全ての実数の集合を Lebesgue 可測にする

〜 Solovay モデル入門〜

@mr_konn

2024-0xAC

alg-d チャンネル

本日の話題

本日の話題

任意の実数の集合

を

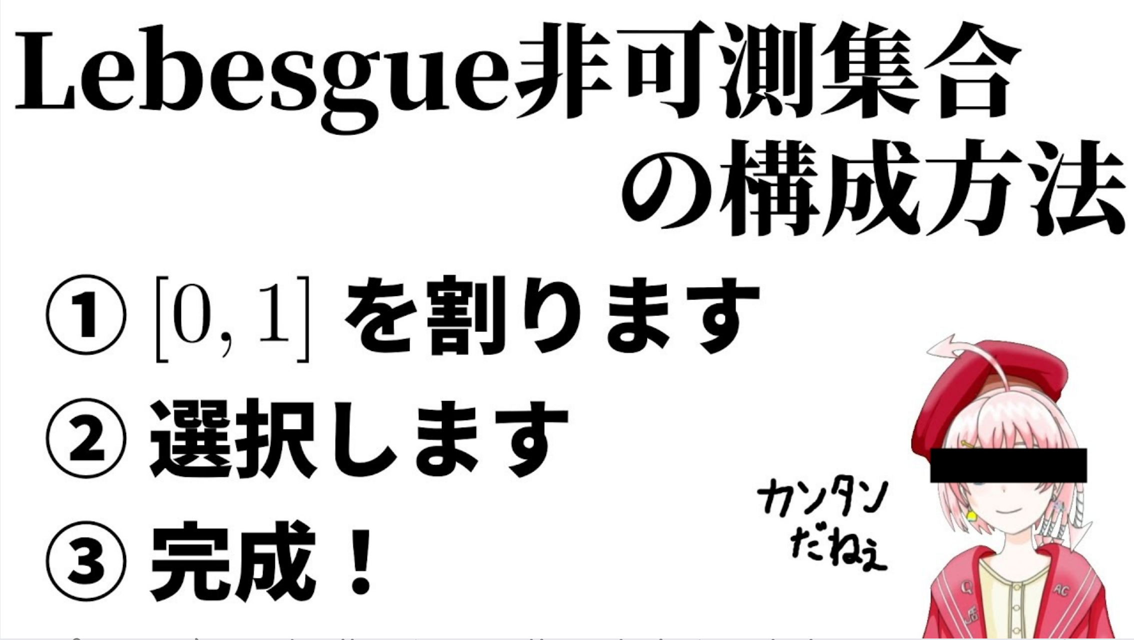
Lebesgue 可測

にします！

？？？

？？？

非可測集合あるやろがい



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
    1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
  - 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない
    - Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
  - 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない
    - Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます
  - 今回は選択公理を諦めます（Solovay [1]）。

選択公理を諦めます

※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

でも ……

でも
「外側」の宇宙
では
選択公理を認めます

選択公理を認めます

※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

Solovay モデル

定理 1 (Solovay 1970 [1])

V を ZFC の宇宙、κ を到達不能基数、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大とするとき、$V[G]$ で見た内部モデル HOD^{ω} は $\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \mathrm{LM}$ のモデルとなる。

ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
  - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
  - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙」$V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが……

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙」$V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが……

(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると……

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
  - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります
(3) 「大きな宇宙」$V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが……
(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると……
  - そこには可測集合しかありません！
    - 必然的に選択公理も破れている

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
   - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 V[G]」を創ります
(3) 「大きな宇宙」V[G] は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが……
(4) V[G] の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると……
   - そこには可測集合しかありません！
     - 必然的に選択公理も破れている
   - 従属選択公理はなりたっているので、ある程度マトモな解析学はできます

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙」$V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが ……

(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると ……
- そこには可測集合しかありません！
  - 必然的に選択公理も破れている
- 従属選択公理はなりたっているので、ある程度マトモな解析学はできます
- うれしい ✌('ω'✌)三✌('ω')✌三(✌'ω')✌

