全ての実数の集合を Lebesgue 可測にする

〜 Solovay モデル入門〜

@mr_konn

2024-0xAC

alg-d チャンネル

本日の話題

本日の話題

任意の実数の集合

を

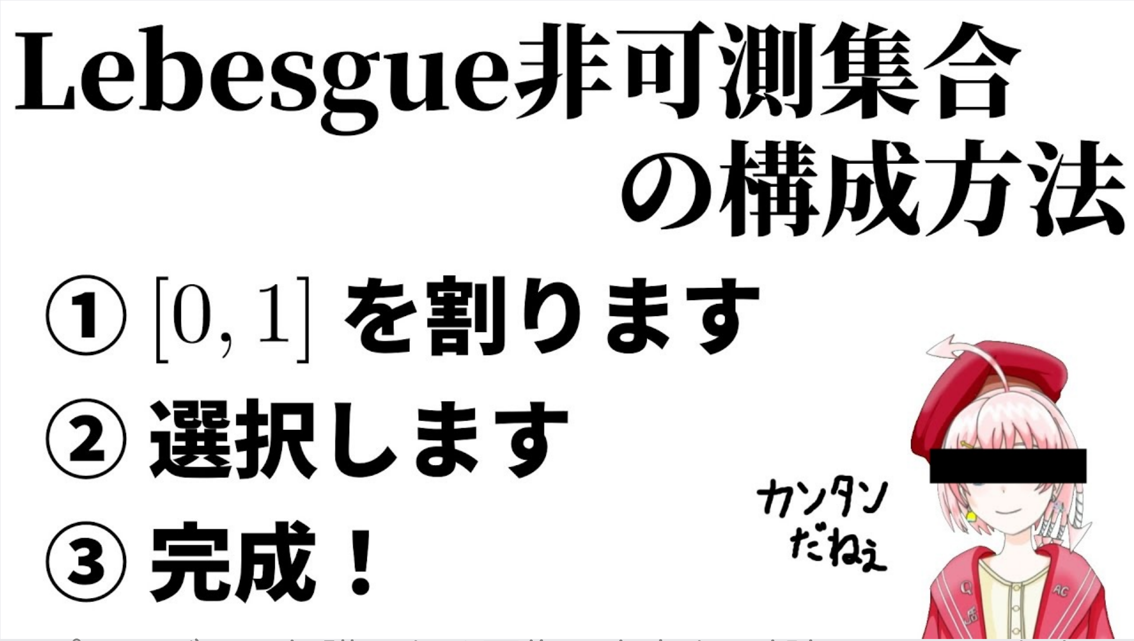
Lebesgue 可測

にします！

？？？

？？？

非可測集合あるやろがい



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
  - 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない
    - Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
  - 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない
    - Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます
  - 今回は選択公理を諦めます（Solovay [1]）。

選択公理を諦めます

※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

でも……

でも
「外側」の宇宙
では
選択公理を認めます

選択公理を認めます

※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

Solovay モデル

定理 1 (Solovay 1970 [1])

V を ZFC の宇宙、κ を到達不能基数、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大とするとき、$V[G]$ で見た内部モデル HOD^{ω} は $\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \mathrm{LM}$ のモデルとなる。

ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
   - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 V[G]」を創ります

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙」$V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが……

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
   - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります
(3) 「大きな宇宙」$V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが ……
(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると ……

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
   - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙」$V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが ……

(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると ……
   - そこには可測集合しかありません！
      - 必然的に選択公理も破れている

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
   - ▸ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $\mathrm{V}[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙」$\mathrm{V}[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが……

(4) $\mathrm{V}[G]$ の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{\mathrm{V}[G]}$」（Solovay モデル）を見ると……
   - ▸ そこには可測集合しかありません！
     - • 必然的に選択公理も破れている
   - ▸ 従属選択公理はなりたっているので、ある程度マトモな解析学はできます

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 V[G]」を創ります

(3) 「大きな宇宙」V[G] は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが ……

(4) V[G] の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると ……
- そこには可測集合しかありません！
  - 必然的に選択公理も破れている
- 従属選択公理はなりたっているので、ある程度マトモな解析学はできます
- うれしい ✌('ω'✌)三✌('ω')✌三(✌'ω')✌

Solovay モデル・再訪

定理 2 (Solovay 1970 [1])

V を ZFC の宇宙、κ を到達不能基数、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$-強制拡大とするとき、$V[G]$ で見た内部モデル HOD^{ω} は $\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \mathrm{LM}$ のモデルとなる。

ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

Solovay モデル・再訪

定理 3 (Solovay 1970 [1])

V を ZFC の宇宙、κ を到達不能基数、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-強制拡大とするとき、$V[G]$ で見た内部モデル HOD^{ω} は $\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \mathrm{LM}$ のモデルとなる。

ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

- Solovay モデルの構成は、修士なら一年くらいかけて理解する内容
  - 強制法・内部モデルの理解に半年、Solovay モデルの理解に半年くらい

Solovay モデル・再訪

定理 4 (Solovay 1970 [1])

V を ZFC の宇宙、κ を到達不能基数、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$- 強制拡大とするとき、$V[G]$ で見た内部モデル HOD^{ω} は $\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \mathrm{LM}$ のモデルとなる。

ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

- Solovay モデルの構成は、修士なら一年くらいかけて理解する内容
  - 強制法・内部モデルの理解に半年、Solovay モデルの理解に半年くらい
- 今回は厳密さにある程度目を瞑って、雰囲気の理解を目標にする
  - しっかりやるのが大変なので、強制法についてはブラックボックスにします

記号と前提知識の確認

定義 5

- **Borel 集合**：開集合から補集合・可算和・可算共通部分を繰り返し取って得られる実数の集合。全体を $\mathcal{B}$ で表す。
- 以下、μ を Lebesgue 測度、μ^* を Lebesgue 外測度とし、**零集合イデアル** null を $\mathrm{null} := \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid \mu^*(A) = 0 \}$ により定める。
- 集合 A, B の**対称差集合**を次で定める： $A \mathbin{\triangle} B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- 実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が **Lebesgue 可測** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ある Borel 集合 $B \in \mathcal{B}$ が存在して、$A \mathbin{\triangle} B \in \mathrm{null}$
  - **演習問題**：「いつもの」Lebesgue 可測性の定義との同値性を示せ

