

# 全ての実数の集合を Lebesgue 可測にする ～ Solovay モデル入門～

@mr\_\_konn

2024-0xAC

alg-d チャンネル

本日の話題

本日の話題

# 任意の実数の集合 を Lebesgue 可測 にします！

???

---

???

## Lebesgue非可測集合 の構成方法

- ①  $[0, 1]$  を割ります
- ② 選択します
- ③ 完成！



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

# 非可測集合の作り方

---

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

# 非可測集合の作り方

---

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....

# 非可測集合の作り方

---

◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合**の「構成」は次のようだった：

1. **選択公理**： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
2. **平行移動不変性**：可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....



# 非可測集合の作り方

---

◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合**の「構成」は次のようだった：

1. **選択公理**：  $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
2. **平行移動不変性**： 可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....
3. **可算加法性**： 可算個の  $X$  で  $\mathbb{R}$  が覆えて  $\mu(\mathbb{R}) = 0$  となり矛盾！

▶ （他の非可測集合の例は alg\_d の動画がいっぱいあるね）

# 非可測集合の作り方

---

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....
  3. 可算加法性：可算個の  $X$  で  $\mathbb{R}$  が覆えて  $\mu(\mathbb{R}) = 0$  となり矛盾！
  - ▶ （他の非可測集合の例は alg\_d の動画がいっぱいあるね）
- ◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

# 非可測集合の作り方

---

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....
  3. 可算加法性：可算個の  $X$  で  $\mathbb{R}$  が覆えて  $\mu(\mathbb{R}) = 0$  となり矛盾！
  - ▶ (他の非可測集合の例は alg\_d の動画がいっぱいあるね)
- ◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - ▶ 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない

# 非可測集合の作り方

---

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....
  3. 可算加法性：可算個の  $X$  で  $\mathbb{R}$  が覆えて  $\mu(\mathbb{R}) = 0$  となり矛盾！
  - ▶ (他の非可測集合の例は alg\_d の動画がいっぱいあるね)
- ◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - ▶ 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
  - ▶ 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない
    - Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます

# 非可測集合の作り方

---

- ◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合** の「構成」は次のようだった：
  1. **選択公理**： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
  2. **平行移動不変性**：可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....
  3. **可算加法性**：可算個の  $X$  で  $\mathbb{R}$  が覆えて  $\mu(\mathbb{R}) = 0$  となり矛盾！
  - ▶ (他の非可測集合の例は `alg_d` の動画がいっぱいあるね)
- ◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - ▶ **可算加法性** は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
  - ▶ **平行移動不変性** の成り立たない測度を測度と呼びたくない
    - Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます
  - ▶ 今回は **選択公理** を諦めます (Solovay [1])。

# 選択公理を諦めます



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

でも .....

---

でも  
「外側」の宇宙  
では  
選択公理を認めます

# 選択公理を認めます



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています



# Solovay モデル

## 定理 1 (Solovay 1970 [1])

$V$  を ZFC の宇宙、 $\kappa$  を到達不能基数、 $V[G]$  を  $\text{Col}(\omega, <\kappa)$ -強制拡大とするとき、 $V[G]$  で見た内部モデル  $\text{HOD}^\omega$  は  $\text{ZF} + \text{DC} + \text{LM}$  のモデルとなる。  
ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

# どゆこと？

---

- (1) まず普通に選択公理を仮定します

# どゆこと？

---

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

# どゆこと？

---

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります

# どゆこと？

---

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
  - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$  は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが .....

# どゆこと？

---

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
  - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが .....
- (4)  $V[G]$ の内側の「小宇宙  $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると .....

