全ての実数の集合を Lebesgue 可測にする

〜 Solovay モデル入門〜

@mr_konn

2024-0xAC @ alg-d チャンネル

Slides are available at https://bit.ly/solovayd

本日の話題

本日の話題

任意の実数の集合

を

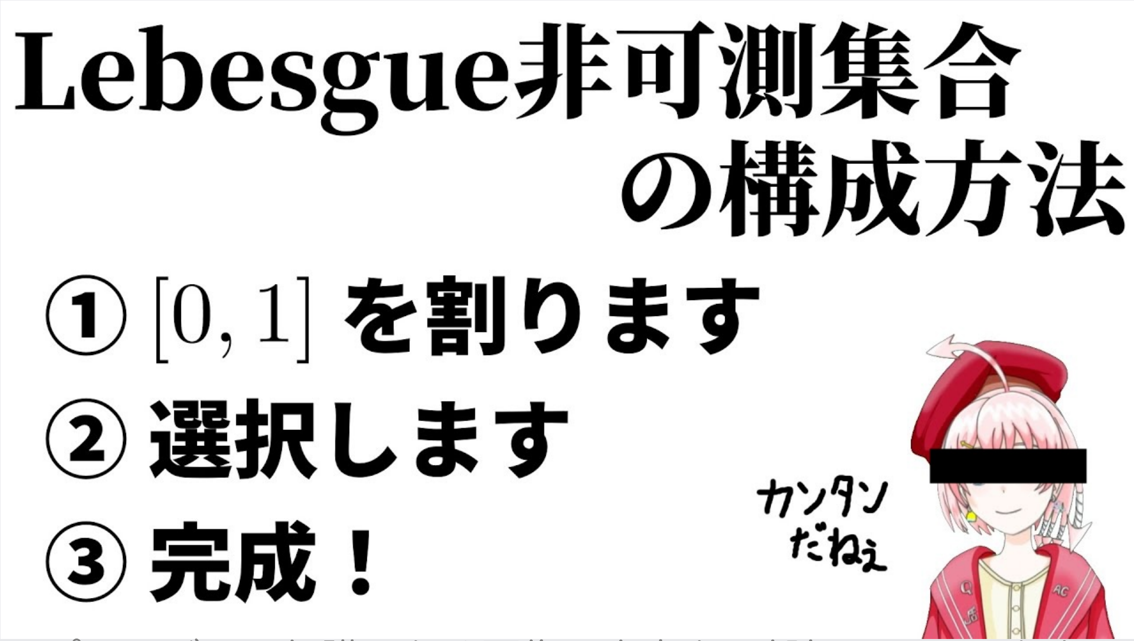
Lebesgue 可測

にします！

？？？

？？？

非可測集合あるやろがい



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
     - alg-d ch. の「X が零だと矛盾 → 測度正 → 無限和が有限になり矛盾」とは経路が違うだけで同じ事
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
  - 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない
    - Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます
  - 今回は選択公理を諦めます（Solovay [1]）。

選択公理を諦めます

※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

でも ……

でも
「外側」の宇宙
では
選択公理を認めます

選択公理を認めます

※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

Solovay モデル

定理 1 (Solovay 1970 [1])

V を ZFC の宇宙、κ を到達不能基数、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大とするとき、$V[G]$ で見た内部モデル HOD^{ω} は $\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} + \mathrm{LM}$ のモデルとなる。

ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 V[G]」を創ります

(3) 「大きな宇宙」V[G] は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが ……

(4) V[G] の内側の「小宇宙 $(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$」（Solovay モデル）を見ると ……
- そこには可測集合しかありません！
  - 必然的に選択公理も破れている
- 従属選択公理はなりたっているので、ある程度マトモな解析学はできます

◆ うれしい ✌('ω'✌)三✌('ω')✌三(✌'ω')✌

今回の範囲

- Solovay モデルの構成は、修士なら一年くらいかけて理解する内容
  - 強制法・内部モデルの理解に半年、Solovay モデルの理解に半年くらい
- 今回は厳密さにある程度目を瞑って、雰囲気の理解を目標にする
  - しっかりやるのが大変なので、強制法についてはブラックボックスにします

記号と前提知識の確認

定義 2

- Borel 集合：開集合から補集合・可算和・可算共通部分を繰り返し取って得られる実数の集合。全体を $\mathcal{B}$ で表す。
- 以下、μ を Lebesgue 測度、μ^* を Lebesgue 外測度とし、零集合イデアル null を $\mathrm{null} := \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid \mu^*(A) = 0 \}$ により定める。
- 集合 A, B の対称差集合を次で定める：$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- 実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が Lebesgue 可測 $\overset{\text{def}}{\iff}$ ある Borel 集合 $B \in \mathcal{B}$ が存在して、$A \triangle B \in \mathrm{null}$
  - 演習問題：「いつもの」Lebesgue 可測性の定義との同値性を示せ

