

強制法セミナー第2回：強制法の基礎理論

Hiromi ISHII (@mr_konn)

2024-XX-XX

目次

1	Boole 代数の基本性質	1
2	集合の Boole 値モデル	3
2.1	V と $V^{\mathbb{B}}$ で何が一致するのか：推移的クラスと Δ_1 -絶対性	8
3	強制法定理： $V^{\mathbb{B}}$ が ZFC のモデルとなること	12
4	Boole 値モデル $V^{\mathbb{B}}$ と (V, \mathbb{B}) -生成的フィルター	17
5	稠密埋め込みと擬順序による強制法	19
6	集合論のモデルの生成拡大と強制法拡大	27
6.1	推移的モデル上の強制法と強制関係	27
6.2	Hamkins–Seabold の強制法の自然主義的正当化	28
6.3	強制法の実際	28

1 Boole 代数の基本性質

定義 1. 以下を満たす $\mathbb{B} = (\mathbb{B}, 0, 1, -, +, \cdot, \leq)$ を Boole 代数と呼ぶ：

- \leq は B 上の半順序である。
- $0, 1$ はそれぞれ \leq に関する最小・最大元である。
- 任意の二元 $p, q \in \mathbb{B}$ に対して、 $p + q, p \cdot q$ はそれぞれ二元の上限・下限を与える。
(a) つまり $p, q \leq p \cdot q$ かつ $\forall r [p, q \leq r \implies p \cdot q \leq r]$ が成り立つ。 $+$ についてはこの双対を取った性質が成り立つ。
- $p \in \mathbb{B}$ に対し、 p の補元 (complement) $-p$ は、 $p + (-p) = 1$ および $p \cdot (-p) = 0$ を満たす。

更に \mathbb{B} の濃度 κ -未満の任意の部分集合 $A \subseteq \mathbb{B}$ に上限 $\sum A$ ・下限 $\prod A$ が存在するとき、 \mathbb{B} を κ -完備 Boole 代数と呼び、濃度の制限なく上限・下限が存在する Boole 代数を完備 Boole 代数 (cBa) と呼ぶ。

(完備とは限らない) 一般の Boole 代数について、以下の代数法則が成り立つ：

補題 1. \mathbb{B} を Boole 代数とし、 $a, b, c, d \in \mathbb{B}$ とすると以下が成立：

1. 結合律: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
2. 交換律: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
3. 両方向の分配律: $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
4. 吸収律: $a + (a \cdot b) = a$, $a \cdot (a + b) = a$
5. 補元: $-a + a = 1$, $(-a) \cdot a = 0$
6. 単位律: $a + 0 = a = 0 + a$, $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
7. $a \cdot b = a \iff a \leq b \iff a + b = b$

実は、上の公理は Boole 代数を代数的に特徴づける:

演習 1. B を集合、 $0, 1 \in B$, $- : B \rightarrow B$, $+, \cdot : B \times B \rightarrow B$ とする。

1. 補題 1 を示せ。
2. 代数系 $(B, -, +, \cdot, 0, 1)$ が補題 1 の (1) から (5) の法則を満たすなら、(6) も成り立つことを示せ。
また $a + b = b \iff a \cdot b = a$ が成り立つことも示せ。
3. 上の状況の下で、(7) のいずれか一方の条件によって \leq を定義すると B 上の半順序となり、この順序について定義 1 の意味での Boole 代数なることを示せ。

以下、Boole 値モデルを扱う上で頻出となる Boole 代数の基本性質を列挙しておく:

補題 2. \mathbb{B} を Boole 代数とし、 $a, b, c \in \mathbb{B}$, $A, B \subseteq \mathbb{B}$ とする。以下の略記法を用いる:

$$a \multimap b := -a + b, \quad a \cdot A = \{a \cdot b \mid b \in A\}$$

$$a + A := \{a + b \mid b \in A\}, \quad -A = \{-b \mid b \in A\}$$

このとき以下が成立:

1. $a \cdot b \leq a \leq a + b$
2. $a \leq (a \cdot b) + (-b)$
3. 二項 de Morgan 則: $-(a + b) = (-a) \cdot (-b)$, $-(a \cdot b) = (-a) + (-b)$
4. 単調性: $a \leq b \implies a + c \leq b + c$ & $a \cdot c \leq b \cdot c$
5. 反変性: $a \leq b \iff -b \leq -a$
6. 冪等律: $a \cdot a = a = a + a$
7. 随伴律: $a \cdot b \leq c \iff a \leq b \multimap c$
8. 対合律: $-(-a) = a$
9. $a \leq (b \multimap c) \cdot (c \multimap b) \iff a \cdot b = a \cdot c$
10. 無限項対二項分配律 (和): A が下限を持つなら $a + A$ も下限を持ち、 $\prod (a + A) = a + \prod A$ 。
11. 無限項対二項分配律 (積): A が上限を持つなら $a \cdot A$ も上限を持ち、 $\sum (a \cdot A) = a \cdot \sum A$ 。
12. 多項 de Morgan 則 (和積): A が上限 $\sum A$ を持つ $\iff -A$ が下限を持つ。さらに、このどちらか (よって両方) が存在するとき、 $-\sum A = \prod (-A)$, $\sum A = -\prod (-A)$ 。
13. 多項 de Morgan 則 (積和): 上で \prod, \sum を入れかえた双対。

演習 2. 上を示せ。

注意 1. 分配律を無限項対無限項にしたものは成り立つとは限らない。これは、対応する強制法が基数を保つ条件と密接に関連がある。

2 集合の Boole 値モデル

定義 2. \mathbb{B} を完備 Boole 代数とすると、 \mathbb{B} -名称の全体 $V^{\mathbb{B}}$ を次のように超限帰納法で定める：

$$\begin{aligned} V_0^{\mathbb{B}} &:= \emptyset \\ V_{\alpha+1}^{\mathbb{B}} &:= \mathcal{P}(V_{\alpha}^{\mathbb{B}} \times \mathbb{B}) \\ V_{\gamma}^{\mathbb{B}} &:= \bigcup_{\alpha < \gamma} V_{\alpha}^{\mathbb{B}} \quad (\gamma : \text{limit}) \end{aligned}$$

$V^{\mathbb{B}}$ の元を渡るメタ変数としてドット付きの文字 $\dot{a}, \dot{b}, \dots, \dot{A}, \dot{B}, \dots$ を使う。また、基礎理論を作るときだけ、 $\sigma, \tau, \varpi, \vartheta$ も使う。

$\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}$ の \mathbb{B} -階数 (\mathbb{B} -rank) $\text{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{x})$ を、 $\dot{x} \in V_{\alpha+1}^{\mathbb{B}}$ なる最小の α として定める。

注意 2. 第 0 回では、集合の特性関数の多値化という点を強調するため、 $V^{\mathbb{B}}$ -名称はランクの低い \mathbb{B} -名称から \mathbb{B} への関数として定めていた。一方、上の定義はあくまでも \mathbb{B} -名称は \mathbb{B} -集合と \mathbb{B} の元の対からなる任意の集合として定めており、初回の定義よりも広いものになっている。 \mathbb{B} が完備 Boole 代数であるときは、上の定義による \mathbb{B} -名称 \dot{x} が与えられたとき、以下のように関数となるように \mathbb{B} -名称 \dot{x}' を取り直すことができる：

$$\dot{x}'(\dot{y}) := \sum_{(\dot{y}, b) \in \dot{x}} b.$$

わざわざ上限を取らずに、ここでより広い定義を取っているのは、一般の擬順序による強制法を考える場合、そうした上限が常に存在するとは限らず、今回の定式化の方を使う必要があるためである。もちろん、擬順序の場合になってから名称の定義を変更してもよいが、そうするよりは最初からより一般的な定義を採用する形にした。

もとの宇宙 V の元を $V^{\mathbb{B}}$ に埋め込むために、 $x \in V$ に対する **check-name** \check{x} を次のように再帰的に定義する：

定義 3. 集合 x の **check-name** \check{x} を、 \in -関係に関する超限帰納法により次のように定める：

$$\check{x} := \{(\check{y}, 1) \mid y \in x\}$$

以下、**check-name** の全体を $\check{V} := \{\check{x} \mid x \in V\}$ により表す。

さて、 $V^{\mathbb{B}}$ は V を拡張するような \mathbb{B} -値集合の宇宙として振る舞うことが期待されるのだった。このために、 $V^{\mathbb{B}}$ の性質を記述するための強制法の言語 \mathcal{FL} を定義しよう。

定義 4. 強制法の言語 \mathcal{FL} は、二項述語記号 \in 、単項述語記号 \check{V} を持つ言語である。

以後、 $x \in \check{V}$ は $\check{V}(x)$ の略記とする。

記号から類推できるように、 \in は所属関係を、 \check{V} は基礎モデルの元であることを表す述語記号として想定されている。

注意 3. 実は、 \check{V} は $V^{\mathbb{B}}$ で定義可能クラスとなっていることが知られている (Bukovský の定理)。この証明は擬順序の反鎖条件という組合せ論的性質と強制拡大の基礎モデルに対する被覆性質の関連を使うもので興味深い、基礎理論を終えてから立ち戻ることにする。

さて、強制法で用いる言語が定まったので、 $V^{\mathbb{B}}$ における \mathcal{FL} - 論理式の真偽値を定義しよう。

定義 5. \mathcal{FL} - 原子論理式の真偽値 $\llbracket - \rrbracket_{\mathbb{B}}$ を \mathbb{B} - 階数に関する帰納法で以下のように定める：

$$\begin{aligned} \llbracket \dot{x} \in \dot{y} \rrbracket_{\mathbb{B}} &:= \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{y}} b \cdot \llbracket \dot{x} = \dot{z} \rrbracket_{\mathbb{B}}, \quad \llbracket \dot{x} = \dot{y} \rrbracket_{\mathbb{B}} := \llbracket \dot{x} \subseteq \dot{y} \rrbracket_{\mathbb{B}} \cdot \llbracket \dot{y} \subseteq \dot{x} \rrbracket_{\mathbb{B}}, \quad \llbracket \dot{x} \in \check{V} \rrbracket_{\mathbb{B}} := \sum_{z \in V} \llbracket \dot{x} = \dot{z} \rrbracket_{\mathbb{B}} \\ \llbracket \dot{x} \subseteq \dot{y} \rrbracket_{\mathbb{B}} &:= \prod_{\dot{z} \in \text{dom}(\dot{x})} (-\llbracket \dot{z} \in \dot{x} \rrbracket_{\mathbb{B}} + \llbracket \dot{z} \in \dot{y} \rrbracket_{\mathbb{B}}). \end{aligned}$$

$V^{\mathbb{B}}$ の元をパラメータに持つ \mathcal{FL} - 論理式 φ の真偽値 $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathbb{B}}$ を、論理式の構成に関するメタレベルの帰納法で以下のように定める：

$$\llbracket \perp \rrbracket := 0, \quad \llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket := -\llbracket \varphi \rrbracket + \llbracket \psi \rrbracket, \quad \llbracket \exists x \varphi(x) \rrbracket := \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \llbracket \varphi(\dot{x}) \rrbracket_{\mathbb{B}}.$$

$p \in \mathbb{B}$ と \mathcal{FL} - 論理式 φ について、 $p \leq \llbracket \varphi \rrbracket$ が成り立つとき、 p が φ を強制するといい、記号 $p \Vdash \varphi$ で表す。また、 $1 \Vdash \varphi$ が成り立つとき (つまり $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ となるとき)、 $V^{\mathbb{B}} \models \varphi$ または $\Vdash \varphi$ と書く。

注意 4. 完備 Boole 代数は、任意の部分集合が上限・下限を持つような Boole 代数であった。ところで、上の定義では $\dot{x} \in \check{V}$ や $\exists x \varphi$ の定義で、上限はクラスを渡っているように見える。これはちゃんと定義になっているだろうか？ と心配になるかもしれない。