# どゆこと？

---

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
  - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが .....
- (4)  $V[G]$ の内側の「小宇宙  $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると .....
  - ▶ そこには可測集合しかありません！
    - 必然的に選択公理も破れている

# どゆこと？

---

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
  - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが .....
- (4)  $V[G]$ の内側の「小宇宙  $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると .....
  - ▶ そこには可測集合しかありません！
    - 必然的に選択公理も破れている
  - ▶ 従属選択公理はなりたっているなので、ある程度マトモな解析学はできます



# どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
  - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$  は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが .....
- (4)  $V[G]$  の内側の「小宇宙  $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると .....
  - ▶ そこには可測集合しかありません！
    - 必然的に選択公理も破れている
  - ▶ 従属選択公理はなりたっているなので、ある程度マトモな解析学はできます
  - ▶ うれしい  $\text{♯}(' \omega' \text{♯}) \equiv \text{♯}(' \omega') \equiv \text{♯} \text{♯}(' \omega') \text{♯}$

# 今回の範囲

---

- ◆ Solovay モデルの構成は、修士なら一年くらいかけて理解する内容
  - ▶ 強制法・内部モデルの理解に半年、Solovay モデルの理解に半年くらい
- ◆ 今回は厳密さにある程度目を瞑って、**雰囲気**の理解を目標にする
  - ▶ しっかりやるのが大変なので、強制法についてはブラックボックスにします

# 記号と前提知識の確認

## 定義 2

- ◆ **Borel 集合**：開集合から補集合・可算和・可算共通部分を繰り返し取って得られる実数の集合。全体を  $\mathcal{B}$  で表す。
- ◆ 以下、 $\mu$  を Lebesgue 測度、 $\mu^*$  を Lebesgue 外測度とし、**零集合イデアル**  $\text{null}$  を  $\text{null} := \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid \mu^*(A) = 0 \}$  により定める。
- ◆ 集合  $A, B$  の**対称差集合**を次で定める： $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- ◆ 実数の集合  $A \subseteq \mathbb{R}$  が **Lebesgue 可測**  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  ある Borel 集合  $B \in \mathcal{B}$  が存在して、 $A \triangle B \in \text{null}$ 
  - ▶ **演習問題**：「いつもの」Lebesgue 可測性の定義との同値性を示せ

# 集合の宇宙と内部モデル、 強制法

集合の宇宙と内部モデル、 強制法

---

ところで

---

皆さんは  
宇宙の本当の姿  
ご存知ですか？

---

# こちらです





# 集合の宇宙

- ◆ 集合の宇宙  $V$  : 集合全体の成すクラスのこと
  - ▶ 集合論の公理系は、集合の宇宙  $V$  の性質を定めている。
- ◆  $V$  は順序数全体のクラス  $On$  に沿って空集合から繰り返し冪集合を取って得られる :

$$V_0 := \emptyset, \quad V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha), \quad V_\gamma := \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha \quad (\gamma : \text{limit}),$$

$$V := \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$$

- ◆ 順序数 : 整列順序の順序型。  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  などで表す。 順序数全体を  $On$  と書く。  $\alpha + 1$  の形の順序数を後続順序数、それ以外を極限順序数と呼ぶ。



# 基数について

- ◆ **基数**：全単射の同型型。選択公理の下では「それ未満の順序数からの全射がない順序数」として定義される。基数は  $\kappa, \lambda, \theta, \dots$  など表す。
  - ▶ (この後 AC の成り立たないモデルを創るが、そこでの基数を扱うことはないので気にしないでよい)
- ◆ 基数の全体は整列されており  $\mathcal{O}_n$  と同型になる。そこで、**無限基数**を小さい順に  $\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \dots$  または  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \dots$  と書く。
- ◆ 順序数  $\alpha$  より大きな最小の基数を  $\kappa^+$  で表し、 $\kappa$  の**後続基数**と呼ぶ。
- ◆  $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$  の形の無限基数を**後続基数**、そうでないものを**極限基数**と呼ぶ。
- ◆ 基数  $\kappa$  に対し、 $2^\kappa := |\mathcal{P}(\kappa)|$  を  $\kappa$  の**冪**と呼ぶ。
  - ▶  $\omega_\alpha$  や  $\kappa^+$ ,  $2^\kappa$  は宇宙にどういう集合があるのかによって値が変わる！
  - ▶ 実際、**強制法**や**内部モデル**を考えると結構自在に変えられる

# 強制法

- ◆ 強制法：宇宙  $V$  に新たな元  $G$  を付加した最小の外側の宇宙・強制拡大  $V[G]$  を創る技術

- ▶  $G \notin V$  であっても、 $G$  の「近似」全体が成す擬順序  $\mathbb{P}$  は  $V$  にあるので、それを使って議論する

