

# 全ての実数の集合を Lebesgue 可測にする ～ Solovay モデル入門～

@mr\_\_konn

2024-0xAC

alg-d チャンネル

本日の話題

本日の話題

# 任意の実数の集合 を Lebesgue 可測 にします！

???

---

???

## Lebesgue非可測集合 の構成方法

- ①  $[0, 1]$  を割ります
- ② 選択します
- ③ 完成！



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

# 非可測集合の作り方

---

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

# 非可測集合の作り方

---

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....

# 非可測集合の作り方

---

◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合**の「構成」は次のようだった：

1. **選択公理**： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
2. **平行移動不変性**：可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....



# 非可測集合の作り方

---

◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合**の「構成」は次のようだった：

1. **選択公理**：  $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
2. **平行移動不変性**： 可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....
3. **可算加法性**： 可算個の  $X$  で  $\mathbb{R}$  が覆えて  $\mu(\mathbb{R}) = 0$  となり矛盾！

▶ （他の非可測集合の例は alg\_d の動画がいっぱいあるね）

# 非可測集合の作り方

---

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....
  3. 可算加法性：可算個の  $X$  で  $\mathbb{R}$  が覆えて  $\mu(\mathbb{R}) = 0$  となり矛盾！
  - ▶ （他の非可測集合の例は alg\_d の動画がいっぱいあるね）
- ◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

# 非可測集合の作り方

---

- ◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：
  1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
  2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....
  3. 可算加法性：可算個の  $X$  で  $\mathbb{R}$  が覆えて  $\mu(\mathbb{R}) = 0$  となり矛盾！
  - ▶ (他の非可測集合の例は alg\_d の動画がいっぱいあるね)
- ◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？
  - ▶ 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない

# 非可測集合の作り方

---

◆ 典型的な非可測集合 Vitali 集合の「構成」は次のようだった：

1. 選択公理： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
2. 平行移動不変性：可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....
3. 可算加法性：可算個の  $X$  で  $\mathbb{R}$  が覆えて  $\mu(\mathbb{R}) = 0$  となり矛盾！

▶ (他の非可測集合の例は alg\_d の動画がいっぱいあるね)

◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

- ▶ 可算加法性は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
- ▶ 平行移動不変性の成り立たない測度を測度と呼びたくない

- Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます

# 非可測集合の作り方

---

◆ 典型的な非可測集合 **Vitali 集合**の「構成」は次のようだった：

1. **選択公理**： $[0, 1]/\mathbb{Q}$  の完全代表系  $X$  を取って .....
2. **平行移動不変性**：可測なら測度零となる筈の  $X$  を平行移動して .....
3. **可算加法性**：可算個の  $X$  で  $\mathbb{R}$  が覆えて  $\mu(\mathbb{R}) = 0$  となり矛盾！

▶ (他の非可測集合の例は `alg_d` の動画がいっぱいあるね)

◆ どれかを諦めれば「全ての実数の集合を Lebesgue 可測」にできるのでは？

- ▶ **可算加法性**は Lebesgue 測度の一番偉いところだったので諦めたくない
- ▶ **平行移動不変性**の成り立たない測度を測度と呼びたくない

- Banach の Measure Problem；こっち諦めると、今回扱うより更に巨大な「可測基数」が出て来ます

▶ 今回は**選択公理**を諦めます (Solovay [1])。

# 選択公理を諦めます



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています

でも .....

---

でも  
「外側」の宇宙  
では  
選択公理を認めます

# 選択公理を認めます



※ プライバシー保護のため画像・音声を一部加工しています



# Solovay モデル

## 定理 1 (Solovay 1970 [1])

$V$  を ZFC の宇宙、 $\kappa$  を到達不能基数、 $V[G]$  を  $\text{Col}(\omega, <\kappa)$ -強制拡大とするとき、 $V[G]$  で見た内部モデル  $\text{HOD}^\omega$  は  $\text{ZF} + \text{DC} + \text{LM}$  のモデルとなる。  
ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

# どゆこと？

---

- (1) まず普通に選択公理を仮定します

# どゆこと？

---

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

# どゆこと？

---

(1) まず普通に選択公理を仮定します

- ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）

(2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります

# どゆこと？

---

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
  - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$  は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが .....

# どゆこと？

---

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
  - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが .....
- (4)  $V[G]$ の内側の「小宇宙  $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると .....

