

Boole 値解析入門

石井大海

2016/07/11 11:00:00 JST

概要

集合論の分野で、**強制法**はモデルを構成する主要な方法の一つであり、種々の命題の無矛盾性・独立性の証明に用いられています。一方、Kunen [2] でも少しだけ触れられているように、強制法は無矛盾性証明だけでなく、ZFC の定理を証明する手法としても用いることが出来ます。本稿では、この側面の用いられ方の一つである Boole 値解析の手法を採り上げます。これは強制法の同値な定式化である Boole 値モデルの手法を使って、初等解析の結果を測度論や関数解析の定理に読み替える (!) という物で、例えば「確率変数」が「あるモデルの中の実数」と一対一に対応したりします。Boole 値モデルを定式化した一人である Scott らが初期から提案していたものですが、今回は Takeuti [3] の説明に基づきます。

1 定理証明技法としての強制法

集合論において、**強制法**はモデルを構成する主要な手法の一つだが、専ら無矛盾性証明のための道具として用いられることが多い。強制法の基礎理論については、以前『Boole 値モデルと強制法』という記事 [1] で紹介したが、今回は**定理証明技法としての強制法**について採り上げる。そのため、詳細には立ち入らないが、まずはウォームアップと題して違う手法を採り上げて、それを通して強制法の基本的な事項を採り上げていきたい。

1.1 ウォームアップ：絶対性と強制法のあわせ技による定理の証明

本題の Boole 値解析の話に入る前に、Kunen [2] に載っている強制法による定理証明の方法を見てみよう。

- Def. 1.** (1) 順序集合 $(T, <)$ が**木**であるとは任意の $x \in T$ に対して $\downarrow x := \{y \in T \mid y < x\}$ が $<$ に
関し整列集合となること。
- (2) $\text{rank}_T(x) := \text{otp}(\downarrow x)$, $T_\alpha := \{x \in X \mid \text{rank}_T(x) = \alpha\}$, $\text{height}(T) := \sup_{x \in X} (\text{rank}_T(x) + 1)$.
- (3) 木 $(T, <)$ が Suslin $\stackrel{\text{def}}{\iff} T$ は高さ ω_1 の木で、 $|T_\alpha| \leq \aleph_0$ かつ T は順序型 ω_1 の鎖を持たない。
- (4) Suslin 木 T が well-pruned $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $x \in T$ と $\alpha < \omega_1$ に対し、 $T_\alpha \cap \uparrow x \neq \emptyset$.

定理 1. T が Suslin 木の時、狭義単調写像 $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}$ は存在しない。

この定理に使うのは次の補題だ：

補題 1. 実数の長さ ω_1 の狭義増大列は存在しない.

Proof. $\langle x_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ が実数の狭義増大列だとする. このとき, \mathbb{R} における \mathbb{Q} の稠密性から, 各 $\alpha < \omega_1$ に対し $x_\alpha < r_\alpha < x_{\alpha+1}$ となるような $\langle r_\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ が取れる. すると, 取り方からこの r_α たちは互いに相異なるが, これは $\mathbb{Q} = \aleph_0$ に矛盾. \square

えっ, そもそも「順序型 ω_1 の鎖を持たない」が Suslin 木の定義に入ってるのに, どう使うの? と思うかもしれない. 実は, V における Suslin 木 T に対して, より大きな宇宙 $V[G]$ で T が Suslin 木でなくなるような宇宙がある.

Fact 1. 任意の Suslin 木 T に対し, その部分木 T^* で well-pruned なものが取れる.

これを別として,

Proof. そのような $\varphi \in V$ が取れたと仮定し矛盾を導く (**背理法**). G を $(T, >)$ -生成フィルターとする. T の各レベルが高々可算であることから, T は強制法として c.c.c. を持ち, 特に V と $V[G]$ で ω_1 の値は変わらないことに注意する. 特に, T は $V[G]$ でも ω_1 -木である.

いま, T が well-pruned であることから, 各 $\alpha < \omega_1$ に対し T_α は稠密である. すると, $G \cap T_\alpha \neq \emptyset$ かつ G が上に閉 (つまり T の順序についていえば下に閉) であることから, G は T を通る道であり, T が $V[G]$ でも ω_1 -木であることから $\text{otp}(G) = \omega_1$ である. 狭義単調性は推移的モデルの間で絶対的で, 特に φ は $V[G]$ でも狭義単調写像であることに気を付ければ, $\varphi \restriction G \subseteq \mathbb{R}$ は実数の順序型 ω_1 の真の増大列である. これは補題 1 に反する. \square

参考文献

- [1] Hiromi Ishii, Boole 値モデルと強制法, 2016, URL: <https://konn-san.com/math/boolean-valued-model-and-forcing.html>.
- [2] Kenneth Kunen, Set theory, **34**, Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.
- [3] Gaisi Takeuti, Two applications of logic to mathematics, ed. by Mathematical Society of Japan, Originally published by Iwanami Shoten and Princeton University Press in 1978, 2012, URL: <http://mathsoc.jp/publication/PublMSJ/PDF/Vol113.pdf>.