- ◆  $V[G]$  は、 $\mathbb{P}$ -値集合の宇宙  $V^{\mathbb{P}}$  を  $G$  で割った物：

$$V_0^{\mathbb{P}} := \emptyset, \quad V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} := \mathcal{P}(V_{\alpha}^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}), \quad V_{\gamma}^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha < \gamma} V_{\alpha}^{\mathbb{P}},$$

$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_{\alpha}^{\mathbb{P}}, \quad V[G] \cong V^{\mathbb{P}} / G$$

- ▶  $V$  が AC を満たすなら、 $V[G]$  も AC を満たす



# 内部モデル

- ◆ クラス  $M$  が  $V$  の内部モデル：  $V$  の内側にあり、 $V$  と同じ高さで、ZF のモデルとなるある種のクラス
  - ▶ 例：強制拡大  $V[G]$  から見て  $V$  は内部モデル
  - ▶  $V, M$  の一方で AC が成立しても他方では破れ得る
- ◆ 内部モデルと外側のモデルとでは、種々の概念が一致したりしなかったりする
  - ▶ 一致する概念：任意の有限集合、 $\omega$ 、自然数全体、有理数全体、「 $\alpha$  は順序数である」「個別の  $x$  は実数である」、etc (実は推移モデルの間なら不変)
  - ▶ 変わり得る概念： $2^{\kappa}$ 、「順序数  $\alpha$  は基数である」、 $\omega_1, \omega_2, \dots$  など基数の具体的な値、実数の全体、etc



# 内部モデル／強制拡大間の Borel 集合性・測度の保存

- ◆ 集合  $A \subseteq \mathbb{R}$  が Borel 集合かどうかは、モデル間で一致するとは限らない
  - ▶ 例：新しい実数を追加すると、 $V$  の開集合が新しい宇宙ではそうでなくなる
- ◆ それでも、内部モデルの Borel 集合  $B$  の「レシピ」（Borel コード）が与えられたら、外部モデルでも対応する Borel 集合  $B^* \supseteq B$  を創れる
  - ▶ 内側の宇宙で可算なら外側の宇宙でも可算なので、基本開集合の一覧やそこから補集合・可算和・共通部分を取るレシピは外側宇宙でも有効
    - 内部モデルの Borel 集合  $B$  のコードを、外側で解釈した Borel 集合を  $B^*$  と書く
  - ▶ 但し、外の宇宙の Borel コードが内部モデルでも通用するとは限らない
    - 例： $V$  の  $2^{\aleph_0}$  を可算に潰すと、 $V[G]$  では  $V$  に属する全ての集合が Borel に
- ◆ Borel 集合の測度の一致：  $B \in M$  が  $M$  で Borel なら、 $\mu(B) = \mu(B^*)$ 。

# ここまでのまとめ

- ◆ **強制法**：新たな理想元を足して、横に宇宙を広げる方法
  - ◆ **内部モデル**：今の宇宙を横に狭めた内側に存在する、小さな宇宙
  - ◆ 強制拡大・ $V$ ・内部モデルの間で有限性、有理数の全体、順序数などは一致するが、個別の基数の値や実数の全体は一致するとは限らない
    - ▶ 内側の宇宙で実数なら、外側の宇宙でも実数
  - ◆  $\mathbb{R}, \mathcal{B}$  などのモデルでの値を、右肩添え字で  $\mathbb{R}^V, \mathcal{B}^M, \omega_1^{V[G]}$  などと表す
  - ◆ モデルによってある集合が Borel 集合かどうかは変わってしまう
    - ▶ それでも **Borel 集合のレシピ**を考えると、内側の宇宙の Borel 集合  $B$  を外側に持ち上げた集合  $B^*$  が得られる
    - ▶  $B$  と  $B^*$  を同一視すれば、Borel 集合の Lebesgue 測度の値も保たれる
- 集合の宇宙と内部モデル、 強制法

# 強制法・内部モデルとランダム実数

強制法・内部モデルとランダム実数

---

なぜ  
こんなものを  
考えるのか？



# 強制法・内部モデルの意義

---

- ◆ 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる

# 強制法・内部モデルの意義

---

- ◆ 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - ▶ Solovay は、 $ZF + DC + LM$  を満たす宇宙を  $ZFC +$  到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した