# どゆこと？

---

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
  - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$  は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが .....
- (4)  $V[G]$  の内側の「小宇宙  $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると .....
  - ▶ そこには可測集合しかありません！
    - 必然的に選択公理も破れている

# どゆこと？

---

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
  - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが .....
- (4)  $V[G]$ の内側の「小宇宙  $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると .....
  - ▶ そこには可測集合しかありません！
    - 必然的に選択公理も破れている
  - ▶ 従属選択公理はなりたっているなので、ある程度マトモな解析学はできます



# どゆこと？

- (1) まず普通に選択公理を仮定します
  - ▶ そうしないと通らない議論が沢山ある（選択公理ちゃんマジ公理）
- (2) まず、「今ある宇宙  $V$ 」をぶっ壊して「大きな宇宙  $V[G]$ 」を創ります
- (3) 「大きな宇宙」 $V[G]$ は選択公理を満たし非可測集合を持ちますが .....
- (4)  $V[G]$ の内側の「小宇宙  $(\text{HOD}^\omega)^{V[G]}$ 」（Solovay モデル）を見ると .....
- ▶ そこには可測集合しかありません！
  - 必然的に選択公理も破れている
- ▶ 従属選択公理はなりたっているなので、ある程度マトモな解析学はできます
- ▶ うれしい  $\text{V}(\omega) \models \text{V}(\omega) \models \text{V}(\omega) \models \text{V}(\omega)$

# Solovay モデル・再訪

## 定理 2 (Solovay 1970 [1])

$V$  を ZFC の宇宙、 $\kappa$  を到達不能基数、 $V[G]$  を  $\text{Col}(\omega, <\kappa)$ -強制拡大とするとき、 $V[G]$  で見た内部モデル  $\text{HOD}^w$  は  $\text{ZF} + \text{DC} + \text{LM}$  のモデルとなる。  
ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

- ◆ 知らない単語が結構ありそう

# Solovay モデル・再訪

## 定理 3 (Solovay 1970 [1])

$V$  を ZFC の宇宙、 $\kappa$  を到達不能基数、 $V[G]$  を  $\text{Col}(\omega, <\kappa)$ -強制拡大とするとき、 $V[G]$  で見た内部モデル  $\text{HOD}^w$  は  $\text{ZF} + \text{DC} + \text{LM}$  のモデルとなる。  
ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

- ◆ 知らない単語が結構ありそう
- ◆ Solovay モデルの構成は、修士なら一年くらいかけて理解する内容
  - ▶ 強制法・内部モデルの理解に半年、Solovay モデルの理解に半年くらい

# Solovay モデル・再訪

## 定理 4 (Solovay 1970 [1])

$V$  を ZFC の宇宙、 $\kappa$  を到達不能基数、 $V[G]$  を  $\text{Col}(\omega, <\kappa)$ -強制拡大とするとき、 $V[G]$  で見た内部モデル  $\text{HOD}^w$  は  $\text{ZF} + \text{DC} + \text{LM}$  のモデルとなる。  
ただし、LM は「任意の実数の集合が Lebesgue 可測である」という命題である。

- ◆ 知らない単語が結構ありそう
- ◆ Solovay モデルの構成は、修士なら一年くらいかけて理解する内容
  - ▶ 強制法・内部モデルの理解に半年、Solovay モデルの理解に半年くらい
- ◆ 今回は厳密さにある程度目を瞑って、雰囲気理解を目標にする

