ_0- 概念には次のようなものが挙げられる：

定理 2.8. 次の概念はすべて Δ_0 である：

1. $x = \emptyset$。つまり、$x = 0$。
2. $x \subseteq y$。
3. 「x は推移的」
4. $x = \{y, z\}$
5. $x = \langle y, z\rangle$
6. $x = y \cup z$
7. $x = y \cap z$
8. $x = y \cup \{y\}$。特に、$x = x + 1$
9. 任意の遺伝的有限集合 S について、「$x = S$」。

概念の Δ_0- 性を判定するには、次の定理が役に経つ：

補題 2.9. 和集合公理の下で、$k < \omega$ および Δ_0- 論理式 φ について $\exists x \in \bigcup^{(k)} y\ \varphi$ も Δ_0 で表現可能。ただし：

$$\bigcup^{(0)} x = x, \quad \bigcup^{(k+1)} x = \bigcup\left(\bigcup^{(k)} x\right).$$

系 2.10. 以下は BST で Δ_0- 概念であり、従って BST の推移的モデルで絶対的：

- x は順序対、x は非順序対
- x は関数
- x は関係
- x は順序数

- x は後続順序数
- x は極限順序数
- x は自然数
- $x = \omega$
- $x \subseteq \omega$
- $x = \bigcup y$
- $y = \mathrm{dom}(f), y = \mathrm{cod}(f)$
- f は全単射
- f は関数で、$x \in \mathrm{dom}(f)$ で $f(x) = y$
- 次で定義した場合の「x は有限集合」：$\exists n < \omega \exists f\ f : n \to x$全単射
- 次で定義した場合の「x は遺伝的有限」：

$$\exists n < \omega \exists t \in \mathrm{HF} \exists f : n \to t\ [f : \text{全単射} \wedge t : \text{推移的集合} \wedge x \subseteq t]$$

定義 2.7.　構造 $\langle \mathrm{HF}, \in \rangle$ 上で定義される n- 項関係を**算術的**（**arithmetical**）と言う。

Δ_1- 概念も絶対である：

補題 2.11.　Δ_1- 概念は BST の推移モデルについて絶対的である。

証明　$\varphi(x), \psi(x)$ を Δ_0- 論理式とし、$T \vdash \forall x \varphi(x) \longleftrightarrow \chi \longleftrightarrow \exists x \psi(x)$ とする。$M \subseteq N \vDash T$ を推移的モデルとする。$M \vDash \chi$ から $N \vDash \chi$ を示すには $\exists x \psi(x)$ との同値性と $\psi(x)$ の Δ_0- 性を使って M での証拠が N でも証拠になっていることからわかる。逆に $N \vDash \chi$ から $M \vDash \chi$ を示すには、$N \vDash \forall x \varphi(x)$ と $M \subseteq N$ より任意の $x \in M$ についても $N \vDash \varphi(x)$ が言え、Δ_0 からこれが M でも成り立つことからわかる。 □

注意 2.5.　Δ_1- 論理式は、HF に制限すると決定可能命題や計算可能関数のクラスと一致する。よって、上の命題から次が言える：

系 2.12.　推移的モデルの間で、計算可能関数は絶対的。

Δ_1- 絶対性のほかの重要な応用は、整礎性の絶対性を保証してくれることである：

補題 2.13.　$M \subseteq N$ を $\mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ の推移的モデル、$R \in M$ を $A \in M$ 上の二項関係とするとき、「R は A 上の整礎関係」は絶対的。

証明　整礎関係を「A の任意の空でない部分集合が R- 極小元を持つ」という形で定式化すれば、これは Π_1 である：

$$\forall X\ [\emptyset \neq X \subseteq A \Longrightarrow \exists x \in X \forall y \in X\ \neg y R x]$$

他方で、整礎ならばランク関数 $\rho : A \to \mathrm{On}$ が取れるのだった。とくに、$x\ R\ y \Longrightarrow f(x) < f(y)$ を

満たす関数 $f : A \to \mathrm{On}$ が必ずとれ、またこのような f が存在すれば R は必ず整礎となる。順序数の概念は絶対的であったので、以上を踏まえれば R の整礎性は次の Σ_1- 論理式と同値である：

$$\exists f \exists \alpha \in \mathrm{On}[f : A \to \alpha \wedge \forall x, y \in A \ x \ R \ y \Longrightarrow f(x) < f(y)]$$

以上より、R の整礎性は Δ_1- 概念なので、推移的モデルについて絶対的である。 □

絶対的な論理式・整礎関係を使って超限帰納法で定義できるような概念も推移モデルの間で絶対的である：

補題 2.14 (超限帰納法で定義される関数の絶対性). $M \subseteq N$ を $\mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ の推移的モデル、A を定義可能なクラス、$G(x, y)$ が定義可能な関数、R を A 上で set-like な整礎関係（つまり、任意の $x \in A$ について $x{\downarrow} = \{ y \mid y \ R \ x \}$ が集合であるような整礎関係）とする。更に、G, A, R は M, N の間で絶対的であるとする。ここで、関数 $F(x)$ が $F(x) := G(x, F{\restriction}(x{\downarrow}))$ を満たす超限帰納法で定義された関数のとき、F も M と N の間で絶対的である。

証明 $F^M(a) \neq F^N(a)$ となるような最小な a を取れば $(F{\restriction} a{\downarrow})^M = (F{\restriction} a{\downarrow})^N$ となる。すると G, R, A の絶対性より $F^M(a) = G^M(a, F{\restriction}(a{\downarrow})) = G^N(a, F{\restriction}(a{\downarrow}))$ となり矛盾。 □

これまでの議論の系として以下の絶対性が得られる：

補題 2.15. 以下は $\mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ の推移的モデルの間で絶対的：

1. 二引数関数 $x, y \mapsto x \cup y$ および $x, y \mapsto x \cap y$
2. 集合のランク関数 $x \mapsto \rho(x)$
3. 単項関数 $x \mapsto \bigcup x$ および $x \mapsto \bigcap x$ (ただし $x = \emptyset$ のときは未定義とする)。
4. 推移閉包関数 $x \mapsto \mathrm{trcl}(x)$
5. 対関数 $x, y \mapsto \langle x, y \rangle$ および $x, y \mapsto \{x, y\}$。
6. 二引数関数 $x, y \mapsto x \times y$。
7. 任意の算術的関係
8. $\mathcal{L}$ を言語とするとき、「φ は $\mathcal{L}$- 論理式」「$M \vDash \varphi$」

以上を踏まえれば、$V^{\mathbb{B}}$ と V の間で上で述べたような概念は全て一致する。

系 2.16. 上で挙げた概念はぜんぶ V と $V^{\mathbb{B}}$ の間で絶対的。特に大事なのは：

1. 順序数の概念。
2. 集合の和・直積・共通部分、順序・非順序対。
3. 自然数、有限集合、遺伝的有限集合の概念。決定可能な命題・計算可能な関数。
4. 順序数の算術。
5. 関係の整礎性、整列性、超限再帰で定義された関数・関係。

演習 2.3. 本節で触れた概念が、実際に Δ_0 なり Δ_1 なりその超限再帰なりで書けていることを確かめよ。

3 強制法定理：$V^{\mathbb{B}}$ が ZFC のモデルとなること

さて、かねての宣言通り、いよいよ $V^{\mathbb{B}}$ が集合論の公理系を満たしていることを見ていく。

定理 3.1. $V \models \mathrm{ZF}$ なら $V^{\mathbb{B}} \models \mathrm{ZF}$

証明 内包、外延性、無限、和、対、冪、基礎、収集公理が成り立つことを示す。本証明中では、選択公理は使わない。

外延性は $=$ や $\in$ の解釈の定義から明らかに成り立つ。

まずは**内包公理**を示す。というのも、この先 $f(x) = \dot{y}$ となるような $\dot{y}$ をつくるときに、$[f(\dot{x}) \subseteq \dot{p}]$ となるような $\dot{p}$ を作るだけで済み、経済的だからである。$\varphi(x)$ を $V^{\mathbb{B}}$ をパラメータに持つ $\mathscr{FL}$- 論理式、$\dot{A}$ を $\mathbb{B}$- 名称とする。名称 $\dot{C}$ で任意の $\dot{x}$ について次が成り立つものを取れればよい：

$$[\![\dot{x} \in \dot{C}]\!] = [\![\varphi(\dot{x}) \wedge \dot{x} \in \dot{A}]\!].$$

結論から言えば、次で十分である：

$$\dot{C} \coloneqq \{\, \langle \dot{z}, [\![\dot{z} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{z})]\!] \rangle \mid \dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{A}) \,\}.$$

実際：

$$\begin{aligned}
[\![\dot{x} \in \dot{C}]\!] &= \sum_{\dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{A})} [\![\dot{x} = \dot{z}]\!] \cdot [\![\dot{z} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{z})]\!] && \text{(by definition)} \\
&\le [\![\dot{x} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{x})]\!] && \text{(等号公理)} \\
&= \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{A}} b \cdot [\![\dot{x} = \dot{z}]\!] \cdot [\![\varphi(\dot{x})]\!] && \text{(by definition)} \\
&\le \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{A}} [\![\dot{z} \in \dot{A}]\!] \cdot [\![\dot{x} = \dot{z}]\!] \cdot [\![\varphi(\dot{x})]\!] && (\because\ (\dot{y}, c) \in \dot{A} \Longrightarrow c \le [\![\dot{y} \in \dot{A}]\!]) \\
&= \sum_{\dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{A})} [\![\dot{z} \in \dot{A}]\!] \cdot [\![\dot{x} = \dot{z}]\!] \cdot [\![\varphi(\dot{x})]\!] && (b\text{ が右辺に現れないので}) \\
&\le \sum_{\dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{A})} [\![\dot{z} \in \dot{A}]\!] \cdot [\![\varphi(\dot{z})]\!] \cdot [\![\dot{x} = \dot{z}]\!] && \text{(等号公理、冪等性、交換則)} \\
&= \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{C}} b \cdot [\![\dot{x} = \dot{z}]\!] && (C\text{ の定義}) \\
&= [\![\dot{x} \in \dot{C}]\!] && \text{(by definition)}
\end{aligned}$$

よって $[\![\dot{x} \in \dot{C}]\!] \le [\![\dot{x} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{x})]\!] \le [\![\dot{x} \in \dot{C}]\!]$ が言え、$\dot{C}$ が $\dot{A}$ と $\varphi(x)$ についての内包公理の証拠となることがわかった。

和、対、冪については、$\dot{x}, \dot{y} \in V^{\mathbb{B}}$ に対して $\bigcup \dot{x}$ や $\{\dot{x}, \dot{y}\}$、$\mathcal{P}(\dot{x})$ として振る舞う名前を直接作ってやればよい。特に、対はとても簡単である（ヒント：$\mathbb{1}$ を使おう）。

例として、ここでは**冪集合公理**が成り立つことを見よう。$\dot{x}$ が任意に与えられたときに、$[\![\mathcal{P}(\dot{x}) = \dot{p}]\!] = \mathbb{1}$ となるような $\dot{p}$ をでっちあげる。**内包公理を既に示してある**ので、$[\![\mathcal{P}(\dot{x}) \subseteq \dot{p}]\!] = \mathbb{1}$ となるような $\dot{p}$ さえ取れれば十分である。これは次のようにすればよい：

$$\dot{p} := \{ (\dot{z}, [\![\dot{z} \subseteq \dot{x}]\!]) \mid \dot{z} \subseteq \mathrm{dom}(\dot{x}) \times \mathbb{B} \}.$$

そこで $\dot{z}$ を任意に取り、$[\![\dot{z} \subseteq \dot{x}]\!] \leq [\![\dot{z} \in \dot{p}]\!]$ を示そう。ここで、上の内包公理の証明で $\dot{A} = \dot{x}$、$\varphi(z) \equiv z \in \dot{z}$ として得られるものを $\dot{z}'$ とおくと、$[\![\dot{z}' = \dot{z} \cap \dot{x}]\!] = \mathbb{1}$ となっている。よって、特に $[\![\dot{z} \subseteq \dot{x}]\!] = [\![\dot{z} = \dot{z}']\!]$ となる。他方、取り方より $[\![\dot{z}' \subseteq \dot{x}]\!] = \mathbb{1}$ なので、定義より $(\dot{z}', \mathbb{1}) \in \dot{p}$ である。以上を踏まえれば、

$$\begin{aligned} [\![\dot{z} \subseteq \dot{x}]\!] &= [\![\dot{z} = \dot{z}']\!] = \mathbb{1} \cdot [\![\dot{z} = \dot{z}']\!] \\ &\leq \sum_{(\dot{w}, b) \in \dot{p}} b \cdot [\![\dot{z} = \dot{w}]\!] = [\![\dot{z} \in \dot{p}]\!] \end{aligned}$$