# 強制法・内部モデルの意義

- ◆ 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - ▶ Solovay は、 $ZF + DC + LM$  を満たす宇宙を  $ZFC +$  到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
  - ▶ 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に  $ZF + DC + LM$  のモデルからはじめて、内部モデル  $L[z]$  をみるとそこでは外側の  $\omega_1$  が到達不能に見えていることを示し、 $ZF + DC + LM$  に到達不能基数は本質的に必要ということを示した

# 強制法・内部モデルの意義

- ◆ 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - ▶ Solovay は、 $ZF + DC + LM$  を満たす宇宙を  $ZFC +$  到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
  - ▶ 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に  $ZF + DC + LM$  のモデルからはじめて、内部モデル  $L[z]$  をみるとそこでは外側の  $\omega_1$  が到達不能に見えていることを示し、 $ZF + DC + LM$  に到達不能基数は本質的に必要ということを示した
- ◆ Solovay の定理固有の嬉しさ：「可測になってくれる集合」の証拠になるような内部モデルを考えて議論できる！

# 強制法・内部モデルの意義

- ◆ 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - ▶ Solovay は、 $ZF + DC + LM$  を満たす宇宙を  $ZFC +$  到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
  - ▶ 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に  $ZF + DC + LM$  のモデルからはじめて、内部モデル  $L[z]$  をみるとそこでは外側の  $\omega_1$  が到達不能に見えていることを示し、 $ZF + DC + LM$  に到達不能基数は本質的に必要ということを示した
- ◆ Solovay の定理固有の嬉しさ：「可測になってくれる集合」の証拠になるような内部モデルを考えて議論できる！
  - ▶ 内部モデル上のランダム実数および Solovay 集合の概念が重要！

# ランダム実数

## 定義 3

$M$  を  $V$  の内部モデルとする。実数  $x$  が  $M$  上ランダム  $\stackrel{\text{def}}{\iff} M$  に属するどんな測度零な Borel 集合  $N \in \mathcal{B}^M$  についても  $x \notin N^*$

## 注意 4

$x$  が  $M$  上ランダムなら  $x \notin M$ 。

- ◆  $x$  が  $M$  上ランダム  $\iff x$  は  $M$  から見ると一点なのに正の測度を持つ
- ◆ ネタバレ： Solovay のモデルは、ある意味で「ほとんど至るところランダム」になるように作られる

# ほとんど至るところランダム

## 補題 5

$M \subseteq N$  を  $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1^N$  となるような内部モデルとすると、 $N$  の実数はほとんど至るところ  $M$  上ランダムである。

証明：  $\bigcup \{ A^* \mid A \in \text{null}^M \}$  が零集合であることを示せばよい。

1. Borel 集合は連続体濃度個あるので、 $M$  の Borel 集合は  $(2^{\aleph_0})^M$  個ある
2.  $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$  より  $\text{null}^M = \{ A_n \mid n < \omega \}$  と列挙できる
3. 測度は不変なので  $\mu(A_n^*) = 0$ 。よって可算加法性より  $\mu\left(\bigcup_n A_n^*\right) = 0$

---

なるほど



---

で、  
至る所ランダムで  
何が嬉しいの？

---

# A. Solovay 集合

# Solovay 集合：ランダム部分を Borel 近似できる集合

## 補題 6

$M$  を  $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$  を満たす内部モデルとする。実数の集合  $A \subseteq \mathbb{R}$  が  $M$  上 Solovay なら、次が成立：

$$\exists B \in \mathcal{B} \quad \forall x \in \mathbb{R} : M\text{上ランダム} \quad [x \in A \iff x \in B]$$

- ◆  $M$  上の Solovay 集合  $A$  の気持ち：ランダム実数  $x$  に対して、 $x$  が  $A$  に属するかどうか  $M$  のパラメータと  $x$  に関する論理式を使って「判定」できる
  - ▶ 実際にはもうちょっと厳しい定義 ( $x$  の条件や「判定」をどこでするかなど) だが、テクニカルなので立ち入らない
- ◆ 補題 6 の証明には強制法を使う。知っていれば簡単だが、今回は省略

# Solovay 集合なら Lebesgue 可測になる！

- ◆ 前の二つの補題を合わせれば ..... :

系 7

$M$  を  $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$  を満たす内部モデルとする。 $A \subseteq \mathbb{R}$  が  $M$  上 Solovay なら、 $A$  は Lebesgue 可測である。

Proof.