簡単に言えば、パラメータ自体は真クラスを渡っているが、 \mathbb{B} 自体はあくまでも集合であり、**集合の部分クラスは集合だから大丈夫**、というのが答えである。より詳しく言えば、ZFC (というか、Z) の**分出公理 (内包公理)**のおかげで我々は安心してこの操作が出来ている。たとえば、 $\dot{x} \in \check{V}$ の真偽値の定義を (上限記号以外は) 略記せずに書くと次のようになる：

$$\llbracket \dot{x} \in \check{V} \rrbracket_{\mathbb{B}} := \sum_{z \in V} \llbracket \dot{x} = \dot{z} \rrbracket_{\mathbb{B}} = \sum \{ b \in \mathbb{B} \mid \exists z \in V \, b = \llbracket \dot{x} = \dot{z} \rrbracket_{\mathbb{B}} \}.$$

上限の渡る範囲が \mathbb{B} の部分であることが明確になっている。 $\exists x \varphi$ の場合も同様なので、自分で書き下して納得してみるとよいだろう。

このように $V^{\mathbb{B}}$ に「真偽値」によるそれらしい意味論を与えたが、前回までに導入した証明体系が健全であることを見ておこう。我々は公式の証明体系としてシーケント計算を導入したが、直観としては、 $\psi \vdash \psi$ が LK で証明可能なら、 $\llbracket \varphi \rrbracket \leq \llbracket \psi \rrbracket$ が成り立つということを示したい。

補題 3. Γ, Δ を自由変数が x_0, \dots, x_{n-1} しか含まない \mathcal{FL} -論理式の有限集合とする。このとき、 $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能なら、任意の $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1} \in V^{\mathbb{B}}$ について $\prod_{\varphi(\vec{x}) \in \Gamma} \llbracket \varphi(\vec{\sigma}) \rrbracket_{\mathbb{B}} \leq \sum_{\psi(\vec{x}) \in \Delta} \llbracket \psi(\vec{\sigma}) \rrbracket_{\mathbb{B}}$ が成り立つ。

証明 証明図の段数に関する帰納法により示す。論理公理のうち $A \vdash A$ および $\perp \vdash \emptyset$ が $V^{\mathbb{B}}$ で成り立つことは明らか。等号公理は $V^{\mathbb{B}}$ -階数に関する帰納法で示せる。

一般の場合について示す。最後に使われた規則について場合分けする。以下、 Γ を論理式の有限集合とするとき、 $\prod[\Gamma] := \prod\{\llbracket \varphi \rrbracket \mid \varphi \in \Gamma\}$, $\sum[\Gamma] := \sum\{\llbracket \varphi \rrbracket \mid \varphi \in \Gamma\}$ と略記する。弱化規則は明らか。

(CUT): 以下の形の推論図である:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \varphi, \Theta \vdash \Xi}{\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Xi} \text{ (CUT)}$$

帰納法の仮定は次の通り:

$$\prod[\Gamma] \leq \sum[\Delta] + \llbracket \varphi \rrbracket, \quad \llbracket \varphi \rrbracket \cdot \prod[\Theta] \leq \sum[\Xi]$$

しかるに:

$$\begin{aligned} \prod[\Gamma] \cdot \prod[\Theta] &\leq (\sum[\Delta] + \llbracket \varphi \rrbracket) \cdot \prod[\Theta] && \text{(帰納法の仮定)} \\ &= \sum[\Delta] \cdot \prod[\Theta] + \llbracket \varphi \rrbracket \cdot \prod[\Theta] && \text{(和・積の分配法則)} \\ &\leq \sum[\Delta] \cdot \prod[\Theta] + \sum[\Xi] && \text{(帰納法の仮定)} \\ &\leq \sum[\Delta] + \sum[\Xi] && \text{(+ の単調性)} \end{aligned}$$

(\rightarrow L):

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \psi, \Theta \vdash \Xi}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Xi} (\rightarrow L)$$

CUT をちょっと変えればできる。

(\rightarrow R):

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow R)$$

帰納法の仮定は次の通りである:

$$\varphi \cdot \prod[\Gamma] \leq \sum[\Delta] + \llbracket \psi \rrbracket$$

から次を示せばよい:

$$\llbracket \Gamma \rrbracket \leq \sum[\Delta] + \llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket$$

しかるに、

$$\begin{aligned} \prod[\Gamma] &= \llbracket \varphi \rrbracket \cdot \prod[\Gamma] + (-\llbracket \varphi \rrbracket) \cdot \prod[\Gamma] && \text{(Boole 代数の基本法則)} \\ &\leq \llbracket \varphi \rrbracket \cdot \prod[\Gamma] + (-\llbracket \varphi \rrbracket) && \text{(+ の単調性)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \prod[\Delta] + [\psi] + (-[\varphi]) && (\text{帰納法の仮定}) \\
&= \sum[\Delta] + [\varphi \rightarrow \psi] && ([\varphi \rightarrow \psi] \text{ の定義})
\end{aligned}$$

よって OK。

($\exists L$): $x \notin \text{FV}(\Gamma) \cup \text{FV}(\Delta)$ とする。

$$\frac{\varphi(x), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x \varphi(x), \Gamma \vdash \Delta} (\exists L)$$

ここで帰納法の仮定が非自明になる。任意の $\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}$ について以下が成り立つ、というのが帰納法の仮定である：

$$\varphi(\dot{x}) \cdot \prod[\Gamma] \leq \sum[\Delta]$$

\sum は単調なので、両辺を \dot{x} を渡って上限を取れば：

$$\sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \{ \varphi(\dot{x}) \cdot \prod[\Gamma] \} \leq \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \sum[\Delta]$$

しかし、仮定より変数 x は Γ, Δ に自由に現れないので結局次を得る：

$$[\exists x \varphi(x)] \cdot \prod[\Gamma] = \left\{ \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \varphi(\dot{x}) \right\} \cdot \prod[\Gamma] = \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \{ \varphi(\dot{x}) \cdot \prod[\Gamma] \} \leq \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \sum[\Delta] = \sum[\Delta].$$

($\exists R$): アタリマエ。

□

演習 3. 省略したケースを補い、上の証明を完成させよ。

補題 4. 以下が成り立つ：

1. $(\dot{x}, b) \in \dot{A} \implies b \leq [\dot{x} \in \dot{A}]$.
2. $[\exists x \in \dot{A} \varphi(x)] = \sum_{(\dot{x}, b) \in \dot{A}} b \cdot [\varphi(\dot{x})]$.
3. $[\forall x \in \dot{A} \varphi(x)] = \prod_{(\dot{x}, b) \in \dot{A}} (-b + [\varphi(\dot{x})])$.

証明 (1): $[\dot{x} = \dot{x}] = 1$ なので明らか。

(2) が言えれば (3) は補元を取れば明らかなので、(2) を示す。しかるに、

$$\begin{aligned}
[\exists x \in \dot{A} \varphi(x)] &= \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} [\dot{x} \in \dot{A}] \cdot [\varphi(\dot{x})] && (\text{by definition}) \\
&= \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{A}} b \cdot [\dot{x} = \dot{z}] \cdot [\varphi(\dot{x})] && (\text{定義、分配則}) \\
&\leq \sum_{\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}} \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{A}} b \cdot [\varphi(\dot{z})] && (\text{等号公理}) \\
&= \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{A}} b \cdot [\varphi(\dot{z})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{A}} [\dot{z} \in \dot{A}] \cdot [\varphi(\dot{z})] & (1) \\
&\leq \sum_{\dot{z} \in V^{\mathbb{B}}} [\dot{z} \in \dot{A}] \cdot [\varphi(\dot{z})] & (\text{上限の範囲が広がっただけ})
\end{aligned}$$

よって示せた。 \square

系 5.

1. $[\check{x} \in \check{V}] = 1$
2. $[\exists x \in \check{V} \varphi(x)] = \sum_{x \in V} [\varphi(\check{x})]$
3. $[\forall x \in \check{V} \varphi(x)] = \prod_{x \in V} [\varphi(\check{x})]$

以上から、 $V^{\mathbb{B}}$ は少なくとも演繹について閉じていることがわかり、特に三段論法（というか Modus Ponens）を自由に使ってよいことがわかった。

我々の目標は、強制法により ZFC の新しいモデルをつくることであつた。なので、 V で ZFC が成り立つなら、 $V^{\mathbb{B}}$ の中でも ZFC が成り立つことを示すのが当面の目標である。

結論から言えば、ZF や ZFC の公理は、基礎モデル \check{V} で成り立つのなら $V^{\mathbb{B}}$ でも成り立つ。逆に言えば、 $V^{\mathbb{B}}$ で成り立つ公理は、 \check{V} の性質に依存する。この事を念頭に、 $V^{\mathbb{B}}$ の中で \check{V} がどう見えているかを調べてみよう。まず、 \check{V} は V と「全く同じ命題を満たす」ことがわかる：

定理 6. ZF- 論理式 $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ と $a_0, \dots, a_{n-1} \in V$ について、以下が成り立つ：

1. $[\varphi(\check{a}_0, \dots, \check{a}_{n-1})]_{\mathbb{B}} \in \{0, 1\}$.
2. $V \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \iff V^{\mathbb{B}} \models \varphi^{\check{V}}(\check{a}_0, \dots, \check{a}_{n-1})$.

証明 論理式の複雑性に関する帰納法。非自明なので $\exists x \varphi(x)$ の場合だけ示す。

$V \models \exists x \varphi(x)$ とすると、 V は普通の二値モデルなので $x \in V$ で $V \models \varphi(x)$ を満たすものがとれる。すると、帰納法の仮定より $V^{\mathbb{B}} \models \varphi^{\check{V}}(\check{x})$ が成り立つ。よって $\check{x} \in \check{V} \subseteq V^{\mathbb{B}}$ より

$$1 = [\varphi^{\check{V}}(\check{x})] = [\check{x} \in \check{V}] \cdot [\varphi^{\check{V}}(\check{x})] \leq \sum_{\dot{x}} \{[\dot{x} \in \check{V}] \cdot [\varphi^{\check{V}}(\dot{x})]_{\mathbb{B}}\} = [\exists x \in \check{V} \varphi(x)]$$

となるのでよい。

逆向きを示す： $[\exists x [x \in \check{V} \wedge \varphi(x)]] = 1$ とする。この時系 5 から：

$$1 = [\exists x \in \check{V} \varphi(x)] = \sum_{x \in V} [\varphi(\check{x})]$$

よって、ある $x \in V$ が存在し、 $[\varphi^{\check{V}}(x)] > 0$ となる。すると、帰納法の仮定より $[\varphi^V(\check{x})] = 1$ となり、再び帰納法の仮定から $V \models \varphi(x)$ が成り立つ。よって $V \models \exists x \varphi(x)$ を得る。 \square

演習 4. 残りのケースを補い、証明を完成させよ。

系 7. $V \models \text{ZF} \iff \check{V} \models \text{ZF}$. また、 $V \models \text{AC} \iff \check{V} \models \text{AC}$.

定理 8. $V^{\mathbb{B}} \models [\check{V} : \text{推移的クラス}]$.