集合の宇宙と内部モデル、　強制法

集合の宇宙と内部モデル、　強制法

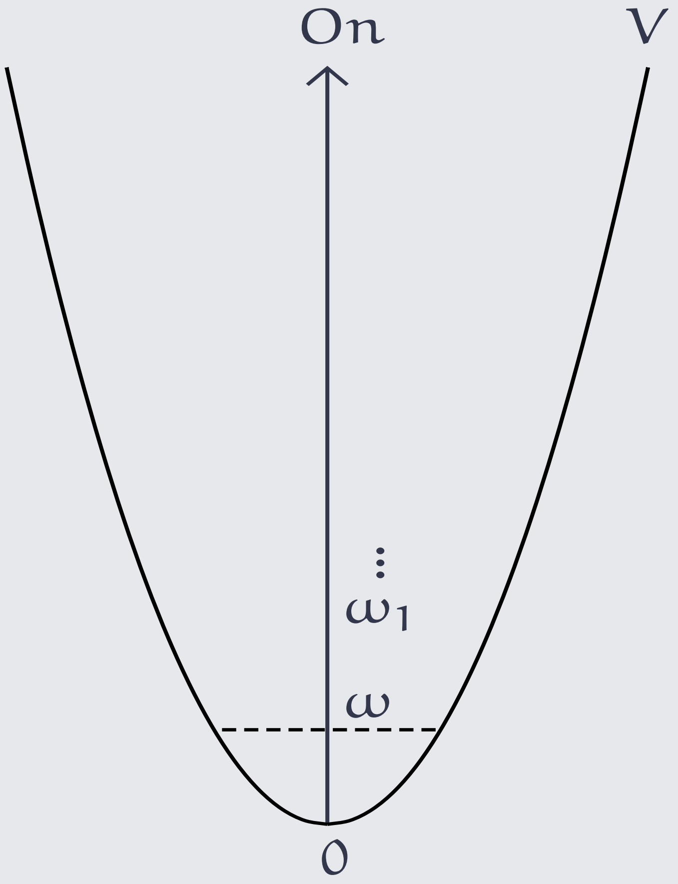
ところで

皆さんは

宇宙の本当の姿

ご存知ですか？

こちらです

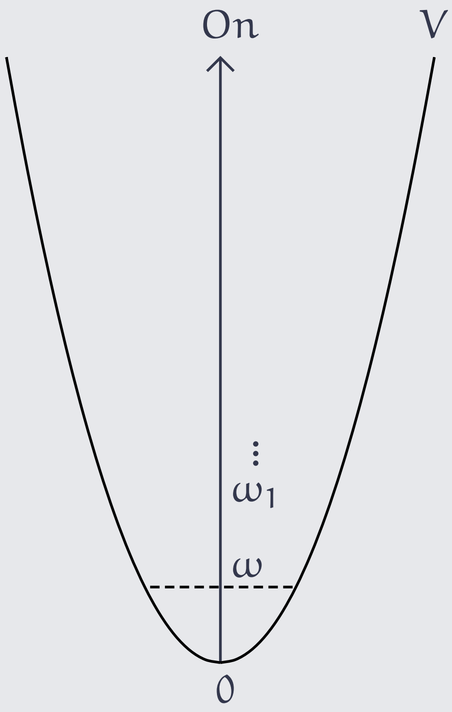

On
V
⋮
ω_1
ω
0

集合の宇宙

- 集合の宇宙 V：集合全体の成すクラスのこと
  - ZFC などの集合論公理系は個別の集合よりも V の性質を定めている
- V は順序数全体のクラス On に沿って空集合から繰り返し冪集合を取って得られる：

$$V_0 := \emptyset, \quad V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha), \quad V_\gamma := \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha \ (\gamma : \mathrm{limit}),$$

$$V := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$$

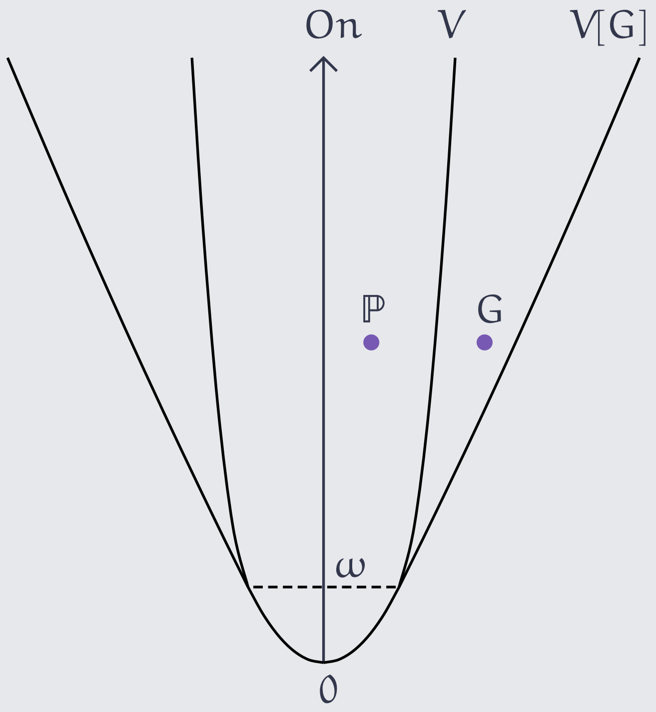


強制法

- 強制法：宇宙 V に新たな元 G を付加した最小の外側の宇宙・強制拡大 V[G] を創る技術
  - $G \notin V$ であっても、G の「近似」全体が成す擬順序 $\mathbb{P}$ は V にあるので、それを使って議論する
  - $\mathbb{P}$ の元は自由度によって順序づけられており、G は $\mathbb{P}$ の超フィルターになる
- V[G] は、$\mathbb{P}$- 値集合の宇宙 $V^{\mathbb{P}}$ を G で割った物：

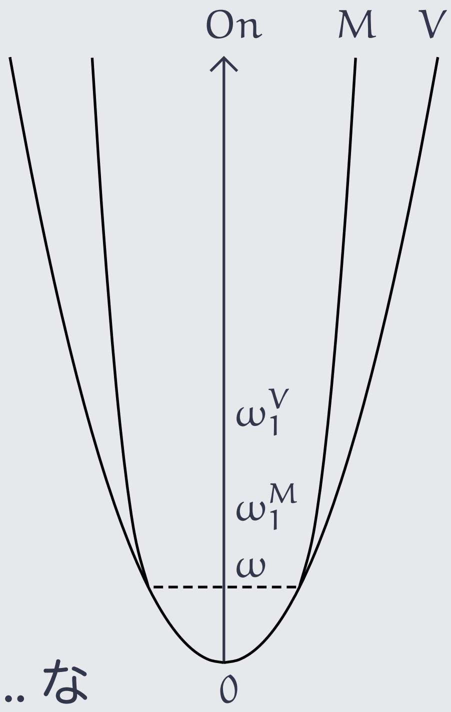
$$V_0^{\mathbb{P}} := \emptyset, \quad V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} := \mathcal{P}(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}), \quad V_\gamma^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha^{\mathbb{P}},$$

