On Projective Baire Property[1]

石井大海

筑波大学数理物質科学研究科
数学専攻博士後期課程一年
専門：公理的集合論

Sunday 23rd October, 2016
数学基礎論若手の会 2016 @清里高原

[1] This slide is available on `http://bit.ly/ishii-ymfg16`

Table Of Contents

実数の集合論

- Cantor による集合論の創始：Fourier 級数展開の一意性と不連続点の個数の関係の分析

実数の集合論

- ⋆ Cantor による集合論の創始：Fourier 級数展開の一意性と不連続点の個数の関係の分析
- 実数の集合の解析学的・位相的性質の探求は，集合論発展の動機の大きな一つであった.

実数の集合論

- ⋆ Cantor による集合論の創始：Fourier 級数展開の一意性と不連続点の個数の関係の分析
- 実数の集合の解析学的・位相的性質の探求は，集合論発展の動機の大きな一つであった．
  - ⋯ こうした問題意識を中心的に扱う集合論の分野を記述集合論という．

実数の集合論

- ⋆ Cantor による集合論の創始：Fourier 級数展開の一意性と不連続点の個数の関係の分析
- 実数の集合の解析学的・位相的性質の探求は，集合論発展の動機の大きな一つであった.
  - ⋯ こうした問題意識を中心的に扱う集合論の分野を記述集合論という.
- Lebesgue 可測性と Baire の性質は，共に記述集合論における古典的な実数の集合の性質

Borel 集合

以下の議論で中心的な役割を果す Borel 集合を復習しておく.

Definition 1

$\mathscr{B}$ を実数の開集合を全て含み，可算和と補集合について閉じている最小の $\mathbb{R}$ の部分集合族とし，各 $B \in \mathscr{B}$ を Borel 集合と呼ぶ.
Borel 集合の全体は，以下のように帰納的に記述出来る：

$$\mathbf{\Sigma}^0_1 := (\text{開集合全体}), \quad \mathbf{\Pi}^0_1 := (\text{閉集合全体}) = \neg\,\mathbf{\Sigma}^0_1$$

$$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha := \left\{ \bigcup_{n<\omega} B_n \;\middle|\; \{ B_n \}_{n<\omega} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta \right\}$$

$$\mathbf{\Pi}^0_\alpha := \neg\,\mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \quad \mathbf{\Delta}^0_\alpha := \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha$$

$$\rightsquigarrow \mathscr{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Delta}^0_\alpha.$$

Lebesgue 可測性

先程の各 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Delta}^0_\alpha$ が有限和について閉じている事に注意すれば，Borel 集合 $B \in \mathscr{B}$ の Lebesgue 測度 $\mu(B)$ は，開集合の測度さえ定まれば，後は先程の $\mathscr{B}$ の階層に沿った帰納法で定義出来る：

$$\mu\left(\bigcup_{n<\omega} B_n\right) := \sup_{n<\omega} \mu\left(\bigcup_{k<n} B_k\right).$$

一般の $A \subseteq \mathbb{R}$ の Lebesgue 外測度 μ^* は以下で定義される：

$$\mu^*(A) := \inf\{\, \mu(B) \mid A \subseteq B \in \mathscr{B} \,\}.$$

この時，$\mathcal{N} := \{\, A \subseteq \mathbb{R} \mid \mu^*(A) = 0 \,\}$ を零集合イデアルと言う．

Definition 2 (Lebesgue 可測性)

$A \subseteq \mathbb{R}$ が Lebesgue 可測 $\overset{\text{def}}{\iff} \exists B \in \mathscr{B}\, [A \mathbin{\triangle} B \in \mathcal{N}]$

Baire の性質と痩せ集合

今回の主題である Baire の性質は位相的性質である：

Definition 3

- $D \subseteq \mathbb{R}$ が（位相的に）稠密 $\overset{\text{def}}{\iff}$ D は任意の開集合と交わる.
- $F \subseteq \mathbb{R}$ が閉疎集合 $\overset{\text{def}}{\iff}$ F は稠密開集合の補集合.
- $M \subseteq \mathbb{R}$ が痩せ集合（又は第二類集合）$\overset{\text{def}}{\iff}$ M は可算個の閉疎集合の和.
  痩せ集合の全体を $\mathcal{M}$ と書き，痩せ集合イデアルと呼ぶ.
- $A \subset \mathbb{R}$ が Baire の性質を持つ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists U \in \mathbf{\Sigma}^0_1\,[U \mathbin{\triangle} B \in \mathcal{M}]$.

Remark 1

任意の Borel 集合は Baire の性質を持つ．したがって次が成立：

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ が Baire の性質を持つ} \iff \exists B \in \mathscr{B}\,[A \mathbin{\triangle} B \in \mathcal{M}]$$

Baire の性質と Lebesgue 可測性，σ-イデアル

Baire の性質と Lebesgue 可測性は，どちらも「Borel 集合との差が小さい」という形で書ける：

$$\exists B \in \mathscr{B}\ [A \triangle B \in \mathcal{I}] \qquad (\mathcal{I} = \mathcal{M} \text{ or } \mathcal{N})$$

上のような A を $\mathcal{I}$-強正則と呼ぶことにしよう．
実際，零集合イデアルも痩せ集合イデアルも良く似た性質を持つ：

Definition 4

$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が集合 X 上の σ-イデアル $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $X \notin \mathcal{I}$ であり，$\mathcal{I}$ は部分集合と可算和集合について閉じている：

$$A \subseteq B \in \mathcal{I} \implies A \in \mathcal{I}, \qquad \{A_n\}_{n<\omega} \subseteq \mathcal{I} \implies \bigcup_{n<\omega} A_n \in \mathcal{I}.$$

Fact 5

$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ は $\mathbb{R}$ 上の σ-イデアル．

イデアルに付随する概念

Definition 6

以下，$\mathcal{I}$ を集合 $\mathbb{R}$ 上の σ-イデアルとする．

- $\mathbb{P}_{\mathcal{I}} := \{ X \in \mathscr{B} \mid X \notin \mathcal{I} \}$ の元を $\mathcal{I}$-正 (Borel) 集合と呼ぶ．$\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ 上には $A \leq_{\mathcal{I}} B \overset{\text{def}}{\iff} A \setminus B \in \mathcal{I}$ により自然に擬順序が入る．
- $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ が反鎖 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{A}$ は $(\mathbb{P}_{\mathcal{I}}, \leq_{\mathcal{I}})$ の反鎖．即ち，
$$\forall A, B \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}} \, [A \neq B \implies A \cap B \in \mathcal{I}].$$
- $\mathcal{I}$ が κ-飽和 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ が κ-鎖条件を満たす．即ち，$\mathcal{I}$-正 Borel 集合からなる反鎖の濃度は κ 未満．

Fact 7

Lebesgue 零イデアル $\mathcal{N}$ および痩せ集合イデアル $\mathcal{M}$ は共に ω_1-飽和である．

測度と範疇の類似：Fubini の定理

「測度零」は直積とある意味で可換である：

Fact 8 (Fubini の定理)

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ に対し，次は同値：

- A は零集合．
- A の切片は殆んど至る所零集合．即ち：

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid A^x := \{ y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A \} \notin \mathcal{N} \} \in \mathcal{N}.$$

実は，痩せ集合についても同様の事が成立する：

Fact 9 (Fubini の定理；範疇版)

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ に対し，次は同値：

- A は痩せ集合．
- A の切片は殆んど至る所痩せ集合．

0-1 則など他の類似性については Oxtoby [5] 参照．

劇的な違い：無矛盾性の強さ I

- ことほどさように測度と範疇の性質は似ている．

$\rightsquigarrow$ ところが「どれだけ複雑な集合が強正則になるか」を考えてみると，両者の間に大きな開きがでてくる！

Definition 10

$\varphi(x, y)$ と実数 $z \in \mathbb{R}$ により $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x, z) \}$ のように書ける集合を射影集合と呼ぶ．射影集合の全体は，定義論理式 φ の複雑さによって以下のように階層がわかれる：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & \mathbf{\Sigma}^1_1 \arrow[dr, phantom, "\subsetneq" sloped] & & \mathbf{\Sigma}^1_2 \arrow[dr, phantom, "\subsetneq" sloped] & & \mathbf{\Sigma}^1_3 \arrow[dr, phantom, "\cdots" sloped] & \\
\mathbf{\Delta}^1_1 \arrow[ur, phantom, "\subsetneq" sloped] \arrow[dr, phantom, "\subsetneq" sloped] & & \mathbf{\Delta}^1_2 \arrow[ur, phantom, "\subsetneq" sloped] \arrow[dr, phantom, "\subsetneq" sloped] & & \mathbf{\Delta}^1_3 \arrow[ur, phantom, "\subsetneq" sloped] \arrow[dr, phantom, "\subsetneq" sloped] & & \\
 & \mathbf{\Pi}^1_1 \arrow[ur, phantom, "\subsetneq" sloped] & & \mathbf{\Pi}^1_2 \arrow[ur, phantom, "\subsetneq" sloped] & & \mathbf{\Pi}^1_3 \arrow[ur, phantom, "\cdots" sloped] &
\end{tikzcd}
$$

劇的な違い：無矛盾性の強さ II

まず Solovay は「射影集合が強正則」の無矛盾性の上界を与えた：

Theorem 11 (Solovay 1970 [7])

到達不能基数の存在が無矛盾なら，「任意の射影集合が *Lebesgue* 可測で *Baire* の性質を持つ」も無矛盾.