証明 \dot{x}, \dot{y} を任意に取れば、

$$\begin{aligned}
 [\dot{x} \in \dot{y} \in \check{V}] &= [\dot{x} \in \dot{y}] \cdot \sum_{w \in V} [\dot{y} = \check{w}] && (\text{系 5 より}) \\
 &= \sum_{w \in V} [\dot{x} \in \dot{y}] \cdot [\dot{y} = \check{w}] && (\text{分配則}) \\
 &\leq \sum_{w \in V} [\dot{x} \in \check{w}] && (\text{等号公理}) \\
 &= [\dot{x} \in \check{V}] && (\text{系 5 より})
 \end{aligned}$$

よって $V^{\mathbb{B}} \models [\check{V} : \text{推移的クラス}]$ が示せた。 \square

2.1 V と $V^{\mathbb{B}}$ で何が一致するのか：推移的クラスと Δ_1 -絶対性

さて、以上で $V^{\mathbb{B}}$ の中には \check{V} という V の現し身があり、 V と \check{V} で真偽は一致することがわかった。特に、 $V^{\mathbb{B}}$ も \check{V} も ZF のモデルになっているようだが、両者の間でどんな概念が常に一致するのだろうか？

大事なのは、前節最後の定理が示したように $V^{\mathbb{B}}$ が \check{V} の推移的クラスになっていることである。十分に強い ZF の推移的モデルの間では、色々な概念が一致する（絶対的である）ことがわかる。本節では、主に Δ_1 と呼ばれる論理式のクラスで表現できる概念が、 V と $V^{\mathbb{B}}$ の間で一致することを見る。特に、自然数や有限性、順序数、整礎性、「対であること」「関数であること」などといった基本的な概念が V と $V^{\mathbb{B}}$ で一致することを確認する。

定義 6 (Levy 階層). 論理式の階層 $\Delta_0 = \Pi_0 = \Sigma_0 \subsetneq \Delta_1 \subsetneq \Pi_1, \Sigma_1 \subsetneq \Delta_2 \subsetneq \dots$ を次のように定める：

- $\exists x \in t$ の形の量子子を有界であるという。
- 全ての量子子が有界な論理式を Δ_0 -論理式と呼ぶ。 $\Pi_0 = \Sigma_0 = \Delta_0$ とする（が、あまりこの記号は用いられない）。
- Π_n -論理式 φ について、 $\exists \bar{x} \varphi$ の形の論理式を Σ_{n+1} -論理式と呼ぶ。
- Σ_n -論理式 ψ について、 $\forall \bar{x} \psi$ の形の論理式を Π_{n+1} -論理式と呼ぶ。
- 論理式 χ が理論 T 上 Δ_n であるとは、 Σ_n -論理式 φ と Π_n -論理式 φ が存在して、 $T \vdash \varphi \leftrightarrow \chi \leftrightarrow \psi$ が成り立つこと。

Γ を論理式のクラスとすると、集合 x が Γ -概念であるとは、 x が Γ -論理式で定義できることである。

論理式 $\varphi(x, y)$ が関数 f を定めるとき、つまり $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$ が成り立つとき、関数 f がモデル $M \subseteq N$ の間で絶対的であるとは、 f は M, N どちらで見ても関数であり、 $\text{dom}^M(f) \subseteq \text{dom}^N(f)$ かつ任意の $x \in M$ について $f^M(x) = f^N(x)$ が成り立つことである。

注意 5. Δ_0 -論理式で定義できる概念は、つまり与えられたパラメータの範囲だけ調べれば真偽が決定

できるような局所的な性質である。なので、与えられた二つの集合論のモデル $M \subseteq N$ の \in -関係が小さい方のモデルの範囲で見たときに完全に一致するのなら、 Δ_0 -論理式の真偽（そして任意の Δ_0 -概念）は M と N の間で一致してくれそうである。この「 \in -関係が小さいモデルで一致する」というのを精緻化したのが、次の「推移的モデル」の概念である：

定義 7. クラス M が**推移的**（**transitive**）であるとは、 $x \in y \in M \implies x \in M$ を満たすことである。 M が特に集合論のモデルであるとき、そのような M を**推移的モデル**（**transitive model**）と呼ぶ。

定理 9. $M \subseteq N$ を集合論の推移的モデルとする。このとき、任意の Δ_0 -概念は M, N の間で絶対的である。

証明 論理式の複雑性に関する帰納法。 □

Δ_0 -概念には次のようなものが挙げられる：

定理 10. 次の概念はすべて Δ_0 である：

1. $x = \emptyset$ 。つまり、 $x = 0$ 。
2. $x \subseteq y$ 。
3. 「 x は推移的」
4. $x = \{y, z\}$
5. $x = \langle y, z \rangle$
6. $x = y \cup z$
7. $x = y \cap z$
8. $x = y \cup \{y\}$ 。特に、 $x = x + 1$
9. 任意の遺伝的有限集合 S について、「 $x = S$ 」。

概念の Δ_0 -性を判定するには、次の定理が役に経つ：

補題 11. 和集合公理の下で、 $k < \omega$ および Δ_0 -論理式 φ について $\exists x \in \bigcup^{(k)} y \varphi$ も Δ_0 で表現可能。ただし：

$$\bigcup^{(0)} x = x, \quad \bigcup^{(k+1)} x = \bigcup \left(\bigcup^{(k)} x \right).$$

系 12. 以下は BST で Δ_0 -概念であり、従って BST の推移的モデルで絶対的：

- x は順序対、 x は非順序対
- x は関数
- x は関係
- x は順序数
- x は後続順序数

- x は極限順序数
- x は自然数
- $x = \omega$
- $x \subseteq \omega$
- $x = \bigcup y$
- $y = \text{dom}(f), y = \text{cod}(f)$
- f は全単射
- f は関数で、 $x \in \text{dom}(f)$ で $f(x) = y$
- 次で定義した場合の「 x は有限集合」： $\exists n < \omega \exists f : n \rightarrow x$ 全単射
- 次で定義した場合の「 x は遺伝的有限」：

$$\exists n < \omega \exists t \in \text{HF} \exists f : n \rightarrow t [f : \text{全単射} \wedge t : \text{推移的集合} \wedge x \subseteq t]$$

定義 8. 構造 $\langle \text{HF}, \in \rangle$ 上で定義される n -項関係を算術的 (arithmetical) と言う。

Δ_1 -概念も絶対である：

補題 13. Δ_1 -概念は BST の推移モデルについて絶対的である。

証明 $\varphi(x), \psi(x)$ を Δ_0 -論理式とし、 $T \vdash \forall x \varphi(x) \leftrightarrow \chi \leftrightarrow \exists x \psi(x)$ とする。 $M \subseteq N \models T$ を推移的モデルとする。 $M \models \chi$ から $N \models \chi$ を示すには $\exists x \psi(x)$ との同値性と $\psi(x)$ の Δ_0 -性を使って M での証拠が N でも証拠になっていることからわかる。逆に $N \models \chi$ から $M \models \chi$ を示すには、 $N \models \forall x \varphi(x)$ と $M \subseteq N$ より任意の $x \in M$ についても $N \models \varphi(x)$ が言え、 Δ_0 からこれが M でも成り立つことからわかる。□

注意 6. Δ_1 -論理式は、HK に制限すると決定可能命題や計算可能関数のクラスと一致する。よって、上の命題から次が言える：

系 14. 推移的モデルの間で、計算可能関数は絶対的。

Δ_1 -絶対性のほかの重要な応用は、整礎性の絶対性を保証してくれることである：

補題 15. $M \subseteq N$ を ZF - P の推移的モデル、 $R \in M$ を $A \in M$ 上の二項関係とすると、「 R は A 上の整礎関係」は絶対的。

証明 整礎関係を「 A の任意の空でない部分集合が R -極小元を持つ」という形で定式化すれば、これは Π_1 である：

$$\forall X [\emptyset \neq X \subseteq A \implies \exists x \in X \forall y \in X \neg y R x]$$

他方で、整礎ならばランク関数 $\rho : A \rightarrow \text{On}$ が取れるのだった。とくに、 $x R y \implies \rho(x) < \rho(y)$ を満たす関数 $\rho : A \rightarrow \text{On}$ が必ずとれ、またこのような ρ が存在すれば R は必ず整礎となる。順序数の概念は絶

対的であったので、以上を踏まえれば R の整礎性は次の Σ_1 - 論理式と同値である：

$$\exists f \exists \alpha \in \text{On} [f : A \rightarrow \alpha \wedge \forall x, y \in A \ x \ R \ y \implies f(x) < f(y)]$$

以上より、 R の整礎性は Δ_1 - 概念なので、推移的モデルについて絶対的である。 \square

絶対的な論理式・整礎関係を使って超限帰納法で定義できるような概念も推移モデルの間で絶対的である：

補題 16 (超限帰納法で定義される関数の絶対性). $M \subseteq N$ を $\text{ZF} - \text{P}$ の推移的モデル、 A を定義可能なクラス、 $G(x, y)$ が定義可能な関数、 R を A 上で set-like な整礎関係（つまり、任意の $x \in A$ について $x \downarrow = \{y \mid y \ R \ x\}$ が集合であるような整礎関係）とする。更に、 G, A, R は M, N の間で絶対的であるとする。ここで、関数 $F(x)$ が $F(x) := G(x, F \upharpoonright (x \downarrow))$ を満たす超限帰納法で定義された関数のとき、 F も M と N の間で絶対的である。

証明 $F^M(a) \neq F^N(a)$ となるような最小な a を取れば $(F \upharpoonright a \downarrow)^M = (F \upharpoonright a \downarrow)^N$ となる。すると G, R, A の絶対性より $F^M(a) = G^M(a, F \upharpoonright (a \downarrow)) = G^N(a, F \upharpoonright (a \downarrow))$ となり矛盾。 \square

これまでの議論の系として以下の絶対性が得られる：

補題 17. 以下は $\text{ZF} - \text{P}$ の推移的モデルの間で絶対的：

1. 二引数関数 $x, y \mapsto x \cup y$ および $x, y \mapsto x \cap y$
2. 集合のランク関数 $x \mapsto \rho(x)$
3. 単項関数 $x \mapsto \bigcup x$ および $x \mapsto \bigcap x$ (ただし $x = \emptyset$ のときは未定義とする)。
4. 推移閉包関数 $x \mapsto \text{trcl}(x)$
5. 対関数 $x, y \mapsto \langle x, y \rangle$ および $x, y \mapsto \{x, y\}$ 。
6. 二引数関数 $x, y \mapsto x \times y$ 。
7. 任意の算術的關係
8. \mathcal{L} を言語とすると、 φ は \mathcal{L} - 論理式」「 $M \models \varphi$ 」

以上を踏まえれば、 V^B と V の間で上で述べたような概念は全て一致する。

系 18. 上で挙げた概念はぜんぶ V と V^B の間で絶対的。特に大事なものは：

1. 順序数の概念。
2. 集合の和・直積・共通部分、順序・非順序対。
3. 自然数、有限集合、遺伝的有限集合の概念。決定可能な命題・計算可能な関数。
4. 順序数の算術。
5. 関係の整礎性、整列性、超限再帰で定義された関数・関係。

演習 5. 本節で触れた概念が、実際に Δ_0 なり Δ_1 なりその超限再帰なりで書けていることを確かめよ。

3 強制法定理： $V^{\mathbb{B}}$ が ZFC のモデルとなること

さて、かねての宣言通り、いよいよ $V^{\mathbb{B}}$ が集合論の公理系を満たしているを見ていく。

定理 19. $V \models \text{ZF}$ なら $V^{\mathbb{B}} \models \text{ZF}$

証明 内包、外延性、無限、和、対、冪、基礎、収集公理が成り立つことを示す。本証明中では、選択公理は使わない。

外延性 は $=$ や \in の解釈の定義から明らかに成り立つ。

まずは**内包公理**を示す。というのも、この先 $f(x) = \dot{y}$ となるような \dot{y} をつくるときに、 $[f(\dot{x}) \subseteq \dot{p}]$ となるような \dot{p} を作るだけで済み、経済的だからである。 $\varphi(x)$ を $V^{\mathbb{B}}$ をパラメータに持つ \mathcal{FL} -論理式、 \dot{A} を \mathbb{B} -名称とする。名称 \dot{C} で任意の \dot{x} について次が成り立つものを取ればよい：

$$[\dot{x} \in \dot{C}] = [\varphi(\dot{x}) \wedge \dot{x} \in \dot{A}].$$

結論から言えば、次で十分である：

$$\dot{C} := \{ \langle \dot{z}, [\dot{z} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{z})] \rangle \mid \dot{z} \in \text{dom}(\dot{A}) \}.$$

