全ての実数の集合を Lebesgue 可測にする

〜 Solovay モデル入門〜

@mr_konn

2024-0xAC

alg-d チャンネル

本日の話題

本日の話題

任意の実数の集合

を

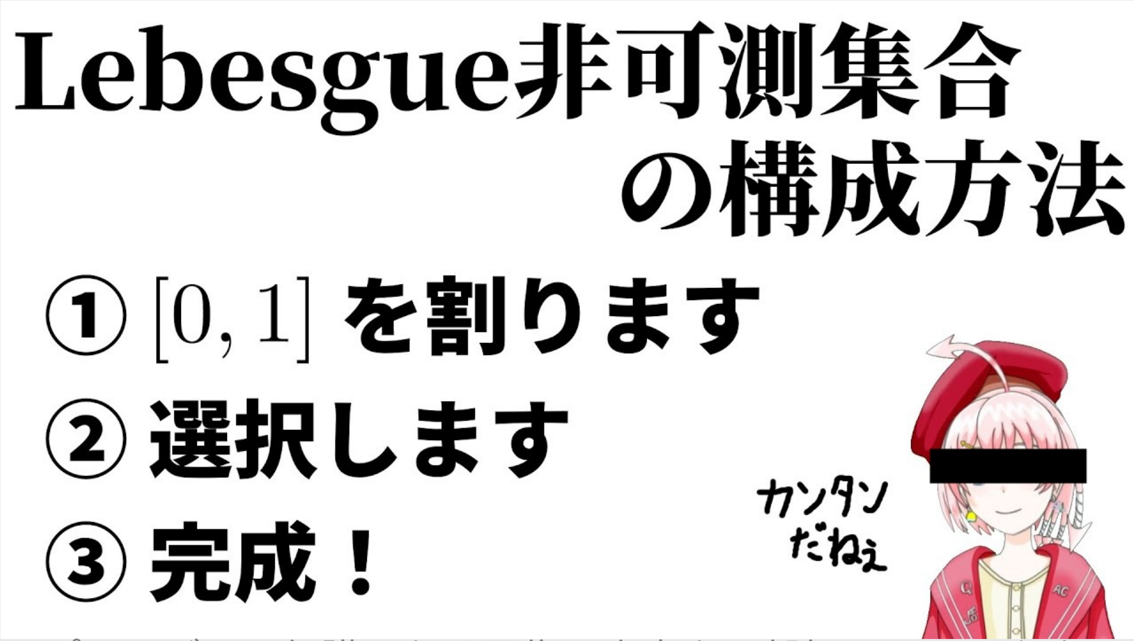
Lebesgue 可測

にします！

？？？

？？？

非可測集合あるやろがい



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
  - 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない
    - Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
  - 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない
    - Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます
  - 今回は選択公理を諦めます（Solovay [1]）。

選択公理を諦めます

※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

でも ……

でも
「外側」の宇宙
では
選択公理を認めます

選択公理を認めます

※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

Solovay モデル

定理 1 (Solovay 1970 [1])

V を ZFC の宇宙、κ を到達不能基数、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大とするとき、$V[G]$ で見た内部モデル HOD^ω は $\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \mathrm{LM}$ のモデルとなる。

ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
  - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
   - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 V[G]」を創ります

(3) 「大きな宇宙」V[G] は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが……

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
   - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙」$V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが……

(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると……

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
- ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙」$V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが……

(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると……
- ▶ そこには可測集合しかありません！
  - 必然的に選択公理も破れている

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
   - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙」$V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが ……

(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると ……
   - そこには可測集合しかありません！
      - 必然的に選択公理も破れている
   - 従属選択公理はなりたっているので、ある程度マトモな解析学はできます

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
  - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 V[G]」を創ります

(3) 「大きな宇宙」V[G] は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが……

(4) V[G] の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると……
  - そこには可測集合しかありません！
    - 必然的に選択公理も破れている
  - 従属選択公理はなりたっているので、ある程度マトモな解析学はできます
  - うれしい ✌('ω'✌)三✌('ω')✌三(✌'ω')✌

Solovay モデル・再訪

定理 2 (Solovay 1970 [1])

V を ZFC の宇宙、κ を到達不能基数、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大とするとき、$V[G]$ で見た内部モデル HOD^{ω} は $\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \mathrm{LM}$ のモデルとなる。

ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

- 知らない単語が結構ありそう

Solovay モデル・再訪

定理 3 (Solovay 1970 [1])

V を ZFC の宇宙、κ を到達不能基数、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大とするとき、$V[G]$ で見た内部モデル HOD^{ω} は $\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \mathrm{LM}$ のモデルとなる。

ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

- 知らない単語が結構ありそう
- 以下、これらの単語の意味を解説していく

集合の宇宙と内部モデル、　強制法

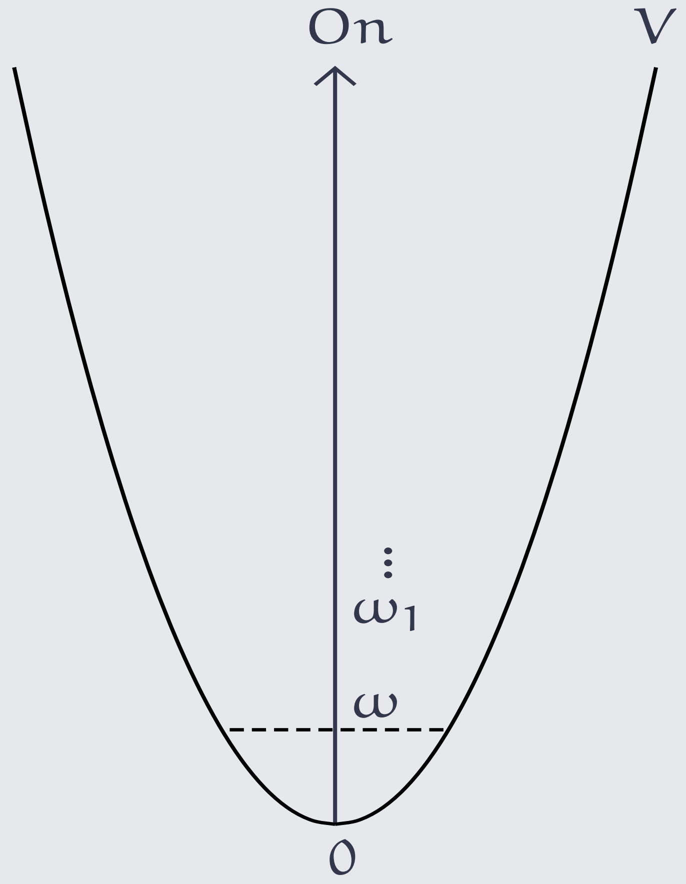
ところで

皆さんは

宇宙の本当の姿

ご存知ですか？

こちらです

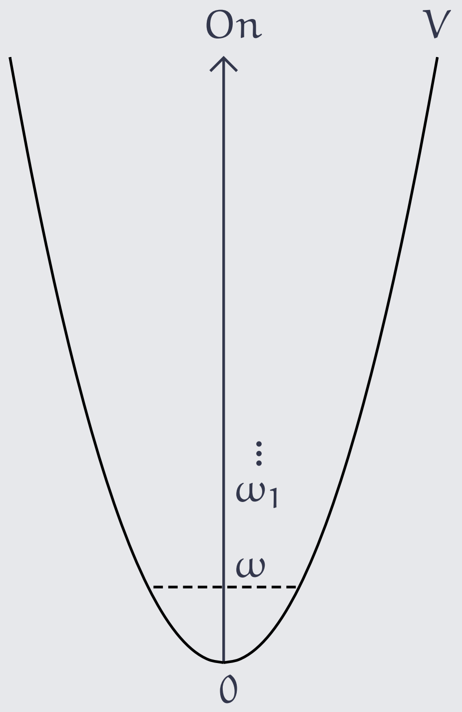

On
V
⋮
ω_1
ω
0

集合の宇宙

- 集合の宇宙 V：集合全体の成すクラスのこと
  - ZFC などの集合論公理系は個別の集合よりも V の性質を定めている
- V は順序数全体のクラス On に沿って空集合から繰り返し冪集合を取って得られる：

$$V_0 := \emptyset, \quad V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha), \quad V_\gamma := \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha \ \ (\gamma : \text{limit}),$$