$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha^{\mathbb{P}}, \qquad V[G] \cong V^{\mathbb{P}} \big/ G$$



内部モデル

- クラス M が V の内部モデル： V の内側にあり、V と同じ高さで、ZF のモデルとなるある種のクラス
  - 例：強制拡大 V[G] から見て V は内部モデル
  - V, M の一方で AC が成立しても他方では破れ得る
- 内部モデルと外側のモデルとでは、種々の概念が一致したりしなかったりする
  - 一致する概念：任意の有限集合、ω、自然数全体、有理数全体、「α は順序数である」「個別の x は実数である」、etc (実は推移モデルの間なら不変)
  - 変わり得る概念： 2^{κ}、「順序数 α は基数である」、$\omega_1, \omega_2, \ldots$ など基数の具体的な値、実数の全体、etc



内部モデル／強制拡大間の Borel 集合性・測度の保存

- 集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が Borel 集合かどうかは、モデル間で一致するとは限らない
  - 例：新しい実数を追加すると、V の開集合が新しい宇宙ではそうでなくなる
- それでも、内部モデルの Borel 集合 B の「レシピ」（Borel コード）が与えられたら、外部モデルでも対応する Borel 集合 $B^* \supseteq B$ を創れる
  - 内側の宇宙で可算なら外側の宇宙でも可算なので、基本開集合の一覧やそこから補集合・可算和・共通部分を取るレシピは外側宇宙でも有効
    - 内部モデルの Borel 集合 B のコードを、外側で解釈した Borel 集合を B^* と書く
  - 但し、外の宇宙の Borel コードが内部モデルでも通用するとは限らない
    - 例：V の $2^{\aleph_0}$ を可算に潰すと、V[G] では V に属する全ての集合が Borel に
- Borel 集合の測度の一致：$B \in M$ が M で Borel なら、$\mu(B) = \mu(B^*)$。

ここまでのまとめ

- 強制法：新たな理想元を足して、横に宇宙を広げる方法
- 内部モデル：今の宇宙を横に狭めた内側に存在する、小さな宇宙
- 強制拡大・V・内部モデルの間で有限性、有理数の全体、順序数などは一致するが、個別の基数の値や実数の全体はは一致するとは限らない
  - 内側の宇宙で実数なら、外側の宇宙でも実数
- $\mathbb{R}, \mathcal{B}$ などのモデルでの値を、右肩添え字で $\mathbb{R}^V, \mathcal{B}^M, \omega_1^{V[G]}$ などと表す
- モデルによってある集合が Borel 集合かどうかは変わってしまう
  - それでも Borel 集合のレシピを考えると、内側の宇宙の Borel 集合 B を外側に持ち上げた集合 B^* が得られる
  - B と B^* を同一視すれば、Borel 集合の Lebesgue 測度の値も保たれる

強制法・内部モデルとランダム実数

なぜ
こんなものを
考えるのか？

強制法・内部モデルの意義

- 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる

強制法・内部モデルの意義

- 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - Solovay は、ZF + DC + LM を満たす宇宙を ZFC + 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した

強制法・内部モデルの意義

- 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - Solovay は、ZF + DC + LM を満たす宇宙を ZFC + 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
  - 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に ZF + DC + LM のモデルからはじめて、内部モデル $L[z]$ をみるとそこでは外側の ω_1 が到達不能に見えていることを示し、ZF + DC + LM に到達不能基数は本質的に必要ということを示した

強制法・内部モデルの意義

- 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - Solovay は、ZF + DC + LM を満たす宇宙を ZFC + 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
  - 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に ZF + DC + LM のモデルからはじめて、内部モデル L[z] をみるとそこでは外側の ω_1 が到達不能に見えていることを示し、ZF + DC + LM に到達不能基数は本質的に必要ということを示した
- Solovay の定理固有の嬉しさ：「可測になってくれる集合」の証拠になるような内部モデルを考えて議論できる！