実際：

$$\begin{aligned} [\dot{x} \in \dot{C}] &= \sum_{\dot{z} \in \text{dom}(\dot{A})} [\dot{x} = \dot{z}] \cdot [\dot{z} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{z})] && \text{(by definition)} \\ &\leq [\dot{x} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{x})] && \text{(等号公理)} \\ &= \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{A}} b \cdot [\dot{x} = \dot{z}] \cdot [\varphi(\dot{x})] && \text{(by definition)} \\ &\leq \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{A}} [\dot{z} \in \dot{A}] \cdot [\dot{x} = \dot{z}] \cdot [\varphi(\dot{x})] && (\because (\dot{y}, c) \in \dot{A} \implies c \leq [\dot{y} \in \dot{A}]) \\ &= \sum_{\dot{z} \in \text{dom}(\dot{A})} [\dot{z} \in \dot{A}] \cdot [\dot{x} = \dot{z}] \cdot [\varphi(\dot{x})] && (b \text{ が右辺に現れないので}) \\ &\leq \sum_{\dot{z} \in \text{dom}(\dot{A})} [\dot{z} \in \dot{A}] \cdot [\varphi(\dot{z})] \cdot [\dot{x} = \dot{z}] && \text{(等号公理、冪等性、交換則)} \\ &= \sum_{(\dot{z}, b) \in \dot{C}} b \cdot [\dot{x} = \dot{z}] && (C \text{ の定義}) \\ &= [\dot{x} \in \dot{C}] && \text{(by definition)} \end{aligned}$$

よって $[\dot{x} \in \dot{C}] \leq [\dot{x} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{x})] \leq [\dot{x} \in \dot{C}]$ が言え、 \dot{C} が \dot{A} と $\varphi(x)$ についての内包公理の証拠となることがわかった。

和、対、冪については、 $\dot{x}, \dot{y} \in V^{\mathbb{B}}$ に対して $\bigcup \dot{x}$ や $\{\dot{x}, \dot{y}\}$ 、 $\mathcal{P}(\dot{x})$ として振る舞う名前を直接作ってやればよい。特に、対はとても簡単である（ヒント： $\mathbb{1}$ を使おう）。

例として、ここでは**冪集合公理**が成り立つことを見よう。 \dot{x} が任意に与えられたときに、 $[\mathcal{P}(\dot{x}) = \dot{p}] = \mathbb{1}$ となるような \dot{p} をでっちあげる。**内包公理**を既に示してあるので、 $[\mathcal{P}(\dot{x}) \subseteq \dot{p}] = \mathbb{1}$ となるような \dot{p} さえ取れば十分である。これは次のようにすればよい：

$$\dot{p} := \{(\dot{z}, \llbracket \dot{z} \subseteq \dot{x} \rrbracket) \mid \dot{z} \subseteq \text{dom}(\dot{x}) \times \mathbb{B}\}.$$

そこで \dot{z} を任意に取り、 $\llbracket \dot{z} \subseteq \dot{x} \rrbracket \leq \llbracket \dot{z} \in \dot{p} \rrbracket$ を示そう。ここで、上の内包公理の証明で $\dot{A} = \dot{x}$ 、 $\varphi(z) \equiv z \in \dot{z}$ として得られるものを \dot{z}' とおくと、 $\llbracket \dot{z}' = \dot{z} \cap \dot{x} \rrbracket = 1$ となっている。よって、特に $\llbracket \dot{z} \subseteq \dot{x} \rrbracket = \llbracket \dot{z} = \dot{z}' \rrbracket$ となる。他方、取り方より $\llbracket \dot{z}' \subseteq \dot{x} \rrbracket = 1$ なので、定義より $(\dot{z}', 1) \in \dot{p}$ である。以上を踏まえれば、

$$\begin{aligned} \llbracket \dot{z} \subseteq \dot{x} \rrbracket &= \llbracket \dot{z} = \dot{z}' \rrbracket = 1 \cdot \llbracket \dot{z} = \dot{z}' \rrbracket \\ &\leq \sum_{(\dot{w}, b) \in \dot{p}} b \cdot \llbracket \dot{z} = \dot{w} \rrbracket = \llbracket \dot{z} \in \dot{p} \rrbracket \end{aligned}$$

よって示せた。

無限公理は ω がそのまま証拠となる。

基礎の公理を示す。 \dot{A} を任意にとり $\llbracket \dot{A} \neq \emptyset \rightarrow \exists z \in \dot{A} \forall x \in z \ x \notin \dot{A} \rrbracket = 1$ を示せばよい。本質的には、 \dot{A} の \mathbb{B} -階数最小の名称をとってくればよいだけだが、必ずしも全ての $\text{dom}(\dot{A})$ の元が確率 1 で \dot{A} に含まれるわけではないので、すこし工夫が必要になる。そこで、

$$\llbracket \dot{A} \neq \emptyset \rightarrow \exists z \in \dot{A} \forall x \in z \ x \notin \dot{A} \rrbracket < 1$$

として矛盾をしめす。このとき補元をとれば、

$$b := \llbracket \dot{A} \neq \emptyset \wedge \forall z \in \dot{A} \exists x \in z \ x \in \dot{A} \rrbracket > 0$$

である。このとき、 \dot{z} で $\llbracket \dot{z} \in \dot{A} \rrbracket \cdot b > 0$ となるものが存在する。そこで、 \dot{z} をそのような中で $V^{\mathbb{B}}$ -階数最小のものとする。すると、

$$\begin{aligned} 0 &< \llbracket \dot{z} \in \dot{A} \rrbracket \cdot b \cdot b \leq \llbracket \exists x \in \dot{z} \ x \in \dot{A} \rrbracket \cdot b \\ &= \sum_{(\dot{x}, c) \in \dot{z}} c \cdot \llbracket \dot{x} \in \dot{A} \rrbracket \cdot b && \text{(補題 4 の (2)、分配則)} \\ &\leq \sum_{\dot{x} \in \text{dom}(\dot{z})} b \cdot \llbracket \dot{x} \in \dot{A} \rrbracket && (\sum \text{の単調性}) \end{aligned}$$

とくに $b \cdot \llbracket \dot{x} \in \dot{A} \rrbracket > 0$ となる $\dot{x} \in \text{dom}(\dot{z})$ が存在する。しかし、 $\dot{x} \in \text{dom}(\dot{z})$ より $\text{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{x}) < \text{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{z})$ となり、これは \dot{x} の \mathbb{B} -階数の極小性に矛盾する。

収集公理を示す。つまり、 $\varphi(x, y)$ を \mathcal{FL} -論理式、 \dot{X} を \mathbb{B} -名称としたとき、次を満たすような \dot{Y} の存在を示せばよい：

$$\llbracket \forall x \in \dot{X} (\exists y \ \varphi(x, y)) \rightarrow (\exists y \in \dot{Y} \ \varphi(x, y)) \rrbracket = 1.$$

このために、 V での置換公理を使う。そこで、次の論理式 $\Phi(x, y)$ を考える：

$$\Phi(x, b, y) := x \in \text{dom}(\dot{X}) \wedge b \in \mathbb{B} \wedge y \in V^{\mathbb{B}} \wedge \llbracket \varphi(x, y) \rrbracket = b$$

V での置換公理を Φ と $\text{dom}(\dot{X}) \times \mathbb{B}$ に適用すれば、集合 $S \subset V^{\mathbb{B}}$ で次を満たすものがとれる：

$$\forall \dot{x} \in \text{dom}(\dot{X}) \forall b \in \mathbb{B} \ [\exists \dot{y} \ \llbracket \varphi(\dot{x}, \dot{y}) \rrbracket = b \implies \exists y \in S \ \llbracket \varphi(\dot{x}, y) \rrbracket = b]$$

そこで $\dot{Y} := \{(\dot{y}, 1) \mid \dot{y} \in S\}$ において、これが求めるものであることを示す。そこで適当に $\dot{x} \in \text{dom}(\dot{X})$ を取り、次を示せばよい：

$$\llbracket \exists y \ \varphi(\dot{x}, y) \rrbracket \leq \llbracket \exists y \in \dot{Y} \ \varphi(\dot{x}, y) \rrbracket$$

これは結局次の不等式と同値である：

$$\sum_{\dot{y} \in V^{\mathbb{B}}} \llbracket \varphi(\dot{x}, \dot{y}) \rrbracket \leq \sum_{\dot{y} \in \dot{Y}} \llbracket \varphi(\dot{x}, \dot{y}) \rrbracket$$

しかし、 $\text{dom}(\dot{Y})$ は $\llbracket \varphi(\dot{x}, \dot{y}) \rrbracket$ のありうる値すべてを実現するのに十分な元を含むので、両辺は明らかに一致する。 \square

演習 6. 省略した部分を埋め、証明を完成させよ。また、余力があれば、証明中で定義した名称をどう修正すると \mathbb{B} が一般の擬順序の場合でも証明が通るようになるか考えよ。

強制法により ZF が保たれるのと同じように、AC も強制法により保たれる¹⁾：

定理 20. $V \models \text{AC}$ なら $V^{\mathbb{B}} \models \text{AC}$

証明 $V^{\mathbb{B}}$ で整列可能定理が成立することを示せばよい。以下、 \dot{X} を一つ固定し、 $\llbracket \dot{X} : \text{整列可能} \rrbracket = 1$ を示していく。特に、ある順序数 γ と写像 $f : \gamma \rightarrow S$ があって、 $\dot{X} \subseteq f[S]$ となっていることが示せばよい。

いま、 V で選択公理を仮定しているので、順序数 γ を適当にとり、 $\text{dom}(\dot{X}) = \{\dot{x}_\xi \mid \xi < \gamma\}$ と並べておく。このとき、 \dot{f} を以下のように定める：

$$\dot{f} := \{(\text{otp}(\check{\xi}, \dot{x}_\xi), 1) \mid \xi < \gamma\}.$$

ただし、 $\text{otp} : V^{\mathbb{B}} \times V^{\mathbb{B}} \rightarrow V^{\mathbb{B}}$ は二つの \mathbb{B} -名称 \dot{x}, \dot{y} が与えられたときに、その非順序対の名称を返すような関数である。

いま、系 12 より $\check{\gamma}$ は $V^{\mathbb{B}}$ でも順序数であることに注意しよう。また定め方より次が成り立っている：

$$\llbracket \dot{f} : \gamma \rightarrow V^{\mathbb{B}} \rrbracket = 1, \quad \forall \xi < \gamma \llbracket \dot{f}(\check{\xi}) = \dot{x}_\xi \rrbracket = 1.$$

更に、 \dot{x} を任意に取れば、定め方から明らかに

$$\begin{aligned} \llbracket \dot{x} \in \dot{X} \rrbracket &= \sum_{\xi < \gamma, (\dot{x}_\xi, b) \in \dot{X}} b \cdot \llbracket \dot{x}_\xi = \dot{x} \rrbracket \\ &\leq \sum_{\xi < \gamma} \llbracket \dot{x}_\xi = \dot{x} \rrbracket \\ &= \sum_{\xi < \gamma} \llbracket \dot{x}_\xi = \dot{x} \rrbracket \cdot \llbracket \dot{f}(\check{\xi}) = \dot{x}_\xi \rrbracket \\ &= \sum_{\xi < \gamma} \llbracket \dot{f}(\check{\xi}) = \dot{x} \rrbracket \\ &= \llbracket \dot{x} \in f[\gamma] \rrbracket \end{aligned}$$

よって示せた。 \square

補題 21. V で $\dot{x} \in V^{\mathbb{B}}$ が V で $\text{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{x}) = \alpha$ を満たすとき、 $V^{\mathbb{B}} \models \rho^{V^{\mathbb{B}}}(\dot{x}) \leq \alpha$

1) 逆に $\text{ZF} + \neg \text{AC}$ のモデルから AC を強制できるか？という問題は、 V が特定の形をしていない限り巨大基数公理とかかわってくる問題になる。選択公理があるとかなり強制法が便利になるかわり、そのものを強制しようとおもうと大変なのである。

