計算代数を駆使して （一般化）フィボナッチ数列の一般項を求める

Hiromi ISHII

2022/03/06

Tsukuba Compter Mathematics Seminar 2022

導入

話題：一般化 Fibonacci 数列を純計算代数的に解く

- Fibonacci 数列： $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$
  - $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$
  - 線型隣接三項間漸化式で定まる数列の代表的な例

定義 1

線型隣接 $(N+1)$- 項間漸化式で定まる数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ とは，定数 c，係数 $\{c_i\}_{i<N}$，初期値 $\{a_i\}_{i<N}$ について次で定まるもの：

$$a_{k+N} = c + \sum_{i<N} c_i a_{k+i}$$

線型隣接多項間漸化式の第 n 項の求め方

- 愚直に n 回繰り返して解く
- ありきたりな方法：行列を使って求める
- 既知の一般項を使う
  - 一般項：一般の a_n を n についての閉じた式で表したもの
  - Fibonacci 数列の一般項は以下で与えられることが知られている：

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

- 一般項はどう求める？

行列の方法：ありきたりな方法から

- $(N+1)$- 項間漸化式は以下のように行列を使って表せる：

$$\begin{bmatrix} a_{k+N} \\ a_{k+(N-1)} \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_0 & c \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k+(N-1)} \\ a_{k+(N-2)} \\ \vdots \\ a_k \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 行列を A と置けば, a_n を求めるには A^n を求めればよい
  - A の固有値・固有ベクトルを求める問題に帰着

完

完ではない

一般項が求めたいのよ

- 記号的に固有値は求まる（適切な代数拡大体で）
- そこから劣決定な連立方程式を解けば固有ベクトルがわかる（記号的にできるの？）
- $Q^{-1}A^nQ$ が対角になるので，これを使って式を解いて 1- 行目をみれば一般項はわかる
  - ~~線型代数に甘えるな~~
- もっと面白い解き方はないのか？
  - あります（計算量は無視して）

母関数法による Fibonacci 数列の一般項導出 (1)

- 以下の冪級数 $F(X)$ を数列 $\{a_n\}_{n<\infty}$ の母関数と呼ぶ：

$$F(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots$$

- 単に数列の横に X^n たちを並べただけでは？
- ところが冪級数を「それっぽく」扱うといつの間にか一般項がわかる（！）
- 方針：各項の関係を使い，$F(X)$ を閉じた有理式にする.

$$\begin{aligned} X^2F(X) &= && f_0X^2 + f_1X^3 + \cdots \\ XF(X) &= f_0X && + f_1X^2 + f_2X^3 + \cdots \\ \therefore \left(X^2 + X\right)F(X) &= f_0X && + \underbrace{f_2X^2 + f_3X^3 + \cdots}_{=F(X)-\left(f_0+f_1X\right)} \end{aligned}$$

母関数法による Fibonacci 数列の一般項導出 (2)

- 変形の続き：右辺を整理すると,

$$\left(X^2 + X\right)F(X) = F(X) - f_0 - \left(f_1 - f_0\right)X \tag{1}$$

$F(X)$ を移項して,

$$\begin{aligned}\left(X^2 + X - 1\right)F(X) &= -\left(f_0 + \left(f_1 - f_0\right)X\right) && \left(F(X)\text{を移項}\right)\\ &= -X && \left(f_0 = 0, f_1 = 1\text{より}\right)\\ \therefore F(X) &= -\frac{X}{X^2 + X - 1} && \left(X^2 + X - 1\text{で両辺を割る}\right)\end{aligned}$$

母関数法による Fibonacci 数列の一般項導出 (3)

ここで多項式 X^2+X-1 の根を $\gamma, \bar{\gamma}$ とおいて部分分数分解をして,

$$F(X) = -\frac{X}{(\gamma - X)(\bar{\gamma} - X)} = \frac{X}{\gamma - \bar{\gamma}}\left\{\frac{1}{\gamma - X} - \frac{1}{\bar{\gamma} - X}\right\}$$

等比級数の公式より,

$$\frac{1}{a - X} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{X}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n<\infty}\frac{X^n}{a^n} = \sum_{n<\infty}\frac{X^n}{a^{n+1}}$$

だから,

$$F(X) = \frac{1}{\gamma - \bar{\gamma}}\sum_{0<n<\infty}\left(\frac{1}{\gamma^n} - \frac{1}{\bar{\gamma}^n}\right)X^n$$

母関数法による Fibonacci 数列の一般項導出 (4)

$X^2 + X - 1$ の二つの根は $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であることに気を付ければ,

$$
\begin{aligned}
f_n &= \frac{1}{\gamma - \bar{\gamma}} \left\{ \frac{1}{\gamma^n} - \frac{1}{\bar{\gamma}^n} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}
\end{aligned}
$$

となり，これは先に掲げた式に一致する.

