Задание 12. Метод Монте-Карло

Санкт-Петербургский государственный университет

04 апреля 2025

Про что речь у нас

И. М. Соболь. Метод Монте-Карло. М., «Наука», 1968, 64 с. («Популярные лекции по математике», вып. 46).

Решаем задачу: $\int_a^b g(x)\,dx$

Идея вообще: если криволиныйную фигуру вписать в прямоугольник и накидать в прямоугольних рандомных равномерно распределенных точек, то хочется сказать, что отношение площади фигуры к площади прямоугольника будет примерно равно доле точек, попавших внуть фигуры.

Трудность: получение хорошо-рандомных точек. Особенно в многомерных случаях.

Факты из теорвера

Пусть уже имеется некоторая «стандартная» случайная величина γ, равномерно распределенная в $(0, 1)$ (из таблиц или как-то посчитали).
Несколько фактов из теорвера.
Если хочется получить случайную величину ξ, распределенную в интервале (a, b) с плотностью $p_\xi(x)$:

- значения ξ можно получать из уравнения $\int_a^\xi p_\xi(x)dx = \gamma$
- или: берем два значения γ' и γ'' и строим точку с координатами (η', η'')
$$\eta' = a + \gamma'(b - a), \qquad \eta'' = \gamma'' M_0$$
(считаем, что $p_\xi(x) \leqslant M_0$).
Если получившаяся точка лежит под кривой $y = p_\xi(x)$, то полагаем $\xi = \eta'$, иначе пару (γ', γ'') отбрасываем.

Некоторая более эффективная реализация (стр. 51–54 книжки)

Если наряду с ξ с плотностью p_ξ рассмотреть $\eta = \frac{g(\xi)}{p_\xi(\xi)}$, то

$$E\eta = \int_a^b \frac{g(x)}{p_\xi(x)} p_\xi(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

И если взять N одинаковых случайных величин η_j, то

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\eta_j - \int_a^b g(x)dx\right| < 3\sqrt{\frac{D\eta}{N}}\right\} \approx 0{,}997 \Leftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{g(\xi_j)}{p_\xi(\xi_j)} \approx \int_a^b g(x)dx.$$

Видно, что дисперсия (ну и оценка пограшности) зависит от выбора ξ. Она минимальна, когда $p_\xi(x)$ пропорциональна $|g(x)|$ (доказательство есть в книжке).

Численный пример разобран на стр. 53–54.

Задание 12

Задание: приближенно вычислять интеграл

- использовать функции, интеграл от которых известен
- попробовать функции, от которых взять интеграл непросто

Использовать 2 случайных величины, например, с постоянной плотностью и с линейной плотностью, ведущей себя «похожим» на $g(x)$ образом, и несколько разных значения N.
Проводить сравнения. Посмотреть, дейтсвительно ли постоянная плотность дает менее точные результаты.

Если есть возможность корректно генерировать двумерные рандомные точки: реализовать «классическую» идею (что отношение площади фигуры к площади прямоугольника будет примерно равно доле точек, попавших внуть фигуры) и сранить результаты.