Задание 15. Исследование устойчивости разностных схем на примере уравнения переноса

Санкт-Петербургский государственный университет

14 марта 2025

[1] Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. Книга 2. 2013.
— также для заданий 8 и 9; разумное описание идей устойчивости

[2] Калиткин Н.Н. Численные методы. 1978.
— для сравнения произошедших в подаче материала изменений

Постановка задач [1]

Решать задачу «частица $\leftrightarrow$ уравнение» — неудобно; лучше описывать характеристики.
$\Rightarrow$ уравнения в частных производных, интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения.

Независимые переменные обычно: время (t), координаты $(\mathbf{r})$.
Решение стационарной задачи ищется в пространственной области $G(\mathbf{r})$ с границей Г; область может быть неограниченной.
Нестационарные задачи обычно решаются в области $G(\mathbf{r}) \times [0 \le t \le T]$. Но возможны и другие границы области.
Полная постановка задачи — дифференциальное уравнение и дополнительные условия.
$\Rightarrow$ краевые задачи (стационарные), задачи Коши, смешанно-краевые или начально краевые (нестационарные).

Идея

- В области $G(x, y)$ вводят сетку.
- Все производные в уравнении и краевых условиях заменяют разностями значений функции $u(\mathbf{r}, t)$ в узлах сетки.

Получающиеся уравнения = разностная схема.
Решая, находим приближенное (разностное) решение в узлах сетки.

Методы, близкие к разностным

Метод прямых.
Сетка только для пространственных переменных; время непрерывно.
Производные по дискретным переменным заменяются разностями.
Т.е. уравнение в частных производных аппроксимируется дифференциально-разностными уравнениями. Имеем систему большого числа ОДУ. Решаем схемами интегрирования по времени.

Метод конечных элементов.
Разложение по пространственным базисным функциям на конечных носителях (например, сплайны).
Коэффициенты находят методами Ритца или Галеркина.

Но фактически всё равно получаем некоторые разностные схемы.

Одномерные задачи

Пространственная область — отрезок $G(x) = [0 \leq x \leq a]$.
Пространственно-временна́я область — прямоугольник $[0 \leq x \leq a,\ 0 \leq t \leq T]$.
$\Rightarrow$ Сетка строится естественно:

- пространственная сетка $\{x_n,\ 0 \leq n \leq N; x_0 = 0,\ x_N = a\}$; шаг $h_n = x_n - x_{n-1}$;
- временна́я сетка $\{t_k,\ 0 \leq k \leq K; t_0 = 0,\ t_K = T\}$; шаг $\tau_k = t_{k+1} - t_k$.

Каждая из сеток может не быть равномерной. Ячейка — прямоугольник $[x_{n-1}, x_n;\ t_k, t_{k+1}]$.

Совокупность всех узлов, лежащих на линии $t = t_k$ — *слой*.
Линия $t = t_0$ — начальный слой.
Пространственные точки $x_0 = 0$ и $x_N = a$ — граничные, остальные — внутренние.
В разностную схему могут входить величины из нескольких соседних ячеек.
Но если входят только из одной — это бикомпактная схема.

Стационарные задачи

Если область G прямоугольник, то и сетка прямоугольная. Может быть неравномерной.

Если $\Gamma(G)$ — деформированный прямоугольник, то строят два семества линий, похожих на соответствующие границы области. Это *регулярные* сетки. Каждая ячейка похожа на деформированный прямоугольник. Лучше, если семества линий взаимно ортогональны.

Если граница произвольной формы, то какие-то узлы размещают на границе, а внутри строят сетку с ячейками треугольной формы. Это *нерегулярные* сетки.

Шаблон

Мы внутри области заменяем разностной схемой только само уравнение в частных производных.

И используем для этого одну и ту же конфигурацию узлов — *шаблон*, которую можно соотнести некоторому узлу; *регулярный* узел.

В граничных узлах нужно учитывать граничное условие, приходится видоизменять стандартный шаблон — это *нерегулярные* узлы.