今回の範囲

- Solovay モデルの構成は、修士なら一年くらいかけて理解する内容
  - 強制法・内部モデルの理解に半年、Solovay モデルの理解に半年くらい
- 今回は厳密さにある程度目を瞑って、雰囲気の理解を目標にする
  - しっかりやるのが大変なので、強制法についてはブラックボックスにします

記号と前提知識の確認

定義 2

- Borel 集合：開集合から補集合・可算和・可算共通部分を繰り返し取って得られる実数の集合。全体を $\mathcal{B}$ で表す。
- 以下、μ を Lebesgue 測度、μ^* を Lebesgue 外測度とし、零集合イデアル null を $\mathrm{null} := \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid \mu^*(A) = 0 \}$ により定める。
- 集合 A, B の対称差集合を次で定める：$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- 実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が Lebesgue 可測 $\overset{\text{def}}{\iff}$ ある Borel 集合 $B \in \mathcal{B}$ が存在して、$A \triangle B \in \mathrm{null}$
  - 演習問題：「いつもの」Lebesgue 可測性の定義との同値性を示せ

集合の宇宙と内部モデル、　強制法

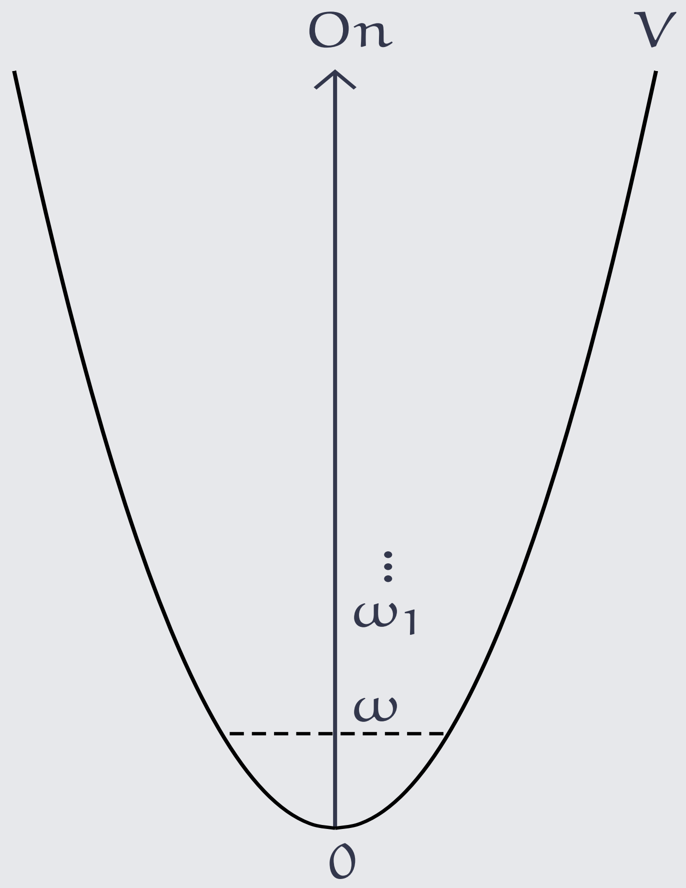
ところで

皆さんは

宇宙の本当の姿

ご存知ですか？

こちらです



On
V
⋮
ω_1
ω
0

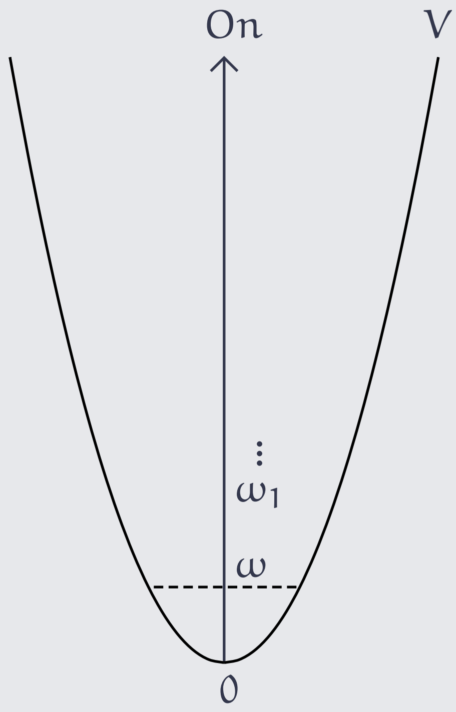
集合の宇宙

- 集合の宇宙 V：集合全体の成すクラスのこと
  - 集合論の公理系は、集合の宇宙 V の性質を定めている。
- V は順序数全体のクラス On に沿って空集合から繰り返し冪集合を取って得られる：