それから 14 年後，Shelah は射影可測性には到達不能基数が必須だが，Baire 性については落とせることを明らかにした：

劇的な違い：無矛盾性の強さ III

Theorem 12 (Shelah 1984 [6])

1. 任意の $\mathbf{\Sigma}^1_3$-集合が *Lebesgue* 可測なら，V の ω_1 が任意の $z \in \mathbb{R}$ について $L[z]$ で到達不能基数となる．特に，射影 *Lebesgue* 可測性と到達不能基数の存在は無矛盾性等価．
2. 「任意の射影集合が *Baire* の性質を持つ」の無矛盾性に到達不能基数は要らない．

- 本講演では特に (2)「ZFC に対する射影 Baire 性の相対無矛盾性証明」について採り上げる．
  - 可測性に関する結果は，去年の講演 [8] を参照．
- この解決のために Shelah が用いたのが強均質強制法，強制概念の融合そして sweet forcing．

Table Of Contents

Table Of Contents

Shelah の証明のキーポイントとなる定理は次：

Theorem 13 (見る人が見ると Solovay [6] に見える物の一般化)

$\mathbb{B}$：強均質完備 *Boole* 代数，$G : (V, \mathbb{B})$-生成的，$\mathcal{I} \in V[G]$ が絶対的な論理式で定義された適正イデアルとする．
$V[G] \models \mathbb{P}_{\mathcal{I}} \restriction M : V\text{-c.c.c.}$ を満たし，更に以下が成立するとする：

$$\begin{aligned} &\forall \mathbb{B}_0 \lessdot \mathbb{B} : \text{可算完備生成} \\ &\qquad V[G] \models \mathbb{R} \setminus \mathrm{Gen}_{\mathcal{I}}(V[G \cap \mathbb{B}_0]) \in \mathfrak{N}_{\mathcal{I}}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

この時，V にパラメータを持つ論理式 $\varphi(a, b)$ に対し，

$$V[G] \models \forall x_0 \in \mathbb{R}, \{ x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x, x_0) \} : \mathcal{I}\text{-正則}.$$

- Shelah [6] 等で用いられている定理を，Khomskii [4] の導入した一般の正則性概念の文脈で一般化すると得られる．
- Solovay の定理：$\mathbb{B} = \mathrm{Col}(\omega, < \kappa), \mathcal{I} = \mathcal{M}, \mathcal{N}$（$\kappa$：到達不能）．

Shelah の証明のキーポイントとなる定理は次：

Theorem 13 (見る人が見ると Solovay [6] に見える物の一般化)

$\mathbb{B}$：強均質完備 *Boole* 代数，G：$(V, \mathbb{B})$-生成的，$\mathcal{I} \in V[G]$ が絶対的な論理式で定義された適正イデアルとする．
$V[G] \models \mathbb{P}_{\mathcal{I}} \restriction M$: V-c.c.c. を満たし，更に以下が成立するとする：

$$\begin{aligned} &\forall \mathbb{B}_0 \lessdot \mathbb{B} : \text{可算完備生成} \\ &\qquad V[G] \models \mathbb{R} \setminus \mathrm{Gen}_{\mathcal{I}}(V[G \cap \mathbb{B}_0]) \in \mathfrak{N}_{\mathcal{I}}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

この時，V にパラメータを持つ論理式 $\varphi(a, b)$ に対し，

$$V[G] \models \forall x_0 \in \mathbb{R}, \{\, x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x, x_0) \,\} : \mathcal{I}\text{-正則}.$$

- Shelah [6] 等で用いられている定理を，Khomskii [4] の導入した一般の正則性概念の文脈で一般化すると得られる．
- Solovay の定理：$\mathbb{B} = \mathrm{Col}(\omega, < \kappa), \mathcal{I} = \mathcal{M}, \mathcal{N}$（$\kappa$：到達不能）．

完備 Boole 代数

以下の議論で用いる完備 Boole 代数の理論を軽くまずみておく.

Definition 14

- $(\mathbb{B}, 0, 1, \leq, +, \cdot)$ が Boole 代数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(\mathbb{B}, \leq)$ は 0, 1 を最小・最大値とする半順序で, $a + b$ と $a \cdot b$ は $a, b \in \mathbb{B}$ の上限・下限.
- $(\mathbb{B}, \sum, \prod)$ が κ-完備 Boole 代数（略：κ-cBa）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{B}$ は Boole 代数で, 濃度 κ 未満の $A \subseteq \mathbb{B}$ に対して $\sum A$ および $\prod A$ はそれぞれ A の上限・下限. $|\mathbb{B}|^+$-完備の時完備という.
- $\mathbb{B}$ が κ-c.c. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{B}$ の反鎖の濃度は κ 未満.

Fact 15

- A が $\mathbb{B}$ の極大反鎖 $\Longleftrightarrow$ A は反鎖で $\sum A = 1$
- κ-完備 $\mathbb{B}$ が κ-c.c. を持つなら, $\mathbb{B}$ は完備.

完備 Boole 代数と強制法

実は，強制法の理論は完備 Boole 代数の場合を考えれば十分！

約束

cBa $\mathbb{B}$ による強制法とは，$\mathbb{B} \setminus \{0\}$ による強制法の事とする．

Fact 16 (擬順序の完備化)

$\mathbb{P}$ を擬順序，$\mathbb{B}$ を *cBa*，G を B-生成フィルターとする．

1. $\mathbb{P}$ の完備化と呼ばれる完備 *Boole* 代数 $\mathbb{B}(\mathbb{P})$ が同型を除いて存在し，両者は強制法に関して「同値」．つまり，$\mathbb{B}(\mathbb{P})$-名称と $\mathbb{P}$-名称は互いに翻訳出来，その翻訳で真偽は不変．
2. φ を $\mathcal{FL}_{\mathbb{B}}$-論理式とする時，次の $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}}$ を φ の真偽値と呼ぶ．
$$[\![\varphi]\!] := \sum \{ b \in \mathbb{B} \mid b \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi \}$$
この時 $V[G] \models \varphi \iff [\![\varphi]\!] \in G,\ p \Vdash \varphi \iff p \leq [\![\varphi]\!]$.

完備〔埋め込み／生成〕と生成集合

Definition 17

- $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ が完備埋め込み $\overset{\text{def}}{\iff} a \le b \implies e(a) \le e(b)$, $a \parallel b \iff e(a) \parallel e(b)$, で極大反鎖を極大反鎖に移す.
- $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ が $\mathbb{Q}$ の完備部分代数（$\mathbb{P} \lessdot \mathbb{Q}$）$\overset{\text{def}}{\iff}$ 包含写像 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{P}$ が完備埋め込み.
- $\mathbb{B}_0$ が $\mathbb{B}$ の可算完備生成部分代数（記号：$\mathbb{B}_0 \lessdot_\omega \mathbb{B}$）$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathbb{B}_0$ はある可算集合 $A \subseteq \mathbb{B}_0$ を含む $\mathbb{B}$ の最小の完備部分代数.

Remark 2

完備 Boole 代数 $\mathbb{B}$ と擬順序 $\mathbb{P}$ について次は同値：

- 完備埋め込み $e : \mathbb{P} \to \mathbb{B}$ が存在する,
- $\mathbb{B}$ による強制拡大は $\mathbb{P}$-生成フィルターを付加する.

$\mathbb{P}$ が完備 Boole 代数なら，$\forall A \subseteq \mathbb{P}\ e\left(\sum^{\mathbb{P}} A\right) = \sum^{\mathbb{B}} e[A]$ も同値.

強均質

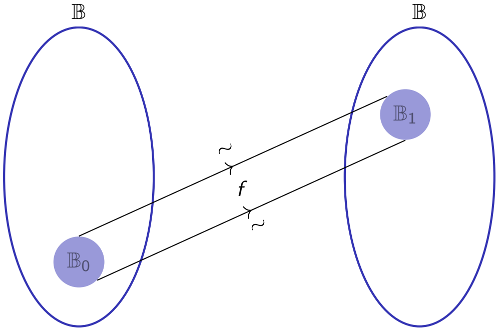
Definition 18

完備 Boole 代数 $\mathbb{B}$ が強均質 (strongly homogeneous)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1 \lessdot_\omega \mathbb{B}\ \forall f : \mathbb{B}_0 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{B}_1\ \exists \bar{f} : \mathbb{B} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{B}\ f \subseteq \bar{f}$.

強均質

Definition 18

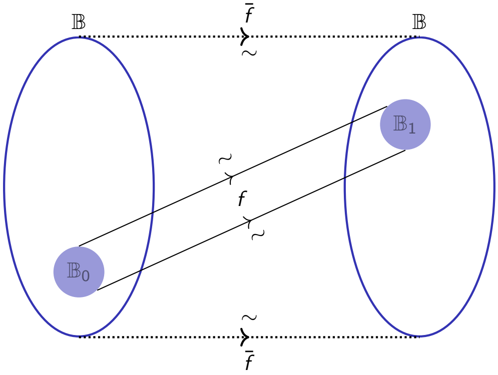
完備 Boole 代数 $\mathbb{B}$ が強均質 (strongly homogeneous)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1 \lessdot_\omega \mathbb{B}\ \forall f : \mathbb{B}_0 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{B}_1\ \exists \bar{f} : \mathbb{B} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{B}\ f \subseteq \bar{f}$.



強均質

Definition 18

完備 Boole 代数 $\mathbb{B}$ が強均質 (strongly homogeneous)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1 \lessdot_\omega \mathbb{B}\ \forall f : \mathbb{B}_0 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{B}_1\ \exists \bar{f} : \mathbb{B} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{B}\ f \subseteq \bar{f}$.



反復強制法と完備埋め込みの商

- 完備部分代数 $\mathbb{B}_0 \lessdot \mathbb{B}$ の生成フィルター G_0 は，強制法 $\mathbb{B}$ の生成フィルター G の「部分近似」と思える．

$\rightsquigarrow$ 「残り部分」の近似を $V[G_0]$ で集めてきたものが強制法の商．

Fact 19

$\mathbb{B}_0 \lessdot \mathbb{B}$: cBa,　G_0 : V 上 $\mathbb{B}_0$-生成的とする．H を $V[G_0]$ 上の $\mathbb{B}/\langle G_0 \rangle$-生成フィルターとすると，$V[G_0][H]$ は V の $\mathbb{B}$-強制拡大となっている．

$\star$ こうした強制法の繰り返しを定式化したのが反復強制法．

- 強制概念 $\mathbb{P}$ と強制概念の $\mathbb{P}$-名称 $\dot{\mathbb{Q}}$ に対し，$\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ が「$\mathbb{P}$ のあとに $\dot{\mathbb{Q}}$ で強制する反復強制法」
- $V[G_0]$ における $\mathbb{B}/\langle G \rangle$ の $\mathbb{B}_0$-名称を $(\mathbb{B} : \mathbb{B}_0)$ で表す．

$$\mathbb{B}_0 \lessdot \mathbb{B} \implies \mathbb{B} \approxeq \mathbb{B}_0 * (\mathbb{B} : \mathbb{B}_0).$$