集合の宇宙と内部モデル、　強制法

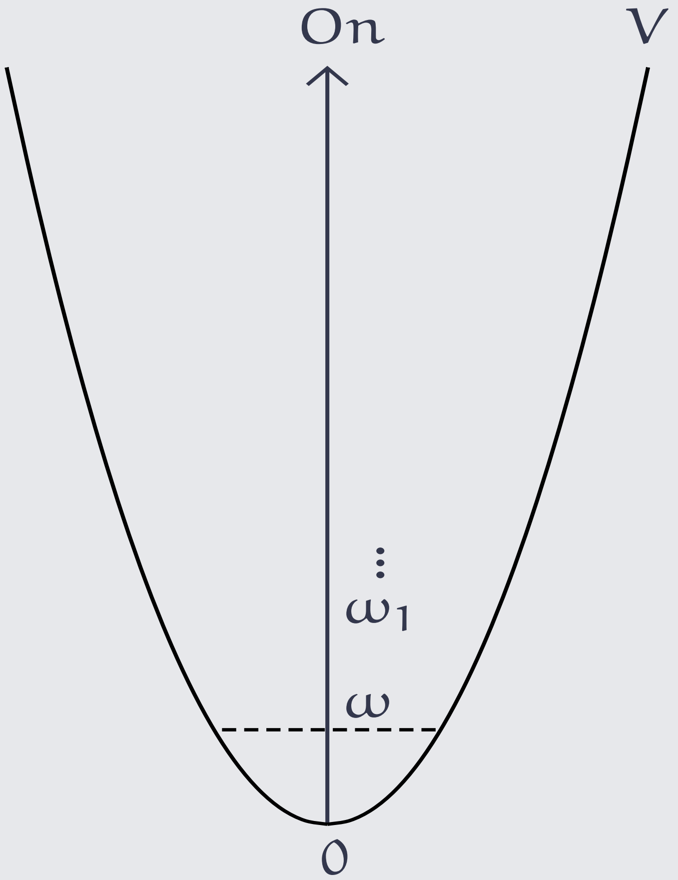
ところで

皆さんは

宇宙の本当の姿

ご存知ですか？

こちらです



On
V
⋮
ω_1
ω
0

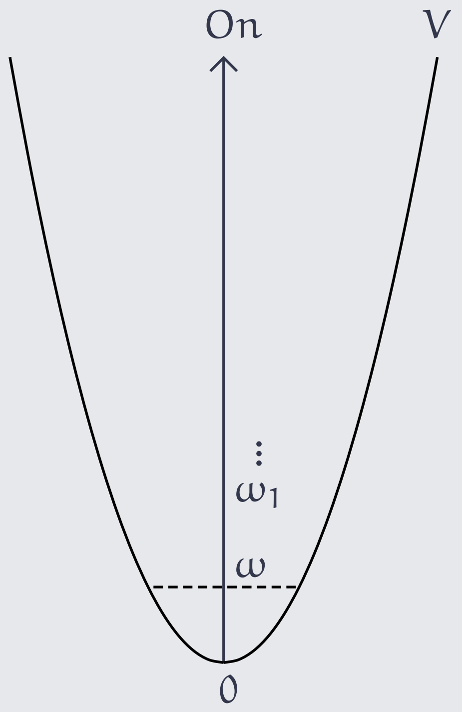
集合の宇宙

- 集合の宇宙 V：集合全体の成すクラスのこと
  - 集合論の公理系は、集合の宇宙 V の性質を定めている。
- V は順序数全体のクラス On に沿って空集合から繰り返し冪集合を取って得られる：

$$V_0 := \emptyset, \quad V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha), \quad V_\gamma := \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha \ \ (\gamma : \mathrm{limit}),$$

$$V := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$$

- 順序数：整列順序の順序型。$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ などで表す。順序数全体を On と書く。$\alpha + 1$ の形の順序数を後続順序数、それ以外を極限順序数と呼ぶ。



基数について

- 基数：全単射の同型型。選択公理の下では「それ未満の順序数からの全射がない順序数」として定義される。基数は $\kappa, \lambda, \theta, \ldots$ などで表す。
  - （この後 AC の成り立たないモデルを創るが、そこでの基数を扱うことはないので気にしなくてよい）
- 基数の全体は整列されており On と同型になる。そこで、無限基数を小さい順に $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$ または $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \ldots$ と書く。
- 基数 κ より大きな最小の基数を κ^+ で表し、κ の後続基数と呼ぶ。
- $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ の形の無限基数を後続基数、そうでないものを極限基数と呼ぶ。
- 基数 κ に対し、$2^\kappa := \left|\mathcal{P}(\kappa)\right|$ を κ の冪と呼ぶ。
  - ω_α や κ^+, 2^κ は宇宙にどういう集合があるのかによって値がかわる！
  - 実際、強制法や内部モデルを考えると結構自在に変えられる

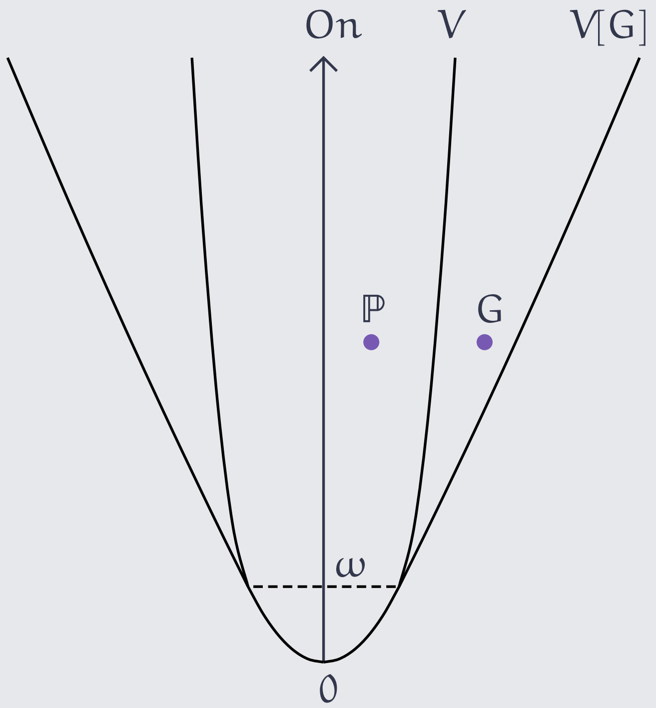
強制法

- **強制法**：宇宙 V に**新たな元 G** を付加した最小の外側の宇宙・**強制拡大 V[G]** を創る技術
  - ▸ $G \notin V$ であっても、G の「近似」全体が成す**擬順序** $\mathbb{P}$ は V にあるので、それを使って議論する
- V[G] は、$\mathbb{P}$- 値集合の宇宙 $V^{\mathbb{P}}$ を G で割った物：

$$V_0^{\mathbb{P}} := \emptyset, \quad V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} := \mathcal{P}(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}), \quad V_\gamma^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha^{\mathbb{P}},$$

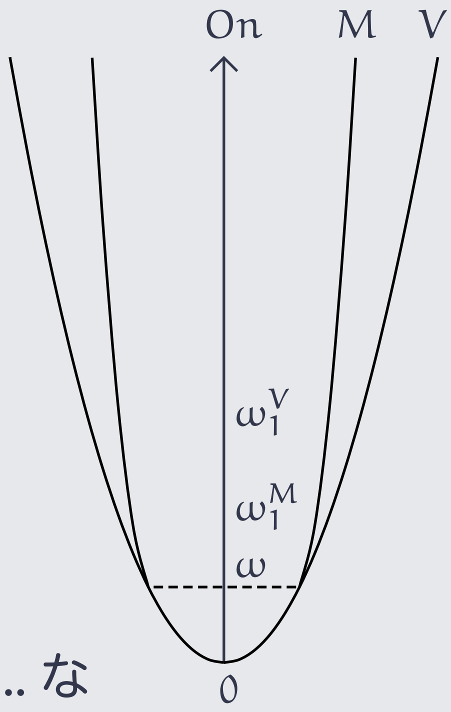
$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^{\mathbb{P}}, \qquad V[G] \cong V^{\mathbb{P}}/G$$

  - ▸ V が AC を満たすなら、V[G] も AC を満たす



内部モデル

- クラス M が V の内部モデル： V の内側にあり、V と同じ高さで、ZF のモデルとなるある種のクラス
  - 例：強制拡大 V[G] から見て V は内部モデル
  - 一方で AC が成立しても他方では破れ得る
- 内部モデルと外側のモデルとでは、 種々の概念が一致したりしなかったりする
  - 一致する概念：任意の有限集合、ω、 自然数全体、 有理数全体、「α は順序数である」「個別の x は実数である」、etc (実は推移モデルの間なら不変)
  - 変わり得る概念： 2^κ、「順序数 α は基数である」、$\omega_1, \omega_2, \ldots$ など基数の具体的な値、 実数の全体、etc