- なんでこれでいいのか？

形式的冪級数環による正当化

母関数法の正当化

- 『数学ガール』[1] 等に（正当化なしで）紹介されている
  - 十年以上前に読んで「カッコイイ！」となった
- 形式的冪級数環 $R[\![X]\!]$ の環構造を使えば普通に正当化できる

定義 2 (形式的冪級数環)

単位的可換環 R- 係数の一変数形式的冪級数環 $R[\![X]\!]$ とは R の無限列の集合 ${}^{\mathbb{N}}R$ に次の演算を入れたもの：

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) \qquad (f \cdot g)(n) = \sum_{0 \le k \le n} f(k)g(n-k)$$

$$0(n) = 0_R \qquad 1(0) = 1_R, 1(n+1) = 0_R$$

形式的冪級数環は環

定理 3

形式的冪級数は前項の定義で単位的可換環を成す.

記法 4

形式的冪級数 $F \in R[\![X]\!]$ を以下の形で表す：

$$\begin{aligned} F(X) &= F(0) + F(1)X + F(2)X^2 + \cdots + F(n)X^n + \cdots \\ &= F_0 + F_1 X + F_2 X^2 + \cdots + F_n X^n + \cdots \end{aligned}$$

F_0 を F の定数項と呼ぶ. $F_i = 0$ なる項は省略する. また, 係数 $a \in R$ と, 定数項が $F_0 = a$ で残りはゼロ $F_{n+1} = 0$ の冪級数を同一視する.

記号の約束

記法 5

以下，特に断りのない限り小文字の $f(X), g(X), \ldots$ は多項式環 $R[X]$ の元を，大文字の $F(X), G(X), \ldots$ は形式的冪級数環 $R[\![X]\!]$ の元をそれぞれ動くとする．いずれの場合も，表記のスペースの都合上 (X) は省略する場合がある．また，冪級数または多項式 $F(X)$ に対し，紛らわしさを回避するため，その X^k の係数を $\{F\}_k$ と書くことがある．

母関数の定数倍・重ね合わせの正当化

補題 6 (冪によるシフト)

任意の $k \geq 0$ に対して,

$$X^k F(X) = F_0 X^k + F_1 X^{k+1} + \cdots + F_n X^{k+n} + \cdots$$

- 以上で Fibonacci 母関数法の (1) までは正当化できる.

$$\left(X^2 + X\right)F(X) = F(X) - f_0 - \left(f_1 - f_0\right)X$$
$$\therefore \left(X^2 + X - 1\right)F(X) = -f_0 - \left(f_1 - f_0\right)X$$

- $X^2 + X - 1$ で割っても大丈夫だろうか？

形式的冪級数環の可逆元

定理 7 (形式的冪級数環の可逆元)

$F \in R[\![X]\!]$ が可逆である事と，定数項 F_0 が R で可逆であることは同値であり，その逆元は以下で与えられる：

$$\left\{F^{-1}\right\}_0 = \frac{1}{F_0}, \quad \left\{F^{-1}\right\}_{n+1} = -\frac{1}{F_0}\sum_{0\le i\le n} F_{n+1-i}\left\{F^{-1}\right\}_i. \tag{2}$$

- $\left\{F^{-1}\right\}_{(-)}$ についての再帰的な定義．証明は帰納法．
- これで $F(X) = -\dfrac{X}{X^2+X-1}$ までは正当化可能！

連分数展開は？

- 通分などの操作は，分母たちが可逆なら任意の可換環で成立
- 母関数による Fibonacci 数列の解法は以下まで正当化出来る：

$$F(X) = \frac{X}{\gamma - \bar{\gamma}} \left\{ \frac{1}{\gamma - X} - \frac{1}{\bar{\gamma} - X} \right\}$$

- また，定数倍も明らかに分配則を満たす：

定理 8 (スカラー倍)

$F \in R[\![X]\!], a \in R$ に対し，$aF(X) = aF_0 + aF_1 X + \cdots.$

- あとは「等比級数の公式」が成り立てば良い．

等比級数公式

「等比級数の公式」は $R[\![X]\!]$ でも確かに成り立つ！

系 9 (等比級数の公式)

$a \in R$ が単元の時,

$$\frac{1}{X-a} = -\sum_{k<\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{k+1} X^k \tag{3}$$

- (2) に係数を代入すれば上の式が得られる.
- これで $(X-\gamma)^{-1}, (X-\bar{\gamma})^{-1}$ の第 n 項が求まる
- あとは分配則と $R[\![X]\!]$ の加法の定義から一般項が出る.