よって示せた。

無限公理は $\check{\omega}$ がそのまま証拠となる。

基礎の公理を示す。$\dot{A}$ を任意にとり $[\![\dot{A} \neq \emptyset \to \exists z \in \dot{A} \forall x \in z \ x \notin \dot{A}]\!] = \mathbb{1}$ を示せばよい。本質的には、$\dot{A}$ の $\mathbb{B}$- 階数最小の名称をとってくればよいだけだが、必ずしも全ての $\mathrm{dom}(\dot{A})$ の元が確率 $\mathbb{1}$ で $\dot{A}$ に含まれるわけではないので、すこし工夫が必要になる。そこで、

$$[\![\dot{A} \neq \emptyset \to \exists z \in \dot{A} \forall x \in z \ x \notin \dot{A}]\!] < \mathbb{1}$$

として矛盾をしめす。このとき補元をとれば、

$$b := [\![\dot{A} \neq \emptyset \land \forall z \in \dot{A} \exists x \in z \ x \in \dot{A}]\!] > \mathbb{0}$$

である。このとき、$\dot{z}$ で $[\![\dot{z} \in \dot{A}]\!] \cdot b > \mathbb{0}$ となるものが存在する。そこで、$\dot{z}$ をそのような中で $V^{\mathbb{B}}$- 階数最小のものとする。すると、

$$\begin{aligned} \mathbb{0} &< [\![\dot{z} \in \dot{A}]\!] \cdot b \cdot b \leq [\![\exists x \in \dot{z} \ x \in \dot{A}]\!] \cdot b \\ &= \sum_{(\dot{x}, c) \in \dot{z}} c \cdot [\![\dot{x} \in \dot{A}]\!] \cdot b && \text{(補題 2.2 の (2)、分配則)} \\ &\leq \sum_{\dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{z})} b \cdot [\![\dot{x} \in \dot{A}]\!] && (\textstyle\sum \text{の単調性}) \end{aligned}$$

とくに $b \cdot [\![\dot{x} \in \dot{A}]\!] > \mathbb{0}$ となる $\dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{z})$ が存在する。しかし、$\dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{z})$ より $\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{x}) < \mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{z})$ となり、これは $\dot{z}$ の $\mathbb{B}$- 階数の極小性に矛盾する。

収集公理を示す。つまり、$\varphi(x, y)$ を $\mathscr{FL}$- 論理式、$\dot{X}$ を $\mathbb{B}$- 名称としたとき、次を満たすような $\dot{Y}$ の存在を示せばよい：

$$[\![\forall x \in \dot{X} [(\exists y \ \varphi(x, y)) \to (\exists y \in \dot{Y} \ \varphi(x, y))]]\!] = \mathbb{1}.$$

このために、V での置換公理を使う。そこで、次の論理式 $\Phi(x, y)$ を考える：

$$\Phi(x, b, y) :\equiv x \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \land b \in \mathbb{B} \land y \in V^{\mathbb{B}} \land [\![\varphi(x, y)]\!] = b$$

V での置換公理を Φ と $\mathrm{dom}(\dot{X}) \times \mathbb{B}$ に適用すれば、集合 $S \subset V^{\mathbb{B}}$ で次を満たすものがとれる：

$$\forall \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \forall b \in \mathbb{B} \ [\exists \dot{y} \ [\![\varphi(\dot{x}, \dot{y})]\!] = b \implies \exists y \in S \ [\![\varphi(\dot{x}, \dot{y})]\!] = b]$$

そこで $\dot{Y} := \{ (\dot{y}, \mathbb{1}) \mid \dot{y} \in S \}$ とおいて、これが求めるものであることを示す。そこで適当に $\dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{X})$ を取り、次を示せばよい：

$$[\![\exists y \ \varphi(\dot{x}, y)]\!] \leq [\![\exists y \in \dot{Y} \ \varphi(\dot{x}, y)]\!]$$

これは結局次の不等式と同値である：

$$\sum_{\dot{y}\in V^{\mathbb{B}}}[\![\varphi(\dot{x},\dot{y})]\!] \leq \sum_{\dot{y}\in\dot{Y}}[\![\varphi(\dot{x},\dot{y})]\!]$$

しかし、$\mathrm{dom}(\dot{Y})$ は $[\![\varphi(\dot{x},\dot{y})]\!]$ のありうる値すべてを実現するのに十分な元を含むので、両辺は明らかに一致する。 □

演習 3.1. 省略した部分を埋め、証明を完成させよ。また、余力があれば、証明中で定義した名称をどう修正すると $\mathbb{B}$ が一般の擬順序の場合でも証明が通るようになるか考えよ。

強制法により ZF が保たれるのと同じように、AC も強制法により保たれる[1]：

定理 3.2. $V \vDash \mathrm{AC}$ なら $V^{\mathbb{B}} \vDash \mathrm{AC}$

証明 $V^{\mathbb{B}}$ で整列可能定理が成立することを示せばよい。以下、$\dot{X}$ を一つ固定し、$[\![\dot{X} : \text{整列可能}]\!] = \mathbb{1}$ を示していく。特に、ある順序数 γ と写像 $f : \gamma \to S$ があって、$\dot{X} \subseteq f[\gamma]$ となっていることが示せればよい。

いま、V で選択公理を仮定しているので、順序数 γ を適当にとり、$\mathrm{dom}(\dot{X}) = \left\{ \dot{x}_\xi \,\middle|\, \xi < \gamma \right\}$ と並べておく。このとき、$\dot{f}$ を以下のように定める：

$$\dot{f} := \left\{ (\mathrm{otp}(\check{\xi}, \dot{x}_\xi), \mathbb{1}) \,\middle|\, \xi < \gamma \right\}.$$

ただし、$\mathrm{otp} : V^{\mathbb{B}} \times V^{\mathbb{B}} \to V^{\mathbb{B}}$ は二つの $\mathbb{B}$- 名称 $\dot{x}, \dot{y}$ が与えられたときに、その非順序対の名称を返すような関数である。

いま、系 2.10 より $\check{\gamma}$ は $V^{\mathbb{B}}$ でも順序数であることに注意しよう。また定め方より次が成り立っている：

$$\left[\!\!\left[\dot{f} : \gamma \to V^{\mathbb{B}}\right]\!\!\right] = \mathbb{1}, \qquad \forall \xi < \gamma \ \left[\!\!\left[\dot{f}(\check{\xi}) = \dot{x}_\xi\right]\!\!\right] = \mathbb{1}.$$

更に、$\dot{x}$ を任意に取れば、定め方から明らかに

$$\begin{aligned}
[\![\dot{x} \in \dot{X}]\!] &= \sum_{\xi<\gamma, (\dot{x}_\xi, b)\in\dot{X}} b \cdot \left[\!\!\left[\dot{x}_\xi = \dot{x}\right]\!\!\right] \\
&\leq \sum_{\xi<\gamma}\left[\!\!\left[\dot{x}_\xi = \dot{x}\right]\!\!\right] \\
&= \sum_{\xi<\gamma}\left[\!\!\left[\dot{x}_\xi = \dot{x}\right]\!\!\right] \cdot \left[\!\!\left[\dot{f}(\check{\xi}) = \dot{x}_\xi\right]\!\!\right] \\
&= \sum_{\xi<\gamma}[\![f(\check{\xi}) = \dot{x}]\!] \\
&= [\![\dot{x} \in f[\gamma]]\!]
\end{aligned}$$

よって示せた。 □

---

1) 逆に ZF + ¬AC のモデルから AC を強制できるか？という問題は、V が特定の形をしていない限り巨大基数公理とかかわってくる問題になる。選択公理があるとかなり強制法が便利になるかわり、そのものを強制しようとおもうと大変なのである。

補題 3.3. Vで $\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}$ が Vで $\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{x}) = \alpha$ を満たすとき、$V^{\mathbb{B}} \vDash \rho^{V^{\mathbb{B}}}(\dot{x}) \leq \alpha$

証明 $\mathbb{B}$- 階数に関する帰納法で示す。帰納法の仮定は、任意の $\xi < \gamma$ について $\forall \dot{z} \in V^{\mathbb{B}}_{\xi+1}$ $V^{\mathbb{B}} \vDash \rho^{V^{\mathbb{B}}}(\dot{z}) \leq \xi$ である。$\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{x}) = \xi$ を取る。このとき定義より、

$$V^{\mathbb{B}} \vDash \rho(\dot{x}) = \sup\{\, \rho(\dot{y}) + 1 \mid \dot{y} \in \dot{x} \,\}.$$

である。すると、帰納法の仮定より任意の $\dot{y} \in \mathrm{dom}(\dot{x})$ について $V^{\mathbb{B}} \vDash \mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{y}) < \gamma$ である。よってとくに、

$$\left[\!\left[\forall \dot{y} \in \dot{x}\ \rho^{V^{\mathbb{B}}}(\dot{y}) \leq \xi \right]\!\right] = \prod_{(\dot{y},b) \in \dot{x}} (-b + [\![\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{y}) < \gamma]\!]) = \prod_{(\dot{y},b) \in \dot{x}} 1 = 1$$

今 $V^{\mathbb{B}}$ は ZF のモデルだったので、$V^{\mathbb{B}} \vDash \rho(\dot{x}) \leq \gamma$ が従う。 □

補題 3.4. $V^{\mathbb{B}} \vDash \mathrm{On} \subseteq \check{V}$

証明 $\dot{\alpha}$ を $\mathbb{B}$- 名称とし、Vで $\gamma := \mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{\alpha}) + 1$ とする。すると上の補題から $V^{\mathbb{B}} \vDash \rho(\dot{\alpha}) < \gamma$ である。順序数上の順序は $\in$ と一致するので、これは $V^{\mathbb{B}} \vDash \rho(\dot{\alpha}) \in \gamma$ ということである。

一方で、順序数 α について $\rho(\alpha) = \alpha$ が成り立つことは ZF の定理であるから、

$$[\![\dot{\alpha} \in \mathrm{On}]\!] \leq [\![\dot{\alpha} = \rho(\dot{\alpha}) \in \check{\gamma} \in \check{V}]\!] \leq [\![\dot{\alpha} \in \check{V}]\!]$$

以上より $[\![\dot{\alpha} \in \mathrm{On} \to \dot{\alpha} \in \check{V}]\!] = \mathbb{1}$ を得る。 □

これまでの結果をまとめた次の定理が概ね「強制法定理」と呼ばれるものである。

定理 3.5 (強制法定理). $\mathbb{B} \in V$を Vにおける完備 Boole 代数とする。このとき次が成り立つ：

1. $V \vDash \mathrm{ZF}$ ならば $V^{\mathbb{B}} \vDash \mathrm{ZF}$。
2. $V \vDash \mathrm{ZFC}$ ならば $V^{\mathbb{B}} \vDash \mathrm{ZFC}$。
3. $\check{V}$は $V^{\mathbb{B}}$ の中で推移的なクラスであり、$\mathrm{On}^{V^{\mathbb{B}}} = \mathrm{On}^{\check{V}}$。
4. Vでの真偽と $V^{\mathbb{B}}$ でみた $\check{V}$の真理は一致する。 つまり、 任意の ZF- 論理式 $\varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ と $x_i \in V$について：

$$V \vDash \varphi(x_0, ..., x_{n-1}) \iff V^{\mathbb{B}} \vDash \varphi^{\check{V}}(\check{x}_0, ..., \check{x}_{n-1}).$$

強制法定理により、$\mathrm{ZFC} + \varphi$ の無矛盾性を示すには、完備 Boole 代数 $\mathbb{B}$ で $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}} > \mathbb{0}$ を満たすものを探せばよい、ということがわかる。相対無矛盾性の定義（の気持ち）は、「$\mathrm{ZFC} + \varphi$ から矛盾の証明が得られた時、ZFC から矛盾の証明に書き換える具体的な手続きが存在する」 ことであった。いま、$[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}} > \mathbb{0}$ であり、 なおかつ $\mathrm{ZFC} + \varphi$ から矛盾に至る証明が存在したとする。特に、ZFC の有限部分 $\Gamma \Subset \mathrm{ZFC}$ があって、$\Gamma, \varphi \vdash \bot$ となっているとする。 定理 3.5 より $\prod [\![\Gamma]\!] = \mathbb{1}$ であることに注意すれば、真偽値の健全性 補題 2.1 より、

$$\mathbb{0} < [\![\varphi]\!] = [\![\Gamma]\!] \cdot [\![\varphi]\!] \leq [\![\bot]\!] = \mathbb{0}$$