内部モデル／強制拡大間の Borel 集合性・測度の保存

- 集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が Borel 集合かどうかは、モデル間で一致するとは限らない
  - 例：新しい実数を追加すると、V の開集合が新しい宇宙ではそうでなくなる
- それでも、内部モデルの Borel 集合 B の「レシピ」（Borel コード）が与えられたら、外部モデルでも対応する Borel 集合 $B^* \supseteq B$ を創れる
  - 内側の宇宙で可算なら外側の宇宙でも可算なので、基本開集合の一覧やそこから補集合・可算和・共通部分を取るレシピは外側宇宙でも有効
    - 内部モデルの Borel 集合 B のコードを、外側で解釈した Borel 集合を B^* と書く
  - 但し、外の宇宙の Borel コードが内部モデルでも通用するとは限らない
    - 例：V の $2^{\aleph_0}$ を可算に潰すと、V[G] では V に属する全ての集合が Borel に
- Borel 集合の測度の一致：$B \in M$ が M で Borel なら、$\mu(B) = \mu(B^*)$。

ここまでのまとめ

- 強制法：新たな理想元を足して、横に宇宙を広げる方法
- 内部モデル：今の宇宙を横に狭めた内側に存在する、小さな宇宙
- 強制拡大・V・内部モデルの間で有限性、有理数の全体、順序数全体などは一致するが、個別の基数の値や実数の全体は一致するとは限らない
  - 内側の宇宙で実数なら、外側の宇宙でも実数
- $\mathbb{R}, \mathcal{B}$ などのモデルでの値を、右肩添え字で $\mathbb{R}^V, \mathcal{B}^M, \omega_1^{V[G]}$ などと表す
- モデルによってある集合が Borel 集合かどうかは変わってしまう
  - それでも Borel 集合のレシピを考えると、内側の宇宙の Borel 集合 B を外側に持ち上げた集合 B^* が得られる
  - B と B^* を同一視すれば、Borel 集合の Lebesgue 測度の値も保たれる

強制法・内部モデルとランダム実数

なぜ
こんなものを
考えるのか？

強制法・内部モデルの意義

- 無矛盾性証明のため：ある命題やその否定が成り立つ宇宙を探せる
  - Solovay は、ZF + DC + LM を満たす宇宙を ZFC + 到達不能基数 を満たす宇宙から構成することで、「到達不能基数を認めるなら無矛盾だよ」と示した
  - 後述する Shelah の定理 [2] は、逆に ZF + DC + LM のモデルからはじめて、内部モデル L[z] をみるとそこでは外側の ω_1 が到達不能に見えていることを示し、ZF + DC + LM に到達不能基数は本質的に必要ということを示した
- Solovay の定理固有の嬉しさ：「可測になってくれる集合」の証拠になるような内部モデルを考えて議論できる！
  - 内部モデル上のランダム実数および Solovay 集合の概念が重要！

ランダム実数

定義 3

M を V の内部モデルとする。実数 x が M 上ランダム $\overset{\text{def}}{\iff}$ M に属するどんな測度零な Borel 集合 $N \in \mathcal{B}^M$ についても $x \notin N^*$

注意 4

x が M 上ランダムなら $x \notin M$。

- x が M 上ランダム $\iff$ x は M から見ると一点なのに正の測度を持つ
- ネタバレ：Solovay のモデルは、ある意味で「ほとんど至るところランダム」になるように作られる

ほとんど至るところランダム

補題 5

$M \subseteq N$ を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1^N$ となるような内部モデルとするとき、N の実数はほとんど至るところ M 上ランダムである。

証明：$\bigcup\{ A^* \mid A \in (\mathrm{null} \cap \mathcal{B})^M \}$ が零集合であることを示せばよい。

1. Borel 集合は連続体濃度個あるので、M の Borel 集合は $(2^{\aleph_0})^M$ 個ある
2. $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ より $(\mathrm{null} \cap \mathcal{B})^M = \{ A_n \mid n < \omega \}$ と列挙できる
3. 測度は不変なので $\mu(A_n^*) = 0$。よって可算加法性より $\mu\left(\bigcup_n A_n^*\right) = 0$

なるほど

で、
至る所ランダムで
何が嬉しいの？

A. Solovay 集合

Solovay 集合：ランダム部分を Borel 近似できる集合

補題 6

M を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たす内部モデルとする。実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が M 上 Solovay なら、次が成立：

$$\exists B \in \mathcal{B}\ \forall x \in \mathbb{R} : M\text{上ランダム}\ [x \in A \iff x \in B]$$

- A が M 上 Solovay$\iff$ ランダムっぽい実数 x に対し、x が A に属するかどうか M のパラメータと x に関する論理式を使って $M[x]$ で判定できる
  - $M[x]$： $M \cup \{x\}$ を部分クラスとして含む最小の ZF のモデル（常にある）
  - 実際にはもう少し厳しい定義（x の渡る範囲が広いなど）だが、テクニカルなので立ち入らない
- 補題 6 の証明には強制法を使う。知っていれば簡単だが、今回は省略

Solovay 集合なら Lebesgue 可測になる！

- 前の二つの補題を合わせれば……

系 7

M を $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たす内部モデルとする。$A \subseteq \mathbb{R}$ が M 上 Solovay なら、A は Lebesgue 可測である。

Proof.

補題 6 より、Borel 集合 B があって、A はランダム実数上 B と一致する。補題 5 より実数は至るところ M 上ランダムなので、$A \triangle B \in \mathrm{null}$ を得る。

- あとは「各々そういう M 上で Solovay な実数の集合」だけを持つようなモデルが取れればよい！

構成要件

1. どんな実数の集合も、それぞれ $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ を満たすような内部モデル M が取れて M 上 Solovay になるような宇宙が欲しい
2. ZFC のモデル V から始めるので、これは V の強制法拡大 $V[G]$ そのものではなく、その内部モデル $M \subseteq V[G]$ である必要がある
3. しかも、Solovay 性は $V[G]$ の方で判断し、したがって可測性も $V[G]$ で見たものになる。なので、M における $\mathbb{R}$ や Borel 集合の全体 $\mathcal{B}$ は $V[G]$ のものと一致している必要がある
    - Borel 集合の全体は連続体濃度個なので、$\mathbb{R}$ が M と $V[G]$ で一致していればよい

$\rightsquigarrow$(2), (3) を満たすのに良さそうな内部モデルが HOD^{ω}

遺伝的に順序数の ω- 列で定義可能なクラス HOD^ω

定義 8 (遺伝的に順序数の ω- 列で定義可能な宇宙 HOD^ω)

- 集合 A が順序数の ω- 列で定義可能（記号：$A \in \mathrm{OD}^\omega$）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 論理式 $\varphi(x, s)$ と順序数の可算列 $z \in {}^\omega\mathrm{On}$ があって、$A = \{ x \mid \varphi(x, z) \}$
- 集合 A が遺伝的に順序数の ω- 列で定義可能（記号：$A \in \mathrm{HOD}^\omega$）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A は自身や元、元の元 …… を含め OD^ω な集合だけでできている

- Solovay 性はランダム実数（実は任意のジェネリック実数）についての定義式が取れるという話だったので、結構 HOD^ω 性は近そうに見える

HOD^ωの性質

HOD^ω の構成は既にあるものを集めてくるという形をとっているので、どのモデル内で HOD^ω を取っているのかによって内容がかわってくる

事実 9

M を $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ のモデルとするとき、M で見た HOD^ω は $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ の内部モデルとなる