イデアルの組合せ論的性質と付随する定義

Definition 20

- $\mathcal{I}$ が適正イデアル $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ σ-イデアルであり，$\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ が適正 (proper) という「c.c.c. を一般化した良い性質」を満たす．
  - 今回は $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ が c.c.c. の場合しか考えないので，立ち入らない．
  - $\mathcal{I}$ が適正の場合も，ちょっと定義を弄れば可測性や Baire 性を一般化した実数の集合の性質として $\mathcal{I}$-正則性が定義出来る．
- $V \subseteq M$ を ZFC のモデルとする．M で擬順序集合 $\mathbb{P} \in V$ が V-c.c.c. を持つ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \mathcal{A} \in V : \mathbb{P}$ の反鎖 $M \models |\mathcal{A}| \leq \aleph_0$.
- $\mathfrak{N}_{\mathcal{I}} := \{\, A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall B \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}\, \exists C \leq_I B\ C \cap A = \emptyset \,\}$ は $\mathcal{I}$ と Borel 集合上で一致し，$\mathcal{I}$ が適正なら $\mathcal{I}$ を含む σ-イデアルとなる．
  - c.c.c. の場合 $\mathfrak{N}_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$ となるので先の定理は，今回の場合単に $\mathfrak{N}_{\mathcal{I}}$ を $\mathcal{I}$ で読み替えればよい．

生成実数

Definition 21

- $B \in \mathscr{B}^V$, $V \subseteq W$ とする. B は M で Borel になるとは限らないが, 全ての Borel 集合は「可算和を取る」「補集合を取る」という操作を可算回繰り返して得られるので, 対角化すれば Borel 集合はなんらかの実数でコード出来る.

$$B_{0^\frown c} = \bigcup_{n<\omega} U_{c(n)}, \quad B_{1^\frown c} = \mathbb{R} \setminus B_c, \quad B_{2^\frown c} = \bigcup_{n<\omega} B_{c(\langle n,-\rangle)}$$

  $B \in \mathscr{B}^V$ をコードする実数 c を使って B_c^W と表される集合は W でも Borel 集合であり, c の選び方に依ら寄らない.
  $\rightsquigarrow$ $B^W := B_c^W$ と書く. 紛れる恐れがなければ B^* と書く.
- $x \in \mathbb{R}$ に対し, $G_x := \{ B \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}} \restriction M \mid x \in B^* \}$ と定める. G_x が M 上 $(\mathbb{P}_{\mathcal{I}} \restriction M)$-生成フィルターになる時, x を $\mathcal{I}$-生成実数と呼び, その全体を $\mathrm{Gen}_{\mathcal{I}}(M)$ で表す.

条件 $(*)$ について

- 定理の前提 $(*)$:
  $\forall \mathbb{B}_0 \lessdot \mathbb{B}$: 可算完備生成 $V[G] \models \mathbb{R} \setminus \mathrm{Gen}_{\mathcal{I}}(V[G \cap \mathbb{B}_0]) \in \mathfrak{N}_{\mathcal{I}}$
  は，$\mathcal{I}$ が適正な場合は「最終的には $V[G]$ における全ての $\mathcal{I}$-正集合は，十分小さな途中の拡大 $V[G \cap \mathbb{B}_0]$ 上の生成実数からなる正集合を含む」ということ．

条件 $(*)$ について

- 定理の前提 $(*)$:
  $\forall \mathbb{B}_0 \lessdot \mathbb{B}$: 可算完備生成 $V[G] \models \mathbb{R} \setminus \mathrm{Gen}_{\mathcal{I}}(V[G \cap \mathbb{B}_0]) \in \mathfrak{N}_{\mathcal{I}}$
  は，$\mathcal{I}$ が適正な場合は「最終的には $V[G]$ における全ての $\mathcal{I}$-正集合は，十分小さな途中の拡大 $V[G \cap \mathbb{B}_0]$ 上の生成実数からなる正集合を含む」ということ．
- 特に，我々は今 ω_1-飽和の場合だけ考えているので，$\mathfrak{N}_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$ となるから，「$V[G]$ では殆んど至る所の実数が生成的」という条件に外ならない！

条件 $(*)$ について

- 定理の前提 $(*)$:
  $\forall \mathbb{B}_0 \lessdot \mathbb{B}$: 可算完備生成 $V[G] \models \mathbb{R} \setminus \mathrm{Gen}_{\mathcal{I}}(V[G \cap \mathbb{B}_0]) \in \mathfrak{N}_{\mathcal{I}}$
  は，$\mathcal{I}$ が適正な場合は「最終的には $V[G]$ における全ての $\mathcal{I}$-正集合は，十分小さな途中の拡大 $V[G \cap \mathbb{B}_0]$ 上の生成実数からなる正集合を含む」ということ．
- 特に，我々は今 ω_1-飽和の場合だけ考えているので，$\mathfrak{N}_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$ となるから，「$V[G]$ では殆んど至る所の実数が生成的」という条件に外ならない！
- 実は，基礎モデル V のパラメータを使って定義可能な集合は，$\mathcal{I}$-生成実数上で一致するような Borel 集合が取れる！

More on Generic Reals I

Definition 22

$A \subseteq \mathbb{R}$ が M 上 $\mathcal{I}$-Solovay $\overset{\text{def}}{\iff}$ なんらかの論理式 $\varphi(x, y)$ と $a \in M$ があって，任意の M 上の $\mathcal{I}$-生成実数 z に対し $z \in A \iff M[z] \models \varphi(x, z)$.

- ⋆ $\mathcal{I}$-Solovay 集合とは，$\mathcal{I}$-生成実数 z の所属判定が $M[z]$ だけみれば一様に判定出来るような集合.

Theorem 23

$M \subseteq V$ を推移的モデルとし，$\mathbb{P}_{\mathcal{I}} \restriction M$ が M-c.c.c. を満たすとする. この時，A が M 上 $\mathcal{I}$-Solovay なら $A \cap \mathrm{Gen}_{\mathcal{I}}(M) = B \cap \mathrm{Gen}_{\mathcal{I}}(M)$ を満たす Borel 集合 B が取れる.

More on Generic Reals II

Proof.

$\varphi(x)$ が A の Solovay 性の証拠として，$\mathcal{I}$-生成実数の標準的な名前を $\dot{x}_G$ と書く． この時， M の中で $\{\, p \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}} \restriction M \mid p \Vdash \varphi(\dot{x}_G) \,\}$ に含まれる中で極大な反鎖 $\mathcal{A}$ を取る．
この時， $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ は M-c.c.c. を満たすので， V から見れば $B := \bigcup \{\, B^* \mid B \in \mathcal{A} \,\}$ は可算和であり $B \in \mathscr{B}^V$．そこで $x \in \mathbb{R}^V$ を M 上の $\mathcal{I}$-ジェネリック実数とすれば，$\mathcal{A}$ の極大性と G_x の生成性から，

$$\begin{aligned} x \in A &\iff M[x] \models \varphi(x) \iff \exists B \in \mathcal{A}\ x \in B^* \\ &\iff x \in \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B^* = B. \end{aligned}$$

□

実数の捕まえ方

- $\mathcal{I}$ が ω_1-飽和であるという設定の下では，殆んど至る所が生成実数だったので，あとは $\{ x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x, x_0) \}$ $(x_0 \in \mathbb{R}^{V[G]})$ の形に書ける集合が何らかの途中の宇宙上で $\mathcal{I}$-Solovay となる事が示せればよい．

$\rightsquigarrow$ ここに強均質性が使われる！

Definition 24

$\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数，$\dot{x}$ を実数の $\mathbb{B}$-名称（i.e. $\mathbb{B} \Vdash \dot{x} \in \mathbb{R}$）とする．この時，次の集合が生成する $\mathbb{B}$ の可算生成完備部分代数を $\dot{x}$ が生成する $\mathbb{B}$ の完備部分代数 $\mathbb{B}_{\dot{x}}$ と呼ぶ：

$$\left\{ [\![\dot{x}(\check{n}) = \check{k}]\!]_{\mathbb{B}} \;\middle|\; n, k < \omega \right\}.$$

適切に同値な名称を選べば，$\dot{x}$ は $\mathbb{B}_{\dot{x}}$-名称と見做せる．

$\star$ $\mathbb{B}_{\dot{x}}$ は $\dot{x}$ に関する命題を完全に計算し尽す！

$\mathbb{B}_{\dot{x}}$ は $\dot{x}$ の情報を全て持っている

Lemma 25

$\varphi(x)$ をパラメータを V に持つ ZF の論理式，$\dot{x}$ を実数の $\mathbb{B}$-名称とする時，$[\![\varphi(\dot{x})]\!]_{\mathbb{B}} \in \mathbb{B}_{\dot{x}}$.

証明の概略.

背理法で示す．$[\![\varphi(\dot{x})]\!] \in \mathbb{B}_{\dot{x}}$ であったとする．この時，$\mathbb{B}_{\dot{x}}$ と $[\![\varphi(\dot{x})]\!]$ が可算完備生成する部分代数を $\mathbb{B}_{\dot{x}}(\varphi)$ とおけば，Boole 代数の一般論から非自明な自己同型 $h : \mathbb{B}_{\dot{x}}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}_{\dot{x}}(\varphi)$ であって $h \restriction \mathbb{B}_{\dot{x}} = \mathrm{id}$ かつ $h([\![\varphi(\dot{x})]\!]) \neq [\![\varphi(\dot{x})]\!]$ となるものが取れる．
すると $\mathbb{B}$ の強均質性より h は自己同型 $\bar{h} : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$ へと延長出来る．
$\bar{h}$ は $\mathbb{B}_{\dot{x}}$ 上恒等写像なので $\bar{h}^*(\dot{x}) = \dot{x}$．すると
$\bar{h}([\![\varphi(\dot{x})]\!]) = [\![\varphi(h^*(\dot{x}))]\!] = [\![\varphi(\dot{x})]\!]$ となるが，これは h の取り方に反する． $\square$

定理 13の証明 I

- 仮定から $V[G]$ の実数は殆んど至る所 $\mathcal{I}$-生成的で
- $\mathbb{B}_0 \lessdot_\omega \mathbb{B}$ なら $V[G \cap \mathbb{B}_0]$ 上の $\mathcal{I}$-Solovay 集合は生成実数上 Borel 集合で近似できる.

⋆ 以上を踏まえれば次の補題を示せば終わり.