$$V_0 := \emptyset, \quad V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha), \quad V_\gamma := \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha \ (\gamma : \text{limit}),$$

$$V := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$$

- 順序数：整列順序の順序型。$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ などで表す。順序数全体を On と書く。$\alpha + 1$ の形の順序数を後続順序数、それ以外を極限順序数と呼ぶ。



基数について

- 基数：全単射の同型型。選択公理の下では「それ未満の順序数からの全射がない順序数」として定義される。基数は $\kappa, \lambda, \theta, \ldots$ などで表す。
  - （この後 AC の成り立たないモデルを創るが、そこでの基数を扱うことはないので気にしなくてよい）
- 基数の全体は整列されており On と同型になる。そこで、無限基数を小さい順に $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$ または $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \ldots$ と書く。
- 順序数 α より大きな最小の基数を κ^+ で表し、κ の後続基数と呼ぶ。
- $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ の形の無限基数を後続基数、そうでないものを極限基数と呼ぶ。
- 基数 κ に対し、$2^\kappa := \left|\mathcal{P}(\kappa)\right|$ を κ の冪と呼ぶ。
  - ω_α や κ^+, 2^κ は宇宙にどういう集合があるのかによって値がかわる！
  - 実際、強制法や内部モデルを考えると結構自在に変えられる

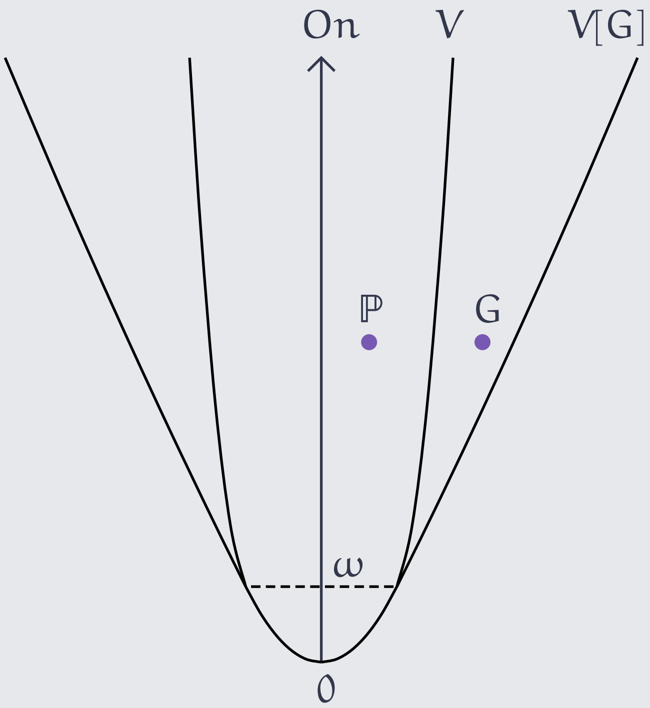
強制法

- **強制法**：宇宙 V に**新たな元 G** を付加した最小の外側の宇宙・**強制拡大 V[G]** を創る技術
  - G $\notin$ V であっても、G の「近似」全体が成す**擬順序** $\mathbb{P}$ は V にあるので、それを使って議論する
- V[G] は、$\mathbb{P}$- 値集合の宇宙 $V^{\mathbb{P}}$ を G で割った物：

$$V_0^{\mathbb{P}} := \emptyset, \quad V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} := \mathcal{P}(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}), \quad V_\gamma^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha^{\mathbb{P}},$$

