Задание 7. Краевая задача. Проекционные методы [Задание 15. Исследование устойчивости разностных схем на примере уравнения переноса]

Санкт-Петербургский государственный университет

14 марта 2025

[1] Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1987.

— понятное изложение проекционных идей и методов коллокации, Галеркина...

[2] Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002.

— отличный учебник, понятное и с математикой изложение (всего); есть описание идеи вариационных методов, в частности метода Ритца

[3] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. 1994.

— материал представлен в другом порядке (сначала варианционные, а потом уже проекционные методы); можно почитать для сравнения

[4] Пакулина А.Н. Практикум по методам вычислений. Часть 2. 2019.

— если не придумать условия для задания 7 (уравнения и координатные системы), то их можно подсмотреть тут; читать теорию лучше не надо

[5] Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. Книга 2. 2013.

— для задания 15 (а также 8 и 9); разумное описание идей устойчивости

[6] Калиткин Н.Н. Численные методы. 1978.

— также для задания 15; для сравнения произошедших в подаче материала изменений

Решаем задачу

$$
\begin{gathered}
Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \;\; a \leqslant x \leqslant b, \\
\ell_0 u \equiv \alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = \gamma_0, \\
\ell_1 u \equiv \alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_1,
\end{gathered}
$$

где p, q, $f \in C[a,\, b]$; α_i, β_i, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$.

- Если $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$ — краевое условие первого рода.
- Если $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$ — краевое условие второго рода.
- Если $\alpha_i \neq 0$, $\beta_i \neq 0$ — краевое условие третьего рода;

Чтобы существовало единственное решение неоднородной краевой задачи, необходимо и достаточно, чтобы однородная краевая задача

$$
\begin{gathered}
Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = 0, \;\; a \leqslant x \leqslant b, \\
\ell_0 u \equiv \alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = 0, \;\; \ell_1 u \equiv \alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0
\end{gathered}
$$

имела только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.

Проекционная идея [1]

1. На отрезке $[a,\ b]$ задаем некоторую линейно независимую систему (*базисную*) $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty} \in C^2[a,\ b]$:

$$\ell_0\varphi_0 = \gamma_0,\ \ell_1\varphi_0 = \gamma_1,$$
$$\ell_0\varphi_i = 0,\ \ \ell_1\varphi_i = 0,\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots$$

2. Составляем линейную комбинацию $u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{k=n} a_k\varphi_k(x)$.
3. Опеределяем невязку $\psi(x;\ a_1,\ \ldots,\ a_n) \equiv Lu_n(x) - f(x)$.
4. Хотим от ψ чего-то хорошего (если не равенства нулю, то минимальности). Тогда u_n принимают за приближенное решение краевой задачи.

Методы различаются способами нахождения коэффициентов $a_1,\ \ldots,\ a_n$.

Метод коллокации

В интервале (a, b) задают n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (*точки коллокации*) и требуют в них равенства нулю невязки:

$$\psi(x_1; a_1, \ldots, a_n) = 0, \ \ldots, \ \psi(x_n; a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Т.е. для нахождения коэффициентов $\{a_i\}$ имеем систему:

$$\begin{gathered} a_1 L\varphi_1(x_1) + \ldots + a_n L\varphi_n(x_1) = f(x_1) - L\varphi_0(x_1), \\ a_1 L\varphi_1(x_2) + \ldots + a_n L\varphi_n(x_2) = f(x_2) - L\varphi_0(x_2), \\ \vdots \\ a_1 L\varphi_1(x_n) + \ldots + a_n L\varphi_n(x_n) = f(x_n) - L\varphi_0(x_n). \end{gathered}$$

Интегральный метод наименьших квадратов

Хотим, чтобы интеграл

$$I = \int_a^b \psi^2(x;\, a_1,\, \ldots,\, a_n)dx$$

принимал минимальное значение.
Для этого необходимо, чтобы $\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial a_i} = \int_a^b \psi \frac{\partial \psi}{\partial a_i} dx = 0,\ \ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$
Отсюда для коэффициентов $\{a_i\}$ имеем систему:

$$\begin{gathered}
a_1(L\varphi_1,\, L\varphi_1) + \ldots + a_n(L\varphi_n,\, L\varphi_1) = (f - L\varphi_0, L\varphi_1)\\
a_1(L\varphi_1,\, L\varphi_2) + \ldots + a_n(L\varphi_n,\, L\varphi_2) = (f - L\varphi_0, L\varphi_2)\\
\vdots\\
a_1(L\varphi_1,\, L\varphi_n) + \ldots + a_n(L\varphi_n,\, L\varphi_n) = (f - L\varphi_0, L\varphi_n)
\end{gathered}$$

где $(f,\, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ — скалярное произведение.