注意 10

実数は $\{0,1\}$ の可算列で表現出来るので、$(\mathrm{HOD}^\omega)^{V[G]}$ の実数と $V[G]$ の実数は一致する。特に $(\mathrm{HOD}^\omega)^{V[G]}$ に属する実数の集合については、$V[G]$ でみても $(\mathrm{HOD}^\omega)^{V[G]}$ でみても可測性は一致する！

よい強制法の選択：Levy 崩壊 $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$

- あとは良い強制拡大 $V[G]$ を取り、$V[G]$ の HOD^ω に属す実数の集合が以下を満たしていればよい：
  (1) HOD^ω に属する実数の集合 A が何らかの（A によって異っていてもよい）M 上で Solovay になる
  (2) そんな M は $V[G]$ でみると $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1^{V[G]}$ を満たしている
- 結論から言うと、到達不能基数 κ を ω_1 に潰す Levy 崩壊 $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$ がちょうどこれに最適！

Levy 崩壊と到達不能基数

$Q:$

到達不能基数

とは？

A1:

短い列で 近似不能 で
幕で閉じた基数

到達不能基数

定義 11

- 順序数 α の共終数を次で定める： $\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{\,|A| \mid A \subseteq \alpha, \sup(A) = \alpha\,\}$
- 基数 κ が正則 $\overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$。正則でない基数を特異基数と呼ぶ。
  - κ が正則 $=$ κ は小さな基数で「近似」できない
  - 例： $\aleph, \aleph_1, \ldots, \aleph_{\alpha+1}$ は正則基数。$\aleph_\omega, \aleph_{\omega_1}$ などは特異基数。
- κ が強極限基数 $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\lambda < \kappa\ 2^\lambda < \kappa$
- $\kappa > \omega$ が到達不能基数 $\overset{\text{def}}{\iff} \kappa$ は正則かつ強極限基数。
  - κ は小さい列で近似できないし、冪について閉じている。到達不能基数の存在は Grothendieck 宇宙の存在と同値。

A2:

Grothendieck 宇宙

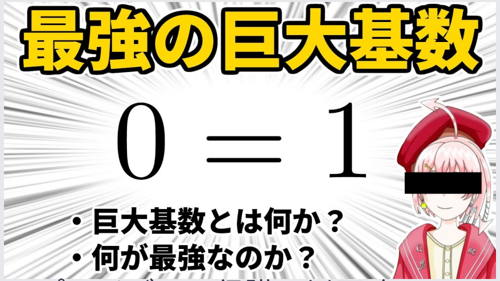
または

ZFC 無矛盾性が出る

くらい巨大な基数

到達不能基数と巨大基数

- 到達不能基数は、巨大基数と呼ばれるものの一種
  - 巨大基数： ZFC の無矛盾性を導くほど大きい基数
  - 今回の LM のような命題の強さを測る物差し
- κ を到達不能とすると、V_κ が ZFC のモデルになる
  - しかも順序数 $\alpha < \kappa$ で V_α が ZFC のモデルになる物が非有界に存在する
- 到達不能基数はまだ弱く、「小さな巨大基数」と呼ばれる物の代表例
  - 「大きな巨大基数」は真偽を保つ V の中への同型 $V \prec M \subseteq V$ で定義される
- 最強巨大基数公理： $0 = 1$。AC の下で Reinhardt 基数 $V \prec V$ の存在と同値
  - $0 = 1$ 自身は単なる矛盾なので単に「巨大基数」と呼ぶと厳密には怒られる
  - AC がない状態で Reinhardt 基数が矛盾するかは未解決問題



※ プライバシー保護の以下略

Levy 崩壊

定義 12

κ を正則基数とする。Levy 崩壊 $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$ を次で定める：

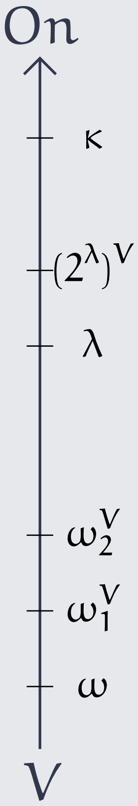
$$\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa) := \prod_{\omega<\alpha<\kappa}^{<\aleph_0} {}^{<\omega}\alpha$$

$$:= \left\{ f \,\middle|\, f : \text{関数}, |f| < \aleph_0, \mathrm{dom}(f) \subset \omega, \mathrm{ran}(f) \subset \alpha < \kappa \right\}$$

- 直観： $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$ は ω と κ の間の全ての順序数に、ω からの全射を足して可算にしちゃう
- 特に、κ が正則のとき、$\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大をした宇宙では κ は ω_1 になっている