よって $\mathbb{0} \neq \mathbb{0}$ となり矛盾を得る。ここで、個別の推件式に対する健全性定理の証明は具体的に書き下すことが

できるので、これによって相対無矛盾性が示されたことになる。

ところで、∃の $V^{\mathbb{B}}$ での解釈は上限で定義されていた。特に、$V^{\mathbb{B}} \vDash \exists x \varphi(x)$ であった場合、$[\![\varphi(\dot{x})]\!] > \mathbb{0}$ を満たすような $\dot{x}$ は定義より直ちに取れる。つまり、「成り立ち得る」$\dot{x}$ 見付けることは容易い。一方で二値的（Tarski）モデルの場合のように、$V^{\mathbb{B}} \vDash \varphi(\dot{x})$ が成り立つようなただ一つの $\dot{x}$ が取れるかは直ちには明らかではない。実は、選択公理の下でこれは常に成り立つ：

定理 3.6 (Maximal Principle). $V \vDash \mathrm{AC}$ とする。$\varphi(x)$ を $\mathscr{FL}$- 論理式とした時、次を満たす $\dot{x}$ が存在：

$$[\![\exists x \varphi(x)]\!] = [\![\varphi(\dot{x})]\!]$$

これには次の補題を使う：

補題 3.7 (Mixing Lemma). $\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数とし、$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{B}$ を反鎖、$\langle \dot{x}_a \mid a \in \mathcal{A} \rangle$ を $\mathcal{A}$ で添え字づけられた $\mathbb{B}$- 名称の族とする。このとき、次を満たす名称 $\dot{x}$ が存在する：

$$\forall a \in \mathcal{A} \ \ a \leq [\![\dot{x} = \dot{x}_a]\!].$$

証明　以下で定めればよい：

$$\dot{x} \coloneqq \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{ (\dot{y}, b \cdot a) \mid (\dot{y}, b) \in \dot{x}_a \}$$

ここで、$\mathcal{A}$ は反鎖なので、

$$a \cdot a' = \begin{cases} a & a = a' \\ \mathbb{0} & a \neq a' \end{cases}$$

が成り立つことに注意する。このとき $\dot{z}$ を任意にとれば：

$$\begin{aligned} a \cdot [\![\dot{z} \in \dot{x}]\!] &= a \cdot \sum_{(\dot{w}, b) \in \dot{x}} b \cdot [\![\dot{z} = \dot{w}]\!] \\ &= \sum_{\substack{a' \in \mathcal{A} \\ (\dot{y}, c) \in \dot{x}_{a'}}} a \cdot c \cdot a' \cdot [\![\dot{z} = \dot{y}]\!] && \text{(定義と分配則)} \\ &= \sum_{(\dot{y}, c) \in \dot{x}_a} a \cdot c \cdot [\![\dot{z} = \dot{y}]\!] = a \cdot \sum_{(\dot{y}, c) \in \dot{x}_a} c \cdot [\![\dot{z} = \dot{y}]\!] && (a \cdot a' = a \cdot \delta_{a,a'}) \\ &= a \cdot [\![\dot{z} \in \dot{x}_a]\!] \end{aligned}$$

よって $a \leq [\![\dot{x} = \dot{x}_a]\!]$ が言えた。 □

Proof of Maximal Principle. 定義より $[\![\varphi(\dot{x})]\!] \leq [\![\exists x \varphi(x)]\!]$ は任意の任意の $\dot{x}$ について成り立つので、特に $[\![\exists x \varphi(x)]\!] \leq [\![\varphi(\dot{x})]\!]$ を満たす $\dot{x}$ を見付ければよい。また、$[\![\exists x \varphi(x)]\!] = \mathbb{0}$ の時は自明なので、以下 $b \coloneqq [\![\exists x \varphi(x)]\!] > \mathbb{0}$ として議論を進める。

いま、$D \coloneqq \left\{ [\![\varphi(\dot{x})]\!] \,\middle|\, \dot{x} \in V^{\mathbb{B}}, [\![\varphi(\dot{x})]\!] > 0 \right\}$ とおけば、$b = \sum D$、つまり D は b 以下で前稠密である。そこで、$\mathcal{A} \subseteq D$ を $D{\downarrow}$ に含まれる中で極大な反鎖とすれば、$\sum \mathcal{A} = \sum \mathcal{D} = b$ である。更に、各 $a \in \mathcal{A}$ に対して $\dot{x}_a$ を $[\![\varphi(\dot{x}) = a]\!]$ を満たすような $\dot{x}$ の一つとして取る。

すると、Mixing Lemma より $\dot{x}$ で任意の $a \in \mathcal{A}$ について $a \leq [\![\dot{x} = \dot{x}_a]\!]$ を満たすものが取れる。よって、

$$b = \sum \mathcal{A} = \sum_{a \in \mathcal{A}} [\![\varphi(\dot{x}_a)]\!] \leq \sum_{a \in \mathcal{A}} [\![\varphi(\dot{x}_a)]\!] \cdot [\![\dot{x} = \dot{x}_a]\!] = \sum_{a \in \mathcal{A}} [\![\varphi(\dot{x})]\!] = [\![\varphi(\dot{x})]\!]$$

□

注意 3.1. Maximal Principle を完備 Boole 代数から擬順序に一般化した命題は、実は ZF 上選択公理と同値になる。ことが知られている。この事は、5 で一般の擬順序による強制法が導入されたら、再び立ち返る。

4 Boole 値モデル $V^{\mathbb{B}}$ と $(V, \mathbb{B})$- 生成的フィルター

定義 4.1. $(V, \mathbb{B})$- 生成的フィルターの標準的な名称 $\dot{G}$ を次で定める：

$$\dot{G} := \{ (\check{b}, b) \mid b \in \mathbb{B} \}.$$

また、$\mathbb{B}$- 名称 $\dot{x}$ について、超フィルター U による解釈 $\dot{x}_U$ を以下で定める：

$$\dot{x}_U := \left\{ \dot{y}_U \,\middle|\, \exists b \in U \ (\dot{y}, b) \in \dot{x} \right\}.$$

定理 4.1 (真理補題). φ を $V^{\mathbb{B}}$ の元をパラメータに持つ $\mathcal{FL}$- 論理式、$b \in \mathbb{B}$ とする。

1. $b = [\![\check{b} \in \dot{G}]\!]$
2. $V^{\mathbb{B}} \vDash [\varphi \longleftrightarrow \widecheck{[\![\varphi]\!]} \in \dot{G}]$。よって特に $p \Vdash \varphi \iff V^{\mathbb{B}} \vDash [\check{p} \in \dot{G} \to \varphi]$

定義 4.2. $\mathbb{P}$ を擬順序とする。

- $U \subseteq \mathbb{P}$ が**開集合** $\overset{\text{def}}{\iff} c \leq b \in U \implies c \in U.$
- $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}^+$ が**反鎖**（**antichain**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の相異なる $p, q \in \mathcal{A}$ について $p \perp q.$
- $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}^+$ が**極大反鎖**（**maximal antichain**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{A}$ は反鎖であり、包含関係 $\subseteq$ について極大。
- $\mathcal{F}$ を集合の族とする。$\mathbb{P}$ のフィルター $G \subseteq \mathbb{P}$ が $\mathcal{F}$- **生成的**フィルター（$\mathcal{F}$-**generic filter**）である $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $\mathbb{P}$ の前稠密集合 $D \in \mathcal{F}$ について $D \cap G \neq \emptyset$。特に、M が $\mathbb{P} \in M$ なる十分強い（あるいは弱い）集合論のモデルであるとき、$(M, \mathbb{P})$- **生成的**フィルターとは、$\{ A \in M \mid A \subseteq \mathbb{P} \}$- 生成的フィルターのことを指す。

注意 4.1. 上の定義は一般の擬順序でも Boole 代数でも使えるように定義しているが、擬順序による強制法を考える場合は最小元を持たない場合が多く、ほとんどすべての例で $\mathbb{P}^+ = \mathbb{P}$ となっている。なので、Boole 代数による強制法を明示的に考えているのでない限り、議論の上で $\mathbb{P}^+$ の元かどうかを気にする必要はほとんどない。一方、ランダム強制法などの場合は完備 Boole 代数による強制法を考えるので、そういう場合はちゃんと気にする必要がある。

補題 4.2. $\mathbb{B}$ が Boole 代数とし、$b, c \in \mathbb{B}$ のとき、以下が成り立つ：

1. $\mathbb{B}^+ = \{b \in \mathbb{B} \mid b > 0\}$.
2. $b \perp c \iff b \cdot c = 0$。また、$b \parallel c \iff b \cdot c > 0$.
3. $\mathbb{B}$ が D の上限 $\sum D$ を持つとき、$D \subseteq \mathbb{B}$ が前稠密 $\iff \sum D = \mathbb{1}$

演習 4.1. 示せ。

補題 4.3. $\mathbb{B}$ を Boole 代数とする。

1. $D \subseteq \mathbb{B}^+$ が前稠密 $\iff$ 任意の $b \in \mathbb{B}^+$ について、$d \in D$ で $d \parallel b$ となるものが取れる。
2. 極大反鎖は前稠密である。
3. 稠密集合は前稠密である。

注意 4.2. 稠密集合・前稠密集合は「ほとんど至るところ」で成り立つ普遍的な性質に対応していると思える。一方で、極大反鎖は完全な「場合分け」を与えていることに相当する。つまるところ、生成的フィルターとは、「ほとんどすべて」の元が満たすような性質は全部満たすような条件に対応しており、また次の補題で見るように、満たすべき場合分けが与えられればどの枝が選ばれているのか完全に決定するようなものである。この意味で、生成的フィルターは一般的(ジェネリック)な条件に対応している。

補題 4.4. $\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数とし、M を $\mathbb{B} \in M$ となる十分強い集合論のモデル（選択公理、冪集合、対、和、分出公理あたりがあれば大丈夫）とする。このとき、次は同値：

1. G は $(M, \mathbb{B})$- 生成的フィルター。つまり、G は M に属する任意の $\mathbb{B}$- 前稠密集合と交わる。
2. 任意の $\mathbb{B}$- 極大反鎖 $\mathcal{A} \in M$ について $\mathcal{A} \cap G \neq \emptyset$。
3. 任意の $\mathbb{B}$- 稠密集合 $D \in M$ について $D \cap G \neq \emptyset$。
4. 任意の $\mathbb{B}$- 稠密開集合 $D \in M$ について $D \cap G \neq \emptyset$。

証明 (1) $\implies$ (2): 極大反鎖は前稠密なのであたりまえ。

(2) $\implies$ (3): D を稠密集合とする。このとき、$\mathcal{A} \subseteq D$ となるような中で極大な反鎖 $\mathcal{A}$ を取れば、これは $\mathbb{B}$ の極大反鎖になっている。

(3) $\implies$ (4): 条件が強くなっているだけなのであたりまえ。

(4) $\implies$ (1): D を前稠密集合とすると、$E := D{\downarrow} = \{b \leq d \mid d \in D\}$ は稠密開集合である。仮定より $b \in G \cap E$ が取れるが、これは定義より $G \cap E \ni b \leq d$ となる $d \in D$ が取れることを意味する。G はフィルターなので、特に上に閉じているから、結局 $d \in G \cap D$ となる。 □

定理 4.5. M を十分強い集合論のモデルとする。$\mathbb{B} \in M$ を完備 Boole 代数、G を $(M, \mathbb{B})$- 生成的フィルターとするとき、G は $\mathbb{B}$ の超フィルターである。

証明　任意の $p \in \mathbb{B}^+$ について $\{p, -p\}$ は極大反鎖なので、G と交わる。

擬順序の場合も通用する証明にしたい場合は、かわりに $\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \vee q \perp p\}$ を考えてもよい。 □

定理 4.6. $V^{\mathbb{B}} \models \dot{G} : (V, \mathbb{B})$- 生成的。つまり、$V^{\mathbb{B}} \models \forall D \in \check{V}\ [D \subseteq \mathbb{B} : \text{前稠密} \to D \cap \dot{G} \neq \emptyset]$.