Метод подобластей

Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Коэффициенты $\{a_i\}$ находятся из системы

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi(x;\, a_1,\, \ldots,\, a_n) dx = 0,\ \ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Метод Галеркина

Требуем ортогональности базисных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ к невязке, т.е.: $\int_a^b \psi(x;\, a_1, \ldots, a_n) \cdot \varphi_i(x) dx = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$
Для коэффициентов $\{a_i\}$ получаем систему:

$$
\begin{gathered}
a_1(L\varphi_1,\, \varphi_1) + \ldots + a_n(L\varphi_n,\, \varphi_1) = (f - L\varphi_0, \varphi_1) \\
a_1(L\varphi_1,\, \varphi_2) + \ldots + a_n(L\varphi_n,\, \varphi_2) = (f - L\varphi_0, \varphi_2) \\
\vdots \\
a_1(L\varphi_1,\, \varphi_n) + \ldots + a_n(L\varphi_n,\, \varphi_n) = (f - L\varphi_0, \varphi_n)
\end{gathered}
$$

где $(f,\, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$ — скалярное произведение.

Идея

Пусть хотим найти приближенное решение уравнения

$$Ly = f,$$

где $L : D(L) \subseteq H \to H$ — линейный оператор, H — вещественное гильбертово пространство.
Предполагаем (накладывая ограничения на оператор L), что уравнение имеет единственное решение y^*.

Этому уравнению сопоставляется какой-нибдь функционал $J[y] : H \to \mathbb{R}$, ограниченный снизу и достигающий минимума в единственной точке y^*.

Тогда вместо уравнения будем решать задачу

$$J[y] \to \min, \;\; y \in D(L).$$

Можно менять: функционалы, смысл приближенного решения, процесс получения приближений.

Метод наименьших квадратов

Оператору L сопоставляется функционал $J[y]$ вида

$$J[y] := \|Ly - f\|^2 = (Ly,\, Ly) - 2(Ly,\, f) + \|f\|^2.$$

Энергетический метод

Рассматривают функционал энергии:

$$J[y] := (Ly, y) - 2(y, f).$$

Требования к оператору L — симметричность и положительная определенность.

Метод Ритца (разновидность энергетического метода)

L — симметричный, положительно определенный
$(Lu, v) = (u, Lv)$, $\forall u, v \in D(L)$ и $\exists \gamma > 0: \ (Lu, u) \geqslant \gamma \|u\|^2 \ \forall u \in D(L)$
На элементах $D(L)$ вводится энергетическое скалярное произведение (и соответствующая энергетическая норма)

$$[u, v] := (Lu, v) \ \forall u, v \in D(L); \ \left|\!\left|\!\left| u \right|\!\right|\!\right| := \sqrt{[u, u]}.$$

Пространство дополняется до полного, получаем H_L — энергетическое пространство (причем, если $u \in H_L$, то $u \in H$).
В H_L выбирается последовательность элементов (координатные элементы) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$:

- $\forall n$ элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы;
- выбранная система полна по энергии

$$\forall u \in H_L \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \exists \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_0} | \alpha_k \in \mathbb{R}\} : \left|\!\left|\!\left| u - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k \right|\!\right|\!\right| < \varepsilon.$$

Метод Ритца, продолжение

Приближенное решение ищется в виде $u_n = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$, где c_i — коэффициенты линейной комбинации n первых координатных элементов подбираются так, чтобы

$$J[u_n] = \min_{c_j\in\mathbb{R}} J\left[\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i\right].$$

Т.е. имеем задачу минимизации функции n переменных:

$$F(c_1, \ldots, c_n) := J\left[\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i\right] = \left(L\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i, \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i\right) - 2\left(\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i, f\right).$$

