

全ての実数の集合を Lebesgue 可測にする ～ Solovay モデル入門～

@mr__konn

2024-0xAC

alg-d チャンネル

本日の話題

本日の話題

任意の実数の集合 を Lebesgue 可測 にします！

???

???

Lebesgue非可測集合 の構成方法

- ① $[0, 1]$ を割ります
- ② 選択します
- ③ 完成！



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

非可測集合の作り方

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

非可測集合の作り方

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
 1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って

非可測集合の作り方

◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合**の「構成」は次のようだった：

1. **選択公理**： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
2. **平行移動不変性**：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して

非可測集合の作り方

◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合**の「構成」は次のようだった：

1. **選択公理**： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
2. **平行移動不変性**： 可測なら測度零となる筈の X を平行移動して
3. **可算加法性**： 可算個の X で \mathbb{R} が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！

▶ （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）

非可測集合の作り方

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
 1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
 2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して
 3. 可算加法性：可算個の X で \mathbb{R} が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
 - ▶ （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- ◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

非可測集合の作り方

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
 1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
 2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して
 3. 可算加法性：可算個の X で \mathbb{R} が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
 - ▶ (他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね)
- ◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
 - ▶ 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない

非可測集合の作り方

◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して
3. 可算加法性：可算個の X で \mathbb{R} が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！

▶ (他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね)

◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

- ▶ 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
- ▶ 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない

- Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます

非可測集合の作り方

◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合** の「構成」は次のようだった：

1. **選択公理**： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
2. **平行移動不変性**：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して
3. **可算加法性**：可算個の X で \mathbb{R} が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！

▶ (他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね)

◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

- ▶ **可算加法性** は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
- ▶ **平行移動不変性** の成り立たない測度を測度と呼びたくない

• Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます

▶ 今回は**選択公理**を諦めます (Solovay [1])。

選択公理を諦めます



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

でも

でも
「外側」の宇宙
では
選択公理を認めます

選択公理を認めます



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

Solovay モデル

定理 1 (Solovay 1970 [1])

V を ZFC の宇宙、 κ を到達不能基数、 $V[G]$ を $\text{Col}(\omega, <\kappa)$ -強制拡大とするとき、 $V[G]$ で見た内部モデル HOD^ω は $\text{ZF} + \text{DC} + \text{LM}$ のモデルとなる。
ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
 - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
 - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが
- (4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
 - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが
- (4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると
 - ▶ そこには可測集合しかありません！
 - 必然的に選択公理も破れている

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
 - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが
- (4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると
 - ▶ そこには可測集合しかありません！
 - 必然的に選択公理も破れている
 - ▶ 従属選択公理はなりたっているなので、ある程度マトモな解析学はできます

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
 - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが
- (4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると
 - ▶ そこには可測集合しかありません！
 - 必然的に選択公理も破れている
 - ▶ 従属選択公理はなりたっているなので、ある程度マトモな解析学はできます
 - ▶ うれしい $\text{♯}(' \omega' \text{♯}) \equiv \text{♯}(' \omega') \text{♯} \equiv (\text{♯} ' \omega') \text{♯}$

今回の範囲

- ◆ Solovay モデルの構成は、修士なら一年くらいかけて理解する内容
 - ▶ 強制法・内部モデルの理解に半年、Solovay モデルの理解に半年くらい
- ◆ 今回は厳密さにある程度目を瞑って、**雰囲気**の理解を目標にする
 - ▶ しっかりやるのが大変なので、強制法についてはブラックボックスにします

記号と前提知識の確認

定義 2

- ◆ **Borel 集合**：開集合から補集合・可算和・可算共通部分を繰り返し取って得られる実数の集合。全体を \mathcal{B} で表す。
- ◆ 以下、 μ を Lebesgue 測度、 μ^* を Lebesgue 外測度とし、**零集合イデアル** null を $\text{null} := \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid \mu^*(A) = 0 \}$ により定める。
- ◆ 集合 A, B の**対称差集合**を次で定める： $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- ◆ 実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が **Lebesgue 可測** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ ある Borel 集合 $B \in \mathcal{B}$ が存在して、 $A \triangle B \in \text{null}$
 - ▶ **演習問題**：「いつもの」Lebesgue 可測性の定義との同値性を示せ