証明 \mathbb{B} -階数に関する帰納法で示す。帰納法の仮定は、任意の $\xi < \gamma$ について $\forall \dot{z} \in V_{\xi+1}^{\mathbb{B}} \ V^{\mathbb{B}} \models \rho^{V^{\mathbb{B}}}(\dot{z}) \leq \xi$ である。 $\text{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{x}) = \xi$ を取る。このとき定義より、

$$V^{\mathbb{B}} \models \rho(\dot{x}) = \sup\{\rho(\dot{y}) + 1 \mid \dot{y} \in \dot{x}\}.$$

である。すると、帰納法の仮定より任意の $\dot{y} \in \text{dom}(\dot{x})$ について $V^{\mathbb{B}} \models \text{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{y}) < \gamma$ である。よってとくに、

$$\llbracket \forall \dot{y} \in \dot{x} \ \rho^{V^{\mathbb{B}}}(\dot{y}) \leq \xi \rrbracket = \prod_{(\dot{y}, b) \in \dot{x}} (-b + \llbracket \text{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{y}) < \gamma \rrbracket) = \prod_{(\dot{y}, b) \in \dot{x}} 1 = 1$$

今 $V^{\mathbb{B}}$ は ZF のモデルだったので、 $V^{\mathbb{B}} \models \rho(\dot{x}) \leq \gamma$ が従う。 \square

補題 22. $V^{\mathbb{B}} \models \text{On} \subseteq \check{V}$

証明 $\dot{\alpha}$ を \mathbb{B} -名称とし、 V で $\gamma := \text{rank}_{\mathbb{B}}(\dot{\alpha}) + 1$ とする。すると上の補題から $V^{\mathbb{B}} \models \rho(\dot{\alpha}) < \gamma$ である。順序数上の順序は \in と一致するので、これは $V^{\mathbb{B}} \models \rho(\dot{\alpha}) \in \gamma$ ということである。

一方で、順序数 α について $\rho(\alpha) = \alpha$ が成り立つことは ZF の定理であるから、

$$\llbracket \dot{\alpha} \in \text{On} \rrbracket \leq \llbracket \dot{\alpha} = \rho(\dot{\alpha}) \in \check{\gamma} \in \check{V} \rrbracket \leq \llbracket \dot{\alpha} \in \check{V} \rrbracket$$

以上より $\llbracket \dot{\alpha} \in \text{On} \rightarrow \dot{\alpha} \in \check{V} \rrbracket = 1$ を得る。 \square

これまでの結果をまとめた次の定理が概ね「強制法定理」と呼ばれるものである。

定理 23 (強制法定理). $\mathbb{B} \in V$ を V における完備 Boole 代数とする。このとき次が成り立つ：

1. $V \models \text{ZF}$ ならば $V^{\mathbb{B}} \models \text{ZF}$ 。
2. $V \models \text{ZFC}$ ならば $V^{\mathbb{B}} \models \text{ZFC}$ 。
3. \check{V} は $V^{\mathbb{B}}$ の中で推移的なクラスであり、 $\text{On}^{V^{\mathbb{B}}} = \text{On}^{\check{V}}$ 。
4. V での真偽と $V^{\mathbb{B}}$ でみた \check{V} の真理は一致する。つまり、任意の ZF-論理式 $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ と $x_i \in V$ について：

$$V \models \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}) \iff V^{\mathbb{B}} \models \varphi^{\check{V}}(\check{x}_0, \dots, \check{x}_{n-1}).$$

ところで、 \exists の $V^{\mathbb{B}}$ での解釈は上限で定義されていた。特に、 $V^{\mathbb{B}} \models \exists x \varphi(x)$ であった場合、 $\llbracket \varphi(\dot{x}) \rrbracket > 0$ を満たすような \dot{x} は定義より直ちに取れる。つまり、「成り立ち得る」 \dot{x} 見付けることは容易い。一方で二値的 (Tarski) モデルの場合のように、 $V^{\mathbb{B}} \models \varphi(\dot{x})$ が成り立つようなただ一つの \dot{x} が取れるかは直ちには明らかではない。実は、選択公理の下でこれは常に成り立つ：

定理 24 (Maximal Principle). $V \models \text{AC}$ とする。 $\varphi(x)$ を \mathcal{FL} -論理式とした時、次を満たす \dot{x} が存在：

$$\llbracket \exists x \varphi(x) \rrbracket = \llbracket \varphi(\dot{x}) \rrbracket$$

これには次の補題を使う：

補題 25 (Mixing Lemma). \mathbb{B} を完備 Boole 代数とし、 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{B}$ を反鎖、 $\langle \dot{x}_a \mid a \in \mathcal{A} \rangle$ を \mathcal{A} で添え字

づけられた B- 名称の族とする。このとき、次を満たす名称 \dot{x} が存在する：

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad a \leq \llbracket \dot{x} = \dot{x}_a \rrbracket.$$

証明 以下で定めればよい：

$$\dot{x} := \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{ (y, b \cdot a) \mid (y, b) \in \dot{x}_a \}$$

ここで、 \mathcal{A} は反鎖なので、

$$a \cdot a' = \begin{cases} a & a = a' \\ 0 & a \neq a' \end{cases}$$

が成り立つことに注意する。このとき z を任意にとれば：

$$\begin{aligned} a \cdot \llbracket z \in \dot{x} \rrbracket &= a \cdot \sum_{(\dot{w}, b) \in \dot{x}} b \cdot \llbracket z = \dot{w} \rrbracket \\ &= \sum_{\substack{a' \in \mathcal{A} \\ (y, c) \in \dot{x}_{a'}}} a \cdot c \cdot a' \cdot \llbracket z = y \rrbracket && \text{(定義と分配則)} \\ &= \sum_{(y, c) \in \dot{x}_a} a \cdot c \cdot \llbracket z = y \rrbracket = a \cdot \sum_{(y, c) \in \dot{x}_a} c \cdot \llbracket z = y \rrbracket && (a \cdot a' = a \cdot \delta_{a, a'}) \\ &= a \cdot \llbracket z \in \dot{x}_a \rrbracket \end{aligned}$$

よって $a \leq \llbracket \dot{x} = \dot{x}_a \rrbracket$ が言えた。 □

Proof of Maximal Principle. 定義より $\llbracket \varphi(\dot{x}) \rrbracket \leq \llbracket \exists x \varphi(x) \rrbracket$ は任意の任意の \dot{x} について成り立つので、特に $\llbracket \exists x \varphi(x) \rrbracket \leq \llbracket \varphi(\dot{x}) \rrbracket$ を満たす \dot{x} を見付ければよい。また、 $\llbracket \exists x \varphi(x) \rrbracket = 0$ の時は自明なので、以下 $b := \llbracket \exists x \varphi(x) \rrbracket > 0$ として議論を進める。

いま、 $D := \{ \llbracket \varphi(\dot{x}) \rrbracket \mid \dot{x} \in V^{\mathbb{B}}, \llbracket \varphi(\dot{x}) \rrbracket > 0 \}$ とおけば、 $b = \sum D$ 、つまり D は b 以下で前稠密である。そこで、 $\mathcal{A} \subseteq D$ を $D \downarrow$ に含まれる中で極大な反鎖とすれば、 $\sum \mathcal{A} = \sum D = b$ である。更に、各 $a \in \mathcal{A}$ に対して \dot{x}_a を $\llbracket \varphi(\dot{x}) = a \rrbracket$ を満たすような \dot{x} の一つとして取る。

すると、Mixing Lemma より \dot{x} で任意の $a \in \mathcal{A}$ について $a \leq \llbracket \dot{x} = \dot{x}_a \rrbracket$ を満たすものが取れる。よって、

$$b = \sum \mathcal{A} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \llbracket \varphi(\dot{x}_a) \rrbracket \leq \sum_{a \in \mathcal{A}} \llbracket \varphi(\dot{x}_a) \rrbracket \cdot \llbracket \dot{x} = \dot{x}_a \rrbracket = \sum_{a \in \mathcal{A}} \llbracket \varphi(\dot{x}) \rrbracket = \llbracket \varphi(\dot{x}) \rrbracket$$

□

注意 7. Maximal Principle を完備 Boole 代数から擬順序に一般化した命題は、実は ZF 上選択公理と同値になる。ことが知られている。この事は、5 で一般の擬順序による強制法が導入されたら、再び立ち返る。

4 Boole 値モデル $V^{\mathbb{B}}$ と (V, \mathbb{B}) - 生成的フィルター

定義 9. (V, \mathbb{B}) - 生成的フィルターの標準的な名称 \dot{G} を次で定める：

$$\dot{G} := \{(\check{b}, b) \mid b \in \mathbb{B}\}.$$

また、 \mathbb{B} - 名称 \dot{x} について、超フィルター U による解釈 \dot{x}_U を以下で定める：

$$\dot{x}_U := \{y_U \mid \exists b \in U (\dot{y}, b) \in \dot{x}\}.$$

定理 26 (真理補題). φ を $V^{\mathbb{B}}$ の元をパラメータを持つ \mathcal{FL} - 論理式、 $b \in \mathbb{B}$ とする。

1. $b = \llbracket \check{b} \in \dot{G} \rrbracket$
2. $V^{\mathbb{B}} \models [\varphi \leftrightarrow \llbracket \check{\varphi} \rrbracket \in \dot{G}]$ 。よって特に $p \Vdash \varphi \iff V^{\mathbb{B}} \models [\check{p} \in \dot{G} \rightarrow \varphi]$

定義 10. \mathbb{P} を擬順序とする。

- $\mathbb{P}^+ := \{p \in \mathbb{P} \mid \exists q \in \mathbb{P} [p \not\leq q]\}$.
- $p, q \in \mathbb{P}$ が両立する (compatible、記号： $p \parallel_{\mathbb{P}} q \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists r \in \mathbb{P}^+ (r \leq p, q)$).
- p, q が両立しないとき、記号 $p \perp_{\mathbb{P}} q$ と書く。
- $D \subseteq \mathbb{P}^+$ が前稠密 (predense) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall p \in \mathbb{P}^+ \exists q \in D (p \parallel_{\mathbb{P}} q)$.
- $U \subseteq \mathbb{P}$ が開集合 $\stackrel{\text{def}}{\iff} c \leq b \in U \implies c \in U$.
- $D \subseteq \mathbb{P}^+$ が稠密 (dense) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $p \in \mathbb{P}^+$ について、 $q \leq p$ となる $q \in D$ が取れる。
- $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}^+$ が反鎖 (antichain) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の相異なる $p, q \in \mathcal{A}$ について $p \perp_{\mathbb{P}} q$.
- $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}^+$ が極大反鎖 (maximal antichain) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{A}$ は反鎖であり、包含関係 \subseteq について極大。
- \mathcal{F} を集合の族とする。 \mathbb{P} のフィルター $G \subseteq \mathbb{P}$ が \mathcal{F} - 生成的フィルター (\mathcal{F} -generic filter) である $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の \mathbb{P} の前稠密集合 $D \in \mathcal{F}$ について $D \cap G \neq \emptyset$ 。特に、 M が $\mathbb{P} \in M$ なる十分強い (あるいは弱い) 集合論のモデルであるとき、 (M, \mathbb{P}) - 生成的フィルターとは、 $\{A \in M \mid A \subseteq \mathbb{P}\}$ - 生成的フィルターのことを指す。

注意 8. 上の定義は一般の擬順序でも Boole 代数でも使えるように定義しているが、擬順序による強制法を考える場合は最小元を持たない場合が多く、ほとんどすべての例で $\mathbb{P}^+ = \mathbb{P}$ となっている。なので、Boole 代数による強制法を明示的に考えているのでない限り、議論の上で \mathbb{P}^+ の元かどうかを気にする必要はほとんどない。一方、ランダム強制法などの場合は完備 Boole 代数による強制法を考えるので、そういう場合はちゃんと気にする必要がある。

補題 27. \mathbb{B} が Boole 代数とし、 $b, c \in \mathbb{B}$ のとき、以下が成り立つ：

1. $\mathbb{B}^+ = \{b \in \mathbb{B} \mid b > 0\}$.
2. $b \perp c \iff b \cdot c = 0$. また、 $b \parallel c \iff b \cdot c > 0$.
3. \mathbb{B} が完備のとき、 $D \subseteq \mathbb{B}$ が前稠密 $\iff \sum D = 1$