Что равносильно задаче решения СЛАУ:

$$\begin{gathered} c_1(L\varphi_1, \varphi_1) + \ldots + c_n(L\varphi_1, \varphi_n) = (\varphi_1, f) \\ c_1(L\varphi_2, \varphi_1) + \ldots + c_n(L\varphi_2, \varphi_n) = (\varphi_2, f) \\ \vdots \\ c_1(L\varphi_n, \varphi_1) + \ldots + c_n(L\varphi_n, \varphi_n) = (\varphi_n, f) \end{gathered}$$

Технические замечания

- В качестве узлов коолокации можно брать разное: равноотстоящие узлы, корни многочлена Чебышева, т.п.
- В качестве координатных элементов в методе Ритца можно брать многочлены Якоби.
- Для соблюдений краевых условий дополнив их чем нужно.
- Формулы есть в [4].

Задание 7. Проекционные методы для краевой задачи для ОДУ

- Реализовать один проекционный и один вариационный методы. Для разных n.
- Попробовать сравнить.

Постановка задач [5]

Уравнения в частных производных, интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения.

Независимые переменные обычно: время (t), координаты $(\mathbf{r})$.

Решение стационарной задачи ищется в пространственной области $G(\mathbf{r})$ с границей Γ; область может быть неограниченной. Нестационарные задачи обычно решаются в области $G(\mathbf{r}) \times [0 \leqslant t \leqslant T]$. Но возможны и другие границы области.

Полная постановка задачи — дифференциальное уравнение и дополнительные условия.
$\Rightarrow$ краевые задачи (стационарные), задачи Коши, смешанно-краевые или начально краевые (нестационарные).

Идея

- В области $G(x, y)$ вводят сетку.
- Все производные в уравнении и краевых условиях заменяют разностями значений функции $u(\mathbf{r}, t)$ в узлах сетки.

Получающиеся уравнения = разностная схема.
Решая, находим приближенное (разностное) решение в узлах сетки.

Методы, близкие к разностным

Метод прямых:

- Сетка только для пространственных переменных; время непрерывно.
- Производные по дискретным переменным заменяются разностями.

Т.е. уравнение в частных производных аппроксимируется дифференциально-разностными уравнениями. Имеем систему большого числа ОДУ. Решаем схемами интегрирования по времени.

Метод конечных элементов.
Разложение по пространственным базисным функциям на конечных носителях (например, сплайны).
Коэффициенты находят методами Ритца или Галеркина.

Но фактически всё равно получаем некоторые разностные схемы.

Одномерные задачи

Пространственная область — отрезок $G(x) = [0 \leqslant x \leqslant a]$.
Пространственно-временна́я область — прямоугольник $[0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant T]$.
$\Rightarrow$ Сетка строится естественно:

- пространственная сетка $\{x_n,\ 0 \leqslant n \leqslant N; x_0 = 0,\ x_N = a\}$; шаг $h_n = x_n - x_{n-1}$;
- временна́я сетка $\{t_k,\ 0 \leqslant k \leqslant K; t_0 = 0,\ t_K = T\}$; шаг $\tau_k = t_{k+1} - t_k$.

Каждая из сеток может не быть равномерной. Ячейка — прямоугольник $[x_{n-1},\ x_n;\ t_k,\ t_{k+1}]$.

Совокупность всех узлов, лежащих на линии $t = t_k$ — *слой*.
Линия $t = t_0$ — начальный слой.

Пространственные точки $x_0 = 0$ и $x_N = a$ — граничные, остальные — внутренние.

В разностную схему могут входить величины из нескольких соседних ячеек.
Но если входят только из одной — это бикомпактная схема.

Стационарные задачи

Если область G прямоугольник, то и сетка прямоугольная. Может быть неравномерной.

Если $\Gamma(G)$ — деформированный прямоугольник, то строят два семейства линий, похожих на соответствующие границы области. Это *регулярные* сетки. Каждая ячейка похожа на деформированный прямоугольник. Лучше, если семейства линий взаимно ортогональны.

Если граница произвольной формы, то какие-то узлы размещают на границе, а внутри строят сетку с ячейками треугольной формы. Это *нерегулярные* сетки.

Шаблон

Мы внутри области заменяем разностной схемой только само уравнение в частных производных.

И используем для этого одну и ту же конфигурацию узлов — *шаблон*, которую можно соотнести некоторому узлу; *регулярный* узел.