Lemma 26

$\varphi(a, b)$ を V にパラメータを持つ論理式で，$x_0 \in \mathbb{R} \cap V[G]$ とする．$A := \{ x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x, x_0) \}$ は V 上 $\mathcal{I}$-*Solovay.*

定理 13の証明 II

Proof.

まず最初に，x_0 に当たる $\mathbb{B}$-名称 $\dot{x}_0$ を取れば，V の代わりに $V[G \cap \mathbb{B}_{\dot{x}_0}]$ を考えることで同じ議論が展開出来るので，以下 $x_0 \in V$ であるとしてよい．
そこで，$x \in \mathrm{Gen}_{\mathcal{I}}(V)$ を取る．この時，$x = \dot{x}^G$ を満たす $\mathbb{B}$-名称 $\dot{x}$ が取れ，補題 25より $[\![\varphi(\dot{x})]\!]_{\mathbb{B}} \in \mathbb{B}_{\dot{x}}$ となる．$[\![\ ]\!]_{\dot{x}\restriction \mathrm{lh}(\check{s})=\check{s}}$ $(s \in {}^{<\omega}\omega)$ は $\mathbb{B}_{\dot{x}}$ で稠密で，これが非零なら $[s] \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ となることから $\mathbb{B}_{\dot{x}}$ と $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ は強制法同値なので，$V[x] = V[\mathbb{B}_{\dot{x}} \cap G]$ となる事に気を付ければ，

$$\begin{aligned} x \in A &\iff V[G] \models \varphi(x) && \text{(by definition)} \\ &\iff [\![\varphi(\dot{x})]\!] \in \mathbb{B}_{\dot{x}} \cap G && \text{(強制定理)} \\ &\iff V[x] = V[\mathbb{B}_{\dot{x}} \cap G] \models \varphi(x). \end{aligned}$$

$\square$

Table Of Contents

強均質代数の構成と強制法の融合

よって，射影 Baire 性の ZFC に対する無矛盾性を証明するには，次の性質を満たす cBa $\mathbb{B}$ が取れればよい：

欲しいもの

$\mathbb{B}$ は強均質で，任意の $\mathbb{B}$-生成集合 G と $\mathbb{B}_0 \lessdot_\omega \mathbb{B}$ に対し

$$V[G] \models \text{“}\mathbb{R} \setminus \mathrm{Gen}_{\mathcal{M}}(V[G \cap \mathbb{B}_0]) \in \mathcal{M}\text{”}.$$

Remark 3

⋆ 面倒臭いので，以下 $\mathcal{M}$-生成実数の事を Cohen 実数と呼ぶ.

殆んど至る所 Cohen 実数

⋆ 「殆んど至る所 Cohen 実数」にする方法には二通りある：

Fact 27

$\mathbf{D}$ を *Hechler* 強制法，$\mathbf{UM}$ を *Cohen* アメーバ強制法とする．この時，$\mathbf{D} * \dot{\mathbf{D}}$ および $\mathbf{UM}$ は「実数は殆んど至る所 V 上 *Cohen*」を強制する．

強制法の融合

任意の部分同型を拡張する前に，まず「一つの部分同型」を拡張する方法を考えてみよう．その道具が強制法の融合！

Definition 28

$\mathbb{P}$ を強制概念，$\dot{\mathbb{Q}}_0, \dot{\mathbb{Q}}_1$ を強制概念の $\mathbb{P}$-名称とする．この時，$\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}_0$ と $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}_1$ の $\mathbb{P}$ 上の融合 (amalgamation) を次で定める：

$$(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}_0) \otimes_{\mathbb{P}} (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}_1) := \mathbb{P} * (\dot{\mathbb{Q}}_0 \dot{\times} \dot{\mathbb{Q}}_1).$$

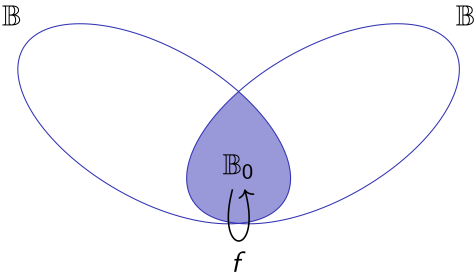
特に，$f_i : \mathbb{B} \to \mathbb{B}_i$ $(i < 2)$ を完備埋め込みとした時，

$$\mathbb{B}_0 \underset{f_1, f_2}{\otimes} \mathbb{B}_1 := (\mathbb{B} * (\mathbb{B}_0 : f_0[\mathbb{B}])) \otimes_{\mathbb{B}} (\mathbb{B} * (\mathbb{B}_1 : f_1[\mathbb{B}])).$$

更に，$f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ が $\mathbb{B}$ の完備部分代数上の同型の時，$i : \mathbb{B}_1 \hookrightarrow \mathbb{B}$ を包含写像として $\mathbb{B} \otimes_f \mathbb{B} := \mathbb{B} \otimes_{f,i} \mathbb{B}$ と定める．

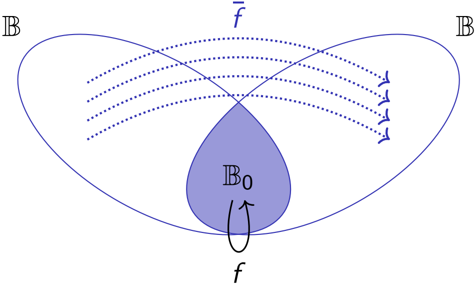
融合による定義域の拡張

- $\mathbb{B} \otimes_f \mathbb{B}$ は $\mathbb{B}_0 \lessdot \mathbb{B}$ を中心にして二つの $\mathbb{B}$ のコピーを貼り合わせたような形をしている.



融合による定義域の拡張

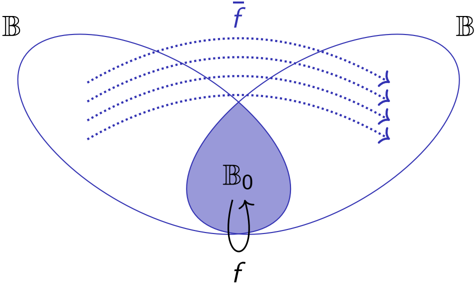
- $\mathbb{B} \otimes_f \mathbb{B}$ は $\mathbb{B}_0 \lessdot \mathbb{B}$ を中心にして二つの $\mathbb{B}$ のコピーを貼り合わせたような形をしている.



- 左側の $\mathbb{B}$ を右側へ「入れ換える」操作を考えると，これは f を $\mathbb{B}$ 上に「拡張した」$\mathbb{B}$ 上の同型になっている.

融合による定義域の拡張

- $\mathbb{B} \otimes_f \mathbb{B}$ は $\mathbb{B}_0 \lessdot \mathbb{B}$ を中心にして二つの $\mathbb{B}$ のコピーを貼り合わせたような形をしている.



- 左側の $\mathbb{B}$ を右側へ「入れ換える」操作を考えると，これは f を $\mathbb{B}$ 上に「拡張した」$\mathbb{B}$ 上の同型になっている.

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{B}$ をより大きな $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ に埋め込むことで，$\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ 上の部分同型として $\mathbb{B}$ 全域に拡張できた.

ω-段階融合

- 与えられた $\mathbb{B}$ 上の部分同型を，より大きな完備 Boole 代数に埋め込むことで拡張出来た.

ω-段階融合

- 与えられた $\mathbb{B}$ 上の部分同型を，より大きな完備 Boole 代数に埋め込むことで拡張出来た.

$\rightsquigarrow$ これを往復論法で ω-回繰り返して極限を取れば，帳尻があって全域に拡張出来る！

ω-段階融合

- 与えられた $\mathbb{B}$ 上の部分同型を，より大きな完備 Boole 代数に埋め込むことで拡張出来た.

$\rightsquigarrow$ これを往復論法で ω-回繰り返して極限を取れば，帳尻があって全域に拡張出来る！

1. まず $\mathbb{B}_0 := \mathbb{B}, f_0 := f$ とする.

ω-段階融合

- 与えられた $\mathbb{B}$ 上の部分同型を，より大きな完備 Boole 代数に埋め込むことで拡張出来た．

$\rightsquigarrow$ これを往復論法で ω-回繰り返して極限を取れば，帳尻があって全域に拡張出来る！

1. まず $\mathbb{B}_0 := \mathbb{B}, f_0 := f$ とする．
2. $\mathbb{B}_{n+1} := \mathbb{B}_n \otimes_{f_n} \mathbb{B}_n$ とおくと，f_n は $\mathbb{B}_{n+1}$ 上の部分同型 $\bar{f}_n : \mathbb{B}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}_n$ へと延長されている．

ω-段階融合

- 与えられた $\mathbb{B}$ 上の部分同型を，より大きな完備 Boole 代数に埋め込むことで拡張出来た．

$\rightsquigarrow$ これを往復論法で ω-回繰り返して極限を取れば，帳尻があって全域に拡張出来る！

1. まず $\mathbb{B}_0 := \mathbb{B}, f_0 := f$ とする．
2. $\mathbb{B}_{n+1} := \mathbb{B}_n \otimes_{f_n} \mathbb{B}_n$ とおくと，f_n は $\mathbb{B}_{n+1}$ 上の部分同型 $\bar{f}_n : \mathbb{B}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}_n$ へと延長されている．
3. 特に $\mathbb{B}_{2n}$ が f_{2n+1} の値域，$\mathbb{B}_{2n+1}$ が定義域に来るように交互に $j : \mathbb{B}_n \hookrightarrow \mathbb{B}_{n+1}$ を決めていけば，f は最終的に $\varinjlim_n B_n$ 上の全単射に延長出来る．これを $\mathbb{B}$ の f による ω-段階融合と呼ぶ．

ω-段階融合

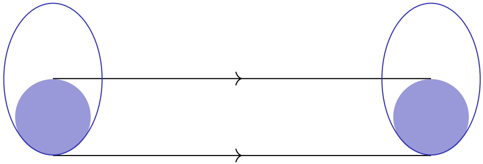
- 与えられた $\mathbb{B}$ 上の部分同型を，より大きな完備 Boole 代数に埋め込むことで拡張出来た．

