Martin の公理，範疇定理，小さな基数

石井大海

2022-04-16

1　Martin の公理と範疇定理

MA(κ) は「任意の c.c.c. poset $\mathbb{P}$ に対し $\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$」という主張だった．この「c.c.c.」というのは落とせない，というのが次の補題：

補題 1. $\neg\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\aleph_1)$ となるような non-c.c.c. poset $\mathbb{P}$ が存在する．

Proof. 前回のゼミの際に $\mathrm{Fn}(I, J)$ が c.c.c. を持つことと $I = \emptyset \vee |J| \leq \aleph_0$ であることが同値なことを見た．そこで，$I = \omega, J = \omega_1$ の場合を考えれば，$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1)$ は c.c.c. を持たない．ここで，次の集合を考える：

$$D_n := \{\, p \in \mathbb{P} \mid n \in \mathrm{dom}(p) \,\}\ (n < \omega) \qquad E_\alpha := \{\, p \in \mathbb{P} \mid \alpha \in \mathrm{rng}(p) \,\}\ (\alpha < \omega_1)$$

$p \in \mathbb{P}$ が有限であることから，各 E_n, D_n は $\mathbb{P}$ で稠密．そこで $\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\omega_1)$ とすれば，$\{\, D_n, E_\alpha \,\}$-ジェネリックなフィルター $G \subseteq \mathbb{P}$ が取れる．特に，$f_G = \bigcup G$ とおくと $f_G : \omega \xrightarrow{\text{onto}} \omega_1$ となる．これは $\omega < \omega_1$ に反する． □

ここでの $\mathbb{P}$ は c.c.c. でない poset の一例に過ぎない．c.c.c. よりも弱い条件しか満たしていなくても，$\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\aleph_1)$ は成り立ちうる．例えば「c.c.c.」という条件を「proper」という条件に弱めた PFA という公理は ZFC と無矛盾で，$\mathrm{MA}(\aleph_1)$ から独立な多くの命題を導くことが知られている．

まず初めに見る MA の応用は，Baire の範疇定理の一般化：

補題 2. MA(κ) を仮定する．X：c.c.c. コンパクト Hausdorff 空間，$X_\alpha \subseteq X$：閉疎集合 $(\alpha < \kappa)$

$$\Longrightarrow \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha \neq X$$

Proof. X は c.c.c. を満たすので，空でない開集合の成す poset $\mathbb{O}_X$ も c.c.c. を満たすことに注意する．

補集合を取れば，結局示すべき事は次と同値である：

$$U_\alpha : \text{稠密開集合}\ (\alpha < \kappa) \Rightarrow \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$$

$G \subseteq \mathbb{O}_X$ をフィルターとすると，G は有限交叉性を持つ．ここで，$F_G := \bigcap_{p\in G} \bar{p}$ とおけば，F_G は空でない．もし $F_G = \emptyset$ だったとすると，$\bigcup_{p\in G} p^e = X$ は X の開被覆である．よって X のコンパクト性より，$p_0, \dots, p_n \in G$ があって $X = p_0^e \cup \dots \cup p_n^e$ と出来る．すると，$p_0 \cap \dots \cap p_n \subseteq \bar{p_0} \cap \dots \bar{p_n} = \emptyset$ となり，$p_i \in G$ に反する．

ここで，$D_\alpha := \{\, p \in \mathbb{O}_X \mid \bar{p} \subseteq U_\alpha \,\} \quad (\alpha < \kappa)$ と置くと，各 D_α は稠密である．それを示すため，$p \in \mathbb{O}_X$ を取ろう．U_α は稠密開集合なので，$p \cap U_\alpha \in \mathbb{O}_X$ である．今，X はコンパクト Hausdorff 空間なので特に正則空間となり，$\bar{q} \subseteq p \cap U_\alpha$ となるような空でない開集合 $q \in \mathbb{O}_X$ を取ることが出来る．この時取り方から明らかに $q \leq p$ かつ $q \in D_\alpha$．よって各 D_α は $\mathbb{O}_X$ で稠密である．

