

全ての実数の集合を Lebesgue 可測にする ～ Solovay モデル入門～

@mr__konn

2024-0xAC

alg-d チャンネル

本日の話題

本日の話題

任意の実数の集合 を Lebesgue 可測 にします！

???

???

Lebesgue非可測集合 の構成方法

- ① $[0, 1]$ を割ります
- ② 選択します
- ③ 完成！



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

非可測集合の作り方

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

非可測集合の作り方

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
 1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って

非可測集合の作り方

◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合**の「構成」は次のようだった：

1. **選択公理**： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
2. **平行移動不変性**：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して

非可測集合の作り方

◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合**の「構成」は次のようだった：

1. **選択公理**： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
2. **平行移動不変性**： 可測なら測度零となる筈の X を平行移動して
3. **可算加法性**： 可算個の X で \mathbb{R} が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！

▶ （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）

非可測集合の作り方

◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して
3. 可算加法性：可算個の X で \mathbb{R} が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！

▶ （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）

◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

非可測集合の作り方

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
 1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
 2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して
 3. 可算加法性：可算個の X で \mathbb{R} が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
 - ▶ (他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね)
- ◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
 - ▶ 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない

非可測集合の作り方

◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して
3. 可算加法性：可算個の X で \mathbb{R} が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！

▶ (他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね)

◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

- ▶ 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
- ▶ 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない

- Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます

非可測集合の作り方

◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合**の「構成」は次のようだった：

1. **選択公理**： $[0, 1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って
2. **平行移動不変性**：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して
3. **可算加法性**：可算個の X で \mathbb{R} が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！

▶ (他の非可測集合の例は `alg_d` の動画がいっぱいあるね)

◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

- ▶ **可算加法性**は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
- ▶ **平行移動不変性**の成り立たない測度を測度と呼びたくない

• Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます

▶ 今回は**選択公理**を諦めます (Solovay)。

選択公理を諦めます



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

でも

でも
「外側」の宇宙
では
選択公理を認めます

選択公理を認めます



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
 - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙 $V[G]$ 」は選択公理を満たし非可測集合がありますが

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
 - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙 $V[G]$ 」は選択公理を満たし非可測集合がありますが
- (4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $L(\mathbb{R}^{V[G]})$ 」を見ると

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
 - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙 $V[G]$ 」は選択公理を満たし非可測集合がありますが
- (4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $L(\mathbb{R}^{V[G]})$ 」を見ると
 - ▶ そこには可測集合しかありません！
 - 必然的に選択公理も破れている

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
 - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙 $V[G]$ 」は選択公理を満たし非可測集合がありますが
- (4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $L(\mathbb{R}^{V[G]})$ 」を見ると
 - ▶ そこには可測集合しかありません！
 - 必然的に選択公理も破れている
 - ▶ 従属選択公理はなりたっているなので、ある程度マトモな解析学はできます

どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
 - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙 V 」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙 $V[G]$ 」は選択公理を満たし非可測集合がありますが
- (4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $L(\mathbb{R}^{V[G]})$ 」を見ると
 - ▶ そこには可測集合しかありません！
 - 必然的に選択公理も破れている
 - ▶ 従属選択公理はなりたっているなので、ある程度マトモな解析学はできます
 - ▶ うれしい $\text{☺}(' \omega' \text{☺}) \text{三} \text{☺}(' \omega') \text{☺} \text{三} (\text{☺}' \omega') \text{☺}$