証明　$D \subseteq \mathbb{B}$ を前稠密とする。$\mathbb{B}$：完備 Boole 代数より $\sum D = \mathbb{1}$ に注意すれば、

$$[\![\check{D} \cap \dot{G} \neq \emptyset]\!] = [\![\exists d \in \check{D}\ (d \in \dot{G})]\!] = \sum_{d \in D} [\![\check{d} \in \dot{G}]\!] = \sum D = \mathbb{1}$$

よって示せた。 □

定理 4.7. 任意の $\sigma \in V^{\mathbb{B}}$ について $V^{\mathbb{B}} \models \sigma = \check{\sigma}_{\dot{G}}$。

証明　$\mathbb{B}$- 階数による帰納法により示す。$\dot{x}$ を任意に取れば、

$$[\![\dot{x} \in \sigma]\!] = \sum_{(\tau, b) \in \sigma} b \cdot [\![\dot{x} = \tau]\!] = \sum_{(\tau, b) \in \sigma} b \cdot [\![\dot{x} = \tau]\!] \cdot [\![\tau = \check{\tau}_{\dot{G}}]\!] = \sum_{(\tau, b) \in \sigma} [\![\check{b} \in \dot{G}]\!] \cdot [\![\dot{x} = \check{\tau}_{\dot{G}}]\!] = [\![\dot{x} \in \check{\sigma}_{\dot{G}}]\!]$$

よって示せた。 □

系 4.8. $V^{\mathbb{B}} \models \forall x \exists \sigma \in \check{V}\ x = \sigma_{\dot{G}}$ が成り立つので、つまり $V^{\mathbb{B}} \models$ 「私は $\check{V}[\dot{G}]$ です」

「面白い」 ような完備 Boole 代数 $\mathbb{B}$ については、$(V, \mathbb{B})$- 生成的フィルターは決して V には属さないことがわかる：

定義 4.3. $p \in \mathbb{P}$ が擬順序 $\mathbb{P}$ の**原子**（**atom**）$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $q, r \leq p$ について $q \parallel r$。

注意 4.3. 完備 Boole 代数の場合、p が原子であることは、$\mathbb{B}^+$ の極小元であることと同値である。

補題 4.9. $\mathbb{P}$ が原子を持たず、$F \subseteq \mathbb{B}$ がフィルターなら、$\mathbb{B} \setminus F$ は稠密である。

証明　まず、F がフィルター、$q \perp r$ の $q \in \mathbb{B} \setminus F$ または $r \in \mathbb{B} \setminus F$ の少なくとも一方は成り立たなければならない。なぜなら、どちらも属さないなら $q, r \in F$ となり、$0 = q \cdot r \in F$ となって $0 \notin F$ に矛盾するからである。

そこで $\mathbb{P}$ が原子を持たないとすると、どんな $p \in \mathbb{P}$ についても $q \perp r$ となる $q, r \leq p$ が取れる。よって上の議論から $q \in \mathbb{P} \setminus F$ か $r \in \mathbb{P} \setminus F$ の少なくとも一方が成り立つ。よって $\mathbb{P} \setminus F$ は稠密である。 □

系 4.10. 次は同値：

1. $\mathbb{B}$ が原子を持たない
2. $(V, \mathbb{B})$- 生成的フィルターは V に存在しない。

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2)：補題 4.9 から $G \in V$ とすると $G \cap (\mathbb{B} \setminus G) = \emptyset$ となり G の生成性に矛盾する。

(2) $\Longrightarrow$ (1)：対偶を示す。p が原子としたとき、$F := \{ b \in \mathbb{B} \mid p \leq b \}$ はフィルターであり、これは p の極小性から任意の稠密集合と交わる。明らかに $F \in V$ なので、これが V に属す $(V, \mathbb{B})$- 生成的フィルターである。 □

5 強制関係と擬順序による強制法

前節までは、主に完備 Boole 代数による強制法を考えてきた。実用上はより一般の擬順序による強制法が使われることが多い。本節では、完備 Boole 代数による強制法理論から擬順序による定式化を導出する。

> **記法．** 以下、特に断わらない限り、$\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$ などの P 以降の黒板太字は（Boole 代数かもしれない）擬順序を、$\mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ などは Boole 代数を表すものとする。

さて、Boole 値モデルでは最初に真偽値 $[\![\varphi]\!] \in \mathbb{B}$ を定義し、その上で強制関係を $p \Vdash \varphi \iff p \leq [\![\varphi]\!]$ として定義していた。一般の擬順序についても、Boole 完備化を介してこの定義を採用することで強制関係 $p \Vdash \varphi$ を定義することができる。定義のために、擬順序・Boole 代数間で対応する名称間の読み替えを行うための方法を与えておく。

> **定義 5.1.** $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ を写像とする。$\dot{x} \in V^{\mathbb{P}}$ に対して、$e_*(\dot{x}) \in V^{\mathbb{Q}}$ を以下のように $\mathbb{P}$- 階数に関する帰納法で定義する：
>
> $$e_*(\dot{x}) := \{ (e_*(\dot{y}), e(p)) \mid (\dot{y}, p) \in \dot{x} \}$$

上の記号法の下で、一般の擬順序に関する強制関係 $\Vdash$ を次のように定義する：

> **定義 5.2.** $\mathbb{P}$ を擬順序、$d : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{B}(\mathbb{P})$ をその Boole 完備化とする。$p \in \mathbb{P}$、$\mathcal{FL}$- 論理式 $\varphi(\bar{x})$ および $\mathbb{P}$- 名称 $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in V^{\mathbb{P}}$ に対して、$p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ を以下で定義する：
>
> $$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \iff d(p) \leq_{\mathbb{B}(\mathbb{P})} [\![\varphi(d_*(\dot{x}_0), \ldots, d_*(\dot{x}_{n-1}))]\!]$$
>
> 特に、$\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi :\equiv \mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ という略記を用いる。

極論、上の定義さえあれば擬順序による強制法を利用することができる。とはいえ、一般に作りたい対称を付加する強制法が一発で完備 Boole 代数になるとは限らず、そういう場合にいちいち一回完備化を取って往き来して計算するのは、正直いって面倒である。そこで、この**強制関係 $p \Vdash \varphi$ を完備化 $\mathbb{B}(\mathbb{P})$ に言及せずに $\mathbb{P}$ の擬順序のみを使って特徴づける**ことを以下当面の目標とする。

こうした名称の読み替えのうち、$e^{-1}[G]$ と e_* は、稠密埋め込みまで要求せずとも、より弱い性質を満たす埋め込みがあれば十分「機能」する。特に、以下では種々の擬順序や完備 Boole 代数の間の埋め込みについて議論をするが、その中で稠密埋め込みと並んで重要な役割を果すのが**完備埋め込み**である。

> **定義 5.3.** $f : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ が**完備埋め込み**（**complete embedding**、記号：$f : \mathbb{P} \overset{\lessdot}{\to} \mathbb{Q}$）$\overset{\text{def}}{\iff}$
>
> 1. 単調性：$p \leq_{\mathbb{P}} q \Longrightarrow f(p) \leq_{\mathbb{Q}} f(q)$,

2. $\mathcal{A}$ が $\mathbb{P}$ の極大反鎖なら、$f[\mathcal{A}]$ も $\mathbb{Q}$ で極大反鎖である。

演習 5.1. 稠密埋め込みは完備埋め込みであることを示せ。

注意 5.1. $f : \mathbb{P} \to \mathbb{B}$ で $\mathbb{B}$ が Boole 代数のとき、完備埋め込みおよび稠密埋め込みは、暗に $f[\mathbb{P}^+] \subseteq \mathbb{B}^+$ を要請していることに注意する。これは、完備埋め込みの場合は「反鎖」を $\mathbb{P}^+$ の部分集合として定義しているからであり、稠密埋め込みは稠密集合が $\mathbb{Q}^+$ の部分集合として定義しているからである。

こういったことを一々気にするのは面倒くさい。Boole 代数でないような擬順序で強制法を使う場合、考える擬順序はほとんどすべての例で最小元を持たないものである。そこで、以下では断わらない限り擬順序は最小元を持たない、$\mathbb{P} = \mathbb{P}^+$ となるようなものであると思って扱うことにする。この立場に立っても、証明を微妙に変えてやれば最小元を持つような擬順序にも対応できる。あるいはあらかじめなくなるまで最小元を取り除いてやってから適用している、と思ってもよい。

稠密埋め込みの定義は $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ に関して Δ_0- 論理式で書けるので、「$f : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ が稠密埋め込みである」という概念は強制拡大の前後で不変である。一方、完備埋め込みは上の定義が直感的でわかりやすいが、$\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ に関する Δ_1- 論理式で書けるかは直ちにはわからず、強制拡大の前後で性質が変わらないか不安に思うかもしれない。しかし、次の特徴付けが知られており、これは明らかに $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ に関して Δ_0 である：

補題 5.1. $f : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ について次は同値：

1. f は完備埋め込み
2. f は以下を満たす：
   (a) 単調性：$p \leq_{\mathbb{P}} q \Longrightarrow f(p) \leq_{\mathbb{Q}} f(q)$,
   (b) $\perp$- 準同型：$p \perp_{\mathbb{P}} q \Longrightarrow f(p) \perp_{\mathbb{Q}} f(q)$,
   (c) 任意の $q \in \mathbb{Q}$ に対し、f による q の $\mathbb{P}$ への**簡約**（**reduction**）$q^* \in \mathbb{P}$ が存在し、次を満たす：

$$\forall p \in \mathbb{P} \left[f(p) \perp_{\mathbb{Q}} q \to p \perp q^* \right]$$

演習 5.2. 上の補題を示せ。

まず、完備埋め込みにより ˇ- 名称が保たれることがわかる：

補題 5.2. $e : \mathbb{P} \overset{<}{\to} \mathbb{Q}$ が完備埋め込みなら、$[\![\check{x} = e_*(\check{x})]\!] = \mathbb{1}$。ただし、左辺の $\check{x}$ は $V^{\mathbb{Q}}$ の、右辺の e_* の内側の $\check{x}$ は $V^{\mathbb{P}}$ のチェック作用素である。

証明 V- 階数に関する帰納法で $[\![\sigma \in \check{x}]\!] = [\![\sigma \in e_*(\check{x})]\!]$ を示せばよい。 □

系 5.3. $d : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{B}(\mathbb{P}), p \in \mathbb{P}$ について $d(p) = [\![d_*(\check{q}) \in d_*(\dot{G})]\!] = [\![\widecheck{d(p)} \in \dot{G}]\!]$.

上の系から、特に $d_*(\dot{G})$ と $\dot{G}$ は $\mathbb{P}$ に関する限りは同一視して構わないことがわかった。

また、以下の議論では擬順序 $\mathbb{P}$ とその Boole 完備化 $d:\mathbb{P}\hookrightarrow\mathbb{B}(\mathbb{P})$ の間を頻繁に往き来して議論する。この際に、行き先で $d(p)\leq_{\mathbb{B}(\mathbb{P})} d(q)$ が成り立つことと、もとの擬順序での $p\leq_{\mathbb{P}} q$ が成り立つことの関係をしっかり意識する必要がある。

Boole 完備化を扱った際に、$\leq$ を拡張する擬順序 $\trianglelefteq$ を導入し、$\leq$ と $\trianglelefteq$ が一致する**分離的**と呼ばれる擬順序のクラスを導入した。この時分離性はいささかテクニカルな定義に見えたかもしれないが、強制法の文脈では非常に自然な要請であることを以下見ていく。まず補題が成り立つ：

補題 5.4. 擬順序 $\mathbb{P},\mathbb{Q}$ と単調写像 $e:\mathbb{P}\to\mathbb{Q}$ が $p\perp_{\mathbb{P}} q\implies e(p)\perp_{\mathbb{Q}} e(q)$ を満たすとき：

$$e(p)\trianglelefteq_{\mathbb{Q}} e(q)\implies p\trianglelefteq_{\mathbb{P}} q$$

証明 まず、対偶を取れば仮定から $e(p)\parallel_{\mathbb{Q}} e(q)\implies p\parallel_{\mathbb{P}} q$ であることに注意する。$e(p)\trianglelefteq e(q)$ とする。$r\leq p$ を任意に取り、$r\parallel q$ となることを示す。すると e の単調性から $e(r)\leq e(p)$ となる。すると 演習 1.9 より特に推移性から $e(r)\trianglelefteq e(q)$ となる。特に $e(r)\parallel e(q)$ となるので、$r\parallel q$ を得る。 □

系 5.5. 稠密埋め込み $d:\mathbb{P}\hookrightarrow\mathbb{Q}$ について、$p\trianglelefteq_{\mathbb{P}} q\iff d(p)\trianglelefteq_{\mathbb{Q}} d(q)$。また、$\mathbb{Q}$ が分離的なら $p\trianglelefteq_{\mathbb{P}} q\iff d(p)\leq d(q)$。

分離性の「嬉しさ」を述べているのが、次の補題である：

補題 5.6. $p,q\in\mathbb{P}$ とし、$d:\mathbb{P}\hookrightarrow\mathbb{B}(\mathbb{P})$ を完備埋め込みするとき、次は同値：

1. $p\trianglelefteq q$,
2. $d(p)\leq d(q)$
3. $p\Vdash\check{q}\in\dot{G}$

証明 $(1)\iff(2)$ は 系 5.5 そのもの。

$(2)\iff(3)$ は 系 5.3 および真理補題（ 定理 4.1 ）の (1) から従う。 □

系 5.7. $p\trianglelefteq q\Vdash\varphi\implies p\Vdash\varphi$

特に、擬順序版の真理補題が直ちに従う：

系 5.8 (真理補題・擬順序版).

