Задание 3. Итерационные методы решения СЛАУ
Задание 4. Частичная проблема собственных значений
Задание 5. Полная проблема собственных значений

Татьяна Олеговна Евдокимова
t.evdokimova@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет

21 февраля 2025

Разновидности методов последовательных приближений

Для решения системы $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ исходят из начального x_0 и получают векторы по рекуррентной формуле

$$\mathrm{x}_{k+1} = F_k(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k),$$

F_k — функция от A, b, k, x_0, x_1, $\ldots$, x_k.

Метод имеет *первый порядок*, если F_k зависит только от x_k.
Метод называется *стационарным*, если F_k не зависит от k.

Простейший случай — F_k линейная функция. Общий линейный метод последовательных приближений первого порядка имеет вид:

$$\mathrm{x}_{k+1} = B_k \mathrm{x}_k + \mathrm{c}_k, \tag{1}$$

B_k — квадратная матрица. Поскольку $\mathrm{x} = A^{-1}\mathrm{b}$ и при подстановке точного решения условие должно выполняться, то, таким образом, должно быть верно

$$A^{-1}\mathrm{b} = B_k A^{-1}\mathrm{b} + \mathrm{c}_k \Leftrightarrow \mathrm{c}_k = (E - B_k)A^{-1}\mathrm{b} = C_k \mathrm{b}.$$

Тогда метод примет вид $\mathrm{x}_{k+1} = B_k\, x_k + C_k \mathrm{b}$, где $B_k + C_k A = E$. Если существует C_k^{-1}, то это выражение можно переписать в виде

$$D_k \mathrm{x}_{k+1} + G_k \mathrm{x}_k = \mathrm{b},$$

где $D_k + G_k = A$. Если D_k — диагональная, то метод называется *полношаговым*, если треугольная, то *одношаговым*.

Линейные и нелинейные методы последовательных приближений можно получить, используя способ наименьших квадратов. При этом минимизируется функция $f(\mathrm{x}) = \|A\mathrm{x} - \mathrm{b}\|^2$.

Сходимость

Подставляя выражение для c_k в условие (1), получаем, что $\mathrm{x}_{k+1} - A^{-1}\mathrm{b} = B_k(\mathrm{x}_k - A^{-1}\mathrm{b})$. Отсюда

$$\|\mathrm{x}_{m+1} - A^{-1}\mathrm{b}\| \leq \|B_m\| \cdot \|B_{m-1}\| \cdot \ldots \cdot \|B_1\| \cdot \|B_0\| \cdot \|\mathrm{x}_0 - A^{-1}\mathrm{b}\|.$$

Для сходимости достаточно, чтобы $\|B_k\| < 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

Стационарный линейный процесс

$$\mathrm{x}_{k+1} = B\mathrm{x}_k + C\mathrm{b}$$

сходится при любом начальном векторе и любой правой части тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы.

Достаточные условия сходимости метода простой итерации

Стационарный линейный процесс $\mathrm{x}_{k+1} = B\mathrm{x}_k + C\mathrm{b}$ — *метод простой итерации.*

Поскольку $\max|\lambda_i| \leq \|B\|$, то есть следующие достаточные условия сходимости:

$$\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \leq \mu < 1, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \leq \mu < 1, \;\; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 \leq \mu < 1.$$

Получение решения с заданной точностью ε

Априорная оценка погрешности приближенного решения x_{k+1}:

$$\|\mathrm{x}_{k+1} - \mathrm{x}^*\| \leqslant \|B\|^{k+1}\|\mathrm{x}_0\| + \frac{\|B\|^{k+1}}{1 - \|B\|}\|C\mathrm{b}\|.$$

Апостериорная оценка:

$$\|\mathrm{x}_{k+1} - \mathrm{x}^*\| \leqslant \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|\mathrm{x}_{k+1} - \mathrm{x}_k\|.$$