演習 7. 示せ。

補題 28. \mathbb{B} を Boole 代数とする。

1. $D \subseteq \mathbb{B}^+$ が前稠密 \iff 任意の $b \in \mathbb{B}^+$ について、 $d \in D$ で $d \parallel b$ となるものが取れる。
2. 極大反鎖は前稠密である。
3. 稠密集合は前稠密である。

注意 9. 稠密集合・前稠密集合は「ほとんど至るところ」で成り立つ普遍的な性質に対応していると思える。一方で、極大反鎖は完全な「場合分け」を与えていることに相当する。つまるところ、生成的フィルターとは、「ほとんどすべて」の元が満たすような性質は全部満たすような条件に対応しており、また次の補題で見るように、満たすべき場合分けが与えられればどの枝が選ばれているのか完全に決定するようなものである。この意味で、生成的フィルターは一般的な条件に対応している。

補題 29. \mathbb{B} を完備 Boole 代数とし、 M を $\mathbb{B} \in M$ となる十分強い集合論のモデル（選択公理、冪集合、対、和、分出公理あたりがあれば大丈夫）とする。このとき、次は同値：

1. G は (M, \mathbb{B}) -生成的フィルター。つまり、 G は M に属する任意の \mathbb{B} -前稠密集合と交わる。
2. 任意の \mathbb{B} -極大反鎖 $\mathcal{A} \in M$ について $\mathcal{A} \cap G \neq \emptyset$ 。
3. 任意の \mathbb{B} -稠密集合 $D \in M$ について $D \cap G \neq \emptyset$ 。
4. 任意の \mathbb{B} -稠密開集合 $D \in M$ について $D \cap G \neq \emptyset$ 。

証明 (1) \implies (2): 極大反鎖は前稠密なのであたりまえ。

(2) \implies (3): D を稠密集合とする。このとき、 $\mathcal{A} \subseteq D$ となるような中で極大な反鎖 \mathcal{A} を取れば、これは \mathbb{B} の極大反鎖になっている。

(3) \implies (4): 条件が強くなっているだけなのであたりまえ。

(4) \implies (1): D を前稠密集合とすると、 $E := D \downarrow = \{b \leq d \mid d \in D\}$ は稠密開集合である。仮定より $b \in G \cap E$ が取れるが、これは定義より $G \cap E \ni b \leq d$ となる $d \in D$ が取れることを意味する。 G はフィルターなので、特に上に閉じているから、結局 $d \in G \cap D$ となる。 \square

定理 30. M を十分強い集合論のモデルとする。 $\mathbb{B} \in M$ を完備 Boole 代数、 G を (M, \mathbb{B}) -生成的フィルターとすると、 G は \mathbb{B} の超フィルターである。

証明 任意の $p \in \mathbb{B}^+$ について $\{p, -p\}$ は極大反鎖なので、 G と交わる。

擬順序の場合も通用する証明にしたい場合は、かわりに $\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \vee q \perp p\}$ を考えてもよい。 \square

定理 31. $V^{\mathbb{B}} \models \dot{G} : (V, \mathbb{B})$ - 生成的。つまり、 $V^{\mathbb{B}} \models \forall D \in \check{V} [D \subseteq \mathbb{B} : \text{稠密開} \rightarrow D \cap \dot{G} \neq \emptyset]$ 。

定理 32. 任意の $\sigma \in V^{\mathbb{B}}$ について $V^{\mathbb{B}} \models \sigma = \check{\sigma}_{\dot{G}}$ 。

系 33. $V^{\mathbb{B}} \models \forall x \exists \sigma \in \check{V} x = \sigma_{\dot{G}}$ が成り立つので、つまり $V^{\mathbb{B}} \models$ 「私は $\check{V}[\dot{G}]$ です」

「面白い」ような完備 Boole 代数 \mathbb{B} については、 (V, \mathbb{B}) - 生成的フィルターは決して V には属さないことがわかる：

定義 11. $p \in \mathbb{P}$ が擬順序 \mathbb{P} の原子 (atom) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $q, r \leq p$ について $q \parallel r$ 。

注意 10. 完備 Boole 代数の場合、 p が原子であることは、 \mathbb{B}^+ の極小元であることと同値である。

補題 34. \mathbb{P} が原子を持たず、 $F \subseteq \mathbb{B}$ がフィルターなら、 $\mathbb{B} \setminus F$ は稠密である。

証明 まず、 F がフィルター、 $q \perp r$ の $q \in \mathbb{B} \setminus F$ または $r \in \mathbb{B} \setminus F$ の少なくとも一方は成り立たなければならない。なぜなら、どちらも属さないなら $q, r \in F$ となり、 $0 = q \cdot r \in F$ となって $0 \notin F$ に矛盾するからである。

そこで \mathbb{P} が原子を持たないとすると、どんな $p \in \mathbb{P}$ についても $q \perp r$ となる $q, r \leq p$ が取れる。よって上の議論から $q \in \mathbb{P} \setminus F$ か $r \in \mathbb{P} \setminus F$ の少なくとも一方が成り立つ。よって $\mathbb{P} \setminus F$ は稠密である。 \square

系 35. 次は同値：

1. \mathbb{B} が原子を持たない
2. (V, \mathbb{B}) - 生成的フィルターは V に存在しない。

証明 (1) \implies (2)：補題 34 から $G \in V$ とすると $G \cap (\mathbb{B} \setminus G) = \emptyset$ となり G の生成性に矛盾する。

(2) \implies (1)：対偶を示す。 p が原子としたとき、 $F := \{b \in \mathbb{B} \mid p \leq b\}$ はフィルターであり、これは p の極小性から任意の稠密集合と交わる。明らかに $F \in V$ なので、これが V に属す (V, \mathbb{B}) - 生成的フィルターである。 \square

5 稠密埋め込みと擬順序による強制法

前節までは、主に完備 Boole 代数による強制法を考えてきた。実用上はより一般の擬順序による強制法が使われることが多い。本節では、完備 Boole 代数による強制法理論から擬順序による定式化を導出する。

記法. 以下、特に断わらない限り、 $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots$ などの P 以降の黒板太字は (Boole 代数かもしれない)

擬順序を、 $\mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ などは Boole 代数を表すものとする。

無限組合せ論パートで、任意の擬順序 \mathbb{P} についてその **Boole 完備化** $\mathbb{B}(\mathbb{P})$ が同型を除いて一意に存在することは既に見た。関連する定義は本節でも使うので復習しておこう：

定義 12.

- $d : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ が**稠密埋め込み** (**dense embedding**、記号： $d : \mathbb{P} \hookrightarrow_d \mathbb{Q}$) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$
 - (a) $p(1_{\mathbb{P}}) = 1_{\mathbb{Q}}$,
 - (b) 単調性： $p \leq_{\mathbb{P}} q \implies d(p) \leq_{\mathbb{Q}} d(q)$,
 - (c) \perp -準同型： $p \perp_{\mathbb{P}} q \implies d(p) \perp_{\mathbb{Q}} d(q)$,
 - (d) $d[\mathbb{P}^+]$ は \mathbb{Q} で稠密。
- 擬順序 \mathbb{P} の **Boole 完備化** (**Boolean completion**) $\mathbb{B}(\mathbb{P})$ とは、稠密埋め込み $d : \mathbb{P} \hookrightarrow_d \mathbb{B}(\mathbb{P})$ が存在するような完備 Boole 代数 $\mathbb{B}(\mathbb{P})$ のことである。

演習 8. 稠密埋め込みは完備埋め込みである。

補題 36. 擬順序 \mathbb{P} の Boole 完備化 $\mathbb{B}(\mathbb{P})$ は常に存在し、同型を除いて一意である。

我々が完備 Boole 代数による Boole 値モデルを経由する形で強制法を定式化したのは、この Boole 完備化が常に存在し²⁾、更に**強制法が稠密埋め込みで不変**だからである。本節では、このことを詳しく説明していく。

さて、Boole 値モデルでは最初に真偽値 $[\![\varphi]\!] \in \mathbb{B}$ を定義し、その上で強制関係を $p \Vdash \varphi \iff p \leq [\![\varphi]\!]$ として定義していた。この定義から出発して、Boole 演算を使わずに擬順序だけで強制関係 $p \Vdash \varphi$ を特徴づけたものが、次の Definability Lemma (定理 37) である：

定理 37 (Definability Lemma).

1. $p \Vdash \dot{x} \in \dot{y} \iff \{q \in \mathbb{P} \mid \exists(z, b) \in \dot{y} [q \leq b \wedge q \Vdash z = \dot{x}]\}$ が p 以下で稠密。
2. $p \Vdash \dot{x} = \dot{y} \iff \forall z \in \text{dom}(\dot{x}) \cup \text{dom}(\dot{y}) \forall q \leq p [(q \Vdash z \in \dot{x}) \leftrightarrow (q \Vdash z \in \dot{y})]$ 。
3. $p \Vdash \dot{x} \in \check{V} \iff \{q \mid \exists z \in V (q \Vdash \dot{x} = \check{z})\}$ が p 以下で稠密。
4. $p \Vdash \neg \varphi \iff \forall q \leq p q \nVdash \varphi$
5. $p \Vdash \varphi \vee \psi \iff \{q \mid (q \Vdash \varphi) \vee (q \Vdash \psi)\}$ が p 以下で稠密。
6. $p \Vdash \varphi \wedge \psi \iff p \Vdash \varphi$ かつ $p \Vdash \psi$ 。
7. $p \Vdash \varphi \rightarrow \psi \iff \nexists q \leq p [(q \Vdash \varphi) \wedge (q \nVdash \psi)]$ 。
8. $p \Vdash \exists x \varphi(x) \iff \{q \mid \exists \dot{x} (q \Vdash \varphi(\dot{x}))\}$ が p 以下で稠密。

証明 **TODO:** \in と \exists だけ証明する

□

2) 基礎モデルで選択公理が成り立たない場合に強制法をしたい場合上の命題が常に存在するとは限らないが、その場合も強制法関係の定義から出発すれば問題ない。

演習 9. Definability Lemma の残りの節を埋め、証明を完成させよ。

上は全て同値関係であるので、 \Vdash をそもそも Definability Lemma の各節で定義してしまえば、上の補題は逆に $p \Vdash \varphi \iff p \leq \llbracket \varphi \rrbracket$ の証明だと思えることができる。この \Vdash の定義は Boole 代数はおろか一般の擬順序でも通用する定義になっているので、以降本セミナーでは上の Definability Lemma が強制関係 \Vdash の定義だと考えることにする。

定義 13. 擬順序 \mathbb{P} 上の強制関係 $p \Vdash \varphi$ を、Definability Lemma (定理 37) の各節により定義する。

Definability Lemma による強制関係の定義から、以下が直ちに従う：

系 38.