集合の宇宙と内部モデル、 強制法

集合の宇宙と内部モデル、 強制法

ところで

皆さんは
宇宙の本当の姿
ご存知ですか？

こちらです

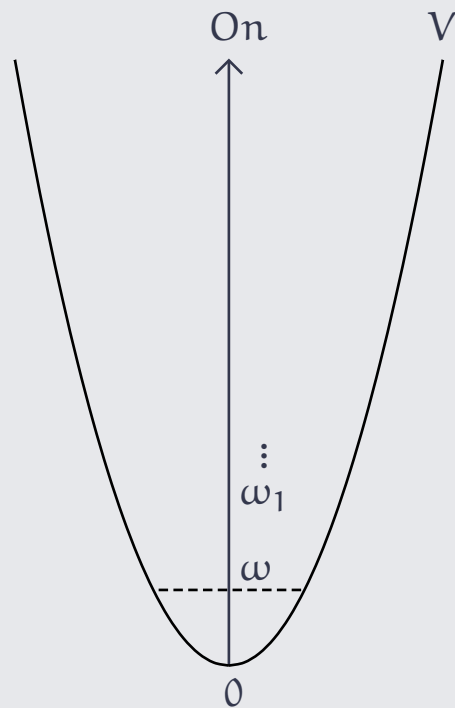


集合の宇宙

- ◆ 集合の宇宙 V : 集合全体の成すクラスのこと
 - ▶ ZFC などの集合論公理系は個別の集合よりも V の性質を定めている
- ◆ V は順序数全体のクラス On に沿って空集合から繰り返し冪集合を取って得られる :

$$V_0 := \emptyset, \quad V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha), \quad V_\gamma := \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha \quad (\gamma : \text{limit}),$$

$$V := \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$$



強制法

- ◆ 強制法：宇宙 V に新たな元 G を付加した最小の外側の宇宙・強制拡大 $V[G]$ を創る技術

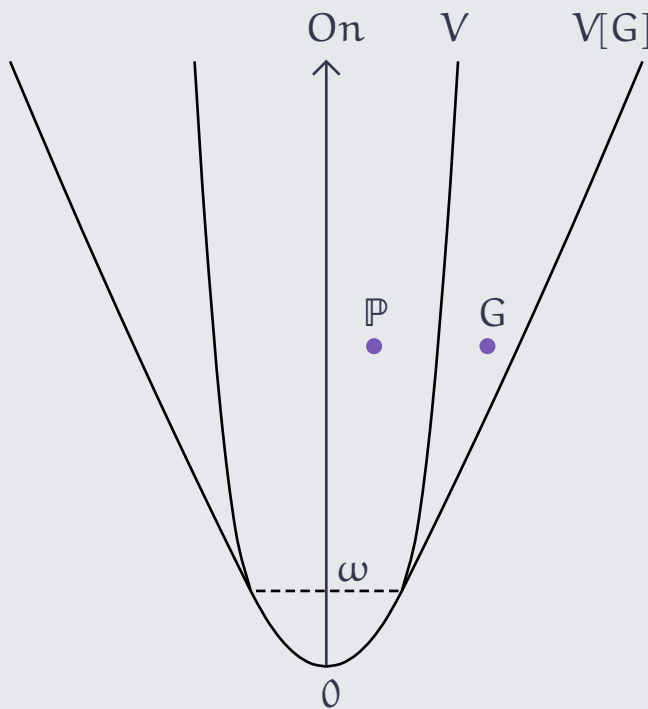
- ▶ $G \notin V$ であっても、 G の「近似」全体が成す擬順序 \mathbb{P} は V にあるので、それを使って議論する

- ◆ $V[G]$ は、 \mathbb{P} -値集合の宇宙 $V^{\mathbb{P}}$ を G で割った物：

$$V_0^{\mathbb{P}} := \emptyset, \quad V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} := \mathcal{P}(V_{\alpha}^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}), \quad V_{\gamma}^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha < \gamma} V_{\alpha}^{\mathbb{P}},$$