そこで，$\mathrm{MA}(\kappa)$ により，$\{\, D_\alpha \,\}$-ジェネリックなフィルター $G \subseteq \mathbb{O}_X$ を取る．先程の議論より $F_G = \bigcap_{p\in G} \bar{p} \neq \emptyset$ である．特に，$G \cap U_\alpha \neq \emptyset$ より各 α について $\bigcap_p \bar{p} \subseteq \bar{p} \subseteq U_\alpha$ となるような $p \in G$ が存在する．よって，

$$\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \supseteq \bigcap_{p\in G} \bar{p} \neq \emptyset$$

□

ジェネリックフィルターの補題より $\kappa = \omega$ の場合は c.c.c. 性を落として，一般のコンパクト Hausdorff 空間について成り立つことになる．最初にも述べたように，これは Baire の範疇定理の拡張になっていて，ここで $\mathrm{MA}(\kappa)$ を使ってジェネリックフィルターを取っている部分が通常の証明で開集合の ω-列を取る所と対応している．実際にはこの形の命題は $\mathrm{MA}(\kappa)$ と同値である事が後の節でわかる．

この定理は，もし X が孤立点を持つなら $MA(\kappa)$ など仮定しなくても自明に成立する（孤立点は一点で開集合になるので）．これは，$\mathbb{P}$ が**アトム**を持つ時に $\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$ が自明に成立するのと似ている．

Def. 1. $r \in \mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ の**アトム** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall p, q \leq r\, [p \parallel q]$

特に，Hausdorff 空間の場合，$r \in \mathbb{O}_X$ がアトム $\Leftrightarrow |r| = 1$ である．

補題 3.
- $r \in \mathbb{P}$ がアトムなら，$\forall \kappa\, \mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$
- $\mathbb{P}$ がアトムを持たないなら，$\neg \mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(2^{|\mathbb{P}|})$

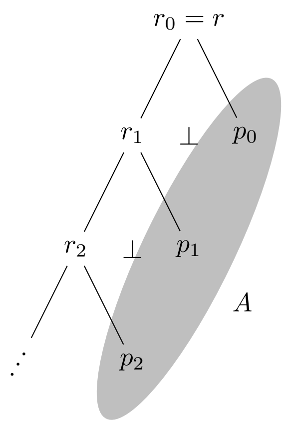
Proof. 証明は前回やったのでもうやらない． □

もしも $\mathbb{P}$ がアトムを持たないなら，任意の $r \in \mathbb{P}$ について，それより下に少なくとも可算濃度の反鎖が存在

することがわかる：

補題 4. $\mathbb{P}$ がアトムを持たない $\Rightarrow \forall r \in \mathbb{P} \exists A \subseteq {\downarrow} r\, [|A| \geq \aleph_0 \wedge A$ は反鎖$]$

Proof. 下図の通り：



□

2　Martin の公理と小さな基数

Def. 2. $\mathfrak{m}$ を $\neg\mathrm{MA}(\kappa)$ となる最小の κ とする．

今までの結果を纏めると，$\aleph_1 \leq \mathfrak{m} \leq \mathfrak{c}$ となるこれは第一節で議論した小さな基数たちの範囲と同じだが，特に $\mathfrak{m}$ は今まで議論した中で最小なことがわかる．この記号を使えば $\mathrm{MA} \Leftrightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{c}$ だから，MA の下ではこれらの基数は全て $\mathfrak{c}$ と一致することになる．今回は特に $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{p}$ を示す．