1. $p \Vdash \varphi \iff \forall q \leq p (q \Vdash \varphi)$
2. $p \Vdash \varphi \rightarrow \psi \iff \forall q \leq p [(q \Vdash \varphi) \rightarrow \exists r \leq q (r \Vdash \psi)]$
3. $p \Vdash \exists x \in \check{A} \varphi(x) \iff \{q \mid \exists a \in A (q \Vdash \varphi(\check{a}))\}$ が p 以下で稠密。
4. $p \Vdash \varphi \iff \{r \leq p \mid r \Vdash \varphi\} : \text{dense below } p$
5. $p \nVdash \varphi \iff \exists r \leq p r \Vdash \neg \varphi$

演習 10. 証明を完成させよ。

以下の目標は、**強制法の稠密埋め込みによる不変性**を示すことである。特に、この定義による擬順序の強制法を考えたとき、稠密埋め込みによって生成的フィルターの間に一対一の対応関係が付き、名称を適切に読み替えることで命題の真偽も保たれる、ということを示していく。これが示されてしまえば、Boole 値モデルについて示した健全性定理や強制法定理などの種々の性質が、擬順序による強制法でも自動的に成り立つことがわかる。

以下では種々の擬順序や完備 Boole 代数の間の埋め込みについて議論をする。その上で稠密埋め込みと並んで重要な役割を果たすのが**完備埋め込み**である。

定義 14. $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ が**完備埋め込み** (complete embedding、記号 : $f : \mathbb{P} \leq \mathbb{Q}$) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

1. $p(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$,
2. 単調性 : $p \leq_{\mathbb{P}} q \implies f(p) \leq_{\mathbb{Q}} f(q)$,
3. \mathcal{A} が \mathbb{P} の極大反鎖なら、 $f[\mathcal{A}]$ も \mathbb{Q} で極大反鎖である。

注意 11. $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$ で \mathbb{B} が Boole 代数のとき、完備埋め込みおよび稠密埋め込みは、暗に $f[\mathbb{P}^+] \subseteq \mathbb{B}^+$ を要請していることに注意する。これは、完備埋め込みの場合は「反鎖」を \mathbb{P}^+ の部分集合として定義しているからであり、稠密埋め込みは稠密集合が \mathbb{Q}^+ の部分集合として定義しているからである。

こういったことを一々気にするのは面倒くさい。Boole 代数でないような擬順序で強制法を使う場合、考える擬順序はほとんどすべての例で最小限を持たないものである。そこで、以下では断わらない限り擬順序は最小限を持たない、 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^+$ となるようなものであると思って扱うことにする。この立場に立つても、証明を微妙に変えてやれば最小限を持つような擬順序にも対応できる。あるいはあらかじめなく

なるまで最小限を取り除いてやってから適用している、と思ってもよい。

稠密埋め込みの定義は \mathbb{P}, \mathbb{Q} に関して Δ_0 -論理式で書けるので、「 $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ が稠密埋め込みである」という概念は強制拡大の前後で不変である。一方、完備埋め込みは上の定義が直感的でわかりやすいが、 \mathbb{P}, \mathbb{Q} に関する Δ_1 -論理式で書けるかは直ちにはわからず、強制拡大の前後で性質が変わらないか不安に思うかもしれない。しかし、次の特徴付けが知られており、これは明らかに \mathbb{P}, \mathbb{Q} に関して Δ_0 である：

補題 39. $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ について次は同値：

1. f は完備埋め込み
2. f は以下を満たす：
 - (a) 1 の保存： $f(1_{\mathbb{P}}) = 1_{\mathbb{Q}}$,
 - (b) 単調性： $p \leq_{\mathbb{P}} q \implies f(p) \leq_{\mathbb{Q}} f(q)$,
 - (c) \perp -準同型： $p \perp_{\mathbb{P}} q \implies f(p) \perp_{\mathbb{Q}} f(q)$,
 - (d) 任意の $q \in \mathbb{Q}$ に対し、 f による q の \mathbb{P} への簡約 (reduction) $q^* \in \mathbb{P}$ が存在し、次を満たす：

$$\forall p \in \mathbb{P} [f(p) \perp_{\mathbb{Q}} q \rightarrow p \perp q^*]$$

演習 11. 上の補題を示せ。

より一般的に、完備埋め込み $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ の存在は、実は「 \mathbb{Q} による強制法で \mathbb{P} の生成的フィルターも付加される」という形で特徴づけることができ、稠密の場合この対応が同型になるのである。

定義 15. $e: \mathbb{P} \leq \mathbb{Q}$ を完備埋め込みとする。

1. $\dot{x} \in V^{\mathbb{P}}$ に対して、 $e_*(\dot{x}) \in V^{\mathbb{Q}}$ を以下のように \mathbb{B} -階数に関する帰納法で定義する：

$$e_*(\dot{x}) := \{ (e_*(\dot{y}), e(p)) \mid (\dot{y}, p) \in \dot{x} \}$$

2. $F \subseteq \mathbb{P}$ を \mathbb{P} のフィルターとすると、 $\tilde{e}(F) \subseteq \mathbb{Q}$ を以下で定める：

$$\tilde{e}(F) := \{ q \in \mathbb{Q} \mid \exists p \in F (e(p) \leq_{\mathbb{Q}} q) \}$$

つまり、 $\tilde{e}(F)$ は $e[F]$ が \mathbb{Q} で生成するフィルターである。

補題 40. $e: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ が完備埋め込みとする時、次が成立：

1. $V^{\mathbb{Q}} \models e^{-1}[\dot{G}_{\mathbb{Q}}] : (V, \mathbb{P})$ -generic
2. $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$ に対して、 $V^{\mathbb{Q}} \models \check{e}_*(\check{\sigma})_{\dot{G}_{\mathbb{Q}}} = \check{\sigma}_{e^{-1}[\dot{G}_{\mathbb{Q}}]}$ が成り立つ。

証明 (1): 完備埋め込みが極大反鎖を保つことから直ちに従う。

(2): \mathbb{B} -階数に関する帰納法で示せる。 □

実は、擬順序が**分離的**という条件を満たすとき、上の逆も成り立つことがわかる。そのことを見るために、暫く分離的擬順序と付随する順序関係について議論する。

定義 16. 擬順序 \mathbb{P} が分離的 (separative) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall p, q \in \mathbb{P} [p \leq q \iff \forall r \leq p (r \parallel q)]$ 。

演習 12. Boole 代数は分離的であることを示せ。

記法. 一般の擬順序について、このセミナーでは以後 $p \leq q \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall r \leq p (r \parallel q)$ と書くことにする。

演習 13. 一般の擬順序 \mathbb{P} において、 \leq は \leq を拡張する (つまり $x \leq y \implies x \leq y$ となるような) \mathbb{P} 上の擬順序となることを示せ。

強制法から見た上の定義の嬉しさは次の補題が明らかにしてくれる：

補題 41. $p, q \in \mathbb{P}$ とするとき、次は同値：

1. $p \Vdash [\check{q} \in \dot{G}]$
2. $\forall r \leq p (r \parallel q)$

演習 14. 上を示せ。定義に従って計算すれば従う。

つまり、分離的な擬順序というのは、「生成的フィルター G によって分離できない」という二項関係 \leq が元々の擬順序 \leq と完全に一致するような擬順序であったという訳だ。

実のところ、こと強制関係においては \leq と \leq には殆んど差がない、というのが次の補題である (系 38 の (1) と比較せよ)：

補題 42. $p \Vdash \varphi \iff \forall q \leq p [q \Vdash \varphi]$

証明 $p \leq p$ なので (\Leftarrow) は明らか。 (\Rightarrow) を示す。

$q \leq p$ を取る。系 38 の (4) より、 q 以下で $r \Vdash \varphi$ となる r が稠密に存在すればよい。特に、議論としては同じなので $r \leq q$ で $r \Vdash \varphi$ となるものを見付ければ十分である (稠密性論法)。 $q \leq p$ より $r \leq q, p$ が取れる。すると系 38 の (1) から $r \Vdash \varphi$ となるので、これが求めるものである。 \square

更に、上の補題から真理補題 (定理 26) の擬順序版が従う：

補題 43 (真理補題・擬順序版). $p \Vdash \varphi$ なら、 $1 \Vdash [\check{p} \in \dot{G} \rightarrow \varphi]$

証明 系 38 の (2) から、 $q \Vdash \check{p} \in \dot{G}$ なる q に対し、 $r \leq q$ で $r \Vdash \varphi$ となるものを見付ければよい。しかし、補題 41 より $q \leq p$ なので、補題 42 より特に $q \Vdash \varphi$ となるので明らか。 \square

補題 44. \mathbb{Q} が分離的擬順序で写像 $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ が次を満たすとする：

$$V^Q \models e^{-1}[\dot{G}_Q] : (V, \mathbb{P})\text{-generic filter}$$

このとき、 e は完備埋め込みである。

証明 単調性を示す。 $p \leq_P q$ とすると、 $V^Q \models [p \in e^{-1}[\dot{G}_Q] \rightarrow q \in e^{-1}[\dot{G}_Q]]$ が成り立ち、特に定義より $V^Q \models [e(p) \in \dot{G}_Q \rightarrow e(q) \in \dot{G}_Q]$ となる。よって、 Q の分離性と補題 41 より $e(p) \leq e(q)$ を得る。

$e(1) \in \dot{G}_Q$ より 1 上の議論と同様に $\forall q \ q \leq e(1)$ が言え、 $e(1_P) = 1_Q$ が常に成り立つ。

一旦 \perp を保つことも見ておく。対偶を示す： $e(p) \parallel e(q)$ ならば $p \parallel q$ であることを示す。 $e(p) \parallel e(q)$ なので、 $r \leq_Q e(p), e(q)$ となる $r \in Q$ をとっておく。すると、 $r \Vdash e(p), e(q) \in \dot{G}_Q$ であり、定義より $r \Vdash p, q \in e^{-1}[\dot{G}_Q]$ となる。このとき、 $\Vdash e^{-1}[\dot{G}_Q] : \text{filter}$ であるので、 $r \Vdash p \parallel q$ でなくてはならない。 $r \parallel q$ は V に属する元である \mathbb{P}, p, q, \leq を使って Δ_0 -論理式で書けるので、結局 V で見ても $p \parallel q$ が成り立つ。

以上から e は反鎖を反鎖に移すことがわかったので、極大性が保たれることを言えばよい。 \mathcal{A} を \mathbb{P} の極大反鎖とし、 $q \in Q$ を適当にとり、 $r \in e[\mathcal{A}]$ で $r \parallel q$ となるものがとれればよい。いま仮定から $q \Vdash \mathcal{A} \cap e^{-1}[\dot{G}_Q] \neq \emptyset$ であり、これは定義より $q \Vdash \exists r \in \check{\mathcal{A}} [r \in \dot{G}_Q]$ と同値である。すると、系 38 から $s \leq q$ と $r \in e[\mathcal{A}]$ で $s \Vdash \check{r} \in \dot{G}_Q$ を満たすものが取れる。このとき $s \Vdash \check{r}, \check{q} \in \dot{G}_Q$ より特に $s \Vdash \check{r} \parallel \check{q}$ となり、 Δ_0 絶対性より V で見ても $r \parallel q$ が成り立つ。 \square

注意 12. ここでみたように、「存在するなら、その下に証拠とそれを強制する条件が取れるから～」という形の議論を、**稠密性論法 (density argument)** と呼ぶ。「稠密性から取り直せるので、最初から 1 で強制できていると思って議論しちゃうよ」みたいなものが典型例である。

更に、上では e を個別に固定したが、 Q に関する条件を更に強くすれば、単純に「 Q が \mathbb{P} の (V, \mathbb{P}) -生成的フィルターを付加する」という条件と「完備埋め込みがなんでもいいから存在する」は同値になる：

補題 45. \mathbb{P} が擬順序、 \mathbb{B} が完備 Boole 代数のとき、次は同値：

1. \mathbb{P} から \mathbb{B} への完備埋め込みが存在する
2. $V^{\mathbb{B}} \models \exists \dot{H} : (V, \mathbb{P})\text{-generic}$

証明 (1) \implies (2) はすでに見たので、(2) \implies (1) を示す。結論から言うと、次の写像が求めるものである：

$$e(p) := [\check{p} \in \dot{H}]$$

めちゃくちゃ素直な定義である。単調性や 1 を保つことは自明である。 \perp を保つこともこれまでと同様に（というか \mathbb{B} が Boole 代数なのでもっと簡単に）示せる。

あとは \mathcal{A} を \mathbb{P} の極大反鎖として $e[\mathcal{A}]$ が \mathbb{B} でも極大であることが言えればよい。特に、 $e[\mathcal{A}]$ が前稠密であるということが示せればよいが、今 \mathbb{B} は完備 Boole 代数なので $\sum e[\mathcal{A}] = 1$ が示せればよい。しかるに：

$$\begin{aligned} \sum e[\mathcal{A}] &= \sum_{a \in \mathcal{A}} e(a) = \sum_{a \in \mathcal{A}} [\check{a} \in \dot{H}] && \text{(定義)} \\ &= [\exists a \in \check{\mathcal{A}} \ \check{a} \in \dot{H}] && \text{(系 5 (2))} \end{aligned}$$

$$= [\check{\mathcal{A}} \cap \dot{H} \neq \emptyset] = 1 \quad (\dot{H}: (V, \mathbb{P})\text{-生成的}, \mathcal{A}: \text{極大反鎖より})$$