# 集合の宇宙と内部モデル、 強制法

集合の宇宙と内部モデル、 強制法

---

ところで

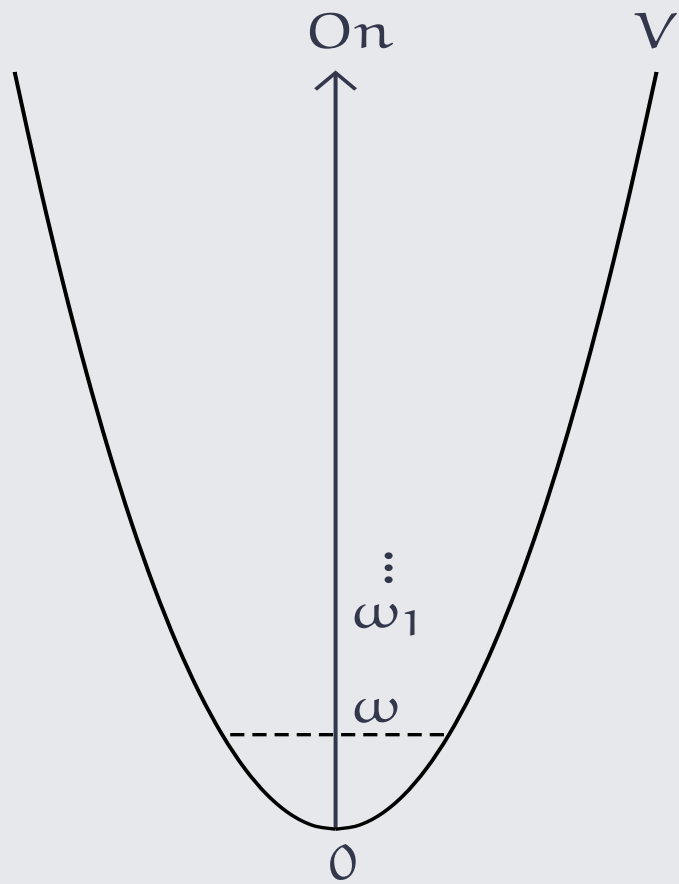
---

皆さんは  
宇宙の本当の姿  
ご存知ですか？

---

# こちらです



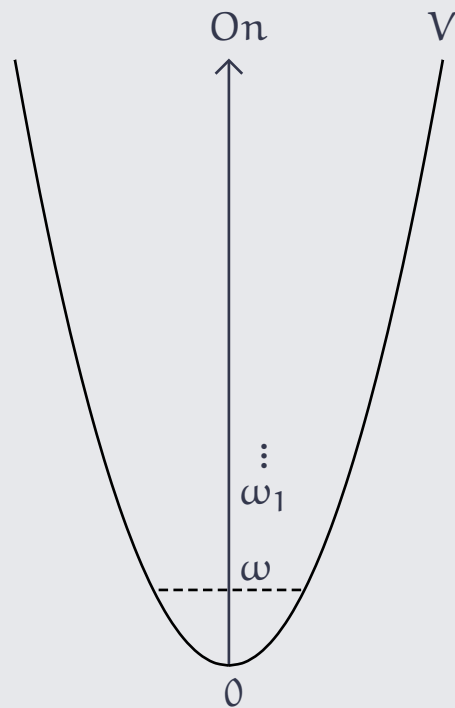


# 集合の宇宙

- ◆ 集合の宇宙  $V$  : 集合全体の成すクラスのこと
  - ▶ ZFC などの集合論公理系は個別の集合よりも  $V$  の性質を定めている
- ◆  $V$  は順序数全体のクラス  $On$  に沿って空集合から繰り返し冪集合を取って得られる :

$$V_0 := \emptyset, \quad V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha), \quad V_\gamma := \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha \quad (\gamma : \text{limit}),$$

$$V := \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$$



# 強制法

- ◆ 強制法：宇宙  $V$  に新たな元  $G$  を付加した最小の外側の宇宙・強制拡大  $V[G]$  を創る技術

- ▶  $G \notin V$  であっても、 $G$  の「近似」全体が成す擬順序  $\mathbb{P}$  は  $V$  にあるので、それを使って議論する
- ▶  $\mathbb{P}$  の元は自由度によって順序づけられており、 $G$  は  $\mathbb{P}$  の超フィルターになる

- ◆  $V[G]$  は、 $\mathbb{P}$ -値集合の宇宙  $V^{\mathbb{P}}$  を  $G$  で割った物：

$$V_0^{\mathbb{P}} := \emptyset, \quad V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} := \mathcal{P}(V_{\alpha}^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}), \quad V_{\gamma}^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha < \gamma} V_{\alpha}^{\mathbb{P}},$$

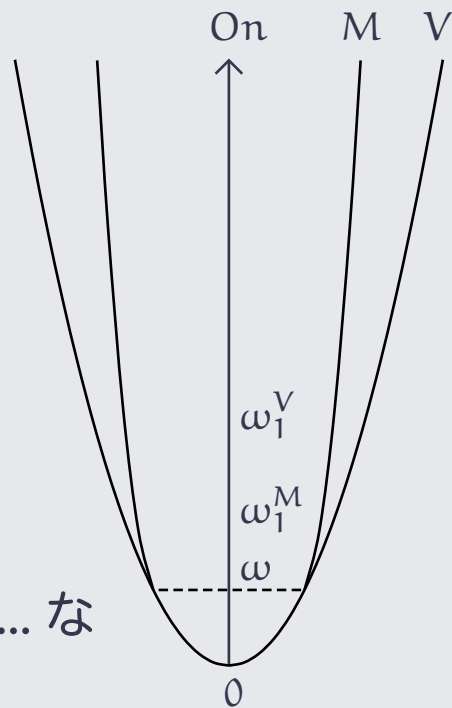
$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_{\alpha}^{\mathbb{P}}, \quad V[G] \cong V^{\mathbb{P}} / G$$

集合の宇宙と内部モデル、強制法



# 内部モデル

- ◆ クラス  $M$  が  $V$  の内部モデル：  $V$  の内側にあり、 $V$  と同じ高さで、ZF のモデルとなるある種のクラス
  - ▶ 例：強制拡大  $V[G]$  から見て  $V$  は内部モデル
  - ▶  $V, M$  の一方で AC が成立しても他方では破れ得る
- ◆ 内部モデルと外側のモデルとでは、種々の概念が一致したりしなかったりする
  - ▶ 一致する概念：任意の有限集合、 $\omega$ 、「 $\alpha$  は順序数である」「個別の  $x$  は実数である」、etc
  - ▶ 変わり得る概念： $2^{\kappa}$ 、「順序数  $\alpha$  は基数である」、 $\omega_1, \omega_2, \dots$  など基数の具体的な値、実数の全体、etc



# 巨大基数

巨大基数

Levy 崩壞

Γελλ 崩壞

# Solovay モデルでの解析学

Σ<sub>1</sub><sup>1</sup> 完全性定理の証明

本当に到達不能基数は必要？

本当に到達不能基数は必要？



まとめ

まとめ

# References

---

- [1] R. M. Solovay, “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable,” *The Annals of Mathematics*, pp. 1–1, vol. 92, no. 1, July 1970, doi:10.2307/1970696.