Def. 3.
- 集合族 $\mathcal{E}$ が**強有限交叉性** (Strong Finite Intersection Property; *SFIP*) を持つ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \mathcal{F} \in [\mathcal{E}]^{<\omega}\, |\bigcap \mathcal{F}| \geq \aleph_0$
- K が $\mathcal{E} \subseteq [\omega]^\omega$ の**擬共通部分** (*pseudointersecion*) である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |K| = \aleph_0 \wedge \forall Z \in \mathcal{E}\, [K \subseteq^* Z]$
- $\mathfrak{p} =$SFIP を持つが擬共通部分を持たないような $[\omega]^\omega$ の部分集合の最小濃度

第一節で議論した髭文字系の小さな基数の中で $\mathfrak{p}$ は最小だった．以下では $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{p}$ を示す：

補題 5. $\mathfrak{m} \le \mathfrak{p}$

Proof. $\kappa < \mathfrak{m} \to \kappa < \mathfrak{p}$ を示そう．即ち，MA(κ) を仮定し，$\mathcal{E} \subseteq [\omega]^\omega$ を SFIP を持つ濃度 κ の族とした時，$\mathcal{E}$ は擬共通部分 K を持つことを示す．

$\mathbb{P} := \{\, p = \langle s_p, \mathcal{W}_p \rangle : s_p \in [\omega]^{<\omega} \wedge \mathcal{W}_p \in [\mathcal{E}]^{<\omega} \,\}$ と置く．気持ちとしては各 s_p が K の下からの有限近似であり，$\mathcal{W}_p$ は s_p の差を除いて K を含むことが保証された $\mathcal{E}$ の元の一覧になっている．その気持ちを念頭において，$\mathbb{P}$ 上に次のように順序を定める：

$$p \le q \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} s_p \supseteq s_q & (s_p \text{ は } s_q \text{よりよい近似}) \\ \mathcal{W}_p \supseteq \mathcal{W}_q & (\mathcal{W}_p \text{ は } \mathcal{W}_q \text{ より沢山保証}) \\ \forall Z \in \mathcal{W}_q \, [s_p \setminus s_q \subseteq Z] & (p \text{ は } q \text{ の約束を破らない}) \end{cases}$$

これにより，$\langle \mathbb{P}, \le, \langle \emptyset, \emptyset \rangle \rangle$ が forcing poset となるのは明らか．MA(κ) を使いたいので，$\mathbb{P}$ が c.c.c. を満たすことを示さなくてはならない．ここで，

$$s_p = s_q \longrightarrow s_p \parallel s_q \qquad (*)$$

が成立する．なぜならこの時，$r = \langle s_p, \mathcal{W}_p \cup \mathcal{W}_q \rangle$ とおけば明らかに $r \le p, q$ となるからである．特に各 $s \in [\omega]^{<\omega}$ は可算個しかないから，もし $A \subseteq \mathbb{P}$ が非可算集合であったとすると，必ず $s_p = s_q$ となる $p, q \in A$ があり $s_p \parallel s_q$ となるので，A は反鎖ではない．よって $\mathbb{P}$ は c.c.c. を満たす．

$G \subseteq \mathbb{P}$ をフィルターとするとき，$K_G := \bigcup_p s_p$ により $K_G \subseteq \omega$ を定める．この時，K_G が $\mathcal{E}$ の擬共通部分となるようにしたい．より具体的には，次の二条件を満たすようにしたい：

(a) $|K_G| \ge \aleph_0$
(b) $\forall Z \in \mathcal{E}\, \exists s \in [\omega]^{<\omega}\, [K_G \setminus s \subseteq Z]$

まず (a) を成立させるには，G を次の各集合と交わるように取ればよいことがわかる：

$$D_n := \{\, q \in \mathbb{P} : |\, q| \ge n \,\} \ (n < \omega)$$

ここで，$\mathcal{E}$ が SFIP を持つことから各 D_n は稠密集合となる事がわかる．これを示すため，$p \in \mathbb{P}$ を任意に取る．この時 $\mathcal{W}_p$ は $\mathcal{E}$ の元からなる有限集合であり，$\mathcal{E}$ が SFIP を持つことから $\bigcap \mathcal{W}_p$ は無限集合となる．よって $t \in [\bigcap \mathcal{W}_p]^n$ が取れ，$r = \langle s_p \cup t, \mathcal{W}_p \rangle$ とおけば，$D_n \ni r \le p$ となる．よって D_n の全体は可算個しかないので，$G \cap D_n \ne \emptyset$ となるようにできる．

