Boole 値解析入門

石井大海

2022-04-16

概要

集合論の分野で，**強制法**はモデルを構成する主要な方法の一つであり，種々の命題の無矛盾性・独立性の証明に用いられています．一方，Kunen [2] でも少しだけ触れられているように，強制法は無矛盾性証明だけでなく，ZFC **の定理を証明する手法**としても用いることが出来ます．本稿では，この側面の用いられ方の一つである Boole **値解析**の手法を採り上げます．これは強制法の同値な定式化である Boole **値モデル**の手法を使って，初等解析の結果を測度論や関数解析の定理に読み替える（！）という物で，例えば「確率変数」が「あるモデルの中の実数」と一対一に対応したりします．Boole 値モデルを定式化した一人である Scott らが初期から提案していたものですが，今回は Takeuti [3] の説明に基づきます．

1 定理証明技法としての強制法

集合論において，**強制法**はモデルを構成する主要な手法の一つだが，専ら無矛盾性証明のための道具として用いられることが多い．強制法の基礎理論については，以前『Boole 値モデルと強制法』という記事 [1] で紹介したが，今回は**定理証明技法としての強制法**について採り上げる．そのため，詳細には立ち入らないが，まずはウォームアップと題して違う手法を採り上げて，それを通して強制法の基本的な事項を採り上げていきたい．

1.1 ウォームアップ：絶対性と強制法のあわせ技による定理の証明

本題の Boole 値解析の話に入る前に，Kunen [2] に載っている強制法による定理証明の方法を見てみよう．

Def. 1. (1) 順序集合 $(T, <)$ が**木**であるとは任意の $x \in T$ に対して $\downarrow x := \{\, y \in T \mid y < x \,\}$ が $<$ に関し整列集合となること．

(2) $\mathrm{rank}_T(x) := \mathrm{otp}(\downarrow x)$, $T_\alpha := \{\, x \in X \mid \mathrm{rank}_T(x) = \alpha \,\}$, $\mathrm{height}(T) := \sup_{x \in X}(\mathrm{rank}_T(x) + 1)$.

(3) 木 $(T, <)$ が Suslin $\overset{\text{def}}{\iff}$ T は高さ ω_1 の木で，$|T_\alpha| \leq \aleph_0$ かつ T は順序型 ω_1 の鎖を持たない．

(4) Suslin 木 T が well-pruned $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $x \in T$ と $\alpha < \omega_1$ に対し，$T_\alpha \cap {\uparrow x} \neq \emptyset$.

定理 1. T が Suslin 木の時，狭義単調写像 $\varphi : T \to \mathbb{R}$ は存在しない．

この定理に使うのは次の補題だ：

補題 1. 実数の長さ ω_1 の狭義増大列は存在しない．

Proof. $\langle x_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ が実数の狭義増大列だとする．このとき，$\mathbb{R}$ における $\mathbb{Q}$ の稠密性から，各 $\alpha < \omega_1$ に対し $x_\alpha < r_\alpha < x_{\alpha+1}$ となるような $\langle r_\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ が取れる．すると，取り方からこの r_α たちは互いに相異なるが，これは $\mathbb{Q} = \aleph_0$ に矛盾． □

えっ，そもそも「順序型 ω_1 の鎖を持たない」が Suslin 木の定義に入ってるのに，どう使うの？ と思うかもしれない．実は，V における Suslin 木 T に対して，より大きな宇宙 $V[G]$ で T が Suslin 木でなくなるような宇宙がある．

Fact 1. 任意の Suslin 木 T に対し，その部分木 T^* で well-pruned なものが取れる．

これを別として，

Proof. そのような $\varphi \in V$ が取れたと仮定し矛盾を導く（**背理法**）．G を $(T, >)$-生成フィルターとする．T の各レベルが高々可算であることから，T は強制法として c.c.c. を持ち，特に V と $V[G]$ で ω_1 の値は変わらないことに注意する．特に，T は $V[G]$ でも ω_1-木である．

いま，T が well-pruned である事から，各 $\alpha < \omega_1$ に対し T_α は稠密である．すると，$G \cap T_\alpha \neq \emptyset$ かつ G が上に閉（つまり T の順序についていえば下に閉）であることから，G は T を通る道であり，T が $V[G]$ でも ω_1-木であることから $\mathrm{otp}(G) = \omega_1$ である．狭義単調性は推移的モデルの間で絶対的で，特に φ は $V[G]$ でも狭義単調写像であることに気を付ければ，φ “ $G \subseteq \mathbb{R}$ は実数の順序型 ω_1 の真の増大列である．これは補題 1 に反する． □

参考文献

[1] Hiromi Ishii, Boole 値モデルと強制法, 2016, URL: `https://konn-san.com/math/boolean-valued-model-and-forcing.html`.

[2] Kenneth Kunen, Set theory, **34**, Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[3] Gaisi Takeuti, Two applications of logic to mathematics, ed. by Mathematical Society of Japan, Originally published by Iwanami Shoten and Princeton University Press in 1978, 2012, URL: `http://mathsoc.jp/publication/PublMSJ/PDF/Vol13.pdf`.