$\rightsquigarrow$ これを往復論法で ω-回繰り返して極限を取れば，帳尻があって全域に拡張出来る！

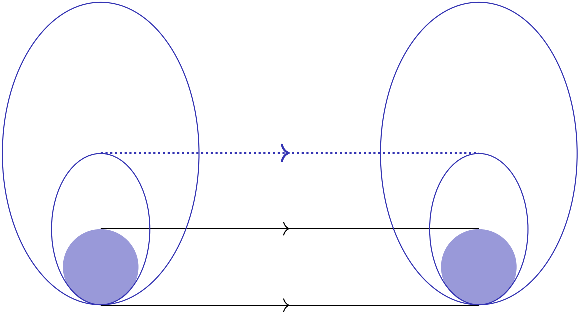
1. まず $\mathbb{B}_0 := \mathbb{B}, f_0 := f$ とする．
2. $\mathbb{B}_{n+1} := \mathbb{B}_n \otimes_{f_n} \mathbb{B}_n$ とおくと，f_n は $\mathbb{B}_{n+1}$ 上の部分同型 $\bar{f}_n : \mathbb{B}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}_n$ へと延長されている．
3. 特に $\mathbb{B}_{2n}$ が f_{2n+1} の値域，$\mathbb{B}_{2n+1}$ が定義域に来るように交互に $j : \mathbb{B}_n \hookrightarrow \mathbb{B}_{n+1}$ を決めていけば，f は最終的に $\varinjlim_n B_n$ 上の全単射に延長出来る．これを $\mathbb{B}$ の f による ω-段階融合と呼ぶ．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{B}_\omega & & \\
\mathbb{B}_0 \arrow[urrr, bend left, "i_0"] \arrow[r, "j_0:=e_\ell", "\sim"'] \arrow[dr, "e_r"', "\sim"] & \mathbb{B}_0 \times \{\mathbb{1}\} \arrow[dr, hook] & \mathbb{B}_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, "j_1:=e_r", "\sim"'] \arrow[dr, "e_\ell"', "\sim"] & \{\mathbb{1}\} \times \mathbb{B}_1 \arrow[d, "e:=f_2", "\wr"'] \arrow[dr, hook] & \mathbb{B}_2 \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[r, "j_2"] & \cdots \arrow[ull, bend right] \\
 & \{\mathbb{1}\} \times \mathbb{B}_0 \arrow[u, "e:=f_1"', "\wr"] \arrow[r, hook] & \mathbb{B}_0 \underset{f_0}{\otimes} \mathbb{B}_0 \arrow[u, two heads] & \{\mathbb{1}\} \times \mathbb{B}_1 \arrow[r, hook] & \mathbb{B}_1 \underset{f_1}{\otimes} \mathbb{B}_1 \arrow[u, two heads] &
\end{tikzcd}
$$

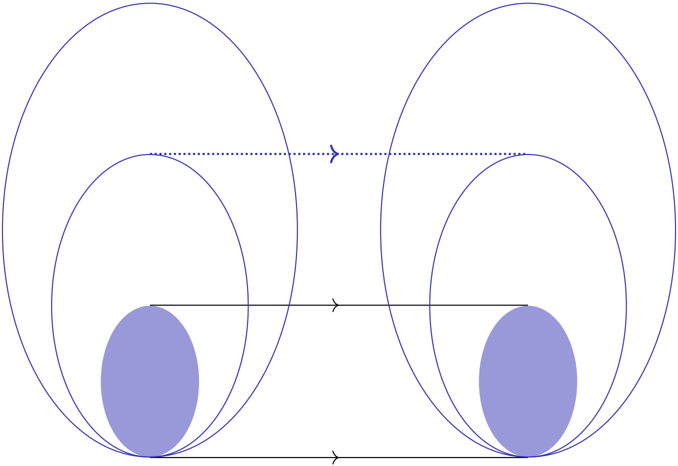
概念図



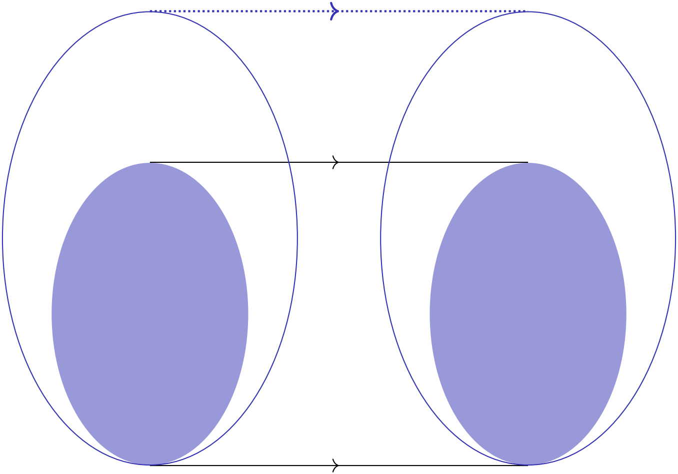
概念図



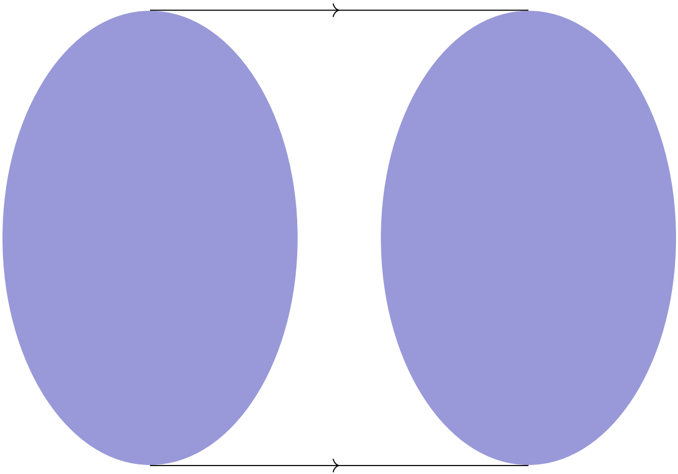
概念図



概念図



概念図



これを繰り返す

強均質代数の構成：Bookkeeping

- ω-段階融合を繰り返して，最終的な $\mathbb{B}$ を得たい．

強均質代数の構成：Bookkeeping

- ω-段階融合を繰り返して，最終的な $\mathbb{B}$ を得たい．

! 問題点：ω-融合を繰り返す途中で新たな部分同型が増えるので，予め「部分同型のリスト」を作ることができない．

強均質代数の構成：Bookkeeping

- ω-段階融合を繰り返して，最終的な $\mathbb{B}$ を得たい．

! 問題点：ω-融合を繰り返す途中で新たな部分同型が増えるので，予め「部分同型のリスト」を作ることができない．

$\rightsquigarrow$ Bookkeeping 論法（集合論ではよくあること）．

強均質代数の構成：Bookkeeping

- ω-段階融合を繰り返して，最終的な $\mathbb{B}$ を得たい．

! 問題点：ω-融合を繰り返す途中で新たな部分同型が増えるので，予め「部分同型のリスト」を作ることができない．

⇝ Bookkeeping 論法（集合論ではよくあること）．

  - 必要なら CH とかを仮定して，いい性質の全単射を使って「作ったやつ」の面倒を見ていく．

強均質代数の構成：Bookkeeping

- ω-段階融合を繰り返して，最終的な $\mathbb{B}$ を得たい．

! 問題点：ω-融合を繰り返す途中で新たな部分同型が増えるので，予め「部分同型のリスト」を作ることができない．

$\rightsquigarrow$ Bookkeeping 論法（集合論ではよくあること）．

- 必要なら CH とかを仮定して，いい性質の全単射を使って「作ったやつ」の面倒を見ていく．
- 余談：“Bookkeeping” の一般的な日本語訳（というか音訳）は「簿記」なんだけど，「簿記論法」と書くとなんか格好わるい

自己同型を数える

Bookkeeping をするために，まず自己同型を数えていきたい．

1. まず，$\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数とした時，可算完備生成部分代数の数は生成系 $X \in [\mathbb{B}]^{\aleph_0}$ の数で抑えられるから，高々 $|\mathbb{B}|^{\aleph_0}$-個．

自己同型を数える

Bookkeeping をするために，まず自己同型を数えていきたい．

1. まず，$\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数とした時，可算完備生成部分代数の数は生成系 $X \in [\mathbb{B}]^{\aleph_0}$ の数で抑えられるから，高々 $|\mathbb{B}|^{\aleph_0}$-個．
2. 計算を簡単にするため，$|\mathbb{B}| \leq \aleph_1$ として CH を仮定すれば，高々 $\aleph_1$-個の可算完備部分代数を持つことがわかる．

自己同型を数える

Bookkeeping をするために，まず自己同型を数えていきたい．

1. まず，$\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数とした時，可算完備生成部分代数の数は生成系 $X \in [\mathbb{B}]^{\aleph_0}$ の数で抑えられるから，高々 $|\mathbb{B}|^{\aleph_0}$-個．
2. 計算を簡単にするため，$|\mathbb{B}| \leq \aleph_1$ として CH を仮定すれば，高々 $\aleph_1$-個の可算完備部分代数を持つことがわかる．
3. そこから $\mathbb{B}$ の中への同型の個数を数えたい．

自己同型を数える

Bookkeeping をするために，まず自己同型を数えていきたい．

1. まず，$\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数とした時，可算完備生成部分代数の数は生成系 $X \in [\mathbb{B}]^{\aleph_0}$ の数で抑えられるから，高々 $|\mathbb{B}|^{\aleph_0}$-個．
2. 計算を簡単にするため，$|\mathbb{B}| \leq \aleph_1$ として CH を仮定すれば，高々 $\aleph_1$-個の可算完備部分代数を持つことがわかる．
3. そこから $\mathbb{B}$ の中への同型の個数を数えたい．
4. $\mathbb{B}$ に c.c.c. を仮定すれば，可算部分集合の上界を繰り返し追加して閉包を取ることで，X が完備に生成する部分代数 $\mathbb{B}(X)$ は帰納的に構成出来る．

自己同型を数える

Bookkeeping をするために，まず自己同型を数えていきたい．

1. まず，$\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数とした時，可算完備生成部分代数の数は生成系 $X \in [\mathbb{B}]^{\aleph_0}$ の数で抑えられるから，高々 $|\mathbb{B}|^{\aleph_0}$-個．
2. 計算を簡単にするため，$|\mathbb{B}| \leq \aleph_1$ として CH を仮定すれば，高々 $\aleph_1$-個の可算完備部分代数を持つことがわかる．
3. そこから $\mathbb{B}$ の中への同型の個数を数えたい．
4. $\mathbb{B}$ に c.c.c. を仮定すれば，可算部分集合の上界を繰り返し追加して閉包を取ることで，X が完備に生成する部分代数 $\mathbb{B}(X)$ は帰納的に構成出来る．
5. X から $\mathbb{B}$ への写像 f が一つ決まれば，この閉包を取る操作にそって f の行き先を定めてやる事が出来る．よって，$\mathbb{B}(X)$ から $\mathbb{B}$ の中への同型の個数は高々 $|\mathbb{B}|^{\aleph_0} = \aleph_1$ 個．