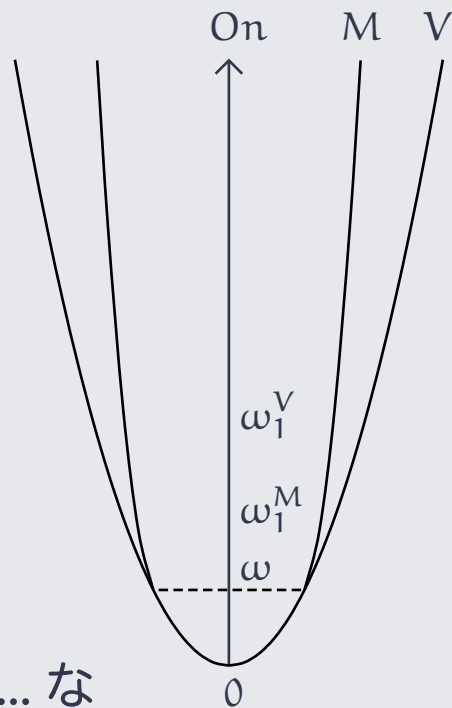
$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_{\alpha}^{\mathbb{P}}, \quad V[G] \cong V^{\mathbb{P}} / G$$

- ▶ V が AC を満たすなら、 $V[G]$ も AC を満たす



内部モデル

- ◆ クラス M が V の内部モデル： V の内側にあり、 V と同じ高さで、ZF のモデルとなるある種のクラス
 - ▶ 例：強制拡大 $V[G]$ から見て V は内部モデル
 - ▶ V, M の一方で AC が成立しても他方では破れ得る
- ◆ 内部モデルと外側のモデルとでは、種々の概念が一致したりしなかったりする
 - ▶ 一致する概念：任意の有限集合、 ω 、自然数全体、有理数全体、「 α は順序数である」「個別の x は実数である」、etc (実は推移モデルの間なら不変)
 - ▶ 変わり得る概念： 2^{κ} 、「順序数 α は基数である」、 $\omega_1, \omega_2, \dots$ など基数の具体的な値、実数の全体、etc



内部モデル／強制拡大間の Borel 集合性・測度の保存

- ◆ 集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が Borel 集合かどうかは、モデル間で一致するとは限らない
 - ▶ 例：新しい実数を追加すると、 V の開集合が新しい宇宙ではそうでなくなる
- ◆ それでも、内部モデルの Borel 集合 B の「レシピ」（Borel コード）が与えられたら、外部モデルでも対応する Borel 集合 $B^* \supseteq B$ を創れる
 - ▶ 内側の宇宙で可算なら外側の宇宙でも可算なので、基本開集合の一覧やそこから補集合・可算和・共通部分を取るレシピは外側宇宙でも有効
 - 内部モデルの Borel 集合 B のコードを、外側で解釈した Borel 集合を B^* と書く
 - ▶ 但し、外の宇宙の Borel コードが内部モデルでも通用するとは限らない
 - 例： V の 2^{\aleph_0} を可算に潰すと、 $V[G]$ では V に属する全ての集合が Borel に
- ◆ Borel 集合の測度の一致： $B \in M$ が M で Borel なら、 $\mu(B) = \mu(B^*)$ 。

ここまでのまとめ

- ◆ **強制法**：新たな理想元を足して、横に宇宙を広げる方法
 - ◆ **内部モデル**：今の宇宙を横に狭めた内側に存在する、小さな宇宙
 - ◆ 強制拡大・ V ・内部モデルの間で有限性、有理数の全体、順序数などは一致するが、個別の基数の値や実数の全体は一致するとは限らない
 - ▶ 内側の宇宙で実数なら、外側の宇宙でも実数
 - ◆ \mathbb{R}, \mathcal{B} などのモデルでの値を、右肩添え字で $\mathbb{R}^V, \mathcal{B}^M, \omega_1^{V[G]}$ などと表す
 - ◆ モデルによってある集合が Borel 集合かどうかは変わってしまう
 - ▶ それでも **Borel 集合のレシピ**を考えると、内側の宇宙の Borel 集合 B を外側に持ち上げた集合 B^* が得られる
 - ▶ B と B^* を同一視すれば、Borel 集合の Lebesgue 測度の値も保たれる
- 集合の宇宙と内部モデル、 強制法