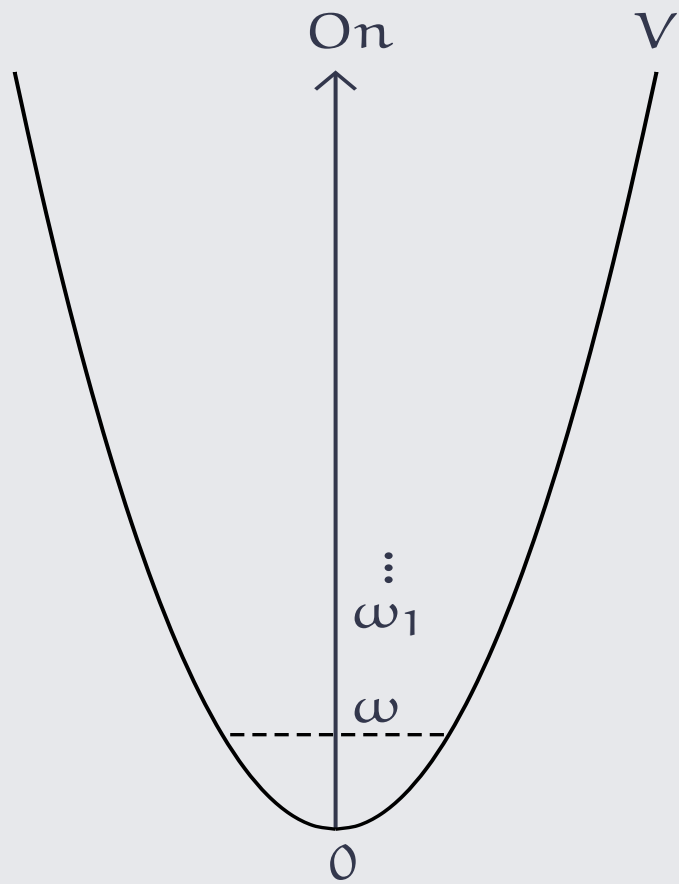
集合の宇宙と強制法

集合の宇宙と強制法

ところで

皆さんは
宇宙の本当の姿
ご存知ですか？

こちらです

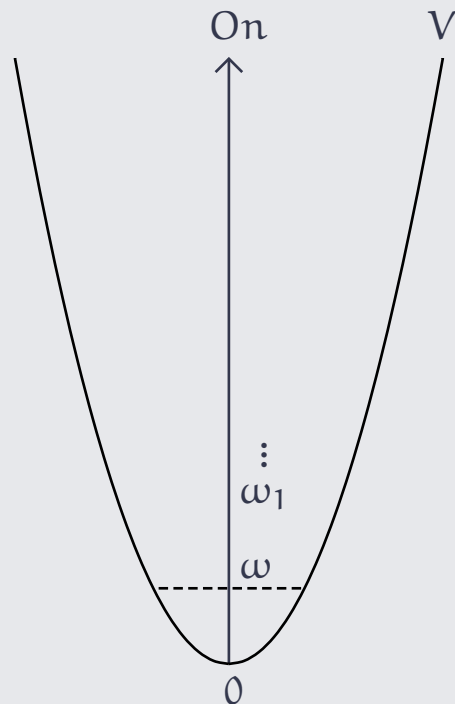


集合の宇宙

- ◆ 集合の宇宙 V : 集合全体の成すクラスのこと
 - ▶ ZFC などの集合論公理系は個別の集合よりも V の性質を定めている
- ◆ V は順序数全体のクラス On に沿って空集合から繰り返し冪集合を取って得られる :

$$V_0 := \emptyset, \quad V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha), \quad V_\gamma := \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha \quad (\gamma : \text{limit}),$$

$$V := \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$$



強制法

◆ 強制法：宇宙 V に新たな元 G を付加した最小の外側の宇宙・強制拡大 $V[G]$ を創る技術

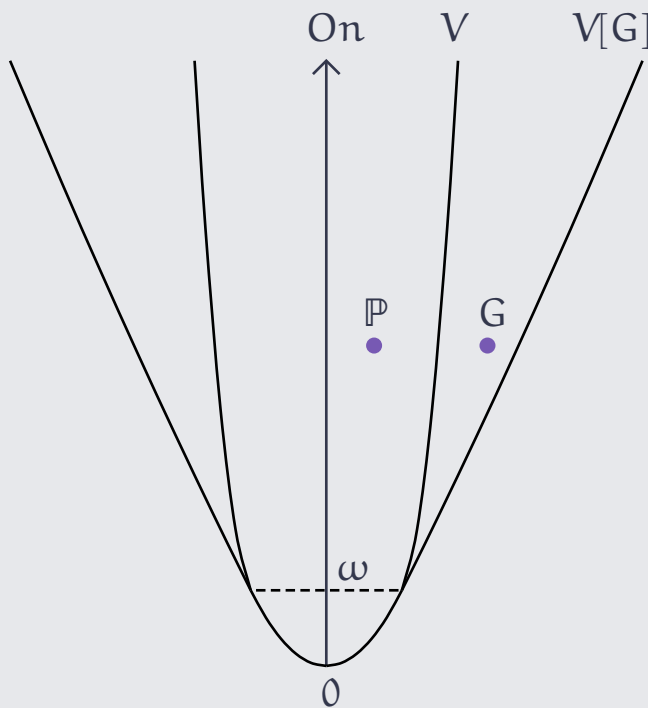
- ▶ $G \notin V$ であっても、 G の「近似」全体が成す擬順序 \mathbb{P} は V にあるので、それを使って議論する
- ▶ \mathbb{P} の元は自由度によって順序づけられており、 G は \mathbb{P} の超フィルターになる

◆ $V[G]$ は、 \mathbb{P} -値集合の宇宙 $V^{\mathbb{P}}$ を G で割った物：

$$V_0^{\mathbb{P}} := \emptyset, \quad V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} := \mathcal{P}(V_{\alpha}^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}), \quad V_{\gamma}^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha < \gamma} V_{\alpha}^{\mathbb{P}},$$

$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_{\alpha}^{\mathbb{P}}, \quad V[G] \cong V^{\mathbb{P}} / G$$

集合の宇宙と強制法



巨大基数

巨大基数

Levy 崩壞

Γελλ 崩壞

Solovay モデルでの解析学

Σ₁¹ 完全性定理の証明

本当に到達不能基数は必要？

本当に到達不能基数は必要？