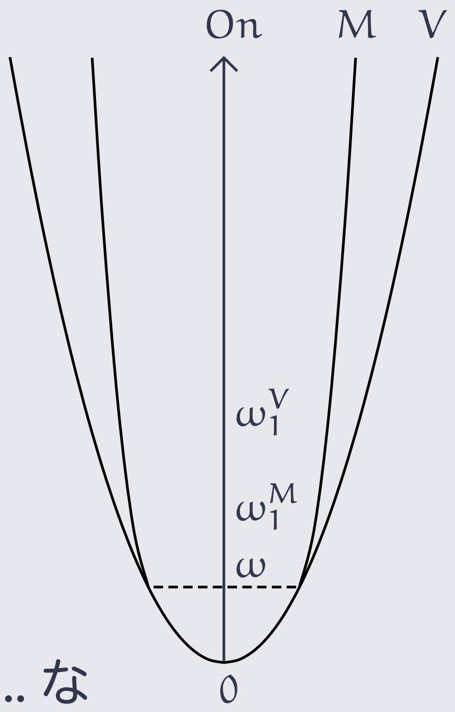
$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha\in \mathrm{On}} V_\alpha^{\mathbb{P}}, \qquad V[G] \cong V^{\mathbb{P}}/G$$

  - V が AC を満たすなら、V[G] も AC を満たす



内部モデル

- クラス M が V の内部モデル： V の内側にあり、V と同じ高さで、ZF のモデルとなるある種のクラス
  - 例：強制拡大 V[G] から見て V は内部モデル
  - V, M の一方で AC が成立しても他方では破れ得る
- 内部モデルと外側のモデルとでは、 種々の概念が一致したりしなかったりする
  - 一致する概念：任意の有限集合、ω、 自然数全体、 有理数全体、「α は順序数である」「個別の x は実数である」、etc（実は推移モデルの間なら不変）
  - 変わり得る概念： 2^κ、「順序数 α は基数である」、$\omega_1, \omega_2, \ldots$ など基数の具体的な値、 実数の全体、etc



内部モデル／強制拡大間の Borel 集合性・測度の保存

- 集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が Borel 集合かどうかは、モデル間で一致するとは限らない
  - 例：新しい実数を追加すると、V の開集合が新しい宇宙ではそうでなくなる
- それでも、内部モデルの Borel 集合 B の「レシピ」（Borel コード）が与えられたら、外部モデルでも対応する Borel 集合 $B^* \supseteq B$ を創れる
  - 内側の宇宙で可算なら外側の宇宙でも可算なので、基本開集合の一覧やそこから補集合・可算和・共通部分を取るレシピは外側宇宙でも有効
    - 内部モデルの Borel 集合 B のコードを、外側で解釈した Borel 集合を B^* と書く
  - 但し、外の宇宙の Borel コードが内部モデルでも通用するとは限らない
    - 例：V の $2^{\aleph_0}$ を可算に潰すと、$V[G]$ では V に属する全ての集合が Borel に
- Borel 集合の測度の一致：$B \in M$ が M で Borel なら、$\mu(B) = \mu(B^*)$。

ここまでのまとめ

- **強制法**：新たな理想元を足して、横に宇宙を広げる方法
- **内部モデル**：今の宇宙を横に狭めた内側に存在する、小さな宇宙
- 強制拡大・V・内部モデルの間で有限性、有理数の全体、順序数などは一致するが、個別の基数の値や実数の全体はは一致するとは限らない
  - 内側の宇宙で実数なら、外側の宇宙でも実数
- $\mathbb{R}, \mathcal{B}$ などのモデルでの値を、右肩添え字で $\mathbb{R}^V, \mathcal{B}^M, \omega_1^{V[G]}$ などと表す
- モデルによってある集合が Borel 集合かどうかは変わってしまう
  - それでも **Borel 集合のレシピ**を考えると、内側の宇宙の Borel 集合 B を外側に持ち上げた集合 B^* が得られる
  - B と B^* を同一視すれば、Borel 集合の Lebesgue 測度の値も保たれる

強制法・内部モデルとランダム実数

なぜ
こんなものを
考えるのか？

強制法・内部モデルの意義

- **無矛盾性証明のため**：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる

強制法・内部モデルの意義

- 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - Solovay は、ZF + DC + LM を満たす宇宙を ZFC + 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した

強制法・内部モデルの意義

- 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - Solovay は、ZF + DC + LM を満たす宇宙を ZFC + 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
  - 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に ZF + DC + LM のモデルからはじめて、内部モデル $L[z]$ をみるとそこでは外側の ω_1 が到達不能に見えていることを示し、ZF + DC + LM に到達不能基数は本質的に必要ということを示した