В граничных узлах нужно учитывать граничное условие, приходится видоизменять стандартный шаблон — это *нерегулярные* узлы.

Явные и неявные схемы

Бо́льшая часть задач — содержит время (производную по времени).
$\Rightarrow$ Разностная схема должна включать значения с нескольких слоев.
Если в уравнении только первая производная, то в схеме обычно два слоя: исходный t_k и новый $t_k + \tau$.
Если есть вторая производная, то нужны 3 слоя: ещё и предыдущий $t_k - \tau$.
Обозначения:

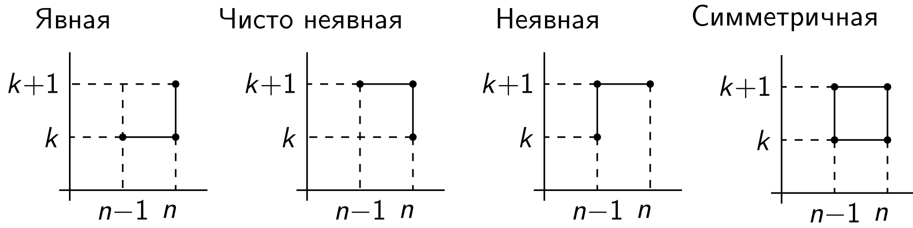
$$u(x_n, t_k) = u_n, \; u(x_n, t_k + \tau) = \hat{u}_n, \; u(x_n, t_k - \tau) = \check{u}_n.$$

Явная схема = шаблон содержит только одну точку нового слоя.
Неявная схема = шаблон содержит несколько точек нового слоя. $\Rightarrow$
Для нахождения решения на новом слое в общем случае нужно решать систему (но в уравнении переноса можно обойтись!).

Составление схем на примере

Уравнение переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,\ t)$, $c = \mathrm{const} > 0$.

Метод разностной аппроксимации.



Второй способ

Интегро-интерполяционный метод/метод баланса.
Применим к уравнениям с негладкими/разрывными коэффициентами.
Уравнение выше первой степени заменяем эквивалентной системой уравнений с первыми производными.
Сетку строим так, чтобы все точки разрыва коэффициентов были узлами.
Интегрируем по ячейке и точно берем интегралы от производных $\Rightarrow$ соотношение = интегральный закон сохранения

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} (\hat{u} - u)dx + c\int_t^{\hat{t}} (u_u - u_{n-1})dt = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_t^{\hat{t}} f\,dt\,dx.$$

Внутри ячейки всё гладко, поэтому можно пользоваться любой квадратурной формулой.
По формуле правых прямоугольников получим неявную схему (см. ранее).

Аппроксимация

Близость разностной схемы к исходному уравнению опеределяется по величине невязки ψ в узлах сетки.

Разностная схема аппроксимирует дифференциальное уравнение, если $\|\psi\| \to 0$ при $h \to 0$.
Аппроксимация имеет порядок p, если $\|\psi\| = O(h^p)$ при $h \to 0$.
Используемые нормы:

$$\|\psi\|_c = \max_{0 \leqslant n \leqslant N} |\psi_n|, \quad \|\psi\|_{l_2} = \left(\sum_n h_n \psi_n^2 / \sum_n h_n \right)^{1/2}.$$

Дают локальную и среднеквадратичную аппроксимации соответственно.

Многомерность

В многомерных сетках могут быть разные шаги по разным переменным $(h, \tau, \ldots)$.
Тогда в определении аппроксимации надо требовать $h \to 0$, $\tau \to 0$.

И порядок может быть разным. Например, $\|\psi\| = O(\tau^p + h^q)$.
Тут $\|\psi\| \to 0$ при любых законах стремления τ и h к нулю.
Это **безусловная** аппроксимация.

А если $\|\psi\| = O(\tau^p + h^q + \tau^r/h^s)$, то нужно ещё дополнительное условие $\tau^r/h^s \to 0$.
Это **условная** аппроксимация.

Устойчивость. Пример неустойчивости

Явная схема для уравнения переноса без правой части:

$$(\hat{u}_n - u_n)/\tau + c(u_n - u_{n-1})/h = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \hat{u}_n = (1-\kappa)u_n + \kappa u_{n-1},\ \ \kappa = c\tau/h.$$

Если u_{n-1} вычисляется с ошибкой — δu_{n-1}, то и новое значение будет с ошибкой: $\delta\hat{u}_n = \kappa\delta u_{n-1}$. Т.е. при переходе на новый слой ошибка изменилась в κ раз.