強制法・内部モデルとランダム実数

強制法・内部モデルとランダム実数

なぜ
こんなものを
考えるのか？

強制法・内部モデルの意義

- ◆ 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる

強制法・内部モデルの意義

- ◆ 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
 - ▶ Solovay は、 $ZF + DC + LM$ を満たす宇宙を $ZFC +$ 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した

強制法・内部モデルの意義

- ◆ 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
 - ▶ Solovay は、 $ZF + DC + LM$ を満たす宇宙を $ZFC +$ 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
 - ▶ 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に $ZF + DC + LM$ のモデルからはじめて、内部モデル $L[z]$ をみるとそこでは外側の ω_1 が到達不能に見えていることを示し、 $ZF + DC + LM$ に到達不能基数は本質的に必要ということを示した

強制法・内部モデルの意義

- ◆ 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
 - ▶ Solovay は、 $ZF + DC + LM$ を満たす宇宙を $ZFC +$ 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
 - ▶ 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に $ZF + DC + LM$ のモデルからはじめて、内部モデル $L[z]$ をみるとそこでは外側の ω_1 が到達不能に見えていることを示し、 $ZF + DC + LM$ に到達不能基数は本質的に必要ということを示した
- ◆ Solovay の定理固有の嬉しさ：「可測になってくれる集合」の証拠になるような内部モデルを考えて議論できる！

強制法・内部モデルの意義

- ◆ 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
 - ▶ Solovay は、 $ZF + DC + LM$ を満たす宇宙を $ZFC +$ 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
 - ▶ 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に $ZF + DC + LM$ のモデルからはじめて、内部モデル $L[z]$ をみるとそこでは外側の ω_1 が到達不能に見えていることを示し、 $ZF + DC + LM$ に到達不能基数は本質的に必要ということを示した
- ◆ Solovay の定理固有の嬉しさ：「可測になってくれる集合」の証拠になるような内部モデルを考えて議論できる！
 - ▶ 内部モデル上のランダム実数および Solovay 集合の概念が重要！

ランダム実数

定義 3

M を V の内部モデルとする。実数 x が M 上ランダム $\stackrel{\text{def}}{\iff} M$ に属するどんな測度零な Borel 集合 $N \in \mathcal{B}^M$ についても $x \notin N^*$

注意 4

x が M 上ランダムなら $x \notin M$ 。

- ◆ x が M 上ランダム $\iff x$ は M から見ると一点なのに正の測度を持つ
- ◆ ネタバレ： Solovay のモデルは、ある意味で「ほとんど至るところランダム」になるように作られる

ほとんど至るところランダム

補題 5

$M \subseteq N$ を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1^N$ となるような内部モデルとすると、 N の実数はほとんど至るところ M 上ランダムである。

証明： $\bigcup \{ A^* \mid A \in \text{null}^M \}$ が零集合であることを示せばよい。

1. Borel 集合は連続体濃度個あるので、 M の Borel 集合は $(2^{\aleph_0})^M$ 個ある
2. $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ より $\text{null}^M = \{ A_n \mid n < \omega \}$ と列挙できる
3. 測度は不変なので $\mu(A_n^*) = 0$ 。よって可算加法性より $\mu\left(\bigcup_n A_n^*\right) = 0$

なるほど

で、
至る所ランダムで
何が嬉しいの？

A. Solovay 集合

Solovay 集合：ランダム部分を Borel 近似できる集合

補題 6

M を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たす内部モデルとする。実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が M 上 Solovay なら、次が成立：

$$\exists B \in \mathcal{B} \quad \forall x \in \mathbb{R} : M \text{上ランダム} \quad [x \in A \iff x \in B]$$

- ◆ M 上の Solovay 集合 A の気持ち：ランダム実数 x に対して、 x が A に属するかどうか M のパラメータと x に関する論理式を使って「判定」できる
 - ▶ 実際にはもうちょっと厳しい定義 (x の条件や「判定」をどこでするかなど) だが、テクニカルなので立ち入らない
- ◆ 補題 6 の証明には強制法を使う。知っていれば簡単だが、今回は省略

Solovay 集合なら Lebesgue 可測になる！

- ◆ 前の二つの補題を合わせれば :

系 7

M を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たす内部モデルとする。 $A \subseteq \mathbb{R}$ が M 上 Solovay なら、 A は Lebesgue 可測である。

Proof.