自己同型を数える

Bookkeeping をするために，まず自己同型を数えていきたい．

1. まず，$\mathbb{B}$ を完備 Boole 代数とした時，可算完備生成部分代数の数は生成系 $X \in [\mathbb{B}]^{\aleph_0}$ の数で抑えられるから，高々 $|\mathbb{B}|^{\aleph_0}$-個．
2. 計算を簡単にするため，$|\mathbb{B}| \leq \aleph_1$ として CH を仮定すれば，高々 $\aleph_1$-個の可算完備部分代数を持つことがわかる．
3. そこから $\mathbb{B}$ の中への同型の個数を数えたい．
4. $\mathbb{B}$ に c.c.c. を仮定すれば，可算部分集合の上界を繰り返し追加して閉包を取ることで，X が完備に生成する部分代数 $\mathbb{B}(X)$ は帰納的に構成出来る．
5. X から $\mathbb{B}$ への写像 f が一つ決まれば，この閉包を取る操作にそって f の行き先を定めてやる事が出来る．よって，$\mathbb{B}(X)$ から $\mathbb{B}$ の中への同型の個数は高々 $|\mathbb{B}|^{\aleph_0} = \aleph_1$ 個．
6. 以上より $|\mathbb{B}| \leq \aleph_1$ かつ $\mathbb{B}$ が c.c.c. を満たすなら，CH の下で $\mathbb{B}$ の可算完備生成部分代数上の部分同型は全部で $\aleph_1 \times \aleph_1 = \aleph_1$ 個．

Bookkeeping の概要

- 以上を踏まえて，$\aleph_1$-個ずつ増えていく部分代数と部分同型を纏めて面倒を見ていく形で，ω-融合の順極限 $\varinjlim_{\alpha<\omega_1} \mathbb{B}_\alpha$ を取っていきたい．
- Want: 強均質で「殆んど至る所 Cohen 実数」な cBa $\mathbb{B}$.
  1. 強均質：任意の $\mathbb{B}' \lessdot \mathbb{B}$ と完備埋め込み $f : \mathbb{B}_0 \to \mathbb{B}$ に対して，$\left\langle \alpha_\xi, f^\xi \,\middle|\, \xi, < \omega_1 \right\rangle$ で α_ξ が ω_1 の共終列で $(\mathbb{B}_{\alpha_\xi}, f^\xi)$ が $(\bigcup_{\eta<\xi} \mathbb{B}_{\alpha_\eta}, \bigcup_{\eta<\xi} f^\eta \cup f)$ の ω-段階融合になっているべき．
  2. 至る所 Cohen：$\mathbb{B}_{\alpha+1} = \mathbb{B}_\alpha * \mathbf{D} * \mathbb{D}$ となっている α が共終に存在して欲しい．

⋆ トリック：全単射 $f : \omega_1 \xrightarrow{\sim} \omega_1 \times \omega_1 \times \omega_1$ で $f(\alpha) = (\beta, \gamma, \delta)$ なら $\beta \leq \alpha$ となるものを固定する．
  - たとえば $\omega_1 \times \omega_1 \times \omega_1$ の整列順序に対応するランク関数を取ればよい．

- この f を手掛りに $f(\alpha)$ の値に基づいて $\mathbb{B}_\alpha$ を定義する．すなわち，$f(\alpha) = (\beta, \gamma, \delta)$ の時，$\mathbb{B}_{\alpha+1}$ は $\mathbb{B}_\beta$ の γ-番目の部分同型の δ-回目の処理に相当．

Bookkeeping の障害：そこで Sweet Forcing

- c.c.c. は順極限と反復で保たれるが，融合で保たれない！

Bookkeeping の障害：そこで Sweet Forcing

- c.c.c. は順極限と反復で保たれるが，融合で保たれない！
  - 例：$\mathbf{C}$ を Cohen 強制法とする．$\mathbf{C}$ は Suslin 木を追加することが知られている (cf. [2]) のでその名称を $\dot{T}$ とする．この時 $(\mathbf{C} * \dot{T}) \otimes (\mathbf{C} * \dot{T}) = \mathbf{C} * (\dot{T} \times \dot{T})$ は明らかに c.c.c. でない．

Bookkeeping の障害：そこで Sweet Forcing

- c.c.c. は順極限と反復で保たれるが，融合で保たれない！
  - 例：$\mathbf{C}$ を Cohen 強制法とする．$\mathbf{C}$ は Suslin 木を追加することが知られている (cf. [2]) のでその名称を $\dot{T}$ とする．この時 $(\mathbf{C} * \dot{T}) \otimes (\mathbf{C} * \dot{T}) = \mathbf{C} * (\dot{T} \times \dot{T})$ は明らかに c.c.c. でない．

$\rightsquigarrow$ 克服のために Shelah が考案したのが Sweet Forcing！

Bookkeeping の障害：そこで Sweet Forcing

- c.c.c. は順極限と反復で保たれるが，融合で保たれない！
  - 例：$\mathbf{C}$ を Cohen 強制法とする．$\mathbf{C}$ は Suslin 木を追加することが知られている (cf. [2]) のでその名称を $\dot{T}$ とする．この時 $(\mathbf{C} * \dot{T}) \otimes (\mathbf{C} * \dot{T}) = \mathbf{C} * (\dot{T} \times \dot{T})$ は明らかに c.c.c. でない．

$\rightsquigarrow$ 克服のために Shelah が考案したのが Sweet Forcing！

Definition 29

$\mathbb{P}$ が sweet $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists D \subseteq \mathbb{P}$: 稠密 $\exists \{ \simeq_n \}_n$: D 上の同値関係s.t.

Bookkeeping の障害：そこで Sweet Forcing

- c.c.c. は順極限と反復で保たれるが，融合で保たれない！
  - 例：$\mathbf{C}$ を Cohen 強制法とする．$\mathbf{C}$ は Suslin 木を追加することが知られている (cf. [2]) のでその名称を $\dot{T}$ とする．この時 $(\mathbf{C} * \dot{T}) \otimes (\mathbf{C} * \dot{T}) = \mathbf{C} * (\dot{T} \times \dot{T})$ は明らかに c.c.c. でない．

$\rightsquigarrow$ 克服のために Shelah が考案したのが Sweet Forcing！

Definition 29

$\mathbb{P}$ が sweet $\overset{\text{def}}{\iff} \exists D \subseteq \mathbb{P}$: 稠密 $\exists \{ \simeq_n \}_n : D$ 上の同値関係s.t.

1. $|D/{\simeq_n}| \leq \aleph_0$, $\simeq_{n+1}$ refines $\simeq_n$,

Bookkeeping の障害：そこで Sweet Forcing

- c.c.c. は順極限と反復で保たれるが，融合で保たれない！
  - 例：$\mathbf{C}$ を Cohen 強制法とする．$\mathbf{C}$ は Suslin 木を追加することが知られている (cf. [2]) のでその名称を $\dot{T}$ とする．この時 $(\mathbf{C} * \dot{T}) \otimes (\mathbf{C} * \dot{T}) = \mathbf{C} * (\dot{T} \times \dot{T})$ は明らかに c.c.c. でない．

$\rightsquigarrow$ 克服のために Shelah が考案したのが Sweet Forcing！

Definition 29

$\mathbb{P}$ が sweet $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists D \subseteq \mathbb{P}$: 稠密 $\exists \{\simeq_n\}_n$: D 上の同値関係s.t.

1. $|D/\simeq_n| \leq \aleph_0$, $\simeq_{n+1}$ refines $\simeq_n$,
2. $p \in D$ の $\simeq_n$-同値類 $[p]_n$ は下に有向,

Bookkeeping の障害：そこで Sweet Forcing

- c.c.c. は順極限と反復で保たれるが，融合で保たれない！
  - 例：$\mathbf{C}$ を Cohen 強制法とする．$\mathbf{C}$ は Suslin 木を追加することが知られている (cf. [2]) のでその名称を $\dot{T}$ とする．この時 $(\mathbf{C} * \dot{T}) \otimes (\mathbf{C} * \dot{T}) = \mathbf{C} * (\dot{T} \times \dot{T})$ は明らかに c.c.c. でない．

⇝ 克服のために Shelah が考案したのが Sweet Forcing！

Definition 29

$\mathbb{P}$ が sweet $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists D \subseteq \mathbb{P}$: 稠密 $\exists \{ \simeq_n \}_n$: D 上の同値関係s.t.

1. $|D/{\simeq_n}| \le \aleph_0$, $\simeq_{n+1}$ refines $\simeq_n$,
2. $p \in D$ の $\simeq_n$-同値類 $[p]_n$ は下に有向,
3. $\forall n\ p_n \simeq_n p_\omega$ なら $\{ p_j \mid n \le j \}$ は $[p_\omega]_n$ に下界を持つ.

Bookkeeping の障害：そこで Sweet Forcing

- c.c.c. は順極限と反復で保たれるが，融合で保たれない！
  - 例：$\mathbf{C}$ を Cohen 強制法とする．$\mathbf{C}$ は Suslin 木を追加することが知られている (cf. [2]) のでその名称を $\dot{T}$ とする．この時 $(\mathbf{C} * \dot{T}) \otimes (\mathbf{C} * \dot{T}) = \mathbf{C} * (\dot{T} \times \dot{T})$ は明らかに c.c.c. でない．

$\rightsquigarrow$ 克服のために Shelah が考案したのが Sweet Forcing！

Definition 29

$\mathbb{P}$ が sweet $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists D \subseteq \mathbb{P}$: 稠密 $\exists \{\simeq_n\}_n$: D 上の同値関係s.t.

1. $|D/{\simeq_n}| \leq \aleph_0$, $\simeq_{n+1}$ refines $\simeq_n$,
2. $p \in D$ の $\simeq_n$-同値類 $[p]_n$ は下に有向,
3. $\forall n\ p_n \simeq_n p_\omega$ なら $\{ p_j \mid n \leq j \}$ は $[p_\omega]_n$ に下界を持つ.
4. $\forall p \leq q, n < \omega\ \exists k < \omega\ \forall q' \in [q]_k\ \exists p' \in [p]_n\ p' \leq q$.

