集合論ゼミ 2012 年 11 月 13 日

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科三年

2012 年 11 月 13 日

第二節 順序と整礎性

- 目的：集合論の宇宙を数学的に調べる．
- まずは順序の観点から．
- この章では宇宙の骨格を明らかにする．
- 順序数は整列性を調べるのに必要な範囲だけ．
- $\in$ に整礎性を適用することで整礎集合のクラスが得られる．
  - 基礎の公理は，このクラスが宇宙と全体することを主張している．
  - 0 を一番底にもっていて，次の段階は今までの階層全部の和の冪になっている．

順序に関する定義

Def. 1.1

1. 「R が非反射的」 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x(\langle x, x\rangle \notin R)$
2. 「R が推移的」 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \forall y \forall z(\langle x, y\rangle \in R \land \langle y, z\rangle \in R \to \langle x, z\rangle \in R)$
3. 「R が半順序関係」 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 「R は非反射的かつ推移的」
4. 「R は A 上の（全）順序関係」「R は A を順序づける」 $\stackrel{\text{def}}{\iff} R|_A$は半順序 $\land \forall x \forall y(x, y \in A \to x = y \lor x\,R\,y \lor y\,R\,x)$

- ここでは $\leq$-型ではなく $<$-型の順序を導入したので非反射的．
- 半順序は非反射的： R のフィールド上ではなく V 全体で定義されていると考える．
  - $\Leftrightarrow$ 非反射的全順序のとき，A は R のフィールドの部分集合となる
  - 但し，一点集合は任意の関係 R について全順序集合となる（!!）

Def. (続き)

5. R : 関係として，
   「x は A の R-極小元」 $\stackrel{\text{def}}{\iff} x \in A \land (\forall y \in A)\neg y\,R\,x$
   R が全順序なら，A の最小元と一致する．R のフィールドに居ない元は全部 R-極小元．
6. 「R が *left-narrow*」 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x(\{\, y \in A \mid y\,R\,x \,\}$ が *set*)
   「R が A 上 *left-narrow*」 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in A(\{\, y \in A \mid y\,R\,x \,\}$ *set*)
   「R が *right-narrow*」 $\stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall x \in A)(\{\, y \in A \mid x\,R\,y \,\}$ が *set*)
   以下同文．
7. 「R は A を整列する」 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ R は A 上の *left-narrow* な全順序であり，A の任意の非空部分集合が R-極小元を持つ．
8. 「R は対称的」 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \forall y(x\,R\,y \leftrightarrow y\,R\,x)$

narrow / 非 narrow 関係の例

Example 1.2 (narrow / 非 narrow 関係の例)

- 部分集合公理より A : set ならば，任意の関係 R は A 上 left-narrow かつ right-narrow.
- 函数は right-narrow（集合値のものだけを「函数」と呼ぶことにした）．更に 1 対 1 函数は left-narrow.
- $\in$-関係は，元になるのは集合だけなので常に left-narrow だが，right-narrow とは限らない ($0 \in V$).
- $\subseteq$-関係は left-narrow でも right-narrow でもない．

整列性に left-narrow を課したのは，整列集合と整列クラスを統一的に扱うため．集合論においては整列関係の殆んどが left-narrow.

基礎論の講義でお馴染なので軽く．講義でやった L-構造の内，L がただ一つの二項関係 R を持つ場合．

Def. 1.3 (1-二項関係構造)

A : クラス, $R \subseteq A \times A$ とするとき,「順序対」$\langle A, R\rangle$ を（1-二項関係）構造と呼ぶ．このとき，A を R の「宇宙」または「クラス（明らかなときには集合)」と呼ぶ．この時，$\langle A, R\rangle$ をクラス A 上の構造と云う．

A が集合なら $R \subseteq A \times A$ は集合となる．しかし，A が真クラスのとき $\langle A, R\rangle$ は約束から 0 になってしまう．その場合，飽く迄 $\langle A, R\rangle$ は方便として扱う．

Exercise 1.4

順序対 $\langle A, B\rangle$ を，任意のクラス A, B に対し，両方共が集合のときは今まで通りの定義とし，少なくとも一方が真のクラスのとき $(\{0\} \times A) \cup (\{\{0\}\} \times B)$ で定める．これがクラスについても順序対のような性質を満たすことを示せ．

易しいし面倒なので証略．

Def. 1.5 (部分構造)

1. 「$\langle B, S\rangle$ が $\langle A, R\rangle$ の部分構造」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $B \subseteq A$ かつ $S = R|_B$
2. 「F が $\langle A, R\rangle$ から $\langle B, S\rangle$ の中への同型」
   $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $F : A \to B$: 単射 $\wedge (\forall x, y \in A)(x\,R\,y \leftrightarrow F(x)\,S\,F(y))$
   「F が A から B の上への同型」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ F が A から B の中への同型 $\wedge F$ は B の上への写像
3. 「構造 $\langle A, R\rangle$ と $\langle B, S\rangle$ が同型」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A から B の上への同型が存在する．
   このとき，$\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ と書く．
   $\langle a, r\rangle \cong \langle b, s\rangle$ は集合論の論理式として書けるが，A, R, B, S が集合でない場合は書けない．その場合，F を具体的に与える必要がある．
4. $\langle A, R\rangle$: 構造, $F : A \to B$(全単射)
   のとき，$S = \{\, \langle F(x), F(y)\rangle \mid x, y \in A, \langle x, y\rangle \in R \,\}$ を，B 上 F と R から誘導される構造と云う．このとき，F は $\langle A, R\rangle$ から $\langle B, S\rangle$ の上への同型となる．

- R が $A \times A$ の部分クラスでない場合,「構造 $\langle A, R\rangle$」とは $\langle A, R\,|\,_A\rangle$ のこと．
  - このとき $R_A = S_A$ なら $\langle A, R\rangle$ と $\langle A, S\rangle$ を同一視する．
  - こうすることで $\langle A, R\rangle$ の $B \subseteq A$ に関する部分構造を $\langle B, R\rangle$ と書ける．
- $\langle a, R\rangle$ は集合論の対象として書ける．
- 他の場合，特に何の約束もなければ $R \subseteq A \times A$ とする．

演習問題

Exercise 1.6

1. a 上の 1-二項関係構造全体は集合を成す．
2. $\langle a, r\rangle$ から $\langle b, s\rangle$ 上への同型写像全体は集合を成す．
3. $\langle B, S\rangle$ が $\langle A, R\rangle$ の部分構造
   $\Leftrightarrow$ B の恒等射が $\langle A, R\rangle$ の中への同型写像．

Prop. 1.7

構造の同型関係 $\cong$ は同値関係である．

Proof.

全部自明． ∎

順序クラスとか I

Def. 1.8

- R が半順序のとき構造 $\langle A, R\rangle$ を半順序クラス,
- R が全順序のとき構造 $\langle A, R\rangle$ を（全）順序クラス,
- R が整列順序のとき構造 $\langle A, R\rangle$ を整列クラス

とそれぞれ呼ぶ．A が集合であるときはそれぞれ「〜集合」と呼ぶ．半順序集合をよく poset と書く．

Term. 1.9

順序クラスとか II

- 明らかな場合 $\langle A, R\rangle$ の R は略す．
- R が半順序のとき，$x\,R\,y$ を「x は y に先行する」「x は y より小さい（未満)」「y は x より大きい」などと読む．
- $B \subseteq A$ のとき，$x \in B$ が「B の最小元である」または特に全順序のとき「B の最初の元である」とは，$(\forall y \in B)(x \neq y \to xRy)$ のこと．論理式 $\Phi(x)$ についても同様の言い回しをする．
- 上と双対的な条件を満たす元を「B の最大元」とか，全順序の時は「最後の元」と呼ぶ．
- 特に指定の無い場合,「最大の集合」「最小の集合」はそれぞれ $\subseteq$-順序に関する最大・最小とする．

Example 1.10 (順序の例)

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$: 通常の順序に関して全順序.
- $\mathbb{N}$ は特に整列順序.
- $\mathbb{N} \sim \{0\}$ は，約数順序 $a|b$ について半順序集合となるが，全順序集合ではない.
- 位相空間 $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ について，$x, y \in X$ に対し

$$x \leq y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall U \in \mathcal{O})(x \in U \to y \in U)$$

によって $\leq$ を定めると，これはプレ順序になる．$\langle X, \mathcal{O}\rangle$ が T_0 空間のとき，特に X は半順序集合となり，T_1 空間であれば順序は自明となる.

順序の遺伝性

Prop. 1.11

1. $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ かつ $\langle A, R\rangle$ が半順序・全順序・整列クラス $\Rightarrow \langle B, S\rangle$ も半・全・整列クラス.
2. 半順序・全順序・整列クラスの部分構造も再び半・全・整列順序クラスとなる.

Proof.
自明. ∎

Def. 1.12 (単調函数)

$\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle$: 半順序クラス, $F : A \to B$ 写像 とする.

1. F が（R, S についての）増加函数または狭義単調函数
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x, y \in A)(x\,R\,y \to F(x)\,S\,F(y))$
（特に，同型写像は増加関数である）
2. F が単調函数
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x, y \in A)(x\,R\,y \to F(x)\,S\,F(y) \vee F(x) = F(y))$
（狭義単調 $\Rightarrow$ 単調．定数函数 $\Rightarrow$ 単調）

$\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle$ を明示しない場合，$\langle V, \subseteq\rangle$ に関する物として解釈.
例：「冪集合函数 $\mathfrak{P}$ は増加関数である」$\Leftrightarrow$ 「$\langle V, \subseteq\rangle$ から $\langle V, \subseteq\rangle$ への冪集合函数 $\mathfrak{P}$ は増加関数である」

Prop. 1.13

$\langle A, R\rangle$: 全順序クラス, $\langle B, S\rangle$: 半順序クラス, $F : A \to B$ 増加関数
$\Rightarrow F$ は $\langle A, R\rangle$ から $\langle B, S\rangle$ の中への同型写像

Proof.
F が増加関数より $x, y \in A$ に対し $xRy \to F(x)SF(y)$ が成立．あとは $F(x)SF(y) \to xRy$ が云えればよい．今，A は全順序より $xRy \vee x = y \vee yRx$ が成立． $x = y$ とすると $F(x) = F(y)$ となり矛盾し，yRx とすると F が増加関数であることから $F(y)RF(x)$ となり仮定に矛盾．よって xRy. ∎

Prop. 1.14

1.
$$\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle : \text{全順序クラス}, A \cap B = 0$$
$$\Rightarrow \langle A \cup B, R \cup (A \times B) \cup S\rangle \text{ は全順序クラス}$$
これを順序和と呼び，$\langle A, R\rangle \oplus \langle B, S\rangle$ と表す.
2. $\langle A, R\rangle$: 整列集合, $\langle B, S\rangle$: 整列クラス
このとき，$\langle A, R\rangle \oplus \langle B, S\rangle$ も整列クラスとなる．特に，B が集合なら整列集合となる.
3. 特に，$\langle a, r\rangle$ を整列集合とし，$z \notin a$ とすると，
$\langle a \cup \{z\}, r \cup \{a\} \times z\rangle$ も整列集合となる（これは $\langle a, r\rangle$ と $\langle\{z\}, 0\rangle$ の順序和である）.

命題の証明

(1) は明らかに任意の二元が比較可能なので自明．(3) も (2) の特殊な場合なので省略.

(2) の証明.
$0 \neq z \subseteq \langle A, R\rangle \oplus \langle B, S\rangle$ とする．$z \subseteq A, z \subseteq B$ のときは A, B の整列性より z は最小元を持つ．$z \subseteq A \cup B$ のときは，$z \cap A$ を考えてその最小元を取ればよい．また，left-narrow 性についても，$z \in B$ のとき $(A \cup B)_z = A \cup B_z$ であり，A は仮定より集合なので，従って $(A \cup B)_z$ も集合となるので良い. ∎

演習問題 I

Exercise 1.15

1. 二つの整列クラスの順序和は整列クラスとなるか？
2. 次を満たすようなクラス T と関係 R を作れ．
   - a. R は T の各元を整列する．
   - b. $x, y \in T$ について，$x \subseteq y \vee y \subseteq x$ が成立し，かつ R は $\cup T$ を全順序づける．

(1) の答え.

ならない．前命題の証明で見たように，左側が集合でないと，右側の元に関する left-narrow 性が成立しない． ∎

(2) の答え.

今，A_n を

$$A_0 = 0$$
$$A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$$

とすると，$\langle A_n, \in \rangle$ が題意を満たす構造である．
実際，$A_n \subseteq A_{n+1}$ かつ $\cup A_{n+1} = A_n$ より (b) が成立する．(a) も明らか． ∎

Def. 1.16

$\langle A, R \rangle$: 全順序クラス, $B \subseteq A$ とする．

1. B が $\langle A, R \rangle$ で共終 (cofinal)
   $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in A)(x \in B \vee (\exists y \in B)xRy)$
2. $z \in A$ が B の上界 (bound) $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in B)(x = z \vee xRz)$
   $z \in A$ が B の狭義上界 (strict bound) $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in B)xRz$
3. B が $\langle A, R \rangle$ で有界 (bounded) $\overset{\text{def}}{\iff}$ B が上界を持つ．
   B が $\langle A, R \rangle$ で真に有界 (strictly bounded)
   $\overset{\text{def}}{\iff}$ B が狭義上界を持つ．
4. B が $\langle A, R \rangle$ の（始）断面 (initial section) である
   $\overset{\text{def}}{\iff} (\exists y \in A)B = \{ x \in A \mid xRy \}$
   y による $\langle A, R \rangle$ の始断面と云う．R が明らかなら A_y と書く．
5. B が $\langle A, R \rangle$ の（始）切片 (initial segment)
   $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall x, y \in R)(x \in B \wedge yRx \to y \in B)$

補足

- 真に有界 ⇔ 非共終.
- 始断面 ⇒ 真に有界.
- 定義より，整列クラスの始断面は常に集合となる．
- 始断面は明らかに始切片である．

演習問題

Exercise 1.17

1. $B \subseteq A$ とする．
   B が全順序クラス $\langle A, R \rangle$ で共終 ⇔ $B \cup R^{-1}[B] = A$
2. B が全順序クラス $\langle A, R \rangle$ で共終であるとする．このとき，
   B が最大元を持つ ⇔ A が最大元をもつ
   であり，B, A の最大元は一致する．
3. $C \subseteq B \subseteq A$, B が $\langle A, R \rangle$ で共終, C が $\langle B, R \rangle$ で共終
   ⇒ C が $\langle A, R \rangle$ で共終

(1) の証明.

B が $\langle A, R \rangle$ で共終であるとする．$B \cup R^{-1}[B] \subseteq A$ は明らかであるので，逆を示す．
$x \in A$ とする．定義より $x \in B \vee (\exists y \in B)xRy$ となる．$x \in B$ ならば OK．xRy とする．逆関係の定義より $yR^{-1}x$ であるから
$y \in R^{-1}[B]$.
$\therefore x \in B \cup R^{-1}[B]$
(⇐) は自明. ∎

(2)(⇒) の証明.

z_0 を B の最大元とする．即ち，$(\forall x \in B)(x = z_0 \vee xRz_0)$ とする．今，$y \in A \sim B$ を取ると，B の共終性から $(\exists x \in B)yRx$．よって推移律より yRz_0．よって z_0 は A の最大元である． ∎

(2)(⇐) の証明.

$x_0 \in A$ を A の最大元とする．すると，$(\forall y \in B)(y = x_0 \vee yRx_0)$ が成立.
また，B は共終より

$$\forall x \in A(x \in B \vee (\exists y \in B)xRy)$$

となるので，特に $x = x_0$ とおけば，

$$x_0 \in B \vee (\exists y_0 \in)x_0 R y_0$$

となる．x_0Ry_0 とすると，y_0Rx_0 より x_0Rx_0 となり矛盾．よって $x_0 \in B$ となる．これは明らかに B の最大元である． ∎

(3) は，地道に場合分けをしていけば簡単に解けるので省略.

断面や切片の性質 I

Prop. 1.18

全順序クラス $\langle A, R\rangle$ の異なる二元は異なる断面を定める.

Proof.

$a, b \in A$ とする． $a \neq b \to A_a \neq A_b$ を示す．$a \neq b$ より，A が全順序クラスであることから，$a < b$ または $b < a$ が成立．$a < b$ として一般性を失わない．すると，定義より $a \in A_b$ であり，$\neg(aRa)$ であるので $a \notin A_a$．よって $A_a \neq A_b$． ∎

Prop. 1.19

$\langle A, R\rangle$: 全順序クラス, B, C : A の始切片
$\Rightarrow$ B は C の始切片 $\vee$ C は B の始切片

Proof.

断面や切片の性質 II

B が C の始切片でないとすると，C が B の始切片となることを示せば十分である．$B \subseteq C$ とする．$x \in C \subseteq A$ について $(\exists y \in B)xRy$ とすると，B が A の始切片であることから $c \in B$．よって B が C の始切片になってしまい矛盾．
よって $B \not\subseteq C$ であり，従って $(\exists x_0 \in B)x_0 \notin C$ となる．C が始切片であることから，$(\forall y \in C)\neg x_0Ry$ であり，特に全順序性より $(\forall y \in C)yRx_0$ となる．ここで $x_0 \in B$ と B が始切片であることから，$\forall y \in C(y \in B)$ である．つまり $C \subseteq B$ であり，C の条件から B でも始切片となる．よって示された． ∎

全順序集合の切片による特徴づけ

Exercise 1.20 (Hessenberg 1906)

$\langle a, r\rangle$: 全順序集合, t : a の始切片全体の集合
とする．このとき，t は次の性質を満たすことが知られている.

- (a) $u, v \in t \to u \subseteq v \vee v \subseteq u$
- (b) $\forall x \forall y(x, y \in a \wedge x \neq y \to (\exists u \in t)(x \in u \wedge y \notin u \vee x \notin u \wedge y \in u))$
- (c) $s \subseteq t \to \bigcup s \in t$
- (d) $s \subseteq t \to a \cap (\bigcap s) \in t$
  （a との共通部分を取っているのは $s = 0$ の場合の対処.）

さて，$(a), (b)$ を満たすどのような $t \in \mathfrak{P}(a)$ に対しても，a 上の全順序 r が一意に存在して t の各元が $\langle a, r\rangle$ の始切片となることを示せ．更に t が $(c), (d)$ を満たすとき，t は $\langle a, r\rangle$ の始切片全体と一致することを示せ.
このようにして，全順序集合 $\langle a, r\rangle$ は $t \in \mathfrak{P}a$ を用いて $\langle a, t\rangle$ として表現することが出来，$(c), (d)$ を加えれば一意に定まる.
$a = \{x, y\}$ のとき，t はどのようになるか？順序対 $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ と比較せよ.

証明 I

$(a), (b) \Rightarrow$ 全順序の証明.

$t \in \mathfrak{P}(a)$ が $(a), (b)$ を満たすとする時，r を次のように定める.

$$\langle x, y\rangle \in r \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists u \in t)(x \in u \wedge y \notin u)$$

すると，$\langle a, r\rangle$ は全順序集合となる．以下，$<= r$ と書く.

1. 非反射律． $\neg x < x$ は明らか.
2. 推移律．$x < y$ かつ $y < z$ とする．即ち，$u, v \in t$ があって $x \in u \wedge y \notin u \wedge y \in v \wedge z \notin v$ とする．(a) より $u \subseteq v$ または $v \subseteq u$．$v \subseteq u$ とすると $y \in u$ かつ $y \notin u$ となり矛盾．よって $u \subseteq v$ であり，従って $x \in u \subseteq v$ かつ $z \notin v$．$\therefore x < z$.
3. 比較可能性．$x = y$ なら OK．そこで $x \neq y$ とすると (b) と r の定義より従う.

∎

証明 II

t の元が $\langle a, <\rangle$ の始切片であること.

$b \in t$ とする．$x, y \in a$ について $x \in b$ かつ $y < x$ であるとする．$<$ の定義から，$(\exists u \in t)(y \in u \wedge x \notin u)$ となる．すると (a) より $u \subseteq b$ または $b \subseteq u$ となる．後者は $x \in b$ に矛盾するので $u \subseteq b$．$\therefore y \in u \subseteq b$ より $y \in b$．これは b が始切片であることに外ならない． ∎

以下，更に t が $(c), (d)$ を満たすとし，b を $\langle a, <\rangle$ の始切片とする．$b \in t$ となることを示す.
証明は b が最大元を持つ場合と持たない場合に分けて行われる.

証明 III

b が最大元を持たない場合.

b が最大元を持たないので，$(\forall x \in b)(\exists y \in b) x < y$ とできる．今，

$$s := \{ u \in t \mid (\exists x, y \in b)(x \in u \wedge y \notin u) \}$$

とおく．(c) より $\cup s \in t$ である．このとき $\cup s = b$ となることを示せばよい．
$x \in t$ とすると，b は最大元を持たないので，$<$ の定義から，$x \in u \wedge y \notin u$ となる $u \in t$ が少なくとも一つ存在する．s の定義より $u \in s$ となるので $x \in \cup s$．よって $b \subseteq \cup s$．
他方，$z \in \cup s$ とすると定義より $u \in t$，$x, y \in b$ があって，$x \in u \wedge y \notin u \wedge z \in u$．よって $<$ の定義より $z < y$ となり，b が切片であることから $z \in b$ となる．
よって示された． ∎

証明 IV

b が最大元を持ち，それが a の最大元と一致するとき.

a, b の最大元を x_0 と置く．b が切片であることから，$a = b$ となる．特に $0 \subseteq t$ かつ $a \cap (\cap 0) = a$ より $b = a \in t$ となり良い． ∎

b が最大元を持ち，それが a の最大元ではないとき.

$$s := \{ u \in t \mid (\exists y \in a)(x_0 \in u \wedge y \notin u) \}$$

とおく．このとき $a \cap (\cap s) = b$ となることを示せばよい．$\supseteq$ は明らか．$x \in \cap s$ とする．$x = x_0$ ならば良いので $x \neq x_0$ として $x < x_0$ を示せばよい．特に，$\langle a, r \rangle$ の全順序性から $x_0 \not< x$ を示せば十分である．$x_0 < x$ とする．定義より $v \in t$ があって $x_0 \in v \wedge x \notin v$ となる．この時 s の定義より $v \in s$ となる．すると $x \notin v$ より $x \notin \cap s$ となり矛盾．よって $x < x_0$ となる．
以上より，b が切片であることから $x \in b$ となる． ∎

証明 V

全順序集合 $\{x, y\}$ と $\langle x, y \rangle$ の比較.

$x < y$ としてよい．すると，$t = \{ 0, \{x\}, \{x, y\} \}$ となる．これは全ての始切片を含むし，(a) ∼ (d) を全て満たしている．
これは，ちょうど $\langle x, y \rangle = t \sim 0$ となっている． ∎

Rem. 1.21 (歴史)

このような全順序の表現は *Hessenberg 1906* による．後程，他の関係も統一的に表現出来る *Hausdorff 1914* に取って代わられた．

第二節 整列順序

整列クラスの条件：任意の部分集合が最小元を持つ．
部分クラスでないのは，基本言語を逸脱する表明になるため．
しかし，次の定理のような強力な最小元の原理が成り立つ！

Th. 2.1 (最小元の原理，超限帰納法)

$\langle A, R \rangle$ を整列クラスとすると，以下が成立．

1. 最小元の原理.
   $(\exists x \in A)\Phi(x)$ ならば，$\Phi(t)$ を満たす最小の t が一意に存在する．
2. （超限）帰納法.
   $(\forall x \in A)[\forall y(yRx \to \Phi(y)) \to \Phi(x)]$ が成立するなら，$(\forall x \in A)\Phi(x)$

(1) の証明.

$B = \{ x \in A \mid \Phi(x) \}$ として，B の最小元が存在することが示せればよい．条件より $B \neq 0$ なので，任意に $z \in B$ を一つとれる．これが最小元ならそれでよい．最小元でないとする．
$C = \{ y \in B \mid yRz \} \neq 0$ とすると，整列クラスの定義から A_z は集合なので，従って $C \subseteq A_z$ も集合．よって，C は A の非空部分集合なので，整列性から最小元を持つ．C の最小元が B の最小元であることは，容易に判る． ∎

(2) の証明.

帰納法の仮定を仮定する．このとき，$\neg\Phi(x)$ なる x が存在したとして矛盾を導く．(1) より，$\neg\Phi(t)$ なる最小の t が存在する．即ち，$\forall x(xRt \to \Phi(x))$ が成立する．すると帰納法の仮定から $\Phi(t)$ となり，これは矛盾．
よって任意の $x \in A$ について $\Phi(x)$ が成立． ∎

Prop. 2.2 (整列順序の上界による特徴づけ; Cantor 1897)

全順序クラス $\langle A, R \rangle$ が整列集合であることは，次の二つの条件を満たすことと同値．

a. 真に有界な $u \subseteq A$ が最小の上界を A に持ち（或いは「u は直後の元を A に持つ」「u の任意の元より大きな元全体は最小元を持つ」），
b. R は *left-narrow* である．

この定義は，Cantor がはじめて整列集合を導入したときの定義．

整列クラス ⇒ (a), (b) の証明.

(b) は定義より明らか．u を真に有界な A の部分集合とする．定義より

$$(\exists y \in A)(\forall x \in u) xRy$$

となる．すると，最小元の原理 (1) より，u は最小の狭義上界を持つことがわかる． ∎

$(a),(b) \Rightarrow$ 整列クラス の証明.

$0 \neq z \subseteq A$ とし，z が最小元を持つことを示せばよい．今，

$$U := \{\, x \in A \mid (\forall y \in z) xRy \,\}$$

とおく．$s \in z$ を任意の取ると，断面の定義から $U \subseteq A_s$ となり，A_s は left-narrow 性より集合なので U も集合となる．よって，(a) より U は直後の元 $t \in A$ を持つ．
z の各元は U の任意の元より大きいので，$(\exists a \in z)(aRt)$ とすると t の最小性に反する．よって全順序性より z の元は t 以上となる．
他方，$t \notin U$ より，U の定義から $(\exists y \in z)\neg(tRy)$ となる．再び全順序性から $(\exists y \in z)(y = t \vee yRt)$ となるが，上の議論より yRt は不適．よって $t \in z$ となる．この時，t は明らかに z の最小元である． ∎

整列集合の構造

- 有限全順序集合 $\Rightarrow$ 整列集合
- $\langle a, < \rangle$ を無限整列集合とする．
  1. $a \neq 0$ より最小元 a_0 が存在（これは 0 の後続元）．
  2. a_0 には後続元 a_1 がある．
  3. a_1 には……
     $\{a_0, a_1, \ldots\}$ と云う集合を作れる．$a = \{a_0, a_1, \ldots\}$ となる場合もある（$\mathbb{N}$ とか）．
  - 更に上に後続元があって，$\{\, a_0, a_1, \ldots, a_0^1, a_1^1, \ldots \,\}$ と続く場合もある（整数を $\{0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots\}$ と並べたものとか，$\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4} \ldots\}$ を並べたものなど）．
  - ⋆ もっと続けていくことも出来る．
  - 整列クラスの場合は，整列集合に良く似ているけど「更につづく」．この節の最後で意味はわかる．

整列クラスの始切片

Prop. 2.4

$\langle A, R \rangle$ を整列クラスとし，B をその始切片とする．
$\Rightarrow B = A$ であるか，または B は集合であって A の始断面となる．

証明の概略.

$B \neq A$ ならば B が A の始切片となることを示せばよい．最小元原理より $A \sim B$ には最小元 z_0 が存在する．このとき $B = A_{z_0}$ となることを示せばよいだけである． ∎

Exercise 2.5

命題 (2.4) の逆が成立すること，つまり $\langle A, R \rangle$ を任意の切片が断面となるような全順序クラスとするとき，これは整列クラスとなることを示せ．

Proof.

left-narrow 性は明らか．$0 \neq u \subseteq A$ をとり，これが最小元を持つことを示す．今，$v = \{\, y \in A \mid (\forall x \in u) yRx \,\}$ とおけば，v は A の始切片となる．よって命題 (1.18) より $(\exists! x_0 \in A) v = A_{x_0}$ と出来る．このとき，$(\forall x \in u) x_0 R x$ とすると $x_0 \in v = A_{x_0}$ となり矛盾．よって全順序性より，$(\exists x \in u)[x = x_0 \vee xRx_0]$ となる．xRx_0 とすると $x \in A_{x_0} = v$ となり定義に矛盾．よって $x = x_0$ となるので $x_0 \in u$.
今，$x' \in u$ があって $x' R x_0$ となったとすると，$x \in u$ かつ $x \in v$ となり矛盾．よって x_0 は u の最小元． ∎

Prop. 2.6

$\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$: 整列クラス
$F : \langle A, R \rangle$ の始切片から $\langle B, S \rangle$ の始切片への同型写像
$\Rightarrow (\forall x \in \mathrm{Dom}(F))[F \restriction A_x$は A_xから $B_{F(x)}$の上への同型写像$]$

概略.

1. $F : A_{x_0} \xrightarrow{\sim} A_{y_0}$ とする．
2. $x \in A_{x_0}$ に対して $F[A_x]$ が B の始切片であることを示す．
3. $F[A_x]$ が始切片なので，2.4 より始断面となる．そこで $F[A_x] = B_y$ とする．
4. 始断面を取る操作の単射性 (1.18) より，$zSy \leftrightarrow zSF(x)$ を示すことで，$y = F(x)$ を証明する．

∎

Prop. 2.7

T : クラス, R : 二項関係 が,

1. R は T の各元を整列する
2. $(\forall x, y \in T)[x$ が y の始切片 $\vee$ y が x の始切片$]$

の二条件を満たすならば，R は $\cup T$ を整列する．

Proof.

$0 \neq z \subseteq \cup T$ が最小元を持つことを示す．$a \in z$ を取り，これが z の最小元ならばよい．
最小元でないとする．$a \in \cup T$ よりある $s \in T$ があって $a \in s$ とできる．このとき $z_a = \{\, b \in z \mid bRa \,\}$ を考えると，$z_a \subseteq s$ となる．これを示すために，$c \in z_a$ とする．このとき再び定義から $t \in T$ により $c \in t$ と出来る．このとき条件 (2) から $s \subseteq t$ または $t \subseteq s$ が成立する．最初の場合は $a \in s$ かつ cRa より s が始切片であることから $c \in s$. また後者の場合も $c \in t \subseteq s$ より OK.
よって $z_a \subseteq s$.
すると，特に R は $s \subseteq A$ を整列するので，$z_a \subseteq s$ には最小元が存在する．これは明らかに z の最小元となっている． ∎

Exercise 2.8

2.7 の条件 (2) を $x \subseteq y \vee y \subseteq x$ に緩めても同様のことが云えるか？

解.

云えない．例えば
$T = \{\, \{-n, -(n-1), \dots, 0, \dots, n-1, n\} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ を考えると，
T の各元は通常の順序 $<$ について全順序かつ有限集合なので，
$<$ は T の各元を整列する．よって (1) および弱い (2) は成立．
しかし $\mathbb{Z}$ は $<$ について整列集合ではない． ∎

帰納法による函数定義

集合論の強力な武器の一つに整列クラス上の帰納的定義がある．
$\langle A, R\rangle$ を整列クラスとして，函数 F の x における振舞いを，A_x での F の値に依存して決定したい．これを精密化すると

$$F(x) = \tau(F \restriction A_x)$$

と云う要請になる．x に陽に依存する形で $F(x) = \tau(x, F \restriction A_x)$ としてもよいが，$A \sim \mathrm{Dom}(F \restriction A_x)$ の最小元として x が得られるので，これは省ける．

帰納定理による定義

Th. 2.9 (von Neumann 1923, von Neumann 1928a)

$\langle A, R\rangle$: 整列クラス, τ :
集合・クラス変数を含むかもしれない集合項
$\Rightarrow$ 次を満たす函数 F が一意に存在する．

$$(\forall x \in A) F(x) = \tau(F \restriction A_x) \tag{1}$$

証明の outline.

(1) が F の取るべき値を表しているが，F は集合ではなくクラスなので，具体的なクラス項を与える必要がある．次のようにする．

1. F, F' を A の始切片上で定義され (1) を満たす函数とする．このとき F, F' が両立することを超限帰納法により示す．
2. すると，特に A は A 自身の切片なので，定理の主張する F が一意に定まることが判る．
3. T を A の切片上で定義された函数 f で (1) を満たすもの全体とする（これらの函数は特に集合）．$I.6.30(ii)$ より $\cup T$ は集合となるので，$F = \cup T$ とする．
4. F が (1) を見たすことを示す．
5. $\mathrm{Dom}(F) = A$ を示す．$\mathrm{Dom}(F) \neq A$ とし，h を $\mathrm{Dom}(F)$ の直後の元まで定義域を拡張した函数とする．このとき $h \in T$ を示して矛盾を導く．

∎