補題 6 より、Borel 集合 B があって、 A はランダム実数上 B と一致する。補題 5 より実数は至るところ M 上ランダムなので、 $A \triangle B \in \text{null}$ を得る。

- ◆ あとは「各々そういう M 上で Solovay な実数の集合」だけを持つようなモデルが取ればよい！

構成要件

1. どんな実数の集合も、それぞれ $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たすような内部モデル M が取れて M 上 Solovay になるような宇宙が欲しい
 2. ZFC のモデル V から始めるので、これは V の強制法拡大 $V[G]$ そのものではなく、その内部モデル $M \subseteq V[G]$ である必要がある
 3. しかも、Solovay 性は $V[G]$ の方で判断し、したがって可測性も $V[G]$ で見たものになる。なので、 M における \mathbb{R} や Borel 集合の全体 \mathcal{B} は $V[G]$ のものと一致している必要がある
 - ▶ Borel 集合の全体は連続体濃度個なので、 \mathbb{R} が M と $V[G]$ で一致していればよい
- ↪ (2), (3) を満たすのに良さそうな内部モデルが HOD^ω

遺伝的に順序数の ω -列で定義可能なクラス HOD^ω

定義 8

- ◆ 集合 A が順序数の ω -列で定義可能 (記号: $A \in \text{OD}^\omega$) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 論理式 $\varphi(x, s)$ と順序数の可算列 $z \in {}^\omega \text{On}$ があって、 $A = \{x \mid \varphi(x, z)\}$
- ◆ 集合 A が遺伝的に順序数の ω -列で定義可能 (記号: $A \in \text{HOD}^\omega$) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ A は自身や元、元の元 を含め OD^ω な集合だけでできている
- ◆ Solovay 性はランダム実数 (実は任意のジェネリック実数) についての定義式が取れるという話だったので、結構 HOD^ω 性は近そうに見える

HOD^ω の性質

HOD^ω の構成は既にあるものを集めてくるという形をとっているので、どのモデル内で HOD^ω を取っているのかによって内容がかわってくる

事実 9

M を $\text{ZF} + \text{DC}$ のモデルとするとき、 M で見た HOD^ω は $\text{ZF} + \text{DC}$ の内部モデルとなる

注意 10

実数は $\{0, 1\}$ の可算列で表現出来るので、 $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ の実数と $V[G]$ の実数は一致する。特に $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ に属する実数の集合については、 $V[G]$ でみても $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ でみても可測性は一致する！

よい強制法の選択： Levy 崩壊 $\text{Col}(\omega, <\kappa)$

あとは良い強制法を選んで $V[G]$ を取り、そこでの HOD^ω に属す実数の集合が以下を満たすようになっていればよい：

- ◆ HOD^ω に属する実数の集合 A が何らかの (A によって異っていてもよい) M 上で Solovay になる
- ◆ そんな M は $V[G]$ でみると $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1^{V[G]}$ を満たしている

結論から言うと、到達不能基数 κ を ω_1 に潰す Levy 崩壊 $\text{Col}(\omega, <\kappa)$ がちょうどこれに最適！

巨大基数

巨大基数

Levy 崩壞

Γελλ 崩壞

Solovay モデルでの解析学

Σ₁¹ 完全性定理の証明

本当に到達不能基数は必要？

本当に到達不能基数は必要？

まとめ

まとめ

References

- [1] R. M. Solovay, “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable,” *The Annals of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 92, no. 1, July 1970, doi:10.2307/1970696.
- [2] S. Shelah, “Can You Take Solovay's Inaccessible Away?” *Israel Journal of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 48, no. 1, 1984, doi:10.1007/BF02760522.