よって示せた。 \square

注意 13. 擬順序 \mathbb{P} と $V^{\mathbb{P}} \models [\dot{Q} : \text{擬順序}]$ となるような擬順序の \mathbb{P} -名称 \dot{Q} が与えられたときに、「 \mathbb{P} の後に今度は \dot{Q} で強制拡大する」という操作を一つにまとめた (V での) **二段階反復擬順序** $\mathbb{P} * \dot{Q}$ が定義できる。実は、 \mathbb{P} から \dot{Q} に完備埋め込みが存在するとき、**商の \mathbb{P} -名称** ($\dot{Q} : \mathbb{P}$) を定義することができる。これは $V^{\mathbb{P}}$ の中で「 \dot{Q} のうち $V^{\dot{Q}}$ にいくのに足りない分」になるような名前である。より詳しく、 \dot{Q} から $\mathbb{P} * (\dot{Q} : \mathbb{P})$ への稠密埋め込みが存在し、特に両者は強制法として同値になる、ということが示せる。このように、完備埋め込みの存在は、「一方の強制法が他方の強制法の途中に現れる」という状況の特徴づけるとても良い概念であることがわかる。

さて、これまで完備埋め込みの性質を見てきたが、これは先の宣言通り、稠密埋め込みが強制法を保つことを示すためである：

定義 17. $d : \mathbb{P} \hookrightarrow_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ が稠密埋め込み、 $\dot{x} \in V^{\mathbb{Q}}$ とするとき、 $d^*(\dot{x}) \in V^{\mathbb{P}}$ を以下のように \mathbb{B} -階数に関する帰納法で定義する：

$$d^*(\dot{x}) := \{ (d^*(\dot{y}), q) \mid (\dot{y}, q) \in \dot{x}, d(p) \leq_{\mathbb{Q}} q \}$$

定理 46. $d : \mathbb{P} \hookrightarrow_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ を稠密埋め込みとする。

1. $V^{\mathbb{P}}$ において次が成立： $H := \tilde{d}(G_{\mathbb{P}})$ は (V, \mathbb{Q}) -生成的フィルターで、 $G_{\mathbb{P}} = d^{-1}[H]$ 。
2. $V^{\mathbb{Q}}$ において次が成立： $H := d^{-1}[G_{\mathbb{Q}}]$ は (V, \mathbb{P}) -生成的フィルターで、かつ $G_{\mathbb{Q}} = \tilde{d}(H)$ 。

以上で $G_{\mathbb{P}} \mapsto \tilde{d}(G_{\mathbb{P}}), G_{\mathbb{Q}} \mapsto d^{-1}[G_{\mathbb{Q}}]$ はある意味で逆演算であることがわかった。そこで、この対応を念頭に、この定理では以下 $\dot{G}_{\mathbb{P}}, \dot{G}_{\mathbb{Q}}$ は共に \mathbb{P} -名称としても \mathbb{Q} -名称としても用いることにする。たとえば、 \mathbb{P} -名称としての $G_{\mathbb{P}}$ は普通の標準的名称であり、 \mathbb{P} -名称としての $\dot{G}_{\mathbb{Q}}$ は $\tilde{d}(G_{\mathbb{P}})$ を指す \mathbb{P} -名称とする。逆に $\dot{G}_{\mathbb{P}}$ を \mathbb{Q} -名称として用いたとき、これは $d^{-1}[G_{\mathbb{Q}}]$ の名称を指すものとする。

3. $\sigma \in V^{\mathbb{P}}, \tau \in V^{\mathbb{Q}}$ について、 $V^{\mathbb{P}} \models \check{\tau}_{\dot{G}_{\mathbb{Q}}} = d^*(\check{\tau})_{\dot{G}_{\mathbb{P}}}$ かつ $V^{\mathbb{Q}} \models \check{\sigma}_{\dot{G}_{\mathbb{P}}} = d_*(\check{\sigma})_{\dot{G}_{\mathbb{Q}}}$
4. $\sigma \in V^{\mathbb{P}}, \tau \in V^{\mathbb{Q}}$ について、 $V^{\mathbb{P}} \models d^*(d_*(\sigma)) = \sigma$ かつ $V^{\mathbb{Q}} \models d_*(d^*(\tau)) = \tau$
5. $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1} \in V^{\mathbb{P}}, \mathcal{FL}$ -論理式 $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ について、

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}) \iff d(p) \Vdash_{\mathbb{Q}} \varphi(d_*(\dot{x}_0), \dots, d_*(\dot{x}_{n-1}))$$

6. $\dot{y}_0, \dots, \dot{y}_{n-1} \in V^{\mathbb{Q}}, \mathcal{FL}$ -論理式 $\varphi(y_0, \dots, y_{n-1})$ について、

$$q \Vdash_{\mathbb{Q}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}) \iff \forall p \in \mathbb{P} [d(p) \leq q \implies p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(d^*(\dot{x}_0), \dots, d^*(\dot{x}_{n-1}))]$$

証明 (1): 面倒くさいので、 \mathbb{Q} が完備 Boole 代数のときだけ示す。

(2): 稠密埋め込みは完備埋め込みであることと演習 8) から直ちに従う。

TODO: 証明を書く \square

演習 15. 一般の擬順序の間の稠密埋め込みについても、上の定理を示せ。

補題 47 (Maximal Principle, 擬順序版). $\varphi(x)$ を $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$ -論理式、 \mathbb{P} を擬順序、 $p \in \mathbb{P}$ とする。このとき、

$$p \Vdash \exists x \varphi(x) \iff \exists \dot{x} \in V^{\mathbb{P}} [p \Vdash \varphi(\dot{x})]$$

証明 完備化を取ったあと完備 Boole 代数版を適用し、その名称を引き戻してればよい。 \square

定理 48. ZF 上次は同値：

1. AC
2. 擬順序の Maximal Principle

証明 (1) \implies (2) は明らか。(2) \implies (1) を示せば十分。

$X_i \in I$ を空でない集合からなる族とする。擬順序 \mathbb{P} を次で定義する：

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &:= \{1\} \sqcup I \\ p \leq q &\stackrel{\text{def}}{\iff} p = q \vee q = 1 \end{aligned}$$

つまり、最大元が一つだけあって、その下に I の各元が極小元としてぶら下がって極大反鎖を成しているような擬順序である。 \mathbb{P} -名称 \dot{X} を次で定める：

$$\dot{X} := \{(\check{X}_i, i) \mid i \in I\}$$

つまり、 $i \Vdash \dot{X} = \check{X}_i$ となるような名称である。各 X_i は空でないので、このとき次が成り立つ：

$$1 \Vdash \exists x (x \in \dot{X})$$

すると、Maximal Principle により、 $\dot{x} \in V^{\mathbb{P}}$ で $1 \Vdash \dot{x} \in \dot{X}$ となるものが取れる。

このとき $i \in I$ を任意にとると、 \dot{X} と \dot{x} の取り方より $i \Vdash \dot{x} \in \check{X}_i$ である。これは

$$D := \{q \leq i \mid \exists x \in X_i (q \Vdash \check{x} \in \check{X}_i)\}$$

が i 以下で稠密であるということである。しかし、今 i は極小元なので結局 $i \in D$ となる他なく、従って $x \in X_i$ で $i \Vdash \dot{x} = \check{x}$ となるものが取れる。しかも、このような x は一意である。なぜなら、ほかにも $i \Vdash \dot{x} = \check{x}'$ となるような $x' \in X_i$ が存在したとすると、等号公理から $i \Vdash \check{x} = \check{x}'$ となるが、これは Δ_0 -論理式なので V で見ても $x = x'$ が成り立つからである。そこで、この一意な $x \in X_i$ を x_i と書くことにする。

以上から、 \dot{x} から選択関数 $(x_i)_{i \in I} \in \prod_i X_i$ が定義できた。 \square

6 集合論のモデルの生成拡大と強制法拡大

6.1 推移的モデル上の強制法と強制関係

定義 18. M を $\text{ZF} - \mathbb{P}$ の推移的モデルとし、 $\mathbb{P} \in M$ とする。

1. $M^{\mathbb{P}} := V^{\mathbb{P}} \cap M$ を M における \mathbb{P} -名称の全体とする。
2. (M, \mathbb{P}) -生成的フィルタ G について、 M の G による生成拡大 (generic extension) $M[G]$ を以下で定める：

$$M[G] := \{ \dot{x}_G \mid (\dot{x}, p) \in M^{\mathbb{P}}, p \in G \}$$

M が真のクラスの場合も考えることがある。特に、 V はどんな $M \subseteq V$ の生成拡大 $V = M[G]$ になりうるか？という問いを扱う集合論の地質学 (set-theoretic geology) というのがここ十年弱で現れた集合論の新たな分野である。

一般に M が集合サイズの推移的モデルであったとしても、 (M, \mathbb{P}) -生成的フィルタが V 内に存在するとは限らない。しかし、 M が可算であれば必ず (M, \mathbb{P}) -生成的フィルタが存在する。これは、無限組合せ論パートで採り上げた Rasiowa-Sikorski の定理の系である。

補題 49. M が $\text{ZF} - \mathbb{P}$ の可算推移的モデル、 $\mathbb{P} \in M$ が擬順序、 $p \in P$ のとき、 $p \in G$ となる (M, \mathbb{P}) -生成的フィルタ G が存在する。

定理 50. M を $\text{ZF} - \mathbb{P}$ の推移的モデルとし、 φ を $M \cap V^{\mathbb{P}}$ のみをパラメータに持つ論理式、 $\mathbb{P} \in M$ とし、 G を (V, \mathbb{P}) -生成的フィルタとする。

1. $p \Vdash \varphi$ かつ $p \in G$ ならば $M[G] \models \varphi$ 。
2. $M[G] \models \varphi$ のとき、 $p \Vdash \varphi$ となる $p \in G$ が存在する。

系 51. M を $\text{ZF} - \mathbb{P}$ の推移的モデルとし、 φ を $M \cap V^{\mathbb{P}}$ のみをパラメータに持つ論理式、 $\mathbb{P} \in M$ とし、 G を (V, \mathbb{P}) -生成的フィルタとする。

1. $M[G]$ は推移的。
2. $M[G] \models \text{ZF} - \mathbb{P}$ 。
3. $M \models \text{ZF}$ ならば $M[G] \models \text{ZF}$ 。
4. $M \models \text{AC}$ ならば $M[G] \models \text{AC}$ 。
5. $M \cap \text{On} = M[G] \cap \text{On}$ 。
6. $\check{M}_G = M$ 。

特に、 M が可算のときは、Rasiowa-Sikorski のおかげで上の逆も成り立つ：

定理 52. $\text{ZF} - \mathbb{P}$ の推移的モデル M 、 $M \cap V^{\mathbb{P}}$ のみをパラメータに持つ \mathcal{FL} -論理式 φ 、擬順序 $\mathbb{P} \in M$ 、

$p \in \mathbb{P}$ に対し、次は同値：

1. $p \Vdash \varphi$ 。
2. $p \in G$ なる任意の (M, \mathbb{P}) -生成的フィルター G に対し、 $M[G] \models \varphi$ 。

6.2 Hamkins–Seabold の強制法の自然主義的正当化

6.3 強制法の実際

TODO: 強制法関係、c.t.m.、自然主義的強制法のどれをつかって、あたかも V の外に出て $V[G]$ を扱っているかのように振る舞ってもいいよ、ということを書く。論文によって強制関係を地道に計算する方法と V 上の強制法を使うのと使い分けがあるよ。c.t.m. は無矛盾性証明のときに使うというよりも、無限組合せ論的な議論を行うときに使うことが多いよ。と書く