1. $p\Vdash\check{p}\in\dot{G}$
2. $\Vdash\left[\varphi\longleftrightarrow\exists p\in\dot{G}\ (p\Vdash\varphi)^V\right]$
3. $p\Vdash\varphi$ ならば $\Vdash[\check{p}\in\dot{G}\to\varphi]$

また、稠密性・前稠密性については $\leq$ を使っても $\trianglelefteq$ を使っても同値となる：

補題 5.9. $D\subseteq\mathbb{P},p\in\mathbb{P}^+$ について以下は同値：

1. D は p 以下で前稠密
2. 任意の $q \trianglelefteq p$ について、$r \parallel_{\mathbb{P}} q$ となる $r \in D$ が存在。

補題 5.10. $D \subseteq \mathbb{P}, p \in \mathbb{P}^+$ について以下は同値：

1. D は p 以下で稠密
2. 任意の $q \trianglelefteq p$ について、$r \leq_{\mathbb{P}} q$ となる $r \in D$ が存在。

補題 5.11. $D \subseteq \mathbb{P}$ が開集合（つまり $q \leq p \in D \Longrightarrow q \in D$）のとき、任意の $p \in \mathbb{P}$ について次は同値：

1. $\exists r \in D\ r \trianglelefteq p$,
2. $\exists r \in D\ r \parallel p$.
3. $\exists r \in D\ r \leq p$.

演習 5.3. 上の三つの補題を示せ。

以上が教えてくれるのは、強制関係を考える限りにおいて、$\trianglelefteq$ と $\leq$ には本質的な差がないということである。これを踏まえれば、分離性の「$\leq$ と $\trianglelefteq$ が一致する」という要請は、強制法の文脈では非常に自然な定義であることがわかるだろう。

以上の準備の下で、論理式を帰納的にバラしていくと、$\Vdash$ は次の特徴付けを満たすことがわかる：

定理 5.12 (Definability Lemma). $\mathbb{P}$ を擬順序、$p \in \mathbb{P}^+$ とする。

1. $p \Vdash \dot{x} \in \sigma \iff \{\, r \in \mathbb{P} \mid \exists(\dot{y}, b) \in \sigma\ [r \leq b \land r \Vdash \dot{x} = \dot{y}] \,\}$ が p 以下で稠密。
2. $p \Vdash \dot{x} = \dot{y} \iff \forall \dot{z} \in \mathrm{dom}(\dot{x}) \cup \mathrm{dom}(\dot{y}) \forall q \leq p\ [(q \Vdash \dot{z} \in \dot{x}) \longleftrightarrow (q \Vdash \dot{z} \in \dot{y})]$。
3. $p \Vdash \dot{x} \in \check{V} \iff \{\, q \mid \exists z \in V\ (q \Vdash \dot{x} = \check{z}) \,\}$ が p 以下で稠密。
4. $p \Vdash \neg\varphi \iff \forall q \leq p\ q \nVdash \varphi$
5. $p \Vdash \varphi \lor \psi \iff \{\, q \mid (q \Vdash \varphi) \lor (q \Vdash \psi) \,\}$ が p 以下で稠密。
6. $p \Vdash \varphi \land \psi \iff p \Vdash \varphi$ かつ $p \Vdash \psi$。
7. $p \Vdash \varphi \to \psi \iff \nexists q \leq p\ [(q \Vdash \varphi) \land (q \Vdash \neg\psi)]$。
8. $p \Vdash \exists x \varphi(x) \iff \{\, q \mid \exists \dot{x}\ (q \Vdash \varphi(\dot{x})) \,\}$ が p 以下で稠密。

証明 パラメータの $\mathbb{B}$- 階数と論理式の複雑さに対する帰納法で示す。$\in$ の場合のみ示してみよう。

$$D := \{\, r \in \mathbb{P} \mid \exists(\dot{y}, b) \in \sigma\ [r \leq b \land r \Vdash \dot{x} = \dot{y}] \,\}$$

が p 以下で稠密であることを示す。このとき、

$$E_{\dot{y}} := \{\, r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash \dot{x} = \dot{y} \,\},$$

は $\Vdash$ の定義より開集合であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} D : p \text{ 以下で稠密} &\iff \forall q \trianglelefteq p\ \exists r \in D\ r \leq q && (\text{補題 } 5.10) \\ &\iff \forall q \trianglelefteq p\ \exists(\dot{y}, b) \in \sigma\ \exists r \in E_{\dot{y}}\ r \leq q, b && (\text{定義}) \end{aligned}$$

$$\iff \forall q \trianglelefteq p \ \exists(\dot{y},b) \in \sigma \ \exists r \in E_{\dot{y}} \ r \trianglelefteq q,b \qquad (\text{補題 5.11})$$

$$\iff \forall q \trianglelefteq p \ \exists(\dot{y},b) \in \sigma \ \exists r \ [r \trianglelefteq q,b \wedge r \Vdash \dot{x} = \dot{y}]. \qquad (\text{定義})$$

となる。これを踏まえれば、

$$d(p) \leq [\![d_*(\dot{x}) \in d_*(\sigma)]\!] = \sum_{(\dot{y},b)\in\sigma} d(b) \cdot [\![d_*(\dot{x}) = d_*(\dot{y})]\!]$$

$$\iff \forall q \leq_{\mathbb{B}(\mathbb{P})} d(p) \ \exists(\dot{y},b) \in \sigma \ [q \cdot d(b) \cdot [\![d_*(\dot{x}) = d_*(\dot{y})]\!] > \mathbb{0}] \qquad (\text{上限の定義})$$

$$\iff \forall d(q) \leq_{\mathbb{B}(\mathbb{P})} d(p) \ \exists(\dot{y},b) \in \sigma \ [d(q) \cdot d(b) \cdot [\![d_*(\dot{x}) = d_*(\dot{y})]\!] > \mathbb{0}] \qquad (d \text{ の稠密性})$$

$$\iff \forall d(q) \leq d(p) \ \exists(\dot{y},b) \in \sigma \ \exists r \in \mathbb{P} \ [d(r) \leq d(q), d(b) \wedge r \Vdash \dot{x} = \dot{y}] \qquad (d \text{ の稠密性})$$

$$\iff \forall q \trianglelefteq p \ \exists(\dot{y},b) \in \sigma \ \exists r \in \mathbb{P} \ [r \trianglelefteq q,b \wedge r \Vdash \dot{x} = \dot{y}] \qquad (\text{補題 5.6})$$

$$\iff D : p \text{ 以下で稠密} \qquad (\text{上の議論より})$$

残りも同様。 □

演習 5.4. Definability Lemma の残りの節を埋め、証明を完成させよ。

以下の補題は $\Vdash$ を計算する上で非常によく使われる：

系 5.13.

1. $p \Vdash \varphi \iff \forall q \leq p \ (q \Vdash \varphi)$
2. $p \Vdash \varphi \to \psi \iff \forall q \leq p \ [(q \Vdash \varphi) \to \exists r \leq q \ (q \Vdash \psi)]$
3. $p \Vdash \exists x \in \check{A} \ \varphi(x) \iff \{\, q \mid \exists a \in A \ (q \Vdash \varphi(\check{a})) \,\}$ が p 以下で稠密。
4. $p \Vdash \varphi \iff \{\, r \leq p \mid r \Vdash \varphi \,\}$: dense below p
5. $p \not\Vdash \varphi \iff \exists r \leq p \ r \Vdash \neg\varphi$

注意 5.2. 我々は Boole 完備化を前提に $\Vdash$ を定義し上の性質を導いたが、逆に **Definability Lemma の各節を $\Vdash$ の定義だと思うこともできる**。実際、擬順序による強制法では、もっぱら上の特徴付けを基に強制関係の計算を行うことになる。

こうした理論構成は、Boole 完備化が常に取れるとは限らない弱い集合論上で強制法をする場合に必要となる。そんなにないように見えるかもしれないが、冪集合公理が必ずしも成り立たない $H(\kappa)$ やその可算初等部分モデル上で強制法をすることはよくある。こういう場合は擬順序の一階の理論で展開できる Definability Lemma による定義が威力を発揮することになる。

演習 5.5. 上の補題を、Definability Lemma のみを仮定して証明せよ。

注意 5.3. 上の 系 5.13 の (1) と 系 5.7 とは $\leq$ と $\trianglelefteq$ の差しかない。この意味で、強制法に関する限りでは $\trianglelefteq$ は $\leq$ と同値であるということがわかり、分離的擬順序はこれらがちゃんと一致する、ということを要請している。

以上で擬順序で強制法を使う最低限の道具が整った。ところで、我々は $V^{\mathbb{P}}$ の元を $d_*(-)$ によって $V^{\mathbb{B}(\mathbb{P})}$ に埋め込んで扱っており、これにより $\mathbb{P}$- による強制法で付加され得る元は $V^{\mathbb{B}(\mathbb{P})}$ に常にあると思ってよかった。しかし、$\mathbb{B}(\mathbb{P})$ による強制法と $\mathbb{P}$ が「同値」であるというからには、この逆も成り立ってほしい。つまり、$V^{\mathbb{B}(\mathbb{P})}$ の元が与えられたときに、それと完全に値が一致するような $V^{\mathbb{P}}$ の元があるだろうか？という疑問が湧いてくる[2)]。

また、$\dot{G}_{\mathbb{P}}$ を d_* で送ってやると真理補題が成り立つようないい感じのフィルターになっていた。では $d_*(\dot{G}_{\mathbb{P}})$ は $(V, \mathbb{P})$- 生成的になっているだろうか？また、$V^{\mathbb{B}(\mathbb{P})}$ には $\dot{G}_{\mathbb{B}(\mathbb{P})}$ があるが、これと $d_*(\dot{G}_{\mathbb{P}})$ はどのような関係にあるだろうか？

以下ではこうした疑問を解決し、$V^{\mathbb{P}}, V^{\mathbb{B}(\mathbb{P})}$ 両者が本当の意味で「強制法について同値」であることを見ていく。

定義 5.4. $d : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ を写像とする。

1. $\dot{x} \in V^{\mathbb{Q}}$ に大して、$e^*(\dot{x}) \in V^{\mathbb{P}}$ を以下のように $\mathbb{Q}$- 階数に関する帰納法で定義する：
$$e^*(\dot{x}) := \left\{ (e^*(\dot{y}), q) \,\middle|\, (\dot{y}, q) \in \dot{x}, e(p) \leq_{\mathbb{Q}} q \right\}$$
2. $F \subseteq \mathbb{P}$ を $\mathbb{P}$ のフィルターとするとき、$\tilde{e}(F) \subseteq \mathbb{Q}$ を以下で定める：
$$\tilde{e}(F) := \left\{ q \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \exists p \in F \left(e(p) \leq_{\mathbb{Q}} q \right) \right\}$$
つまり、$\tilde{e}(F)$ は $e[F]$ が $\mathbb{Q}$ で生成するフィルターである。

補題 5.14. $d : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{B}(\mathbb{P})$ を完備化、$\sigma \in V^{\mathbb{B}(\mathbb{P})}$ とするとき、$[\![d_*(d^*(\sigma)) = \sigma]\!] = \mathbb{1}$。

演習 5.6. 上を示せ。$\mathbb{B}$- 階数に関する帰納法で $[\![\dot{x} \in d_*(d^*(\sigma))]\!] = [\![\dot{x} \in \sigma]\!]$ を示せばよい。演習 1.4 を使う。