次に (b) を成り立たせたい．各 $Z \in \mathcal{E}$ に対し $E_Z := \{\, q \in \mathbb{P} : Z \in \mathcal{W}_q \,\}$ の形の集合を考えると，これは $\mathbb{P}$ の稠密集合である．これは，$p \in \mathbb{P}$ に対し $r = \langle s_p, \mathcal{W}_p \cup \{\, Z \,\} \rangle$ とおけば $r \le p$ かつ $r \in E_Z$ となることから明らかである．このような E_Z は $|\mathcal{E}| = \kappa$ 個しかなく，今 MA(κ) を仮定しているので，フィルター G を各 E_Z と交わるように取ることが出来る．この時 (b) が成立することは，次のようにしてわかる．適当な $Z \in \mathcal{E}$ を取れば，$G \cap E_Z \ne \emptyset$ より $Z \in \mathcal{W}_p$ を満たすような $p \in G$ が存在する．この時，任意の $q \in G$ に対し $s_q \setminus s_p \subseteq Z$ となることが示せれば十分である．何故ならこのとき $K_G \setminus s_p = \bigcup_q (s_q \setminus s_p) \subseteq Z$ となるからである．G はフィルターなので，$r \le p, q$ となるような $r \in G$ が存在する．特に順序の定義から $s_r \supseteq s_q$ かつ $s_r \setminus s_p \subseteq Z \in \mathcal{W}_p$ となっているので，$s_q \setminus s_p \subseteq Z$ が云える．以上より K_G は $\mathcal{E}$ の擬共通部分である．$\square$

上の議論では $(\star)$ の条件が本質的な役割を果している．MA を用いた議論ではしばしばこれに類似の論法が使われるので，それをちょっと詳しく見てみよう：

Def. 4.
- $C \subseteq \mathbb{P}$ が *centered* $\overset{\text{def}}{\iff} \forall p_0, \ldots, p_n \in C\, \exists q \in \mathbb{P}\, \forall i\, [q \leq p_i]$
- $\mathbb{P}$ が *σ-centered* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathbb{P}$ は可算個の centered 部分集合の和である．

$C \subseteq \mathbb{P}$ が centered であるというのは，有限交叉性の一般化になっている．例えば，位相空間 X に対し $\mathbb{O}_X$ を考えると，$C \subseteq \mathbb{O}_X$ が centered であることと C が有限交叉的であることは同値である．

実際，上の補題が実際に使っているのは $\mathrm{MA}(\kappa)$ を σ-centered な集合に制限したものである．より強く，次が成り立つ：

補題 6. 補題 5 で用いた poset は可算個のフィルターの和で表せる．特に σ-centered である．

Proof. 各 $s \in [\omega]^{<\omega}$ に対し，$C_s := \{\, p \in \mathbb{P} : s_p = s \,\}$ とおけば $\mathbb{P} = \bigcup_s C_s$ である．特に，$p, q \in C_s$ ならば $r \in C_s$ の範囲で $r \leq p, q$ となるものが取れる．よって C_s はフィルター基になっており，$\mathcal{F}_s = {\uparrow} C_s$ とおけば $\mathcal{F}_s$ はフィルターとなり，$\mathbb{P} = \bigcup_s C_s = \bigcup_s \mathcal{F}_s$ となる． □