Bookkeeping の障害：そこで Sweet Forcing

- c.c.c. は順極限と反復で保たれるが，融合で保たれない！
  - 例：$\mathbf{C}$ を Cohen 強制法とする．$\mathbf{C}$ は Suslin 木を追加することが知られている (cf. [2]) のでその名称を $\dot{T}$ とする．この時 $(\mathbf{C} * \dot{T}) \otimes (\mathbf{C} * \dot{T}) = \mathbf{C} * (\dot{T} \times \dot{T})$ は明らかに c.c.c. でない．

$\rightsquigarrow$ 克服のために Shelah が考案したのが Sweet Forcing！

Definition 29

$\mathbb{P}$ が sweet $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists D \subseteq \mathbb{P}$: 稠密 $\exists \{ \simeq_n \}_n$: D 上の同値関係s.t.

1. $|D/\simeq_n| \leq \aleph_0$, $\simeq_{n+1}$ refines $\simeq_n$,
2. $p \in D$ の $\simeq_n$-同値類 $[p]_n$ は下に有向,
3. $\forall n\ p_n \simeq_n p_\omega$ なら $\{ p_j \mid n \leq j \}$ は $[p_\omega]_n$ に下界を持つ.
4. $\forall p \leq q, n < \omega\ \exists k < \omega\ \forall q' \in [q]_k\ \exists p' \in [p]_n\ p' \leq q$.

- 強制法 $\mathbb{P}$ が sweet なら $\mathbb{P}$ は c.c.c. を満たす．
  $\mathbb{P} = \bigcup \{ [p]_n \mid n < \omega \}$ は σ-centered の可算和．

Sweetness に関するファクツ

証明が滅茶苦茶テクニカルでこの時間内で終わらないので，以下，必要な補題だけ列挙してお茶を濁す.

Fact 30 (たくさんの Facts)

1. $\mathbb{B}$ が *sweet* なら，$\mathbb{B} * \dot{\mathbf{D}}$ および $\mathbb{B} * \dot{\mathbf{UM}}$ も *sweet*.

Sweetness に関するファクツ

証明が滅茶苦茶テクニカルでこの時間内で終わらないので，以下，必要な補題だけ列挙してお茶を濁す.

Fact 30 (たくさんの Facts)

1. $\mathbb{B}$ が *sweet* なら，$\mathbb{B} * \dot{\mathbf{D}}$ および $\mathbb{B} * \dot{\mathbf{UM}}$ も *sweet*.
2. $\langle \mathbb{B}_n \mid n < \omega \rangle$ が *Sweet* な完備拡大列なら $\varinjlim_{n<\omega} \mathbb{B}_n$ も *Sweet*.

Sweetness に関するファクツ

証明が滅茶苦茶テクニカルでこの時間内で終わらないので，以下，必要な補題だけ列挙してお茶を濁す．

Fact 30 (たくさんの Facts)

1. $\mathbb{B}$ が *sweet* なら，$\mathbb{B} * \dot{\mathbf{D}}$ および $\mathbb{B} * \dot{\mathbf{UM}}$ も *sweet*.
2. $\langle \mathbb{B}_n \mid n < \omega \rangle$ が *Sweet* な完備拡大列なら $\varinjlim_{n<\omega} \mathbb{B}_n$ も *Sweet*.
3. $\mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}$ を *cBa*，$f_i : \mathbb{B} \to \mathbb{B}_i$ を完備埋め込みとし，各 $\mathbb{B}_i$ は *sweet* であるとする．この時，$\mathbb{B}_0 \otimes_{f_0, f_1} \mathbb{B}_1$ も *Sweet*.

Sweetness に関するファクツ

証明が滅茶苦茶テクニカルでこの時間内で終わらないので，以下，必要な補題だけ列挙してお茶を濁す．

Fact 30 (たくさんの Facts)

1. $\mathbb{B}$ が *sweet* なら，$\mathbb{B} * \dot{\mathbf{D}}$ および $\mathbb{B} * \dot{\mathbf{UM}}$ も *sweet*.
2. $\langle \mathbb{B}_n \mid n < \omega \rangle$ が *Sweet* な完備拡大列なら $\varinjlim_{n<\omega} \mathbb{B}_n$ も *Sweet*.
3. $\mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}$ を *cBa*，$f_i : \mathbb{B} \to \mathbb{B}_i$ を完備埋め込みとし，各 $\mathbb{B}_i$ は *sweet* であるとする．この時，$\mathbb{B}_0 \otimes_{f_0, f_1} \mathbb{B}_1$ も *Sweet*.

Remark 4

- 非可算順極限では sweetness は保たれない．この事も CH を仮定し $\mathbb{B}$ を ω_1-回の順極限で作る理由の一つ．

Sweetness に関するファクツ

証明が滅茶苦茶テクニカルでこの時間内で終わらないので，以下，必要な補題だけ列挙してお茶を濁す．

Fact 30 (たくさんの Facts)

1. $\mathbb{B}$ が *sweet* なら，$\mathbb{B} * \dot{\mathbf{D}}$ および $\mathbb{B} * \dot{\mathbf{UM}}$ も *sweet*.
2. $\langle \mathbb{B}_n \mid n < \omega \rangle$ が *Sweet* な完備拡大列なら $\varinjlim_{n<\omega} \mathbb{B}_n$ も *Sweet*.
3. $\mathbb{B}_0, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}$ を *cBa*，$f_i : \mathbb{B} \to \mathbb{B}_i$ を完備埋め込みとし，各 $\mathbb{B}_i$ は *sweet* であるとする．この時，$\mathbb{B}_0 \otimes_{f_0, f_1} \mathbb{B}_1$ も *Sweet*.

Remark 4

- 非可算順極限では sweetness は保たれない．この事も CH を仮定し $\mathbb{B}$ を ω_1-回の順極限で作る理由の一つ．
- **D** や **UM** との反復強制法で Sweetness が保たれることは，それぞれの強制法としての構造の情報をフルに使って証明される．とても一般的ではない！

Table Of Contents

まとめと今後

- Sweet Forcing は c.c.c. の強化版で，強均質代数を構築するための融合によって保たれる性質として Shelah が抽出した.

まとめと今後

- Sweet Forcing は c.c.c. の強化版で，強均質代数を構築するための融合によって保たれる性質として Shelah が抽出した.
- その目的は Con(ZFC) $\Longrightarrow$ Con(ZFC + 射影 Baire 性) の証明のため.

まとめと今後

- Sweet Forcing は c.c.c. の強化版で，強均質代数を構築するための融合によって保たれる性質として Shelah が抽出した.
- その目的は Con(ZFC) $\implies$ Con(ZFC + 射影 Baire 性) の証明のため.
  - **D** なり **UM** なりを，他の「至る所 $\mathcal{I}$-生成実数」にするようなものに置き換えられれば一般化出来そうに見える.

まとめと今後

- Sweet Forcing は c.c.c. の強化版で，強均質代数を構築するための融合によって保たれる性質として Shelah が抽出した．
- その目的は Con(ZFC) $\implies$ Con(ZFC + 射影 Baire 性) の証明のため．
  - **D** なり **UM** なりを，他の「至る所 $\mathcal{I}$-生成実数」にするようなものに置き換えられれば一般化出来そうに見える．
    - そういう強制法を $\mathcal{I}$-アメーバ強制法という．

まとめと今後

- Sweet Forcing は c.c.c. の強化版で，強均質代数を構築するための融合によって保たれる性質として Shelah が抽出した．
- その目的は Con(ZFC) $\implies$ Con(ZFC + 射影 Baire 性) の証明のため．
  - **D** なり **UM** なりを，他の「至る所 $\mathcal{I}$-生成実数」にするようなものに置き換えられれば一般化出来そうに見える．
    - そういう強制法を $\mathcal{I}$-アメーバ強制法という．

! しかし，Lebesgue 可測性については $\mathbf{\Sigma}^1_3$ の段階で，他の多くの $\mathcal{I}$ については $\mathbf{\Sigma}^1_2$ の段階で到達不能基数の無矛盾性が出ることが知られている．

まとめと今後

- Sweet Forcing は c.c.c. の強化版で，強均質代数を構築するための融合によって保たれる性質として Shelah が抽出した.
- その目的は Con(ZFC) $\implies$ Con(ZFC + 射影 Baire 性) の証明のため.
  - **D** なり **UM** なりを，他の「至る所 $\mathcal{I}$-生成実数」にするようなものに置き換えられれば一般化出来そうに見える.
    - そういう強制法を $\mathcal{I}$-アメーバ強制法という.

! しかし，Lebesgue 可測性については $\mathbf{\Sigma}^1_3$ の段階で，他の多くの $\mathcal{I}$ については $\mathbf{\Sigma}^1_2$ の段階で到達不能基数の無矛盾性が出ることが知られている.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{I}$-アメーバ強制法の多くは Sweet ではない事がわかる.

まとめと今後

- Sweet Forcing は c.c.c. の強化版で，強均質代数を構築するための融合によって保たれる性質として Shelah が抽出した．
- その目的は Con(ZFC) $\Longrightarrow$ Con(ZFC + 射影 Baire 性) の証明のため．
  - **D** なり **UM** なりを，他の「至る所 $\mathcal{I}$-生成実数」にするようなものに置き換えられれば一般化出来そうに見える．
    - そういう強制法を $\mathcal{I}$-アメーバ強制法という．

! しかし，Lebesgue 可測性については $\mathbf{\Sigma}^1_3$ の段階で，他の多くの $\mathcal{I}$ については $\mathbf{\Sigma}^1_2$ の段階で到達不能基数の無矛盾性が出ることが知られている．

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{I}$-アメーバ強制法の多くは Sweet ではない事がわかる．

? アメーバ強制法が Sweet になる $\mathcal{I}$ は Cohen の他にもあるか？

まとめと今後

- Sweet Forcing は c.c.c. の強化版で，強均質代数を構築するための融合によって保たれる性質として Shelah が抽出した.
- その目的は Con(ZFC) $\Longrightarrow$ Con(ZFC + 射影 Baire 性) の証明のため.
  - **D** なり **UM** なりを，他の「至る所 $\mathcal{I}$-生成実数」にするようなものに置き換えられれば一般化出来そうに見える.
    - そういう強制法を $\mathcal{I}$-アメーバ強制法という.