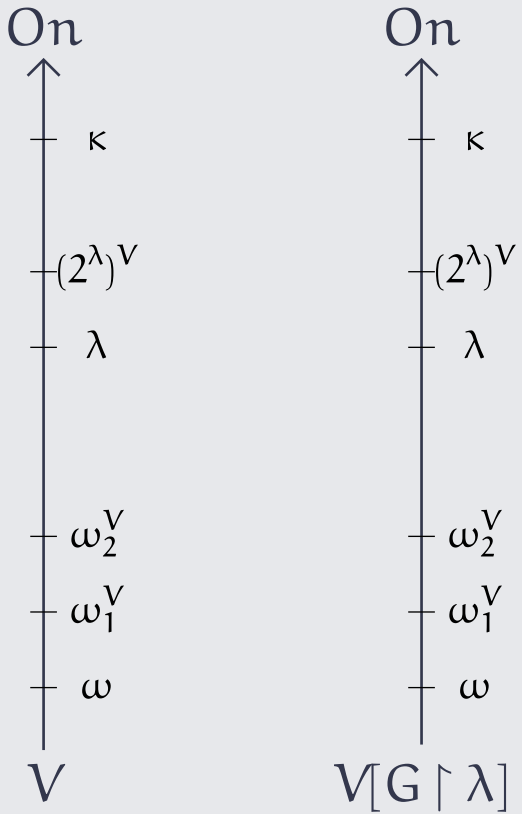
Levy 崩壊のイメージ

★ κ：到達不能、$\lambda < \kappa$：正則とする



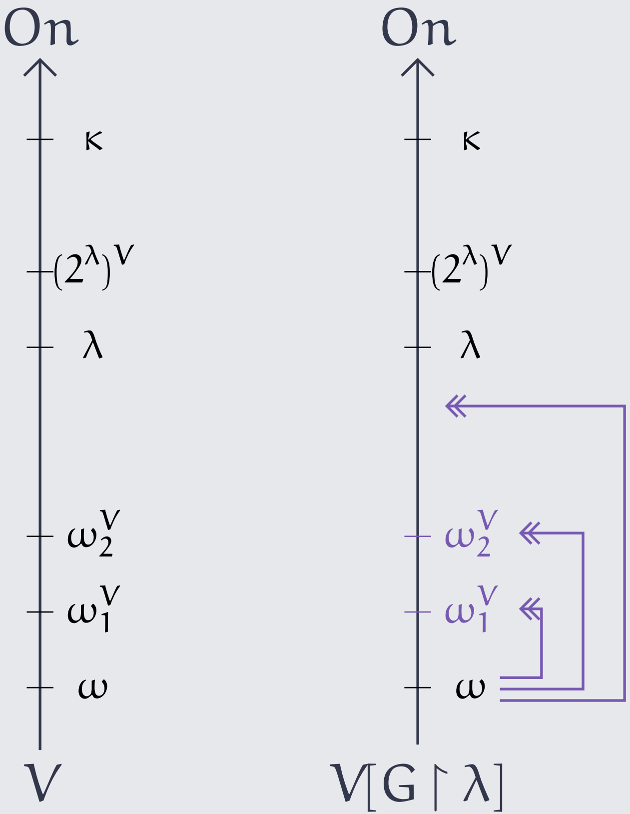
Levy 崩壊のイメージ

★ κ : 到達不能、$\lambda < \kappa$: 正則とする



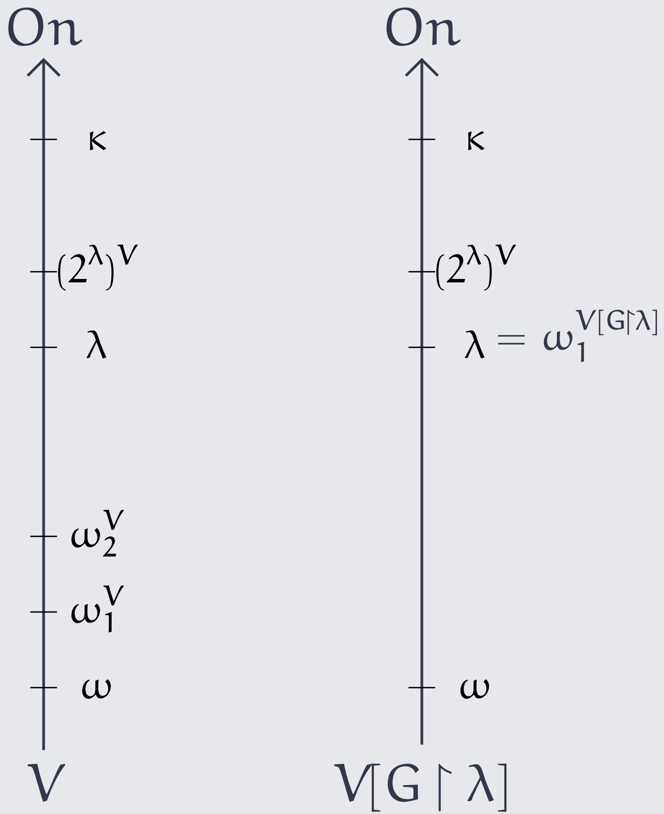
Levy 崩壊のイメージ

★ κ：到達不能、$\lambda < \kappa$：正則とする



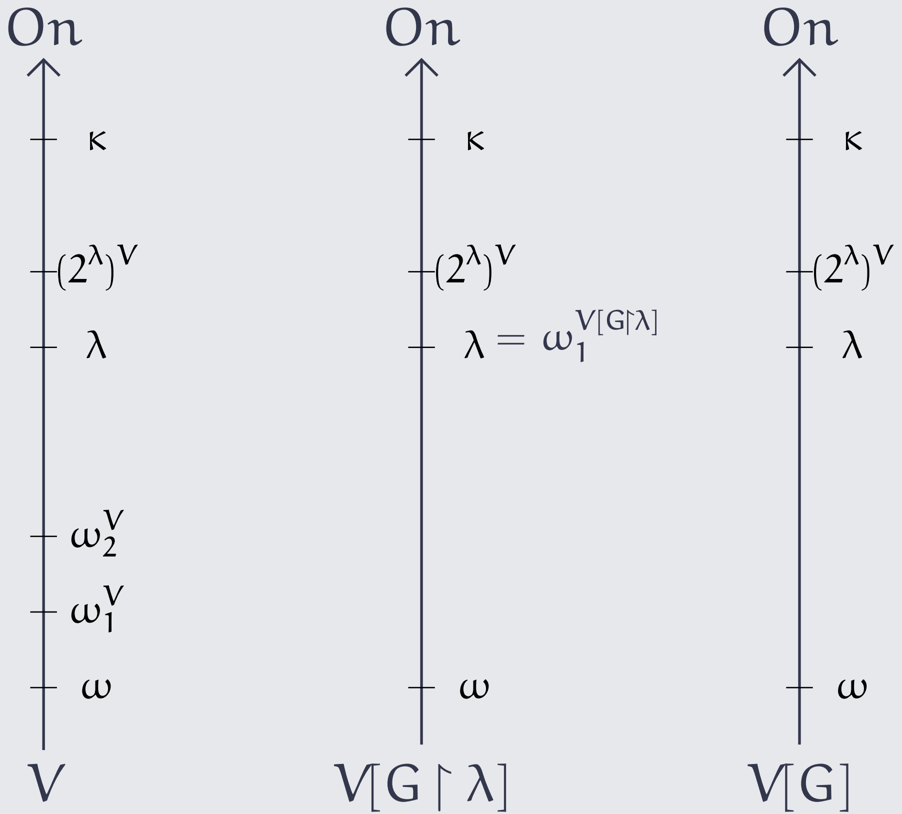
Levy 崩壊のイメージ

★ κ：到達不能、$\lambda < \kappa$：正則とする



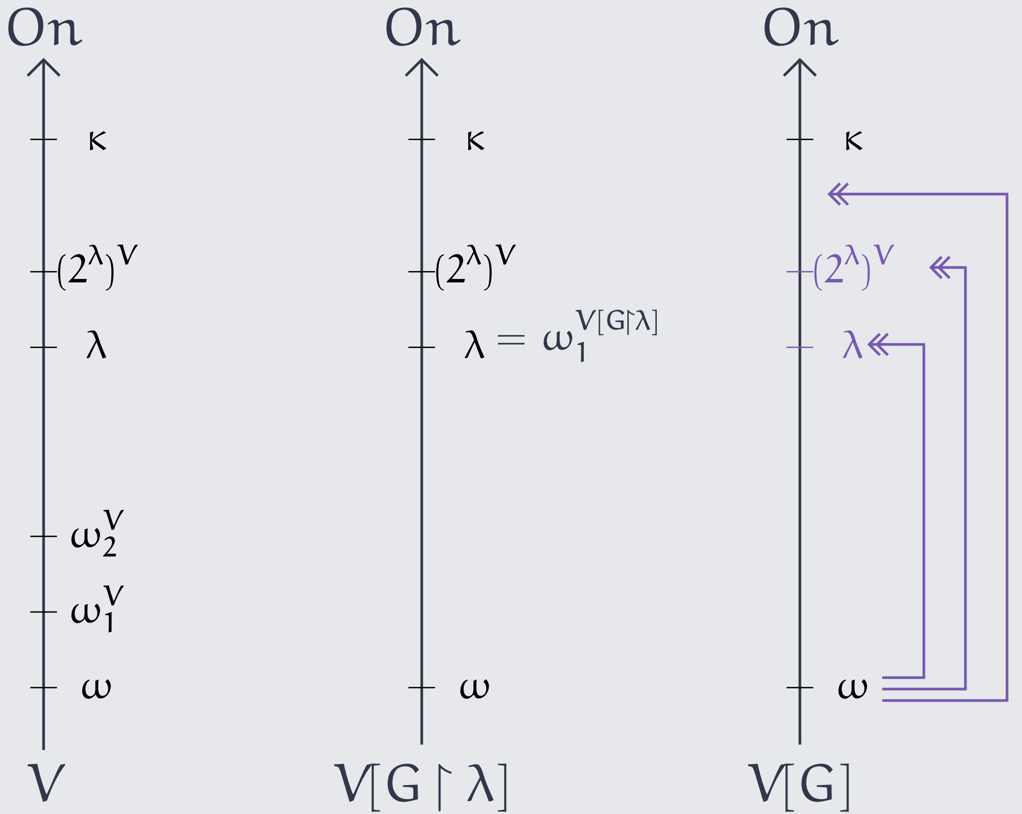
Levy 崩壊のイメージ

★ κ：到達不能、$\lambda < \kappa$：正則とする



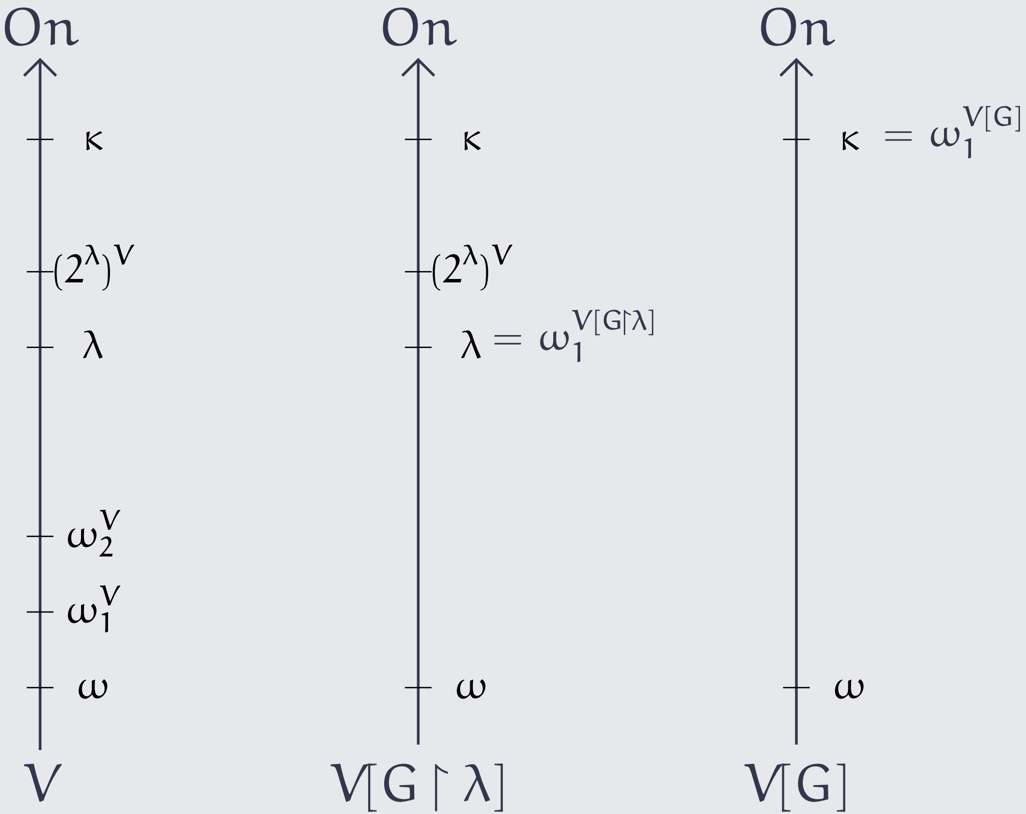
Levy 崩壊のイメージ

★ κ：到達不能、$\lambda < \kappa$：正則とする



Levy 崩壊のイメージ

★ κ : 到達不能、$\lambda < \kappa$: 正則とする



Levy 崩壊の基本性質

補題 13 (Levy 崩壊の基本性質)

κ を正則基数とし、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大とする。

1. V の基数 $\omega < \lambda < \kappa$ は、$V[G]$ では可算順序数となり基数ではない。
2. $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大で成り立つ命題は、$G$ の取り方に依存せず、V で完全に計算できる。
3. κ は $V[G]$ においても基数のままで、$\kappa = \omega_1^{V[G]}$。

以下、更に κ が到達不能基数とする。

4. $V[G]$ の可算列 $f \in {}^{\omega}V[G]$ に対し、正則基数 $\lambda < \kappa$ があり $f \in V[G \restriction \lambda]$。即ち $V[G]$ の可算列は途中の $\lambda < \kappa$ まで潰す段階で付加されている。
5. 任意の $\lambda < \kappa$ について、κ は $V[G \restriction \lambda]$ でも到達不能基数である。
6. $x \in V[G]$ が $V[G \restriction \lambda]$ 上ランダムなら、$V[G]$ は $V[G \restriction \lambda][x]$ の $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大になる。

目標の復習：

任意の実数の集合

$$A \in (\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$$

に対し

$V[G]$ の内部モデル M で

$$(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1^{V[G]}$$

かつ

A: M 上 Solovay

となるものを探す！

Levy 崩壊後の HOD^{ω} に属す実数の集合は Solovay

- 以下、κ を到達不能基数、$V[G]$ を $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大とする。
- 補題 13 を認めると、$(\mathrm{HOD}^{\omega})^{V[G]}$ に属する任意の実数の集合 A が、 系 7 の前提を満たすような M 上で Solovay になることが言える！
  1. HOD^{ω} の定義より $\sigma \in {}^{\omega}\mathrm{On} \cap V[G]$ が取れ $A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x, \sigma) \,\}$。
  2. 補題 13 (4) より、正則基数 $\lambda < \kappa$ が取れて $\sigma \in V[G \restriction \lambda]$ となる。
  3. (3)(5) より $M := V[G \restriction \lambda]$ で κ は到達不能なので $(2^{\aleph_0})^{V[G \restriction \lambda]} < \kappa = \aleph_1^{V[G]}$。
  4. (2)(6) より M- ランダム実数 x に対し $x \in A$ は「任意の $\mathrm{Col}(\omega, {<}\kappa)$- 強制拡大で $\varphi(x, \sigma)$ が成り立つ」という $M[x]$ 内の論理式で判定できる。
  5. 以上より A は $M = V[G \restriction \lambda]$ 上 Solovay で $(2^{\aleph_0})^{M} < \aleph_1$ ！

