Задание 6. Краевая задача. Сеточные методы

Санкт-Петербургский государственный университет

28 февраля 2025

Постановка краевой задачи [2]

Задача отыскания частного решения системы

$$\frac{d}{dx}u_k(x) = f_k(x,\, u_1,\, u_2, \ldots,\, u_p),\; 1 \le k \le p,\;\; a \le x \le b,$$

где дополнительные условия налагаются на значения функции $u_k(x)$ более чем в одной точке отрезка.

В краевых задачах аргумент интерпретируется как пространственная переменная, обозначается через x.

Пример (прогиб струны):

$$u_{xx} + q(x)u_x - r(x)u = f(x),\;\; a < x < b.$$

Если концы струны закреплены на определенной высоте, то граничные условия имеют вид

$$u(a) = \alpha,\;\; u(b) = \beta.$$

Это краевые условия первого рода.

Методы решения

Примеры численных методов:

- сеточный метод
- метод стрельбы

Примеры приближенных методов:

- разложение в ряды Фурье
- проекционные методы (Ритца, Галеркина, моментов, коллокаций...)

Идея сеточных методов

1. Выбрать сетку $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$.
2. Заменить все производные в уравнении разностными соотношениями, использующими значения решения в узлах сетки $u_n = u(x_n)$.
   Дифференциальное уравнение переходит в разностное — **разностная схема**, совокупность всех входящих в уравнение узлов — **шаблон** разностной схемы.
3. Доказать существование решения САУ и вычислить это решение.
4. Доказать сходимость сеточного решения к точному при сгущении сетки.
5. С помощью сгущения сетки построить сеточное решение с заданной точностью.

Пример. Струна: $u_{xx} + q(x)u_x - r(x)u = f(x),\ a \leqslant x \leqslant b.$

Возьмем равномерную сетку:

$$x_n = a + nh,\ 0 \le n \le N,\ h = \frac{b-a}{N}.$$

Для аппроксимации второй производной в схеме будем брать по три соседних узла: $n-1$, n, $n+1$. Используя симметричные разностные выражения, получаем схему для внутренних узлов:

$$\frac{1}{h^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \frac{q_n}{2h}(u_{n+1} - u_{n-1}) - r_n u_n = f_n,\ 1 \le n \le N-1,$$

где $r_n = r(x_n)$, $q_n = q(x_n)$, $f_n = f(x_n)$; u_n — приближенное решение в узлах x_n.

Это система из $N-1$ уравнения с $N+1$ неизвестным. Доопределим из граничных условий:

$$u_0 = \alpha,\ u_N = \beta.$$

Получилась СЛАУ с трехдиагональной матрицей.

Теоретическое замечание

Утверждение. Пусть $q(x)$, $r(x)$, $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, а $r(x) \geq m > 0$. Пусть h достаточно мало, так что $h \max |q(x)| \leq 2$. Тогда разностное решение существует и отличается от точного в норме c (максимум модуля) на величину $O(h^2)$.

Это не необходимые условия. Поэтому часто, даже если условия не соблюдены, разностное решение может существовать и сходится к точному.

Решение трехдиагональной СЛАУ порядка N методом прогонки [1, 3]

Матрица системы $Az = b$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill} & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} & 0 & a_{N,N-1} & a_{N,N}
\end{pmatrix}$$

Или в общем виде:

$$a_i z_{i-1} - b_i z_i + c_i z_{i+1} = d_i,\ 1 \leq i \leq N,$$
$$a_1 = c_N = 0.$$

Прямой ход метода Гаусса для такой матрицы = исключение элементов a_i.
В результате получится треугольная система, содержащая в каждом уравнении только z_i и z_{i+1}. Поэтому формулы обратного хода будут иметь вид

$$z_i = \xi_{i+1} z_{i+1} + \eta_{i+1}, \; i = N, N-1, \ldots, 1. \quad // \; z_{N+1} = 0$$

Подставим в уравнение общего вида:

$$a_i(\xi_i z_i + \eta_i) - b_i z_i + c_i z_{i+1} = d_i$$

$$\Rightarrow \; z_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \xi_i} z_{i+1} + \frac{a_i \eta_i - d_i}{b_i - a_i \xi_i}.$$

Приравняем коэффициенты и получим формулы прямого хода:

$$\xi_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i \xi_i}, \; \eta_{i+1} = \frac{a_i \eta_i - d_i}{b_i - a_i \xi_i}, \; i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\xi_1 = \eta_1 = 0.$$

Если заданы другие краевые условия? [3]

Общий вид граничных условий:

$$\alpha_1 u(a) - \alpha_2 u'(a) = \alpha, \ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \ \alpha_1\alpha_2 \geq 0,$$
$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \beta, \ |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \ \beta_1\beta_2 \geq 0.$$

Можно аппроксимировать так:

$$\alpha_1 u_0 - \alpha_2 \frac{u_1 - u_0}{h} = \alpha, \ \beta_1 u_N + \beta_2 \frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta.$$

Но это первый порядок аппроксимации! (На внутренних узлах был второй)

А чтобы был второй порядок?