Мораль: если соотношение τ и h таково, что $\kappa > 1$, то сгущение сетки не приведет к точному решению.
Это явление *неустойчивости.*

Неустойчивость. Основные понятия

Пусть на сетке ω_N есть схема $B(v(x)) = \Phi(x)$. B — разностный оператор; $v(x)$ — численное решение, Φ — видоизмененная правая часть (определены только на сетке).
Каковы свойства схемы, чтобы в ней не возникало неустойчивости?
Внесем в правую часть ошибку $\delta\Phi(x)$ и найдем сеточное решение:

$$B(v(x) + \delta v(x)) = \Phi(x) + \delta\Phi(x).$$

Схема называется *устойчивой*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$, не зависящее от шага h, что

$$\|\delta\Phi\| < \delta \Rightarrow \|\delta v\| < \varepsilon.$$

Т.е. $\delta v(x)$ непрерывно зависит от $\delta\Phi(x)$. Устойчивость не зависит от дифференциального уравнения; является внутренним свойством самой схемы.

Многомерный случай

Устойчивость называется **безусловной**, если неравенство выполняется при произвольном соотношении шагов по различным переменным. Иначе (если шаги по разным переменным должны удовлетворять дополнительным соотношениям) устойчивость называется **условной**.

Для уравнения переноса:

- явная схема условно устойчива;
- (чисто) неявная схема безусловно устойчива.

Сходимость

Утверждение

Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.

Контроль точности: если при сгущении сетки наблюдаем сходимость решений к предельной функции, то можно воспользоваться методом Ричардсона.

Постановка

Простейший случай — линейное уравнение для постоянной скорости переноса c

$$u_t(x,\ t) + cu_x(x,\ t) = f(x,\ t),$$
$$c = \mathrm{const} > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Простейшие доп.условия (одно начальное и одно граничное):

$$u(x,\ 0) = \mu(x),\ 0 \leqslant x \leqslant a;$$
$$u(0,\ t) = \mu_1(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Метод замены производных разностями

Введем в G равномерную сетку
$\{x_n = nh,\ 0 \leqslant n \leqslant N,\ h = a/N;\ t_k = k\tau,\ k = 1, 2, \ldots\}$.

Трехточечные шаблоны (значение правой части можно брать в любой точке ячейки):

1. Явная схема: $\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + c\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = f_n$.
2. Чисто неявная схема: $\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + c\frac{\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}}{h} = \hat{f}_n$.
3. Неявная схема: $\frac{\hat{u}_{n-1} - u_{n-1}}{\tau} + c\frac{\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}}{h} = \hat{f}_n$.

Четырехточечный шаблон: Симметричная (неявная) схема:
$\frac{\hat{u}_n + \hat{u}_{n-1} - u_n - u_{n-1}}{\tau} + c\frac{\hat{u}_n + u_n - \hat{u}_{n-1} - u_{n-1}}{h} = 2f\left(x_n + \frac{h}{2},\ t_k + \frac{\tau}{2}\right)$.

Характеристики схем

1. Явная схема: аппроксимация $O(\tau + h)$, условно устойчива с условием $\frac{c\tau}{h} \leqslant 1$
2. Чисто неявная схема: аппроксимация $O(\tau + h)$, безусловно устойчива
3. Неявная схема: аппроксимация $O(\tau + h)$, условно устойчива с условием $\frac{c\tau}{h} \geqslant 1$
4. Симметричная схема: аппроксимация $O(\tau^2 + h^2)$, безусловно устойчива

Задание 15

Исследовать устойчивость разностных схем.

- Выполнить вычисления при соблюдении условий устойчивости
- Посмотреть на поведение решения при несоблюдении условий устойчивости. Для наглядности лучше рассмотреть несколько вариаций: когда условие устойчивости не соблюдается чуть-чуть, когда немного побольше, когда сильно не соблюдается.

Результаты выводить либо графически (поверхность) — предпочтительно, либо численно (матрицу значений).

Уравнение и начальное и граничное условия придумать самостоятельно.