系 5.15. $\Vdash_{\mathbb{P}} d^*(d_*(\dot{x})) = \dot{x}$

以上から、$V^{\mathbb{P}}$ と $V^{\mathbb{B}(\mathbb{P})}$ は本質的に同値であることが確かめられた。あとは生成的フィルターの対応関係を調べれば十分そうである。

結論からいうと、完備埋め込み $f : \mathbb{P} \xrightarrow{\lessdot} \mathbb{Q}$ の存在は、実は「$\mathbb{Q}$ による強制法で $\mathbb{P}$ の生成的フィルターも付加される」という形で特徴づけることができ、更に埋め込みが稠密の場合この対応が同型になる。

補題 5.16. $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ が完備埋め込みとする時、次が成立：

1. $V^{\mathbb{Q}} \vDash e^{-1}[\dot{G}_{\mathbb{Q}}] : (V, \mathbb{P})$-generic
2. $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$ に対して、$V^{\mathbb{Q}} \vDash \check{e}_*(\check{\sigma})_{\dot{G}_{\mathbb{Q}}} = \check{\sigma}_{e^{-1}[\dot{G}_{\mathbb{Q}}]}$ が成り立つ。

2) 最初から完備 Boole 代数を使って強制法を導入している Jech [1] では、なんと $V^{\mathbb{P}} \cong V^{\mathbb{B}(\mathbb{P})}$ としてしまっているのでこの問題は出ない。が、こうした場合でも暗黙裡にこうした名称の変換を間に噛ませていることになる。

証明　我々の $\Vdash$ の定義から、値域が完備 Boole 代数 $\mathbb{Q} = \mathbb{B}(\mathbb{Q})$ であるときだけ具体的に計算すればよい。

(1): 完備埋め込みが極大反鎖を保つことから直ちに従う。

(2): $\mathbb{B}$- 階数に関する帰納法で示せる。 □

系 5.17.　$d : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{B}(\mathbb{P})$ を完備化とするとき、$\left[\!\left[d_*(\dot{G}_{\mathbb{P}}) = d^{-1}[\dot{G}_{\mathbb{B}(\mathbb{P})}] \right]\!\right] = \mathbb{1}$

ここまでで、$V^{\mathbb{B}(\mathbb{P})}$ と $V^{\mathbb{P}}$ の元の対応関係は明らかになり、更に $\dot{G}_{\mathbb{P}}$ が d を介して無事 $(V, \mathbb{P})$- 生成的フィルターの役割を果してくれることがわかった。以上から、強制法定理の擬順序版が得られる：

系 5.18 (強制法定理・擬順序版).

1. $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathrm{ZF}$
2. $V \vDash \mathrm{AC}$ なら $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathrm{AC}$
3. $\Vdash_{\mathbb{P}} \check{V}$: 推移的モデル
4. $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathrm{On} \subseteq \check{V}$
5. $V \vDash \varphi(x) \iff \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\check{x})$
6. $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{G} : (V, \mathbb{P})$-generic filter
7. $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{G}$: 俺は $\check{V}[\dot{G}]$

実は、擬順序が分離的であるとき、 補題 5.16 の逆も成り立つことがわかる。

補題 5.19.　$\mathbb{Q}$ が分離的擬順序で写像 $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ が次を満たすとする：

$$V^{\mathbb{Q}} \vDash e^{-1}[\dot{G}_{\mathbb{Q}}] : (V, \mathbb{P})\text{-generic filter}$$

このとき、e は完備埋め込みである。

証明　単調性を示す。$p \leq_{\mathbb{P}} q$ とすると、$V^{\mathbb{Q}} \vDash \left[p \in e^{-1}[\dot{G}_{\mathbb{Q}}] \to q \in e^{-1}[\dot{G}_{\mathbb{Q}}] \right]$ が成り立ち、特に定義より $V^{\mathbb{Q}} \vDash \left[e(p) \in \dot{G}_{\mathbb{Q}} \to e(q) \in \dot{G}_{\mathbb{Q}} \right]$ となる。よって、$\mathbb{Q}$ の分離性と 補題 52 より $e(p) \leq e(q)$ を得る。

$e(\mathbb{1}) \in \dot{G}_{\mathbb{Q}}$ より $\mathbb{1}$ 上の議論と同様に $\forall q \ q \leq e(\mathbb{1})$ が言え、$e(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ が常に成り立つ。

一旦 $\perp$ を保つことも見ておく。対偶を示す： $e(p) \parallel e(q)$ ならば $p \parallel q$ であることを示す。$e(p) \parallel e(q)$ なので、$r \leq_{\mathbb{Q}} e(p), e(q)$ となる $r \in \mathbb{Q}$ をとっておく。 すると、$r \Vdash e(p), e(q) \in \dot{G}_{\mathbb{Q}}$ であり、 定義より $r \Vdash p, q \in e^{-1}[\dot{G}_{\mathbb{Q}}]$ となる。このとき、$\Vdash e^{-1}[\dot{G}_{\mathbb{Q}}]$: filter であるので、$r \Vdash p \parallel q$ でなくてはならない。$r \parallel q$ は $\mathbb{P}$ に関する一階の命題であり、特に $\check{V}$ に相対化された論理式で書け、$r \in \mathbb{P}^+$ なので V でも $p \parallel q$ となる。

以上から e は反鎖を反鎖に移すことがわかったので、 極大性が保たれることを言えばよい。$\mathcal{A}$ を $\mathbb{P}$ の極大反鎖とし、$q \in \mathbb{Q}$ を適当にとり、$r \in e[\mathcal{A}]$ で $r \parallel q$ となるものがとれればよい。いま仮定から $q \Vdash \mathcal{A} \cap e^{-1}[\dot{G}_{\mathbb{Q}}] \neq \emptyset$ であり、これは定義より $q \Vdash \exists r \in \underset{\smile}{e[\mathcal{A}]} \left[r \in \dot{G}_{\mathbb{Q}} \right]$ と同値である。すると、 系 5.13 から $s \leq q$ と $r \in e[\mathcal{A}]$ で $s \Vdash \check{r} \in \dot{G}_{\mathbb{Q}}$ を満たすものが取れる。 このとき $s \Vdash \check{r}, \check{q} \in \dot{G}_{\mathbb{Q}}$ より特に $s \Vdash \check{r} \parallel \check{q}$ となり、Δ_0 絶対性より V で見ても $r \parallel q$ が成り立つ。 □

更に、 上では e を個別に固定したが、 完備化まで込めて考えれば、 単純に 「$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{P}$ の $(V, \mathbb{P})$- 生成的フィ

ルターを付加する」という条件と「完備埋め込みがなんでもいいから存在する」は同値になる：

補題 5.20. $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ が擬順序のとき、次は同値：

1. $\mathbb{P}$ から $\mathbb{B}(\mathbb{Q})$ への完備埋め込みが存在する
2. $\exists \dot{H} \in V^{\mathbb{B}(\mathbb{Q})}\ V^{\mathbb{B}(\mathbb{Q})} \vDash [\dot{H} : (V, \mathbb{P})\text{-generic}]$

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2) はすでに見たので、(2) $\Longrightarrow$ (1) を示す。結論から言うと、次の写像が求めるものである：

$$e(p) := [\![\check{p} \in \dot{H}]\!]$$

めちゃくちゃ素直な定義である。単調性や $\mathbb{1}$ を保つことは自明である。$\perp$ を保つこともこれまでと同様に（というか $\mathbb{B}$ が Boole 代数なのでもっと簡単に）示せる。

あとは $\mathcal{A}$ を $\mathbb{P}$ の極大反鎖として $e[\mathcal{A}]$ が $\mathbb{B}$ でも極大であることが言えればよい。特に、$e[\mathcal{A}]$ が前稠密であるということが示せればよいが、今 $\mathbb{B}$ は完備 Boole 代数なので $\sum e[\mathcal{A}] = \mathbb{1}$ が示せればよい。しかるに：

$$\begin{aligned}
\sum e[\mathcal{A}] &= \sum_{a \in \mathcal{A}} e(a) = \sum_{a \in \mathcal{A}} [\![\check{a} \in \dot{H}]\!] && \text{(定義)} \\
&= [\![\exists a \in \check{\mathcal{A}}\ \check{a} \in \dot{H}]\!] && \text{(系 2.3 (2))} \\
&= [\![\check{\mathcal{A}} \cap \dot{H} \neq \emptyset]\!] = \mathbb{1} && (\dot{H}\text{: } (V, \mathbb{P})\text{- 生成的、}\mathcal{A}\text{: 極大反鎖より})
\end{aligned}$$

よって示せた。 □

注意 5.4. 擬順序 $\mathbb{P}$ と $V^{\mathbb{P}} \vDash [\dot{\mathbb{Q}} : \text{擬順序}]$ となるような擬順序の $\mathbb{P}$- 名称 $\dot{\mathbb{Q}}$ が与えられたときに、「$\mathbb{P}$ の後に今度は $\dot{\mathbb{Q}}$ で強制拡大する」という操作を一つにまとめた（V での）**二段階反復擬順序** $\mathbb{P} * \dot{Q}$ が定義できる。実は、$\mathbb{P}$ から $\mathbb{Q}$ に完備埋め込みが存在するとき、**商の** $\mathbb{P}$- **名称** $(\mathbb{Q} : \mathbb{P})$ を定義することができる。これは $V^{\mathbb{P}}$ の中で「$\check{\mathbb{Q}}$ のうち $V^{\mathbb{Q}}$ にいくのに足りない分」になるような名前である。より詳しく、$\mathbb{Q}$ から $\mathbb{P} * (\mathbb{Q} : \mathbb{P})$ への稠密埋め込みが存在し、特に両者は強制法として同値になる、ということが示せる。このように、完備埋め込みの存在は、「一方の強制法が他方の強制法の途中に現れる」という状況を特徴づけるとても良い概念であることがわかる。

演習 5.7. 本セミナーでは完備 Boole 代数による強制法を基に Definability Lemma を導出した。先述したように、逆に Definability Lemma を $\Vdash$ の定義として採用した上で本節の内容を逆向きに再現することもできる。とても時間がかかるが、余力があればこのことを実践してみよ。

特に、$d : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ を稠密埋め込みとし、次を Definability Lemma のみから示せ：

1. $V^{\mathbb{P}} \vDash \dot{G}_{\mathbb{P}} : (\check{V}, \mathbb{P})\text{-generic filter}$
2. $V^{\mathbb{P}}$ において次が成立： $H := \tilde{d}(G_{\mathbb{P}})$ は $(V, \mathbb{Q})$- 生成的フィルターで、$G_{\mathbb{P}} = d^{-1}[H]$。
3. $V^{\mathbb{Q}}$ において次が成立： $H := d^{-1}[G_{\mathbb{Q}}]$ は $(V, \mathbb{P})$- 生成的フィルターで、かつ $G_{\mathbb{Q}} = \tilde{d}(H)$。

以上で $G_{\mathbb{P}} \mapsto \tilde{e}(G_{\mathbb{P}}), G_{\mathbb{Q}} \mapsto e^{-1}[G_{\mathbb{Q}}]$ はある意味で逆演算であることがわかった。そこで、この対応を念頭に、この定理では以下 $\dot{G}_{\mathbb{P}}, \dot{G}_{\mathbb{Q}}$ は共に $\mathbb{P}$- 名称としても $\mathbb{Q}$- 名称としても用いることにする。たとえば、$\mathbb{P}$- 名称としての $G_{\mathbb{P}}$ は普通の標準的名称であり、$\mathbb{P}$- 名称としての $\dot{G}_{\mathbb{Q}}$ は $\tilde{d}(G_{\mathbb{P}})$ を指す $\mathbb{P}$- 名称と

する。逆に $\dot{G}_{\mathbb{P}}$ を $\mathbb{Q}$- 名称として用いたとき、これは $d^{-1}[G_{\mathbb{Q}}]$ の名称を指すものとする。