Линейные одношаговые методы первого порядка

Представляем матрицу $A = L + D + R$, D — диагональная, L — нижняя треугольная с нулями на главной диагонали, R — верхняя треугольная с нулями на главной диагонали. Выбираем параметр $\omega \neq 0$ и строим процесс по формуле:

$$(\omega^{-1}D + L)\mathrm{x}^{(k+1)} + \left[(1-\omega^{-1})D + R\right]\mathrm{x}^{(k)} = \mathrm{b}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{\omega}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right] - (\omega - 1)x_i^{(k)}.$$

Метод Зейделя

Параметр $\omega = 1$. Т.е. вычисляем по формуле

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Поскольку метод можно переписать в виде

$$\mathrm{x}^{(k+1)} = -(D+L)^{-1} R \mathrm{x}^{(k)} + (D+L)^{-1} \mathrm{b},$$

то получаем эквивалентность методу простой итерации с матрицей $-(D+L)^{-1}R$.

Для сходимости метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & a_{n3}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

были по модулю меньше 1.

Если матрица симметрическая и положительно определенная, а приведение системы $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ к виду $\mathrm{x} = B\mathrm{x} + \mathrm{c}$ осуществляется путем деления уравнений на диагональные элементы, и последующего перенесения всех членов кроме x_i, где i — номер уравнения, направо, то метод Зейделя сходится.

Иногда целесообразно (для упрощения вычислений или для улучшения сходимости)

- изменить порядок уравнений в заданной системе;
- или же нумерацию неизвестных;
- или даже при каждом цикле процесса последовательных приближений брать свой порядок.

Приведение системы $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ к виду $\mathrm{x} = B\mathrm{x} + \mathrm{c}$

1. (уже упоминавшийся способ) Для матриц A с диагональным преобладанием:

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j; \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j; \end{cases} \qquad c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

2. Для самосопряженных положительно определенных матриц:

$$B = E - \alpha A, \quad \mathrm{c} = \alpha \mathrm{b},$$

где $\alpha = \frac{2}{m+M}$, где m и M — оценки для наибольшего и наименьшего собственных чисел матрицы A (могут быть получены из теоремы Гершгорина — см. след. занятие).

Идея релаксационного (нестационарного) метода

- Выбирают начальное приближение $\mathrm{x}^{(0)}$.
- Вычисляют невязки $\delta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(0)} - b_i$.
- Находят $x_1^{(1)}$, удовлетворяющее равенству $a_{i1} x_1^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j^{(0)} = b_i$, где i — номер уравнения с максимальной по модулю невязкой (или «лучший» по каким-либо другим соображениям).
- Затем подсчитываем невязки $\delta_j = a_{j1} x_1^{(1)} + \sum_{l=2}^{n} a_{jl} x_j^{(0)} - b_j$, $j \neq i$
- и подбираем $x_2^{(1)}$, удовлетворяющее равенству $a_{j1} x_1^{(1)} + a_{j2} x_2^{(1)} + \sum_{l=3}^{n} a_{jl} x_l^{(0)} = b_j$, где j — номер уравнения с наибольшей по модулю невязкой.
- И т.д., пока не используем все n уравнений. $\Leftrightarrow$ Найдем все $x_i^{(1)}$.
- Тогда начинаем второй цикл, аналогично, но вместо $\mathrm{x}^{(0)}$ используется $\mathrm{x}^{(1)}$.
- Повторение циклов продолжают до тех пор, пока не достигнут требуемой точности.

Задание 3. Итерационные методы для решения СЛАУ

- Реализовать решение СЛАУ двумя итерационными методами: методом простой итерации + методом Зейделя.
- Сравнить количество итераций, если это сравнение корректно.
- Находить решения с разной точностью.

  Примечание: поскольку релаксационные методы используют более «свежую» информацию о сделанных преобразованиях, то обычно они сходятся быстрее метода простой итерации.

- Протестировать работу методов на симметричных с диагональным преобладанием разреженных матрицах большого порядка (больше 1000).

  Работающая реализация метода релаксации с тестированием на больших разреженных матрицах — +10 баллов.

Литература

И.С.Березин, Н.П.Жидков, Методы вычислений, том 2

Методичка А.Н.Пакулиной

Определения, классификация методов [2]

Пусть A — некоторая матрица. Число λ называется собственным числом A, если существует вектор $x \neq 0$ такой, что $Ax = \lambda x$.
Характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = 0$.
Если по заданной матрице строится характеристический многочлен и находятся его корни — это *точный* метод нахождения собственных чисел.