補題 6 より、Borel 集合  $B$  があって、 $A$  はランダム実数上  $B$  と一致する。補題 5 より実数は至るところ  $M$  上ランダムなので、 $A \triangle B \in \text{null}$  を得る。

- ◆ あとは「各々そういう  $M$  上で Solovay な実数の集合」だけを持つようなモデルが取ればよい！

# 構成要件

1. どんな実数の集合も、それぞれ  $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$  を満たすような内部モデル  $M$  が取れて  $M$  上 Solovay になるような宇宙が欲しい
  2. ZFC のモデル  $V$  から始めるので、これは  $V$  の強制法拡大  $V[G]$  そのものではなく、その内部モデル  $M \subseteq V[G]$  である必要がある
  3. しかも、Solovay 性は  $V[G]$  の方で判断し、したがって可測性も  $V[G]$  で見たものになる。なので、 $M$  における  $\mathbb{R}$  や Borel 集合の全体  $\mathcal{B}$  は  $V[G]$  のものと一致している必要がある
    - ▶ Borel 集合の全体は連続体濃度個なので、 $\mathbb{R}$  が  $M$  と  $V[G]$  で一致していればよい
- (2), (3) を満たすのに良さそうな内部モデルが  $\text{HOD}^\omega$

# 遺伝的に順序数の $\omega$ -列で定義可能なクラス $\text{HOD}^\omega$

## 定義 8

- ◆ 集合  $A$  が順序数の  $\omega$ -列で定義可能 (記号:  $A \in \text{OD}^\omega$ )  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  論理式  $\varphi(x, s)$  と順序数の可算列  $z \in {}^\omega \text{On}$  があって、 $A = \{x \mid \varphi(x, z)\}$
- ◆ 集合  $A$  が遺伝的に順序数の  $\omega$ -列で定義可能 (記号:  $A \in \text{HOD}^\omega$ )  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$   $A$  は自身や元、元の元 ..... を含め  $\text{OD}^\omega$  な集合だけでできている
- ◆ Solovay 性はランダム実数 (実は任意のジェネリック実数) についての定義式が取れるという話だったので、結構  $\text{HOD}^\omega$  性は近そうに見える

# $\text{HOD}^\omega$ の性質

$\text{HOD}^\omega$  の構成は既にあるものを集めてくるという形をとっているので、どのモデル内で  $\text{HOD}^\omega$  を取っているのかによって内容がかわってくる

## 事実 9

$M$  を  $\text{ZF} + \text{DC}$  のモデルとするとき、 $M$  で見た  $\text{HOD}^\omega$  は  $\text{ZF} + \text{DC}$  の内部モデルとなる

## 注意 10

実数は  $\{0, 1\}$  の可算列で表現出来るので、 $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$  の実数と  $V[G]$  の実数は一致する。特に  $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$  に属する実数の集合については、 $V[G]$  でみても  $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$  でみても可測性は一致する！

## よい強制法の選択： Levy 崩壊 $\text{Col}(\omega, <\kappa)$

あとは良い強制法を選んで  $V[G]$  を取り、そこでの  $\text{HOD}^\omega$  に属す実数の集合が以下を満たすようになっていればよい：

- ◆  $\text{HOD}^\omega$  に属する実数の集合  $A$  が何らかの ( $A$  によって異っていてもよい)  $M$  上で Solovay になる
- ◆ そんな  $M$  は  $V[G]$  でみると  $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1^{V[G]}$  を満たしている

結論から言うと、到達不能基数  $\kappa$  を  $\omega_1$  に潰す Levy 崩壊  $\text{Col}(\omega, <\kappa)$  がちょうどこれに最適！