Fibonacci 数列の母関数解法まとめ

- Fibonacci 数列 $\{f_i\}_{i<\infty}$ の一般項は以下の手順で求まった

  (a) 母関数 $F(X) = f_0 + f_1 X + \cdots + f_n X^n + \cdots$ を考える

  (b) 漸化式を使い，$F(X) = -X/\left(X^2 + X - 1\right)$ と表す．

    - これは形式的冪級数環 $R[\![X]\!]$ が実際に可換環であり，
    - 分母の多項式 $X^2 + X - 1$ が $R[\![X]\!]$ で可逆であることから可能

  (d) 分母を因数分解し，一次式に部分分数分解する．

  (e) 等比級数公式を線型に重ね合わせて，第 n 項の式を導く．

多項への一般化

$(N+1)$- 項間漸化式への一般化

- 母関数法を $(N+1)$- 項間に一般化，計算機に解かせたい
  - 可能な限り一般的な係数環で解けるようにしたい
    - ネタバレ：因数分解が計算可能な整域なら OK
- 必要なもの：
  (a) 一般の場合でも使える母関数 $F(X)$ の有理式表現（やるだけ）
  (b) 有理式の部分分数分解（既知）
    (i) 更に分母の一次式への因数分解が必要（ちょっと工夫が必要）
  (c) 無限和で表し重ね合せ：等比級数の公式の冪乗版が必要（簡単）

有理式表現

- $c_{N-1}X^1, c_{N-2}X^2, \ldots, c_0X^N$ を $F(X)$ に掛け足し合わせる
- 更に，定数項の分の帳尻を $c/(1-X)$ で合わせて整理して：

$$\left\{\sum_{k<N} c_k X^{N-k} - 1\right\} F(X) = g(X) - \sum_{k<N} a_k X^k + \frac{cX^N}{X-1}, \tag{4}$$

$$\text{where } g(X) = \sum_{i<k<N} c_{N-k+i+1} a_i X^k.$$

- 左辺の $F(X)$ の係数の定数項は可逆
- $F(X)$ 以外の項は全て有限次なので，$F(X)$ は有理式で表せる

有理式の部分分数分解

定義 10

整域 R 係数の互いに素で定数でない多項式 $\{g_i\}_{i<k}$ と正の整数 $\{e_i\}_{i<k}$ により，多項式 g が $g = g_0^{e_0} \cdot \cdots \cdot g_{k-1}^{e_{k-1}}$ と表されているとする．この時，$\deg f < \deg g$ なる多項式 f について

$$\frac{f(X)}{g(X)} = \sum_{i<k} \left[\frac{f_{i,1}}{g_i} + \cdots + \frac{f_{i,e_i}}{g_i^{e_i}} \right], \quad \left(\deg f_{i,j} < \deg g_i \right)$$

を有理式 $f(X)/g(X)$ の $\{g_i\}_i$ に関する部分分数分解と呼ぶ．

部分分数分解の存在と一意性：第一ステップ

- 係数が体の時を考える（整域なら分数体や擬剰余を考える）

補題 11

f, g, g_i, e_i について次を満たす $\{\hat{f}_i\}_i$ が一意に存在する：

$$\frac{f}{g} = \frac{\hat{f}_0}{g_0^{e_0}} + \frac{\hat{f}_1}{g_1^{e_1}} + \cdots + \frac{\hat{f}_{k-1}}{g_{k-1}^{e_{k-1}}} \quad \left(\deg \hat{f}_i < e_i \deg g_i\right)$$

証明

互いに素なので $g_j, j \neq i$ は $\bmod g_i^{e_i}$ で可逆．よってこの時

$$\hat{f}_i = g_0^{-e_0} \cdots g_{i-1}^{-e_{i-1}} g_{i+1}^{-e_{i+1}} \cdots g_{k-1}^{-e_{k-1}} f \bmod g_i^{-e_i}$$