まとめ

- 到達不能基数 κ を ω_1 に潰した宇宙 $V[G]$ では、そこの HOD^ω は $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ を満たし、HOD^ω に属する任意の実数の集合は Lebesgue 可測になる
  - 可測性の一致： HOD^ω と $V[G]$ は同じ実数を持つことが大事
  - Key: 実数の集合 A が、連続体濃度が外から見て可算になるような内部モデル M に対し Solovay という性質を満たすと Lebesgue 可測になる
    - Solovay 集合は M- ランダム実数上 Borel 集合で近似でき、連続体濃度が小さければ、実数は至るところ M- ランダムとなるので
  - $A \in \mathrm{HOD}^\omega$ は可算列から定義できて、κ の到達不能性からそんな可算列は途中の宇宙 $M := V[G \restriction \lambda]$ に既に現れていて、そこで A の定義論理式が使える
  - κ は途中段階ではまだ到達不能なので $2^{\aleph_0}$ が $V[G]$ で可算になっている
    - この二点に到達不能性の仮定が本質的に効いている

結果の一般化

- Borel 集合族上のイデアル I に対し、I- 正則性の概念が定義できる
  - Lebesgue 可測性＝零集合イデアル null に関する正則性
  - Baire の性質＝痩せ集合イデアル meager に関する正則性 etc.
- 議論を一般化してやると、I が σ- 飽和性や強い適正性という性質を満たす場合、Solovay モデルで任意の実数の集合が I- 正則性を持つ（Khomskii [3]）
  - （Khomskii [3] では単純に I^+ が適正ならよいとされているが、実はもうちょっと条件が要る）
  - 実は「任意の実数の集合が Baire の性質を持つ（BP）」という命題単体には到達不能基数は不要であることが知られている（Shelah [2]）
    - 雰囲気は大昔に書いたスライド [4] が参考になるかも
    - Shelah [2] のモデルは CH も満たす。ZF + DC + BP + ¬CH の無矛盾性が到達不能基数なしで言えるかは未解決（一度アナウンスされたが取り下げられた）

急速フィルター：可測性から到達不能基数へ

当然の疑問

Q: 到達不能基数

本当に要るの？

Shelah「要るで」

到達不能基数、　要るの？

定理 14 (Shelah [2])

ZF + CC + LM の下で、任意の実数 $z \in \mathbb{R}$ に対し、V の ω_1 は L[z] から見ると到達不能基数になっている。

- CC：可算選択公理。AC を可算直積に制限したもので、DC から従う
  - 実は、CC を仮定から外せば到達不能基数は不要（そのかわり解析学が異常になる）
- L[z]：実数 z をパラメータに使って下から定義できる最小の内部モデル。
- Solovay の定理と合わせて、「ZFC + ∃κ：到達不能基数」「ZF + DC + LM」「ZF + CC + LM」は無矛盾性の意味で等価なことがわかった
  - このように、命題の強さを巨大基数公理で分類する時は、「巨大基数＋強制法」で命題のモデルをつくり、逆は「命題を仮定し適当な内部モデルでその巨大基数をみつける」という形で示すのが常套手段

実際の Shelah の定理

- Shelah が示したのは、より精密には次の定理：

定理 14 (Shelah [2])

ZF + CC の下で、任意の Σ^1_3- 集合が Lebesgue 可測なら、ω_1 は任意の実数 z について $L[z]$ で到達不能基数になっている（「ω_1 が実数に対して到達不能」）。

- Σ^1_3- 集合：ある $\mathbb{R}^4$ の Borel 集合 B について、以下の形で書ける集合：

$$\{\, a \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ (a, x, y, z) \in B \,\}$$

- つまり、ある程度の複雑さの論理式で定義できる実数の集合を Lebesgue 可測にするのに到達不能基数が必要！
  - Σ^1_3- 可測性は（到達不能基数の存在を認めるなら）、フルの AC とも両立

Shelah の定理のあらまし

- 実際には次の形の定理を示している：

補題 15

ZF + CC を仮定し、更に任意の Σ^1_2- 集合が可測で、実数 z が $\omega_1^{L[z]} = \omega_1^V$ を満たすとする。このとき、非可測な Σ^1_3- 集合が存在する。

- Σ^1_2- 集合：Σ^1_3 の一個下の複雑性のもの。$\exists\forall\mathcal{B}$ の形で書ける集合。
- 上の補題と Shelah の定理の同値性は次からわかる：

補題 16 (ZF + CC)

「任意の $z \in \mathbb{R}$ について、$\omega_1^{L[z]} < \omega_1^V$」
$\iff$「任意の $z \in \mathbb{R}$ について、ω_1^V は $L[z]$ から見ると到達不能基数」

非可測集合をどう創るか？

- Shelah の証明はかなり大変。Raisonnier [5] が同じ号の論文誌（！）で「数学的」な別証明を与えている。主役は急速フィルターである：

定義 17

ω 上のフィルター $\mathcal{F}$ が急速 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{F}$ は補有限フィルターを含み、任意の単調な $f : \omega \to \omega$ に対し、ある $a \in \mathcal{F}$ があって $\forall n \ |f(n) \cap a| \leqslant n$。

補題 18 (Mokobodzki)

急速フィルターは Lebesgue 非可測。

- 証明の概略：補有限フィルターを含むフィルターは、可測なら零集合（Sierpinski）。一方、Lebesgue 密度定理などを使って急速フィルターの定義条件から不等式評価すると、外測度正となり矛盾。

Raisonnier による急速フィルターの構成

- 余りにもテクいので定義と結果だけ（詳細は大昔に修論 [6] にまとめました）。

定義 19 (Raisonnier フィルター [5])

実数 x の Raisonnier フィルター $\mathcal{F}(x)$ とは、$L[x]$ の実数の「被覆」全体が生成するフィルターのことである。より厳密には、実数集合 A に対し、$H(A) := \left\{ f\text{と}g\text{が異なる最小の桁} \;\middle|\; f, g \in A, f \neq g \right\}$ とする時：

$$a \in \mathcal{F}(x) \overset{\text{def}}{\iff} \exists \langle F_i \subseteq {}^{\omega}2 \mid i < \omega \rangle \left[\bigcup_i H(F_i) \subseteq a \land {}^{\omega}2 \cap L[x] \subseteq \bigcup_i F_i \right]$$

補題 20 (Raisonnier [5])

補題 15 の仮定の下で、$\mathcal{F}(x)$ は Σ^1_3 な急速フィルターである。

Shelah の定理・まとめ

- Shelah [2] は「CC と任意の実数の集合の可測性が成り立つなら、V の ω_1 は全ての実数 z に対し $\mathrm{L}[z]$ で到達不能」を示し、Solovay の「逆」を示した
  - 可測性には到達不能基数は本質的に必要！
  - 実際には、Σ^1_3 という種類の集合の可測性の時点で、既に到達不能基数が必要
- Raissonier は、Σ^1_2- 集合の可測性を仮定した上で、上の状況が破れているとして、Σ^1_3 な非可測集合を構成する別証明を与えている
  - 急速フィルターの一種である Raisonnier フィルターがその非可測集合
  - 証明はかなりテクい……

オマケ： Solovay モデルでの解析学

Solovay モデルでの解析学 1：自動連続性

- Solovay モデルはいい集合しかなかったり、DC しか成り立たないため、「普通」とは異なる解析学が成り立っている。
- 以下では、証明はスキップしつつそうした結果を簡単に見ていく。
  - 詳細は私の修論 [6] の付録を参照（オリジナルの結果ではない）。
- 次は ZF + DC + BP から従う衝撃の結果である：

