全ての実数の集合を Lebesgue 可測にする
〜 Solovay モデル入門〜

@mr_konn

2024-0xAC

alg-d チャンネル

本日の話題

本日の話題

任意の実数の集合

を

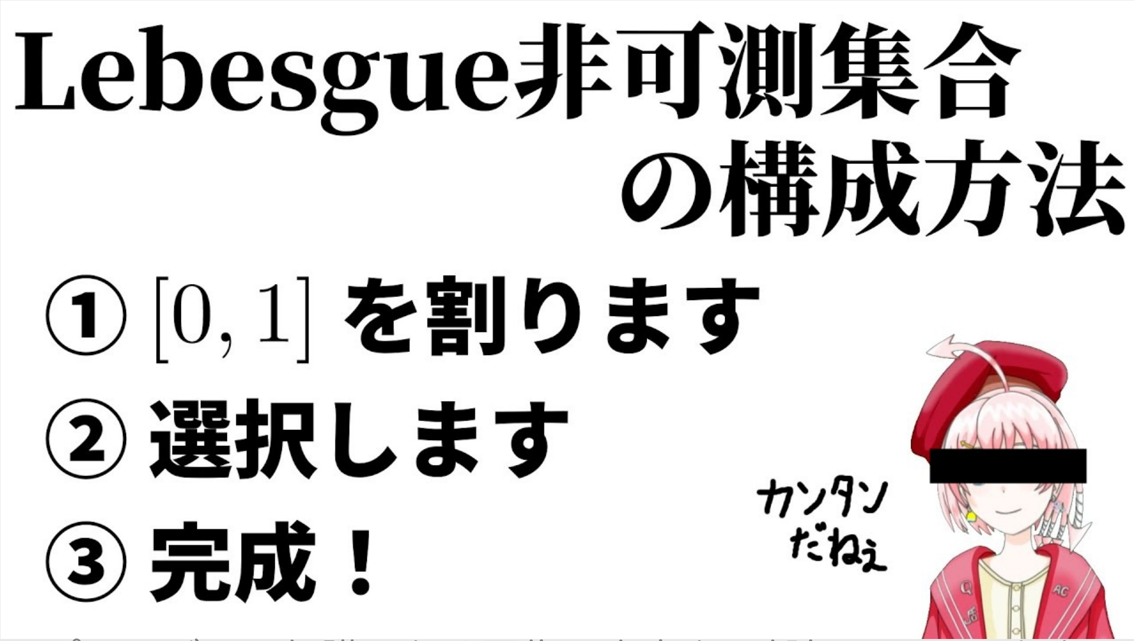
Lebesgue 可測

にします！

？？？

？？？

非可測集合あるやろがい



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
- （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理：$[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って ……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して ……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
  - 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない
    - Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます

非可測集合の作り方

- 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0,1]/\mathbb{Q}$ の完全代表系 X を取って……
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の X を平行移動して……
  3. 可算加法性：可算個の X で $\mathbb{R}$ が覆えて $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾！
  - （他の非可測集合の例は alg_d の動画がいっぱいあるね）
- どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
  - 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない
    - Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます
  - 今回は選択公理を諦めます（Solovay）。

選択公理を諦めます

※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

でも……

でも
「外側」の宇宙
では
選択公理を認めます

選択公理を認めます

※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
  - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙 $V[G]$」は選択公理を満たし非可測集合がありますが……

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
   - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙 $V[G]$」は選択公理を満たし非可測集合がありますが ……

(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $L(\mathbb{R}^{V[G]})$」を見ると ……

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
  - そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙 $V[G]$」は選択公理を満たし非可測集合がありますが ……

(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $L(\mathbb{R}^{V[G]})$」を見ると ……
  - そこには可測集合しかありません！
    - 必然的に選択公理も破れている

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙 $V[G]$」は選択公理を満たし非可測集合がありますが……

(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $L(\mathbb{R}^{V[G]})$」を見ると……
- そこには可測集合しかありません！
  - 必然的に選択公理も破れている
- 従属選択公理はなりたっているので、ある程度マトモな解析学はできます

どゆこと？

(1) まず普通に選択公理を仮定します
- そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙 V」をぶっ壊して「大きな宇宙 $V[G]$」を創ります