4. $\sigma \in V^{\mathbb{P}}, \tau \in V^{\mathbb{Q}}$ について、$V^{\mathbb{P}} \vDash \check{\tau}_{\dot{G}_{\mathbb{Q}}} = d^*(\check{\tau})_{\dot{G}_{\mathbb{P}}}$ かつ $V^{\mathbb{Q}} \vDash \check{\sigma}_{\dot{G}_{\mathbb{P}}} = d_*(\check{\sigma})_{\dot{G}_{\mathbb{P}}}$
5. $\sigma \in V^{\mathbb{P}}, \tau \in V^{\mathbb{Q}}$ について、$V^{\mathbb{P}} \vDash d^*(d_*(\sigma)) = \sigma$ かつ $V^{\mathbb{Q}} \vDash d_*(d^*(\tau)) = \tau$
6. $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in V^{\mathbb{P}}$、$\mathcal{FL}$- 論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ について、
$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \iff d(p) \Vdash_{\mathbb{Q}} \varphi(d_*(\dot{x}_0), \ldots, d_*(\dot{x}_{n-1}))$$
7. $\dot{y}_0, \ldots, \dot{y}_{n-1} \in V^{\mathbb{Q}}$、$\mathcal{FL}$- 論理式 $\varphi(y_0, \ldots, y_{n-1})$ について、
$$q \Vdash_{\mathbb{Q}} \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \iff \forall p \in \mathbb{P}\ \left[d(p) \leq q \implies p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(d^*(\dot{x}_0), \ldots, d^*(\dot{x}_{n-1}))\right]$$

擬順序による強制法のごく簡単な応用として、 かねて宣言していた Maximal Principle と選択公理の同値性を示してみよう。

補題 5.21 (Maximal Principle, 擬順序版). $\varphi(x)$ を $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$- 論理式、$\mathbb{P}$ を擬順序、$p \in \mathbb{P}$ とする。このとき、
$$p \Vdash \exists x \varphi(x) \iff \exists \dot{x} \in V^{\mathbb{P}}\ [p \Vdash \varphi(\dot{x})]$$

証明 完備化を取ったあと完備 Boole 代数版を適用し、その名称を引き戻してくればよい。 □

定理 5.22. ZF 上次は同値：

1. AC
2. 擬順序の Maximal Principle

証明 (1) $\implies$ (2) は明らか。(2) $\implies$ (1) を示せば十分。

$\langle X_i \mid i \in I \rangle$ を空でない集合からなる族とする。擬順序 $\mathbb{P}$ を次で定義する：
$$\mathbb{P} := \{\mathbb{1}\} \sqcup I$$
$$p \leq q \overset{\text{def}}{\iff} p = q \vee q = \mathbb{1}$$
つまり、 最大元が一つだけあって、 その下に I の各元が極小元としてぶら下がって極大反鎖を成しているような擬順序である。$\mathbb{P}$- 名称 $\dot{X}$ を次で定める：
$$\dot{X} := \{\, (\check{X}_i, i) \mid i \in I \,\}$$
つまり、$i \Vdash \dot{X} = \check{X}_i$ となるような名称である。各 X_i は空でないので、このとき次が成り立つ：
$$\mathbb{1} \Vdash \exists x\ (x \in \dot{X})$$
すると、Maximal Principle により、$\dot{x} \in V^{\mathbb{P}}$ で $\mathbb{1} \Vdash \dot{x} \in \dot{X}$ となるものが取れる。

このとき $i \in I$ を任意にとると、$\dot{X}$ と $\dot{x}$ の取り方より $i \Vdash \dot{x} \in \check{X}_i$ である。これは
$$D := \left\{ q \leq i \mid \exists x \in X_i\ \ (q \Vdash \check{x} \in \check{X}_i) \right\}$$
が i 以下で稠密であるということである。 しかし、 今 i は極小元なので結局 $i \in D$ となる他なく、 従って

$x \in X_i$ で $i \Vdash \dot{x} = \check{x}$ となるものが取れる。しかも、このような x は一意である。なぜなら、ほかにも $i \Vdash \dot{x} = \check{x}'$ となるような $x' \in X_i$ が存在したとすると、等号公理から $i \Vdash \check{x} = \check{x}'$ となるが、これは Δ_0-論理式なので V で見ても $x = x'$ が成り立つからである。そこで、この一意な $x \in X_i$ を x_i と書くことにする。

以上から、$\dot{x}$ から選択関数 $(x_i)_{i \in I} \in \prod_i X_i$ が定義できた。 □

6 集合論のモデルの生成拡大と強制法拡大

さて、前節まででBoole値モデルの場合は真偽値、擬順序の場合は強制関係を使ってその中で考えることで、仮想的に V の生成拡大 $V[G]$ を考える方法を確立した。特に、ある命題 φ の ZFC に対する無矛盾性を示すことは、完備 Boole 代数 $\mathbb{B}$ で $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}} > \mathbb{0}$ となるものを見付けてやることに帰着された。擬順序の場合であれば、これは $p \in \mathbb{P}^+$ であって $p \Vdash \varphi$ となるものを見付けてやることと同じであった。

一方で、実際の集合論の研究では、真偽値や強制関係を直接計算して結果を得ることもあれば、改めて断らずに「$V[G]$ が本当にある」と思って議論をする事もあり、どちらの手法を採るべきかは何を示したいかによって変わってくる。とはいえ、後者の「実際に $V[G]$ をとる」方法がはたしてちゃんと正当化されるのかは、ちゃんと気にしたほうがよいことである。そこで本節では、こうした立場を正当化する手法について二三言及しておこう。

まず、Hamkins–Seabold による強制法の自然主義的正当化 [2] により、選択公理を仮定してよければあるいみで $V[G]$ と思える（推移的とは限らない）クラスが V の中で定義可能であり、第1章で見た理論の解釈をパラメータつきに一般化することで相対無矛盾性証明の方法として直接的にも正当化できることを見る。続く節では、ある（クラスでも集合でもよい）推移的モデル M の生成拡大 $M[G]$ が存在する場合、それと強制関係がどのように関係するのかについて述べておく。また、どのような M なら実際にそのような $M[G]$ が取れるのかについても議論する。この流れで、Kunen [3] などで採用されている c.t.m. による強制法の正当化についても軽く言及しておく。

もっとも、これら二つの見方はどちらも V で AC を仮定するものである。多くの結果は別にそれで問題がないが、内部モデル理論や記述集合論などでは、AC が成り立たないようなモデル上で強制法をすることがよくある。こうした場合については、前節までで述べたような、強制関係や Boole 値モデルを介して仮想的に $V[G]$ を取っていると思って議論することになる。

6.1 Hamkins–Seabold の強制法の自然主義的正当化

V で選択公理が成立している場合は、Hamkins–Seabold [2] による**強制法の自然主義的正当化**と呼ばれる方法を用いて、ある意味で V 自身の強制拡大 $V[G]$ に「同値」なクラスモデルを具体的に構成することができる。これは、大雑把にいって $V^{\mathbb{B}}$ を $\mathbb{B}$ の超フィルター U で割ることによって得られる。鍵となるのは次の Boole 超冪版 Łoś の定理である：

定義 6.1. $\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数、$U \subseteq \mathbb{B}$ を超フィルター、$\dot{x}, \dot{y} \in V^{\mathbb{B}}$ とし、$V^{\mathbb{B}}/U$ を次のように定義する：

$$\dot{x} \sim_U \dot{y} \iff [\![\dot{x} = \dot{y}]\!] \in U, \qquad \dot{x} \in_U \dot{y} \iff [\![\dot{x} \in \dot{y}]\!] \in U,$$

$$[\dot{x}]_U := \left\{ \dot{y} \in V^{\mathbb{B}} \,\middle|\, \dot{x} \sim_U \dot{y} \text{ となる } \dot{y} \text{ の中で rank 最小のもの} \right\},$$
$$\check{V}_U := \left\{ [\dot{x}]_U \,\middle|\, [\![\dot{x} \in \check{V}]\!] \in U \right\},$$
$$V^{\mathbb{B}} \big/ U := \left\{ [\dot{x}]_U \,\middle|\, \dot{x} \in V^{\mathbb{B}} \right\}.$$
$$j_U(x) := [\check{x}]_U.$$

$V^{\mathbb{B}}$ で等号公理が成り立つことから、$\in_U$ および $\check{V}_U$ は $V^{\mathbb{B}}\big/U$ 上で well-defined であることに注意する。以下、$V^{\mathbb{B}}\big/U$ をクラス構造 $\left\langle V^{\mathbb{B}}\big/U, \in_U, \check{V}_U \right\rangle$ と同一視する。

$j_U : V \prec \check{V}_U \subseteq V^{\mathbb{B}}\big/U$ を U による V の **Boole 超冪**と呼ぶ。

補題 6.1. $\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数、$U \subseteq \mathbb{B}$ を超フィルター、$\varphi(\bar{x})$ を $\mathcal{FL}_{\mathbb{B}}$- 論理式とするとき、次は同値：

1. $V^{\mathbb{B}}\big/U \vDash \varphi([\tau_0]_U, \dots, [\tau_{n-1}]_U)$,
2. $[\![\varphi(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})]\!] \in U$。

演習 6.1. 示せ。クラスサイズ対集合サイズの差はあるが、本質的には無限組合せ論パートの完全性定理の証明で示している。$\exists x \varphi(x)$ の処理には Maximal Principle を使う。

補題 6.2. $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$- 論理式 $\varphi(\bar{x})$ および $[\tau_i] \in \check{V}_U$ に対し次は同値：

1. $(\check{V}_U, \in_U) \vDash \varphi([\tau_0]_U, \dots, [\tau_{n-1}]_U)$,
2. $[\![\varphi^{\check{V}}(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})]\!] \in U$.

演習 6.2. こちらも示せ。

系 6.3. 以下が成立：

1. $V^{\mathbb{B}}\big/U \vDash \mathrm{ZFC}$.
2. $j_U : (V, \in) \prec (\check{V}_U, \in_U)$。
3. $V^{\mathbb{B}}\big/U \vDash$ "$\check{V}_U$ は推移的クラスで俺は $\check{V}_U[\dot{G}]$".
4. $\check{V}_U$ は $V^{\mathbb{B}}\big/U$ の内部モデルである。

定理 6.4. 次は同値：

1. j_U が同型
2. U が $(V, \mathbb{B})$- 生成的フィルター。

以上の結果を Boole 超冪の構造を捨象すれば次が得られる：

定理 6.5 (強制法の自然主義的正当化). 任意の完備 Boole 代数 $\mathbb{B}$ に対し、パラメータを使って定義可能なクラスの五つ組 $\langle \bar{V}, G, \bar{V}[G], j, \bar{\in} \rangle$ で次を満たすものが存在する：

1. $j : (V, \in) \prec (\bar{V}, \bar{\in})$,
2. $(\bar{V}[G], \bar{\in}) \vDash \mathrm{ZFC}$,
3. $\bar{V}[G] \vDash G \subseteq j(\mathbb{B}) : (\bar{V}, j(\mathbb{B}))$-generic filter,
4. $\bar{V}[G] \vDash$ "$\bar{V}$ は推移的クラスで俺は $\bar{V}$ の G- 生成拡大",
5. $\mathcal{FL}_{\mathbb{B}}$- 論理式 φ について、$\bar{V}[G] \vDash \varphi \iff j(\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{B}}) \mathrel{\bar{\in}} G$.

V と $\bar{V}$ は必ずしも一致しない（既に $V[G]$ から見て G による商を取ったような状況でしか一致しない）が、$\bar{V}$ は V の初等拡大になっているので V に属する元については同一視してしまって問題ない。その上で、$\bar{V}$ に対する生成拡大になっているような $\bar{V}[G]$ が直接とれる、というのが強制法の自然主義的正当化の主張である。これにはもちろん V での選択公理が必要になるが、裏を返せば AC さえ認めてしまえば、V と $\bar{V}$ の同一視という最小限の妥当な方便のもとで直接 G や $V[G]$ に相当する対象が直接とれるのが、自然主義的正当化の嬉しいところである。

また、第一章で触れた理論の解釈をパラメータつきの論理式に一般化したものを考えれば、この強制法の自然主義的正当化による論理式を書き下してやることで、一瞬にして相対無矛盾性証明の正当化もできる。

演習 6.3 (パラメータつきの理論の解釈). 第一章で定義した言語の翻訳・理論の解釈でパラメータを許すように拡張したものを考えてみよう。以下、$\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ を言語とし、特に $\mathcal{L}$ は述語記号のみを持つとする。

言語 $\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}'$ への m- 変数パラメータを持つ翻訳 t とは、以下から成るものである：

1. パラメータの条件を定める m- 変数 $\mathcal{L}'$- 論理式 $\pi^t(w_0, \ldots, w_{m-1})$、
2. 定義域を定める $(m+1)$- 変数 $\mathcal{L}'$- 論理式 $\delta^t(\bar{w}, x)$、
3. $\mathcal{L}$ の各 k- 変数述語記号 R について $(k+m)$- 変数 $\mathcal{L}'$- 論理式 $\varphi^t_R(\bar{w}, x_0, \ldots, x_{k-1})$.