定理 21 (Wright [7])

ZF + DC + BP を仮定する。B を Banach 空間、W を第二可算ベクトル空間とする。$T : B \to W$ が線型写像なら、T は連続である。特に、Banach 空間から $\mathbb{R}$ への線型汎関数は常に連続である。

Solovay モデルでの解析学 2： Hahn–Banach の不成立

- 一方で、BP や LM のために、成り立たなくなる定理がある。
- たとえば、次の Hahn–Banach の定理は関数解析の基本定理である：

定理 22 (Hahn–Banach の定理)

ZFC を仮定する。B を位相線型空間、$p : B \to \mathbb{R}$ を劣線型とする。 線型部分空間 $B_0 \subseteq B$ 上の線型汎関数 $f : B_0 \to \mathbb{R}$ が B_0 上で $f \leqslant p$ を満たすなら、f は $f \leqslant p$ を保ったまま B 全域に拡張される。

- しかし、次の補題から無制限の Hahn–Banach は Solovay モデルで不成立！

補題 23 (Solovay)

ZF + DC のもとで、B を可分ノルム空間に制限した Hahn–Banach の定理から、Baire の性質も Lebesgue 可測性も持たない実数の集合の存在が従う。

Solovay モデルでの解析学 3：制限された Hahn–Banach

- 補題 23 の証明の概略：
  1. ℓ^∞ についての Hahn–Banach から ω 上のある種の測度を構成する
  2. それから Lebesgue 可測でも Baire でもない集合をつくる
- 抵触しないよう条件を限定すれば、部分的な Hahn–Banach は証明可能：

補題 24 (Solovay)

ZF + DC + BP のもとで、以下の制限された Hahn–Banach が証明可能：

1. B を可分ノルム空間、f を原点で連続な線型写像に制限したもの
2. B を可分 Banach 空間に制限したもの

全体のまとめ

Any Questions?

- Solovay [1] は ZF + DC + 任意の実数の集合が可測 のモデルを与えた
  - 到達不能基数 κ の存在を仮定し、それを ω_1 に潰した宇宙を考え、その中の HOD^ω を見る、という段階を踏んだ
  - 到達不能基数の使いどころ： HOD^ω に属す集合が殆どいたるところ「ランダム」で、ランダム実数上は Borel 集合と一致するようにするのに必要
  - Solovay モデルでは、 他にも任意の実数の集合が Baire の性質などイデアルで一般化された正則性を持つ
- Shelah [2] は、Baire 性には到達不能基数が要らないことを示しつつ、任意といわず Σ^1_3- 可測性に本質的に到達不能基数が必要であることを示した
- Solovay モデルでは線型なら連続になる一方、Hahn–Banach が部分的にしか成り立たなかったりする

References

[1] R. M. Solovay, “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable,” *The Annals of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 92, no. 1, July 1970, doi:10.2307/1970696.

[2] S. Shelah, “Can You Take Solovay's Inaccessible Away?” *Israel Journal of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 48, no. 1, 1984, doi:10.1007/BF02760522.

[3] Yurii Khomskii, “Regularity Properties and Definability in the Real Number Continuum: Idealized forcing, polarized partitions, Hausdorff gaps and mad families in the projective hierarchy”. PhD thesis. Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam, 2012.

[4] 石井大海 , “On Projective Baire Property”. URL: `https://konn-san.com/math/projective-baire-fmyg16.pdf`, 数学基礎論若手の会 2016 における講演 . 2016.

[5] J. Raisonnier, “A mathematical proof of S. Shelah's theorem on the measure problem and related results,” *Israel Journal of Mathematics*, pp. 48–48, vol. 48, no. 1, 1984, doi:10.1007/BF02760523.

[6] Hiromi Ishii, “On Regularity Properties of Set of Reals and Inaccessible Cardinals”. Master thesis. Tsukuba University, 2016.

[7] J. D. M. Wright, “Functional Analysis for the Practical Man,” in *Functional analysis: surveys and recent results - Proceedings of the Conference on Functional Analysis*, K. Bierstedt and B. Fuchssteiner, Eds., North-Holland, 1977, pp. 283–283.

補遺

ZF + LM + ¬CCには到達不能基数は不要

- 軽く触れたように、CC を諦めれば到達不能基数は不要
- Solovay モデルとの違い
  1. κ を到達不能基数とする代わりに、$\kappa := \beth_\omega$ として κ を ω_1 に潰して、

$$\beth_0 := \aleph_0, \quad \beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha}, \quad \beth_\gamma := \sup_{\alpha<\gamma} \beth_\alpha \ (\gamma : \mathrm{limit})$$

  2. HOD^ω の構成を途中の宇宙から来ている ω- 列だけを使うよう修正：

$$(\mathrm{HOD}^\omega)^* := \mathrm{HOD}(\{\, \sigma : \omega \to \mathrm{On} \mid \exists \lambda < \kappa \ \sigma \in V[G \restriction \lambda] \,\})$$

     - こうすると DC や CC を満たすとは限らなくなる
- $V[G]$ と $(\mathrm{HOD}^\omega)^*$ で実数が一致するとは限らないが、 補題 6 での Borel 集合の作り方を見るとこれで十分なことがわかる

Solovay 集合のランダム近似補題について

- 実は、可測性だけを考えるのなら、補題 6 の $(2^{\aleph_0})^M < \aleph_1$ の仮定は不要
- これは、零集合イデアル null が σ- 飽和という性質を満たすため
  - null が σ- 飽和 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 非可算個の測度正の Borel 集合の族 $\langle A_i \mid i < \omega_1 \rangle$ に対し、$i \neq j$ で $\mu(A_i \cap A_j) > 0$ となるものが存在
  - 互いに交わりが零となる Borel 集合からなる族は高々可算、ということ
    - 演習問題：示せ （ヒント：単位区間 $[0, 1]$ 上なら、$\mu(A_i) > \dfrac{1}{n}$ となるものを $(n+1)$- 個もってくればよい。$\mathbb{R}$ 全域なら σ- 有限性を使って帰着）。
- 今回は議論を簡単にするため（どうせ使うし）仮定した
- σ- 飽和なイデアルに付随する正則性も同様にこの仮定は要らないが、もっと一般化しようと思うと必要になる

可測基数と到達不能基数

- Banach の Measure Problem：平行移動不変性の方を諦めると、Lebesgue 測度の $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 全体への拡張の存在は可測基数の存在と無矛盾性等価になる
  - こんな測度の存在は実数値可測基数の存在と同値で、可測基数なら実数値可測。逆に実数値可測基数から、可測基数を持つ内部モデルがつくれる
- 可測基数は到達不能基数に比べると馬鹿デカい。可測基数の下に非有界に到達不能基数が存在する。
- 可測基数は大きな巨大基数の中で最小のもので、現代の集合論者はまあアタリマエにあるでしょと思っている
  - 可測基数や実数値可測基数で null のようなイデアルを考えると、それを使って宇宙から内部モデルへの真偽を保つ同型 $j : V \prec M \subseteq V$ が創れる
  - M を V に近付けていくとより強い原理が得られる