強制法・内部モデルの意義

- 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - Solovay は、ZF + DC + LM を満たす宇宙を ZFC + 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
  - 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に ZF + DC + LM のモデルからはじめて、内部モデル L[z] をみるとそこでは外側の ω_1 が到達不能に見えていることを示し、ZF + DC + LM に到達不能基数は本質的に必要ということを示した
- Solovay の定理固有の嬉しさ：「可測になってくれる集合」の証拠になるような内部モデルを考えて議論できる！

強制法・内部モデルの意義

- 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - Solovay は、ZF + DC + LM を満たす宇宙を ZFC + 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
  - 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に ZF + DC + LM のモデルからはじめて、内部モデル L[z] をみるとそこでは外側の ω_1 が到達不能に見えていることを示し、ZF + DC + LM に到達不能基数は本質的に必要ということを示した
- Solovay の定理固有の嬉しさ：「可測になってくれる集合」の証拠になるような内部モデルを考えて議論できる！
  - 内部モデル上のランダム実数および Solovay 集合の概念が重要！

ランダム実数

定義 3

M を V の内部モデルとする。実数 x が M 上ランダム $\overset{\text{def}}{\iff}$ M に属するどんな測度零な Borel 集合 $N \in \mathcal{B}^M$ についても $x \notin N^*$

注意 4

x が M 上ランダムなら $x \notin M$。

- x が M 上ランダム $\iff$ x は M から見ると一点なのに正の測度を持つ
- ネタバレ：Solovay のモデルは、ある意味で「ほとんど至るところランダム」になるように作られる

ほとんど至るところランダム

補題 5

$M \subseteq N$ を $\left(2^{\aleph_0}\right)^M < \aleph_1^N$ となるような内部モデルとするとき、N の実数はほとんど至るところ M 上ランダムである。

証明：$\bigcup\left\{ A^* \mid A \in \mathrm{null}^M \right\}$ が零集合であることを示せばよい。

1. Borel 集合は連続体濃度個あるので、M の Borel 集合は $\left(2^{\aleph_0}\right)^M$ 個ある
2. $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ より $\mathrm{null}^M = \{ A_n \mid n < \omega \}$ と列挙できる
3. 測度は不変なので $\mu(A_n^*) = 0$。よって可算加法性より $\mu\left(\bigcup_n A_n^*\right) = 0$

なるほど

で、
至る所ランダムで
何が嬉しいの？

A. Solovay 集合

Solovay 集合：ランダム部分を Borel 近似できる集合

補題 6

M を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たす内部モデルとする。実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が M 上 Solovay なら、次が成立：

$$\exists B \in \mathcal{B} \ \forall x \in \mathbb{R} : M\text{上ランダム} \ [x \in A \iff x \in B]$$

- A が M 上の Solovay 集合 $\iff$ ランダム実数 x に対し、x が A に属するかどうか M のパラメータと x に関する論理式を使って $M[x]$ で判定できる
  - $M[x]$： $M \cup \{x\}$ を部分クラスとして含む最小の ZF のモデル（常にある）
  - 実際にはもうちょっと厳しい定義（x の条件や「判定」をどこでするかなど）だが、テクニカルなので立ち入らない
- 補題 6 の証明には強制法を使う。知っていれば簡単だが、今回は省略

Solovay 集合なら Lebesgue 可測になる！

- 前の二つの補題を合わせれば……：

系 7

M を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たす内部モデルとする。$A \subseteq \mathbb{R}$ が M 上 Solovay なら、A は Lebesgue 可測である。

Proof.