強制法・内部モデルの意義

- 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - Solovay は、ZF + DC + LM を満たす宇宙を ZFC + 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
  - 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に ZF + DC + LM のモデルからはじめて、内部モデル L[z] をみるとそこでは外側の ω_1 が到達不能に見えていることを示し、ZF + DC + LM に到達不能基数は本質的に必要ということを示した
- Solovay の定理固有の嬉しさ：「可測になってくれる集合」の証拠になるような内部モデルを考えて議論できる！
  - 内部モデル上のランダム実数および Solovay 集合の概念が重要！

ランダム実数

定義 6

M を V の内部モデルとする。実数 x が M 上ランダム $\overset{\text{def}}{\iff}$ M に属するどんな測度零な Borel 集合 $N \in \mathcal{B}^M$ についても $x \notin N^*$

注意 7

x が M 上ランダムなら $x \notin M$。

- x が M 上ランダム $\iff$ x は M から見ると一点なのに正の測度を持つ
- ネタバレ：Solovay のモデルは、ある意味で「ほとんど至るところランダム」になるように作られる

ほとんど至るところランダム

補題 8

$M \subseteq N$ を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1^N$ となるような内部モデルとするとき、N の実数はほとんど至るところ M 上ランダムである。

証明：$\bigcup\{A^* \mid A \in \mathrm{null}^M\}$ が零集合であることを示せばよい。

1. Borel 集合は連続体濃度個あるので、M の Borel 集合は $(2^{\aleph_0})^M$ 個ある
2. $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ より $\mathrm{null}^M = \{A_n \mid n < \omega\}$ と列挙できる
3. 測度は不変なので $\mu(A_n^*) = 0$。よって可算加法性より $\mu\left(\bigcup_n A_n^*\right) = 0$

なるほど

で、
至る所ランダムで
何が嬉しいの？

A. Solovay 集合

Solovay 集合：ランダム部分を Borel 近似できる集合

補題 9

M を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たす内部モデルとする。実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が M 上 Solovay なら、次が成立：

$$\exists B \in \mathcal{B}\ \forall x \in \mathbb{R} : M\text{上ランダム}\ [x \in A \iff x \in B]$$

- M 上の Solovay 集合 A の気持ち：ランダム実数 x に対して、x が A に属するかどうか M のパラメータと x に関する論理式を使って「判定」できる
    - 実際にはもうちょっと厳しい定義（x の条件や「判定」をどこでするかなど）だが、テクニカルなので立ち入らない
- 補題 9 の証明には強制法を使う。知っていれば簡単だが、今回は省略

Solovay 集合なら Lebesgue 可測になる！

- 前の二つの補題を合わせれば……：

- あとは「各々そういう M 上で Solovay な実数の集合」だけを持つようなモデルが取れればよい！

Solovay 集合なら Lebesgue 可測になる！

- 前の二つの補題を合わせれば……：

系 11

M を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たす内部モデルとする。$A \subseteq \mathbb{R}$ が M 上 Solovay なら、A は Lebesgue 可測である。

- あとは「各々そういう M 上で Solovay な実数の集合」だけを持つようなモデルが取れればよい！

Solovay 集合なら Lebesgue 可測になる！

- 前の二つの補題を合わせれば……：

系 12

M を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たす内部モデルとする。$A \subseteq \mathbb{R}$ が M 上 Solovay なら、A は Lebesgue 可測である。

Proof.

補題 9 より、Borel 集合 B があって、A はランダム実数上 B と一致する。補題 8 より実数は至るところ M 上ランダムなので、$A \triangle B \in \mathrm{null}$ を得る。

- あとは「各々そういう M 上で Solovay な実数の集合」だけを持つようなモデルが取れればよい！

Solovay 集合なら Lebesgue 可測になる！

- 前の二つの補題を合わせれば……：

系 13

M を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たす内部モデルとする。$A \subseteq \mathbb{R}$ が M 上 Solovay なら、A は Lebesgue 可測である。

Proof.

補題 9 より、Borel 集合 B があって、A はランダム実数上 B と一致する。補題 8 より実数は至るところ M 上ランダムなので、$A \triangle B \in \mathsf{null}$ を得る。

- あとは「各々そういう M 上で Solovay な実数の集合」だけを持つようなモデルが取れればよい！

巨大基数

Levy 崩壊

Solovay モデルでの解析学

本当に到達不能基数は必要？

まとめ

References

[1] R. M. Solovay, "A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable," *The Annals of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 92, no. 1, July 1970, doi:10.2307/1970696.

[2] S. Shelah, "Can You Take Solovay's Inaccessible Away?" *Israel Journal of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 48, no. 1, 1984, doi:10.1007/BF02760522.