Проблемы: небольшие погрешности в коэффициентах характеристического полинома могут привести к большой ошибке при вычислении корней.

Иногда выстречается: при вычислении корней характеристического полинома вещественной симметричной матрицы в каком-либо математическом пакете в результатах появляются мнимые части.
$\Rightarrow$ Будьте бдительны! Обращайте внимание на величину мнимой части!

Очевидное замечание: находить характеристический полином, находить его корни — может быть трудоемко.

Локализация собственных значений [1]

Обозначим $R_i(A) \equiv \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — множество собственных значений.

Теорема (Гершгорин). Для любой матрицы A справедливо соотношение:

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}.$$

Кроме того, если объединение k, $1 \leq k \leq n$, из этих кругов — связная область, не пересекающаяся с остальными $n-k$ кругами, то в ней находятся ровно k собственных чисел матрицы A.

Пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 3 \end{pmatrix}$. Круги Гершгорина имеют вид:

$$|z-1| \le 0{,}3$$
$$|z-2| \le 0{,}3$$
$$|z-3| \le 0{,}4$$

Круги не пересекаются. Т.е. диагональные элементы — приближения собственных чисел матрицы.

Улучшение результата приближения [2]

Пробуем уточнить. Построим подобную матрицу $\tilde{A} = P^{-1}AP$, где

$$P = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ 0 < \alpha < 1$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21}/\alpha & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}/\alpha & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Можем варьировать параметр α.
Если его уменьшаем, т.е. уменьшаем круг R_1, то будут увеличиваться круги R_2 и R_3. Пока они не пересекаются — с.ч. локализованы.

Чтобы не пересеклись R_1 и R_2 надо:

$$a_{11} + R_1(\tilde{A}) < a_{22} - R_2(\tilde{A})$$
$$\Leftrightarrow 1 + 0{,}3\alpha < 2 - 0{,}2/\alpha - 0{,}1$$
$$\Leftrightarrow 0{,}3\alpha^2 - 0{,}9\alpha + 0{,}2 < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (0{,}2417,\ 2{,}7583)$$

Возьмем $\alpha = 0{,}242$:

$$R_1(\tilde{A}) = \alpha R_1(A) = 0{,}242 \cdot 0{,}3 = 0{,}0726$$
$$\Rightarrow |\lambda - 1| \leq 0{,}073$$

Разумеется, нужно проверить на непересечение с третьим кругом:

$$R_3(\tilde{A}) = 0{,}2/\alpha + 0{,}2 < 1{,}027$$

$\Rightarrow$ видно, что тут тоже всё хорошо $(3 - 1{,}027 > 1{,}073)$.

Преобразование подобия [4]

У треугольной матрицы — собственные числа стоят на диагонали. Можно ли преобразовать произвольную матрицу с сохранением спектра к виду, для которого вычислять собственные значения проще?

Пусть имеется некоторая неособенная матрица F. У нее существует обратная F^{-1}. Преобразованием подобия называется преобразование матрицы A:

$$B = FAF^{-1}.$$

Преобразование подобия не меняет спектра матрицы.

Лучшие F — преобразующие ортогональный базис в ортогональный — **унитарные** матрицы.
Вещественная унитарная матрица называется **ортогональной**.
$U^{-1} = U^H$.

Не существует конечной цепочки преобразований подобия, приводящей произвольную матрицу к диагональной или верхней треугольной форме.

Но к верхней почти треугольной (эрмитову — к трехдиагональной) привести за конечное число шагов можно. Это методы отражения и вращения (формулы описаны в предыдущей презентации).