! しかし，Lebesgue 可測性については $\mathbf{\Sigma}^1_3$ の段階で，他の多くの $\mathcal{I}$ については $\mathbf{\Sigma}^1_2$ の段階で到達不能基数の無矛盾性が出ることが知られている.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{I}$-アメーバ強制法の多くは Sweet ではない事がわかる.

? アメーバ強制法が Sweet になる $\mathcal{I}$ は Cohen の他にもあるか？

? 実数の集合の正則性の無矛盾性の差異を，sweetness や他の性質をの関連で特徴づけられないか？

参考文献 I

[1] Tomek Bartoszyński and Haim Judah, **Set Theory: On the Structure of the Real Line**, Ak Peters Series, Taylor & Francis, 1995, ISBN: 9781568810447.

[2] Mohamed Bekkali, **Topics in Set Theory: Lebesgue Measurability, Large Cardinals, Forcing Axioms, Rho-functions**, Lecture Notes in Mathematics **1476**, Springer Berlin Heidelberg, 1991, ISBN: 978-3-540-54121-9, DOI: 10.1007/BFb0098398.

[3] Haim Judah and Andrzej Roslanowski, **On Shelah's amalgamation**, Israel Mathematical Conference Proceedings, vol. 6, 1993, pp. 385–414, URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=345856FFEB3FE6383A2CFF42B29E66D0?doi=10.1.1.22.7671&rep=rep1&type=pdf.

参考文献 II

[4] Yurii Khomskii, **Regularity Properties and Definability in the Real Number Continuum: Idealized forcing, polarized partitions, Hausdorff gaps and mad families in the projective hierarchy**, PhD thesis, Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam, 2012.

[5] John C. Oxtoby, **Measure and Category: A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces**, English, vol. 2, Graduate Texts in Mathematics, Springer US, 1971, ISBN: 978-0-387-05349-3, DOI: 10.1007/978-1-4615-9964-7.

[6] Saharon Shelah, **Can You Take Solovay's Inaccessible Away?**, Israel Journal of Mathematics 48.**1** (1984), pp. 1–47, ISSN: 0021-2172, DOI: 10.1007/BF02760522, URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF02760522.

[7] Robert M. Solovay, **A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable**, The Annals of Mathematics, 2nd ser. 92.**1** (July 1970), pp. 1–56, ISSN: 0003486X, DOI: 10.2307/1970696, URL: http://www.jstor.org/stable/1970696.

参考文献 III

[8] 石井大海, **Lebesgue 可測性に関する Soloay の定理と実数の集合の正則性**, 「数学基礎論若手の会 2015」発表資料, 2015, URL: http://www.slideshare.net/konn/lebesguesoloay.

御清聴
ありがとう
ございました

Any Questions?

- Sweet Forcing は c.c.c. の強化版で，強均質代数を構築するための融合によって保たれる性質として Shelah が抽出した．
- その目的は Con(ZFC) $\implies$ Con(ZFC + 射影 Baire 性) の証明のため．
  - **D** なり **UM** なりを，他の「至る所 $\mathcal{I}$-生成実数」にするようなものに置き換えられれば一般化出来そうに見える．
    - そういう強制法を $\mathcal{I}$-アメーバ強制法という．

  ! しかし，Lebesgue 可測性については $\mathbf{\Sigma}^1_3$ の段階で，他の多くの $\mathcal{I}$ については $\mathbf{\Sigma}^1_2$ の段階で到達不能基数の無矛盾性が出ることが知られている．

  $\rightsquigarrow$ $\mathcal{I}$-アメーバ強制法の多くは Sweet ではない事がわかる．

? アメーバ強制法が Sweet になる $\mathcal{I}$ は Cohen の他にもあるか？

? 実数の集合の正則性の無矛盾性の差異を，sweetness や他の性質をの関連で特徴づけられないか？

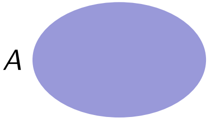
オマケ

[redacted]

イデアルに付随する正則性

Definition 31

$\mathcal{I}$ を $\mathbb{R}$ 上の σ-イデアルとする．$A \subseteq R$ が $\mathcal{I}$-正則である $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall B \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}\, \exists C \leq_{\mathcal{I}} B\, [C \cap A = \emptyset \vee C \subseteq A]$.



Baire の性質や可測性より一般的に見えるが，ω_1-飽和なら一致：

Lemma 32

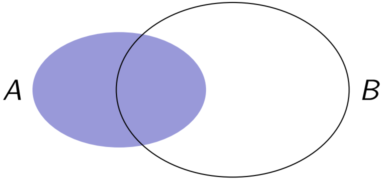
$\mathcal{I}$ が ω_1-飽和なら，次は同値：

1. $A \subseteq \mathbb{R}$ が $\mathcal{I}$-正則,
2. $\exists B \in \mathscr{B}\ [A \triangle B \in \mathcal{I}]$.

イデアルに付随する正則性

Definition 31

$\mathcal{I}$ を $\mathbb{R}$ 上の σ-イデアルとする． $A \subseteq R$ が $\mathcal{I}$-正則である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall B \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}\ \exists C \leq_{\mathcal{I}} B\,[C \cap A = \emptyset \vee C \subseteq A]$.



Baire の性質や可測性より一般的に見えるが， ω_1-飽和なら一致：

Lemma 32

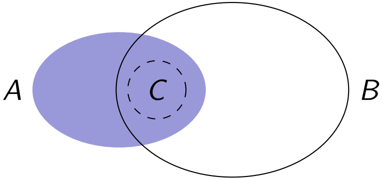
$\mathcal{I}$ が ω_1-飽和なら，次は同値：

1. $A \subseteq \mathbb{R}$ が $\mathcal{I}$-正則,
2. $\exists B \in \mathscr{B}\ [A \triangle B \in \mathcal{I}]$.

イデアルに付随する正則性

Definition 31

$\mathcal{I}$ を $\mathbb{R}$ 上の σ-イデアルとする． $A \subseteq R$ が $\mathcal{I}$-正則である $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall B \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}\ \exists C \leq_{\mathcal{I}} B\,[C \cap A = \emptyset \vee C \subseteq A]$.



Baire の性質や可測性より一般的に見えるが， ω_1-飽和なら一致：

Lemma 32

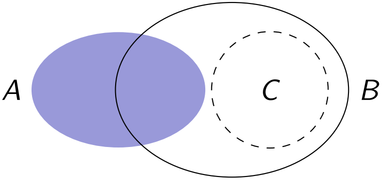
$\mathcal{I}$ が ω_1-飽和なら， 次は同値：

1. $A \subseteq \mathbb{R}$ が $\mathcal{I}$-正則,
2. $\exists B \in \mathscr{B}\ [A \bigtriangleup B \in \mathcal{I}]$.

イデアルに付随する正則性

Definition 31

$\mathcal{I}$ を $\mathbb{R}$ 上の σ-イデアルとする．$A \subseteq R$ が $\mathcal{I}$-正則である $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall B \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}\ \exists C \leq_{\mathcal{I}} B\ [C \cap A = \emptyset \vee C \subseteq A]$.



Baire の性質や可測性より一般的に見えるが，ω_1-飽和なら一致：

Lemma 32

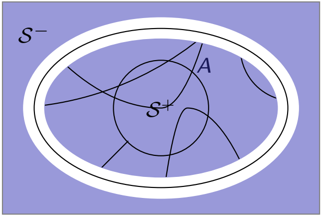
$\mathcal{I}$ が ω_1-飽和なら，次は同値：

1. $A \subseteq \mathbb{R}$ が $\mathcal{I}$-正則,
2. $\exists B \in \mathscr{B}\ [A \triangle B \in \mathcal{I}]$.

Proof of Lemma 32

(2) $\Longrightarrow$ (1) は明らかなので，$\mathcal{I}$: ω_1-飽和として逆を示す．そこで $A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathcal{I}$-正則とし，次の二つの集合を考える：

$$\mathcal{S}^- := \{ B \in \mathbb{P}_I \mid B \cap A = \emptyset \},$$
$$\mathcal{S}^+ := \{ B \in \mathbb{P}_I \mid B \subseteq A \},$$
$$\mathcal{A}^- := (\mathcal{S}^- \text{ に含まれる極大な反鎖}),$$
$$\mathcal{A}^+ := (\mathcal{S}^+ \text{ に含まれる極大な反鎖}).$$



この時，$\mathcal{I}$ の ω_1-飽和性から $\mathcal{A}^\pm$ はそれぞれ高々可算である．よって $B := \bigcup \mathcal{A}^+$, $B' := \bigcup \mathcal{A}^-$ とおけば，これらは共に Borel 集合である．B と A の差は $B^c \cup B'^c$ に含まれているから，$B^c \cup B'^c \in \mathcal{I}$ を示せば十分．背理法で示す．仮に $\mathbb{R} \setminus (B \cup B') \notin \mathcal{I}$ なら，A の $\mathcal{I}$-正則性から $B^c \cup B'^c$ で $C \subseteq A$ または $C \cap A = \emptyset$ を満たす $C \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ が取れ，$\mathcal{A}^+$ と $\mathcal{A}^-$ の極大性に反する．

なぜ$\mathcal{I}$-正則性を考えるか？

- ω_1-飽和とは限らない$\mathcal{I}$についても$\mathcal{I}$-正則性は興味深い性質の一般化になっている．
  - ω_1-飽和の例：
    - $\mathcal{M}_{\mathbf{D}}$ を支配位相における痩せ集合の全体とすると，$\mathcal{M}_{\mathbf{D}}$-正則性は **D**-Baire の性質．
  - ω_1-飽和でない例：
    - ctbl を可算集合全体とすると，ctbl-正則性は非 Bernstein 性と一致する．
    - $\mathcal{I}_{\mathrm{RN}}$ を Ramsey 零集合の全体とすると，$\mathcal{I}_{\mathrm{RN}}$-正則性は完全 Ramsey 性と一致する．
- どの場合のイデアルも，（強）適性 (strong properness) という性質を満たす．これはω_1-飽和の一般化になっている．
  - とはいえ，今回扱うのはω_1-飽和条件の場合のみ．適性イデアルに付随する正則性の一般論については Khomskii [4] を参照．