# Levy 崩壊と到達不能基数

Levy 崩壊と到達不能基数

# Levy 崩壊

## 定義 11

$\kappa$  を正則基数とする。Levy 崩壊  $\text{Col}(\omega, <\kappa)$  を次で定める：

$$\begin{aligned}\text{Col}(\omega, <\kappa) &:= \prod_{\omega < \alpha < \kappa}^{<\aleph_0} <^\omega \alpha \\ &:= \{ f \mid f : \text{関数}, |f| < \aleph_0, \text{dom}(f) \subset \omega, \text{ran}(f) \subset \alpha < \kappa \}\end{aligned}$$

- ◆ 直観：  $\text{Col}(\omega, <\kappa)$  は  $\omega$  と  $\kappa$  の間の全ての順序数に、 $\omega$  からの全射を足す
- ◆ 特に、 $\kappa$  が到達不能基数のとき、 $\text{Col}(\omega, <\kappa)$ - 強制拡大をした宇宙では  $\kappa$  は  $\omega_1$  になっている

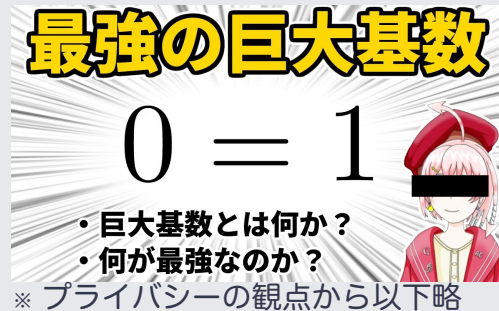
# 到達不能基数

## 定義 12

- ◆ 順序数  $\alpha$  の共終数を次で定める：  $cf(\alpha) = \min\{ |A| \mid A \subseteq \alpha, \sup(A) = \alpha \}$
- ◆ 基数  $\kappa$  が正則  $\stackrel{\text{def}}{\iff} cf(\kappa) = \kappa$ 。正則でない基数を特異基数と呼ぶ。
  - ▶  $\kappa$  が正則  $= \kappa$  は小さな基数で「近似」できない
  - ▶ 例：  $\aleph, \aleph_1, \dots, \aleph_{\alpha+1}$  は正則基数。 $\aleph_\omega, \aleph_{\omega_1}$  などは特異基数。
- ◆  $\kappa$  が強極限基数  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \lambda < \kappa \ 2^\lambda < \kappa$
- ◆  $\kappa$  が到達不能基数  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \kappa$  は正則かつ強極限基数。
  - ▶  $\kappa$  は小さい列で近似できないし、冪について閉じている。到達不能基数の存在は Grothendieck 宇宙の存在と同値。

# 到達不能基数と巨大基数

- ◆ 到達不能基数は、**巨大基数**と呼ばれるものの一種
  - ▶ **巨大基数**：ZFC の無矛盾性を導くほど大きい基数
  - ▶ 今回の LM のような命題の強さを測る物差し
- ◆  $\kappa$  を到達不能とすると、 $V_\kappa$  が ZFC のモデルになる
  - ▶ しかも  $\kappa$  未満の順序数で ZFC のモデルになるような  $V_\alpha$  が非有界に存在する
- ◆ 到達不能基数はまだ弱く、「小さな巨大基数」と呼ばれる物の代表例
  - ▶ 「大きな巨大基数」は真偽を保つ  $V$  の中への同型  $V \prec M \subseteq V$  で定義される
- ◆ 最強巨大基数公理： $0 = 1$ 。AC の下で Reinhardt 基数  $V \prec V$  の存在と同値
  - ▶  $0 = 1$  自身は単なる矛盾なので単に「巨大基数」と呼ぶと厳密には怒られる
  - ▶ AC が無い状態で Reinhardt 基数が矛盾するかは未解決問題



# Levy 崩壊の基本性質

## 補題 13

$\kappa$  を正則とし、 $V[G]$  を  $\text{Col}(\omega, < \kappa)$ - 強制拡大とする。

# Solovay モデルでの解析学

Σ<sub>1</sub><sup>1</sup> 完全性定理の証明

急速フィルター：可測性から到達不能基数へ

まとめ

まとめ



# References

---

- [1] R. M. Solovay, “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable,” *The Annals of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 92, no. 1, July 1970, doi:10.2307/1970696.
- [2] S. Shelah, “Can You Take Solovay's Inaccessible Away?” *Israel Journal of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 48, no. 1, 1984, doi:10.1007/BF02760522.