Степенной метод [6, 3, 1]

Пусть матрица A имеет полную систему ортонормированных собственных векторов e_i, $i = 1, \ldots, n$: $Ae_i = \lambda_i e_i$, причем $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Тогда любой вектор $x^{(0)}$ может быть записан в виде

$$x^{(0)} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_n e_n.$$

Построим итерационный процесс

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = c_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + c_n \lambda_n e_n,$$

$$x^{(2)} = Ax^{(1)} = A^2 x^{(0)} = c_1 \lambda_1^2 e_1 + \ldots + c_n \lambda_n^2 e_n,$$

$$\ldots$$

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} = A^{k+1} x^{(0)} =$$

$$= c_1 \lambda_1^{k+1} e_1 + \ldots + c_n \lambda_n^{k+1} e_n = c_1 \lambda_1^{k+1} e_1 + O(|\lambda_2^{k+1}|).$$

Следовательно,

$$x^{(k+1)} = A^{k+1}x^{(0)} = \lambda_1^{k+1}c_1\left[e_1 + O\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k+1}\right].$$

Т.е. при достаточно большом k вектор $x^{(k+1)}$ будет близок к собственному вектору A, соответствующему наибольшему по модулю собственному числу.

$$\lambda_1^{(k)} := \frac{(x^{k+1},\ x^{(k)})}{(x^{(k)},\ x^{(k)})} = \lambda_1 + O\left(\lambda_1\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k}\right).$$

Замечания

1. Может случиться, что $(x^{(0)}, e_1) = 0$. Однако, с некоторого шага, из-за округлений, равенство нарушится и процесс начнет сходиться. Но лучше взять другое начальное приближение.
2. Если $|\lambda_1| > 1$, то $\|x^{(k)}\| = c_1 \lambda_1^k e_1 + O\left(|\lambda_2^k|\right) \to \infty$. $\Rightarrow$ Чтобы не было переполнения или потери точности, нужно иногда нормировать.
3. Считается, что процесс сошелся, если отношения соответствующих координат векторов $x^{(k+1)}$ и $x^{(k)}$ с требуемой точностью одинаковы и не меняются на последних итерациях.
4. Апостериорная оценка погрешности: $|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1| \leqslant \frac{\|x^{(k+1)} - \tilde{\lambda}_1 x^{(k)}\|_2}{\|x^{(k)}\|_2}$.

Метод скалярных произведений (ускорение сходимости) [6]

Вместе с матрицей A рассматриваем матрицу A^T с ортонормированной системой собственных векторов v_i, $i = 1, \ldots, n$. Взяв $y^{(0)} = d_1 v_1 + \ldots + d_n v_n$, строим итерационный процесс $y^{(k+1)} = A^T y^{(k)} = A^{Tk} y^{(0)}$. Тогда

$$\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) = \left(A^k x^{(0)}, A^{Tk} y^{(0)}\right) = \left(A^{2k} x^{(0)}, y^{(0)}\right) =$$
$$= \left(c_1 \lambda_1^{2k} e_1 + \ldots + c_n \lambda_n^{2k} e_n, d_1 v_1 + \ldots + d_n v_n\right) =$$
$$= c_1 d_1 \lambda_1^{2k} + c_2 d_2 \lambda_2^{2k} + \ldots + c_n d_n \lambda_n^{2k}$$

Аналогично,

$$\left(x^{(k-1)}, y^{(k)}\right) = c_1 d_1 \lambda_1^{2k-1} + \ldots + c_n d_n \lambda_n^{2k-1}$$
$$\Rightarrow \frac{\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right)}{\left(x^{(k-1)}, y^{(k)}\right)} \approx \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right).$$

Замечания

Если A — симметричная, то при $x^{(0)} = y^{(0)}$ последовательности $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ совпадают. Т.е. надо вычислить $\lambda_1 \approx \frac{(A^k x^{(0)}, A^k x^{(0)})}{(A^{k-1} x^{(0)}, A^k x^{(0)})}$.

