实验 2. 隐马尔科夫模型实践

MF1733034，李青坪，lqp19940918@163.com

2017 年 11 月 29 日

综述

本次试验将实现隐马尔科夫模型 [1]（Hidden Markov Model, HMM），并将其应用在金融时序数据分析与预测方面。具体而言，对于一个已经训练好的 HMM，实现一个维特比算法，通过动态规划的思想对模型进行推断，其次，如果 HMM 的参数未知，则需要通过数据进行学习与训练，这里将部分实现 Baum–Welch_algorithm. 你将负责其中两个关键函数：HMM 的前向与后向算法。最后，利用自己从零开始写好的 HMM，进行股票的涨跌预测 (for fun), 我们将预测中国某支与 AI 相关的股票的走势。

对于单只股票数据，我们每日可以观测到的值可以是涨、跌，不涨不跌（相对于昨天的收盘价）三种情况。这里将观测的涨跌平编码为 0,1,2 三种取值（0：跌，1：涨，2：平）。我们假设股票的涨跌由内在的隐变量驱动（这是一个十分简化的假设），即牛市或熊市。换言之，牛市（编码为 1）比较有可能驱动股票价格上涨，熊市（编码为 0）比较有可能驱动股票下跌。换言之，在本 HMM 模型中，隐变量仅仅是 1 维的 0/1 离散状态。

实验一.

维特比算法的概念

维特比算法是一种动态规划算法，它用于寻找最有可能产生观测事件序列的维特比路径——隐含状态序列，特别是在马尔可夫信息源上下文和隐马尔可夫模型中。维特比算法是针对一个特殊的图——篱笆网络的有向图而提出的，可以从图中找到最短路径，包括数字通信、语音识别、机器翻译等用到隐马尔可夫模型的技术都可以用维特比算法来解码。

维特比算法的实现

给定隐马尔可夫模型的参数 $\lambda = [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi}]$，$\mathbf{A}$ 表示状态转移概率矩阵，a_{ij} 表示状态 i 转换到状态 j 的概率；$\mathbf{B}$ 表示输出观测概率矩阵，b_{ij} 表示根据状态 i 获得观测值 o_j 的概率；$\boldsymbol{\pi}$ 表示初始状态概率，X 表示观测序列 $\{x_1,x_2,...,x_T\}$，S 表示具有 N 个状态的状态空间。

最有可能产生的状态序列 Y=$\{y_1,y_2,...,y_T\}$ 由以下递推关系给出：

$$V_{1,k} = p(x_1|k) * \pi_k$$

$$V_{t,k} = p(x_t|k) * max_{y \in S}(a_{y,k} * V_{t-1,y})$$

设 path 记录从每一个状态开始，最有可能到达的路径。对于某一状态 y 找到使 $V_{t,y}$ 最大的上一个状态 state，则将 [y] 加入 path[state] 中，直到走完一整条观测序列，找到 T 时刻最大概率所对应的状态 s，则 path[s] 即为最有可能的状态路径。

实验二.

Forward 算法的实现

使 $\alpha_i(t) = p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_t = x_t, Y_t = i|\lambda)$ 表示在 t 时刻，处于状态 i，且观测到 $\{x_1, x_2, ..., x_t\}$ 序列的概率。$\alpha_i(t)$ 的值由以下式子递归得出：

$$\alpha_i(1) = \pi_i b_i(x_1)$$

$$\alpha_i(t+1) = b_i(x_{t+1}) \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) a_{ji}.$$

Forward 算法与维特比算法区别在于：前者是求出在 t-1 时刻，状态空间里面所有的状态能够在 t 时刻转移到状态 i 的概率之和作为 $\alpha_i(t)$；后者是求出在 t-1 时刻，状态空间中的某一状态 y，y 能够在 t 时刻转移到状态 i 的概率最大，$V_{t,y}$ 则为该最大概率。前者用于训练 HMM 模型，后者是用于利用训练后的 HMM 模型根据观测序列计算最有可能出现的状态序列。

实验三.

使 $\beta_i(t) = p(X_{t+1} = x_{t+1}, X_{t+2} = x_{t+2}, ..., X_T = x_T|Y_t = i, \lambda)$ 在时刻 t，给定开始状态 i，观测到结尾部分序列的 $\{x_{t+1}, x_{t+2}, ..., x_T\}$ 的概率。可通过以下式子计算 $\beta_i(t)$：

$$\beta_i(T) = 1$$

$$\beta_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j(t+1) a_{ij} b_j(x_{t+1}).$$

$\beta_i(t)$ 表示的意思就是，在 t+1 时刻，状态空间中的所有状态能够在 t 时刻从状态 i 转移过来的概率之和。

实验结果

实验中，通过 Baum–Welch 算法训练出 HMM 模型，并利用维特比算法进行推断，预测股价的涨跌。执行 HMM_test.py 脚本，验证代号为 002415 的股票在今年的预测准确度，实验结果表明，准确度在 64.7% 左右。如图 1 所示：

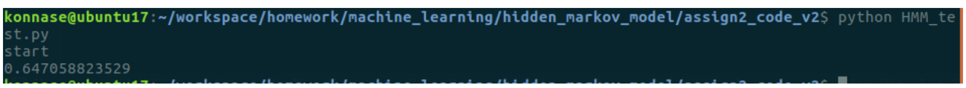

图 1: 实验结果

参考文献

[1] 周志华. *机器学习: = Machine learning*. 清华大学出版社, 2016.