が求めるもの．

部分分数分解の存在と一意性：第二ステップ

- あとは先程の結果を g_i- 進展開してやればよい.
  - 整数を p- 進展開するように, $\hat{f}_i$ を繰り返し g_i で剰余をとれば,

$$\hat{f}_i = f_{i,1} g_i^{e_i - 1} + \cdots + f_{i,e_i - 1} g_i + f_{i,e_i} \left(\deg f_{i,e_i} < \deg g_i \right)$$

  と表示でき, $g_i^{e_i}$ で割れば所要のもの.
  - Modern Computer Algebra [3] などでも紹介されている方法
- 部分分数展開は $\left\{g_i\right\}_i$ が与えられて初めて定まるので, 母関数の分解には, 分母の因数分解があればよい

因数分解をどうするか？

- 有限体や有理数体，整数環上の因数分解の方法は既知（ここではやらない）
  - Modern Computer Algebra [3] や『計算機代数の基礎理論』[4] 参照
- 武器が等比級数公式だけなので一次式の積しか扱えない！
  - 代数閉包を取ってもよいが，そこでの因数分解が必要
- 今回の方針
  (a) まずは係数環やその分数体上で因数分解
  (b) 高次因子は剰余環を繰り返し取り，分解体上で扱う

分解体での計算

- $f(X)$ を平方因子を含まないモニックな既約多項式とする
- $R[X]/f(X)$ は $f(X)$ の根を少なくとも一つ含む
  - $\deg f = 1$ なら元の R と同型
  - $\deg f = 2$ なら，$R[X]/f$ は $f(X)$ の二つの根を全て含む
    - 一つは $\xi = [X]_f$，もう一つは因数定理より $f/(X-\xi)$ が知ってる（二次方程式の解と係数の関係）
- $\deg f > 2$ の場合 $f/(X-\xi)$ に対して以下同文
  - 同型にはなるが，三次以上の場合でも複数根が付与される場合はないか？
- f にしか興味ないので拡大体での一般的な因数分解は不要

等比級数公式の冪乗版 (1)

- 母関数 $F(X)$ をこんな感じで一次式の冪乗和に分解できた：

$$F(X) = g(X) + \frac{h(X)}{(X-\xi_0)^{e_0}\cdots(X-\xi_n)^{e_n}} \qquad \text{(分母因数分解)}$$

$$= g(X) + \sum_{k\le n}\sum_{1\le i\le e_k}\frac{d_{k,i}}{(X-\xi_k)^{e_i}} \qquad \text{(部分分数分解)}$$

但し，$g(X) \in R[X], d_{k,i} \in R$.

- Fibonacci の場合と違って $(X-\xi)^{-e_i}$ の項が出てきうる.

等比級数公式の冪乗版

- （面倒だが）簡単な帰納法で次が示せる：

補題 12 (等比級数公式，冪乗版)

$a \in R$ を可逆元とすると，$R[\![X]\!]$ で次が成立：

$$\frac{1}{(X-a)^{k+1}} = \left(-\frac{1}{a}\right)^{k+1} \sum_{n<\infty} (n+1)^k \left(\frac{1}{a}\right)^n X^n \tag{5}$$

- これで最後のピースが揃った！

例： $\mathbb{F}_5$上の定数項つき Fibonacci (1)

次の定数項つきの Fibonacci 数列を有限体 $\mathbb{F}_5$ 上で解いてみる：

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + 2$$

- まず母関数の公式 (4) に各値を代入して整理すると,

$$F(X) = \frac{X^2 + X}{X^3 - 2X + 1}$$

- 分母に有限体上での因数分解を施して,

$$F(X) = \frac{X^2 + X}{(X-1)(X-2)^2}$$

例： $\mathbb{F}_5$上の定数項つき Fibonacci (2)

- 部分分数分解をすると：

$$F(X) = \frac{2}{X-1} + \frac{4}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2}$$

- これに式 (5) を適用して

$$\begin{aligned} F(X) &= \sum_{n<\infty} -2X^n + \sum_{n<\infty} -\frac{4}{2^{n+1}} X^n + \sum_{n<\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} X^n \\ &= \sum_{n<\infty} \left\{3 + 3^{n+1} + 4(n+1)3^n\right\} X^n \end{aligned}$$

よって一般項は $a_n = 3 + 3^{n+1} + 4(n+1)3^n$.