上の証明では，各 C_s を拡張する際に各 p_i の下界が再び C_s に属することを使っているが，一般の σ-centered 集合でそうなっている訳ではない．実用上殆んどの場合は σ-centered な poset はフィルターの可算和で書けるが，そうでないような例も知られている．また，これも後で見ることだが，$\kappa < \mathfrak{p}$ であることと，$\mathrm{MA}_{\mathbb{P}}(\kappa)$ が σ-centered な物について成立することは同値となる．

centered な集合の二元は両立してしまうため，反鎖は各 centered 集合の元を高々一つしか持たないことがわかる．これは，正しく先程の証明の論法を一般化したものになっている：

補題 7. $\mathbb{P}$ が σ-centered $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ は c.c.c. を持つ

一般に逆は不成立である：

演習問題 1. X をコンパクト Hausdorff 空間とすると，次は同値：

(1) X は可分
(2) $\mathbb{O}_X$ は σ-centered
(3) $\mathbb{O}_X$ はフィルターの可算和 □

特に，$\kappa > \mathfrak{c}, X = {}^\kappa 2$ とすると，$\mathbb{O}_X$ は c.c.c. だが σ-centered でない順序集合の例になっている．

Proof. $\mathbb{O}_X$ では centered 性と有限交叉性は同値であったので，centered 集合から生成されるフィルターを考えれば (2) $\Leftrightarrow$ (3) は OK．そこで (1) $\Leftrightarrow$ (3) を示す．

($\Rightarrow$) を示そう．$D = \{ d_n : n < \omega \} \subseteq X$ を X の可算な稠密集合とする．この時 $\mathcal{U}_n := \{ p \in \mathbb{O}_X : d_n \in p \}$ とおけば，各 $\mathcal{U}_n$ はフィルターとなる．この時 D の稠密性より空でない開集合は d_i のいずれかを元にもつので，$\mathbb{O}_X = \bigcup_n \mathcal{U}_n$ となる．

($\Leftarrow$) を示す．フィルター $\mathcal{F}_n$ により $\mathbb{O}_X = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ と書けているとする．この時超フィルターの補題によって各フィルターを超フィルター $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ に拡張する．X はコンパクトなので各 $\mathcal{U}_n$ は必ず収束点を持ち，Hausdorff 性よりその収束先は一意に来まる．そこで，

$$D = \{ d_n = \lim \mathcal{U}_n : n < \omega \}$$

と置き，D が X の稠密集合であることを示す．$U \in \mathbb{O}_X$ を任意にとれば，X はコンパクト Hausdorff 空間なので正則空間となり，$V \in \mathbb{O}_X$ で $\bar{V} \subseteq U$ を満たすものが取れる．すると仮定より $V \in \mathcal{U}_n$ となるような $n < \omega$ が存在する．今 $\mathcal{U}_n$ は d_n に収束するので，位相空間の一般論より $d_n \in \bar{V} \subseteq U$ となる．よって $U \cap D \neq \emptyset$. $\square$

$\kappa > \mathfrak{c}$ の時 $X = {}^\kappa 2$ が σ-centered でない c.c.c. poset の例になっていることは次のようにしてわかる．まず 2 は可分なので，教科書の系 III.2.10 よりその直積 ${}^\kappa 2$ は c.c.c. となり，$\mathbb{O}_X$ も c.c.c. となる．ところで，教科書の補題 III.2.11 によれば，X_i が二点以上持つ Hausdorff 空間で $|I| > \mathfrak{c}$ の時，$\prod_{i \in I} X_i$ は可分ではない．よって ${}^\kappa 2$ は可分ではない．Tychonoff の定理より X はコンパクトであり，Hausdorff 性も明らか．よって上の結果より，$\mathbb{O}_X$ は σ-centered ではない．

参考文献

[1] Kenneth Kunen. *Set Theory*. Vol. 34. Mathematical Logic and Foundations. College Publications, 2011.

[2] 酒井克郎. **位相空間の基礎概念**. 2012. URL: https://sites.google.com/site/ksakaiidtopology/ri-ben-yunopeji/basic-topology.

[3] 松坂和夫. **集合・位相入門**. 岩波書店, 1986.