Явные и неявные схемы

Бо́льшая часть задач — содержит время (производную по времени).
$\Rightarrow$ Разностная схема должна включать значения с нескольких слоев.
Если в уравнении только первая производная, то в схеме обычно два слоя: исходный t_k и новый $t_k + \tau$.
Если есть вторая производная, то нужны 3 слоя: ещё и предыдущий $t_k - \tau$.
Обозначения:

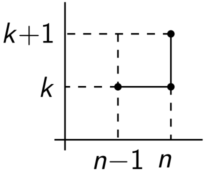
$$u(x_n,\, t_k) = u_n,\;\; u(x_n,\, t_k + \tau) = \hat{u}_n,\;\; u(x_n,\, t_k - \tau) = \check{u}_n.$$

Явная схема = шаблон содержит только одну точку нового слоя.
Неявная схема = шаблон содержит несколько точек нового слоя. $\Rightarrow$ Для нахождения решения на новом слое в общем случае нужно решать систему (но в уравнении переноса можно обойтись!).

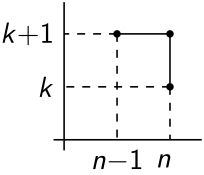
Составление схем на примере

Уравнение переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,\, t)$, $c = \mathrm{const} > 0$.
Метод разностной аппроксимации.

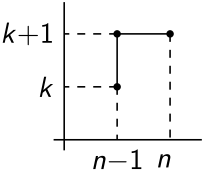
Явная



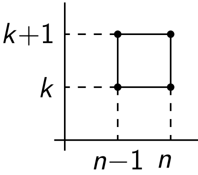
Чисто неявная



Неявная



Симметричная



Второй способ

Интегро-интерполяционный метод/метод баланса.
Применим к уравнениям с негладкими/разрывными коэффициентами.
Уравнение выше первой степени заменяем эквивалентной системой уравнений с первыми производными.
Сетку строим так, чтобы все точки разрыва коэффициентов были узлами.
Интегрируем по ячейке и точно берем интегралы от производных $\Rightarrow$ соотношение = интегральный закон сохранения

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} (\hat{u} - u)dx + c \int_t^{\hat{t}} (u_u - u_{n-1})dt = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_t^{\hat{t}} f \, dt \, dx.$$

Внутри ячейки всё гладко, поэтому можно пользоваться любой квадратурной формулой.
По формуле правых прямоугольников получим неявную схему (см. ранее).

Аппроксимация

Разностная схема аппроксимирует дифференциальное уравнение, если невязка (определяемая на множестве узлов сетки)

$$\|\psi\| \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Аппроксимация имеет порядок p, если

$$\|\psi\| = O(h^p) \text{ при } h \to 0.$$

Используемые нормы:

$$\|\psi\|_c = \max_{0 \le n \le N} |\psi_n|, \quad \|\psi\|_{l_2} = \left(\sum_n h_n \psi_n^2 / \sum_n h_n \right)^{1/2}.$$

Дают локальную и среднеквадратичную аппроксимации соответственно.

Многомерность

В многомерных сетках могут быть разные шаги по разным переменным (h, τ, ...).
Тогда в определении аппроксимации надо требовать $h \to 0$, $\tau \to 0$.
И порядок может быть разным. Например, $\|\psi\| = O(\tau^p + h^q)$.
Тут $\|\psi\| \to 0$ при любых законах стремления τ и h к нулю.
Это **безусловная** аппроксимация.

А если $\|\psi\| = O(\tau^p + h^q + \tau^r/h^s)$, то нужно ещё дополнительное условие $\tau^r/h^s \to 0$.
Это **условная** аппроксимация.

Неустойчивость. Пример

Явная схема для уравнения переноса:

$$(\hat{u}_n - u_n)/\tau + c(u_n - u_{n-1})/h = f_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \hat{u}_n = \tau f_n + (1-\kappa)u_n + \kappa u_{n-1}, \ \kappa = c\tau/h.$$

Если u_{n-1} вычисляется с ошибкой — δu_{n-1}, то и новое значение будет с ошибкой: $\delta \hat{u}_n = \kappa \delta u_{n-1}$. Т.е. при переходе на новый слой ошибка изменилась в κ раз.