$\mathbb{Q}$上のトリボナッチ数列の一般項 (1)

- 高次の分解体が必要で $(N+1)$- 項が解ける例として以下で定まるトリボナッチ数列を考える：

$$t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 1,\ t_{k+3} = t_k + t_{k+1} + t_{k+2}$$

- 計算機によれば母関数は

$$T(X) = -\frac{X}{X^3 + X^2 + X - 1}$$

- 大人しめだが，これの一般項はものすごいことになる

$\mathbb{Q}$上のトリボナッチ数列の一般項 (1)

ものすごい一般項が出る

$$
\begin{aligned}
t_n = &\left(\frac{\xi^2}{11} + \frac{7}{22}\xi + \frac{3}{22}\right)(\xi^2 + \xi + 1)^n \\
&+ \left(-\frac{2}{11}\xi + \frac{5}{22}\zeta - \frac{\xi^2}{11} + \frac{1}{22}\right)(-\xi\zeta + -\xi^2 - \xi)^n \\
&+ \left(-\frac{3}{22}\xi - \frac{5}{22}\zeta - \frac{2}{11}\right)(\xi\zeta)^n
\end{aligned}
$$

ただし $\xi^3 + \xi^2 + \xi - 1 = 0,\ \zeta^2 + (\xi + 1)\zeta + \left(\xi^2 + \xi + 1\right) = 0.$

変な数列 over $\mathbb{F}_{17}$

- $\mathbb{F}_{17}$ 上で $a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1$ として

$$a_{n+4} = 4a_n + 3a_{n+1} + 2a_{n+2} + a_{n+3} + 1$$
$$\to 0, 0, 0, 1, 2, 5, 13, 0, 16, 8, 8, 5, 8, 7, 3, \ldots$$

- 一般項は

$$\begin{aligned} a_n = {} & 13 \cdot 6^n + 15 + \left(3\xi^2 + 2\xi + 15\right)\left(5\xi^2 + 6\xi + 12\right)^n \\ & + \left(7\xi + 12\zeta + 14\xi^2 + 1\right)\left(12\xi\zeta + 12\xi^2 + 11\xi\right)^n \\ & + (8\xi + 5\zeta + 7)(5\xi\zeta)^n \end{aligned}$$

但し $\xi^3 + 8\xi^2 + 16\xi + 10 = 0,\ \zeta^2 + (\xi + 8)\zeta + \left(\xi^2 + 8\xi + 16\right) = 0.$

まとめ

- 母関数の有理式表現を用い，因数分解が計算可能な整域上で一般化 Fibonacci 数列の一般項を計算機に求めさせた．
  - 実装 [5] と冪級数の性質の形式的証明 [6] は GitHub にあり
- 形式的冪級数環 $R[\![X]\!]$ の代数構造を使うと完全に正当化可能
- 計算の過程では計算代数の色々な要素が顔を出す
  (a) 多項式の因数分解（整数環・有理数体・有限体上）
  (b) 剰余環での計算（多項式剰余）Gröbner までは不要
  (c) 部分分数分解

参考文献

[1] 結城浩 , “数学ガール ,” SB クリエイティブ , June 2007, vol. 1, ISBN: 9784797341379.

[2] H. Basold et al., “Newton Series, Coinductively: A COmparative Study of Composition,” *Mathematical Structures in Computer Science*, pp. 1–1, 2019, doi:10.1017/S0960129517000159.

[3] J. v. z. Gathen and J. Gerhard, “Modern Computer Algebra,” Third Edition ed., Cambridge University Press, 2013, ISBN: 978-1-107-03903-2.

[4] 長坂 耕作 et al., “計算機代数の基礎理論 ,” 共立出版 , 3 2019, ISBN: 978-4-320-11373-2.

[5] Hiromi Ishii, `Algebra.Ring.LinearRecurrentSequence` module, 2022. URL: `https://github.com/konn/computational-algebra/blob/6e87b1eb9/src/Algebra/Ring/LinearRecurrentSequence.hs`.

[6] Hiromi Ishii, `laurent`, 2022. URL: `https://github.com/konn/laurent`.

御清聴
ありがとう
ございました

Any Questions?

- 母関数の有理式表現を用い，因数分解が計算可能な整域上で一般化 Fibonacci 数列の一般項を計算機に求めさせた．
  - 実装 [5] と冪級数の性質の形式的証明 [6] は GitHub にあり
- 形式的冪級数環 $R[\![X]\!]$ の代数構造を使うと完全に正当化可能
- 計算の過程では計算代数の色々な要素が顔を出す
  (a) 多項式の因数分解（整数環・有理数体・有限体上）
  (b) 剰余環での計算（多項式剰余）Gröbner までは不要
  (c) 部分分数分解