$$V := \bigcup_{\alpha\in \mathrm{On}} V_\alpha$$

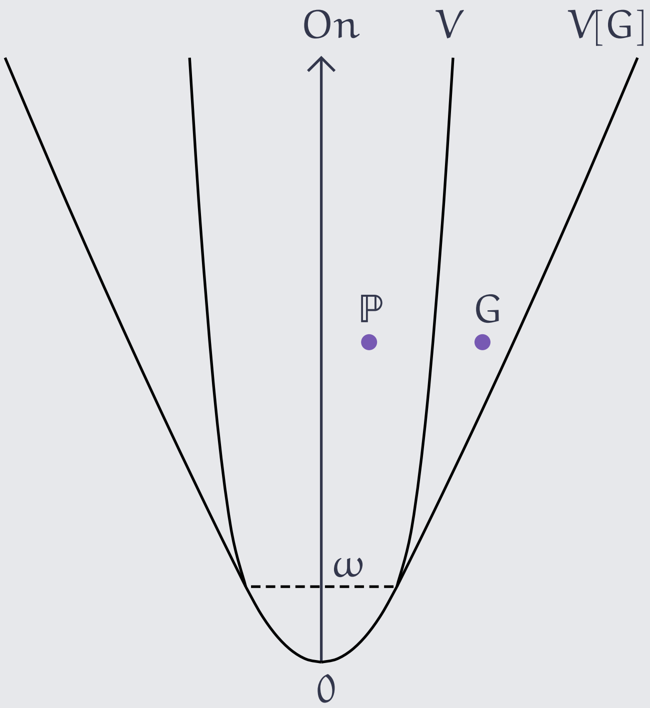


強制法

- 強制法：宇宙 V に新たな元 G を付加した最小の外側の宇宙・強制拡大 V[G] を創る技術
  - G $\notin$ V であっても、G の「近似」全体が成す擬順序 $\mathbb{P}$ は V にあるので、それを使って議論する
  - $\mathbb{P}$ の元は自由度によって順序づけられており、G は $\mathbb{P}$ の超フィルターになる
- V[G] は、$\mathbb{P}$- 値集合の宇宙 $V^{\mathbb{P}}$ を G で割った物：

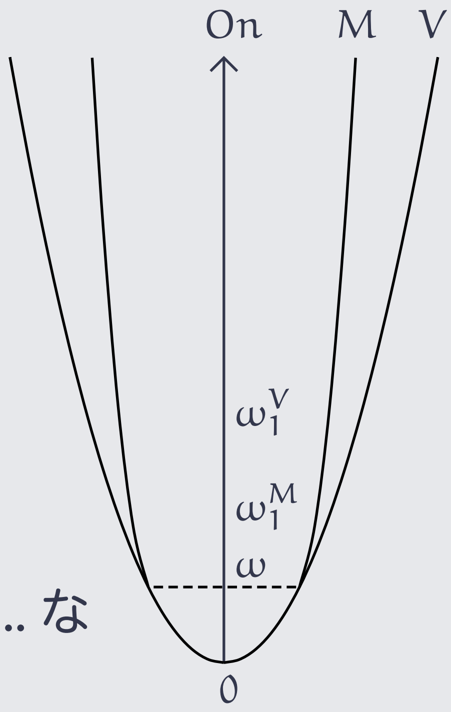
$$V_0^{\mathbb{P}} := \emptyset, \quad V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} := \mathcal{P}(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}), \quad V_\gamma^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha^{\mathbb{P}},$$

$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha^{\mathbb{P}}, \qquad V[G] \cong V^{\mathbb{P}} / G$$



内部モデル

- クラス M が V の内部モデル： V の内側にあり、V と同じ高さで、ZF のモデルとなるある種のクラス
  - 例：強制拡大 V[G] から見て V は内部モデル
  - V, M の一方で AC が成立しても他方では破れ得る
- 内部モデルと外側のモデルとでは、 種々の概念が一致したりしなかったりする
  - 一致する概念：任意の有限集合、ω、「α は順序数である」「個別の x は実数である」、etc
  - 変わり得る概念： 2^{κ}、「順序数 α は基数である」、$\omega_1, \omega_2, \ldots$ など基数の具体的な値、実数の全体、etc



巨大基数

Levy 崩壊

Levy 崩壊

Solovay モデルでの解析学

本当に到達不能基数は必要？

まとめ

References

[1] R. M. Solovay, “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable,” *The Annals of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 92, no. 1, July 1970, doi:10.2307/1970696.