Для второго порядка аппроксимации граничных условий [2, 3]

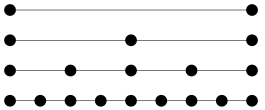
Если хочется, чтобы матрица системы осталась трехдиагональной: ввести сдвинутую на полинтервала сетку и использовать симметричную формулу для аппрокцимации первой производной.
Сдвинутая сетка: $x_0 = a - h/2$; $x_{N+1} = b + h/2$; $x_i = a + ih/2$, $i = 1, 2, \ldots, N$; $h = (b-a)/N$.
Аппроксимация:

$$\alpha_1 \frac{u_0 + u_1}{2} - \alpha_2 \frac{u_1 - u_0}{h} = \alpha, \;\; \beta_1 \frac{u_{N+1} + u_N}{2} + \beta_2 \frac{u_{N+1} - u_N}{h} = \beta.$$

Если трехдиагональность не критична: воспользоваться другими разностыми формулами (с большим количеством узлов), дающими нужный порядок. Например,

$$u_0' \approx \left(-\tfrac{3}{2}u_0 + 2u_1 - \tfrac{1}{2}u_2\right)/h, \;\; u_N' \approx \left(\tfrac{3}{2}u_N - 2u_{N-1} + \tfrac{1}{2}u_{N-1}\right)/h.$$

Контроль точности [2]



Для гарантий оценки погрешности расчета — глобальное сгущение сетки. Способ основан на методе Ричардсона.

– Строим последовательность равномерных сеток с шагами h, $h/2$, $h/4, \ldots$

– Решаем задачу по выбранной схеме на каждой сетке

– Рассматриваем решения на двух соседних сетках: $v_1(x)$ и более мелкой $v_2(x)$

По правилу Ричардсона оценка погрешности $v_2(x)$: $\Delta(x) = \frac{v_2(x)-v_1(x)}{r^p-1}$, r — коэффициент сгущения сетки (здесь 2), p — теоретический порядок точности численного метода. Отсюда уточненное решение

$$\tilde{v}_2(x) = v_2(x) + \Delta(x),$$

для нечетных узлов используется среднее: $\Delta(x_{2n+1}) = (\Delta(x_{2n}) + \Delta(x_{2n+2}))/2$.

Контроль точности

Анализировать погрешность в каждом узле нецелесообразно. Лучше рассматривать нормы погрешности:

$$\|\Delta\|_C = \max_{1\le n\le N} |\Delta(x_n)| \qquad \|\Delta\|_{l_2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \Delta^2(x_n)}$$

N — количество точек сетки

Как достичь точности ε?

- Вычисляем решения на первой и второй сетках; считаем нормы.
- while{ Если они меньше ε, останавливаемся. Иначе: сгущаем вторую сетку, вычислем решение на ней, считаем погрешность для новой пары сеток (второй и третьей, третьей и четвертой и т.д.).}

Итоговая погрешность относится к неуточненному решению на последней сетке. $\Rightarrow$

- Уточняем последнее решение и выдаем в качестве ответа;
- а последнюю погрешность — как заведомо завышенную оценку точности ответа.

Визуализация

- Отображение на графике зависимости погрешности от h (или от $N \sim \frac{1}{h}$).
- Поскольку асимптотика погрешности степенная, то рекомендуется использовать двойной логарифмический маштаб: $\log_{10} N$ — по оси абсцисс, $\log_{10} \|\Delta\|$ — по оси ординат.
- При увеличении N должен быть выход на асимптотику $\Leftrightarrow$ приближение к линиям с наклоном $\mathrm{tg}(\alpha) = -p$.
- Если на графике четкий выход на теоретический наклон, то останавливаемся, достигнув точности ε.
- На подробных сетках погрешность может перестать убывать $\Leftrightarrow$ расчет вышел на ошибки округления.

Идея стрельбы [4, 1]

На примере простейшей задачи

$$u_{xx} + q(x)u_x - r(x)u = f(x),\ a < x < b; u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta.$$

- Вместо краевых условий на разных границах — поставим два условия на левом конце: $u(a) = \alpha$ и $\frac{du(a)}{dx} = \gamma$, где γ — просто какое-то.
- И это получается задача Коши.
- Решаем любым способом.
- Если на правом конце полученное $u(b)$ будет $\neq \beta$, то, значит, «промазали» $\Rightarrow$ меняем γ и повторяем процесс.
- До тех пор, пока не получим $u(b) \approx \beta$.

Анализ идеи стрельбы

Выбирать новое γ можно по-разному. Например, если при γ_1 было $u(b) > \beta$, а при γ_2 было $u(b) < \beta$, то новое можно взять как $\gamma_3 = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$.
Возможные недостатки:

- Трудно применять к уравнениям высоких порядков, когда на каждой границе много условий. «Пристреливать» несколько параметров одновременно эффективно трудно.
- Краевая задача может быть хорошо обусловленной, а получающаяся задача Коши — плохо обусловленной.

Часть авторов полагают, что стрельба устарела, и лучше применять разностные методы. Часть считают, что если можно стрелять, то нужно стрелять (Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков).

Задание 6 — численное решение краевой задачи

Реализовать решение ОДУ сеточным методом.

- Можно построить уравнение самостоятельно, взяв известное $u(x)$. (и тут сразу будет ясно, к какому ответу нужно прийти).
- Начинать вычисления с грубой сетки; измельчать сетку и уточнять по Ричардсону. В идеале — до момента выхода на ошибки округления. Отследить, какая точность достигнута при каком шаге сетки.
- Выводить полученное приближение. Можно на картинке.

Доп.задание на 15 баллов: реализовать метод стрельбы. Сравнить результат с сеточным методом.

[1] Калиткин Н.Н. Численные методы. 1978.

[2] Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. Книга 2. 2013.

[3] Пакулина А.Н. Практикум по методам вычислений. Часть 2. 2019.

[4] Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков, т. 2, 2004.