(3) 「大きな宇宙 $V[G]$」は選択公理を満たし非可測集合がありますが ……

(4) $V[G]$ の内側の「小宇宙 $L(\mathbb{R}^{V[G]})$」を見ると ……
- そこには可測集合しかありません！
  - 必然的に選択公理も破れている
- 従属選択公理はなりたっているので、ある程度マトモな解析学はできます
- うれしい ✌('ω'✌)三 ✌('ω')✌ 三(✌'ω')✌

集合の宇宙と強制法

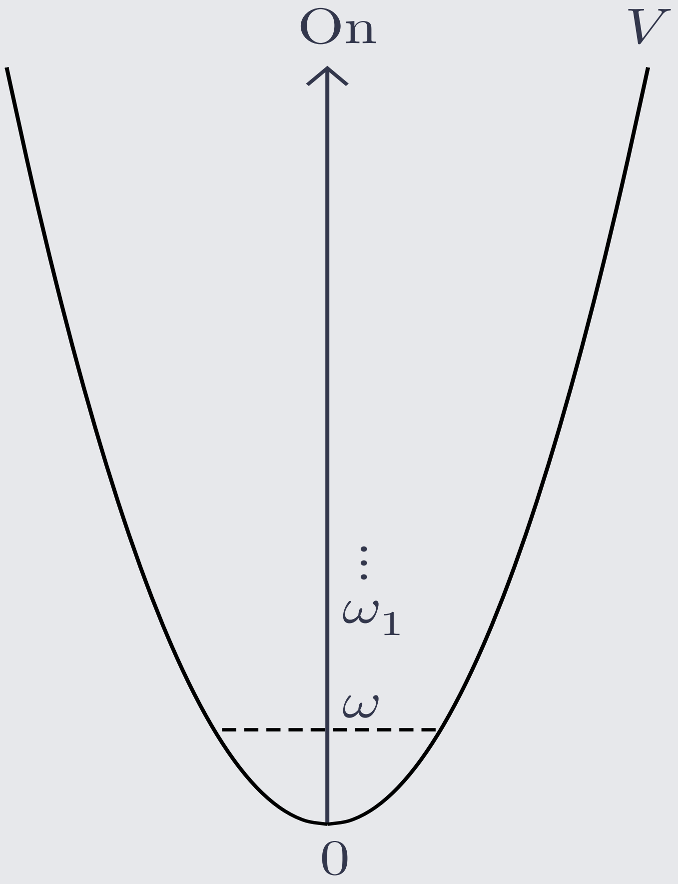
ところで

皆さんは

宇宙の本当の姿

ご存知ですか？

こちらです



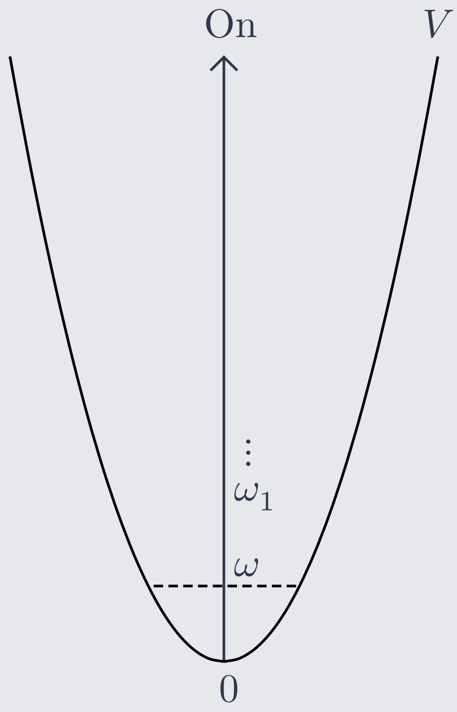
On
V
⋮
ω_1
ω
0

集合の宇宙

- 集合の宇宙 V：集合全体の成すクラスのこと
  - ZFC などの集合論公理系は個別の集合よりも V の性質を定めている
- V は背骨に順序数のクラス On を持ち、それに沿って冪集合を取って得られる（γ は極限）

$$V_0 := \emptyset, \quad V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha), \quad V_\gamma := \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha$$

$$V := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$$



巨大基数

Levy 崩壊

Solovay モデルでの解析学

本当に到達不能基数は必要？