Мораль: если соотношение τ и h таково, что $\kappa > 1$, то сгущение сетки не приведет к точному решению.
Это явление *неустойчивости.*

Неустойчивость. Основные понятия

Пусть на сетке ω_N есть схема $B(v(x)) = \Phi(x)$. B — разностный оператор; $v(x)$ — численное решение, Φ — видоизмененная правая часть.
Каковы свойства схемы, чтобы в ней не возникало неустойчивости?
Внесем в правую часть ошибку $\delta\Phi(x)$ и найдем сеточное решение:

$$B(v(x) + \delta v(x)) = \Phi(x) + \delta\Phi(x).$$

Схема называется *устойчивой*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$, не зависящее от шага h, что

$$\|\delta\Phi\| < \delta \Rightarrow \|\delta v\| < \varepsilon.$$

Т.е. $\delta v(x)$ непрерывно зависит от $\delta\Phi(x)$. Устойчивость не зависит от дифференциального уравнения; является внутренним свойством самой схемы.

Если разностная схема линейна ($Bv(x) = \Phi(x)$), то определение устойчивости будет: $\|\delta v\| \le M\|\delta\Phi\|$, где M — константа, не зависящая от h.

Многомерный случай

Устойчивость называется **безусловной**, если неравенство (то или другое, с пред. слайда) выполняется при произвольном соотношении шагов по различным переменным.
Иначе (если шаги по разным переменным должны удовлетворять дополнительным соотношениям) устойчивость называется **условной**.

Для уравнения переноса:

- явная схема условно устойчива;
- (чисто) неявная схема безусловно устойчива.

Сходимость

Утверждение

Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.

Контроль точности: если при сгущении сетки наблюдаем сходимость решений к предельной функции, то можно воспользоваться методом Ричардсона.

Постановка

Простейший случай — линейное уравнение для постоянной скорости переноса c

$$u_t(x,\ t) + cu_x(x,\ t) = f(x,\ t),$$
$$c = \mathrm{const} > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Простейшие доп.условия (одно начальное и одно граничное):

$$u(x,\ 0) = \mu(x),\ 0 \leqslant x \leqslant a;$$
$$u(0,\ t) = \mu_1(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Метод замены производных разностями

Введем в G равномерную сетку
$\{x_n = nh,\ 0 \leq n \leq N,\ h = a/N;\ t_k = k\tau,\ k = 1, 2, \ldots\}$.

Трехточечные шаблоны (значение правой части можно брать в любой точке ячейки):

1. Явная схема: $\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + c\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = f_n$.
2. Чисто неявная схема: $\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + c\frac{\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}}{h} = \hat{f}_n$.
3. Неявная схема: $\frac{\hat{u}_{n-1} - u_{n-1}}{\tau} + c\frac{\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}}{h} = \hat{f}_n$.

Четырехточечный шаблон: Симметричная (неявная) схема:
$\frac{\hat{u}_n + \hat{u}_{n-1} - u_n - u_{n-1}}{\tau} + c\frac{\hat{u}_n + u_n - \hat{u}_{n-1} - u_{n-1}}{h} = 2f\left(x_n + \frac{h}{2},\ t_k + \frac{\tau}{2}\right)$.

Характеристики схем

1. Явная схема: аппроксимация $O(\tau + h)$, условно устойчива с условием $\frac{c\tau}{h} \leqslant 1$
2. Чисто неявная схема: аппроксимация $O(\tau + h)$, безусловно устойчива
3. Неявная схема: аппроксимация $O(\tau + h)$, условно устойчива с условием $\frac{c\tau}{h} \geqslant 1$
4. Симметричная схема: аппроксимация $(O(\tau^2 + h^2)$, безусловно устойчива

Задание 15

Исследовать устойчивость разностных схем.

- Выполнить вычисления при соблюдении условий устойчивости
- Посмотреть на поведение решения при несоблюдении условий устойчивости. Для наглядности лучше рассмотреть несколько вариаций: когда условие устойчивости не соблюдается чуть-чуть, когда немного побольше, когда сильно не соблюдается.

Результаты выводить либо графически (поверхность) — предпочтительно, либо численно (матрицу значений).

Уравнение и начальное и граничное условия придумать самостоятельно.