集合論ゼミ 2012年12月18日

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科三年

2012年12月18日

演習問題

Exercise 3.10

$\mathfrak{P}(X)$ が推移的 $\Leftrightarrow X$ が推移的

Proof.

- ($\Leftarrow$) について．X が推移的であり $z \in y \in \mathfrak{P}(X)$ として $z \in \mathfrak{P}(X)$ を示す．$y \in \mathfrak{P}(X)$ より $z \in y \subseteq X$．すると X の推移性より $z \subseteq X$．よって $z \in \mathfrak{P}(X)$ となるのでよい．
- ($\Rightarrow$) について．$\mathfrak{P}(X)$ が推移的であるとし，$y \in X \rightarrow y \subseteq X$ を示す．$y \in X$ とすると特に $y \in \{y\} \in \mathfrak{P}(X)$ であり，$\mathfrak{P}(X)$ の推移性から $y \in \mathfrak{P}(X) \Leftrightarrow y \subseteq X$ となる．

∎

以下，ギリシア文字 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta, \zeta$ は順序数を表わすものと約束する．

Prop. 3.11

順序数の任意の元は順序数である．

Proof.

$x \in \alpha$ として，x が推移的で $\in$ によって整列されることを示せばよい．
α が順序数であることから，特に推移的集合である．よって $x \subseteq \alpha$ となる．$\in$ は α を整列するので，その部分集合 x も整列する．
x が推移的であることを示そう．$z \in y \in x$ とする．$x \subseteq \alpha$ に注意すれば，$z, y, x \in \alpha$ となる．よって，$\in$ が α 上の整列順序であること，特に推移律が成り立つことから $z \in x$ となる．よって OK． ∎

Th. 3.12

$\in$ は順序数全体のクラス On を整列する．

Proof.

全順序であることをまず示す．$\alpha \in \alpha$ とすると，α の中で非反射律を破るような元 α が取れてしまうので，$\in$ は非反射的である．
また，$\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma$ とすると，γ の推移性より $\alpha \in \gamma$ となるので推移律も成立する．$\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ とし，$\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$ となることを示す．$\alpha \cap \beta$ を考えると，これは推移的であり特に α, β の始切片となっている．定義より順序数 η の始切片は η 自身かその元に等しい．そこで $\gamma \in \alpha, \delta \in \beta$ として，次のいずれかが成立する．
$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta, \alpha = \alpha \cap \beta = \delta, \gamma = \alpha \cap \beta = \beta, \gamma = \alpha \cap \beta = \delta$．最後の場合は有り得ず，最初の三つの場合がそれぞれ
$\alpha = \beta, \alpha \in \beta, \beta \in \alpha$ に対応する．
整列性．$0 \neq s \subseteq \mathrm{On}$ とする．このとき $\alpha \in s$ が最小元ならそれでよい．もしそうでないとすると $s \cap \alpha \subseteq \alpha$ の $\alpha, \in$ に関する最小元を取れば，これが s の最小元となっていて，また $\in$ は left-narrow となる． ∎

On の整列性の別証

Exercise 3.13

次のようにして 3.12 に別証を与えよ．

1. 任意の空でない $A \subseteq \mathrm{On}$ が $\in$-極小元を持つことを示し，
2. $\forall \alpha \forall \beta (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha)$ を示す．

$\in$-極小元の存在.

極小元を持たないような $0 \neq A \subseteq \mathrm{On}$ が存在したとする．即ち，$(\forall \alpha \in A)(\exists \beta \in A) \beta \in \alpha$ が成立するような A が存在したとする．すると $\alpha \cap A \neq 0$ であり，$\alpha \cap A \subseteq \alpha$ より α が順序数であることから $\alpha \cap A$ には $\in$-極小元 $\beta \in \alpha \cap A$ が存在する．A が極小元を持たないことから，$(\exists \gamma \in A) \gamma \in \beta$ となる．よって，$\gamma \in \beta \in \alpha$ となり，α の推移性から $\gamma \in \alpha \cap A$ となる．これは β が $\alpha \cap A$ の極小元であることに矛盾． ∎

比較可能性.

成立しなかったとする．そこで，

$$A = \{\, \alpha \in \mathrm{On} \mid \neg(\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha) \,\}$$

とおくと，これは空ではない．すると，上の議論より A には $\in$-極小元が存在する．特に，少なくとも二つ以上の極小元が存在することが判る．実際，α の一つしか存在しないとすると，
$(\forall \beta \in A) \beta = \alpha \vee \alpha \in \beta$ となり α は任意の元と比較可能となってしまい矛盾する．
そこで，α, β を異なる二つの $\in$-極小元とする．このとき特に両者は比較不能である．しかし，$\alpha \cap \beta$ を考えれば，前の古い証明の比較可能性の証明より α, β は比較可能となり矛盾する． ∎

Prop. 3.14

A : 順序数から成る空でないクラス $\Rightarrow \cap A$ は A の最小元

Proof.

最小元原理より $\alpha = \min A$ が存在する．このとき，
$(\forall \beta \in \alpha) \beta = \alpha \vee \alpha \in \beta$ が成立する．特に，各 β は推移的であるので，$(\forall \beta \in \alpha) \beta = \alpha \vee \alpha \subseteq \beta$ となるから，従って $\alpha = \cap A$． ∎

Prop. 3.15

On は真のクラスである．

Proof.

Burali-Forti を用いる． ∎

Prop. 3.16

順序数からなる推移的集合は再び順序数となる．特に 0 は順序数である．

Proof.

$a \subseteq \mathrm{On}$ が推移的であるとする．a が $\in$ によって整列されることが云えればよい．今，$\langle \mathrm{On}, \in \rangle$ は整列クラスなので，その部分集合である $\langle a, \in \rangle$ も整列集合である． ∎

Prop. 3.17

x : 順序数からなる集合 $\Rightarrow \cup x$ は順序数であり，x の最小上界となる．
よって，任意の順序数の集合は有界であり，非有界な順序数のクラスは真のクラスとなる．

Proof.

順序数となること．x の各元は順序数であり，特に推移的かつ順序数からなるので命題 3.9 より $\cup x$ は推移的で，順序数のみから成る．よって 3.16 より $\cup x$ は順序数となる．
上界であること．$\alpha \in x$ とする．$\in$ が On 上の全順序であり，$\cup x$ が順序数であることから，$(\forall \alpha \in x) \cup x \notin \alpha$ を示せばよい．$\alpha \in x$ とすれば，$\beta \in \alpha \to \beta \in \cup x$ となるので $\alpha \subseteq \cup x$．今，$\cup \in \alpha$ とすると，α の推移性から $\cup x \subseteq \alpha$．以上より $\alpha = \cup x$ となり，$\alpha \in \alpha$ となるが，これは α が順序数であることに矛盾．∎

Prop. 3.18

順序数 α について $\alpha \cup \{\alpha\}$ も順序数であり，特に α の後続元である．即ち，$\alpha < \beta < \alpha \cup \{\alpha\}$ となるような順序数 β は存在しない．

Proof.

$\alpha \cup \{\alpha\}$ は順序数からなる推移的な集合であるので順序数であることはよい．
$\alpha < \beta < \alpha \cup \{\alpha\}$ となるような β が存在したとすると，
$\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$ より $\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha$ となる．しかしこれは $\alpha \in \beta$ に矛盾．∎

Def. 3.19

$\{0\}$ を 1，$\{0,1\}$ を 2 と表わし，以下同文に $3, 4, \ldots, 9$ とする．
0 は最小の順序数である．

今までの議論より整列クラス上の帰納法や帰納的定義を On に適用出来て次を得る．

Th. 3.20 (最小順序数原理)

$\exists \alpha \Psi(\alpha)$ ならば $\Psi(\alpha)$ を満たす最小の α が存在する．

Th. 3.21 (帰納法)

$\forall \alpha((\forall \beta < \alpha)\Psi(\beta) \to \Psi(\alpha)) \to \forall \alpha \Psi(\alpha)$

Th. 3.22 (帰納的定義)

1. $\tau(x)$: 集合項 が与えられたとき，On 上の一意な函数 F が存在して，任意の順序数 α に対し次を満たす：

$$F(\alpha) = \tau(F \restriction \alpha)$$

2. $\tau(u, x)$: 集合項 が与えられたとき，$V \times \mathrm{On}$ 上の一意な函数 F が存在して，任意の順序数 α に対し次を満たす：

$$F(u, \alpha) = \tau(u, F_u \restriction \alpha)$$

ここで，$F_u = \langle F(u, \alpha) \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$

「順序数」の正当化

Prop. 3.23

任意の整列集合 $\langle a, r \rangle$ に対し，それと同型となる一意な順序数 α が存在する．また，任意の真の整列クラスは $\langle \mathrm{On}, \in \rangle$ と同型である．

Proof.

On は真のクラスであるので，2.18 より $\langle a, r \rangle$ は On の断面と同型となる．On の断面は順序数であるので，従って命題が成立する．∎

順序数函数の定義

先の議論により，順序数としての定義をすることが出来る．

Def. 3.24 (順序数)

整列集合全体のクラス上の函数 Ord を次で定義する．

$$\mathrm{Ord}(\langle a, r \rangle) = \langle a, r \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle \text{ となる一意な順序数} \alpha$$

このとき，$\mathrm{Ord}(\langle a, r \rangle)$ は $\langle a, r \rangle$ の順序数であると云う．特に，$a \subseteq \mathrm{On}$ のときは $\mathrm{Ord}(a) = \mathrm{Ord}(\langle a, \in \rangle)$ と略記する．

Cor. 3.25

$\langle a, r \rangle \cong \langle b, s \rangle \Leftrightarrow \mathrm{Ord}(\langle a, r \rangle) = \mathrm{Ord}(\langle b, s \rangle)$

Cor. 3.26

$\mathrm{Ord}(\langle a, r \rangle) < \mathrm{Ord}(\langle b, s \rangle) \Leftrightarrow \langle a, r \rangle$ は $\langle b, s \rangle$ の断面に同型

Prop. 3.27

$a \subseteq \alpha \to \mathrm{Ord}(\langle a, < \rangle) \leq \alpha$

Def. 3.28

$x \subseteq \mathrm{On}$ とする．

- $\sup x := x$ の最小上界 ($\overset{3.17}{=} \cup x$)
- $\sup^+ x := x$ の最小狭義上界

また，$0 \neq A \subseteq \mathrm{On}$ のとき，

- $\min A := A$ の最小元 ($\overset{3.14}{=} \cap A$)
- $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \alpha_1, \ldots, \alpha_n$の最大元

また，$\tau(x)$ が $\forall x \in u(\tau(x) \in \mathrm{On})$ を満たすとき：

- $\sup_{x \in u} \tau(x) = \sup\{\tau(x) \mid x \in u\}$
- $\sup^+_{x \in u} \tau(x) = \sup^+\{\tau(x) \mid x \in u\}$

Prop. 3.29

$$u : \text{集合} \quad \tau_1(x), \tau_2(x) : \text{項} \quad (\forall x \in u) \begin{cases} \tau_1(x), \tau_2(x) \in \mathrm{On} \\ \tau_1(x) \leq \tau_2(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sup_{x \in u} \tau_1(x) \leq \sup_{x \in u} \tau_2(x) \\ \sup^+_{x \in u} \tau_1(x) \leq \sup^+_{x \in u} \tau_2(x) \end{cases}$$

Proof.

$\sup$ についての普通の議論を繰り返せばよいだけ．∎

Example. (狭義単調増加に出来ない例)

$u = \omega = \{0, 1, 2, \ldots\}, \tau_1(\alpha) = \alpha, \tau_2(\alpha) = \alpha + 1$ とおくと，$\tau_1(\alpha) < \tau_2(\alpha)$ だが，$\sup_{\alpha < \omega} \tau_1(\alpha) = \omega = \sup_{\alpha < \omega} \tau_2(\alpha)$ となる（詳しい証明や説明は後程）．

後続順序数と極限順序数

Def. 3.30 (後続順序数と極限順序数)

