Задание 8. Уравнение теплопроводности
Задание 9. Эллиптическое уравнение

Санкт-Петербургский государственный университет

21 марта 2025

Слова про решение на сетках

Нужно осознавать про:

- слой; шаблон;
- безусловную и условную аппроксимацию;
- безусловную и условную устойчивость;
- в итоге про сходимость.

Всё вот это описано в теории к заданию 15.

Постановка

Простейший случай — линейное уравнение для однородной среды, заданное в ограниченной области:

$$u_t(x,\ t) = \kappa u_{xx}(x,\ t) + f(x,\ t),$$
$$\kappa = \mathrm{const} > 0,\ 0 < x < a,\ 0 < t \leqslant T.$$

Простейшие доп.условия (одно начальное и два граничных):

$$u(x,\ 0) = \mu(x),\ 0 \leqslant x \leqslant a;$$
$$u(0,\ t) = \mu_1(t),\ u(a,\ t) = \mu_2(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Особенность уравнения: разрывы начальных и граничных данных быстро сглаживаются.

Метод прямых; $u_t(x, t) = \kappa u_{xx}(x, t) + f(x, t)$

Введем в G равномерную сетку
$\{x_n = nh,\ 0 \leqslant n \leqslant N,\ h = a/N;\ t_k = k\tau,\ k = 1, 2, \ldots\}$.
Рассмотрим шаблон на трех точках: x_{n-1}, x_n, x_{n+1}.
Заменим в уравнении пространственную производную второй разностью; производную по времени сохраним.
$\Rightarrow$ Уравнение заменится системой для узлов $u_n(t) = u(x_n, t)$:

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{\kappa}{h^2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + f_n(t),\ f_n(t) = f(x_n, t),\ 1 \leqslant n \leqslant N - 1.$$

Это система для внутренних узлов. Плюс граничные условия:

$$u_0(t) = \mu_1(t),\ u_N = \mu_2(t);\ u_n(0) = \mu(x_n),\ 1 \leqslant n \leqslant N - 1.$$

Схема с весами [2]

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{\kappa}{h^2}\left[\sigma(\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}) + (1-\sigma)(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1})\right] +$$
$$+ f\left(x_n,\, t + \sigma\tau\right).$$

Значения на новом слое — с весом σ,
значения на старом слое — с весом $1 - \sigma$.

Чисто неявная схема: $\sigma = 1$

Традиционная форма записи:

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{\kappa}{h^2}(\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}) + f(x_n, \hat{t}).$$

Имеет аппроксимацию $O(\tau)$.
С учетом пространственной невязки получаем полную аппроксимацию $O(\tau + h^2)$.

Схема безусловно устойчива по начальным данным.
Равномерно устойчива по начальным данным и устойчива по правой части.

Т.е. сходится с точностью $O(\tau + h^2)$.

Схема с «полусуммой»: $\sigma = 1/2$

Традиционная форма записи:

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{\kappa}{2h^2}\left[(\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}) + (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1})\right] + f\left(x_n,\ t + \tfrac{\tau}{2}\right).$$

Имеет аппроксимацию по времени $O(\tau^2)$.
Т.е. полная аппроксимация будет равна $O(\tau^2 + h^2)$.

Схема безусловно устойчива по начальным данным.
Равномерно устойчива по начальным данным и устойчива по правой части.

$\Rightarrow$ Сходится с точностью $O(\tau^2 + h^2)$.

Явная схема: $\sigma = 0$

Традиционная форма записи:

$$\frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} = \frac{\kappa}{h^2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + f\left(x_n,\, t\right).$$

Аппроксимация $O(\tau + h^2)$.
Для устойчивости должно выполняться условие $2\kappa\tau \leqslant h^2$.

Т.е. схема лишь условно устойчива.

Замечание об асимптотической устойчивости

Как ведут себя схемы при $t \to \infty$?

- Чисто неявная схема асимптотически безусловно устойчива.
- Схема с «полусуммой» асимптотически условно устойчива (условие устойчивости: $\pi\kappa\tau \leqslant ah$).
- Явная схема для расчета на большие времена непригодна.

Задание 8 — решение уравнения теплопроводности методом сеток

Реализовать решение уравнения теплопроводности по двум схемам: одной из неявных и явной.

Посмотреть на поведение решения по явной схеме при несоблюдении условий устойчивости. (Для наглядности лучше рассмотреть несколько вариаций: когда условие устойчивости не соблюдается чуть-чуть, когда немного побольше, когда сильно не соблюдается.)

Результаты выводить либо графически (поверхность) — предпочтительно, либо численно (матрицу значений).

Эллиптическое уравнение [1, 2]

Задача:

$$-Lu = f(x,\,u), \quad (x,\,u) \in G,$$

$$u = \mu(x,\,y), \quad (x,\,y) \in \Gamma(G).$$

Пусть у нас $\overline{G} = \{0 \leqslant x \leqslant \ell_x,\, 0 \leqslant y \leqslant \ell_y\}$ — прямоугольник. А оператор

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,\,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(q(x,\,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

или

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Строим сетку: равномерную по каждому направлению; с шагами h_x и h_y.

В узлах сетки на границе области значения искомой функции заданы; надо найти значения во всех внутренних узлах.

Разностная аппроксимация

Идея стандартна: все производные заменяем разностными отношениями.

Вот так:
$L_h u_{ij} = p_{i+\frac{1}{2},j}\frac{u_{i+1,j}-u_{ij}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2},j}\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_x^2} + q_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{h_y^2} - q_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{u_{ij}-u_{i,j-1}}{h_y^2}$

Или так:

$$L_h u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_y^2}$$

О получившейся системе уравнений

В каждой внутренней точке сетки — уравнение.
В каждом уравнении — не более пяти неизвестных:

- в уравнениях, соответствующих угловым точкам — три;
- в уравнениях, соответствующих приграничным (но не угловым) — четыре;
- в остальных — пять.

$\Rightarrow$ Порядок матрицы большой, однако она пятидиагональная.
$\Rightarrow$ Системы с такими матрицами лучше решать итерационными методами.

В [2] описано много методов; есть материал про сходимость.
Также можно воспользоваться уже реализованными функциями (метод Зейделя, например).

Задание 9 — решение эллиптического уравнения

Реализовать решение эллиптического уравнения (для функции двух переменных; с заданными граничными условиями) разностным методом. Систему уравнений решать каким-либо итерационным методом.

Условия:

- лучше задать самостоятельно (взяв $u(x, y)$ и определив $f(x, y)$),
- но можно и где-нибудь подсмотреть.

Хорошо бы использовать (несколько раз, 3–5) сгущающиеся сетки и по методу Ричардсона определять погрешность. Самостоятельно понять как это сделать в двумерном случае :)

[1] Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. Книга 2. 2013.

[2] Пакулина А.Н. Практикум по методам вычислений. Часть 2. 2019.