補題 6 より、Borel 集合 B があって、A はランダム実数上 B と一致する。補題 5 より実数は至るところ M 上ランダムなので、$A \triangle B \in \mathsf{null}$ を得る。

- あとは「各々そういう M 上で Solovay な実数の集合」だけを持つようなモデルが取れればよい！

構成要件

1. どんな実数の集合も、それぞれ $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たすような内部モデル M が取れて M 上 Solovay になるような宇宙が欲しい
2. ZFC のモデル V から始めるので、これは V の強制法拡大 $V[G]$ そのものではなく、その内部モデル $M \subseteq V[G]$ である必要がある
3. しかも、Solovay 性は $V[G]$ の方で判断し、したがって可測性も $V[G]$ で見たものになる。なので、M における $\mathbb{R}$ や Borel 集合の全体 $\mathcal{B}$ は $V[G]$ のものと一致している必要がある
   - Borel 集合の全体は連続体濃度個なので、$\mathbb{R}$ が M と $V[G]$ で一致していればよい

$\rightsquigarrow$(2), (3) を満たすのに良さそうな内部モデルが HOD^ω

遺伝的に順序数の ω- 列で定義可能なクラス HOD^ω

定義 8

- 集合 A が順序数の ω- 列で定義可能（記号：$A \in \mathrm{OD}^\omega$）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 論理式 $\varphi(x, s)$ と順序数の可算列 $z \in {}^\omega\mathrm{On}$ があって、$A = \{\, x \mid \varphi(x, z) \,\}$
- 集合 A が遺伝的に順序数の ω- 列で定義可能（記号：$A \in \mathrm{HOD}^\omega$）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A は自身や元、元の元 …… を含め OD^ω な集合だけでできている

- Solovay 性はランダム実数（実は任意のジェネリック実数）についての定義式が取れるという話だったので、結構 HOD^ω 性は近そうに見える

HOD^{ω}の性質

HOD^{ω} の構成は既にあるものを集めてくるという形をとっているので、どのモデル内で HOD^{ω} を取っているのかによって内容がかわってくる

事実 9

M を $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ のモデルとするとき、M で見た HOD^{ω} は $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ の内部モデルとなる

注意 10

実数は $\{0,1\}$ の可算列で表現出来るので、$(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$ の実数と $V[G]$ の実数は一致する。特に $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V}[G]$ に属する実数の集合については、$V[G]$ でみても $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$ でみても可測性は一致する！

よい強制法の選択： Levy 崩壊 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$

あとは良い強制法を選んで $V[G]$ を取り、そこでの HOD^ω に属す実数の集合が以下を満たすようになっていればよい：

- HOD^ω に属する実数の集合 A が何らかの（A によって異っていてもよい）M 上で Solovay になる
- そんな M は $V[G]$ でみると $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1^{V[G]}$ を満たしている

結論から言うと、到達不能基数 κ を ω_1 に潰す Levy 崩壊 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ がちょうどこれに最適！

Levy 崩壊と到達不能基数

Levy 崩壊

定義 11

κ を正則基数とする。Levy 崩壊 $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$ を次で定める：

$$\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa) := \prod_{\omega<\alpha<\kappa}^{<\aleph_0} {}^{<\omega}\alpha$$
$$:= \left\{ f \;\middle|\; f : \text{関数}, |f| < \aleph_0, \mathrm{dom}(f) \subset \omega, \mathrm{ran}(f) \subset \alpha < \kappa \right\}$$

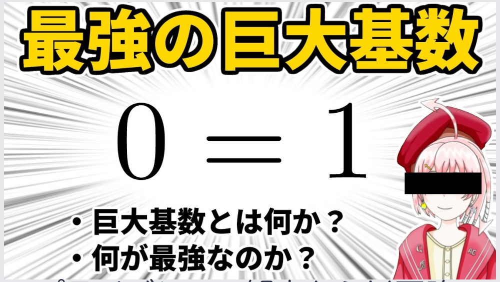
- 直観： $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$ は ω と κ の間の全ての順序数に、ω からの全射を足して可算にしちゃう
- 特に、κ が到達不能基数のとき、$\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大をした宇宙では κ は ω_1 になっている

到達不能基数

定義 12

- 順序数 α の共終数を次で定める： $\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{\,|A| \mid A \subseteq \alpha, \sup(A) = \alpha\,\}$
- 基数 κ が正則 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$。正則でない基数を特異基数と呼ぶ。
  - κ が正則 $=$ κ は小さな基数で「近似」できない
  - 例： $\aleph, \aleph_1, \dots, \aleph_{\alpha+1}$ は正則基数。$\aleph_\omega, \aleph_{\omega_1}$ などは特異基数。
- κ が強極限基数 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall\lambda < \kappa\ \ 2^\lambda < \kappa$
- κ が到達不能基数 $\overset{\text{def}}{\iff}$ κ は正則かつ強極限基数。
  - κ は小さい列で近似できないし、冪について閉じている。到達不能基数の存在は Grothendieck 宇宙の存在と同値。