1. αが後続順序数 $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\beta(\alpha = \beta \cup \{\beta\})$
   この β は 3.18 より一意に決まり，α の直前の順序数と呼ぶ．
2. αが極限順序数 $\overset{\text{def}}{\iff} \alpha \neq 0 \wedge \alpha$は後続順序数ではない

これにより，順序数は次の三つのクラスに分類される事になる．

- 0 のみからなるクラス
- 後続順序数
- 極限順序数

まだ極限順序数の存在は示していない（後で示す）．

準備

Prop. 3.31

$x \subseteq \mathrm{On}$ とする．

- x が最大元を持たない $\Rightarrow \sup x = \sup^+ x = 0$ *or* 極限順序数．
- x が最大元αを持つ $\Rightarrow \sup x = \alpha \wedge \sup^+ x = \alpha \cup \{\alpha\}$

Proof.

二番目については明らか．最初を示す．
$x = 0$ の場合は $\sup 0 = \sup^+ 0 = 0$ となるので明らか．$x \neq 0$ かつ x が最大元を持たないとする．$\sup^+ x = \alpha + 1$ と書けたとする．すると $\sup^+ x$ の最小性より $\alpha \in x$ となるが，これは明らかに x の最大元となるので矛盾．よって $\sup^+ x$ は極限順序数となる．$\sup x < \sup^+ x$ とすると，$\sup x \in x$ となりこれも最大元になってしまい矛盾．よって示された． ∎

Prop. 3.32

α : 極限順序数, $\beta < \alpha \Rightarrow \exists\gamma(\beta < \gamma < \alpha)$
特に $\beta < \beta \cup \{\beta\} < \alpha$.

Prop. 3.33

- $\alpha = 0$，極限順序数 $\Rightarrow \sup \alpha = \alpha$
- α後続順序数 $\Rightarrow \sup \alpha = \alpha$の直前 $\wedge \sup^+ \alpha = \alpha$

いずれも明らかなので証明は略．

順序数の帰納法と帰納的定義 I

先程，順序数は三つのクラスに分けられることを見た．順序数の性質を帰納法で示す際，それぞれの場合に異なる論法を使って場合分けで証明することがよくある．

Prop. 3.34 (帰納法)

$$\begin{cases} \Phi(0) \\ \forall\beta(\Phi(\beta) \to \Phi(\beta \cup \{\beta\})) \\ (\forall\lambda : \text{極限順序数})(\forall\gamma(\gamma < \lambda \to \Phi(\gamma)) \to \Phi(\lambda)) \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall\Phi(\alpha)$

順序数の帰納法と帰納的定義 II

Exercise 3.35 (帰納的定義)

$\tau_1, \tau_2(\alpha, u), \tau_3(f)$: 項 とするとき，次を満たすような On 上の函数 F が一意的に存在する．

$$\begin{cases} F(0) = \tau_1 \\ F(\beta \cup \{\beta\}) = \tau_2(\beta, F(\beta)) \\ F(\lambda) = \tau_3(F \restriction \lambda) & (\lambda : \text{極限順序数}) \end{cases}$$

いずれも証明は易しい．

4. 自然数と有限列 I

Def. 4.1 (自然数，有限順序数)

αが有限順序数または自然数

$\overset{\text{def}}{\iff} \alpha = 0 \vee \alpha$は後続順序数で,$(\forall\beta < \alpha)(\beta = 0 \vee \beta$は後続順序数$)$

以後，特に断わらない限り i, k, k, ℓ, m, n は自然数を表す変数であるとする．

Prop. 4.2

1. 0 は自然数
2. n が自然数 $\to n \cup \{n\}$ も自然数
3. n : 自然数 $\wedge\, \alpha < n \to \alpha$も自然数

4. 自然数と有限列 II

Proof.

1. 定義．
2. n が自然数より，$n = 0$ であるか，n は後続順序数であって $(\forall\alpha < n)\alpha$は極限順序数でない が成立している．$n \cup \{n\}$ は後続順序数であるので，$\alpha < n \cup \{n\}$ が空集合であるか後続順序数であることを云えればよい．$\alpha \in n$ の場合は条件より OK．$\alpha = n$ の場合も良い．よって成立．
3. 定義より $\alpha = 0$ であるか α は後続順序数．α 未満の元は n 未満の元でもあり，従って 0 であるか後続順序数である．よって α も自然数．

∎

自然数に関する帰納法

Th. 4.3 (数学的帰納法)

$\Phi(0) \wedge \forall n(\Phi(n) \to \Phi(n \cup \{n\})) \to \forall n\Phi(n)$

Proof.

順序数に関する帰納法 3.34 により，αが自然数 $\to \Phi(\alpha)$ を示せばよい．$\alpha = 0$ の場合は最初の仮定から成立する．$\alpha = \beta \cup \beta$ の場合は，帰納法の仮定

$$(\forall\beta < \alpha)(\beta\text{が自然数} \to \Phi(\beta))$$

と二番目の仮定を組み合わせて，$\Phi(\beta \cup \{\beta\})$ が云える．よって良い． ∎

自然数に関する帰納的定義

Th. 4.4

二つの函数 H, J に対し，$V \times \{ n \mid n \text{は自然数} \}$ 上の一意な函数 F が存在し，任意の u と自然数 n について次を満たす．

$$F(u, 0) = H(u)$$
$$F(u, n \cup \{ n \}) = J(u, n, F(u, n))$$

Proof.

$$\tau(u, f) = \begin{cases} H(u) & (\mathrm{Dom}(f) = 0) \\ J(u, \beta, f(\beta)) & (\mathrm{Dom}(f) = \beta \cup \{ \beta \}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とおいて，順序数に関する帰納的定義を用いればよい．∎

自然数の加法

これを用いて，自然数の加法を定義することが出来る．

Def. 4.5 (自然数の加法)

自然数上に帰納的に

$$m + 0 = m$$
$$m + (n \cup \{ n \}) = (m + n) \cup \{ m + n \}$$

によって加法を定める．

先の定理に寄せて書けば，$H(m) = m, J(m, n, j) = j \cup \{ j \}$ と置いて適用したもの．

後続元と加法

Prop. 4.6

$m + 1 = m \cup \{ m \}$

Proof.

$m + 1 = m + (0 \cup \{ 0 \}) = (m + 0) \cup \{ m + 0 \} = m \cup \{ m \}$ ∎

Rem. 4.7

以下，m の後続元 $m \cup \{ m \}$ を $m + 1$ と略記することにする．この記法を用いることで，加法の定義の二つめの節は次のように書き直すことが出来る．

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1$$

自然数の加法の性質 I

Prop. 4.8 (自然数の加法の結合性)

$(k + m) + n = k + (m + n)$

Proof.

自然数の加法の性質 II

n に関する帰納法で示す．

1. $n = 0$ のとき．$(k + m) + 0 = k + m = k + (m + 0)$
2. $n + 1$ について．帰納法の仮定は，

$$(k + m) + n = k + (m + n)$$

である．然るに，

$$\begin{aligned} (k + m) + (n + 1) &= ((k + m) + n) + 1 && (\because \text{定義}) \\ &= (k + (m + n)) + 1 && (\because \text{帰納法仮定}) \\ &= k + ((m + n) + 1) && (\because \text{定義}) \\ &= k + (m + (n + 1)) && (\because \text{定義}) \end{aligned}$$

よって示された．∎

自然数の加法の性質 III

Exercise 4.9

1. (加法の可換性) $m + n = n + m$
2. $\ell \neq 0 \to n + \ell > n$
3. $n > k \to \exists \ell (n = k + \ell)$

証明の概略.

1. まず $1 + n = n + 1$ を帰納法によって示した後，n に関する帰納法で示す．$n = 0$ の場合に m に関する帰納法も使う．
2. ℓ に関する帰納法でやるだけ．
3. n に関する帰納法

∎

自然数の加法の性質 IV

以下，自然数に関する加減乗除は良く知っているものとして扱う．特に，$n - 1$ によって n の直前の自然数を表すと，これは普通の減法と両立する．