Если при построении последовательностей мы их нормируем, то пользуемся формулами

$$\lambda_1 \approx \frac{(A\tilde{x}^{(k-1)},\, \tilde{y}^{(k)})}{(\tilde{x}^{(k-1)},\, \tilde{y}^{(k)})} \text{ либо } \lambda_1 \approx \frac{(\tilde{x}^{(k)},\, A^T \tilde{y}^{(k-1)})}{(\tilde{x}^{(k)},\, \tilde{y}^{(k-1)})}$$

Несколько утверждений [2]

1. Если $\{\lambda_i\}$ собственные числа A, а $\{e_i\}$ её собственные векторы, то $\{-\lambda_i\}$ собственные числа матрицы $-A$, а $\{e_i\}$ её собственные векторы.
2. Если $\{\lambda_i\}$ собственные числа A, а $\{e_i\}$ её собственные векторы, то $\{\lambda_i - \xi\}$ собственные числа матрицы $A - \xi E$, а $\{e_i\}$ её собственные векторы.
3. Если $\{\lambda_i\}$ собственные числа A, а $\{e_i\}$ её собственные векторы, то $\{\lambda_i^{-1}\}$ собственные числа матрицы A^{-1}, а $\{e_i\}$ её собственные векторы.

Как вычислить какие-то другие с.ч.?

- Наибольшее с.ч.: строим матрицу $B = A + E\|A\|_\infty$; её с.ч. — это $\mu_i = \lambda_i + \|A\|_\infty$; они все > 0. И найдя μ_1, наибольшее по модулю с.ч. B, наибольшее с.ч. A определяется как $\lambda_1 = \mu_1 - \|A\|_\infty$.
- Наименьшее с.ч.: надо вычислить наибольшее с.ч. матрицы $-A$.
- Наименьшее по модулю с.ч. A (=обратный степенной метод): надо найти ν наибольшее по модулю число A^{-1}; тогда наименьшее по модулю $\lambda_n = \nu^{-1}$.

Обратные итерации со сдвигом [4]

Применяются для уточнения приближения к какому-нибудь с.ч.

Пусть $\tilde{\lambda}$ — некоторое приближенное значение с.ч. λ_M. Взяв начальный вектор $x^{(0)}$, строим итерационный процесс со сдвинутой матрицей

$$(A - \tilde{\lambda}E)x^{(k)} = x^{(k-1)},\ k = 1,\, 2, \ldots$$

На каждом шаге нужно решать систему.
Поскольку $\tilde{\lambda} \approx \lambda_M$, то коэффициент разложения при собственном векторе e_M будет быстро увеличиваться (остальные останутся небольшими). $\Rightarrow$ сходимость $x^{(k)}$ к e_M по направлению. А отношения компонент $x^{(k-1)}$ и $x^{(k)}$ будут близки к $(\lambda_M - \tilde{\lambda})^{-1}$.

Ускорение сходимости обратных итераций со сдвигом/метод Виландта [4, 5]

Идея: матрица сдвига не постоянная, а меняется на каждом шаге в зависимости от нового полученного приближения.

Т.е. итерационный процесс будет таким:

$$(A - \tilde{\lambda}^{(k-1)}E)x^{(k)} = x^{(k-1)},\ k = 1, 2, \ldots$$

$$\tilde{\lambda}^{(k)} = \tilde{\lambda}^{(k-1)} + \frac{(x^{(k)},\ x^{(k-1)})}{(x^{(k)},\ x^{(k)})}$$

Задание 4. Нахождение максимального по модулю с.ч.

Реализовать для нахождения максимального по модулю собственного числа и соответствующего собственного вектора матрицы степенной метод и метод скалярных произведений.

- Вычисления проводить до достижения точности ε.
- Варьируя ε, изучить зависимость количества итераций от ε.
- Сравнить количество итераций в методах (при каждом фиксированном ε), если такое сравнение корректно.

Некоторые источники примеров матриц:

- методичка А.Н. Пакулиной
- учебник Д.К. Фаддевва и В.Н. Фаддеевой
- матрицы Гильберта разного порядка

Подумать о проверке корректности полученных результатов.

Дополнения задания 4

Часть 1. Реализовать для нахождения минимального (или минимального по модулю) собственного числа и соответствующего собственного вектора матрицы степенной метод и метод скалярных произведений.

Часть 2 (исследовательская). Вычислив круги Гершгорина, взять произвольное начальное приближение из объединения кругов (например, середину) и методом обратных итераций со сдвигом найти какое-нибудь «среднее» с.ч.

Метод вращений Якоби (итерационный) [3, 1]

Для приведения к диагональному виду.