$\mathcal{L}$- 論理式 φ の t- 翻訳 φ^t は、パラメータを持たない時と同様次のように定める：

$$(x = y)^t :\equiv x = y, \qquad R^t(x_0, \ldots, x_{n-1}) :\equiv \varphi^t_R(x_0, \ldots, x_{n-1})$$
$$\bot^t :\equiv \bot, \qquad (\varphi \to \psi)^t :\equiv \varphi^t \to \psi^t$$
$$(\exists x \ \varphi)^t :\equiv \exists x \left[\delta^t(\bar{w}, x) \wedge \varphi^t\right]$$

ただし、$\exists$ の翻訳に現れる $\bar{w}$ は φ には現れない変数であるとする。特に、翻訳の前後で $\bar{w}$ が自由変数として新たに現れる得ることに注意しよう。

T を $\mathcal{L}$- 理論、T' を $\mathcal{L}'$- 理論とする。m- 変数パラメータつき翻訳 t が次を満たすとい、t は T の T' での m- 変数パラメータつき解釈であるという：

1. パラメータの存在：$T' \vdash \exists \bar{w} \ \pi^t(\bar{w})$.
2. 領域の非空性：$\forall \bar{w} \exists x \left[\pi^t(\bar{w}) \to \delta^t(\bar{w}, x)\right]$.
3. T の任意の公理 φ に対し、$T' \vdash \forall \bar{w} \ [\pi^t(\bar{w}) \to \varphi^t]$.

t を T から T' への翻訳とするとき、次を示せ：

1. （演繹定理）任意の $\mathcal{L}$- 閉論理式 φ について、$T \vdash \varphi$ ならば $T' \vdash \forall \bar{w} \ [\pi^t(\bar{w}) \to \varphi^t]$.

2. （相対無矛盾性）$T \leq_{\mathrm{Con}} T'$。すなわち、T は T' に対して相対的に無矛盾。

ここで、$[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}} > \mathbb{0}$ となるような完備 Boole 代数 $\mathbb{B}$ が存在したとする。$\pi^t(U)$ として「U は $[\![\varphi]\!] \in U$ となる $\mathbb{B}$ の超フィルター」、$\delta^t(U,x)$ として「$x \in V^{\mathbb{B}}/U$」をとってやることで、t は $\mathrm{ZFC}+\varphi$ の ZFC への翻訳となり、上の演習を認めれば $\mathrm{ZFC} + \varphi \leq_{\mathrm{Con}} \mathrm{ZFC}$ が示されたことになる。

6.2 推移的モデル上の強制法と強制関係

次に、（クラスでも集合でもあり得る）推移的モデルの生成拡大について定義し、種々の性質と強制関係との関係を見ていく。

定義 6.2. M を $\mathrm{ZF}-\mathrm{P}$ の推移的モデルとし、$\mathbb{P} \in M$ とする。

1. $M^{\mathbb{P}} := V^{\mathbb{P}} \cap M$ を M における $\mathbb{P}$- 名称の全体とする。
2. $(M,\mathbb{P})$- 生成的フィルター G について、M の G による**生成拡大**（**generic extension**）$M[G]$ を以下で定める：

$$M[G] := \left\{ \dot{x}_G \;\middle|\; (\dot{x},p) \in M^{\mathbb{P}},\ p \in G \right\}$$

M が真のクラスの場合も考えることがある。特に、V はどんな $M \subseteq V$ の生成拡大 $V = M[G]$ になりうるか？という問いを扱う**集合論の地質学**（**set-theoretic geology**）というのがここ十年弱で現れた集合論の新たな分野である。

一般に M が集合サイズの推移的モデルであったとしても、$(M,\mathbb{P})$- 生成的フィルターが V 内に存在するとは限らない。しかし、M が**可算**であれば必ず $(M,\mathbb{P})$- 生成的フィルターが存在する。これは、無限組合せ論パートで採り上げた Rasiowa–Sikorski の定理の系である：

補題 6.6. M が $\mathrm{ZF}-\mathrm{P}$ の可算推移的モデル、$\mathbb{P} \in M$ が擬順序、$p \in P$ のとき、$p \in G$ となる $(M,\mathbb{P})$- 生成的フィルター G が存在する。

まず、M の生成拡大 $M[G]$ が存在する場合、真理補題（系 5.8）が実際のフィルター G とモデル $M[G]$ に対して成り立つことがわかる：

定理 6.7. M を $\mathrm{ZF}-\mathrm{P}$ の推移的モデルとし、φ を $M \cap V^{\mathbb{P}}$ のみをパラメータに持つ論理式、$\mathbb{P} \in M$ とし、G を $(V,\mathbb{P})$- 生成的フィルターとする。

1. $p \Vdash \varphi$ かつ $p \in G$ ならば $M[G] \vDash \varphi$。
2. $M[G] \vDash \varphi$ のとき、$p \Vdash^M \varphi$ となる $p \in G$ が存在する。

ただし、ここで $p \Vdash^M \varphi$ は M に相対化された強制関係である。

系 6.8. M を $\mathrm{ZF}-\mathrm{P}$ の推移的モデルとし、φ を $M \cap V^{\mathbb{P}}$ のみをパラメータに持つ論理式、$\mathbb{P} \in M$ とし、G を $(V,\mathbb{P})$- 生成的フィルターとする。

1. $M[G]$ は推移的。

2. $M[G] \vDash \mathrm{ZF} - \mathrm{P}$。
3. $M \vDash \mathrm{ZF}$ ならば $M[G] \vDash \mathrm{ZF}$。
4. $M \vDash \mathrm{AC}$ ならば $M[G] \vDash \mathrm{AC}$。
5. $M \cap \mathrm{On} = M[G] \cap \mathrm{On}$。
6. $\check{M}_G = M$。

演習 6.4. 上の真理補題と系を示せ。

また、V が選択公理を満たし、 なおかつ M が可算のときは、Rasiowa–Sikorski のおかげで上の 定理 6.7 で G に対する全称量化を内側に入れたものが成り立つ：

定理 6.9. $\mathrm{ZF} - \mathrm{P}$ の可算推移的モデル M、$M \cap V^{\mathbb{P}}$ のみをパラメータに持つ $\mathcal{FL}$- 論理式 φ、擬順序 $\mathbb{P} \in M$、$p \in \mathbb{P}$ に対し、次は同値：

1. $p \Vdash \varphi$。
2. $p \in G$ なる任意の $(M, \mathbb{P})$- 生成的フィルター G に対し、$M[G] \vDash \varphi$。

6.3 可算推移的モデルによる強制法の正当化

前節で見た推移的モデルの強制拡大と定理は、 どちらも M がフルの ZF を満たす必要はなく、 冪集合公理を制限するか、 置換公理を制限すれば十分成り立つようになっている。 一方で、 、 無限組合せ論パートで採り上げた反映原理より、任意の論理式の有限集合 Γ に対し、集合 M であって $M \prec_{\Gamma} V$ を満たすようなものが取れる。特に、ZFC の有限部分を満たすような推移的モデル M は常に存在するのであった。

そこで、ZFC の有限部分理論 Γ を固定しておけば、$M_0 \vDash \Gamma$ となるような推移的モデルが取れる。すると、下方 Löwenheim–Skolem–Tarski の定理から、可算な M_1 で $M_1 \prec M_0$ となるものが取れる。このとき M_1 は推移的とは限らないが、Mostwski 崩壊を取って $M := \mathrm{mos}_{\in}(M_1)$ と置けば、$(M, \in) \cong (M_1, \in) \prec M_0$ であり、特に M は $M \vDash \Gamma$ を満たす可算推移的モデルとなる。ここで、Γ を十分に大きく取れば、このような Γ に対して 定理 6.9 を使って M に対する生成拡大 $M[G]$ を考え、 具体的な集合モデルを手にとって議論していると思うことができる。Kunen の教科書 [3] で用いられている強制法の定式化はこの方法である。

この可算推移的モデル（しばしば c.t.m. と略される）を使った議論は、具体的なモデル M に対して具体的に $M[G]$ を取ることができ、$M[G]$ と強制関係 $p \Vdash^M \varphi$ の関係を関連づけて扱えるので直観は養いやすい。また 定理 6.9 より、従属選択公理を仮定すれば、逆に「$p \Vdash^M \varphi$」の定義を、「$p \in G$ なる任意の $(M, \mathbb{P})$- 生成的フィルター G に対し $M[G] \vDash \varphi$」という形で与えることができるので、 入口の理論展開が簡単になる、 という教育的な利点もある。 また、 可算初等部分モデルやその Mostwski 崩壊を取って色々やる議論は強制法以外でも頻出のテクニックなので、そういった手法への入口としての役割もある。

とはいえ、厳密に無矛盾性証明の方法として c.t.m. による強制法を正当化しようとすると、実は思ったよりも簡単ではない。相対無矛盾性の定義（の気持ち）は、「$\mathrm{ZFC} + \varphi$ から矛盾への証明を与えられたときに、それを ZFC から矛盾への証明に書き換える具体的な手続きが存在する」というものであった。c.t.m. を使ったアプローチでこれを説明するには、以下のようなプロセスを経ることになる：

1. $\mathrm{ZFC} + \varphi$ から矛盾の証明図が与えられたとする。これは、「証明」の定義から、有限部分集合 $\Gamma \Subset \mathrm{ZFC}$ があって $\Gamma + \varphi$ から矛盾への証明図が与えられたということである。
2. このとき、「$\Gamma + \varphi$ に対する強制法定理」の証明に必要な ZFC の有限部分 $\Delta \Subset \mathrm{ZFC}$ が取れる。面倒なので、とりあえず $\Delta \supseteq \Gamma$ としてよい。
3. 上の議論により $M \prec_{\Delta} V$ となるような c.t.m. M が取れる。Δ の取り方から、$\Vdash^M \Gamma$ かつ $\Vdash^M \varphi$ である。
4. そこで $(M, \mathbb{P})$- 生成的フィルター G を取れば、$M[G] \vDash \Gamma + \varphi$ であり、$M[G]$ は推移的集合である。
5. すると健全性定理と仮定から $M[G] \vDash \bot$ である。
6. しかし、モデルの定義より $M[G] \nvDash \bot$ なのでこれは矛盾！

これが「具体的な証明図の書き換え」でできることは、Γ から Δ を取り直すところを具体的に見直すとわかる。これは、本質的には Boole モデルで正当化する際に健全性定理の証明を分析したのと同じプロセスである。とはいえ、他の手順を比較してみると、完備 Boole 値モデルによる相対無矛盾性証明については比較的素直に進んだのに対して、c.t.m. による正当化では、途中で Γ を Δ に取り直したりフィルターを取ったりする手順が挟まっており、あまり見通しがよいとは言えない。c.t.m. による強制法の導入は具体的なモデルを手にとって弄れるという点では教育的であるが、無矛盾性証明の手法として正当化する上では必ずしも簡単であるとはいえない。また、Boole 値モデルの手法は選択公理が成り立たない局面であっても通用するのに対し、c.t.m. を使った証明は M を取るところや G を取るところに選択公理が必要であり、V で ZFC が成り立たない場合には使えないという欠点もある。

とはいえ、c.t.m. 上の強制法は単純な無矛盾性証明以外の文脈でも集合論の中で現れる場合があり、強制関係と c.t.m. 上の強制法の関係を押さえておくことは依然として有用である。

7 まとめと次回予告

本章では、完備 Boole 代数による真偽値 $[\![\varphi]\!]$ を使って $\mathbb{B}$- 値モデルとしての強制法の理論を構築し、Boole 完備化を介して一般の擬順序についての強制関係を導出した。これらにより、仮想的に V の拡張 $V[G]$ を取れると思ってよいが、選択公理を認める場合は、更に具体的な対象としてあたかも V を実際に拡張した $V[G]$ であるかのように振る舞うクラスが V 内で定義できたり、あるいは反映原理により十分大きな有限部分について V と真偽が一致するような可算推移的モデルの生成拡大を考えることができる、ということを見た。

次回は、いよいよ連続体仮説の独立性証明を与える。

8 参考文献

[1] T. Jech, “Set Theory: The Third Millennium Edition, Revised and Expanded,” 3rd ed., ser. Springer monographs in mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2012, ISBN: 978-3-540-44761-0.

[2] J. D. Hamkins and D. E. Seabold, “Well-founded Boolean ultrapowers as large cardinal embeddings”, 2012. URL: `https://arxiv.org/abs/1206.6075`.

[3] K. Kunen, “Set Theory,” ser. Mathematical Logic and Foundations. College Publications, 2011, vol. 34, ISBN: 978-1-84890-050-9.