到達不能基数と巨大基数



※ プライバシーの観点から以下略

- 到達不能基数は、巨大基数と呼ばれるものの一種
  - 巨大基数： ZFC の無矛盾性を導くほど大きい基数
  - 今回の LM のような命題の強さを測る物差し
- κ を到達不能とすると、V_κ が ZFC のモデルになる
  - しかも κ 未満の順序数で ZFC のモデルになるような V_α が非有界に存在する
- 到達不能基数はまだ弱く、「小さな巨大基数」と呼ばれる物の代表例
  - 「大きな巨大基数」は真偽を保つ V の中への同型 $V \prec M \subseteq V$ で定義される
- 最強巨大基数公理： $0 = 1$。AC の下で Reinhardt 基数 $V \prec V$ の存在と同値
  - $0 = 1$ 自身は単なる矛盾なので単に「巨大基数」と呼ぶと厳密には怒られる
  - AC がない状態で Reinhardt 基数が矛盾するかは未解決問題

Levy 崩壊の基本性質

補題 13 (Levy 崩壊の基本性質)

κ を正則基数とし、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大とする。

1. V の基数 $\omega < \lambda < \kappa$ は、$V[G]$ では可算順序数となり基数ではない。
2. $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大で成り立つ命題は、$G$ の取り方に依存せず、V で完全に計算できる。

以下、更に κ が到達不能基数とする。

3. κ は $V[G]$ においても基数のままで、$\kappa = \omega_1^{V[G]}$。
4. $V[G]$ の可算列 $f \in {}^{\omega}V[G]$ に対し、正則基数 $\lambda < \kappa$ があり $f \in V[G \restriction \lambda]$。即ち $V[G]$ の可算列は途中の $\lambda < \kappa$ まで潰す段階で付加されている。
5. 任意の $\lambda < \kappa$ について、κ は $V[G \restriction \lambda]$ でも到達不能基数である。
6. $x \in V[G]$ が $V[G \restriction \lambda]$ 上ランダムなら、$V[G]$ は $V[G \restriction \lambda][x]$ の $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大になる。

目標の復習：

任意の実数の集合

$$A \in (\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$$

に対し

$V[G]$ の内部モデル M で

$$(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1^{V[G]}$$

かつ

A: M 上 Solovay

となるものを探す！

Levy 崩壊後の HOD^{ω} に属す実数の集合は Solovay

- 以下、κ を到達不能基数、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大とする。
- 補題 13 を認めると、$(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$ に属する任意の実数の集合 A が、系 7 の前提を満たすような M 上で Solovay になることが言える！

1. HOD^{ω} の定義より $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On} \cap V[G]$ が取れ $A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x, \sigma) \,\}$。
2. 補題 13 (4) より、正則基数 $\lambda < \kappa$ が取れて $\sigma \in V[G \restriction \lambda]$ となる。
3. (3)(5) より $M := V[G \restriction \lambda]$ で κ は到達不能なので $(2^{\aleph_0})^{V[G \restriction \lambda]} < \kappa = \aleph_1^{V[G]}$。
4. (2)(6) より M- ランダム実数 x に対し「$x \in A$」$\Longleftrightarrow$「任意の $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大で $\varphi(x, \sigma)$ が成り立つ」という $M[x]$ 内の論理式で書ける。
5. 以上より A は $M = V[G \restriction \lambda]$ 上 Solovay で $(2^{\aleph_0})^{M} < \aleph_1$ ！

まとめと一般化

Solovay モデルでの解析学

急速フィルター：可測性から到達不能基数へ

まとめ

References

[1] R. M. Solovay, “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable,” *The Annals of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 92, no. 1, July 1970, doi:10.2307/1970696.

[2] S. Shelah, “Can You Take Solovay's Inaccessible Away?” *Israel Journal of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 48, no. 1, 1984, doi:10.1007/BF02760522.