- Предназначен только для эрмитовых матриц.
- Угол поворота выбирается так, чтобы обнулить какой-нибудь недиагональный элемент (конечно, лучше — max по модулю!)
- Поэтому уже обнуленный элемент при дальнейших поворотах может «испортиться» (увеличиться).
- Т.е. здесь не конечное количество шагов.
- И сходимость медленная.
- Но матрица приводится к диагональному виду, т.е. сразу получаем все собственные значения.
- И метод устойчив.

Теоретическое замечание

Симметричная вещественная матрица, у нее $\sum\limits_{\substack{i,j\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|^2 \geq 0$ — диагонализируема, с помощью некоторой ортогональной матрицы.
Для диагональной матрицы — эта сумма $= 0$.
Т.е. если будем строить последовательность ортогональных преобразований так, чтобы сумма квадратов недиагональных элементов строго уменьшалась, то процесс сойдется; к матрице, имеющей такие же с.ч.
Чтобы уменьшить максимально за один поворот — надо обнулять один из недиагональных элементов и лучше тот, который побольше.

Реализация метода Якоби

Элементарное (плоское) вращение задается матрицей ($c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$)

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & -s & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & s & & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

И для обнуления ij-элемента, $i < j$, получаем:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\varphi = -2a_{ij}/(a_{ii} - a_{jj}), \;\; a_{ii} \neq a_{jj} \\ \varphi = \pi/4, \;\; a_{ii} = a_{jj} \end{cases}$$

Окончательные расчетные формулы

Пусть $x \equiv -2a_{ij}$, $y \equiv a_{ii} - a_{jj}$.

$$\cos\varphi = \sin\varphi = 1/\sqrt{2}, \text{ при } y = 0,$$

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}, \ \sin\varphi = \frac{\mathrm{sign}\,(xy)|x|}{2\cos\varphi\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ при } y \neq 0.$$

Стратегии выбора обнуляемого элемента

1. Максимальный по модулю недиагональный. Но на каждом шаге искать максимум — накладно.
2. Циклический выбор. Нумеруем недиагональные элементы и просто обнуляем по кругу.
3. Стратегия «преград-барьеров»: выбираем барьер ε_1 и циклически обнуляем только элементы $> \varepsilon_1$; затем выбираем второй барьер $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и обнуляем элементы $> \varepsilon_2$, и т.д.
4. Выбор оптимального элемента = максимальный по модулю в строке, определяющей круг Гершгорина максимального радиуса.

Останавливаем итерации: когда все $R_i < \varepsilon$.

Конструктивно про оптимальный выбор

Т.е. строка определяется из условия

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|^2 = \max_{l=1,\dots,n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} |a_{lj}|^2,$$

а столбец — из условия

$$|a_{ij}| = \max_{\substack{m=1,\dots,n\\ m\neq i}} |a_{im}|.$$

Для уменьшения вычислительных расходов (k — номер шага): кроме матрицы A_k храним вектор $b^{(k)}$: $b_l^{(k)} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} \left|a_{lj}^{(k)}\right|^2$. На каждом шаге у него меняются только две компоненты, их и пересчитываем; и строка i — max по модулю элемент вектора.

Задание 5. Нахождение всех с.ч. матрицы

Реализовать метод Якоби поиска всех собственных чисел. Использовать две какие-либо стратегии выбора обнуляемого элемента. Сравнить.

- Вычисления проводить до достижения точности ε.
- Варьируя ε, изучить зависимость количества итераций от ε.
- Выводить количество итераций.
- По теореме Гершгорина определить область и её структуру, в которую должны попадать с.ч. матрицы. Проверить, действительно ли найденные значения в область попали.

Сравнить с результатами задания 4..

[1] Богачев К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. (часть 2) 1998.

[2] Борзых А.Н. Алгебраическая проблема собственных значений. 2019.

[3] Калиткин Н.Н. Численные методы.

[4] Калиткин Н.Н., Альшина Е.А. Численные методы. Книга 1. 2013.

[5] Пакулина А.Н. Практикум по методам вычислений. Часть 1. 2019.

[6] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры.